

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Luís Fernando Salvino

**UM CRITÉRIO DE PRÉ-COMPACIDADE FORTE E O
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DE LEIS DE
CONSERVAÇÃO NOS CONTEXTOS DETERMINÍSTICO E
ESTOCÁSTICO**

Belo Horizonte
2023

Luís Fernando Salvino

**UM CRITÉRIO DE PRÉ-COMPACIDADE FORTE E O
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DE LEIS DE
CONSERVAÇÃO NOS CONTEXTOS DETERMINÍSTICO E
ESTOCÁSTICO**

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Jean Carlos da Silva

Belo Horizonte
2023

Salvino, Luís Fernando.

S185c Um critério de pré-compacidade forte e o comportamento assintótico de soluções de leis de conservação nos contextos determinístico e estocástico [recurso eletrônico] / Luís Fernando Salvino — 2023.

1 recurso online (94 f. il, color.): pdf.

Orientador: Jean Carlos da Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 92 - 94

1. Matemática – Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3. Leis de conservação (Matemática) - Teses. 4. Probabilidade – Teses. I. Silva, Jean Carlos da. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Um critério de pré-compacidade forte e o comportamento assintótico de soluções de leis de conservação nos contextos determinístico e estocástico

LUÍS FERNANDO SALVINO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Jean Carlos da Silva
UFMG

Prof. Gastão de Almeida Braga
UFMG

Prof. Henrique de Melo Versieux
UFMG

Prof. Hermano Frid Neto
USP

Prof. Wladimir Augusto das Neves
UFRJ

Belo Horizonte, 05 de setembro de 2023.

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes"
Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido saúde, por ter me dado força para não desistir e por ter iluminado todos os meus caminhos.

A minha avó, Terezinha, por tudo que fez por mim e por minha família em todos esses anos. Descanse em paz.

Aos meus pais Roseli e Luís Moreti pela herança de vida e formação.

Ao meu orientador, Jean, pela paciência, disposição, aprendizado, incentivo e amizade.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFMG, pelo aprendizado, apoio e eficientes serviços prestados.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

Esse trabalho é dividido em duas partes:

A primeira parte trata de um critério de pré-compacidade forte para uma sequência de medidas de Young limitada $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz a desigualdade

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p) (f(kx, \lambda) - f(kx, p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}.$$

Além disso, faremos uma aplicação de tal critério na homogenização de um problema de Cauchy para leis de conservação escalares não homogêneas.

Na segunda parte, estudamos o decaimento de soluções entrópicas de um problema de Cauchy para leis de conservação escalares homogêneas com dado inicial sendo uma função estacionária composta com uma deformação estocástica ou uma função de Besicovitch ergódica.

Palavras chaves: Pré-compacidade; Fluxo não homogêneo; Homogenização; Leis de conservação; Propriedade de decaimento; Deformação Estocástica; Álgebras Ergódicas.

Abstract

This work is divided into two parts:

The first part deals of a strong precompactness criterion for a sequence of bounded Young measures $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ that satisfies the inequality

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p) (f(kx, \lambda) - f(kx, p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}.$$

Furthermore, we will apply this criterion to the homogenization of a Cauchy problem for non-homogeneous scalar conservation laws.

In the second part, we study the decay of entropy solutions of a Cauchy problem to homogeneous scalar multidimensional conservation laws with initial data being a stationary function composed with a stochastic deformation or an ergodic Besicovitch function.

Keywords: Precompactness; Non-homogeneous flux; Homogenization; Conservation laws; Decay property; Stochastic Deformation; Ergodic Algebras.

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	16
2.1	Teoria da Medida	16
2.2	Contexto Estocástico	19
2.3	Contexto Determinístico	22
2.4	Leis de Conservação	25
2.5	Medidas de Young duas escalas	26
2.6	Uma variante da H-medida	31
2.6.1	H-medida caracterizada por funções auto-mediantes	31
2.6.2	Efeitos de concentração versus natureza de oscilação da H-medida	38
2.6.3	Estudo do suporte da variante da H-medida	47
3	Um Critério de Pré-Compacidade Forte e a Homogenização de Leis de Conservação de Fluxo Não Homogêneo	52
3.0.1	Resultados auxiliares	53
3.1	PROVA DO TEOREMA 3.0.1	59
3.2	PROVA DOS COROLÁRIOS 3.0.2 e 3.0.4	70
4	Decaimento de Soluções Entrópicas de Leis de Conservação Além do Contexto Estacionário Ergódico	72
4.0.1	Resultado auxiliar	73
4.1	PROVA DO TEOREMA 4.0.1	77

5	Decaimento de Soluções Entrópicas de Leis de Conservação em Álgebras Ergódicas	81
5.1	PROVA DO TEOREMA 5.0.1	82
5.2	PROVA DO TEOREMA 5.0.2	87
	Referências	91

Capítulo 1

Introdução

Essa tese está dividida em duas partes:

Na primeira parte, estamos interessados em estabelecer um critério de pré-compacidade forte para uma sequência de medidas de Young limitada $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz a desigualdade

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p) (f(kx, \lambda) - f(kx, p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}, \quad (1.0.1)$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

Para estabelecer hipóteses sobre o fluxo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do problema (1.0.1), para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos o espaço de funções testes

$$S_{ap}^\lambda = \left\{ g \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} f'(y, \lambda) g(y) \cdot \nabla \varphi(y) dy = 0, \forall \varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap \text{AP}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

onde $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Besicovitch que é construído via o completamento com relação a semi-norma induzida pelo valor médio

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^2 dy := \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2L)^n} \int_{[-L,L]^n} |g(y)|^2 dy,$$

em que a função g pertencente ao espaço das funções quase-periódicas $\text{AP}(\mathbb{R}^n)$ (para mais informações, ver seção 1.3 das preliminares).

Para cada $i = 1, \dots, n$, seja $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f = (f_1, \dots, f_n)$. Denotemos por $\partial_y f_i(y, \lambda)$ e $f'_i(y, \lambda)$ as derivadas de f_i com relação a variável espacial y e com relação a variável escalar λ , respectivamente. Além disso, seja $f'(y, \lambda) = (f'_1(y, \lambda), \dots, f'_n(y, \lambda))$ e $\widetilde{f'(\cdot, \lambda)}$ a projeção ortogonal do fluxo $f'(\cdot, \lambda)$ no espaço S_{ap}^λ . Assim, seguem abaixo as hipóteses sobre o fluxo.

– Hipóteses de regularidade:

$$f_i(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \operatorname{div} f(\cdot, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, \dots, n;$$

$$f_i \in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R})) \text{ e } \partial_y f_i, f'_i \in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b(\mathbb{R})), \forall i = 1, \dots, n.$$

– Hipótese de não degeneração:

(1.0.2)

Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e para algum $y_0 \in \mathbb{R}^n$, a função $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \xi \cdot \widetilde{f'(y_0, \lambda)}$ não é identicamente zero em intervalos não degenerados.

A pergunta natural que surge é se existe algum fluxo que satisfaz as hipóteses (1.0.2). Para responder tal questão, consideremos o fluxo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$f(z, \lambda) = (\varphi_1(z)\gamma_1(\lambda), \varphi_2(z)\gamma_2(\lambda), \dots, \varphi_n(z)\gamma_n(\lambda)),$$

onde $\gamma_i \in C^1(\mathbb{R})$ e $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ é linearmente independente e $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap \text{AP}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1(z) = \varphi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \varphi_n(z) = \varphi_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ e $\varphi_i > \delta_0 > 0, \forall i = 1, \dots, n$. Não é difícil ver que f assim definida satisfaz as hipóteses de regularidade dadas em (1.0.2).

Agora, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos um apropriado sistema dinâmico T_t^λ tal que S_{ap}^λ é invariante via T_t^λ (mais informações na subseção 2.0.1 do capítulo 2). Então, utilizando o teorema ergódico de Neumann (ver teorema 2.2.7 nos preliminares), temos

$$\widetilde{\varphi_i(\cdot)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_i(T_s^\lambda(\cdot)) ds > \delta_0 > 0 \text{ em } \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.0.3)$$

Dessa forma, temos que o fluxo projetado toma a forma

$$\widetilde{f(z, \lambda)} = (\widetilde{\varphi_1(z)}\gamma_1(\lambda), \widetilde{\varphi_2(z)}\gamma_2(\lambda), \dots, \widetilde{\varphi_n(z)}\gamma_n(\lambda))$$

e portanto, dado $z_0 \in \mathbb{R}^n$ e $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$, temos que a função

$$\mathbb{R} \ni \lambda \rightarrow \xi \cdot \widetilde{f(z_0, \lambda)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{\varphi_i(z)} \gamma_i(\lambda)$$

não é identicamente zero em intervalos não degenerados.

No caso de fluxos não oscilantes, citamos os excelentes trabalhos de E.Y. Panov [34, 31]. Dessa forma, o diferencial e toda dificuldade desse critério que sugerimos se da pela oscilação no fluxo.

Discutiremos duas aplicações de tal critério de pré-compacidade forte:

A primeira e mais simplória é um resultado análogo ao provado por E.Y. Panov em [36] (pág. 739) e que diz respeito a convergência forte de uma sequência medidas de Young limitada $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz a desigualdade

$$\text{div} \left(\int_p^\infty \text{sgn}(\lambda - p) (\varphi(\lambda) - \varphi(p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R},$$

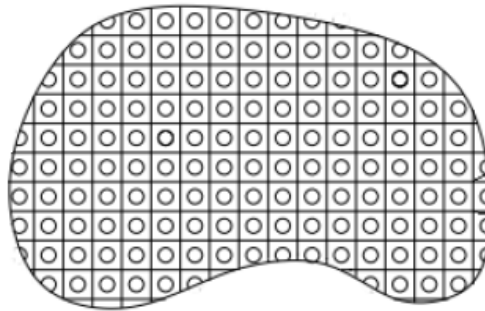
onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as hipóteses (1.0.2).

E a segunda e mais interessante, é estabelecer a homogenização da seguinte lei de conservação

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \text{div} f\left(\frac{x}{\epsilon}, u_\epsilon\right) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u_\epsilon(0, x) = u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é uma sequência de soluções entrópicas, o fluxo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as hipóteses (1.0.2) e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \text{AP}(\mathbb{R}^n))$.

A homogenização é o estudo das propriedades de um certo meio utilizando dois tipos de escalas: a primeira é a local (ou microscópica), que descreve as heterogeneidades; a segunda é a global (ou macroscópica), que descreve o comportamento geral do meio. O interesse é utilizar as propriedades microscópicas para entender as propriedades macroscópicas do meio, isto é, via o processo de homogeneização, procura-se descrever propriedades globais dos compostos levando em conta as propriedades locais do problema. Do ponto de vista macroscópico, o composto homogeneizado parece um material homogêneo. Abaixo temos uma imagem que descreve como é feito o estudo de propriedades macroscópicas, via um processo microscópico em algum meio periódico.



Do ponto de vista aplicado, a homogeneização de um problema é motivada por aplicações em mecânica, física, química e engenharia. Podemos usar como exemplo a condutividade térmica ou elétrica de meios heterogêneos, que temos propriedades macroscópicas de cristais ou a estrutura de polímeros, onde somos levados ao estudo de equações diferenciais parciais lineares ou não-lineares que descrevem tais meios com estrutura periódica, quase-periódica ou até mesmo num ambiente estocástico.

Do ponto de vista matemático, as perguntas que motivam o estudo da homogeneização de um problema são:

- Se existe u tal que $u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u$ em algum sentido e topologia, qual a relação entre u_ϵ e u ?
- Que equação u satisfaz?
- Como os coeficientes da equação limite se relacionam com os coeficientes do problema original?
- Os resultados dependem da escolha da subsequência de ϵ ?

O estudo da homogeneização teve início com os trabalhos de S. Spagnolo [43] e E. De Giorgi e S. Spagnolo [14]. Outras referências utilizadas para o assunto são A. Bensoussan, J-L. Lions e G. Papanicolau [8] e V.V. Jikov, S.M. Kozlov e O. A. Oleinik [28].

Sobre a homogeneização de leis de conservação não lineares com fluxo do tipo $f(x, \lambda) = a(x)\varphi(\lambda)$, citamos os ótimos trabalhos de E. Weinan [46], L. Ambrosio e H. Frid [2], H. Frid e J. Silva [23] e J. Silva [42], onde os autores obtiveram resultados de homogeneização para

o ambiente das funções periódicas, quase-periódicas e na álgebra de Fourier-Stieltjes. No artigo [13], A.-L. Dalibard contribuiu com um resultado de homogenização no ambiente das funções periódicas, mas para fluxos não homogêneos gerais. A técnica utilizada pela autora se baseia na formulação cinética da lei de conservação, o resultado de convergência da sequência de soluções é obtido no sentido fraco, mas a equação limite não se relaciona com a equação original. Sobre o resultado de homogenização obtido nessa tese, damos contribuições interessantes para o estudo de leis de conservação de fluxo não homogêneo gerais, já que supondo a hipótese (1.0.2) sobre o fluxo e utilizando técnicas da teoria cinética, medidas de Young duas escalas e H-medida, garantimos que existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ (onde $\mathbb{R}_+^{n+1} := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$) tal que a sequência de soluções da lei conservação converge forte para u e além disso, u satisfaz uma lei de conservação de fluxo homogêneo cujos coeficientes se relacionam com os coeficientes da equação original.

Agora tratando da segunda parte, estamos interessados no estudo do decaimento de soluções entrópicas da seguinte lei de conservação

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} f(u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(0, x) = v_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.0.4)$$

onde o fluxo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz e satisfaz a hipótese de não degeneração:

$$\begin{aligned} &\text{Para todo } (\theta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n - \{(0, 0)\}, \text{ a função } \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \theta\lambda + \xi \cdot f(\lambda) \\ &\text{não é constante em intervalos não degenerados.} \end{aligned} \quad (1.0.5)$$

Trabalharemos com o dado inicial v_0 com dois tipo de comportamentos auto-mediante que descreveremos a seguir. Tais estudos já foram publicados e sua referência é [40]. Precisamente, assumimos que v_0 pode ser:

No primeiro tipo, trabalharemos em um ambiente estocástico, ou seja, abordaremos funções com a estrutura

$$v_0(x) = u_0\left(\Phi^{-1}(x, \omega), \omega\right), \quad (1.0.6)$$

onde $\omega \in \Omega$ com Ω sendo um espaço de probabilidade e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ uma perturbação aleatória de funções estacionárias realizadas por difeomorfismos estocásticos $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (chamado na literatura de deformação estocástica). As propriedades de funções estacionárias serão definidas com precisão na seção de preliminares, bem como a definição de deformação estocástica, que foi introduzida por X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions (ver [6, 7]). Nesse artigo, eles consideram a homogenização de um problema envolvendo um operador elíptico cujos coeficientes são funções periódicas ou estacionárias perturbadas por deformações estocásticas. Enfatizamos que o nosso trabalho [40] é o primeiro sobre decaimento de soluções de leis de conservação levando em consideração uma variável aleatória adicional.

No segundo tipo, vamos abordar o ambiente determinístico, isto é, vamos supor que

$$v_0 \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.0.7)$$

onde $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Besicovitch, mas dessa vez relacionado ao completamento com relação a semi-norma induzida pelo valor médio de funções pertencentes a uma álgebra

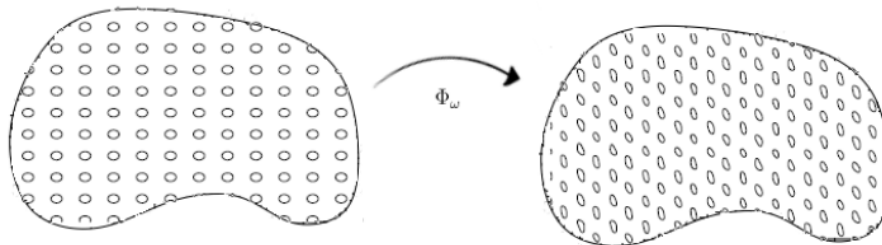
ergódica com valor médio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. As propriedades de álgebras com valor médio e espaços de Besicovitch também vão ser tratadas com exatidão na seção de preliminares.

Formalmente, o estudo do decaimento de uma solução $u(t, x)$ de uma equação de evolução, consiste em determinar uma constante $|\ell| < \infty$ e uma topologia adequada de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot) = \ell.$$

Se considerarmos o conjunto de dados iniciais $u_0(\cdot)$ tais que o limite acima existe, então vemos que a função $u_0 \mapsto \ell$ é um funcional linear definido sobre tal conjunto. Portanto, podemos ver que o problema do decaimento consiste em caracterizar esse funcional linear e seu domínio em termos dos dados iniciais e dos coeficientes da equação de evolução considerada, de modo a descrever o comportamento da solução $u(t, x)$ para $t > 0$ suficientemente grande, sabido a priori o comportamento do dado inicial $u_0(\cdot)$ para $|x|$ suficientemente grande.

Citamos os ótimos trabalhos [12, 24, 11, 33, 35, 37], onde os estudos do problema de decaimento para leis de conservação hiperbólicas ou para equações parabólica-hiperbólica degeneradas foram feitos nos ambientes periódico e quase-periódico. A proposta dessa segunda parte da tese é obter uma propriedade de decaimento para leis de conservação em ambientes mais gerais, pois sabemos que o conceito de estacionaridade é a extensão mais geral da noção de periodicidade e quase-periodicidade para funções com algum comportamento auto-mediante. Isso nos motivou a considerar dados iniciais da forma (1.0.6) com $\Phi \equiv Id$. Outra motivação é que se vemos a solução entrópica u da equação (1.0.4) como a concentração de partículas em materiais, então é fato que materiais com partículas distribuídas periodicamente são difíceis de se ver na natureza. No entanto, de acordo com [27], espera-se que sejam observados defeitos ou desordens na concentração dessas partículas nos materiais. Portanto, como observado por Cancès and Lebris in [9], deformações estocásticas são muito adequadas para descrever matematicamente esses defeitos na ciência dos materiais. Veja abaixo uma imagem que descreve um processo aleatório via a ação de uma deformação estocástica (para mais informações, ver seção 1.2 dos preliminares).



Isso justifica a importância de se considerar dados iniciais na forma (1.0.6). Assim, um dos resultados obtidos nessa tese é descrever o comportamento estocástico da concentração $u(t, \cdot)$ para t suficientemente grande.

A parte final desse trabalho trata do estudo da concentração $u(t, \cdot)$ para t suficientemente grande do ponto de vista determinístico. Nos trabalhos [21, 24, 35] isso é

feito no ambiente quase-periódico. Usando a propriedade de contração em \mathcal{B}^1 observada em [35], a propriedade de decaimento pode ser transmitida ao ambiente das funções fracamente quase-periódicas, ou seja, para o conjunto das funções contínuas limitadas f em \mathbb{R}^n tal que a família $\{f(\cdot+t); t \in \mathbb{R}^n\}$ é pré-compacta na topologia fraca de $C_b(\mathbb{R}^n)$. Ou ainda, podemos levar tal propriedade para uma classe mais ampla de funções em \mathbb{R}^n que é a fraco* quase-periódica. Para uma discussão mais ampla desses ambientes, indicamos ao leitor os trabalhos [16, 17, 20]. No entanto, foi provado em [41], que existe uma vasta classe de funções ergódicas que está além do ambiente das funções fraco* quase-periódicas. Para tal classe de funções, a extensão dos trabalhos de [21, 24, 35] não é óbvia, pois os autores utilizaram o fato de que funções quase-periódicas podem ser aproximadas por polinômios trigonométricos. Para obter tal extensão não trivial, primeiro mostramos que leis de conservação do tipo (1.0.4) são estáveis com respeito ao espaço de Besicovitch gerado por uma álgebra ergódica e isso nos permite reduzir o problema de decaimento do determinístico ao estocástico já estudado.

Essa tese está organizada em quatro capítulos:

No capítulo 1, colecionaremos alguns resultados preliminares, onde tratamos da teoria da medida, definimos conceitos de estacionaridade, deformação estocástica e álgebras com valor médio, enunciamos alguns teoremas ergódicos, definimos tipos de soluções de leis de conservação, tratamos de convergência duas escalas de medidas de Young e fazemos uma discussão sobre uma variante da H-medida, sua conexão com a H-medida clássica e um estudo do suporte dessa variante.

No capítulo 2, enunciamos e provamos um critério de pré-compactidade forte para uma sequência de medidas de Young limitada e aproveitamos tal critério para estabelecer um resultado de homogenização quase-periódica de leis de conservação com fluxo não homogêneo.

No capítulo 3, enunciamos e demonstramos o resultado de decaimento estocástico de soluções entrópicas de leis conservação com fluxo homogêneo, segundo resultado desse trabalho.

Por fim, no capítulo 4, enunciamos e demonstramos o terceiro e quarto resultado dessa tese. Tal capítulo aborda a regularidade da solução entrópica com dado inicial pertencente a uma álgebra com valor médio qualquer e além disso, utiliza o decaimento estocástico provado no capítulo 3 para provar o decaimento determinístico de soluções entrópicas de leis de conservação com fluxo homogêneo no ambiente das álgebras ergódicas.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos conceitos básicos da teoria que serão utilizados ao longo do texto. O material que é bem conhecido ou extensões diretas de trabalhos existentes são dadas sem provas, mas com suas devidas referências.

2.1 Teoria da Medida

Nessa seção, colecionaremos alguns resultados de teoria da medida que utilizaremos efetivamente durante a construção da teoria.

Sejam X um espaço métrico localmente separável e compacto e $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra de Borel, isto é, a menor σ -álgebra gerada pelos abertos da topologia de X . Consideremos o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(X))$.

Definição 2.1.1 (Medidas de Borel e Radon). *Uma medida μ em $(X, \mathcal{B}(X))$ é dita medida de Borel. Se uma medida de Borel μ é finita nos compactos de X , dizemos que μ é uma medida de Radon. Denotaremos $\mathcal{M}(X)$ ao espaço das medidas de Radon definidas em X .*

O primeiro assunto abordado é a respeito da derivada de Radon-Nikodym. Para esse assunto, considere $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.1.2. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sejam*

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} & \text{se } \mu(B_r(x)) > 0 \text{ para todo } r > 0, \\ \infty & \text{se } \mu(B_r(x)) = 0 \text{ para algum } r > 0, \end{cases}$$

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} & \text{se } \mu(B_r(x)) > 0 \text{ para todo } r > 0, \\ \infty & \text{se } \mu(B_r(x)) = 0 \text{ para algum } r > 0, \end{cases}$$

Se $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, dizemos que ν é diferenciável com respeito a μ em x e escrevemos

$$D_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

O seguinte teorema pode ser encontrado em [19] (pág. 38).

Teorema 2.1.3. *Existe $D_\mu\nu$ e é finita μ -q.t.p. Além disso, $D_\mu\nu$ é μ -mensurável.*

Para o próximo resultado precisamos da seguinte definição.

Definição 2.1.4. *Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a medida μ e escrevemos $\nu \ll \mu$, se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável.*

Segue o enunciado do clássico teorema de Radon-Nikodym que pode ser encontrado em [19] (pág. 40).

Teorema 2.1.5 (Teorema de Radon-Nikodym). *Se $\nu \ll \mu$, então*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu\nu(x) d\mu(x),$$

$\forall A \subset \mathbb{R}^n$ μ -mensurável.

O próximo resultado é o Teorema de Representação de Riesz para o contexto das medidas cuja prova pode ser encontrada em [3] (pág. 25).

Teorema 2.1.6 (Teorema de Riesz). *Sejam X um espaço métrico compacto e $L : (C_c(X))^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} L(f + g) &= L(f) + L(g) \quad \forall f, g \in (C_c(X))^n \text{ e} \\ \|L\| &= \sup\{L(f); f \in (C_c(X))^n, \|f\|_\infty \leq 1\} < \infty, \end{aligned}$$

onde $C_c(X)$ é o espaço das funções contínuas em X suporte compacto nesse conjunto.

Então, existe uma única medida $\mu \in (\mathcal{M}(X; \mathbb{R}^n))^n$ tal que

$$L(f) = \sum_{j=1}^n \langle \mu_j, f_j \rangle, \quad \forall f \in (C_c(X))^n.$$

Além disso, $\|L\| = \text{Var}(\mu)(X)$.

As próximas definições e resultado se referem a convergência de seqüências de medidas de Radon. Nesse contexto, consideremos X um espaço métrico compacto.

Definição 2.1.7. *Sejam $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X)$ e $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dizemos que μ_j converge fraco para μ e escrevemos $\mu_j \rightharpoonup \mu$ se*

$$\int_X f d\mu_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C_c(X).$$

Definição 2.1.8. *Dizemos que $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X)$ é limitada, se $\sup\{|\mu_j|(X); j \in \mathbb{N}\} < \infty$.*

O próximo teorema pode ser encontrado em [3] (pág. 26).

Teorema 2.1.9 (Compacidade fraca de medidas). *Seja $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X)$ limitada. Então, existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que a menos de subsequência $\mu_j \rightharpoonup \mu$.*

As próximas definições e resultados se referem as medidas de Young. Uma referência sobre tal assunto é [3].

Definição 2.1.10 (Medidas de Young). *Sejam U um espaço topológico localmente compacto e $\mu \in \mathcal{M}(U)$. Dizemos que a função $U \ni x \mapsto \nu_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ é uma medida de Young (ou função valor medida), se tal função é μ -mensurável e $\text{Var}(\nu_x)(\mathbb{R}) = 1$ para μ -q.t.p. $x \in U$.*

Definição 2.1.11. *Seja U um espaço topológico localmente compacto. Uma medida de Young ν_x é dita limitada se existe um $M > 0$ tal que $\text{supp}(\nu_x) \subset [-M, M]$ para q.t.p. $x \in U$. Denotemos por $MV(U)$ ao espaço das medidas de Young limitadas definidas em U .*

Temos os seguintes conceitos de convergência em $MV(U)$.

Definição 2.1.12. *Sejam $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ e $\nu_x \in MV(U)$. Dizemos que:*

i) ν_x^k converge fraco* para ν_x e escrevemos $\nu_x^k \xrightarrow{*} \nu_x$, se $\forall f \in C(\mathbb{R})$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \xrightarrow{*} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \text{ em } L^\infty(U);$$

ii) ν_x^k converge fortemente para ν_x e escrevemos $\nu_x^k \rightarrow \nu_x$, se $\forall f \in C(\mathbb{R})$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \text{ em } L^1_{loc}(U).$$

O seguinte teorema mostra que medidas de Young surgem naturalmente como limites fracos de sequências limitadas em $L^\infty(U)$. Para uma prova, ver [3] (pág. 60).

Teorema 2.1.13. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(U)$ limitada. Então, existe $\nu_x \in MV(U)$ tal que a menos de subsequência*

$$g(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle \nu_x, g(\lambda) \rangle, \forall g \in C(\mathbb{R}).$$

Além disso, $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\nu_x = \delta_{u(x)}$, onde δ_λ é a medida de Dirac concentrada em $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos ainda o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrado em [34] (pág. 220).

Lema 2.1.14. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\nu_x \in MV(U)$ e $M > 0$ tal que $\text{supp}(\nu_x) \subset [-M, M]$ para q.t.p. $x \in U$. Suponhamos que ν_x satisfaz*

$$\text{div} \left(\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(\lambda - p)(f(x, \lambda) - f(x, p)) d\nu_x(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}.$$

Então, existe uma medida não-negativa e localmente finita μ em U tal que

$$\operatorname{div}\left(\int_p^\infty f(x, \lambda) - f(x, p) d\nu_x(\lambda)\right) = -\mu \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $\forall \Phi \in C_c^\infty(U)$, $\operatorname{Var}(\Phi\mu) \leq C$, onde C independe de M, p e Φ .

A seguinte definição vai ser importante para enunciarmos o próximo teorema.

Definição 2.1.15. *Sejam (X, \mathcal{E}) e (Y, \mathcal{F}) espaços de medida quaisquer e $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(F) \in \mathcal{E}$ sempre que $F \in \mathcal{F}$. Se μ é uma medida real positiva em (X, \mathcal{E}) , definimos a medida $f_\# \mu$ em (Y, \mathcal{F}) por*

$$f_\# \mu(F) = \mu(f^{-1}(F)), \forall F \in \mathcal{F}.$$

O seguinte teorema faz parte da teoria geométrica da medida e sua prova pode ser encontrada em [3] (pág. 57).

Teorema 2.1.16 (Teorema de Desintegração). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, V um espaço topológico localmente compacto, $\nu \in \mathcal{M}(U \times V)$, $\pi : U \times V \rightarrow U$ a projeção na primeira entrada e $\mu = \pi_\# |\nu|$. Suponhamos que $\mu \in \mathcal{M}(U)$, isto é, $|\nu|(K \times V) < \infty$, $\forall K \subset U$ compacto. Então, existe $\nu_x \in MV(V)$ tal que*

$$\begin{aligned} f(x, \cdot) &\in L^1(V, |\nu_x|) \text{ para } \mu - \text{q.t.p. } x \in U, \\ x &\mapsto \int_V f(x, y) d\nu_x(y) \in L^1(U, \mu) \text{ e} \\ \int_{U \times V} f(x, y) d\nu(x, y) &= \int_U \int_V f(x, y) d\nu_x(y) d\mu(x), \end{aligned}$$

$$\forall f \in L^1(U \times V, |\nu|).$$

O próximo lema se refere a um resultado de compacidade e pode ser encontrado em [18] (pág. 10).

Lema 2.1.17. *Seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{-1,p}(U)$ limitada para algum $p > 2$. Suponhamos que $f_k = g_k + h_k$, $k \in \mathbb{N}$, onde $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é compacto em $H^{-1}(U)$ e $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{M}(U)$. Então, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é compacto em $H^{-1}(U)$.*

2.2 Contexto Estocástico

Nessa e na próxima seção, denotaremos por \mathbb{G} o grupo \mathbb{Z}^n (ou \mathbb{R}^n). O conjunto $[0, 1]^n$ denota o cubo unitário, chamado de célula unitária e que é bastante utilizado como período referência para funções periódicas. O símbolo $[x]$ denota o único número em \mathbb{Z}^n tal que $x - [x] \in [0, 1]^n$.

Nessa seção apresentamos o contexto estocástico, ambiente de suma importância para o desenvolvimento desse trabalho.

Para começar, seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Para cada variável aleatória $f \in L^1(\Omega; \mathbb{P})$ ($L^1(\Omega)$ por simplicidade), denotemos a esperança por

$$\mathbb{E}[f] = \int_{\Omega} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Definição 2.2.1. *Uma mapa mensurável $\tau : \mathbb{G} \times \Omega \rightarrow \Omega$ é dito um n -dimensional sistema dinâmico se:*

- (i) (*Propriedade de grupo*) $\tau(0, \cdot) = id_{\Omega}$ e $\tau(x + y, \omega) = \tau(x, \tau(y, \omega))$, $\forall x, y \in \mathbb{G}$ e $\omega \in \Omega$;
- (ii) (*Invariância*) Para cada $x \in \mathbb{G}$, o mapa $\tau(x, \cdot) : \Omega \rightarrow \Omega$ é \mathbb{P} -invariante, isto é, para cada $E \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\tau(x, E) \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(\tau(x, E)) = \mathbb{P}(E).$$

Por simplicidade, vamos usar $\tau(k)\omega$ para denotar $\tau(k, \omega)$. Além disso, é normal utilizarmos $\tau(k)$ para um sistema dinâmico discreto (contínuo) se $k \in \mathbb{Z}^n$ ($k \in \mathbb{R}^n$), mas vamos enfatizar isso só quando o contexto não for óbvio.

Uma função mensurável f em Ω é dito τ -invariante, se para cada $k \in \mathbb{G}$

$$f(\tau(k)\omega) = f(\omega) \quad \text{para q.t.p. } \omega \in \Omega.$$

Assim, um conjunto mensurável $E \in \mathcal{F}$ é τ -invariante, se sua função característica χ_E é τ -invariante. De fato, pode-se mostrar que um conjunto τ -invariante E pode ser definido de forma equivalente por

$$\tau(k)E = E \quad \text{for each } k \in \mathbb{G}.$$

Além disso, dizemos que o sistema dinâmico τ é ergódico, quando todos os conjuntos τ -invariantes E têm medida $\mathbb{P}(E)$ igual a zero ou um. Equivalentemente, podemos caracterizar um sistema dinâmico ergódico em termos de funções invariantes. De fato, um sistema dinâmico é ergódico se cada função τ -invariante é constante em quase toda parte, em símbolos:

Se para cada $k \in \mathbb{G}$ e q.t.p. $\omega \in \Omega$, $f(\tau(k)\omega) = f(\omega)$, então $f(\cdot) = \text{const.}$ q.t.p.

Definição 2.2.2. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita estacionária se*

$$f(x + k, \omega) = f(x, \tau(k)\omega), \tag{2.2.1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{G}$ e \mathbb{P} -q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Chamamos a atenção que o conjunto das funções estacionárias forma uma álgebra e também é estável pelo processo de limite. Por exemplo, o produto de duas funções estacionárias é estacionária e a derivada de uma função estacionária é estacionária.

A seguir apresentamos a definição precisa de deformação estocástica que foi introduzida em [6, 7] (ver mais em [4]).

Definição 2.2.3. *Um mapa $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(y, \omega) \mapsto z = \Phi(y, \omega)$ é dito deformação estocástica quando satisfaz:*

i) *O mapa $\Phi(\cdot, \omega)$ é um difeomorfismo bi-Lipschitz para \mathbb{P} -q.t.p. $\omega \in \Omega$;*

ii) *Existe $\nu > 0$ tal que*

$$\operatorname{ess\,inf}_{\omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n} \left(\det \left(\nabla \Phi(y, \omega) \right) \right) \geq \nu;$$

iii) *Existe $M > 0$ tal que*

$$\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n} \left(|\nabla \Phi(y, \omega)| \right) \leq M < \infty;$$

iv) *O gradiente de Φ , isto é, $\nabla \Phi(y, \omega)$, é estacionária no sentido de (2.2.1).*

Para exemplos interessantes de deformações estocásticas, dirigimos o leitor aos trabalhos [4, 10].

Teoremas Ergódicos

Iniciamos essa seção com o conceito de valor médio. Uma função $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ é dita possuir valor médio se existe um número $M(f)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^n |A|} \int_{A_t} f(x) dx = M(f), \quad (2.2.2)$$

onde $A_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid t^{-1}x \in A\}$, $\forall t > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, com $|A| \neq 0$.

Observação 2.2.4. *Salvo contrário, assumimos que o sistema dinâmico $\tau : \mathbb{G} \times \Omega \rightarrow \Omega$ é ergódico e vamos utilizar a notação*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \text{ para } M(f).$$

Agora, enunciamos o resultado devido a Birkhoff, que conecta as noções de estacionaridade e de valor médio. Para uma referência, ver [29].

Teorema 2.2.5 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ uma variável aleatória estacionária. Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$ a função $f(\cdot, \tilde{\omega})$ possui valor médio no sentido de (2.2.2). Além disso, se o sistema dinâmico $\tau : \mathbb{G} \times \Omega \rightarrow \Omega$ é ergódico, então a função $M(f(\cdot, \tilde{\omega}))$ satisfaz para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$ as seguintes identidades:*

i) *Caso discreto (isto é $\tau : \mathbb{Z}^n \times \Omega \rightarrow \Omega$);*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \tilde{\omega}) dx = \mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^n} f(y, \cdot) dy \right].$$

ii) *Caso contínuo (isto é $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \Omega$);*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \tilde{\omega}) dx = \mathbb{E} [f(0, \cdot)].$$

O seguinte lema mostra que o Teorema Ergódico de Birkhoff é válido se a função estacionária é composta com uma deformação estocástica. Tal resultado foi provado por X. Blanc, C. Le Bris e P.-L. Lions em [6] (mais informações em T. Andrade, W. Neves, J. Silva [4]).

Lema 2.2.6. *Seja Φ uma deformação estocástica e $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ uma variável aleatória estacionária no sentido de (2.2.1). Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$ a função $f(\Phi^{-1}(\cdot, \tilde{\omega}), \tilde{\omega})$ possui valor médio no sentido de (2.2.2) e vale ainda:*

i) *Caso discreto;*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi^{-1}(z, \tilde{\omega}), \tilde{\omega}) dz = \frac{\mathbb{E} \left[\int_{\Phi([0,1]^n, \cdot)} f(\Phi^{-1}(z, \cdot), \cdot) dz \right]}{\det \left(\mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^n} \nabla_y \Phi(y, \cdot) dy \right] \right)} \quad \text{para q.t.p. } \tilde{\omega} \in \Omega.$$

ii) *Caso contínuo;*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi^{-1}(z, \tilde{\omega}), \tilde{\omega}) dz = \frac{\mathbb{E} [f(0, \cdot) \det(\nabla \Phi(0, \cdot))] }{\det(\mathbb{E} [\nabla \Phi(0, \cdot)])} \quad \text{para q.t.p. } \tilde{\omega} \in \Omega.$$

A seguir, temos o clássico teorema ergódico de Neumann, resultado que será utilizado efetivamente no capítulo 1. Para uma prova, ver [15].

Teorema 2.2.7 (Teorema Ergódico de Neumann). *Sejam $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo contínuo a um parâmetro de transformações unitárias definidas em um espaço de Hilbert H e $S \subset H$ um subespaço invariante de U_t , isto é, $U_t(S) = S, \forall t \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U_s(h) ds = \tilde{h} \text{ em } H, \quad (2.2.3)$$

onde \tilde{h} é a projeção ortogonal de h em S .

2.3 Contexto Determinístico

Damos início a essa seção definindo o conceito de álgebra com valor médio.

Definição 2.3.1. *Seja \mathcal{A} um subespaço fechado de $BUC(\mathbb{R}^n)$ (conjunto das funções limitadas uniformemente contínuas em \mathbb{R}^n) contendo as funções constantes. Dizemos que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra com valor médio se as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) *Se $f, g \in \mathcal{A}$, então o produto $fg \in \mathcal{A}$;*
- ii) *Se $f \in \mathcal{A}$, então $f(\cdot + y) \in \mathcal{A}, \forall y \in \mathbb{R}^n$;*
- iii) *Se $f \in \mathcal{A}$, então f possui valor médio no sentido de (2.2.2).*

Exemplos clássicos de álgebras com valor médio são:

- O conjunto das funções periódicas com período fixo.
- O conjunto das funções quase-periódicas em \mathbb{R}^n , denotado por $\text{AP}(\mathbb{R}^n)$ e definido como as funções que podem ser uniformemente aproximadas por combinações lineares finitas de funções do conjunto $\{\sin(\lambda \cdot x), \cos(\lambda \cdot x)\}_{\lambda \in \mathbb{R}^n}$.
- O conjunto das funções com limite no infinito, denotado por $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
- A álgebra de Fourier-Stieltjes, denotada por $\text{FS}(\mathbb{R}^n)$ e definida como o fecho do subespaço das funções contínuas limitadas f que satisfazem $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} d\mu(y)$, para alguma medida de Radon de valor complexo em \mathbb{R}^n (ver mais em [23]).
- O espaço das funções fracamente quase-periódicas, denotado por $\text{WAP}(\mathbb{R}^n)$ e definido como o subespaço das funções contínuas limitadas f em \mathbb{R}^n tais que a família $\{f(\cdot + t); t \in \mathbb{R}^n\}$ é pré-compacta na topologia fraca de $C_b(\mathbb{R}^n)$ (o espaço das funções contínuas limitadas). Tal espaço foi introduzido e suas principais propriedades foram obtidas por W.F. Eberlein em [16] (ver mais em [17]). Já em [39], W. Rudin provou que a inclusão $\text{FS}(\mathbb{R}^n) \subset \text{WAP}(\mathbb{R}^n)$ é estrita, dando um exemplo de uma função fracamente quase-periódica que não pode ser aproximada na norma do supremo pela transformada de Fourier-Stieltjes.
- O espaço das funções fraco* quase-periódicas em \mathbb{R}^n , denotado por $\mathcal{W}^* \text{AP}(\mathbb{R}^n)$ e cuja construção é comentada a seguir. Em [17], W.F. Eberlein estabeleceu a interessante decomposição para funções $f \in \text{WAP}(\mathbb{R}^n)$ que permite escrever

$$f = f_{ap} + f_0,$$

onde $f_{ap} \in \text{AP}(\mathbb{R}^n)$ e $M(|f_0|^2) = 0$. Essa propriedade satisfeita pelas funções fracamente quase-periódicas serviu como propriedade definidora para uma classe natural mais ampla de funções consideradas em [20]. Tal classe é denotada por $\mathcal{W}^* \text{AP}(\mathbb{R}^n)$ e é definida como a soma algébrica

$$\mathcal{W}^* \text{AP}(\mathbb{R}^n) := \text{AP}(\mathbb{R}^n) + \mathcal{N}(\mathbb{R}^n),$$

em que $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço das funções contínuas uniformemente limitadas f tais que $M(|f|) = 0$. Assim, fica claro que $\text{WAP}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{W}^* \text{AP}(\mathbb{R}^n)$.

Dado $1 \leq p < \infty$, o espaço de Besicovitch $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ associado a álgebra com valor médio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é o complemento de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ com respeito a semi-norma

$$N_p(f)^p := \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2L)^n} \int_{[-L, L]^n} |f|^p dx.$$

O espaço quociente correspondente (com relação ao espaço nulo da semi-norma acima) é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, o correspondente espaço é um espaço de Hilbert.

Observação 2.3.2. *Um argumento clássico dado por Besicovitch em [5] (ver mais em [28], pág. 239) prova que elementos de $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ podem ser representados por funções em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Segue do Teorema de Stone (ver [15], p. 274), que podemos ver uma álgebra com valor médio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ como uma álgebra de funções contínuas em um conjunto compacto \mathcal{K} . Se $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, denotemos por $\underline{f} \in C(\mathcal{K})$ a correspondente função. Já que o valor médio é uma função contínua não-negativa em $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, podemos expressar tal integral como uma integral com respeito a uma medida de Radon de probabilidade \mathbf{m} em \mathcal{K} , isto é,

$$M(f) = \int_{\mathcal{K}} \underline{f} \, d\mathbf{m}.$$

Como consequência, podemos identificar o espaço de Besicovitch $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ com o espaço de Lebesgue $L_m^p(\mathcal{K})$. Denotemos $L_m^p(\mathcal{K})$ simplesmente por $L^p(\mathcal{K})$.

Além disso, as translações $\tau(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau(y)x := x + y$, podem ser estendidas a sistemas dinâmicos contínuos n -dimensionais em \mathcal{K} (para uma prova, ver [1]). Um sistema dinâmico contínuo n -dimensional em um espaço topológico \mathcal{K} equipado de uma medida de probabilidade μ é um sistema dinâmico n -dimensional tal que $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, $\tau(x, \omega) = \tau(x)\omega$ é contínuo no sentido da definição 2.2.1.

A seguir damos três exemplos básicos dessa correspondência:

- Se $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções $[0, 1)^n$ -periódicas, então \mathcal{K} é o toro n -dimensional e \mathbf{m} é a medida de Lebesgue.
- No caso em que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções quase-periódicas, \mathcal{K} é a compactificação de Bohr de \mathbb{R}^n , que é um grupo topológico e \mathbf{m} é a medida de Haar associada. Para maiores detalhes, sugerimos ver [2].
- Quando $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções contínuas com limite finito no infinito, temos $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, ou seja, a compactificação de Alexandrov do \mathbb{R}^n e \mathbf{m} a medida de Dirac δ_∞ concentrada no infinito.

Dado um espaço de Banach E e uma álgebra com valor médio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, denotemos por $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n; E)$ ao espaço das funções $f \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n; E)$ tais que $L_f := \langle L, f \rangle$ pertence a $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ para todo $L \in E^*$ e a família $\{L_f; L \in E^*, \|L\| \leq 1\}$ é relativamente compacta em $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Q um espaço topológico e μ a medida de Radon de probabilidade em Q . Dado $f \in \text{BUC}(Q; E)$, foi provado por Krein-Smulian (ver [15], pág. 429), que o funcional linear $L \mapsto \int_Q \langle L, f(x) \rangle d\mu(x)$ é contínuo na topologia fraca de $\sigma(E^*, E)$. Como consequência, existe um único elemento de E , que denotamos por $\int_Q f(x) d\mu(x)$, satisfazendo

$$\left\langle L, \int_Q f(x) d\mu(x) \right\rangle = \int_Q \langle L, f(x) \rangle d\mu(x),$$

$\forall L \in E^*$.

Analogamente, se $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n; E)$, então a integral $\int_{Q_t} f dx$ converge fracamente em E quando $t \rightarrow \infty$, para um vetor, que denotaremos por $\underline{f} := \int_{\mathbb{R}^n} f dx$, caracterizado por

$$\left\langle L, \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle L, f \rangle dx,$$

$\forall L \in E^*$.

Seja $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ uma álgebra com valor médio em $BUC(\mathbb{R}^n)$ e \mathcal{K} compacto tal que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \simeq C(\mathcal{K})$. Podemos ver a álgebra com valor médio com valores vetoriais $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n; E)$, como um isomorfismo isométrico com o espaço $C(\mathcal{K}, E)$. Além disso, se $g \mapsto \underline{g}$ é o mapa canônico que sai de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e chega em $C(\mathcal{K})$, então o isomorfismo associado a $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n; E)$ é o mapa $\underline{f} \in C(\mathcal{K}; E)$ satisfazendo

$$\langle \underline{L}, \underline{f} \rangle = \langle L, \underline{f} \rangle \in C(\mathcal{K}),$$

$\forall L \in E^*$.

Definimos o espaço $L^p(\mathcal{K}; E)$ como o completamento de $C(\mathcal{K}; E)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_p$, definida usualmente por

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{K}} \|f\|_E^p d\mathbf{m} \right)^{1/p}.$$

Como de costume, identificamos funções em L^p como funções que coincidem m-q.t.p. em \mathcal{K} .

2.4 Leis de Conservação

Nessa seção, vamos definir os conceitos de solução de leis de conservação que trabalharemos.

Para isso, consideremos a lei de conservação multidimensional escalar não homogênea

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} F(x, u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(0, x) = v_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.4.4)$$

onde $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o fluxo $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz, isto é, dados $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ compacto e $\lambda_1, \lambda_2 \in K_2$, existe $L = L(K) > 0$ tal que

$$|F(x, \lambda_1) - F(x, \lambda_2)| \leq L|\lambda_1 - \lambda_2|, \forall x \in K_1.$$

Considere a seguinte definição de solução.

Definição 2.4.1. Uma função limitada $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é dita uma solução entrópica do problema (2.4.4) se

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[|u - k| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - k) (F(x, u) - F(x, k)) \cdot \nabla \varphi \right] dt dx + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{sgn}(u - k) \operatorname{div} F(x, u) \varphi dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0 - k| \varphi(0, x) dx \geq 0,$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Escolhendo $f(\lambda) = F(x, \lambda)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, em (2.4.4), obtemos a seguinte lei de conservação multidimensional escalar homogênea

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} f(u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(0, x) = v_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

onde $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o fluxo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz.

Assim, a definição (2.4.1) toma a forma.

Definição 2.4.2. Uma função limitada $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é dita uma solução entrópica do problema (2.4.5) se

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[|u - k| \partial_t \varphi + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \cdot \nabla \varphi \right] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0 - k| \varphi(0, x) dx \geq 0,$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

2.5 Medidas de Young duas escalas

A seguinte noção de convergência será importante para o entendimento do problema que apresentaremos no capítulo 1. Nesse contexto e a menos que se diga o contrário, vamos supor que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra com valor médio separável.

Sendo assim, seja \mathcal{K} compacto tal que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \simeq C(\mathcal{K})$. Se $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, denotemos por $\underline{f} \in C(\mathcal{K})$ a correspondente função e \mathbf{m} a medida de Radon de probabilidade tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathcal{K}} \underline{f} d\mathbf{m}.$$

Definição 2.5.1. Dizemos que $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ converge duas escalas para $\nu_{x,y} \in MV(U \times \mathcal{K})$ e escrevemos $\nu_x^k \xrightarrow{2esc} \nu_{x,y}$, se $\forall f \in C(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$

$$\int_U \langle \nu_x^k, f \rangle g(x, kx) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{U \times \mathcal{K}} \langle \nu_{x,y}, f \rangle \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx.$$

Para uma ótima referência sobre medidas de Young multiescala, ver [2].

O lema a seguir prova que a convergência duas escalas é um fenômeno natural de seqüências de medidas de Young limitadas.

Lema 2.5.2. *Se $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, então existe $\nu_{x,y} \in MV(U \times \mathcal{K})$ tal que a menos de subsequência $\nu_x^k \xrightarrow{2e_{sc}} \nu_{x,y}$.*

Demonstração. 1) Via o teorema 2.1.6, definimos a seqüência de medidas $(\mu^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$ dadas por

$$\langle \mu^k, F \rangle = \int_U \langle \nu_x^k, F(\cdot, x, kx) \rangle dx,$$

onde $F \in C_c(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$.

Afirmamos que $(\mu^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$ é limitada. De fato, seja $F \in C_c(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$ tal que $\|F\|_\infty \leq 1$ e como $\text{supp}(\nu_x^k) \subset [-M, M]$, $M > 0$, obtemos

$$|\langle \mu^k, F \rangle| \leq \int_U |\langle \nu_x^k, F(\cdot, x, kx) \rangle| dx \leq C,$$

onde C é uma constante que depende apenas de M e U .

Tomando o supremo no conjunto $\{F \in C_c(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K}); \|F\|_\infty \leq 1\}$, pelo teorema 2.1.6, fica provado que $|\mu^k|(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K}) \leq C$.

Assim, pelo teorema 2.1.9, existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$ tal que a menos de subsequência $\mu^k \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K})$.

2) Provemos que existe $\nu_{x,y} \in MV(U \times \mathcal{K})$ tal que $\mu = \nu_{x,y} \otimes \mathcal{L}^n \otimes \mathbf{m}$. Com efeito, para $g \in C_c(U \times \mathcal{K})$, observemos que

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\#}\mu, g \rangle &= \int_{U \times \mathcal{K}} \underline{g}(x, y) d(\pi_{\#}\mu)(x, y) = \int_{\mathbb{R} \times U \times \mathcal{K}} \underline{g}(x, y) d\mu(\lambda, x, y) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \times U} g(x, kx) d\mu^k(\lambda, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \langle \nu_x, 1 \rangle g(x, kx) dx = \int_{U \times \mathcal{K}} \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx, \end{aligned}$$

o que prova que $\pi_{\#}\mu = \mathcal{L}^n \otimes \mathbf{m}$, onde \mathcal{L}^n é a medida de Lebesgue n -dimensional.

Então, pelo teorema 2.1.16, existe $\nu_{x,y} \in MV(U \times \mathcal{K})$ tal que $\mu = \nu_{x,y} \otimes \mathcal{L}^n \otimes \mathbf{m}$.

Agora, basta observarmos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \langle \nu_x^k, f \rangle g(x, kx) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu^k, f \otimes g \rangle \\ &= \langle \mu, f \otimes g \rangle = \int_{U \times \mathcal{K}} \langle \nu_{x,y}, f \rangle \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Nesse novo contexto, consideremos o conjunto

$$E = E(\nu_{x,y}) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R}; \nu_{x,y}(\lambda, \infty) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \text{ em } L^1_{loc}(U \times \mathcal{K}) \right\}. \quad (2.5.6)$$

O seguinte resultado é uma adaptação do lema 4 (pág. 215) do trabalho [36]. Tal resultado mostra algumas propriedades importantes do conjunto E .

Lema 2.5.3. *As seguintes propriedades são válidas:*

(i) *O conjunto E^c é no máximo enumerável;*

(ii) *Se $\nu_x^k \xrightarrow{2esq} \nu_{x,y}$, então*

$$\int_U \nu_x^k(\lambda, \infty) g(x, kx) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda, \infty) g(x, y) d\mathbf{m} dy, \quad (2.5.7)$$

$$\forall \lambda \in E \text{ e } g \in L^1(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)).$$

Demonstração. 1) Para cada $0 < g \in C(U \times \mathcal{K}) \cap L^1(U \times \mathcal{K})$, seja $A = A(g)$ o conjunto dos pontos de continuidade da função $p_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_g(\lambda) = \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda, \infty) g(x, y) d\mathbf{m} dx.$$

Como p é não decrescente, então A^c é no máximo enumerável. Provemos que $E^c \subset A^c$. De fato, se $\lambda_0 \in A$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{U \times \mathcal{K}} |\nu_{x,y}(\lambda, \infty) - \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty)| g(x, y) d\mathbf{m} dx = \\ & \left| \int_{U \times \mathcal{K}} [\nu_{x,y}(\lambda, \infty) - \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty)] g(x, y) d\mathbf{m} dx \right| = \\ & |p_g(\lambda) - p_g(\lambda_0)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0. \end{aligned}$$

Agora, como $0 < g \in C(U \times \mathcal{K}) \cap L^1(U \times \mathcal{K})$, então por um argumento de aproximação temos que o limite acima vale para qualquer função característica χ_Z , em que $Z \subset U \times \mathcal{K}$ é compacto, o que prova que $\nu_{x,y}(\lambda, \infty) \rightarrow \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty)$ em $L^1_{loc}(U \times \mathcal{K})$ e que portanto $\lambda_0 \in E$. Assim, $A \subset E \Rightarrow E^c \subset A^c$, como queríamos.

2) Agora, provemos a convergência dada em (2.5.7) para $g \in C_c(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$. Para isso,

sejam $\lambda_0 \in E$ e $h > 0$. Consideremos as funções

$$\theta_h^-(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \geq \lambda_0 + h, \\ \frac{\lambda - \lambda_0}{h} & \text{se } \lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + h, \\ 0 & \text{se } \lambda \leq \lambda_0, \end{cases}$$

$$\theta_h^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \geq \lambda_0, \\ \frac{\lambda - \lambda_0 + h}{h} & \text{se } \lambda_0 - h < \lambda < \lambda_0, \\ 0 & \text{se } \lambda \leq \lambda_0 - h \end{cases}$$

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \lambda = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Note que

$$\theta(\lambda - \lambda_0 - h) \leq \theta_h^-(\lambda) \leq \theta(\lambda - \lambda_0) \leq \theta_h^+(\lambda) \leq \theta(\lambda - \lambda_0 + h),$$

logo, integrando essas desigualdades com relação as medidas ν_x^k e $\nu_{x,y}$, obtemos

$$\nu_x^k(\lambda_0 + h, \infty) \leq \langle \nu_x^k, \theta_h^- \rangle \leq \nu_x^k(\lambda_0, \infty) \leq \langle \nu_x^k, \theta_h^+ \rangle \leq \nu_x^k(\lambda_0 - h, \infty), \quad (2.5.8)$$

$$\nu_{x,y}(\lambda_0 + h, \infty) \leq \langle \nu_{x,y}, \theta_h^- \rangle \leq \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \leq \langle \nu_{x,y}, \theta_h^+ \rangle \leq \nu_{x,y}(\lambda_0 - h, \infty). \quad (2.5.9)$$

Denotemos por

$$Q_{\pm}^k = \int_U \langle \nu_x^k, \theta_h^{\pm} \rangle g(x, kx) dx, \quad Q_{\pm} = \int_{U \times \mathcal{K}} \langle \nu_{x,y}, \theta_h^{\pm} \rangle \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx,$$

$$Q^k = \int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) g(x, kx) dx \quad \text{e} \quad Q = \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_x^k(\lambda_0, \infty) \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx.$$

Como $g \in C_c(U, C(\mathcal{K}))$ e $\lambda_0 \in E$, dado $\epsilon > 0$, existe $h > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |Q_+ - Q_-| &\leq \int_{U \times \mathcal{K}} |\langle \nu_{x,y}, \theta_h^+ - \theta_h^- \rangle \underline{g}(x, y)| d\mathbf{m} dx \\ &\leq C \int_{U \times \mathcal{K}} |\langle \nu_{x,y}, \theta_h^+ - \theta_h^- \rangle| d\mathbf{m} dx < C\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\nu_x^k \xrightarrow{2esc} \nu_{x,y}$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|Q_+^k - Q_+| < \epsilon \quad \text{e} \quad |Q_-^k - Q_-| < \epsilon.$$

Segue de (2.5.8) e (2.5.9) que

$$\begin{aligned} Q_-^k &\leq Q^k \leq Q_+^k \\ Q_- &\leq Q \leq Q_+, \end{aligned}$$

logo, pelas desigualdades obtidas acima, temos

$$|Q^k - Q| \leq \max\{Q^k, Q_+\} - \min\{Q_-^k, Q_-\} \leq$$

$$|Q_+^k - Q_+| + |Q_-^k - Q_-| + |Q_+ - Q_-| < 3C\epsilon,$$

sempre que $k \geq k_0$, o que prova que

$$\int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) g(x, kx) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx, \quad (2.5.10)$$

$\forall g \in C_c(U, C(\mathcal{K}))$.

3) Por fim, passemos a informação obtida em (2.5.10) para $g \in L^1(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$. De fato, sabemos que existe $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$ tal que $g_j \rightarrow g$ em $L^1(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$.

Assim, para algum $j_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in E$ e pelo passo 2), se $j \geq j_0$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) g(x, kx) dx - \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx \right| \\ & \leq \left| \int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) [g(x, kx) - g_j(x, kx)] dx \right| + \\ & \left| \int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) g_j(x, kx) dx - \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \underline{g}_j(x, y) d\mathbf{m} dx \right| + \\ & \left| \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) [\underline{g}_j(x, y) - \underline{g}(x, y)] d\mathbf{m} dx \right| \leq \\ & 2C \int_U \|g(x, \cdot) - g_j(x, \cdot)\|_\infty dx + \\ & \left| \int_U \nu_x^k(\lambda_0, \infty) g_j(x, kx) dx - \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda_0, \infty) \underline{g}_j(x, y) d\mathbf{m} dx \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Sejam $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ e $\nu_{x,y} \in MV(U \times \mathcal{K})$ de tal forma que $\nu_x^k \xrightarrow{2esc} \nu_{x,y}$. As seguintes notações vão ser importantes ao longo do texto:

$$\begin{aligned} \nu_x^{k,g}(\lambda, \infty) &= \nu_x^k(\lambda, \infty) g(x, kx) \\ \nu_x^g(\lambda, \infty) &= \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda, \infty) \underline{g}(x, y) d\mathbf{m} dx \\ U_\lambda^{k,g}(x) &= \nu_x^{k,g}(\lambda, \infty) - \nu_x^g(\lambda, \infty), \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$\forall g \in C(U, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$.

O seguinte resultado será utilizado na construção da próxima seção.

Lema 2.5.4. *Se $\nu_x^k \xrightarrow{2esc} \nu_{x,y}$, então*

$$U_\lambda^{k,g} \xrightarrow{*} 0 \text{ em } L^\infty(U),$$

$\forall \lambda \in E$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Sejam $\lambda \in E$ e $h \in L^1(U)$. Pelo lema 2.5.3, temos

$$\int_U U_\lambda^{k,g}(x)h(x)dx = \int_U \nu_x^k(\lambda, \infty)g(kx)h(x)dx - \int_{U \times \mathcal{K}} \nu_{x,y}(\lambda, \infty)\underline{g}(y)h(x)d\mathbf{m}dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

como queríamos. \square

2.6 Uma variante da H-medida

A H-medida clássica foi um instrumento matemático introduzido por L. Tartar em [44], P. Gerárd em [25] e posteriormente melhorada por E.Y. Panov em [34]. O nome H-medida se dá pelo fato de que as primeiras aparições dessa ferramenta foram em conexão com a teoria da Homogenização. Essa medida é utilizada principalmente no estudo de oscilações e efeitos de concentrações em equações diferenciais parciais não lineares.

Nessa seção, vamos apresentar uma nova abordagem de H-medida que chamaremos de variante da H-medida. Tal abordagem leva em consideração funções teste com propriedades auto-mediantes. Faremos três estudos: primeiro provamos a existência de tal medida e fazemos sua conexão com a H-medida clássica; segundo, damos dois exemplos de H-medida e discutimos sobre efeitos de concentração versus a natureza de oscilação da H-medida; terceiro, faremos um estudo do suporte da variante da H-medida.

2.6.1 H-medida caracterizada por funções auto-mediantes

Considere $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Besicovitch associado a uma álgebra com valor médio separável $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

O seguinte lema é uma construção feita por nós e servirá como guia para nossa construção.

Lema 2.6.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos limitados. Para cada $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_\infty \leq 1$, considere uma função $\Gamma_g : C_c(U) \times C_c(V) \rightarrow \mathbb{C}$ linear com relação a g , aditiva em cada entrada e satisfazendo*

$$|\Gamma_g(\varphi, \psi)| \leq C\|\psi\|_\infty\|\varphi\|_1\|g\|_{\mathcal{B}^2}, \quad (2.6.12)$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c(U)$ e $\psi \in C_c(V)$.

Então, existem $m_g \in \mathcal{M}(U \times V)$ e $h_{\varphi,\psi} \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\langle m_g, \varphi \otimes \psi \rangle = \Gamma_g(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi,\psi}(y)g(y)dy, \quad (2.6.13)$$

em que $\text{Var}(m_g) \leq C$, onde C é a constante de (2.6.12).

Demonstração. 1) Para cada $\varphi \in C_c(U)$ e $\psi \in C_c(V)$, como Γ_g é linear com relação a g , utilizando (2.6.12) e o teorema de representação de Riesz para espaços de Hilbert, existe $h_{\varphi,\psi} \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\Gamma_g(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi,\psi}(y)g(y)dy.$$

2) Para cada $\psi \in C(V)$ e $g \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_{\mathcal{B}^2} \leq 1$, considere o funcional $C(\overline{U}) \ni \varphi \mapsto \Gamma_g(\varphi, \psi) \in \mathbb{C}$. Como Γ_g é aditiva na primeira entrada e vale (2.6.12), segue que tal funcional é aditivo e limitado. Logo, pelo teorema de Riesz 2.1.6, existe $\mu^{\psi, g} \in \mathcal{M}(U)$ tal que

$$\langle \mu^{\psi, g}, \varphi \rangle = \Gamma_g(\varphi, \psi)$$

e $Var(\mu^{\psi, g}) \leq C\|\psi\|_\infty$.

Além disso, como Γ_g é aditiva na segunda entrada, segue que $\mu^{\psi_1 + \psi_2, g} = \mu^{\psi_1, g} + \mu^{\psi_2, g}$.

3) Provemos que existe $v^{\psi, g} \in L^\infty(U)$ tal que $\|v^{\psi, g}\|_\infty \leq C\|\psi\|_\infty\|g\|_{\mathcal{B}^2}$ e vale

$$\langle \mu^{\psi, g}, \varphi \rangle = \int_A v^{\psi, g}(x) dx, \quad (2.6.14)$$

$\forall A \subset \overline{U}$ mensurável.

De fato, seja $a \in \overline{U}$ e $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \overline{U}$. Segue de (2.6.12) que

$$|\langle \mu^{\psi, g}, \chi_{B_r(a)} \rangle| \leq \|\psi\|_\infty \|g\|_{\mathcal{B}^2} |\langle \mathcal{L}^n, \chi_{B_r(a)} \rangle|, \quad (2.6.15)$$

logo, pelo teorema 2.1.3, existe $v^{\psi, g}$ tal que

$$|v^{\psi, g}(a)| := \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\langle \mu^{\psi, g}, \chi_{B_r(a)} \rangle}{\langle \mathcal{L}^n, \chi_{B_r(a)} \rangle} \right| \leq \|\psi\|_\infty \|g\|_{\mathcal{B}^2}.$$

Com isso, fica provado que $v^{\psi, g} \in L^\infty(U)$ e segue de (2.6.15) e do teorema de Radon-Nikodym 2.1.4 a igualdade (2.6.14).

4) Para $\psi_1, \psi_2 \in C(V)$, temos

$$\mu^{\psi_1 + \psi_2, g} = \mu^{\psi_1, g} + \mu^{\psi_2, g} = v^{\psi_1, g} dx + v^{\psi_2, g} dx.$$

Seja $D \subset C(V)$ enumerável e denso. Como $v^{\psi_1, g}, v^{\psi_2, g} \in L^\infty(\overline{U})$, existem $U_1, U_2 \subset \overline{U}$ de medida total tal que

$$v^{\psi_1 + \psi_2, g} = v^{\psi_1, g} + v^{\psi_2, g},$$

$\forall x \in U_1 \cap U_2$.

Se $W := \bigcap_{j \in D} U_j$, então W tem medida total e vale

$$v^{\psi_i + \psi_j, g} = v^{\psi_i, g} + v^{\psi_j, g},$$

$\forall x \in W$ e $\psi_i, \psi_j \in D$.

5) Para cada $x \in W$, consideremos o funcional $T_x^g : D \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $T_x^g(\psi) = v^{\psi, g}(x)$. Segue dos passos 2) e 3) que T_x^g é aditivo e limitado. Estendendo T_x^g até o fecho, obtemos $T_x^g : C(V) \rightarrow \mathbb{C}$ aditivo e limitado. Pelo teorema de Riesz 2.1.6, existe ν_x^g em V tal que

$$\langle \nu_x^g, \psi \rangle = T_x^g(\psi)$$

e além disso, $Var(\nu_x^g) = \|T_x^g\| \leq C$.

Note que se $y_0 \in V$, então podemos estender o funcional $W \ni x \mapsto \langle \nu_x^g, \psi \rangle$ para \bar{U} utilizando a definição

$$\bar{U} \ni x \mapsto \begin{cases} \langle \nu_x^g, \psi \rangle = v^{\psi,g}(x) & \text{se } x \in W, \\ \langle \nu_x^g, \psi \rangle = \psi(y_0) & \text{se } x \in \bar{U} - W. \end{cases}$$

6) Seja $m_g^{pq} := \nu_x^g \otimes \mathcal{L}^n \in \mathcal{M}(U \times V)$. Segue dos passos anteriores que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi,\psi}(y)g(y)dy &= \Gamma_g(\varphi, \psi) = \langle \mu^{\psi,g}, \varphi \rangle = \int_U v^{\psi,g}(x)\varphi(x)dx = \\ &= \int_U T_x^g(\psi)\varphi(x)dx = \int_U \langle \nu_x^g, \psi \rangle \varphi(x)dx = \langle m_g^{pq}, \varphi \otimes \psi \rangle \end{aligned}$$

e além disso, $Var(m_g) \leq C$, como queríamos. \square

Como nosso interesse é obter uma variante da H-medida clássica, então a ideia é utilizar a mesma construção feita por L. Tartar em [44], ou seja, nosso objetivo é determinar uma medida que caracterize o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi, \quad (2.6.16)$$

onde \mathcal{F} é a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$, $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ (\mathbb{S}^{n-1} é a esfera unitária em \mathbb{R}^n), $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $p, q \in E$ (E foi definido em (2.5.6)) e $U_p^{k,g}$ foi definida em (2.5.11).

A proposição a seguir trata de uma construção feita por nós e mostra a existência da medida que buscamos.

Proposição 2.6.2. *Para cada $p, q \in E$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_\infty \leq 1$, existem $m_g^{pq} \in \mathcal{M}(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ e $h_{\varphi,\psi}^{pq} \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ tais que a menos de subsequência*

$$\begin{aligned} \langle m_g^{pq}, (\varphi_1 \overline{\varphi_2}) \otimes \psi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi_1 \overline{\varphi_2}, \psi}^{pq}(y)g(y)dy, \end{aligned}$$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$. Além disso, $Var(m_g^{pq}) \leq C$, onde C depende apenas de $\|U_p^{k,g}\|_\infty$ e $\|U_q^k\|_\infty$.

Demonstração. 1) Pelo lema 2.5.4, as sequências $(U_p^{k,g})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(U_q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ são limitadas em $L^\infty(U)$, $\forall p, q \in E$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

Fixemos $p, q \in E$. Para $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$, $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, segue da desigualdade de Hölder, identidade de Plancherel, definição de $U_p^{k,g}$ e o teorema da

convergência dominada que

$$\begin{aligned} & \left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right| \leq \\ & C \|\psi\|_\infty \|\varphi_2\|_2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x)|^2 \left(|g(kx)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^2 dy \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (2.6.17) \\ & C \|\psi\|_\infty \|\varphi_1\|_2 \|\varphi_2\|_2 \|g\|_{\mathbb{B}^2}, \end{aligned}$$

o que prova que a menos de subsequência o limite de (2.6.16) existe, podendo depender dos parâmetros $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ e g .

Mas, como $C_c(U), C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ são separáveis, podemos utilizar um argumento diagonal para extrair uma subsequência tal que o limite (2.6.16) exista em um conjunto enumerável e denso de funções.

Assim, se $\varphi_i \in C_c(U)$ ($i = 1, 2$), $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, então existem $(\varphi_j^i)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c(U)$ ($i = 1, 2$), $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi_j^i & \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi \text{ em } L^\infty(U) \quad (i = 1, 2), \\ \psi_j & \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \psi \text{ em } L^\infty(\mathbb{S}^{n-1}) \text{ e} \\ g_j & \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando a subsequência diagonal construída anteriormente, temos que o limite (2.6.16) existe para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$, $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

2) Para $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $\varphi \in C_c(U)$, consideremos os operadores $A : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ e $B : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ definidos por

$$\mathcal{F}(A(u))(\xi) = \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) \mathcal{F}(u)(\xi)$$

e

$$B(u)(x) = \varphi(x)u(x).$$

Conforme provado em [44] (pág. 4), temos que se $C := AB - BA : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$C \text{ é um operador compacto.} \quad (2.6.18)$$

Portanto, voltando em (2.6.16), utilizando o lema 2.5.4 e o resultado (2.6.18), temos a menos de subsequência

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} C(\varphi_1 U_p^{k,g})(x) \overline{(\varphi_2 U_q^k)(x)} dx + \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} A(U_p^{k,g})(x) \overline{U_q^k(x)} dx = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} A(U_p^{k,g})(x) \overline{U_q^k(x)} dx. \end{aligned}$$

Mas, como C é um operador compacto e $U_p^{k,g} \xrightarrow{*} 0$ (ver lema 2.5.4), então $C(U_p^{k,g}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Dessa forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} A(U_p^{k,g})(x) \overline{U_q^k(x)} dx. \quad (2.6.19)$$

Assim, para cada $p, q \in E$ e $g \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$, consideremos a menos de subsequência a função $\Gamma_g^{pq} : C_c(U) \times C(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma_g^{pq}(\varphi_1 \overline{\varphi_2}, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi.$$

Segue de (2.5.11) e (2.6.19) que Γ_g^{pq} é linear com relação a g e aditiva nas duas entradas. Utilizando (2.6.17) para $0 \leq \varphi_1 = \varphi_2 = \sqrt{\varphi} \in C_c(U)$, obtemos

$$|\Gamma_g^{pq}(\varphi, \psi)| \leq C \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 \|g\|_{\mathcal{B}^2},$$

onde C depende apenas de U .

Portanto, pelo lema 2.6.1, existem $m_g^{pq} \in \mathcal{M}(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ e $h_{\varphi_1 \overline{\varphi_2}, \psi}^{pq} \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{aligned} \langle m_g^{pq}, (\varphi_1 \overline{\varphi_2}) \otimes \psi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi_1 \overline{\varphi_2}, \psi}^{pq}(y) g(y) dy \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

e além disso,

$$\text{Var}(m_g^{pq}) \leq C, \quad (2.6.21)$$

onde C depende apenas U .

3) Agora, a menos de subsequência, queremos passar a informação obtida em (2.6.20) para quaisquer $p, q \in E$. Para isso, iniciemos com $V \subset\subset U$, isto é, V compactamente contido em U .

A ideia é utilizar um argumento análogo ao feito por E.Y. Panov em [34] (pág. 217), ou seja, consideremos $D = \{d_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset E$ enumerável e denso. Para qualquer $D_m := \{d_j\}_{j=1}^m \subset D$, segue dos passos anteriores que existem uma subsequência e uma família de medidas de Radon $\{m_g^{pq}\}_{p,q \in D_m}$ definidas em $V \times \mathbb{S}^{n-1}$ tais que vale (2.6.20). Como $D_m \subset D_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}$, podemos seguir com esse processo indutivamente. Logo, tomando a subsequência diagonal (onde os parâmetros são $k, m \in \mathbb{N}$), podemos passar a informação (2.6.20) para quaisquer $p, q \in D$.

Sejam $p, p_0 \in E$ e $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_\infty \leq 1$. Estudemos o termo $\|U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V}$, onde $\|\cdot\|_{2,V}$ é a norma do espaço $L^2(V)$.

Utilizando que ν_x^k e $\nu_{x,y}$ são medidas de probabilidade, a monotonicidade da função $E \ni p \mapsto \nu_x^k(p, \infty) g(x)^2 \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, a desigualdade de Hölder, o

teorema da convergência dominada e o lema 2.5.3, note que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{k \rightarrow \infty} \|U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V}^2 \leq \\
& C \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_V \left| \left[\nu_x^k(p, \infty) - \nu_x^k(p_0, \infty) \right] g(kx) \right|^2 dx + \\
& C \int_V \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty) \right] g(y) dy \right|^2 dx \leq \\
& 2C \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_V \left(\nu_x^k(p, \infty) - \nu_x^k(p_0, \infty) \right) g(kx)^2 dx \right| + \\
& C \int_V \left| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{\mathbb{B}^2} \right|^2 dx \leq \\
& 2C \|g\|_{\infty}^2 \int_V \int_{\mathbb{R}^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)| dy dx
\end{aligned}$$

Assim, como $\|g\|_{\infty} \leq 1$, temos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V}^2 \leq 2C \int_V \int_{\mathbb{R}^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)| dy dx,$$

logo,

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V}^2 = 0. \quad (2.6.22)$$

Agora, para $p, q \in E$, definimos

$$F_g^k(p, q) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi_1 U_p^{k,g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se $(p, q), (p_0, q_0) \in E \times E$, então

$$\begin{aligned}
& F_g^k(p, q) - F_g^k(p_0, q_0) = \\
& \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} \left(\varphi_1 \left[U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g} \right] \right) (\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi_2 U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi + \\
& \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} \left(\varphi_1 U_{p_0}^{k,g} \right) (\xi) \overline{\mathcal{F} \left(\varphi_2 \left[U_q^k - U_{q_0}^k \right] \right) (\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi,
\end{aligned}$$

logo, utilizando a desigualdade de Hölder e a identidade de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
& |F_g^k(p, q) - F_g^k(p_0, q_0)| \leq \\
& \|\psi_1\|_{\infty} \|\psi_2\|_{\infty} \|\varphi\|_{\infty} \left(\|U_p^{k,g} - U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V} \|U_q^k\|_{2,V} + \|U_q^k - U_{q_0}^k\|_{2,V} \|U_{p_0}^{k,g}\|_{2,V} \right).
\end{aligned}$$

Segue do lema 2.5.4 que $\|U_{p_0}^{k,g}\|_{\infty}, \|U_q^k\|_{\infty} \leq C$. Dessa forma, utilizando que $V \subset\subset U$ e (2.6.22), obtemos

$$\lim_{(p,q) \rightarrow (p_0,q_0)} \limsup_{k \rightarrow \infty} |F_g^k(p, q) - F_g^k(p_0, q_0)| = 0. \quad (2.6.23)$$

Note que se $(p, q) \in E \times E$, então existe $((p_j, q_j))_{j \in \mathbb{N}} \subset D \times D$ tal que $(p_j, q_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (p, q)$.
Segue dos passos anteriores que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p_j, q_j) = \langle m_g^{p_j q_j}, \varphi \otimes \psi \rangle, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, como $F_g^k(p, q) = (F_g^k(p, q) - F_g^k(p_j, q_j)) + F_g^k(p_j, q_j)$, então utilizando (2.6.23), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p, q) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} (F_g^k(p, q) - F_g^k(p_j, q_j)) + \lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p_j, q_j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle m_g^{p_j q_j}, \varphi \otimes \psi \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p, q) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle m_g^{p_j q_j}, \varphi \otimes \psi \rangle,$$

donde concluímos que existe

$$F_g(p, q) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p, q). \quad (2.6.24)$$

Assim, pela construção acima, obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (F_g(p, q) - F(p_j, q_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (F_g^k(p, q) - F_g^k(p_j, q_j)) = 0,$$

o que prova que a função $F_g : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ definida em (2.6.24) é contínua uniforme com relação a $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_\infty \leq 1$.

Por fim, segue de (2.6.21) que $Var(m_g^{p_j q_j}) \leq C, \forall j \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema da convergência fraca de medidas 2.1.9, existe $\nu \in \mathcal{M}(V \times \mathbb{S}^{n-1})$ tal que $m_g^{p_j q_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \nu$.

Assim, pela continuidade da função F , segue que

$$\begin{aligned} F_g(p, q) &= \lim_{j \rightarrow \infty} F(p_j, q_j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} F_g^k(p_j, q_j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle m_g^{p_j q_j}, \varphi \otimes \psi \rangle \\ &= \langle \nu, \varphi \otimes \psi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, fica unicamente determinada a medida $m_g^{pq} := \nu, \forall p, q \in E$.

Concluímos disso que existe uma família de medidas de Radon $\{m_g^{pq}\}_{p, q \in E}$ definidas em $V \times \mathbb{S}^{n-1}$ tal que a menos de subsequência satisfaz

$$\langle m_g^{pq}, \varphi \otimes \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi U_p^{k, g})(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi U_q^k)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varphi, \psi}^{pq}(y) g(y) dy.$$

4) Para finalizar, consideremos uma sequência de conjuntos $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que para cada $j \in \mathbb{N}$, $V_j \subset V_{j+1}$ e $V_j \subset\subset U$ e além disso $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j = U$. Pelos passos anteriores, para

cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma família de medidas $\{m_{g,j}^{p,q}\}_{p,q \in E}$ em $V_j \times \mathbb{S}^{n-1}$ tal que a menos de subsequência valem (2.6.20) e (2.6.21). Assim, para valer todos os passos anteriores, escolhamos para cada $j \in \mathbb{N}$ as subsequências $k \mapsto \{U_{jp}^{k,g}\}_{p \in E}, \{U_{jq}^k\}_{q \in E}$. Note que $U_{(j+1)p}^{k,g}$ é uma subsequência de $U_{jp}^{k,g}$ e o mesmo vale para U_{jq}^k .

Dessa forma, como $V_j \subset V_{j+1}$, então $m_{g,j+1}^{p,q}|_{V_j \times \mathbb{S}^{n-1}} = m_{g,j}^{p,q}, \forall j \in \mathbb{N}$. Assim, para quaisquer $p, q \in E$ fica unicamente determinada uma medida m_g^{pq} em $U \times \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $m_g^{pq}|_{V_j \times \mathbb{S}^{n-1}} = m_{g,j}^{pq}, j \in \mathbb{N}$.

Assim, concluímos que existe uma família de medidas de Radon $\{m_g^{pq}\}_{p,q \in E}$ em $U \times \mathbb{S}^{n-1}$ tal que a menos de subsequência satisfaz (2.6.20) e (2.6.21). □

Note que fazendo $g = 1$ na proposição 2.6.2, recuperamos a H-medida clássica introduzida por E.Y. Panov em [34]. Segue o enunciado de tal resultado.

Corolário 2.6.3. *Existe $\mu^{pq} \in \mathcal{M}(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ tal que a menos de subsequência*

$$\langle \mu^{pq}, \varphi_1 \varphi_2 \otimes \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi U_p^k)(\xi) \overline{\mathcal{F}(\varphi U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi,$$

$\forall p, q \in E$, onde $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$.

Em [34] (pág. 225), E.Y. Panov deu uma importante aplicação da H-medida dada pelo corolário 2.6.3. Tal resultado nos vai ser útil no próximo capítulo e já vamos deixá-lo enunciado aqui.

Teorema 2.6.4. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tal que $\varphi_i \in C^1(U \times \mathbb{R})$, $\forall i = 1, \dots, n$. Suponhamos que $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ satisfaz*

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p) (\varphi(x, \lambda) - \varphi(x, p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}$$

e μ^{pq} é a H-medida gerada por $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Se $\mu^{pq} \equiv 0, \forall p, q \in E$, então a menos de subsequência, $\{\nu_x^k\}_{k \geq 1}$ converge fortemente.

2.6.2 Efeitos de concentração versus natureza de oscilação da H-medida

Nessa seção faremos dois exemplos: o primeiro é sobre a H-medida gerada por funções periódicas e o segundo é sobre a H-medida gerada por funções estacionárias. Aproveitaremos tais exemplos para discutir sobre os efeitos de concentração gerados em cada caso e também para discutir sobre a natureza de oscilação das H-medidas geradas.

Exemplo 2.6.5. *H-medida gerada por uma função $[0, 1]^n$ -periódica.*

Em [44] (pág. 9), encontramos um exemplo de H-medida gerada por uma função $[0, 1]^n$ -periódica. A seguir, trataremos de um exemplo análogo, mas com uma abordagem diferente. Segue a construção que sugerimos em quatro passos:

1) Seja $u \in C(\mathbb{R}^n, C([0, 1]^n))$ tal que $\int_{[0, 1]^n} u(x, y) dy = 0$ para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $u_\epsilon(x) := u\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)$, $\forall \epsilon > 0$. Nosso interesse é estudar a H-medida associada a sequência $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$.

2) Suponhamos inicialmente que $u(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j(x)b_j(y)$, onde $a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp}(\mathcal{F}(a_j))$ compacto e $b_j \in L^2([0, 1]^n)$, $\forall j = 1, \dots, m$.

Como $b_j \in L^2([0, 1]^n)$, então

$$b_j(y) = \sum_{k \neq 0} b_{j,k} e^{2\pi i k \cdot y},$$

onde $b_{j,k}$ são os coeficientes de Fourier no contexto $[0, 1]^n$ -periódico para cada $j = 1, \dots, m$. Assim,

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \sum_{k \neq 0} b_{j,k} e^{2\pi i k \cdot y},$$

e portanto

$$u_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} a_j(x) e^{2\pi i k \cdot \frac{x}{\epsilon}}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(\mathcal{F}(\varphi))$ é compacto. Por propriedade da transformada de Fourier, note que

$$\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \mathcal{F}(e^{2\pi i k \cdot \frac{\cdot}{\epsilon}} a_j \varphi)(\xi) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right)$$

e como $\mathcal{F}(a_j \varphi) = \mathcal{F}(a_j) * \mathcal{F}(\varphi)$, então $\text{supp}(\mathcal{F}(a_j))$ é compacto, $\forall j = 1, \dots, m$.

Sejam $R_j = \max\{|\xi|; \xi \in \text{supp}(\mathcal{F}(a_j \varphi))\}$ e $R = \max\{R_j; j = 1, \dots, m\}$. Temos $\text{supp}(\mathcal{F}(a_j \varphi)) \subset B_R(0)$ e $\text{supp}(\mathcal{F}(a_j \varphi))(\cdot - \frac{k}{\epsilon}) \subset B_R(\frac{k}{\epsilon})$, $\forall j = 1, \dots, m$.

Como a diferença entre os centros de duas bolas "consecutivas" é da ordem de $\frac{1}{\epsilon}$, então para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^n$, $k_1 \neq k_2$, tome $\frac{1}{\epsilon} > 2R$ para obtermos

$$\text{supp}(\mathcal{F}(a_j \varphi))(\cdot - \frac{k_1}{\epsilon}) \cap \text{supp}(\mathcal{F}(a_j \varphi))(\cdot - \frac{k_2}{\epsilon}) = \emptyset, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Assim, para $\epsilon < \frac{1}{2R}$, garantimos

$$\left| \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \right|^2 = \sum_{k \neq 0} |b_{j,k}|^2 \left| \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \right|^2, \quad (2.6.25)$$

$\forall j = 1, \dots, m.$

Para $\epsilon < \frac{1}{2R}$, $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$, utilizando (2.6.25), a convergência de tal série em $L^2([0, 1]^n)$ e a mudança de variáveis $\eta = \xi - \frac{k}{\epsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \right|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\
& = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} |b_{j,k}|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \right|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\
& + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \overline{b_{l,k}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \overline{\mathcal{F}(a_l \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\
& = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} |b_{j,k}|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \right|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\
& + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \overline{b_{l,k}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(a_j \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right) \overline{\mathcal{F}(a_l \varphi)\left(\xi - \frac{k}{\epsilon}\right)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\
& = \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq 0} |b_{j,k}|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}(a_j \varphi)(\eta) \right|^2 \psi\left(\frac{\epsilon \eta + k}{|\epsilon \eta + k|}\right) d\eta \\
& + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^m \sum_{k \neq 0} b_{j,k} \overline{b_{l,k}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(a_j \varphi)(\eta) \overline{\mathcal{F}(a_l \varphi)(\eta)} \psi\left(\frac{\epsilon \eta + k}{|\epsilon \eta + k|}\right) d\eta.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada e a identidade de Plancherel

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\
& \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^m |b_{j,k}|^2 |a_j(x)|^2 + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^m b_{j,k} \overline{b_{l,k}} a_j(x) \overline{a_l(x)} \right) |\varphi(x)|^2 dx = \\
& \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m b_{j,k} a_j(x) \right|^2 |\varphi(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(\mathcal{F}(\varphi))$ é compacto e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$, fica provado que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m b_{j,k} a_j(x) \right|^2 |\varphi(x)|^2 dx. \quad (2.6.26)$$

3) Provemos que vale a informação obtida em (2.6.26) para $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $a_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\forall j = 1, \dots, m.$

Para isso, sejam $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(0) = 1$ e $f = \mathcal{F}^{-1}(g)$. Para cada $\delta > 0$, seja $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ e $\varphi_\delta = f_\delta * \varphi.$

Note que $\varphi_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e como $\mathcal{F}(\varphi_\delta) = \mathcal{F}(f_\delta) \cdot \mathcal{F}(\varphi)$, então

$$\text{supp}(\mathcal{F}(\varphi_\delta)) = \text{supp}(\mathcal{F}(f_\delta)) \subset \text{supp}(\mathcal{F}(f)) \subset \text{supp}(g),$$

ou seja, $\text{supp}(\mathcal{F}(\varphi_\delta))$ é compacto. Além disso, $\varphi_\delta \rightarrow \varphi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, dado $\eta > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_0$, então $\|\varphi_\delta - \varphi\|_2^2 < \eta$.

Logo, para $0 < \delta < \delta_0$, utilizando a identidade de Plancherel e o fato de que $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uniformemente limitada, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi) - \mathcal{F}(u_\epsilon \varphi_\delta)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \leq \\ & C \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon(x)|^2 |\varphi - \varphi_\delta(x)|^2 dx \leq \\ & C \|\varphi - \varphi_\delta\|_2^2 < C\eta, \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$, ou seja,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi_\delta)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Por outro lado, pela convergência da série em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema da convergência dominada e pela identidade de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi_\delta)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m b_{j,k} a_j(x) \right|^2 |\varphi_\delta(x)|^2 dx = \\ & \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m b_{j,k} a_j(x) \right|^2 |\varphi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Note que com uma construção análoga, podemos aproximar funções $a_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$ por sequências de funções $\{a_j^\delta\}_{\delta>0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\text{supp}(\mathcal{F}a_j^\delta)$ é compacto, $\forall j = 1, \dots, m$.

Assim, para $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $a_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\forall j = 1, \dots, m$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ fica provado que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon \varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m b_{j,k} a_j(x) \right|^2 |\varphi(x)|^2 dx. \quad (2.6.27)$$

4) Agora, se

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^m a_j(x) b_j(y); a_j \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ e } b_j \in L^2([0, 1]^n), \forall j = 1, \dots, m, m \in \mathbb{N} \right\},$$

então como A é denso em $C(\mathbb{R}^n, C([0, 1]^n))$ na norma de $C(\mathbb{R}^n, C([0, 1]^n))$, então dados $u \in C(\mathbb{R}^n, L^1([0, 1]^n))$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\eta > 0$, existem $\{u_\delta\}_{\delta>0} \subset A$ e $\delta_0 > 0$ tais que se $0 < \delta < \delta_0$, então

$$|u_\delta(x, y) - u(x, y)| < \eta$$

para q.t.p. $x \in K$ e $y \in [0, 1]^n$.

Como $u(x, \cdot)$ é $[0, 1]^n$ -periódica, temos

$$u_\epsilon(x) = u\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = u\left(x, \frac{x}{\epsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor\right) = u\left(x, \frac{x}{\epsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor\right)$$

com $\frac{x}{\epsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor \in [0, 1]^n$.

Então, para $0 < \delta < \delta_0$, vale que

$$|u_{\delta, \epsilon}(x) - u_\epsilon(x)| < \eta$$

para q.t.p. $x \in K$ e qualquer $\epsilon > 0$.

Se $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $K = \text{supp}(\varphi)$, então para $0 < \delta < \delta_0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_{\delta, \epsilon}\varphi)(\xi) - \mathcal{F}(u_\epsilon\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \leq \\ & C \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\delta, \epsilon}(x) - u_\epsilon(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx \leq \\ & C \int_K |u_{\delta, \epsilon}(x) - (u_\epsilon(x))|^2 dx < CK\eta^2, \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$, ou seja,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_{\delta, \epsilon}\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Por outro lado, pela convergência da série de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema da convergência dominada e pela identidade de Plancherel, obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_{\delta, \epsilon}\varphi)(\xi)|^2 \varphi_\delta(\xi) d\xi = \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^{m(\delta)} b_{j,k}^\delta a_j^\delta(x) \right|^2 |\varphi_\delta(x)|^2 dx = \\ & \sum_{k \neq 0} \psi\left(\frac{k}{|k|}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nu_k(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\nu_k(x)$ são os coeficientes de Fourier de $u(x, \cdot) \in L^2([0, 1]^n)$.

Assim, pelo corolário 2.6.3, sabemos que existe uma medida de Radon μ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ tal que

$$\langle \mu, |\varphi|^2 \otimes \psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u_\epsilon\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi$$

e portanto $\mu = \sum_{k \neq 0} (|\nu_k(\cdot)|^2 \mathcal{L}^n) \otimes \delta_{\frac{k}{|k|}}$, onde \mathcal{L}^n é a medida de Lebesgue n -dimensional.

Observação 2.6.6. *O efeito da concentração do exemplo acima, sugeriu a E.Y. Panov em [33] (Lema 3.1), que se μ é a H-medida gerada pela solução de uma lei de conservação com dado inicial periódico, então $\text{supp}(\mu) \subset \mathbb{R}_+^{n+1} \times S_0$, onde*

$$S_0 = \left\{ \frac{\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|} \in \mathbb{S}^n; 0 \neq \hat{\xi} = (\tau, \xi), \tau \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Isso permitiu ao autor concluir que a propriedade de decaimento é obtida apenas exigindo a condição de não degeneração sobre \mathbb{Z}^n , isto é:

Para todo $(\theta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n - \{(0, 0)\}$, a função $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \theta\lambda + \xi \cdot f(\lambda)$ não é constante em intervalos não degenerados,

o que pode ser observado em [33] (pág. 998).

Observação 2.6.7. *Seja $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Besicovitch associado a $AP(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$, então os coeficientes de Fourier de f tomam a forma*

$$a_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \lambda \cdot x} dx, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto $Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; a_\lambda \neq 0\}$ é dito espectro de f . Foi provado por A.S. Besicovitch em [5] que $Sp(f)$ é no máximo enumerável.

Dessa forma, como foi feito no exemplo anterior, pode ser mostrado que se $f \in C(\mathbb{R}^n, AP(\mathbb{R}^n))$, então a H-medida gerada por f toma a forma

$$\mu = \sum_{0 \neq \lambda \in Sp(f)} (|a_\lambda(\cdot)| \mathcal{L}^n) \otimes \delta_{\frac{\lambda}{|\lambda|}}.$$

Sejam $f \in AP(\mathbb{R}^n)$ e $H(f)$ o menor subgrupo aditivo de \mathbb{R}^n contendo $Sp(f)$. Sabe-se que $H(f)$ é enumerável sempre que é diferente do subgrupo trivial.

No trabalho [36], que diz respeito ao decaimento de soluções de leis de conservação com dado inicial $u_0 \in AP(\mathbb{R}^n)$, E.Y. Panov sugeriu a seguinte hipótese de não degeneração:

Para todo $0 \neq \xi \in H(u_0)$, a função $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \xi \cdot f(\lambda)$ não é afim em intervalos não vazios.

O que nos permite concluir que a hipótese mínima sobre a não degeneração é ditada pela natureza da oscilação.

Observação 2.6.8. *Devido aos comentários feitos acima, pode-se observar que o efeito atômico da H-medida pode ser estendido até o espaço das funções fraco* quase-periódicas $\mathcal{W}^*AP(\mathbb{R}^n)$. No entanto, foi provado em [41], que existe uma vasta classe de oscilações que vão além do ambiente $\mathcal{W}^*AP(\mathbb{R}^n)$.*

O exemplo a seguir foi uma construção feita por nós e tem o intuito de mostrar que quando consideramos tipos de oscilações além do ambiente $\mathcal{W}^*AP(\mathbb{R}^n)$, então pode ocorrer do efeito de concentração atômico da direção de oscilação da H-medida ser perdido.

Exemplo 2.6.9. *H-medida gerada por uma função estacionária discreta.*

Segue uma construção desse exemplo em oito passos:

1) Consideremos o conjunto $\{-1, 1\}$ e a medida de probabilidade $\mu(\{-1\}) = p$ e $\mu(\{1\}) = 1 - p$, onde $0 < p < 1$. Sejam $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^n}$, ν a medida produto e $(\Omega, 2^\Omega, \nu)$ o espaço de probabilidade associado.

Nesse espaço, consideremos o sistema dinâmico ergódico $\tau : \mathbb{Z}^n \times \Omega \rightarrow \Omega$ dado por $\tau_k(\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}^n} = (\omega_{j+k})_{j \in \mathbb{Z}^n}$.

Seja $0 \leq g \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(g) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $\|g\|_\infty \leq 1$.

Definimos $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(x, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \omega_j g(x - j)$. Afirmamos que f é estacionária discreta.

De fato, se $k \in \mathbb{Z}^n$, então utilizando a mudança de variáveis $m = j - k$, obtemos

$$f(x + k, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \omega_j g(x + k - j) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \omega_{m+k} g(x - m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \omega_m g(x - m) = f(x, \tau_k \omega).$$

Note que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} \left[\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} f(y, \cdot) dy \right] = \mathbb{E} \left[\omega_0 \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} g(y) dy \right] \\ &= \mathbb{E}[\omega_0] \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} g(y) dy = (-p + (1 - p)) \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} g(y) dy \\ &= (1 - 2p) \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} g(y) dy \iff p = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, se $p = \frac{1}{2}$, pelo Teorema de Birkhoff 2.2.5, temos

$$f\left(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} f(y, \cdot) dy \right] = 0 \text{ em } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Para cada $\omega \in \Omega$, nosso interesse é estudar a H-medida associada a sequência $\{f(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega)\}_{\epsilon > 0}$.

2) Sejam $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$. Fazendo as mudanças de variáveis $y = \frac{x}{\epsilon} + j$ e

$\eta = \epsilon\xi$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega)\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\
& \epsilon^{2n} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |\omega_j|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\epsilon\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi + \\
& \epsilon^{2n} \sum_{\substack{j, l \in \mathbb{Z}^n \\ j \neq l}} \omega_j \omega_l \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \epsilon \xi \cdot (j-l)} \mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\epsilon\xi) \overline{\mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + l)))(\epsilon\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\
& \underbrace{\epsilon^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} |\omega_j|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\eta)|^2 \psi\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) d\eta}_{A^\epsilon} + \\
& \underbrace{\epsilon^n \sum_{\substack{j, l \in \mathbb{Z}^n \\ j \neq l}} \omega_j \omega_l \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \epsilon \xi \cdot (j-l)} \mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\eta) \overline{\mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + l)))(\eta)} \psi\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) d\eta}_{B^\epsilon} = \\
& \epsilon^n (A^\epsilon + B^\epsilon).
\end{aligned}$$

3) Afirmamos que $\mathbb{E}[B^\epsilon] = 0, \forall \epsilon > 0$.

De fato, para $j \neq l$, sabemos que ω_j e ω_l são independentes e como

$$\mathbb{E}[\omega_j] = -\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0, \forall j \in \mathbb{Z}^n,$$

obtemos

$$\mathbb{E}[\omega_j \omega_l] = \mathbb{E}[\omega_j] \mathbb{E}[\omega_l] = 0.$$

Supondo $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, note que a série que aparece em B^ϵ na verdade é uma soma finita e pela linearidade da esperança, obtemos $\mathbb{E}[B^\epsilon] = 0, \forall \epsilon > 0$, como queríamos.

Assim, como $|\omega_j| = 1, \forall j \in \mathbb{Z}^n$, segue que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega)\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right] = \epsilon^n A^\epsilon = \\
& \epsilon^n \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g(\cdot)\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\eta)|^2 \psi\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right) d\eta \right]}_{D^\epsilon} = \epsilon^n D^\epsilon.
\end{aligned}$$

4) Suponhamos que $\text{supp}(\varphi) \subset [-R, R]^n$. Note que se

$$\frac{x}{\epsilon} - j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n,$$

então

$$x - \epsilon j \in \epsilon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$$

e se $x \in [-R, R]^n$, temos

$$|\epsilon j| \leq |\epsilon j - x| + |x| \leq \epsilon\sqrt{n} + R,$$

ou seja, $|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}$.

Com isso, temos que

$$D^\epsilon = \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

5) Como $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, então $|\varphi(\epsilon x + \epsilon j) - \varphi(\epsilon j)| \leq C\epsilon|x|$. Dessa forma, utilizando tal informação e o passo 4), obtemos

$$\begin{aligned} & \epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\xi) - \mathcal{F}(g\varphi(\epsilon j))(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \leq \\ & C\epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 |\varphi(\epsilon x - \epsilon j) - \varphi(\epsilon j)|^2 dx \leq \\ & C\epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} |\varphi(\epsilon x - \epsilon j) - \varphi(\epsilon j)|^2 dx \leq \\ & C\epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \epsilon^2 \leq C\epsilon^n (\epsilon^2 \sqrt{n} + R\epsilon) = C\epsilon^{n+1} (\epsilon\sqrt{n} + r) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g\varphi(\epsilon(\cdot + j)))(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\epsilon j)|^2 |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n D^\epsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right) \cdot \underbrace{\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \epsilon^n |\varphi(\epsilon j)|^2 \right)}_{E^\epsilon} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^\epsilon. \end{aligned}$$

6) Fazemos um estudo de E^ϵ . Para isso, particionamos $[-R, R]^n \supset \text{supp}(\varphi)$ em cubos de vértice ϵj , aresta ϵ e tal que $|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}$.

Assim, se P_j^ϵ é o j -ésimo cubo de volume ϵ^n , temos

$$\sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \epsilon^n |\varphi(\epsilon j)|^2 = \sum_{|j| \leq \sqrt{n} + \frac{R}{\epsilon}} \text{Vol}(P_j^\epsilon) |\varphi(\epsilon j)|^2,$$

que é a soma de Riemann da função $|\varphi|^2$, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx.$$

7) Agora, utilizando coordenadas polares, a mudança de variáveis $\eta = \frac{\xi}{|\xi|}$ e o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = \\ & \int_0^\infty \int_{\partial B_\rho(0)} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\mathcal{H}^{n-1} d\rho = \\ & \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathcal{F}(g)(\rho\eta)|^2 \psi(\eta) \rho^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} d\rho = \\ & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_0^\infty |\mathcal{F}(g)(\rho\eta)|^2 \rho^{n-1} d\rho \right] \psi(\eta) d\mathcal{H}^{n-1} = \\ & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nu(\eta) \psi(\eta) d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

onde $\nu(\eta) = \int_0^\infty |\mathcal{F}(g)(\rho\eta)|^2 \rho^{n-1} d\rho$.

Assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n E^\epsilon = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nu(\eta) \psi(\eta) d\mathcal{H}^{n-1} \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx \right).$$

8) Juntando todos os passos anteriores e utilizando o teorema da convergência dominada, concluímos que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega)\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\epsilon^n D^\epsilon] = \mathbb{E}[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n D^\epsilon] \\ & = \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nu(\eta) \psi(\eta) d\mathcal{H}^{n-1} \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx \right) \right]. \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$, pelo teorema 2.6.3, existe uma medida de Radon μ_ω em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ tal que

$$\mathbb{E}[\langle \mu_\omega, |\varphi|^2 \otimes \psi \rangle] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f(\frac{\cdot}{\epsilon}, \omega)\varphi)(\xi)|^2 \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right],$$

o que prova que $\mathbb{E}[\mu_\omega] = \mathcal{L}^n \otimes (\nu d\mathcal{H}^{n-1})$.

2.6.3 Estudo do suporte da variante da H-medida

O que faremos nessa seção é estudar o suporte de m_g^{pq} no caso em que g é uma função específica. Tal estudo será feito no caso periódico por simplicidade e clareza de ideias, mas tal construção também pode ser feita no ambiente quase-periódico.

Tal estudo é análogo ao feito por E.Y. Panov em [36], no entanto temos a variável δ a mais para controlar.

Iniciemos fixando $q \in E$ e $y_0 \in [0, 1]^n$ e para $\delta \in (0, 1]$, escolhemos $g = \chi_{B_\delta(y_0)}$ e definimos $m_\delta^{pq} := m_{\chi_{B_\delta(y_0)}}^{pq}$.

Consideremos $L(p, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ o menor espaço linear tal que

$$\text{supp}(m_\delta^{pq}) \subset U \times L(p, \delta).$$

Sejam $l(p, \delta) = \dim L(p, \delta)$ e $p_0 \in E$ e $\delta_0 \in (0, 1]$ tal que

$$l = l(p_0, \delta_0) = \max_{\substack{p \in E \\ \delta \in (0, 1]}} l(p, \delta).$$

Lema 2.6.10. *Para cada $q \in E$, a função $E \ni p \mapsto m_\delta^{pq} \in \mathcal{M}(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ é contínua uniforme com relação a $\delta \in (0, 1]$.*

Demonstração. Fixemos as notações $\chi_{B_\delta(y_0)} = \chi_\delta$ e $U_p^{k, \chi_{B_\delta(y_0)}} = U_p^{k, \delta}$.

Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(U)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ tais que $\|\varphi_1\|_\infty, \|\varphi_2\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$. Se $\phi \in C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ e $p, p_0 \in E$, utilizando a proposição 2.6.2, a desigualdade de Hölder, a identidade de Plancherel e o fato de que $(U_q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(U)$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^n} \left[h_\phi^{pq}(y) - h_\phi^{p_0q}(y) \right] \chi_\delta(y) dy \right| = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} \left(\left[U_p^{k, \delta} - U_{p_0}^{k, \delta} \right] \varphi_1 \right) (\xi) \overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi_2)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right| \leq \\ & \|\psi\|_\infty \|\varphi_1\|_\infty \|\varphi_2\|_\infty \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_q^k\|_2 \|U_p^{k, \delta} - U_{p_0}^{k, \delta}\|_2 \leq \\ & C \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_p^{k, \delta} - U_{p_0}^{k, \delta}\|_2. \end{aligned} \tag{2.6.28}$$

Um estudo análogo ao feito no passo 3) da proposição 2.6.2, mostra que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|U_p^{k, \delta} - U_{p_0}^{k, \delta}\|_2 & \leq \left(2C \delta^n \int_U \int_{[0,1]^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(2C \int_U \int_{[0,1]^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Voltando em (2.6.28) e utilizando a proposição 2.6.2, obtemos

$$|\langle m_\delta^{pq} - m_\delta^{p_0q}, \phi \rangle| \leq \left(2C \int_U \int_{[0,1]^n} |\nu_{x,y}(p, \infty) - \nu_{x,y}(p_0, \infty)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, tomando o supremo no conjunto $\{\phi \in C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1}); \|\phi\|_\infty \leq 1\}$ e fazendo $p \rightarrow p_0$, obtemos

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \sup_{\delta \in (0, 1]} \text{Var}(m_\delta^{pq} - m_\delta^{p_0q})(U \times \mathbb{S}^{n-1}) = 0,$$

como queríamos. □

Para algum $r > 0$, fixemos as notações

$$V_r(p_0) = \{p \in E; |p - p_0| < r\}$$

e

$$V_r(\delta_0) = \{\delta \in (0, 1]; |\delta - \delta_0| < r\}.$$

O seguinte lema é uma adaptação do lema 2 (pág. 733) do trabalho [36]. Tal resultado diz respeito a invariância do suporte da medida m_δ^{pq} em uma vizinhança do ponto $(p_0, \delta_0) \in E \times [0, 1]$.

Lema 2.6.11. *Existe $\gamma = \gamma(p_0) > 0$ tal que*

$$L(p, \delta) = L := L(p_0, \delta_0),$$

$\forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in V_\gamma(\delta_0)$.

Demonstração. 1) Para $r > 0$, seja $L_r = \bigcap_{\substack{p \in V_r(p_0) \\ \delta \in V_r(\delta_0)}} L(p, \delta)$.

Afirmamos que existe $r_0 > 0$ tal que $\tilde{L} := L_r \subset L, \forall r \in (0, r_0]$. De fato, se $r_1 < r_2$, então $L_{r_2} \subset L_{r_1}$, mas como $\dim L = l < \infty$ e $L_r \subset L$, então $\dim L_r \leq l, \forall r > 0$ e portanto deve existir tal $r_0 > 0$, pois caso contrário, obteríamos L_r tal que $\dim L_r > l$. Seja $m = \dim \tilde{L} \Rightarrow m \leq l$.

Queremos provar que $m = l$. Com efeito, suponhamos por absurdo que $m < l$. Dado $\epsilon > 0$, pelo lema 2.6.10, existe $\gamma = \gamma(p_0) \in (0, r_0]$ tal que

$$\text{Var}(m_\delta^{pq} - m_\delta^{p_0q})(U \times \mathbb{S}^{n-1}) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.6.29)$$

$\forall \delta \in (0, 1]$.

Consideremos $L'_0 = L$. Pela definição de L_γ , podemos escolher $(p_1, \delta_1) \in V_\gamma(p_0) \times V_\gamma(\delta_0)$ tal que $\dim l(p_1, \delta_1) < l$. Se $L'_1 := L'_0 \cap L(p_1, \delta_1)$, então $L'_1 \not\subseteq L'_0$. Agora, sejam $(p_2, \delta_2) \in V_\gamma(p_0) \times V_\gamma(\delta_0)$ tal que $\dim l(p_2, \delta_2) < \dim l(p_1, \delta_1)$ e $L'_2 := L'_1 \cap L(p_2, \delta_2)$, ou seja, $L'_2 \not\subseteq L'_1$. Como $l < \infty$, seguindo com o processo acima, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dim l(p_i, \delta_i) < \dim l(p_{i-1}, \delta_{i-1})$ e $L'_i \not\subseteq L'_{i-1}, \forall i = 1, \dots, k$, onde $L'_k = \tilde{L}$.

Pela definição de $L(p_i, \delta_i)$, temos

$$\text{supp}(m_{\delta_i}^{p_iq}) \subset U \times L(p_i, \delta_i) \Rightarrow \text{Var}(m_{\delta_i}^{p_iq})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) = 0. \quad (2.6.30)$$

Para $\phi \in C_c(U \times L(p_i, \delta_i)^c)$ tal que $\|\phi\|_\infty \leq 1$, pela desigualdade de Hölder e pelo fato de que $\delta_i \in V_\gamma(\delta_0)$, temos

$$\begin{aligned} |\langle m_{\delta_0}^{p_iq} - m_{\delta_i}^{p_iq}, \phi \rangle| &= \left| \int_{B_{\delta_0}(y_0) - B_{\delta_i}(y_0)} h_\phi^{p_iq}(y) dy \right| \\ &\leq \|h_\phi^{p_iq}\|_2 |B_{\delta_0 - \delta_i}(y_0)|^{\frac{1}{2}} \\ &< C |\delta_0 - \delta_i|^{\frac{n}{2}} < 2C \gamma^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\text{Var}(m_{\delta_0}^{p_i q} - m_{\delta_i}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.6.31)$$

Assim, utilizando (2.6.32), (2.6.30) e (2.6.31), temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) &\leq \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q} - m_{\delta_0}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) + \\ \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_i q} - m_{\delta_i}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) &+ \text{Var}(m_{\delta_i}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) = \\ \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q} - m_{\delta_0}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) &+ \\ \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_i q} - m_{\delta_i}^{p_i q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) &< \epsilon, \end{aligned}$$

isto é,

$$\text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) < \epsilon, \quad (2.6.32)$$

sempre que $p_i \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta_i \in V_\gamma(\delta_0), \forall i = 1, \dots, k$.

Como

$$\tilde{L} = L \cap \bigcap_{i=1}^k L(p_i, \delta_i) \Rightarrow \tilde{L}^c = L^c \cup \bigcup_{i=1}^k L(p_i, \delta_i)^c,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times \tilde{L}^c) &\leq \\ \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times L^c) &+ \sum_{i=1}^k \text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times L(p_i, \delta_i)^c) \leq k\epsilon \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Var}(m_{\delta_0}^{p_0 q})(U \times \tilde{L}^c) = 0 \Rightarrow \text{supp}(m_{\delta_0}^{p_0 q}) \subset U \times \tilde{L}.$$

Como L é o menor espaço linear que contém o $\text{supp}(m_{\delta_0}^{p_0 q})$, então $L = \tilde{L}$, absurdo. Portanto, $m = l$.

2) Note que se $p = l$, então $L \subset L(p, \delta), \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in V_\gamma(\delta_0)$. Mas, como L tem a maior dimensão desses espaços, então $L = L(p, \delta), \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in V_\gamma(\delta_0)$. □

Observação 2.6.12. *Uma consequência imediata desse lema é que se $\delta_1 \in (0, 1]$ é tal que $l(p_0, \delta_1) = l$, então $l(p_0, \delta) = l, \forall \delta \in V_\gamma(\delta_1)$.*

Lema 2.6.13. *Se $X = \{\delta \in (0, 1]; l(p_0, \delta) = l\}$, então $X = (0, 1]$.*

Demonstração. Afirmamos que o conjunto X é aberto e fechado na topologia de \mathbb{R} . De fato, segue da observação 2.6.12 que X é aberto. Para provar que X é fechado, seja $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\delta_m \rightarrow \delta$. Assim, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_m \in \left(\delta - \frac{\gamma}{2}, \delta + \frac{\gamma}{2}\right)$ o que nos sugere que $\delta \in (\delta_m - \gamma, \delta_m + \gamma), \forall m \geq m_0$. Nesse caso, $l(p_0, \delta) = l$, o que prova que $\delta \in X$ e que portanto X é fechado. Por conexidade, vale o resultado. □

Lema 2.6.14. *Temos que $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in (0, 1]$.*

Demonstração. Pelo lema 2.6.13, temos $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in V_\gamma(\delta_0)$. Seja $\delta_1 \in V_\gamma(\delta_0)$ bem próximo de $\delta_0 + \gamma$ (dado $m \in \mathbb{N}$, basta tomar $\delta_1 = \delta_0 + \frac{(m-1)}{m}\gamma$).

Sabemos que $L(p, \delta_1) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$, então $l(p, \delta_1) = l, \forall p \in V_\gamma(p_0)$. Mas, pelo lema 2.6.13, temos $l(p, \delta) = l, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in V_\gamma(\delta_1)$.

Como a dimensão l é preservada $\forall \delta \in [\delta_1, \delta_1 + \gamma) \cap (0, 1]$ e vale que $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in [\delta_1, \delta_1 + \gamma)$, por interseção, obtemos $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in [\delta_1, \delta_1 + \gamma) \cap (0, 1]$. Seguindo com esse processo finitas vezes, já que $|(\delta_0 - \gamma, 1)| < \infty$, obtemos $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in (\delta_0 - \gamma, 1]$.

Analogamente, temos $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in (0, \delta_0 - \gamma)$, como queríamos. □

Sejam

$$\overline{L(p, \delta)} = L(p, \delta) + iL(p, \delta) \subset \mathbb{C}$$

e

$$R(p, \delta) = \{\langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \rangle; \phi \in C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1}) \text{ e } \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\} \subset \mathbb{C}.$$

Lema 2.6.15. *Vale que $R(p, \delta) = \overline{L(p, \delta)}$.*

Demonstração. Para $v \in \mathbb{C}^n$, temos

$$\langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \rangle \cdot v = \langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \cdot v \rangle,$$

$\forall \phi \in C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ e $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Assim, $v \in R(p, \delta)^\perp \iff v \in \overline{L(p, \delta)}^\perp$, o que prova que $R(p, \delta) = \overline{L(p, \delta)}$, como queríamos. □

Juntando as informações provadas nos lemas anteriores, obtemos:

$$L(p, \delta) = L \text{ e } R(p, \delta) = \overline{L}, \forall p \in V_\gamma(p_0) \text{ e } \delta \in (0, 1]. \quad (2.6.33)$$

Capítulo 3

Um Critério de Pré-Compacidade Forte e a Homogenização de Leis de Conservação de Fluxo Não Homogêneo

Nosso objetivo nesse capítulo é obter a extensão de um resultado de pré-compacidade forte provado por E.Y. Panov em [36], onde nossa extensão trata do fluxo não homogêneo e oscilatório. Além disso, faremos duas aplicações desse resultado. Utilizamos como referência os trabalhos feitos por E.Y. Panov [36, 34, 31].

Segue o enunciado do primeiro resultado desse trabalho:

Teorema 3.0.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as hipóteses (1.0.2). Se $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ satisfaz*

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p)(f(kx, \lambda) - f(kx, p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R},$$

então existe $\nu_x \in MV(U)$ tal que a menos de subsequência, $\nu_x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \nu_x$.

Uma aplicação imediata do Teorema 3.0.1 é um resultado semelhante ao provado por Panov em [36] (pág. 739). Segue tal resultado como corolário.

Corolário 3.0.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as hipóteses (1.0.2). Suponhamos que $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ satisfaz a desigualdade*

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p)(\varphi(\lambda) - \varphi(p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R}.$$

Então, a menos de subsequência, $(\nu_x^k)_{k \geq 1}$ converge fortemente.

Observação 3.0.3. *Em [36] (pág. 739), E. Y. Panov provou o corolário 3.0.2 para o caso em que o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é apenas contínuo. Esse resultado será de suma importância na demonstração do teorema 4.0.1 do próximo capítulo.*

A segunda aplicação do teorema 3.0.1 é sobre a homogenização do problema

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \operatorname{div} f\left(\frac{x}{\epsilon}, u_\epsilon\right) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u_\epsilon(0, x) = u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

onde $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é uma sequência de soluções entrópicas, o fluxo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as hipóteses (1.0.2) e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \text{AP}(\mathbb{R}^n))$.

Segue tal resultado na forma de corolário.

Corolário 3.0.4. *Seja $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ sequência de soluções entrópicas do problema (3.0.1). Suponhamos que o fluxo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as hipóteses (1.0.2) e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \text{AP}(\mathbb{R}^n))$. Então, existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ tal que*

$$u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

onde u é solução entrópica do problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} \bar{f}(u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.0.2)$$

em que $\bar{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \lambda) dy$ e $\bar{u}_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x, y) dy$.

Vamos precisar de alguns resultados auxiliares para fazer a demonstração do teorema 3.0.1. Segue o enunciado e a demonstração de cada um deles.

3.0.1 Resultados auxiliares

Consideremos \mathcal{K} o compacto tal que $\text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R})) \simeq C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$.

Lema 3.0.5. *Seja $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $a(\cdot, \theta)$ é Lipschitz uniforme em $\theta \in \mathbb{R}$. Além disso, suponhamos que*

$$\begin{aligned} a_i &\in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R})) \\ \partial_z a_i &\in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b(\mathbb{R})) \\ \partial_\theta a_i &\in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b(\mathbb{R})), \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

$\forall i = 1, \dots, n$. Então:

i) Para cada $z \in \mathbb{R}^n$ e $\theta \in \mathbb{R}$, existe uma função $X(\cdot, z, \theta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = a(X, \theta) \\ X(0, z, \theta) = z \end{cases}$$

satisfazendo a propriedade: se $t \in \mathbb{R}$ e φ satisfaz (3.0.3), temos $\varphi(X(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$;

ii) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, o fluxo X gera um sistema dinâmico contínuo $T^\theta : \mathbb{R} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ satisfazendo a propriedade: se $t \in \mathbb{R}$ e φ satisfaz (3.0.3), temos $\varphi(T^\theta(t, \cdot), \cdot) \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$.

Demonstração. 1) Consideremos

$$Y = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n); f(z, \theta) - z \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, C_b^1(\mathbb{R}))^n \right\}.$$

Note que se $f, g \in Y$, então $f - g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, C_b^1(\mathbb{R}))^n$ e portanto faz sentido definir a métrica $d_Y : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$d_Y(f, g) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|f(z, \cdot) - g(z, \cdot)\|_{C_b^1}.$$

Agora, dado $T > 0$, defina $E = C([-T, T], Y)$ e a métrica $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$d(f, g) = \sup_{t \in [-T, T]} d_Y(f(t, \cdot), g(t, \cdot)).$$

Definimos $X_0(t, z, \theta) = z$, $X_1(t, z, \theta) = z + \int_0^t a(X_0, \theta) ds$ e indutivamente $X_{k+1}(t, z, \theta) = z + \int_0^t a(X_k, \theta) ds$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Por simplicidade, vamos utilizar a notação $X_k := X_k(\cdot, z, \theta)$.

Assim, se $L > 0$ é a constante de Lipschitz (independente de $\theta \in \mathbb{R}$) referente ao campo a e $\|a\|_\infty, \|\partial_z a\|_\infty, \|\partial_\theta a\|_\infty \leq C$, observemos que

$$|X_1 - X_0| = \left| \int_0^t a(z, \theta) ds \right| \leq Ct,$$

$$|X_2 - X_1| = \left| \int_0^t [a(X_1, \theta) - a(X_0, \theta)] ds \right| \leq L \int_0^t |X_1 - X_0| ds \leq CL \frac{t^2}{2} \leq \frac{(CT)^2}{2}$$

e indutivamente

$$|X_k - X_{k-1}| \leq \frac{(CT)^k}{k!}, \quad (3.0.4)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Já que $X'_0(t, z, \theta) = 0$, $X'_1(t, z, \theta) = \int_0^t [\partial_z a(X_0, \theta) X'_0 + \partial_\theta a(x_0, \theta)] ds$ e indutivamente $X'_k(t, z, \theta) = \int_0^t [\partial_z a(X_{k-1}, \theta) X'_{k-1} + \partial_\theta a(x_{k-1}, \theta)] ds$, temos

$$|X'_1| \leq Ct,$$

$$|X'_2| \leq C \int_0^t |X'_1| ds + Ct \leq C^2 \frac{t^2}{2} + Ct$$

e indutivamente

$$|X'_k| \leq \sum_{j=1}^k \frac{(Ct)^j}{j!} \leq e^{Ct}, \quad (3.0.5)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Logo, utilizando (3.0.5), temos

$$|X'_1 - X'_0| \leq Ct,$$

$$\begin{aligned} |X'_2 - X'_1| &\leq \int_0^t |\partial_z a(X_1, \theta) X'_1 - \partial_z a(X_0, \theta) X'_0| ds + \\ &\int_0^t |\partial_\theta a(X_1, \theta) - \partial_\theta a(X_0, \theta)| ds \leq \\ &\int_0^t |\partial_z a(X_1, \theta)(X'_1 - X'_0)| ds + \\ &\int_0^t |(\partial_z a(X_1, \theta) - \partial_z a(X_0, \theta)) X'_0| ds + \\ &\int_0^t |\partial_\theta a(X_1, \theta) - \partial_\theta a(X_0, \theta)| ds \leq \\ &\frac{(Ct)^2}{2} + M_1 LC \frac{t^2}{2} + M_2 LC \frac{t^2}{2} \leq \frac{(CT)^2}{2} \end{aligned}$$

e indutivamente

$$|X'_k - X'_{k-1}| \leq \frac{(CT)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.0.6)$$

Juntando as informações obtidas em (3.0.4) e (3.0.6), garantimos

$$d(X_k, X_{k-1}) \leq \frac{(CT)^k}{k!}.$$

Mas, como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(CT)^k}{k!} < \infty$ e E é um espaço de Banach com a métrica d , então existe

$X \in E$ tal que $\sum_{j=1}^k (X_j - X_{j-1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} X$ em E .

Além disso, como $X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (X_{j+1} - X_j)$, portanto $X_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} X$ em E . Como

$X_k(t, z, \theta) = z + \int_0^t a(X_{k-1}, \theta) ds$, então fazendo $k \rightarrow \infty$ e utilizando o teorema da convergência dominada, obtemos

$$X(t, z, \theta) = z + \int_0^t a(X, \theta) ds.$$

2) Agora, suponhamos que b satisfaz (3.0.3). Mostremos que $\varphi(\cdot + b(\cdot, \cdot), \cdot) \in \text{AP}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$. De fato, seja $g(z, \theta) = \varphi(z + b(z, \theta), \theta)$.

Como $AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ pode ser visto como o espaço das funções $g \in BUC(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ tais que o conjunto $\{g(\cdot + t, \cdot); t \in \mathbb{R}^n\}$ é pré-compacto em $BUC(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ com a norma de $BUC(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, então a menos de subsequência, existe $(t_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_j(\cdot + t_j, \cdot) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{\varphi}$ e $b_j(\cdot + t_j, \cdot) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{b}$ em $BUC(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$. Assim, se $\bar{g}(z, \theta) = \bar{\varphi}(z + \bar{b}(z, \theta), \theta)$, então

$$\begin{aligned} & |g(z + t, \theta) - \bar{g}(z, \theta)| = \\ & |\varphi(z + t_j + b(z + t_j, \theta), \theta) - \bar{\varphi}(z + \overline{b(z, \theta)}, \theta)| \leq \\ & |\varphi(z + t_j + b(z + t_j, \theta), \theta) - \varphi(z + t_j + \bar{b}(z, \theta), \theta)| + \\ & |\varphi(z + t_j + \bar{b}(z, \theta), \theta) - \bar{\varphi}(z + \bar{b}(z, \theta), \theta)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

sempre que $j > j_1, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} & |g'(z + t, \theta) - \bar{g}'(z, \theta)| = \\ & |\nabla \varphi(z + t_j + b(z + t_j, \theta), \theta) \cdot (b'(z + t_j, \theta, 1)) - \\ & \nabla \bar{\varphi}(z + \overline{b(z, \theta)}, \theta) \cdot (\bar{b}'(z, \theta) - 1)| \leq \\ & |\nabla \varphi(z + t_j + b(z + t_j, \theta), \theta) - \\ & \nabla \bar{\varphi}(z + \overline{b(z, \theta)}, \theta)| |b'(z + t_j, \theta) - \bar{b}'(z, \theta)| < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

sempre que $j > j_2, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Assim, se $j_0 = \max\{j_1, j_2\}$, obtemos

$$d_Y(g(z + t_j, \cdot), \bar{g}(z, \cdot)) < \epsilon,$$

sempre que $j > j_0$.

3) Afirmamos que se φ satisfaz (3.0.3), então $\varphi(X(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Com efeito, observemos que

$$\varphi(X_1(t, z, \theta), \theta) = \varphi\left(z + \int_0^t a(z, \theta) ds, \theta\right) = \varphi(z + a(z, \theta)t, \theta),$$

logo, pelo passo 2), $\varphi(X_1(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$.

Para $k \in \mathbb{N}$, suponhamos que $\varphi(X_k(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, para qualquer φ

satisfazendo (3.0.3). Se $b(t, z, \theta) = \int_0^t a(X_k, \theta) ds$, note que

$$\begin{aligned} \varphi(X_{k+1}(t, z, \theta), \theta) &= \\ \varphi\left(z + \int_0^t a(X_k, \theta) ds, \theta\right) &= \\ \varphi(z + b(t, z, \theta), \theta), \end{aligned}$$

portanto, pela hipótese de indução e pelo passo 2), segue a afirmação.

4) Por fim, analogamente ao que foi feito por H. Frid e J. Silva em [22] (Lema 2.2), para cada $t, \theta \in \mathbb{R}$, o fluxo $X(t, \cdot, \theta) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se estende a um homomorfismo $\underline{X}(t, \cdot, \theta) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ e por conseguinte a um mapa contínuo $\underline{X} : \mathbb{R} \times \mathcal{K} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}$.

Assim, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, seja $T^\theta : \mathbb{R} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ o sistema dinâmico contínuo definido por $T^\theta(t, \omega) := \underline{X}(t, \omega, \theta)$.

Se $\varphi \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ satisfaz a propriedade (3.0.3), afirmamos que $\varphi(T^\theta(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$. Com efeito, pelos passos anteriores, sabemos que $\varphi(X(t, \cdot, \cdot), \cdot) \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, existe $\underline{u} \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$ tal que

$$\varphi(X(t, z, \theta), \theta) = u(z, \theta),$$

$\forall (z, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$u(z, \theta) = \varphi(X(t, z, \theta), \theta) = \varphi(T^\theta(t, z), \theta),$$

$\forall z \in \mathbb{R}^n$. Assim, como \mathbb{R}^n é denso em \mathcal{K} , por continuidade, obtemos

$$\underline{u}(\omega, \theta) = \varphi(T^\theta(t, \omega), \theta).$$

Como $\theta \in \mathbb{R}$ é qualquer, segue a afirmação. □

Dando continuidade, consideremos o espaço de funções testes

$$S_{ap}^\lambda = \left\{ g \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} f'(y, \lambda) g(y) \cdot \nabla \varphi(y) dy = 0, \forall \varphi \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^n) \cap AP(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Se para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, \lambda) \in AP(\mathbb{R}^n)$, seja $\widetilde{f(\cdot, \lambda)}$ a projeção ortogonal de tal função no espaço S_{ap}^λ . O próximo resultado diz respeito a regularidade de tal projeção.

Proposição 3.0.6. *Se $v \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ satisfaz (3.0.3), então existem $g \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ e $N \subset K$ de medida total tal que $v(y, \theta) = \underline{g}(y, \theta), \forall (y, \theta) \in N \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. 1) Seja \mathcal{K}_1 a compactificação de Stone-Cech de \mathbb{R} e \bar{f} a única extensão contínua de f em \mathcal{K}_1 . Em [41] (teorema 3.2), ficou provado que existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1)$ tal que

$$\int_{\mathcal{K}_1} \bar{f}(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad (3.0.7)$$

$\forall f \in C(\mathbb{R})$ que possui média.

2) Agora, sejam $v \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ satisfazendo (3.0.3) e $\underline{v} \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$. Para cada $\theta \in \mathbb{Q}$, pelo teorema de Birkhoff 2.2.5, existe $N(\theta) \subset \mathcal{K}$ de medida total tal que $\underline{v}(T^\theta(t, \omega), \theta)$ possui valor médio, $\forall \omega \in N(\theta)$. Agora, pelo teorema ergódico de Neumann 2.2.7, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \underline{v}(T^\theta(s, \cdot), \theta) ds = \widetilde{v(\cdot, \theta)} \text{ em } L^2(\mathcal{K}).$$

Portanto, segue de (3.0.7) que podemos escrever

$$\int_{\mathcal{K}_1} \underline{v}(T^\theta(s, \omega), \theta) d\mu(s) = \widetilde{v(\omega, \theta)}, \quad (3.0.8)$$

$\forall \omega \in N(\theta)$.

Defina $N = \bigcap_{\theta \in \mathbb{Q}} N(\theta)$ e assim N tem medida total em \mathcal{K} . Pelo lema 3.0.5, temos $\underline{v}(T^\cdot(t, \cdot), \cdot) \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$. Portanto, por aproximação vale (3.0.8), $\forall (\omega, \theta) \in N \times \mathbb{R}$.

3) Defina $F : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$ por $F(t) = \underline{v}(T^\cdot(t, \cdot), \cdot)$. Provemos que $F \in BUC(\mathbb{R}, C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R})))$. De fato, para $t, s \in \mathbb{R}$, da construção feita no lema 3.0.5, sabemos que

$$|X(t, z, \theta) - X(s, z, \theta)| \leq C_1 |t - s|$$

e

$$|X'(t, z, \theta) - X'(s, z, \theta)| \leq C_2 |t - s|,$$

logo

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|X(t, z, \cdot) - X(s, z, \cdot)\|_{C_b^1} \leq C |t - s|. \quad (3.0.9)$$

Como $v \in AP(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R})) \subset BUC(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$, então segue de (3.0.9) que

$$|v(T^\theta(t, z), \theta) - v(T^\theta(s, z), \theta)| < \epsilon,$$

$\forall (z, \theta) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}$.

Utilizando a densidade de \mathbb{R}^n em \mathcal{K} , garantimos

$$|\underline{v}(T^\theta(t, \omega), \theta) - \underline{v}(T^\theta(s, \omega), \theta)| < \epsilon,$$

$\forall \omega \in \mathcal{K}$, o que prova que $F \in BUC(\mathbb{R}, C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R})))$.

Assim, consideremos $\overline{F} : \mathcal{K}_1 \rightarrow C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$ a única extensão de F em \mathcal{K}_1 .

Por fim, pela teoria de integração em espaços de Banach (ver [38], teorema 3.27), existe $\underline{g} \in C(\mathcal{K}, C_b^1(\mathbb{R}))$ tal que

$$\underline{g} = \int_{\mathcal{K}_1} \overline{F}(t) d\mu(t).$$

Dessa forma, segue de (3.0.8) que

$$\begin{aligned} \underline{g}(\omega, \theta) &= \langle \delta_{\omega, \theta}, \underline{g} \rangle = \\ &\left\langle \delta_{\omega, \theta}, \int_{\mathcal{X}_1} \overline{F}(t) d\mu(t) \right\rangle = \\ &\int_{\mathcal{X}_1} \langle \delta_{\omega, \theta}, \overline{F}(t) \rangle d\mu(t) = \\ &\int_{\mathcal{X}_1} \underline{v}(T^\theta(t, \omega), \theta) d\mu(t) = \widetilde{v(\omega, \theta)}, \end{aligned}$$

$\forall(\omega, \theta) \in N \times \mathbb{R}$, como queríamos.

□

As próximas duas seções tratam da prova do teorema 3.0.1 e dos corolários 3.0.2 e 3.0.4.

3.1 PROVA DO TEOREMA 3.0.1

Por simplicidade, faremos a prova do teorema 3.0.1 no caso em que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = C_{per}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n) = L^2_{per}(\mathbb{R}^n)$. Note que nesse caso não precisamos nos preocupar com a separabilidade da álgebra com valor médio e portanto os detalhes da demonstração ficam mais claros.

Demonstração. 1) (Formulação cinética) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $M > 0$ e $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset MV(U)$ tal que $\text{supp } \nu_x^k \subset [-M, M]$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. $x \in U$.

Seja $p \in \mathbb{R}$. Pelo teorema fundamental do cálculo e pelo teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_p^\infty (f(kx, \lambda) - f(kx, p)) d\nu_x^k(\lambda) &= \int_p^\infty \int_p^\lambda f'(kx, \theta) d\theta d\nu_x^k(\lambda) = \\ \int_p^\infty \int_{\mathbb{R}} f'(kx, \theta) \chi_{(p, \lambda)}(\theta) d\theta d\nu_x^k(\lambda) &= \int_p^\infty \int_{\mathbb{R}} f'(kx, \theta) \chi_{(\theta, \lambda)}(\lambda) d\theta d\nu_x^k(\lambda) = \\ \int_p^\infty f'(kx, \theta) \nu_x^k(\theta, \infty) d\theta. \end{aligned}$$

Pelo lema 2.1.14, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de medidas μ^k em U , tal que

$$\text{div} \left(\int_p^\infty f'(kx, \theta) \nu_x^k(\theta, \infty) d\theta \right) = -\mu^k(\cdot, p) \text{ em } \mathcal{D}'(U).$$

Derivando no sentido das distribuições com relação a variável p e utilizando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\text{div}(f'(kx, \theta) \nu_x^k(\theta, \infty)) = -\partial_\theta \mu^k(\cdot, \theta) \text{ em } \mathcal{D}'(U \times \mathbb{R}). \quad (3.1.10)$$

Sejam $g \in C_{per}^1(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, $\varphi \in C_c(U)$ e $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$. Escolhendo $g(kx, \theta)\varphi(x)\gamma(\theta)$ como função teste em (3.1.10), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \langle \mu^k(\cdot, \theta), \partial_{\theta}[g(kx, \theta)\gamma(\theta)]\varphi(\cdot) \rangle d\theta = \\ & \underbrace{k \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla g(kx, \theta)\varphi(x)\gamma(\theta) dx d\theta}_{(*)} + \\ & \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla \varphi(x) g(kx, \theta)\gamma(\theta) dx d\theta. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Nosso interesse é tomar $k \rightarrow \infty$ em (3.1.11), mas não sabemos ao certo o que ocorre com o termo $(*)$ na igualdade acima.

Para contornar tal problema, consideremos os espaços de funções testes

$$\begin{aligned} S_{per}^{\theta} &= \left\{ g \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n); \operatorname{div}[g(\cdot) f'(\cdot, \theta)] = 0 \text{ em } \mathcal{D}'([0, 1]^n) \right\} \text{ e} \\ S_{per} &= \left\{ v \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R})); v(\cdot, \theta) \in S_{per}^{\theta}, \forall \theta \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Se $v \in S_{per}$, então existe $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_{per}^1(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ tal que $v_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v$ em $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$.

Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, seja $\widetilde{v_j(\cdot, \theta)} \in S_{per}^{\theta}$ a projeção ortogonal de $v_j(\cdot, \theta)$ em S_{per}^{θ} .

Note que não é certo que $\widetilde{v_j(\cdot, \theta)}$ tenha regularidade suficiente para ser substituída como função teste.

Assim, pela proposição 3.0.6, existe $g_j \in C_{per}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ tal que $g_j(\cdot, \theta) = \widetilde{v_j(\cdot, \theta)}, \forall j \in \mathbb{N}$. Note que $g_j(\cdot, \theta)$ ainda não tem regularidade suficiente para ser usada como função teste, mas é possível fazermos uma convolução, ou seja, consideremos $g_j^{\delta}(\cdot, \theta) = g_j(\cdot, \theta) * \rho_{\delta}(\cdot) \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, onde ρ_{δ} é a aproximação da identidade em \mathbb{R}^n . Substituindo tal informação em (3.1.11), temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \langle \mu^k(\cdot, \theta), \partial_{\theta}[g_j^{\delta}(kx, \theta)\gamma(\theta)]\varphi(\cdot) \rangle d\theta = \\ & \underbrace{k \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla g_j^{\delta}(kx, \theta)\varphi(x)\gamma(\theta) dx d\theta}_{(*_{\delta})} + \\ & \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla \varphi(x) g_j^{\delta}(kx, \theta)\gamma(\theta) dx d\theta. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Queremos provar que $(*_{\delta}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Para isso, vamos utilizar a mesma técnica desenvolvida

por A.-L. Dalibard em [13] (pág. 13). Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f(y, \theta)g_j^\delta(y)) &= \\ \operatorname{div}(f(y, \theta))g_j^\delta(y) + f'(y, \theta) \cdot \nabla g_j^\delta(y, \theta) &= \\ f'(y, \theta) \cdot \nabla g_j^\delta(y, \theta). \end{aligned}$$

Mas, como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f(y, \theta)g_j^\delta(y, \theta)) &= \operatorname{div}(f'(y, \theta)[g_j * \rho_\delta](y, \theta)) \\ &= \operatorname{div}([f'g_j] * \rho_\delta(y, \theta)) \\ &+ \underbrace{\operatorname{div}(f'(y, \theta)[g_j * \rho_\delta](y, \theta)) - \operatorname{div}([f'g_j] * \rho_\delta)(y, \theta))}_{r_\delta(y, \theta)}, \end{aligned}$$

então

$$f'(y, \theta) \cdot \nabla g_j^\delta(y, \theta) = \operatorname{div}([f'g_j] * \rho_\delta)(y, \theta) + r_\delta(y, \theta).$$

Como $g_j \in S_{per}^\theta$, então por definição $\operatorname{div}([f'(y)g_j] * \rho_\delta(y)) = 0$.

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} r_\delta(y, \theta) &= f'(y, \theta) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g_j(z, \theta) \nabla \rho_\delta(y - z) dz \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} f'(z, \theta) g_j(z, \theta) \cdot \nabla \rho_\delta(y - z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f'(y, \theta) - f'(z, \theta)] g_j(z, \theta) \cdot \nabla \rho_\delta(y - z) dz. \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio, existe $\tau \in (0, 1)$ tal que

$$f'_i(y, \theta) - f'_i(z, \theta) = \sum_{\ell=1}^n \partial_{y_\ell} f'_i(\tau z + (1 - \tau)y, \theta)(y_\ell - z_\ell), \quad i = 1, \dots, n,$$

logo

$$r_\delta(y, \theta) = \sum_{i, \ell=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_\ell} f'_i(\tau z + (1 - \tau)y, \theta)(y_\ell - z_\ell) g_j(z, \theta) \partial_{y_i} \rho_\delta(y - z) dz.$$

Vamos mostrar que $r_\delta(\cdot, \theta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \operatorname{div}(f'(\cdot, \theta))g_j(\cdot, \theta) = 0$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para isso, seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Utilizando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,\ell=1}^n \int_K \partial_{y_\ell} f'_i(\tau z + (1-\tau)y, \theta)(y_\ell - z_\ell) \partial_{y_i} \rho_\delta(y-z) dy = \\
& - \sum_{i=1}^n \int_K \partial_{y_i} f'_i(\tau z + (1-\tau)y, \theta) \rho_\delta(y-z) dy \\
& - \underbrace{\sum_{i,\ell=1}^n \int_K \partial_{y_i y_\ell}^2 f'_i(\tau z + (1-\tau)y, \theta)(y_\ell - z_\ell) \rho_\delta(y-z) dy}_{r_\delta^1(\theta)} \\
& + \underbrace{\sum_{i,\ell=1}^n \int_{\partial K} \partial_{y_\ell} f'_i(\tau z + (1-\tau)y, \theta)(y_\ell - z_\ell) \rho_\delta(y-z) \nu_i d\mathcal{H}^{n-1}(y)}_{r_\delta^2(\theta)}.
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Como $y-z \in \text{supp}(\rho_\delta(\cdot-z)) \subset B_\delta(z)$, então $|y-z| < \delta$ e já que $f \in C_{per}^1(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$ e $\rho_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$|r_\delta^1(\theta)|, |r_\delta^2(\theta)| \leq C\delta.$$

Portanto, tomando $\delta \rightarrow 0$ em (3.1.13), utilizando o teorema da convergência dominada e que ρ_δ é uma aproximação da identidade, obtemos

$$r_\delta(\cdot, \theta) \rightarrow \text{div}(f')g_j = 0 \text{ em } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Como consequência, isso prova que $(*_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Logo, retornando em (3.1.12), tomando $\delta \rightarrow 0$, utilizando o teorema da convergência dominada e o fato de que ρ_δ é uma aproximação da identidade, garantimos

$$\int_{\mathbb{R}} \langle \mu^k(\cdot, \theta), \partial_\theta [g_j(kx, \theta)\gamma(\theta)] \varphi(\cdot) \rangle d\theta = \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla \varphi(x) g_j(kx, \theta) \gamma(\theta) dx d\theta. \tag{3.1.14}$$

2) (Princípio da localização) Seja $\nu_x^{k, f'g_j}(\theta, \infty) = \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) g(kx, \theta)$. Utilizaremos (3.1.14) para provar que a sequência de distribuições dada por

$$\mathcal{L}^k := \text{div} \left(\phi(x) \int_{\mathbb{R}} \nu_x^{k, f'g_j}(\theta, \infty) \gamma(\theta) d\theta \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

$\forall \phi \in C_c^1(U)$, é compacta em $H^{-1}(U)$.

Para isso, vamos utilizar uma construção análoga a feita por E.Y. Panov em [36] (pág.

222). Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^k &= \nabla\phi(x) \int_{\mathbb{R}} \nu_x^{k,f'g_j}(\theta, \infty) \gamma(\theta) d\theta + \\ &\phi(x) \operatorname{div} \left(\int_{\mathbb{R}} \nu_x^{k,f'g_j}(\theta, \infty) \gamma(\theta) d\theta \right) = \\ &\underbrace{\nabla\phi(x) \int_{\mathbb{R}} \nu_x^{k,f'g_j}(\theta, \infty) \gamma(\theta) d\theta}_{R_k^1} + \\ &\underbrace{\phi(x) \int_{\mathbb{R}} \mu^k(x, \theta) [g'_j(kx, \theta) \gamma(\theta) + g_j(kx, \theta) \gamma'(\theta)] d\theta}_{R_k^2} \text{ em } \mathcal{D}'(U). \end{aligned}$$

Como $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^1(U)$, note que $|R_k^1| \leq C|\nabla\phi(x)|$ e assim

$$\|R_k^1\|_2 \leq C\|\nabla\phi\|_2 \leq C_1, \forall k \in \mathbb{N},$$

o que prova que $(R_k^1)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(U)$ é limitada. Como $L^1(U)$ é imerso compactamente em $H^{-1}(U)$, então $(R_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ é compacto em $H^{-1}(U)$.

Além disso, como $g_j \in C_{per}(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$, $\theta \in [-M, M]$ e utilizando o lema 2.1.14, garantimos

$$\begin{aligned} |R_k^2| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(x) \mu^k(x, \theta)| [|g'(kx, \theta) \gamma(\theta)| + |g(kx, \theta) \gamma'(\theta)|] d\theta \\ &\leq C|\phi \mu^k| \leq C_2 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \end{aligned}$$

isto é, fica provado que $\operatorname{Var}(R_k^2) \leq C_2$.

Portanto, segue do lema 2.1.17 que $(\mathcal{L}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é compacto em $H^{-1}(U)$.

Agora, sejam

$$\nu_x^{f'g_j}(\theta, \infty) = \int_{[0,1]^n} \nu_{x,y}(\theta, \infty) f'(y, \theta) g_j(y, \theta) dy$$

e

$$U_\theta^{k,f'g_j}(x) = \nu_x^{k,f'g_j}(\theta, \infty) - \nu_x^{f'g_j}(\theta, \infty).$$

Defina

$$\mathcal{L}^0 = \operatorname{div} \left(\phi(x) \int_{\mathbb{R}} \nu_x^{f'g_j}(\theta, \infty) \gamma(\theta) d\theta \right) \text{ em } \mathcal{D}'(U)$$

e

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{L}^k - \mathcal{L}^0 = \operatorname{div} \left(\phi(x) \int_{\mathbb{R}} U_\theta^{k,f'g_j}(x) \gamma(\theta) d\theta \right) \text{ em } \mathcal{D}'(U).$$

Pelo lema 2.5.4, sabemos que $U_\theta^{k,f'g_j} \xrightarrow{*} 0$ em $L^\infty(U)$, $\forall \theta \in E$, e como $(\mathcal{B}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é compacto em $H^{-1}(U)$, garantimos

$$\mathcal{B}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ em } H^{-1}(U). \quad (3.1.15)$$

Utilizemos (3.1.15) para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi U_{\theta}^{k, f' g_j})(\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \gamma(\theta) d\theta \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3.1.16)$$

Novamente, vamos utilizar uma construção análoga a feita por E.Y. Panov em [36] (pág. 223). De fato, pela caracterização de $H^{-1}(U)$ via transformada de Fourier, podemos reescrever (3.1.15) como

$$(1 + |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F} \left(\operatorname{div} \left[\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right] \right) (\xi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por propriedade da transformada de Fourier, temos

$$(1 + |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F} \left(\operatorname{div} \left[\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right] \right) (\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \xi,$$

logo,

$$(1 + |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \xi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Para $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$, note que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n - B_r(a)} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right|^2 d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}^n - B_r(a)} \frac{1}{(2|\xi|)^2} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \xi \right|^2 d\xi \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^n - B_r(a)} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^2} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \xi \right|^2 d\xi \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^2} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \xi \right|^2 d\xi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\cdot) \cdot \frac{\cdot}{|\cdot|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n - B_r(a)). \quad (3.1.17)$$

Mas, pela definição da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e pelo teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| \leq \\ & \left| \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) U_{\theta}^{k, f' g_j}(x) e_{\xi}(x) dx \right] \gamma(\theta) d\theta \right| \leq \\ & C \|U_{\theta}^{k, f' g_j}\|_{\infty} \|\gamma\|_{\infty} \|\phi\|_1 \leq \bar{C}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Isso prova que a sequência $\left(\mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

E já que $U_{\theta}^{k, f' g_j} \xrightarrow{*} 0$ em $L^{\infty}(U)$, então

$$\mathcal{F}(\phi U_{\theta}^{k, f' g_j})(\xi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (3.1.19)$$

para q.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, pela definição da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema de Fubini, por (3.1.18), pelo teorema da convergência dominada e (3.1.19), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(a)} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right|^2 d\xi \leq \\ & \bar{C} \int_{B_r(a)} \left| \mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| d\xi \leq \\ & C \int_{B_r(a)} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\phi U_{\theta}^{k, f' g_j})(\xi)| |\gamma(\theta)| d\theta d\xi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Dessa forma,

$$\mathcal{F} \left(\phi \int_{\mathbb{R}} U_{\theta}^{k, f' g_j} \gamma(\theta) d\theta \right) (\cdot) \cdot \frac{\cdot}{|\cdot|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(B_r(a)). \quad (3.1.21)$$

Juntando as informações obtidas em (3.1.17) e (3.1.21), garantimos (3.1.16).

Assim, utilizando (3.1.16), o teorema de Fubini e a representação encontrada na proposição 2.6.2, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi U_{\theta}^{k, f' g_j})(\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \gamma(\theta) d\theta \right) \overline{\mathcal{F}(\phi U_q^k)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\phi U_{\theta}^{k, f' g_j})(\xi) \cdot \overline{\mathcal{F}(\phi U_q^k)(\xi)} \frac{\xi}{|\xi|} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right) \gamma(\theta) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,1]^n} h_{\phi, \psi \xi}^{\theta q}(y) \cdot f'(y, \theta) g_j(y, \theta) dy \right) \gamma(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$ é qualquer, obtemos

$$\int_{[0,1]^n} h_{\phi, \psi \xi}^{\theta q}(y) \cdot f'(y, \theta) g_j(y, \theta) dy = 0 \quad (3.1.22)$$

para q.t.p. $\theta \in \mathbb{R} \cap E$.

Mas, como $v_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v$ em $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$, então $\tilde{v}_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \tilde{v} = v$ em $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, C_b^1(\mathbb{R}))$. Já que $\widetilde{v_j(\cdot, \theta)} = g_j(\cdot, \theta)$, então $g_j(\cdot, \theta) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v(\cdot, \theta)$ em $L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Assim, tomando $j \rightarrow \infty$ em (3.1.22), obtemos

$$\int_{[0,1]^n} h_{\phi, \psi \xi}^{\theta q}(y) \cdot f'(y, \theta) v(y, \theta) dy = 0, \quad (3.1.23)$$

$\forall v \in S_{per}$ e para q.t.p. $\theta \in \mathbb{R} \cap E$.

3) (Princípio da localização para a projeção) Fixemos $q \in E$. Afirmamos que a função $[0, 1]^n \ni y \mapsto h_{\phi, \psi}^{\theta q}(y) \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$h_{\phi, \psi}^{\theta q}(y) \in S_{per}^{\theta}, \quad (3.1.24)$$

$\forall \theta \in E$ e q.t.p. $x \in U$, onde $\varphi \in C_c(U)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$.

Para isso, seja $\nu_{x,y} \in MV(U \times [0, 1]^n)$ tal que $\nu_x^k \xrightarrow{2\text{esc}} \nu_{x,y}$. Provemos primeiro que a função $[0, 1]^n \ni y \mapsto \nu_{x,y}(\theta, \infty) \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\nu_{x,y}(\theta, \infty) \in S_{per}^\theta, \quad (3.1.25)$$

$\forall \theta \in E$ e q.t.p. $x \in U$, onde $\varphi \in C_c(U)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$.

Com efeito, escolhendo $\frac{1}{k}g(kx)\varphi(x)\gamma(\theta)$ como função teste em (3.1.10), onde $g \in C_{per}^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_c^1(U)$ e $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \langle \mu^k(\cdot, \theta), g(k\cdot)\varphi(\cdot) \rangle \gamma'(\theta) d\theta}_{(*_1^k)} = \\ & \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla g(kx)\varphi(x)\gamma(\theta) dx d\theta + \\ & \frac{1}{k} \underbrace{\int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla \varphi(x)g(kx)\gamma(\theta) dx d\theta}_{(*_2^k)}. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Não é difícil ver que $|(*_1^k)|, |(*_2^k)| \leq C$, portanto fazendo $k \rightarrow \infty$, utilizando o lema 2.5.3 e a notação $\nu_x^{f'\nabla g}(\theta, \infty) = \int_{[0,1]^n} \nu_{x,y}(\theta, \infty) f'(y, \theta) \cdot \nabla g(y) dy$, obtemos

$$\int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^{f'\nabla g}(\theta, \infty) \varphi(x)\gamma(\theta) dx d\theta = 0. \quad (3.1.27)$$

Portanto, pela arbitrariedade das funções $\varphi \in C_c^1(U)$ e $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$ fica provado (3.1.25).

Agora, escolhendo $\frac{1}{k}g(kx)\varphi(x)e_\xi(x)\gamma(\theta)$ como função teste em (3.1.10), onde $e_\xi(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \langle \mu^k(\cdot, \theta), g(k\cdot)\varphi(\cdot)e_\xi(\cdot) \rangle \gamma'(\theta) d\theta}_{r_1^k(\xi)} = \\ & \int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla g(kx)\varphi(x)e_\xi(x)\gamma(\theta) dx d\theta + \\ & \frac{1}{k} \underbrace{\int_{U \times \mathbb{R}} \nu_x^k(\theta, \infty) f'(kx, \theta) \cdot \nabla [\varphi(x)e_\xi(x)]g(kx)\gamma(\theta) dx d\theta}_{r_2^k(\xi)}. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Fazendo (3.1.27) menos (3.1.28) e utilizando as notações $\nu_x^{k,f'\nabla g}(\theta, \infty) = \nu_x^k(\theta, \infty) f'(y, \theta) \cdot \nabla g(y)$ e $U_\theta^{k,f'\nabla g}(x) = \nu_x^{k,f'\nabla g}(\theta, \infty) - \nu_x^{f'\nabla g}(\theta, \infty)$, garantimos

$$\frac{1}{k} r_1^k(\xi) = \int_{U \times \mathbb{R}} U_\theta^{k,f'\nabla g}(x) \varphi(x) e_\xi(x) \gamma(\theta) dx d\theta + \frac{1}{k} r_2^k(\xi).$$

Utilizando a definição da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, multiplicando por $\overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi)}(\xi)$ e $\psi \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e integrando em \mathbb{R}^n , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{r_1^k(\xi) \overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi)}(\xi)}_{(*_3^k)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(U_\theta^{k, f' \nabla g}(x) \varphi)(\xi) \overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi)}(\xi) \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right] \gamma(\theta) d\theta + \\ & \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{r_2^k(\xi) \overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi)}(\xi)}_{(*_4^k)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Novamente, não é difícil ver que $|(*_3^k)|, |(*_4^k)| \leq C$, portanto fazendo $k \rightarrow \infty$, utilizando o teorema da convergência dominada, a caracterização obtida em (2.6.2) e a arbitrariedade da função $\gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$, temos

$$\int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) f'(y, \theta) \cdot \nabla g(y) dy = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{div}[h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) f'(y, \theta)] = 0 \text{ em } \mathcal{D}'([0, 1]^n),$$

o que prova (3.1.24).

Por fim, conforme estudo feito por J. Silva em [42] (pág. 3631), temos que o conjunto $S_{per} \cap L_{per}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra e vale

$$\widetilde{uv} = \widetilde{u}v, \quad (3.1.29)$$

$\forall u \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$ e $v \in S_{per} \cap L_{per}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Assim, se $v \in S_{per}$, voltando em (3.1.23), utilizando (3.1.24) e (3.1.29), garantimos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) f'(y, \theta) v(y, \theta) dy = \\ & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} v(y, \theta) dy + \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)}^\perp v(y, \theta) dy = \\ & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} v(y, \theta) dy = \\ & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} v(y, \theta) dy. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Portanto, para $g \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$ e por (3.1.30), temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} g(y) dy = \\ & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} \widetilde{g(y)} dy + \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} \widetilde{g(y)}^\perp dy = \\ & \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y, \theta)} \widetilde{g(y)} dy = 0, \end{aligned}$$

o que prova o objetivo principal desse passo:

$$\int_{[0,1]^n} h_{\varphi,\psi}^{\theta q}(y) \widetilde{f'(y,\theta)} g(y) dy = 0, \quad (3.1.31)$$

$\forall g \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$.

4) (Pré-compacidade forte da sequência $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $MV(U)$)

Fixemos $q \in E$ e $y_0 \in [0, 1]^n$ tal que vale a hipótese de não degeneração (1.0.2) e seja $\phi \in C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Utilizando (3.1.31), temos

$$0 = \int_{[0,1]^n} h_{\phi\xi}^{pq}(y) \cdot \widetilde{f'(y,p)} g(y) dy = \int_{[0,1]^n} h_{\phi\xi}^{pq}(y) \cdot [\widetilde{f'(y,p)} - \widetilde{f'(y_0,p)} + \widetilde{f'(y_0,p)}] g(y) dy$$

e portanto

$$\widetilde{f'(y_0,p)} \cdot \int_{[0,1]^n} h_{\phi\xi}^{pq}(y) g(y) dy = - \int_{[0,1]^n} h_{\phi\xi}^{pq}(y) \cdot [\widetilde{f'(y,p)} - \widetilde{f'(y_0,p)}] g(y) dy. \quad (3.1.32)$$

Para $g \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n)$, pela proposição 2.6.2, existe uma medida de Radon m_g^{pq} em $U \times \mathbb{S}^{n-1}$ dada por

$$\langle m_g^{pq}, \phi \rangle = \int_{[0,1]^n} h_{\phi}^{pq}(y) g(y) dy.$$

Para $\delta \in (0, 1]$, escolhemos $g = \chi_{B_\delta(y_0)}$ e escrevemos $m_{\chi_{B_\delta(y_0)}}^{pq} = m_\delta^{pq}$.

Segue da hipótese (1.0.2) que a função $f'(\cdot, p) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \forall p \in V_\gamma(p_0)$. Portanto, pelo teorema ergódico de Neumann 2.2.7, temos $\widetilde{f'(\cdot, p)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e assim $\|\widetilde{f'(\cdot, p)}\|_\infty \leq C, \forall p \in V_\gamma(p_0)$.

Assim, por (3.1.32) e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{f'(y_0,p)} \cdot \langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \rangle| &= \left| \int_{[0,1]^n} h_{\phi\xi}^{pq}(y) \cdot [\widetilde{f'(y,p)} - \widetilde{f'(y_0,p)}] \chi_{B_\delta(y_0)}(y) dy \right| \\ &\leq 2C\delta^{\frac{n}{2}} \|h_{\phi\xi}^{pq}\|_2. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Façamos um estudo de (3.1.33). Se $L := L(p_0, \delta_0)$, utilizando (2.6.33), temos $L(p, \delta) = L$ e

$$\text{supp}(m_\delta^{pq}) \subset U \times L,$$

$\forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in (0, 1]$.

Assim, se $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow L$ é a projeção ortogonal, então

$$\widetilde{f'(y_0,p)} \cdot \langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \rangle = \pi(\widetilde{f'(y_0,p)}) \cdot \langle m_\delta^{pq}, \phi\xi \rangle. \quad (3.1.34)$$

Se $\bar{L} := L + iL$, utilizando novamente (2.6.33), temos $R(p, \delta) = \bar{L}$. Portanto, pela definição de $R(p, \delta)$, existe $\{\phi_i\}_{i=1}^m \subset C_c(U \times \mathbb{S}^{n-1})$ tal que os vetores $v_i := \langle m_\delta^{pq}, \phi_i\xi \rangle, i = 1, \dots, m$, formam uma base de \bar{L} .

Juntando (3.1.33) e (3.1.34), obtemos

$$\begin{aligned} |\pi(\widetilde{f'(y_0, p)}) \cdot v_i| &\leq 2C\delta^{\frac{n}{2}} \|h_{\phi_i \xi}^{pq}\|_2 \\ &\leq C_i(p_0)\delta^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, m$.

Portanto, dado $v \in L$, temos $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ e assim

$$\begin{aligned} |\pi(\widetilde{f'(y_0, p)}) \cdot v| &\leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| |\pi(\widetilde{f'(y_0, p)}) \cdot v_i| \leq \\ &\sum_{i=1}^m |\alpha_i| C_i(p_0) \delta^{\frac{n}{2}} \leq C(p_0) |v| \delta^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

onde $C(p_0) = \max_{i=1, \dots, m} C_i(p_0)$.

Logo, utilizando o teorema de representação de Riesz e o fato de que $L(p, \delta) = L, \forall p \in V_\gamma(p_0)$ e $\delta \in (0, 1]$, obtemos

$$|\pi(\widetilde{f'(y_0, p)})| \leq C(p_0) \delta^{\frac{n}{2}}. \quad (3.1.35)$$

Portanto, fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos $\pi(\widetilde{f'(y_0, p)}) \equiv 0, \forall p \in V_\gamma(p_0)$.

Daqui temos duas opções:

1^a) Temos $L(p, \delta) = L \equiv 0$, o que nos sugere $m_\delta^{pq} \equiv 0, \forall \delta \in (0, 1]$.

2^a) Temos $\dim L > 0$, o que nos sugere que existe $v \in L - \{0\}$. Como $\widetilde{f'(y_0, p)} = f'_1(y_0, p) + f'_2(y_0, p)$, onde $f'_1(y_0, p) \in L$ e $f'_2(y_0, p) \in L^\perp$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{f'(y_0, p)} \cdot v &= f'_1(y_0, p) \cdot v + f'_2(y_0, p) \cdot v = \\ f'_1(y_0, p) \cdot v &= \pi(f'_1(y_0, p)) \cdot v = 0, \end{aligned}$$

$\forall p \in V_\gamma(p_0)$, o que contraria a hipótese de não degeneração em (1.0.2).

Como $p, q \in E$ são quaisquer, concluímos que

$$m_\delta^{pq} \equiv 0, \forall \delta \in (0, 1] \text{ e } p, q \in E. \quad (3.1.36)$$

Agora, observemos que escolhendo $\delta = 1$ e lembrando que $y_0 \in [0, 1]^n$ e $\chi_1 := \chi_{B_1(y_0)}$, então pela caracterização encontrada na proposição 2.6.2, obtemos

$$\begin{aligned} \langle m_1^{pq}, |\varphi|^2 \otimes \psi \xi \rangle &= \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi \xi}^{pq}(y) \chi_1(y) dy \\ &= \int_{[0,1]^n} h_{\varphi, \psi \xi}^{pq}(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(U_p^{k,1} \varphi)(\xi) \cdot \overline{\mathcal{F}(U_q^k \varphi)(\xi)} \frac{\xi}{|\xi|} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \\ &= \langle \mu^{pq}, |\varphi|^2 \otimes \psi \xi \rangle, \end{aligned}$$

onde μ^{pq} é a H-medida clássica dada pelo corolário 2.6.3.

Utilizando (3.1.36) e o teorema 2.6.4, existe $\nu_x \in MV(U)$ tal que a menos de subsequência, $\nu_x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nu_x$, como queríamos.

□

3.2 PROVA DOS COROLÁRIOS 3.0.2 e 3.0.4

Segue uma prova do corolário 3.0.2 (ver enunciado na pág. 43), que trata de uma aplicação mais simplória do teorema 3.0.1.

Demonstração. Sabemos que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as hipóteses de regularidade encontradas em (1.0.2). Como $\widetilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda)$, então φ também satisfaz a hipótese de não degeneração em (1.0.2). Portanto, pelo teorema 3.0.1, a sequência limitada de medidas $(\nu_x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz

$$\operatorname{div} \left(\int_p^\infty \operatorname{sgn}(\lambda - p)(\varphi(\lambda) - \varphi(p)) d\nu_x^k(\lambda) \right) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}'(U), \forall p \in \mathbb{R},$$

converge fortemente.

□

Agora, segue uma demonstração do corolário 3.0.4 (ver enunciado na pág. 44), que estabelece um interessante resultado de homogenização para leis de conservação escalares não homogêneas.

Demonstração. Consideremos a sequência de medidas de Young $\nu_{t,x}^{\epsilon_k} := \delta_{u_{\epsilon_k}(t,x)}$, em que $\epsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Pelos teoremas 3.0.1 e 2.1.13, existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ tal que a menos de subsequência, $\delta_{u_{\epsilon_k}(t,x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \delta_{u(t,x)}$, isto é,

$$u_{\epsilon_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \text{ em } L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^{n+1}). \quad (3.2.37)$$

Mas, como u_{ϵ_k} é solução entrópica de (3.0.1), temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |u_{\epsilon_k} - p| \partial_t \varphi(t, x) dt dx + \\ & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{sgn}(u_{\epsilon_k} - p)(f(kx, u_{\epsilon_k}) - f(kx, p)) \cdot \nabla \varphi(t, x) dt dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\epsilon_k}(x, kx) - p| \varphi(0, x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1}), k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$.

Portanto, tomando $k \rightarrow \infty$, utilizando o teorema da convergência dominada, a continuidade da função $\operatorname{sgn}(\cdot - p)f(y, \cdot), \forall (y, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e a convergência (3.2.37), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |u - p| \partial_t \varphi(t, x) dt dx + \\
& \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{sgn}(u - p) (\bar{f}(u) - \bar{f}(p)) \cdot \nabla \varphi(t, x) dt dx + \\
& \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{u}_0(x) - p| \varphi(0, x) dx \geq 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\bar{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \lambda) dy \text{ e } \bar{u}_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x, y) dy,$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ e $p \in \mathbb{R}$.

Isso prova que a função $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é solução entrópica do problema (3.0.2), como queríamos.

□

Capítulo 4

Decaimento de Soluções Entrópicas de Leis de Conservação Além do Contexto Estacionário Ergódico

Nesse capítulo, segue o enunciado e a prova do segundo teorema desse trabalho, referente ao decaimento de soluções entrópicas da lei de conservação escalar (1.0.4). Esse resultado tem por objetivo tratar de oscilações além de um contexto estacionário ergódico que por sua vez melhoraram os ótimos resultados obtidos por G. Q. Chen e H. Frid em [11] e E. Yu. Panov em [33].

Tal resultado já foi publicado e sua referência é [40]. Segue o enunciado desse teorema.

Teorema 4.0.1. *Sejam $\tau : \mathbb{G} \times \Omega \rightarrow \Omega$ um sistema dinâmico ergódico e $\Phi(y, \omega)$ uma deformação estocástica com respeito a τ . Suponhamos que vale a condição de não degeneração (1.0.5) e que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é uma solução entrópica de (1.0.4) com dado inicial v_0 satisfazendo (1.0.6), onde $u_0(y, \omega)$ é uma função τ -estacionária. Então, para \mathbb{P} -q.t.p. $\omega \in \Omega$ temos as seguintes propriedades de decaimento:*

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x, \omega) - M(u_0)| dx = 0,$$

onde

$$M(u_0) := \begin{cases} \frac{\mathbb{E} \left[\int_{\Phi([0,1]^n, \cdot)} u_0(\Phi^{-1}(y, \cdot), \cdot) dy \right]}{\det \left(\mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^n} \nabla \Phi(y, \cdot) dy \right] \right)}, & \text{se } \mathbb{G} = \mathbb{Z}^n, \\ \frac{\mathbb{E} \left[u_0(0, \cdot) \det(\nabla \Phi(0, \cdot)) \right]}{\det(\mathbb{E}[\nabla \Phi(0, \cdot)])}, & \text{se } \mathbb{G} = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Precisamos de um resultado auxiliar para fazer a demonstração do teorema 4.0.1. Segue o enunciado e a demonstração do mesmo na próxima subseção.

4.0.1 Resultado auxiliar

A seguinte proposição é central na prova do Teorema 4.0.1. Sua prova depende do clássico método de duplicação de variáveis de Kruzhkov.

Proposição 4.0.2. *Seja $u \in C(\mathbb{R}_+, L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ solução entrópica de (1.0.4) com dado inicial v_0 satisfazendo a condição (1.0.6). Então, para todo $k \in \mathbb{G}$ e $t > 0$ vale que*

$$u(t, \Phi(x + k, \omega), \omega) = u(t, \Phi(x, \tau_k \omega), \tau_k \omega),$$

para q.t.p. $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$.

Demonstração. 1) Suponhamos primeiro que a deformação estocástica $\Phi(y, \omega)$ satisfaz:

$$|(D\Phi)(x, \omega) - (D\Phi)(y, \omega)| \leq C|x - y| \quad (4.0.1)$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Usando o fato que $u = u(t, x, \omega)$ é solução entrópica de (1.0.4), temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |u - l| \partial_t \varphi(t, x) + \text{sgn}(u - l)(f(u) - f(l)) \cdot \nabla \varphi(t, x) \right\} dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\Phi^{-1}(x, \omega), \omega) - l| \varphi(0, x) dx,$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $l \in \mathbb{R}$. Definindo $v = v(t, x, \omega) := u(t, \Phi(x, \omega), \omega)$ e usando uma mudança de variáveis na desigualdade anterior, obtemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |v - l| \partial_t \varphi(t, x) + \text{sgn}(v - l) \left(F(x, \omega, v) - F(x, \omega, l) \right) \cdot \nabla \varphi(t, x) \right\} J_\Phi(x, \omega) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x, \omega) - l| \varphi(0, x) J_\Phi(x, \omega) dx, \quad (4.0.2)$$

$\forall l \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, em que J_Φ é o jacobiano de $\Phi(\cdot, \omega)$ e $F(x, \omega, \lambda) := [(D\Phi)(x, \omega)]^{-1} f(\lambda)$.

Note que dado $k \in \mathbb{G}$ e definindo $v_1(t, x, \omega) := v(t, x + k, \omega)$, $v_2(t, x, \omega) := v(t, x, \tau_k \omega)$ e usando a estacionariedade das funções F , J_Φ and u_0 , obtemos que v_1 e v_2 satisfazem a desigualdade (4.0.2) com $\tau_k \omega$ em vez de ω .

2) No que segue, usamos a notação abreviada $v_1 = v_1(t, x, \omega)$ e $v_2 = v_2(s, y, \omega)$. Trocando v por v_1 e l por v_2 em (4.0.2) e integrando com relação a s e y , obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} \left\{ |v_1 - v_2| \phi_t + \text{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(x, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_x \phi \right\} J_\Phi(x, \tau_k \omega) dx dt dy ds, \quad (4.0.3)$$

$\forall 0 \leq \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{n+1})^2)$. De forma similar, trocando v por v_2 e l por v_2 em (4.0.2) e integrando com relação a t e x , temos

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} \left\{ |v_1 - v_2| \phi_s + \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(y, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_y \phi \right\} J_\Phi(y, \tau_k \omega) dx dt dy ds. \quad (4.0.4)$$

Agora, somando (4.0.3) e (4.0.4), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} \left\{ |v_1 - v_2| \left((\phi_t + \phi_s) J_\Phi(x, \tau_k \omega) \right) + \phi_s (J_\Phi(y, \tau_k \omega) - J_\Phi(x, \tau_k \omega)) \right. \\ & + J_\Phi(x, \tau_k \omega) \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) \phi \\ & + \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_y \phi (J_\Phi(y, \tau_k \omega) - J_\Phi(x, \tau_k \omega)) \\ & + J_\Phi(x, \tau_k \omega) \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_2) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_x \phi \\ & \left. + J_\Phi(y, \tau_k \omega) \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(y, \tau_k \omega, v_1) - F(x, \tau_k \omega, v_1) \right) \cdot \nabla_y \phi \right\} dy ds dx dt. \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

Utilizemos a função teste $\phi(x, t, y, s) := \varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right) \rho_\delta\left(\frac{x-y}{2}\right) \theta_l\left(\frac{t-s}{2}\right)$, onde $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ e ρ_δ, θ_l são as clássicas aproximações da identidade em \mathbb{R}^n e \mathbb{R} , respectivamente, como no método de duplicação de variáveis. Assim, a desigualdade anterior pode ser escrita como

$$0 \leq \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} \left(\sum_{k=1}^6 I_k^{\delta, l} \right) dx dt dy ds, \quad (4.0.6)$$

em que

$$\begin{aligned} I_1^{\delta, l} &:= |v_1 - v_2| \varphi' \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2} \right) \rho_\delta \left(\frac{x-y}{2} \right) \theta_l \left(\frac{t-s}{2} \right) J_\Phi(x, \tau_k \omega), \\ I_2^{\delta, l} &:= |v_1 - v_2| \partial_s \phi \left(J_\Phi(y, \tau_k \omega) - J_\Phi(x, \tau_k \omega) \right), \\ I_3^{\delta, l} &:= \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot (\nabla \varphi) \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2} \right) \\ &\quad \rho_\delta \left(\frac{x-y}{2} \right) \theta_l \left(\frac{t-s}{2} \right) J_\Phi(x, \tau_k \omega), \\ I_4^{\delta, l} &:= \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_y \phi \\ &\quad \left(J_\Phi(y, \tau_k \omega) - J_\Phi(x, \tau_k \omega) \right), \\ I_5^{\delta, l} &:= \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(y, \tau_k \omega, v_2) - F(x, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla_x \phi J_\Phi(x, \tau_k \omega), \\ I_6^{\delta, l} &:= \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(y, \tau_k \omega, v_1) - F(x, \tau_k \omega, v_1) \right) \cdot \nabla_y \phi J_\Phi(y, \tau_k \omega). \end{aligned}$$

Acima, utilizamos as notações

$$\varphi'(x, t) := \partial_t \varphi(x, t) \text{ e } (\nabla \varphi)(x, t) := \nabla_x \varphi(x, t).$$

Observemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} I_1^{\delta, l} dx dt dy ds = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |v_1 - v_2| \partial_t \varphi(x, t) J_\Phi(x, \tau_k \omega) dx dt.$$

Além disso, o uso da relação (4.0.1) nos permite deduzir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, l \rightarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} I_2^{\delta, l} dx dt dy ds = 0.$$

3) Fixemos as variáveis $t, s \in \mathbb{R}_+$ e seja I_3^δ o termo $I_3^{\delta, l}$ sem o fator $\theta_l\left(\frac{t-s}{2}\right)$. Assim, definindo $u := 2^{-1}(x+y)$ e $v := 2^{-1}(x-y)$, obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^2} I_3^\delta dx dy = \int_{(\mathbb{R}^n)^2} \left(\sum_{k=1}^3 I_{3,k}^\delta \right) du dv,$$

onde

$$\begin{aligned} I_{3,1}^\delta &= \operatorname{sgn}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \left(F(u+v, \tau_k \omega, \tilde{v}_1) - F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_1) \right) \cdot (\nabla \varphi)(u) \\ &\quad \rho_\delta(v) J_\Phi(u+v, \tau_k \omega), \\ I_{3,2}^\delta &= \operatorname{sgn}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \left(F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_1) - F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_2) \right) \cdot (\nabla \varphi)(u) \\ &\quad \rho_\delta(v) J_\Phi(u+v, \tau_k \omega), \\ I_{3,3}^\delta &= \operatorname{sgn}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \left(F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_2) - F(u-v, \tau_k \omega, \tilde{v}_2) \right) \cdot (\nabla \varphi)(u) \\ &\quad \rho_\delta(v) J_\Phi(u+v, \tau_k \omega), \end{aligned}$$

com $\tilde{v}_1 = v_1(t, u+v, \omega)$, $\tilde{v}_2 = v_2(s, u-v, \omega)$ e $\varphi(\cdot, \frac{t+s}{2}) = \varphi(\cdot)$. Com uma aplicação imediata de (4.0.1), garantimos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{(\mathbb{R}^n)^2} I_{3,i}^\delta du dv \right| = 0,$$

para $i = 1, 3$. Agora, como a função de fluxo f é localmente Lipschitz, garantimos a desigualdade

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2) \left(F(u, \tau_k \omega, \lambda_1) - F(u, \tau_k \omega, \lambda_2) \right) - \right. \\ &\quad \left. \operatorname{sgn}(\lambda_3 - \lambda_2) \left(F(u, \tau_k \omega, \lambda_3) - F(u, \tau_k \omega, \lambda_2) \right) \right| \leq C |\lambda_1 - \lambda_3|, \end{aligned}$$

que combinada com a desigualdade triangular, garante

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{sgn}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \left(F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_1) - F(u, \tau_k \omega, \tilde{v}_2) \right) - \right. \\ &\quad \left. \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(u, \tau_k \omega, v_1) - F(u, \tau_k \omega, v_2) \right) \right| \leq C (|\tilde{v}_1 - v_1| + |\tilde{v}_2 - v_2|). \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\mathbb{R}^n)^2} I_{3,2}^\delta du dv - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(u, \tau_k \omega, v_1) - F(u, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \right. \\ & \left. (\nabla \varphi)(u) J_\Phi(u, \tau_k \omega) du \right| \leq C \left(\delta + \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (|\tilde{v}_1 - v_1| + \right. \right. \\ & \left. \left. |\tilde{v}_2 - v_2|) \rho_\delta(v) dv \right\} |(\nabla \varphi)(u)| du \right). \end{aligned}$$

Assim, usando um argumento de ponto de Lebesgue e o teorema da convergência dominada, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} I_3^{\delta,l} &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(x, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \\ & (\nabla \varphi)(x, t) J_\Phi(x, \tau_k \omega) dx dt. \end{aligned}$$

4) O termo $I_4^{\delta,l}$ pode ser tratado da mesma forma, basta ver que a desigualdade (4.0.1) pode ser escrita como

$$|I_4^{\delta,l}| \leq \mathcal{O}(\delta) + I_{4,1}^{\delta,l},$$

em que

$$I_{4,1}^{\delta,l} := C \left| F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(y, \tau_k \omega, v_2) \right| \varphi \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2} \right) \theta_l \left(\frac{t-s}{2} \right) \tilde{\rho}_\delta \left(\frac{x-y}{2} \right),$$

onde

$$\tilde{\rho}(x) := \frac{|(\nabla \rho)(x)|}{\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla \rho)(x)| dx}.$$

Portanto, procedendo como no passo 3), deduzimos

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0, l \rightarrow 0} \left| \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} I_4^{\delta,l} dx dt dy ds \right| \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |v_1 - v_2| \varphi(x, t) dx dt.$$

O mesmo raciocínio se aplica aos termos restantes para chegar à mesma conclusão, ou seja,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0, l \rightarrow 0} \left| \int_{(\mathbb{R}_+^{n+1})^2} (I_5^{\delta,l} + I_6^{\delta,l}) dx dt dy ds \right| \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |v_1 - v_2| \varphi(x, t) dx dt.$$

5) Agora, substituindo tais informações em (4.0.6), garantimos

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |v_1 - v_2| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(v_1 - v_2) \left(F(x, \tau_k \omega, v_1) - F(x, \tau_k \omega, v_2) \right) \cdot \nabla \varphi \right\} \\ & J_\Phi(x, \tau_k \omega) dx dt \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |v_1 - v_2| \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (4.0.7)$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Escolhendo $\varphi(x, t) := \delta_h(t)\Lambda(x)$ com $0 \leq \delta_h \in C_c^\infty((0, \infty))$, $\Lambda(x) := e^{-\sqrt{1+|x|^2}}$ e observando que $|D_i\Lambda(x)| \leq \Lambda(x)$ para $i = 1, \dots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, chegamos a

$$- \int_0^\infty \beta(t)\delta'_h(t) dt \leq C \int_0^\infty \beta(t)\delta_h(t) dt,$$

onde $\beta(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |v_1(x, t) - v_2(x, t)|\Lambda(x)J_\Phi(x, \tau_k\omega) dx$. Assim, escolhendo uma apropriada sequência δ_h e observando que

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0} v_i(t, \cdot) = u_0(\cdot, \tau_k\omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

para $i = 1, 2$, obtemos que $v_1 \equiv v_2$, o que prova a proposição no caso (4.0.1).

6) No caso de uma deformação estocástica geral Φ , definimos

$$\Phi_\delta(x, \omega) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \omega)\rho_\delta(x - y) dy,$$

e note que $\Phi_\delta(\cdot, \omega) \rightarrow \Phi(\cdot, \omega)$ em $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Assim, temos

$$\|\Phi_\delta(\Phi^{-1}(x, \omega), \omega) - x\|_{L^\infty_{\text{loc}}} < \theta,$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e para q.t.p. $\omega \in \Omega$. Agora, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então

$$\begin{aligned} & \int_K |u(t, \Phi_\delta(x, \omega), \omega) - u(t, \Phi(x, \omega), \omega)| dx \leq \\ & M \int_{\Phi(K, \omega)} |u(t, \Phi_\delta(\Phi^{-1}(x, \omega), \omega) - u(t, x)| dx = \\ & M \int_{\Phi(K, \omega)} |u(t, x + [\Phi_\delta(\Phi^{-1}(x, \omega), \omega) - x], \omega) - u(t, x)| dx \leq \\ & M \sup_{|h| < \theta} \int_{\Phi(K, \omega)} |u(t, x + h, \omega) - u(t, x, \omega)| dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Isso implica que a proposição vale para qualquer deformação estocástica Φ . \square

Agora temos as ferramentas básicas para provar o Teorema 4.0.1, que é a variante estocástica dos resultados provados em [11, 33]. Provaremos somente o caso em que $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^n$, pois o caso $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ é análogo.

4.1 PROVA DO TEOREMA 4.0.1

Demonstração. 1) Fixemos $\omega \in \Omega$ tal que o teorema de Birkhoff 2.2.5 item (i) vale para $u_0(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)$. Escolha $k \in \mathbb{N}$ e defina $u_k(t, x) := u(kt, kx, \omega)$. Como u_k é solução entrópica de (1.0.4) com

$$v_0(x) = u_0(\Phi^{-1}(kx, \omega), \omega),$$

uma aplicação do corolário 3.0.2 (ver também a observação 3.0.3) com $f(\lambda) = \varphi(\lambda)$ e $\nu_{t,x}^k = \delta_{u_k(t,x)}$, nos permite encontrar uma subsequência $\{u_{k_j(\omega)}\}_{k_j(\omega) \geq 1}$ e $u^* \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j} = u^* \quad \text{em} \quad L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^{n+1}).$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} u^* &\equiv \det \left(\mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^n} \nabla \Phi(y, \cdot) dy \right] \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\int_{\Phi([0,1]^n, \cdot)} u_0(\Phi^{-1}(y, \cdot), \cdot) dy \right] \\ &:= M(u_0). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Com efeito, como u_{k_j} é solução entrópica de (1.0.4) com $v_0(x) = u_0(\Phi^{-1}(k_j x, \omega), \omega)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |u_{k_j} - l| \partial_t \varphi + \text{sgn}(u_{k_j} - l) (f(u_{k_j}) - f(l)) \cdot \nabla \varphi \right\} dx dt \geq 0,$$

$\forall l \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Assim, tomando $j \rightarrow \infty$ na última desigualdade, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |u^* - l| \partial_t \varphi + \text{sgn}(u^* - l) (f(u^*) - f(l)) \cdot \nabla \varphi \right\} dx dt \geq 0,$$

$\forall l \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Portanto, utilizando a propriedade do traço forte estudada primeiro por Vasseur em [45] e mais desenvolvida por Panov em [32] (ver mais em [30]), podemos afirmar que a função u^* possui traço forte $u_0^* \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no hiperespaço inicial $t = 0$ no sentido de que

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0} u^*(t, \cdot) = u_0^* \quad \text{em} \quad L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n). \quad (4.1.9)$$

Dessa forma, u^* é solução entrópica do problema de Cauchy (1.0.4) com $v_0 = u_0^*$. Em particular, u_{k_j} e u^* são soluções fracas de seus problemas de Cauchy respectivos. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ u_{k_j} \partial_t \varphi + f(u_{k_j}) \cdot \nabla \varphi \right\} dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\Phi^{-1}(k_j x, \omega), \omega) \varphi(x, 0) dx \\ &= 0 = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ u^* \partial_t \varphi + f(u^*) \cdot \nabla \varphi \right\} dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0^*(x) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Agora, fazendo $j \rightarrow \infty$, usando os fatos de que $u_{k_j} \rightarrow u^*$ em $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $u_0(\Phi^{-1}(k_j \cdot, \omega), \omega) \rightarrow M(u_0)$ e a arbitrariedade da função teste φ , obtemos

$$u_0^*(x) \equiv M(u_0).$$

Da unicidade da solução entrópica do problema de Cauchy (1.0.4), a prova da afirmação segue e além disso, fica provado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = M(u_0) \quad \text{em} \quad L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^{n+1}). \quad (4.1.10)$$

Assim, pelo teorema de Fubini, existe uma subsequência $\{k_m\}_{m \geq 1}$ (independente de ω) tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\|u_{k_m}(t, \cdot) - M(u_0)\|_{L^1_{\text{loc}}} \right) = 0 \quad (4.1.11)$$

para q.t.p. $t > 0$.

2) Agora, pela mundaça de variáveis $ky = \Phi(kx, \omega)$ e utilizando as propriedades de deformação estocástica (ver definição 2.2.3), temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} |u(kt, \Phi(kx, \omega), \omega) - M(u_0)| dx = \\ & \int_{\frac{\Phi([0,k]^n, \omega)}{k}} |u(kt, ky, \omega) - M(u_0)| [J_{\Phi}(\Phi^{-1}(ky, \omega), \omega)]^{-1} dy \leq \\ & \frac{1}{\nu} \int_{[0, L_k^\omega]^n} |u_k(t, y, \omega) - M(u_0)| dy, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

onde

$$L_k^\omega := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n} (|\nabla \Phi(y, \omega)|) + \frac{|\Phi(0, \omega)|}{k}.$$

Portanto, por (4.1.11), segue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_{[0,1]^n} |u(k_m t, \Phi(k_m x, \cdot), \cdot) - M(u_0)| dx \right) = 0 \quad (4.1.13)$$

para q.t.p. $t > 0$.

3) Por outro lado, usando a mudança de variáveis $z = kx$, a proposição 4.0.2 e outra mudança de variáveis $y = z - j$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} |u(kt, \Phi(kx, \omega), \omega) - M(u_0)| dx = \frac{1}{k^n} \int_{[0,k]^n} |u(kt, \Phi(z, \omega), \omega) - M(u_0)| dz \\ & = \frac{1}{k^n} \sum_{|j|_\infty \leq k} \int_{j+[0,1]^n} |u(kt, \Phi(z, \omega), \omega) - M(u_0)| dz \\ & = \frac{1}{k^n} \sum_{|j|_\infty \leq k} \int_{j+[0,1]^n} |u(kt, \Phi(z - j, \tau_j \omega), \tau_j \omega) - M(u_0)| dz \\ & = \frac{1}{k^n} \sum_{|j|_\infty \leq k} \int_{[0,1]^n} |u(kt, \Phi(y, \tau_j \omega), \tau_j \omega) - M(u_0)| dy, \end{aligned}$$

onde para $j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $|j|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} j_i$. Assim, integrando em ω e utilizando a \mathbb{P} -invariância, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n \times \Omega} |u(kt, \Phi(kx, \omega), \omega) - M(u_0)| dx d\mathbb{P}(\omega) = \\ & \int_{[0,1]^n \times \Omega} |u(kt, \Phi(y, \omega), \omega) - M(u_0)| dy d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando (4.1.13), temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n \times \Omega} |u(k_m t, \Phi(y, \omega), \omega) - M(u_0)| dy d\mathbb{P}(\omega) = 0 \quad (4.1.14)$$

para q.t.p. $t > 0$.

Agora, fixemos $t = t_0 > 0$ tal que vale (4.1.14). Definindo $A := \sup_{|\lambda| \leq \|u_0\|_\infty} |f(\lambda)|$, sabemos da teoria de leis de conservação que se U e V são soluções entrópicas de (3.1.10) com dado inicial U_0 e V_0 respectivamente e satisfazendo as condições $|U_0| \leq \|u_0\|_\infty$ e $|V_0| \leq \|u_0\|_\infty$, então

$$t \mapsto \int_{B_{R-At}} |U(t, x) - V(t, x)| dx$$

é uma função decrescente para $R > 0$ qualquer, onde $B_{R-At} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R - At\}$ (ver [26], pág. 43).

Assim, para $U(\cdot) = u(\cdot, \omega)$ e $V(\cdot) = M(u_0)$, usando a proposição 4.0.2 e as propriedades de deformação estocástica (ver definição 2.2.3), deduzimos para q.t.p. $\omega \in \Omega$ que

$$\begin{aligned} \int_{B_{R-At}} |u(t, x, \omega) - M(u_0)| dx &\leq \int_{B_{R-Ak_m t_0}} |u(k_m t_0, x, \omega) - M(u_0)| dx \\ &\leq \nu \int_{\Phi^{-1}(B_{R-Ak_m t_0}, \omega)} |u(k_m t_0, \Phi(x, \omega), \omega) - M(u_0)| dx \\ &\leq \nu \int_{\{P_\omega + B_{L(R-Ak_m t_0)}\}} |u(k_m t_0, \Phi(x, \omega), \omega) - M(u_0)| dx \\ &= \nu \int_{B_{L(R-Ak_m t_0)}} |u(k_m t_0, \Phi(x + P_\omega, \omega), \omega) - M(u_0)| dx, \end{aligned}$$

para q.t.p. $t > k_m t_0$, onde usamos as notações

$$L := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n} (|\nabla \Phi^{-1}(y, \omega)|) \text{ e } P_\omega := \Phi^{-1}(0, \omega)$$

e a inclusão $\Phi^{-1}(B_{R-Ak_m t_0}, \omega) \subset P_\omega + B_{L(R-Ak_m t_0)}$.

Pela proposição 4.0.2, temos que a função $u(k_m t_0, \Phi(\cdot, \cdot), \cdot)$ é estacionária. Assim, pelo teorema de Birkhoff 2.2.5, para q.t.p. $\omega \in \Omega$ a função $|u(k_m t_0, \Phi(\cdot, \omega), \omega) - M(u_0)|$ tem valor médio. Como a existência de valor médio é invariante com relação a translações, se multiplicarmos a última desigualdade por $|B_R|^{-1}$ e tomar $R \rightarrow \infty$, temos para q.t.p. $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x, \omega) - M(u_0)| dx &\leq \nu L^n \int_{\mathbb{R}^n} |u(k_m t_0, \Phi(x, \omega), \omega) - M(u_0)| dx \\ &= \nu L^n \int_{[0,1]^n \times \Omega} |u(k_m t_0, \Phi(x, \omega), \omega) - M(u_0)| dx d\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

para q.t.p. $t > k_m t_0$.

Segue dessa desigualdade e de (4.1.14) que

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot, \omega) = M(u_0) \text{ em } \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$, o que completa a prova do Teorema 4.0.1. \square

Capítulo 5

Decaimento de Soluções Entrópicas de Leis de Conservação em Álgebras Ergódicas

No elegante trabalho [35], E. Y. Panov provou um resultado de decaimento no caso em que $v_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \text{AP}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o caso em que a álgebra com valor médio é o conjunto das funções quase-periódicas em \mathbb{R}^n . As técnicas utilizadas em [35] são restritas a estrutura do espaço $\text{AP}(\mathbb{R}^n)$, onde tais funções são aproximadas por polinômios trigonométricos em $\text{BUC}(\mathbb{R}^n)$. Como álgebras ergódicas em geral não possuem essa propriedade estrutural, nossa abordagem aqui é bem diferente da usada em [35].

O próximo resultado já foi publicado e a referência é [40]. Trata-se do terceiro teorema desse trabalho e diz respeito a forma como a natureza do comportamento auto-mediante do dado inicial é incorporada na própria solução.

Teorema 5.0.1. *Suponha que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ é uma solução entrópica de (1.0.4) com v_0 satisfazendo (1.0.7). Então, a menos de um conjunto de medida zero, temos*

$$u \in \text{BUC}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)).$$

O quarto teorema dessa tese também é um resultado já publicado, cuja referência é [40]. Segue a propriedade de decaimento no caso determinístico.

Teorema 5.0.2. *Sejam $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ uma solução entrópica de (1.0.4) com v_0 satisfazendo (1.0.7). Suponhamos ainda que vale a condição de não degeneração (1.0.5). Então, temos a seguinte propriedade de decaimento*

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} v_0(z) dz \right| dx = 0.$$

As próximas duas seções são dedicadas as demonstrações dos teoremas 5.0.1 e 5.0.2, respectivamente.

5.1 PROVA DO TEOREMA 5.0.1

Consideremos $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ uma álgebra com valor médio e $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ ao espaço de Besicovitch associado.

Necessitamos do próximo resultado para a prova do teorema 5.0.1. Tal teorema foi provado por J. Silva em [42].

Teorema 5.1.1. *Seja $U(z, x, t)$ solução entrópica da lei de conservação*

$$\begin{cases} \partial_t U(z) + \nabla_x \cdot (a(z)f(U(z))) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ U(z, x, 0) = U_0(z, x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

onde as componentes do campo a , satisfazem $a_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. Assim, se $U_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, L^\infty(\mathbb{R}^n))$, então $U \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, L^1_{loc}(\mathbb{R}_+^{n+1}))$.

Agora temos ferramentas suficientes para dar uma prova do teorema 5.0.1.

Demonstração. 1) Suponhamos por uma momento que $v_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja u_ε solução entrópica da perturbação parabólica de (1.0.4), ou seja, u_ε é a solução suave do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \operatorname{div} f(u_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon, & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u_\varepsilon(0, x) = v_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Defina o conjunto

$$\mathcal{F} := \left\{ t > 0; u_\varepsilon(t, \cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \cdot) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Sabe-se da teoria de leis de conservação que \mathcal{F} tem medida total em \mathbb{R}_+ . Dado $L > 0$, denotemos por C_L o cubo $[-L, L]^n$. Escolhemos uma função $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com as seguintes propriedades:

- $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\psi(x) = 1$ para todo $x \in C_1$;
- $\operatorname{supp} \psi \subset C_2$.

Agora, seja $\vartheta(x) := \frac{1}{L^n} \psi\left(\frac{x}{L}\right)$. Fixemos $\varepsilon \in (0, 1)$ e $t_2 > t_1$ tal que $t_1, t_2 \in \mathcal{F}$ e consideremos $w(x) := u_\varepsilon(t_2, x) - u_\varepsilon(t_1, x)$.

Dado $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u_\varepsilon(t, x)\varphi(x)\vartheta(x) dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ -\operatorname{div} f(u_\varepsilon) + \varepsilon \Delta u_\varepsilon \right\} \varphi(x)\vartheta(x) dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ f(u_\varepsilon) \cdot \nabla(\varphi(x)\vartheta(x)) + \varepsilon u_\varepsilon \Delta(\varphi(x)\vartheta(x)) \right\} dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{C_{2L}} \left\{ f(u_\varepsilon) \cdot \nabla\varphi(x)\vartheta(x) + f(u_\varepsilon) \cdot \nabla\vartheta(x)\varphi(x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon u_\varepsilon \Delta\varphi(x)\vartheta(x) + 2\varepsilon u_\varepsilon \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\vartheta(x) + \varepsilon u_\varepsilon \Delta\vartheta(x)\varphi(x) \right\} dx \right) ds,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx \right| \leq C(\|\Delta\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty)(t_2 - t_1), \quad (5.1.3)$$

$\forall L > 0$ e $\varepsilon \in (0, 1)$, onde a constante C independe dos parâmetros L e ε .

Escolhendo $\varphi = (\operatorname{sgn} w) * \rho_\delta$ e observando que $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq \frac{C}{\delta}$, $\|\Delta\varphi\|_\infty \leq \frac{C}{\delta^2}$ e $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, em que C depende somente da dimensão, chegamos a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|\vartheta(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\operatorname{sgn}(w(x))\vartheta(x) dx \right) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy \\
& = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} w(x - \delta y)\operatorname{sgn}(w(x - \delta y))\vartheta(x - \delta y)\rho(y) dx dy,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\vartheta(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sgn}(w(y))\rho_\delta(x - y) dy \right) dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\vartheta(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sgn}(w(x - \delta y))\rho(y) dy \right) dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} w(x)\vartheta(x)\operatorname{sgn}(w(x - \delta y))\rho(y) dx dy.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|\vartheta(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left\{ w(x - \delta y)\operatorname{sgn}(w(x - \delta y))\vartheta(x - \delta y) \right. \\
& \quad \left. - w(x)\vartheta(x)\operatorname{sgn}(w(x - \delta y)) \right\} \rho(y) dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [w(x - \delta y) - w(x)]\operatorname{sgn}(w(x - \delta y))\vartheta(x)\rho(y) dx dy \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\vartheta(x - \delta y) - \vartheta(x)] |w(x - \delta y)|\rho(y) dx dy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|\vartheta(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx \right| \\
& \leq C2^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{C_{2L}} |w(x - \delta y) - w(x)| dx \right) \rho(y) dy \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\vartheta(x - \delta y) - \vartheta(x)] |w(x - \delta y)| \rho(y) dx dy \right|. \tag{5.1.4}
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\vartheta(x - \delta y) - \vartheta(x)] |w(x - \delta y)| \rho(y) dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [\vartheta(x - \delta y) - \vartheta(x)] |w(x - \delta y)| dx \right) \rho(y) dy \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w(x - \delta y)| \int_0^1 \partial_\theta \vartheta(x - \theta \delta y) d\theta dx \right) \rho(y) dy \\
& = -\delta \int_{\mathbb{R}^n} y \cdot \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \vartheta)(x - \theta \delta y) |w(x - \delta y)| dx d\theta \right) \rho(y) dy \\
& = \frac{-\delta}{L^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} y \cdot \left(\int_0^1 \int_{C_{2L}(\delta \theta y)} (\nabla \psi) \left(\frac{x - \theta \delta y}{L} \right) |w(x - \delta y)| dx d\theta \right) \rho(y) dy.
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que $\max\{\|w\|_\infty, \|\nabla \psi\|_\infty\} \leq C$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\vartheta(x - \delta y) - \vartheta(x)] |w(x - \delta y)| \rho(y) dx dy \right| \\
& \leq \frac{C\delta}{L^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |C_{2L}(\delta \theta y)| d\theta \right) |y| \rho(y) dy \\
& \leq \frac{2^n C \delta}{L}. \tag{5.1.5}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (5.1.5) em (5.1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|\vartheta(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x)\vartheta(x) dx \right| \tag{5.1.6} \\
& \leq C2^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{C_{2L}} |w(x - \delta y) - w(x)| dx \right) \rho(y) dy + \frac{2^n C \delta}{L}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos de (5.1.6) e de (5.1.3) que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|\vartheta(x) dx & \leq C2^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{C_{2L}} |w(x - \delta y) - w(x)| dx \right) \rho(y) dy \\
& + \frac{2^n C \delta}{L} + C \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 \right) (t_2 - t_1),
\end{aligned}$$

$\forall \delta, \varepsilon \in (0, 1)$ e $L > 0$.

Então, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{C_L} |u(t_2, x) - u(t_1, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_2, x) - u(t_1, x)| \vartheta(x) dx \\
& \leq 2^n C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{C_{2L}} |u(t_2, x - \delta y) - u(t_2, x)| dx \right) \rho(y) dy \\
& + 2^n C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{C_{2L}} |u(t_1, x - \delta y) - u(t_1, x)| dx \right) \rho(y) dy \\
& + \frac{2^n C \delta}{L} + C \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 \right) (t_2 - t_1).
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Agora, aplicando o lema de Fatou e utilizando o fato de que

$$N_1(u(t_i, \cdot - \delta y) - u(t_i, \cdot)) \leq N_1(v_0(\cdot - \delta y) - v_0(\cdot))$$

para $i = 1, 2$ em (5.1.7), chegamos a

$$\begin{aligned}
N_1(u(t_2, \cdot) - u(t_1, \cdot)) & \leq 2^{n+1} C \int_{\mathbb{R}^n} N_1(v_0(\cdot - \delta y) - v_0(\cdot)) \rho(y) dy \\
& + C \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 \right) (t_2 - t_1) \\
& \leq \mathcal{O}(\delta) + C \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 \right) (t_2 - t_1),
\end{aligned}$$

$\forall \delta \in (0, 1)$, em que

$$\mathcal{O}(\delta) := 2^{n+1} \sup_{|h| < \delta} N_1(v_0(\cdot - h) - v_0(\cdot)).$$

Como $v_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, temos $\mathcal{O}(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
N_1(u(t_2, \cdot) - u(t_1, \cdot)) & \leq \inf_{0 < \delta < 1} \left\{ \mathcal{O}(\delta) + C \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 \right) (t_2 - t_1) \right\} \\
& =: \mathcal{O}_u(|t_2 - t_1|),
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$\forall t_1, t_2 \in \mathcal{F}$. Além disso, não é difícil ver que $\mathcal{O}_u(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

2) Agora, definindo $U(z, x, t) := u(t, x + z)$, não é difícil ver que a função $U(z, \cdot)$ é solução entrópica de (5.1.1) com dado inicial $U_0(z, x) := v_0(x + z)$ e $a \equiv 1$. Assim, o teorema 5.1.1 nos fornece que $U \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+))$, isto é ,

$$\int_K U(\cdot, x, t) \varphi(x, t) dx dt \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \tag{5.1.9}$$

$\forall g \in L^\infty(K)$ com $K \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ compacto.

Dado $t > 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, definimos

$$u_\delta(t, z) := \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(z)} u(s, x) dx ds = \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(0)} u(s, x + z) dx ds.$$

Tendo em vista (5.1.9), vemos que

$$u_\delta(t, \cdot) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \quad \forall t > 0 \text{ e } \delta > 0.$$

Para qualquer $t \in \mathcal{F}$, afirmamos que $u_\delta(t, \cdot) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u(t, \cdot)$ em $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, observemos que

$$\begin{aligned} & \int_{C_L} |u_\delta(t, z) - u(t, z)| dz \\ & \leq \int_{C_L} \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(0)} |u(s, x+z) - u(t, z)| dx ds dz \\ & \leq \int_{C_L} \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(0)} |u(s, x+z) - u(s, z)| dx ds dz \\ & + \int_{C_L} \int_t^{t+\delta} |u(s, z) - u(t, z)| ds dz \\ & \leq \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(0)} \int_{C_L} |u(s, x+z) - u(s, z)| dz dx ds \\ & + \int_t^{t+\delta} \int_{C_L} |u(s, z) - u(t, z)| dz ds. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o lema de Fatou e a propriedade de \mathcal{B}^1 -contração para leis de conservação (ver [35], pág. 2), obtemos

$$\begin{aligned} N_1(u_\delta(t, \cdot) - u(t, \cdot)) & := \limsup_{L \rightarrow \infty} \int_{C_L} |u_\delta(t, z) - u(t, z)| dz \\ & \leq \int_t^{t+\delta} \int_{B_\delta(0)} \left[\limsup_{L \rightarrow \infty} \int_{C_L} |u(s, x+z) - u(s, z)| dz \right] dx ds \\ & + \int_t^{t+\delta} \left[\limsup_{L \rightarrow \infty} \int_{C_L} |u(s, z) - u(t, z)| dz \right] ds \\ & \leq \int_{B_\delta(0)} \left[\limsup_{L \rightarrow \infty} \int_{C_L} |v_0(x+z) - v_0(z)| dz \right] dx \\ & + \int_t^{t+\delta} N_1(u(s, \cdot) - u(t, \cdot)) ds \\ & \stackrel{(5.1.8)}{\leq} \mathcal{O}_{v_0}(\delta) + \mathcal{O}_u(\delta), \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

em que

$$\mathcal{O}_{v_0}(\delta) := \sup_{|y| \leq \delta} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v_0(x+y) - v_0(x)| \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

já que $v_0 \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, por (5.1.10), deduzimos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N_1(u_\delta(t, \cdot) - u(t, \cdot)) = 0, \quad \forall t \in \mathcal{F},$$

provando a afirmação.

Finalizamos esse passo observando que a combinação dos passos 1) e 2) nos permitem concluir que u pode ser estendida para $BUC(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))$, se $v_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3) Por fim, consideremos o caso em que $v_0 \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, existe uma sequência $\{v_0^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $N_1(v_0^m - v_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Pelo passo 2), existe um único $u^m \in BUC(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ que é solução entrópica do problema (1.0.4) com v_0^m em vez de v_0 . Como vale a seguinte desigualdade

$$N_1(u^m(t, \cdot) - u(t, \cdot)) \leq N_1(v_0^m - v_0)$$

para q.t.p. $t > 0$, então temos uma conclusão do teorema 5.0.1. \square

5.2 PROVA DO TEOREMA 5.0.2

Nessa seção, provamos o decaimento determinístico para soluções entrópicas do problema de Cauchy (1.0.4) com dado inicial v_0 sendo uma função ergódica no sentido de Besicovitch. Para fazer isso, observemos primeiro que pelo teorema 5.0.1, o problema (1.0.4) admite uma única solução entrópica $u \in BUC(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Seja $(\mathcal{K}, \mathbf{m})$ e $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ o espaço de probabilidade compacto e o sistema dinâmico ergódico induzido pela álgebra com valor médio $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, ambos discutidos na subseção 2.3. Além disso, a identificação canônica $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \underline{f} \in L^1(\mathcal{K})$ pode ser naturalmente estendida para a identificação $BUC(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)) \ni u \mapsto \underline{u} \in BUC(\mathbb{R}_+, L^1(\mathcal{K}))$.

Agora, podemos desencadear a prova do teorema 5.0.2.

Demonstração. 1) Seja $u \in BUC(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))$ uma solução entrópica do problema de Cauchy (1.0.4) com dado inicial v_0 satisfazendo (1.0.7).

Para \mathbf{m} -q.t.p. $\omega \in \mathcal{K}$, afirmamos que a função $\underline{u}(t, \tau(x)\omega)$ é uma solução entrópica da lei de conservação (1.0.4) com dado inicial $\underline{v}_0(\tau(x)\omega)$ em vez de v_0 .

Para provar a afirmação, observemos primeiro que como o mapa $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ é contínuo (ver [1], teorema 4.1, pág. 1971), então podemos utilizar a mensurabilidade da σ -álgebra produto da função $\mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \ni (x, \omega) \mapsto \underline{u}(t, \tau(x)\omega)$ para cada $t > 0$. Assim, a aplicação do teorema de Fubini em vários argumentos fica justificada.

Dessa forma, como u é uma solução entrópica, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |u - l| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - l) (f(u) - f(l)) \cdot \nabla_x \varphi \right\} dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(x) - l| \varphi(0, x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

$\forall 0 \leq \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$ e $l \in \mathbb{R}$.

Escolhemos as funções $0 \leq g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $g \not\equiv 0$ e $0 \leq h \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ com as seguintes propriedades:

(h₁) $\partial_t^\alpha \partial_x^\beta h(t, \cdot) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $\forall |\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$ e $t \geq 0$.

(h₂) $\text{supp}(h) \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$.

Tomando $\varphi(t, x) := \frac{1}{R^n} h(t, x) g\left(\frac{x}{R}\right)$ na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^n} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ |u - l| \partial_t h + \text{sgn}(u - l) (f(u) - f(l)) \cdot \nabla_x h \right\} g\left(\frac{x}{R}\right) dx dt \\ & + \frac{1}{R^n} \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(x) - l| h(0, x) g\left(\frac{x}{R}\right) dx \\ & + \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \text{sgn}(u - l) (f(u) - f(l)) \cdot (\nabla g)\left(\frac{x}{R}\right) h(t, x) dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Agora, usaremos o fato de que se $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ possui valor médio no sentido de (2.2.2) e a família de funções $\left\{ f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\}_{\varepsilon > 0}$ é limitada em $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $p \geq 1$, então

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M(f) \text{ em } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n).$$

Assim, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (5.2.11), garantimos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ |u - l| \partial_t h + \text{sgn}(u - l) (f(u) - f(l)) \cdot \nabla_x h \right\} dx \right) dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(x) - l| \varphi(0, x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\int_{\mathcal{X}} \left\{ |\underline{u}(t, \omega) - l| \partial_t \underline{h}(t, \omega) + \text{sgn}(\underline{u} - l) (f(\underline{u}) - f(l)) \cdot \underline{\nabla} \underline{h} \right\} d\mathbf{m}(\omega) \right) dt \\ & + \int_{\mathcal{X}} |v_0(\omega) - l| \underline{h}(0, \omega) d\mathbf{m}(\omega) \geq 0, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

$\forall l \in \mathbb{R}$ e função h como escolhida acima.

2) Nesta etapa, vamos construir uma função apropriada h . Para isso, sejam $0 \leq \rho \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq g \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Então, definimos

$$h(t, z) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + z) g(t, -x) dx.$$

Não é difícil ver que a continuidade uniforme da função ρ implica que as somas de Riemann correspondentes convergem para a integral de $h(t, \cdot)$ uniformemente em \mathbb{R}^n na variável z para cada $t \in \mathbb{R}$. Essa informação, junto com a invariância de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ com respeito a translações, nos mostra que a função h satisfaz as condições (h₁) e (h₂) descritas no passo 1). Mais ainda, temos

$$\left(\frac{\partial_t^\alpha \partial_x^\beta h}{\partial_t^\alpha \partial_x^\beta h} \right) (t, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \underline{\rho}(\tau(x)\omega) (\partial_t^\alpha \partial_x^\beta g)(t, -x) dx,$$

$\forall |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1, t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathcal{K}$.

3) Substituindo a função construída no passo 2) em (5.2.12), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_0^\infty \left(\int_{\mathcal{K}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\underline{u}(t, \omega) - l| \partial_t g(t, -x) \underline{\rho}(\tau(x)\omega) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \operatorname{sgn}(\underline{u} - l) (f(\underline{u}) - f(l)) \cdot (\nabla g)(t, -x) \underline{\rho}(\tau(x)\omega) \right] dx \right\} d\mathbf{m}(\omega) \right) dt \\ & + \int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_0(\omega) - l| g(0, -x) \underline{\rho}(\tau(x)\omega) dx \right) d\mathbf{m}(\omega). \end{aligned}$$

Assim, usando o teorema de Fubini e levando em consideração a τ -invariância da medida de probabilidade \mathbf{m} , temos

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left\{ \int_{\mathcal{K}} \left[|\underline{u}(t, \tau(-x)\omega) - l| \partial_t g(t, -x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sgn}(\underline{u}(t, \tau(-x)\omega) - l) (f(\underline{u}(t, \tau(-x)\omega)) - f(l)) \cdot (\nabla g)(t, -x) \right] \underline{\rho}(\omega) d\mathbf{m}(\omega) \right\} dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathcal{K}} |v_0(\tau(-x)\omega) - l| g(0, -x) \underline{\rho}(\omega) d\mathbf{m}(\omega) \right\} dx \\ & \stackrel{y=-x}{=} \int_{\mathcal{K}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[|\underline{u}(t, \tau(y)\omega) - l| \partial_t g(t, y) \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sgn}(\underline{u}(t, \tau(y)\omega) - l) (f(\underline{u}(t, \tau(y)\omega)) - f(l)) \cdot (\nabla g)(t, y) \right] dy dt \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(\tau(y)\omega) - l| g(0, y) dy \right\} \underline{\rho}(\omega) d\mathbf{m}(\omega). \end{aligned}$$

A arbitrariedade da função $\rho \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ nos permite obter um conjunto $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ de medida total tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[|\underline{u}(t, \tau(y)\omega) - l| \partial_t g(t, y) \right. \\ & \left. + \operatorname{sgn}(\underline{u}(t, \tau(y)\omega) - l) (f(\underline{u}(t, \tau(y)\omega)) - f(l)) \cdot (\nabla g)(t, y) \right] dy dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(\tau(y)\omega) - l| g(0, y) dy, \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

$\forall (l, g) \in \mathbb{Q} \times \mathcal{D}$ e $\omega \in \mathcal{K}_0$, em que \mathcal{D} é um conjunto enumerável denso da classe de funções teste g .

Como as funções $l \mapsto |\lambda - l|$ e $l \mapsto \operatorname{sgn}(\lambda - l) (f(\lambda) - f(l))$ são uniformemente contínuas na variável λ , a desigualdade (5.2.13) pode ser passada para uma desigualdade para todo $l \in \mathbb{R}$, $0 \leq g \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\omega \in \mathcal{K}_0$.

4) Por fim, utilizando o item (ii) do teorema 4.0.1 (ver pág. 63), temos

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\underline{u}(t, \tau(x)\omega) - M(v_0)| dx = 0,$$

para q.t.p. $\omega \in \mathcal{K}$.

Portanto, integrando com relação a ω , usando o teorema da convergência dominada, o teorema de Fubini e a relação $\int_{\mathcal{K}} \underline{F} d\mathbf{m}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx$, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{K}} \left(\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{C_l} |\underline{u}(t, \tau(x)\omega) - M(v_0)| dx \right) d\mathbf{m}(\omega) \\
 &= \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{C_l} \left(\int_{\mathcal{K}} |\underline{u}(t, \tau(x)\omega) - M(v_0)| d\mathbf{m}(\omega) \right) dx \\
 &= \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}} |\underline{u}(t, \omega) - M(v_0)| d\mathbf{m}(\omega) \\
 &= \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - M(v_0)| dx,
 \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Referências

- [1] L. Ambrosio, H. Frid, J. Silva, *Multiscale Young Measures in Homogenization of Continuous Stationary Processes in Compact Spaces and Applications*, Journal of Functional Analysis **256**(2009), 1962-1997.
- [2] L. Ambrosio, H. Frid, *Multiscale Young Measure in almost periodic homogenization and applications*, Arch. Ration. Mech. Anal. **192**(1), 37-85, 2009.
- [3] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, 2000.
- [4] T. Andrade, W. Neves, J. Silva, *Homogenization of Liouville Equations beyond stationary ergodic setting*, Arch. Ration. Mech. Anal. **237**(2), 999-1040, 2020.
- [5] A.S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Cambridge University Press, 1932.
- [6] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **343**(11-12), 717-724, 2006.
- [7] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *Stochastic homogenization and random lattices*, J. Math. Pures Appl. **88**(1), 34-63, 2007.
- [8] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland. Amsterdam (1978).
- [9] E. Cancès, C. Le Bris, *Mathematical modeling of point defects in materials science*, Math. Models Methods Appl. Sci. **23**(10), 1795-1859, 2013.
- [10] V. Ccajma, W. Neves, J. Silva, *Homogenization of Schrödinger Equations, Extended Effective Mass Theorems for non-crystalline matter*, Preprint.
- [11] G.Q. Chen, H. Frid, *Decay of Entropy Solutions of Nonlinear Conservation Laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **146**, 95-127, 1999.
- [12] G.-Q. Chen, B. Perthame, *Large-time behavior of periodic entropy solutions to anisotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations*, Proc. American Math. Soc. **137**(2009), vol. 9, 3003-3011.
- [13] A.-L. Dalibard, *Homogenization of Non-linear Scalar Conservation Laws*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **192**, 117-164, 2009.

- [14] E. De Giorgi, S. Spagnolo, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia*, Boll. Un. Mat. it.8(1973), 391-411.
- [15] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators Part I and II*, Interscience Publishers Inc., New York (1958).
- [16] W.F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Am. Soc., 67: 217-240, 1949.
- [17] W.F. Eberlein, *The point spectrum of weakly almost periodic functions*, Michigan Math. J., 3:137-139, 1955-56.
- [18] L.C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, Regional conference series in mathematics, Number 74.
- [19] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, 192.
- [20] H. Frid, *A note on the Stochastic weakly* almost periodic homogenization of fully non-linear elliptic equations*, Port. Math, Vol. 72, 207-227, 2015.
- [21] H. Frid, *Decay of Almost Periodic Solutions of Conservation Laws*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 161, 43-64, 2002.
- [22] H. Frid, J. Silva, *Homogenization of degenerate porous medium type equations in ergodic algebras*, Adv. Math. 246, 303–350 (2013).
- [23] H. Frid, J. Silva, *Homogenization of Nonlinear PDE's in the Fourier-Stieltjes Algebras*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 41, 1589-1620, 2009.
- [24] H. Frid, Y. Li, *Asymptotic Decay of Besicovitch Almost Periodic Entropy Solutions to Anisotropic Degenerate Parabolic-Hyperbolic Equations*, J. Differential Equations, **268**(2020), vol. 9, 4998-5034.
- [25] P. Gerárd, *Microlocal defect measures*, Communications in Partial Differential Equations **16**(1991), 1761–1794.
- [26] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [27] P. Hubík, J.J. Mares, J. Sesták, *Glassy, Amorphous and Nano-Crystalline Materials: Thermal Physics, Analysis, Structure and Property*, Springer, Berlin, 2010.
- [28] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, 1994.
- [29] U. Krengel, *Ergodic theorems*, Gruyter Studies in Mathematics, vol. 6, de Gruyter, Berlin, 1985.
- [30] W. Neves., E.Y. Panov, J. Silva, *Strong Traces for Conservations Laws with General Nonautonomous Flux*, SIAM J. Math. Anal. **50**(6), 6049-6081, 2018.

- [31] E.Y. Panov, *Existence and Strong Pre-compactness Properties for Entropy Solutions of a First-Order Quasilinear Equation with Discontinuous Flux*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **195**, 643-673, 2010.
- [32] E.Y. Panov, *Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional scalar conservation laws*, J. Hyperbolic Differ. Equ.,4(2007), 729-770.
- [33] E.Y. Panov, *On decay of periodic entropy solutions to a scalar conservation law*, Ann. I. H. Poincaré - AN 30(2013), 997-1007.
- [34] E.Y. Panov, *On sequences of measure-valued solutions of first-order quasilinear equations*, Mat. Sb. 185 (2) (1994) 87–106; English transl. in: Russian Acad. Sci. Sb. Math. 81 (1)(1995), 211–227.
- [35] E.Y. Panov, *On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 13 **3**, 633-659, 2016.
- [36] E.Y. Panov, *On strong precompactness of bounded sets of measure valued solutions for a first order quasilinear equation*, Mat. Sb., 186(1995), 103-114.
- [37] E.Y. Panov, *On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations*, J. Differential Equations, **275**(2021), 139-166.
- [38] W. Rudin, *Functional Analysis - 2nd Ed.*, International series in pure and applied mathematics, Mc-Graw Hill, 1991.
- [39] W. Rudin, *Weak almost periodic functions and Fourier-Stieltjes transforms*, Duke Math. J. **26**(1959), 215-220.
- [40] L. Salvino, J. Silva, *Decay of entropy solutions of a scalar conservation law beyond a stationary ergodic setting*, Journal of Differential Equations, **341**, 324–352, 2022.
- [41] J. Silva, *Ergodic Algebra beyond the weak almost periodic function*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 **70**, 441-456, 2021.
- [42] J. Silva, *On the Almost Periodic Homogenization of Non-Linear Scalar Conservation Laws*, Calc. Var. **54**, 3623-3641, 2015.
- [43] S. Spagnolo, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 22.(1968), 571-597.
- [44] L. Tartar, *H-measures, a new approach for studying Homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115**(3–4)(1990), 193–230.
- [45] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal., **160**(2001), 181-193.
- [46] E. Weinan, *Homogenization of linear and nonlinear transport equations*, Commun. Pure Appl. Math. **45**, 301-326 (1992).