UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE GROUND STATE PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS EM $\mathbb{R}^N$ COM UMA NÃO LINEARIDADE GERAL

AILTON LUIZ VIEIRA

BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS - BRASIL
2022

AILTON LUIZ VIEIRA

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE GROUND STATE PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS EM $\mathbb{R}^N$ COM UMA NÃO LINEARIDADE GERAL

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Hamilton Prado Bueno
Coorientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki

BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS - BRASIL
2022

Vieira, Ailton Luiz.

V658e Existência e multiplicidade de soluções e existência de ground state para uma classe de problemas elípticos em R^N com uma não linearidade geral [recurso eletrônico] / Ailton Luiz Vieira – 2022.
1 recurso online (81 f. il, color.): pdf.

Orientador: Hamilton Prado Bueno
Coorientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 79-81

1. Matemática – Teses. 2. Operador p-laplaciano – Teses. 3. Ordem superior – Teses. 4. Multiplicidade - Teses.I. Bueno, Hamilton Prado. II. Miyagaki, Olimpio Hiroshi. III. Universidade Federal de Minas Gerais Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Existência e Multiplicidade de Soluções e Existência de Ground State para uma Classe de Problemas Elípticos em $\mathbb{R}^N$ com uma Não Linearidade Geral

AILTON LUIZ VIEIRA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFSCar

Prof. Anderson Luis Albuquerque de Araujo
UFV

Gilberto de Assis Pereira

Prof. Gilberto de Assis Pereira
UFOP

Prof. Grey Ercole
UFMG

Ronaldo B. Assunção

Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção
UFMG

Belo Horizonte, 19 de agosto de 2022.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

"Duvidar de tudo ou crer em tudo, são duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam, ambas, de refletir" (Henri Poincaré, 1902).

Ao meu pai Antônio (*in memoriam*) e ao meu filho Enzo.

Agradecimentos

À minha mãe Isabel, pela vida e pelo amor incondicional que nos momentos de sucesso pode até parecer irrelevante, mas nos momentos de fracasso se torna um consolo e uma segurança que não encontramos em nenhum outro lugar.

À minha companheira Rosana, pelo incentivo e por cuidar tão bem do nosso pequeno Enzo em minhas ausências.

Aos mestres professores que tive durante minha trajetória acadêmica e que tanto contribuíram para minha formação. Em especial, aos meus orientadores, Prof. Olimpio Hiroshi Miyagaki e Prof. Hamilton Prado Bueno, pois sem a ajuda deles essa tese não se tornaria realidade.

À banca examinadora, pelas valiosas contribuições.

Às meninas da secretaria, Andréa e Kelli, pelo suporte a ajuda com as rotinas (burocráticas) necessárias ao desenvolvimento dessa tese.

Aos colegas de trabalhos do DCEX/UFVJM pelo apoio e confiança.

À Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, pelo apoio aos meus estudos.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma maneira com o desenvolvimento dessa tese.

Resumo

Neste trabalho, provamos existência e multiplicidade de soluções radialmente simétricas para o problema

$$(-\Delta_p)^s u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \ \ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N),$$

em que $s \in (0,1]$, $2 \le p < \infty$, $sp \le N$, $2 \le N \in \mathbb{N}$ e $(-\Delta_p)^s$ é o operador p-Laplaciano (fracionário se $0 < s < 1$). Ambos os casos foram tratados $sp = N$ e $sp < N$. A não linearidade g é uma função do tipo Berestycki-Lions com crescimento exponencial crítico se $sp = N$ e crescimento polinomial crítico se $sp < N$. Depois disso, decompondo o espaço $\mathbb{R}^N$ na forma $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-2M}$, provamos a existência de infinitas soluções não radialmente simétricas nos casos $N = 4$ ou $N \ge 6$ e $N - 2M \neq 1$, em que $M > 0$ é inteiro e $0 \le M \le N/2$. Provamos também a existência de uma solução ground state para o mesmo problema. Logo após, consideramos o problema

$$\Delta^2 u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \ \ u \in H^2(\mathbb{R}^N),$$

em que $4 \le N \in \mathbb{N}$ e Δ^2 é o operador bilaplaciano. Obtivemos os mesmos resultados estabelecidos acima. Finalmente, consideramos o problema

$$(-\Delta)^s u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \ \ u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^N),$$

onde $s \in (1,2)$, $N \ge 3$ e $(-\Delta)^s$ é o operador 2-Laplaciano fracionário de ordem superior e, mais uma vez, obtivemos os mesmos resultados descritos no caso do operador p-Laplaciano fracionário.

Palavras-Chave e frases: p-Laplaciano fracionário; Bilaplaciano; Ordem superior; Criticalidade simétrica; Desigualdade de Moser-Trudinger; Crescimento polinomial; Crescimento exponencial; Multiplicidade; Soluções radiais; Soluções não radiais e ground state.

Abstract

In this work, the existence of infinitely many radially symmetric solutions is proved for the problem

$$(-\Delta_p)^s u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N),$$

where $s \in (0,1]$, $2 \leq p < \infty$, $sp \leq N$, $2 \leq N \in \mathbb{N}$ and $(-\Delta_p)^s$ is the (fractional if $0 < s < 1$) p-Laplacian operator. Both the cases were handled $sp = N$ and $sp < N$. The nonlinearity g was a function of Berestycki-Lions type with critical exponential growth if $sp = N$ and critical polynomial growth if $sp < N$. After that, decomposing the space $\mathbb{R}^N$ in the form $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-2M}$, we prove the existence of infinitely many nonradially symmetric solutions in the cases $N = 4$ or $N \geq 6$ and $N - 2M \neq 1$, on that $M > 0$ is integer and $0 \leq M \leq N/2$. We also prove the existence of a ground state solution for the same problem. Next, we consider the problem

$$\Delta^2 u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^N),$$

where $N = 4$ and Δ^2 is the bilaplacian operator. We obtain the same results stated above. Finally, we consider the problem

$$(-\Delta)^s u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^N),$$

where $s \in (1,2)$, $\quad N \geq 3$ and $(-\Delta)^s$ is the higher order fractional 2-Laplacian operator and, once more, obtain the same results described in the case of the p-Laplacian operator.

Key words and phrases: Fractional p-Laplacian; Bilaplacian; Higher order; Symmetric criticality; Moser-Trudinger inequality; Exponential and polynomial growth; Multiplicity; Radial solutions; Non-radial solutions and ground state.

Sumário

Introdução

Nesta tese, estudamos o(s) problema(s)

$$E\ u = g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

em que g é uma função contínua ímpar satisfazendo determinadas hipóteses e E denota, sucessivamente, os operadores

1. p-Laplaciano fracionário, isto é, $E = (-\Delta_p)^s$, nos casos $s \in (0,1]$, $2 \leq p < \infty$, $sp \leq N$, $N \geq 2$;

2. o operador bi-Laplaciano Δ^2, isto é, $E = \Delta^2$.

3. o operador Laplaciano fracionário de ordem superior, isto é, $E = (-\Delta)^s$, em que $1 < s < 2$.

Estes operadores, com especial ênfase no caso $(-\Delta_p)^s$, tem sido objeto de muita pesquisa matemática nos últimos anos. O caso $p = 2$ é especialmente importante, pois tem inúmeras aplicações em contextos concretos: na Biologia (dinâmica de populações), Física (mecânica do contínuo, fenômenos de transição de fase), Teoria dos Jogos e Matemática Financeira, entre outros (veja [6, 11]). Mas, em geral, operadores fracionários atraem atenção também do ponto de vista puramente matemático, por causa das dificuldades desafiadoras ocasionadas por seu caráter simultaneamente não linear e não local (veja [34]).

O operador biharmônico Δ^2 também tem aplicações importantes: na Biologia (por exemplo, deformação de membranas elásticas), Física (por exemplo, mecânica do contínuo), Matemática (por exemplo, no estudo das equações de Paneitz-Branson e de Willmore), dentre outras, veja [21]. Uma das dificuldades inerentes a esse operador é o fato de não podermos aplicar o Princípio do Máximo e consequências da desigualdade de Polya-Szegö (veja, contudo, o artigo de Lenzmann e Sok [26]). Mais detalhes serão dados na sequência.

No nosso contexto, o operador Laplaciano fracionário de ordem superior não causa grandes dificuldades, veja contudo [29, 31].

Agora passamos a considerar separadamente cada um dos problemas abordados.

No caso do operador p-Laplaciano fracionário, isto é,

$$(-\Delta_p)^s u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

a teoria relacionada com (1) já é tão extensa que é difícil sintetizá-la em um único texto. Ao leitor interessado recomendamos a leitura dos artigos [6, 11, 20, 34] e referências lá citadas.

Aplicando métodos variacionais, Hirata, Ikoma and Tanaka [22] consideraram um caso particular de (1), isto é,

$$-\Delta u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \; N \geq 2, \tag{2}$$

em que a não linearidade g é uma função do tipo de Berestycki-Lions [14], ou seja, ela satisfaz as condições:

(g0) $g(\xi) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g(\xi)$ é impar;

(g1) para $N \geq 3$,

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{g(\xi)}{\xi^{2^*-1}} \leq 0, \text{ em que } 2^* = \frac{2N}{N-1};$$

para $N = 2$,

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{g(\xi)}{e^{\alpha \xi^2}} \leq 0, \text{ para qualquer } \alpha > 0;$$

(g2) para $N \geq 3$,

$$-\infty < \liminf_{\xi \to 0} \frac{g(\xi)}{\xi} \leq \limsup_{\xi \to 0} \frac{g(\xi)}{\xi} < 0;$$

para $N = 2$

$$-\infty < \lim_{\xi \to 0} \frac{g(\xi)}{\xi} < 0;$$

(g3) existe $\zeta_0 > 0$ tal que $G(\zeta_0) > 0$, em que $G(\xi) = \int_0^\xi g(\tau) d\tau$.

Este artigo estendeu ligeiramente resultados de Berestycki, Gallouët e Kavian [12] para o caso $N = 2$ e Berestycki e Lions [14] para o caso $N \geq 3$ ao provar multiplicidade de soluções e existência de solução de estado fundamental de energia mínima (= ground state). Assim, o artigo [22] unifica os tratamentos apresentados em [12] e[14].

Observamos que, para obter os resultados de multiplicidade de soluções radiais os autores em [22] aplicaram a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha ([36, Teorema 9.12]), que também utilizaremos em nosso trabalho. Mais precisamente, após um truncamento da não linearidade g, eles obtiveram uma função h que cumpre a condição geral de Ambrosetti-Rabinowitz ([22, Cor. 2.2]). Introduzindo um funcional de comparação, $J(u)$, notaram que o mesmo cumpre a condição de compacidade de Palais-Smale e obtiveram, assim, uma sequência ilimitada de valores minimax para o funcional energia $I(u)$ associado ao problema (2) (veja [22, Lemma 3.2]). Em seguida, introduziram um funcional auxiliar apropriado, $\tilde{I}(\theta, u)$. Combinando este com a identidade de Pohožaev e uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser [32], eles provaram que a sequência ilimitada de valores minimax era, de fato, uma sequência de volores críticos para o funcional energia $I(u)$.

Um fato importante no roteiro seguido por Hirata et al. [22] é o papel que exerce a identidade de Pohožaev para provar a condição de compacidade para sequências de Palais-Smale.

No mesmo contexto, resultados semelhantes foram obtidos por Ambrosio [6] ao adaptar as técnicas de [22] no tratamento do problema $(-\Delta)^s u = g(u)$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, para $N \geq 2$ e $s \in (0,1)$. Como em [22], a técnica utilizada em [6] depende fortemente da identidade de Pohožaev para o operador considerado, a qual desempenha um papel crucial na demonstração de compacidade das sequências de Palais-Smale.

Como a prova da identidade de Pohožaev ainda não foi completamente estabelecida para o nosso contexto, procuramos uma abordagem alternativa, adaptando ideias de Zhang e Chen [38]. Como nos artigos [6, 22], nossos resultados foram obtidos sem termos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz como hipótese.

Notamos então que a técnica utilizada em [6, 22] não poderia ser aplicada no caso do problema (1). Contornamos essa dificuldade utilizando os trabalhos de Alves, Figueiredo e Siciliano [3] e Alves, Souto e Montenegro [4] - o primeiro trabalha com o operador Laplaciano fracionário, ao passo que, o segundo trabalha com o operador Laplaciano. Nestes trabalhos, os autores lidaram com a não linearidade g sendo uma função do tipo de Berestycki-Lions e notaram que ela pode ser escrita na forma $g(t) = -t + f(t)$ com a f satisfazendo hipóteses que apresentaremos na sequência.

No caso específico do problema (1), escrevemos g na forma

$$g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t), \tag{3}$$

em que f é uma função contínua ímpar satisfazendo

$(f1)$ $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0;$

$(f2)$ $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 1, \quad sp < N;$

$(f3)$ existem $\mu > 0$ e $q \in (p, p_s^*)$ tais que $f(t) \geq \mu t^{q-1}$, $\forall\, t \geq 0$;

$(f4)$ se $sp = N$, então existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t^{\frac{N}{N-s}}}} = 0$$

(respectivamente, $= +\infty$), se $\alpha > \alpha_0$ (respectivamente, $\alpha < \alpha_0$).

Não é difícil verificar que estas hipóteses são compatíveis com as hipóteses de [22], com a vantagem de possibilitarmos o crescimento exponencial e polinomial críticos.

Uma outra vantagem de usarmos a decomposição de g dada por (3) consiste em podermos então trabalhar no espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ com sua norma usual: ao trabalharmos sem decompor g, o funcional "energia" teria apenas a seminorma de Gagliardo (veja definição da mesma na sequência), a qual foi a abordagem utilizada em [6, 22] e ocasionou a introdução do funcional de comparação e de um funcional auxiliar.

O ambiente natural para o problema (1) é o espaço de Sobolev fracionário

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \ : \ [u]_{s,p}^p < \infty\},$$

em que

$$[u]_{s,p}^p := \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

é a seminorma de Gagliardo de u. Este espaço equipado com a norma usual

$$\|u\|_{s,p}^p = [u]_{s,p}^p + \|u\|_p^p, \qquad \text{em que} \qquad \|u\|_p^p = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x$$

é um espaço de Banach reflexivo, (veja [18]).

Recordamos agora a definição do expoente crítico de Sobolev

$$p_s^* = \begin{cases} \dfrac{pN}{N - sp}, & \text{se } \ sp < N; \\ +\infty, & \text{se } sp = N. \end{cases} \tag{4}$$

Devido ao Princípio da Criticalidade Simétrica (veja [33]), é suficiente estabelecer nossos resultados para soluções do problema (1) no subespaço fechado das funções radiais

$$W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \ : \ u(|x|) = u(x)\}.$$

No caso $sp \leq N$, é bem conhecido que $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p_s^*)$ (veja [7, Theorem 1.1.11] ou [27, Theorem II.1]), a imersão sendo contínua nos casos $q = p$ ou $q = p_s^*$ (se $p_s^* < \infty$).

Uma solução fraca do problema (1) satisfaz, para qualquer $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle (-\Delta_p)^s u, \phi \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) \phi \mathrm{d}x,$$

em que

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v \rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

O funcional "energia" $I \in C^1\left(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ (veja Lema C.1) associado ao problema (1) é definido

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \mathrm{d}x$$

em que

$$F(u) = \int_0^u f(t) \mathrm{d}t$$

é a primitiva de f e o funcional I tem derivada

$$I'(u)\cdot v = \langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\mathrm{d}x.$$

Assim, pontos críticos de $I(u)$ são soluções fracas de (1).

Estabelecemos assim, o nosso primeiro resultado

Teorema 1: *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [2,+\infty)$, $sp \leq N$ $(N \geq 2)$ e $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$. Então, o problema (1) tem infinitas soluções radialmente simétricas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ se*

(i) $sp = N$ e a função f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;

(ii) $sp < N$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.

O mesmo resultado é válido no caso limite $s = 1$.

Em seguida, consideramos a existência de múltiplas soluções não radiais para o problema (1). Nossa principal referência neste contexto foi o artigo de Louis Jeanjean e Shen-Sen Lu [24]. Ao leitor interessado referimos também os artigos [10, 23, 30] e suas referências.

Em [24], os autores consideraram $N = 4$ ou $N \geq 6$ e $N - 2M \neq 1$ em que $M > 0$ é inteiro e $0 \leq M \leq N/2$. Denotamos por $\mathcal{O}(N)$ o grupo ortogonal no $\mathbb{R}^N$. Fixando $\tau \in \mathcal{O}(N)$ de modo que $\tau(x) = \tau(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-2M}$ e definindo

$$X_\tau := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \ : \ u(\tau x) = -u(x) \text{ for all } x \in \mathbb{R}^N\},$$

verifica-se facilmente que X_τ não contém solução radial não trivial.

Seja $W^{s,p}_{\mathcal{O}_2}(\mathbb{R}^N)$ o subespaço das funções invariantes com respeito a $\mathcal{O}_2$, em que $\mathcal{O}_2 := \mathcal{O}(M)\times\mathcal{O}(M)\times\mathcal{O}(N-2M) \subset \mathcal{O}(N)$, convencionando que a componente correspondente a $N - 2M$ não existe se $N = 2M$.

Esse subespaço age isometricamente sobre $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Consideremos o espaço

$$X := W^{s,p}_{\mathcal{O}_2}(\mathbb{R}^N) \cap X_\tau.$$

Para $sp \leq N$, é bem conhecido que X está compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p_s^*)$ (veja [28, Corollary 1.25] ou [27, Theorem III.3]), a imersão sendo contínua se $q = p$ ou $q = p_s^*$, se $p_s^* < \infty$.

Assim, os resultados do caso não radial são obtidos com poucas alterações sobre o roteiro utilizado no caso simétrico. Por esse motivo, nos limitaremos a enunciar o resultado do caso não radial, deixando a prova do mesmo a cargo do leitor.

A versão do Teorema 1 para a existência de soluções não radiais é dada por

Teorema 2 *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [2,+\infty)$, $sp \leq N$, $N = 4$ ou $N \geq 6$ e $N - 2M \neq 1$ e $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$. Então, (1) admite infinitas soluções não radiais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ se*

(*i*) *$sp = N$ e a função f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;*

(*ii*) *$sp < N$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.*

O mesmo resultado é válido no caso limite $s = 1$.

Em seguida, consideramos a existência de ground state para o problema (1). Uma vez que não temos à nossa disposição o Princípio do Máximo, nos limitamos a provar que o ground state é não negativo.

Obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 3: *Seja $N \geq 2$. O problema (1) admite ground state, que é não negativo, radialmente simétrico e decrescente se*

1. *$sp = N$, $N \geq 2$ e f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;*

2. *$sp < N$, $N \geq 2$ e f satisfaz $(f1) - (f3)$.*

Percebemos então que as mesmas técnicas utilizadas na solução do problema (1) poderiam ser utilizadas, com poucas modificações, para o problema

$$\Delta^2 u = -t + f(t) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,\ N \geq 4, \tag{5}$$

com f satisfazendo as propriedades listadas anteriormente, para $p = 2$.

No caso de multiplicidade de soluções, a abordagem utilizada para o caso do p-Laplaciano fracionário é inteiramente adaptável. Obtemos então

Teorema 4: *Seja $N \geq 4$ e $g(t) = -t + f(t)$. Então (3.1) tem infinitas soluções radialmente simétricas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ se*

(*i*) *$N = 4$ e a função f satisfaz $(f1)$ e $(f3) - (f4)$;*

(*ii*) *$N > 4$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.*

Como a versão não radial do Teorema 4 decorre de modificações óbvias no Teorema 2, nos abstemos de enunciá-la.

Contudo, no caso do ground state, surgem dificuldades que impedem a completa utilização do método utilizado na abordagem do p-Laplaciano fracionário. Embora o enunciado do resultado do ground state seja bastante semelhante àquele do problema (1), os resultados obtidos são menos gerais do que os do caso do operador $(-\Delta_p)^s$.

Teorema 5: *Seja $N = 4$ ou $N \geq 6$, $N - 2M \neq 1$. Suponha que f satisfaça $(f1) - (f4)$. Então, o problema (5) admite ground state radial.*

Um dos pontos importantes no estudo de ground state para o problema do p-Laplaciano fracionário foi a comparação de diversos níveis minimax. Ou melhor, comparar aqueles infinitos níveis obtidos quando buscou soluções simétricas. O nível minimax no espaço geral $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é também o nível minimax em $W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$. A técnica utilizada faz uso da desigualdade de Pólya-Szegö

$$[u^*]_{s,p} \leq [u]_{s,p}$$

e a simetrização de Schwarz.

Estes resultados não são válidos no caso do operador bi-Laplaciano (veja Enno Lenzmann [26] para detalhes). Assim, essa comparação de níveis minimax está ausente na abordagem do problema (5).

Finalmente, com relação ao problema

$$(-\Delta)^s u = g(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \ N \geq 3, \tag{6}$$

para $1 < s < 2$, notamos que ao denotar $s = 1 + \sigma$ para $0 < \sigma < 1$, e considerar

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ : \ \nabla u \in W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^N)\},$$

com a norma natural

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + [\nabla u]_{s,2}^2,$$

em que

$$[\nabla u]_{s,2}^2 := \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|^2}{|x-y|^{N+2(s-1)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

estamos completamente no contexto do problema para o operador p-Laplaciano fracionário no caso específico de $p = 2$. Assim, não é surpreendente que possamos obter resultados semelhantes àqueles do operador $(-\Delta_p)^s$ para o problema (6).

Nosso trabalho está estruturado da seguinte maneira: o Capítulo 1 é muito importante em nosso trabalho, pois apresenta a desigualdade de Trudinger-Moser que será repetidamente utilizada em nosso texto. Ele apresenta também algumas consequências sobre o comportamento da não linearidade f e da desigualdade de Trudinger-Moser; os Capítulos 2 e 3 lidam, respectivamente, com o p-Laplaciano fracionário e o bi-Laplaciano. Em seguida, são apresentados diversos apêndices. O primeiro sobre o gênero de Krasnolselskii. O segundo sobre uma versão alternativa de ground state para o problema (3.1). No terceiro e último apêndice, apresentamos alguns resultados auxiliares.

Capítulo 1

Alguns resultados preliminares

Observamos inicialmente que o expoente crítico de Sobolev p_s^* definido pela equação

$$p_s^* = \begin{cases} \dfrac{pN}{N - sp}, & \text{se} \;\; sp < N; \\ +\infty, & \text{se} \; sp = N, \end{cases}$$

leva em consideração os casos $sp < N$ e $sp = N$. Mais especificamente, se $sp < N$, valem as imersões de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in [p, p_s^*]$, veja [20]. No entanto, se $sp = N$ na definição (4), temos $p_s^* = \infty$ e não vale a imersão para esse expoente crítico, ou seja, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$, veja [32]. Deste modo, faz-se necessário a aplicação da desigualdade de Trudinger-Moser.

Note que, em um primeiro momento, pode nos parecer que são poucos os valores de s e p que satisfazem a relação $sp = N$ com $0 < s < 1$ e $p \geq 2$. Porém, para cada valor de $N \in \mathbb{N}$, temos uma parte ilimitada do ramo positivo da hipérbole $sp = N$ que satisfaz tal relação. A título de ilustração, apresentamos a Figura 1, onde fazemos um esboço desta curva para alguns valores de N.

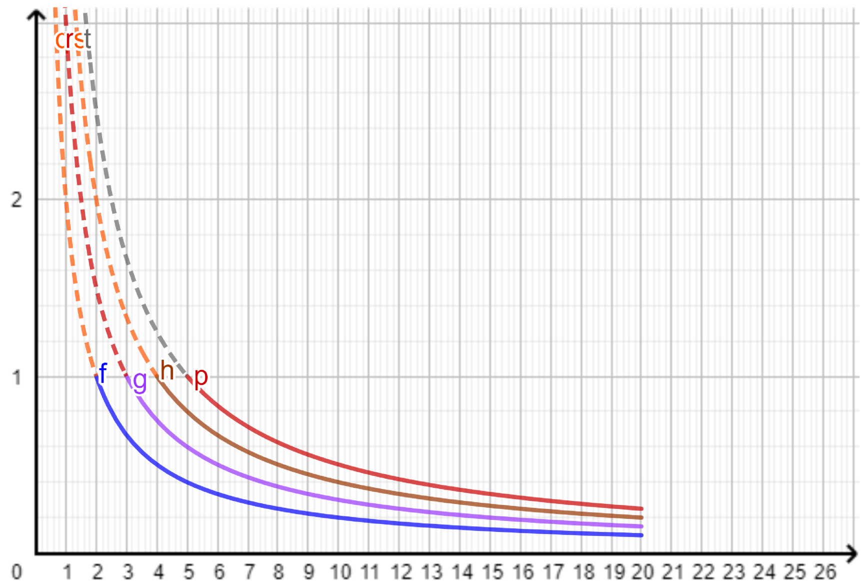

Figura 1.1: As curvas acima foram geradas no *software GeoGebra* para $N = 2,\ 3,\ 4$ e 5, respectivamente. A saber, $f = 2/s,\ g = 3/s,\ h = 4/s$ e $p = 5/s$. A parte não pontilhada de cada curva é onde a relação $sp = N$ é satisfeita.

No que segue, apresentamos a desigualdade de Trudinger-Moser e alguns resultados preliminares.

1.1 A desigualdade de Trudinger-Moser

Para comodidade do leitor, enunciamos aqui os principais resultados sobre a desigualdade de Trudinger-Moser para o espaço $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Iniciamos com um importante resultado devido a T. Ozawa [32].

Teorema 1.1 *Sejam* $s = \frac{N}{p}$ *e* $1 < p < \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. *Então, existem constantes positivas* γ *e* C_γ *tais que, para toda* $u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo* $\|u\|_{s,p} \leq 1$, *é verdadeira*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{\gamma|u(x)|^{p'}} - \sum_{\substack{0 \leq j < p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{1}{j!} \Big(\gamma|u(x)|^{p'}\Big)^j \right) \mathrm{d}x \leq C_\gamma \|u\|_p^p \tag{1.1}$$

O próximo resultado é devido a Adachi e Tanaka [1].

Teorema 1.2 *Se* ω_{p-1} *denota a área da superfície da esfera unitária de* $\mathbb{R}^p$ *e* $\alpha_p = p\omega_{p-1}^{1/(p-1)}$, *então, para qualquer* $p = N \geq 2$ *e qualquer* $\alpha \in (0, \alpha_p)$, *existe uma constante*

$C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_p\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_p}\right)^{p'}\right)\mathrm{d}x \le C_\alpha \frac{\|u\|_p^p}{\|\nabla u\|_p^p}, \quad u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^p)\backslash\{0\}, \tag{1.2}$$

onde

$$\Phi_p(\eta) = e^\eta - \sum_{j=0}^{p-2} \frac{1}{j!}\eta^j.$$

Observação 1.1 *Note que, se $\|\nabla u\|_p \le M$, a desigualdade* (1.2) *pode ser escrita do mesmo modo que* (1.1).

Prova: De fato, se $\|\nabla u\|_p \le M$, para algum $M > 0$, nós temos que

$$\begin{aligned} M^p \Phi_p\left(\frac{\alpha|u(x)|^{p'}}{M^{p'}}\right) &= M^p \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha|u(x)|^{p'}}{M^{p'}}\right)^j = \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\alpha^j|u(x)|^{p'j}}{M^{p'j-p}} \\ &\le \sum_{j=p-1}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\alpha^j|u(x)|^{p'j}}{\|\nabla u\|_p^{p'j-p}} = \|\nabla u\|_p^p \Phi_p\left(\frac{\alpha|u(x)|^{p'}}{\|\nabla u\|_p^{p'}}\right), \end{aligned}$$

e isto resulta

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_p\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{M}\right)^{p'}\right)\mathrm{d}x \le C_\alpha \frac{\|u\|_p^p}{M^p}, \ \forall u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^p).$$

□

Lema 1.1 *Se $p' = \frac{p}{p-1} = \frac{N}{N-s}$, definimos*

$$Q(t) := e^{\alpha|t|^{p'}} - T(t) \quad \text{e} \quad T(t) = \sum_{\substack{0 \le j < p-1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{1}{j!}\left(\alpha|t|^{p'}\right)^j.$$

Então, no caso $sp = N$,

(*i*) ($f4$) *implica* $\displaystyle\lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{Q(t)} = 0$;

(*ii*) ($f3$) *e* ($f4$) *implica* $\displaystyle\lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{Q(t)} = 0.$

Prova: Tome $\alpha > \alpha_0$. Como

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{Q(t)}{e^{\alpha t^{p'}}} = \lim_{|t|\to+\infty}\left(1 - \frac{T(t)}{e^{\alpha t^{p'}}}\right) = 1,$$

segue de ($f4$) que

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{Q(t)} = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)/e^{\alpha t^{p'}}}{Q(t)/e^{\alpha t^{p'}}} = 0,$$

provando (i).

Mais ainda, por $(f3)$ existe $\mu > 0$ e $q > p$ tal que $f(t) \geq \mu t^{q-1}$, $\forall\, t \geq 0$. Segue que $F(t) \geq \dfrac{\mu t^q}{q}$, $\forall\, t \geq 0$. Como F é uma função par, temos $F(t) \geq \mu |t|^q/q$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $F(t) \to +\infty$ quando $|t| \to +\infty$. Logo,

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha|t|^{p'}}} = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{d}{dt}e^{\alpha|t|^{p'}}} = 0,$$

o implica

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{Q(t)} = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)/e^{\alpha t^{p'}}}{Q(t)/e^{\alpha t^{p'}}} = 0. \qquad \square$$

O próximo resultado é uma estimativa para $|F(t)|$ adequada para nosso propósito. Sua prova é uma imediata consequência do Lema 1.1.

Proposição 1.1 *Suponha que $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$ são válidas. Dados $q > \frac{N}{s} = p$ para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$, tal que*

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon |t|^p}{p} + CQ(t)|t|^q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Adaptando algumas ideias de L.R. de Freitas [19], vamos provar que $(Q(|u|))^r \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para quaisquer $r > 1$ e $u \in W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.2 *Seja $\alpha > 0$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x < \infty, \quad \forall u \in W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Seja $u \in W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$. Por densidade, existe $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u - \varphi\|_{s,p} < \varepsilon.$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} |u|^{\frac{N}{N-s}} = |u - \varphi + \varphi|^{\frac{N}{N-s}} &\leq (|u-\varphi| + |\varphi|)^{\frac{N}{N-s}} \\ &\leq 2^{\frac{N}{N-s}} \max\{|u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}}, |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}\} \\ &\leq 2^{\frac{N}{N-s}} \left(|u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}} + |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}\right). \end{aligned}$$

Aplicando este resultado, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x.$$

Decorre então da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x &\leq \frac{s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha \frac{s}{N} 2^{\frac{N}{N-s}} |u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x \\ &+ \frac{N-s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha \frac{N-s}{N} 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de tal forma que

$$\alpha \frac{s}{N} 2^{\frac{N}{N-s}} \varepsilon^{\frac{N}{N-s}} \leq \alpha_1,$$

(veja Bahrouni [9, Lema 2.5]), segue-se que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |u-\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} e^{\alpha 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x &\leq C + \frac{N-s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha \frac{N-s}{N} 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x \\ &\leq C + \frac{N-s}{N} \int_{supp(\varphi)} e^{\alpha \frac{N-s}{N} 2^{\frac{N}{N-s}} |\varphi|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x < \infty,\end{aligned}$$

o que finaliza a prova. □

Seguindo as notações como no Lema 1.1, definimos

$$S_{p-2}(\alpha, u) := T(u) = \sum_{\substack{0 \leq j < p-2 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{1}{j!} \left(\alpha |u|^{p'} \right)^j.$$

Aplicando a Proposição 1.2, temos o seguinte resultado

Lema 1.2 *Sejam $\alpha > 0$ e $r > 1$. Então, para cada $\beta > r$, existe $C = C(\beta) > 0$ tal que*

$$\left(e^{\alpha |u|^{p'}} - S_{p-2}(\alpha, u) \right)^r \leq C \left(e^{\beta \alpha |u|^{p'}} - S_{p-2}(\beta \alpha, u) \right).$$

Prova: Para simplificar, vamos denotar por

$$y := |u|^{p'} \ \text{ e } \ \tilde{S}(\alpha, y) := \sum_{\substack{0 \leq j < p-2 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\alpha^j y^j}{j!}.$$

Observe que,

$$\frac{\left(e^{\alpha y} - \tilde{S}(\alpha, y) \right)^r}{\left(e^{\beta \alpha y} - \tilde{S}(\beta \alpha, y) \right)} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{\substack{j-1 \leq j \leq \infty \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\alpha^j y^j}{j!} \right)^r}{\displaystyle\sum_{\substack{j-1 \leq j \leq \infty \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{(\beta\alpha)^j y^j}{j!}} = \frac{y^{r(p-1)}}{y^{p-1}} \frac{\left(\displaystyle\sum_{\substack{j-1 \leq j \leq \infty \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\alpha^j y^{j-p+1}}{j!} \right)^r}{\displaystyle\sum_{\substack{j-1 \leq j \leq \infty \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{(\beta\alpha)^j y^{j-p+1}}{j!}}$$

e aplicando a Proposição 1.2, concluímos que

$$\lim_{y \to 0} \frac{\left(e^{\alpha y} - \tilde{S}(\alpha, y) \right)^r}{\left(e^{\beta \alpha y} - \tilde{S}(\beta \alpha, y) \right)} = 0.$$

Mais ainda,

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\left(e^{\alpha y} - \tilde{S}(\alpha, y) \right)^r}{\left(e^{\beta \alpha y} - \tilde{S}(\beta \alpha, y) \right)} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{r\alpha y}}{e^{\beta \alpha y}} \frac{\left(1 - \frac{\tilde{S}(\alpha, y)}{e^{r\alpha y}} \right)^r}{\left(1 - \frac{\tilde{S}(\beta\alpha, y)}{e^{\beta\alpha y}} \right)} = 0,$$

o que encerra nossa prova. □

1.2 As vantagens de "reescrevermos" a função g

Resumidamente falando, as duas principais vantagens em "reescrever a função g" são:

i) a função g continua sendo do tipo Berestycki-Lions;

ii) podemos considerar o funcional energia com a norma usual do espaço de Sobolev.

De modo mais específico, para estudar o problema 2.1, por exemplo, sem "reescrever a função g", temos como funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{p}[u]_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\mathrm{d}x.$$

Sendo assim, a alternativa é seguir o roteiro completo de Hirata at al. [22]. Como não conhecemos uma prova formal da identidade de Pohožaev para nosso problema, não foi possível seguir esta alternativa.

Na ausência de uma outra alternativa para atacar o problema (2.1) diretamente, fizemos a tentativa de reescrever $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$, inspirados em [3, 4]. Essa reescrita mostrou-se interessante de imediato, devido a ela oferecer as vantagens mencionadas acima. O fato de trabalharmos com a norma usual dos espaços de Sobolev, adicionando um pouco de esforço e aplicando alguns resultados, foi possível contornar a "ausência" da identidade de Pohožaev.

Não é difícil verificar que nossas hipóteses sobre a não linearidade f são compatíveis com as hipóteses impostas sobre g por Hirata et al. [22] (respectivamente, Berestycki-Lions [13, 14]). Vamos justificar isto através de algumas afirmações.

Afirmação 1: Nossa hipótese $(f1)$ é compatível com a hipótese (1.1) de Berestycki-Lions [13, 14] (e automaticamente com $(g2)$ de Hirata et al. [22]).

De fato, $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$ implica $f(t) = g(t) + |t|^{p-2}t$ e por $(f1)$ temos,

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) + |t|^{p-2}t}{|t|^{p-2}t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{g(t)}{|t|^{p-2}t} + 1\right) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{|t|^{p-2}t} = -1 < 0.$$

Afirmação 2: Nossa hipótese $(f2)$ é compatível com a hipótese (1.2) de Berestycki-Lions [13, 14] (e automaticamente com $(g1)$ de Hirata et al. [22]).

De fato, por $(f2)$ tem-se que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{g(t) + |t|^{p-2}t}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 1$$

Como

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|t|^{p-2}t}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 1, \text{ segue-se que } \limsup_{t\to\infty} \frac{g(t)}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 0.$$

Note que a hipótese $(f4)$ aborda justamente o crescimento exponencial crítico, ao passo que, em [12, 22] é tratado o crescimento exponencial subcrítico.

Quanto à hipótese $(f3)$, ela auxilia na prova de vários resultados presentes nesta tese. Mais especificamente, lembrando que F é uma função par, deriva-se de $(f3)$ que $F(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Mais ainda, ela garante a existência de $\mu > 0$ e $q \in (p, p_s^*)$ tais que $F(t) \geq \mu|t|^q/q$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Ela também garante a existência de $\zeta > 0$ tal $G(\zeta) > 0$ verificando $(g3)$ em Hirata et al. [22].

Salientamos por fim, que essas mesmas considerações se aplicaram no estudo do problema 3.1, o que nos possibilitou obter resultados análogos para o bilaplaciano.

Capítulo 2

O p-Laplaciano fracionário

Neste capítulo, estabelecemos a existência de infinitas soluções, tanto radialmente simétricas quanto não radialmente simétricas para o problema

$$(-\Delta_p)^s u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

em que $s \in (0,1)$, $2 \leq p < \infty$, $sp \leq N$, $2 \leq N \in \mathbb{N}$, $(-\Delta_p)^s$ é o operador p-Laplaciano fracionário e g é uma função ímpar satisfazendo algumas propriedades que serão oportunamente descritas.

Em seguida, mostramos a existência de uma solução de estado fundamental de energia mínima (= ground state).

O ambiente natural para o problema (2.1) é o espaço de Sobolev fracionário

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \,:\, [u]^p_{s,p} < \infty\},$$

em que

$$[u]^p_{s,p} := \int\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

é a seminorma de Gagliardo de u. Considerado com sua norma natural $\|u\|_{s,p} = ([u]^p_{s,p} + \|u\|^p_p)^{\frac{1}{p}}$ (em que $\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$) é um espaço de Banach reflexivo (veja, e.g., [18]).

Denotamos

$$p^*_s = \begin{cases} \dfrac{pN}{N-sp}, & \text{se} \ \ sp < N; \\ +\infty, & \text{se } sp = N. \end{cases}$$

No caso $sp \leq N$, é bem conhecido que $W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$ está compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p^*_s)$ (veja [7, Theorem 1.1.11] ou [27, Theorem II.1]), a imersão sendo contínua nos casos $q = p$ ou $q = p^*_s$ (se $p^*_s < \infty$).

Como nos artigos de Alves, Figueiredo e Siciliano [3] e Alves, Souto e Montenegro [4], o primeiro lidando com o operador Laplaciano fracionário e o segundo com o operador Laplaciano, escrevemos a não linearidade g em (2.1) na forma

$$g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t),$$

em que f é uma função contínua ímpar satisfazendo

$(f1)$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0;$

$(f2)$ $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{|t|^{p_s^*-1}} \leq 1, \quad sp < N;$

$(f3)$ existem $\mu > 0$ e $q \in (p, +\infty)$ tais que $f(t) \geq \mu t^{q-1}$, para todo $t \geq 0$;

$(f4)$ se $sp = N$, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t^{\frac{N}{N-s}}}} = 0$$

(respectivamente, $= +\infty$), se $\alpha > \alpha_0$ (respectivamente, $\alpha < \alpha_0$).

Como consequência do Princípio da Criticalidade Simétrica (veja [33]), é suficiente procurar soluções para o problema (2.1) em seu subespaço fechado de funções radiais, ou seja, no espaço

$$W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \,:\, u(|x|) = u(x)\}.$$

Uma solução fraca de (2.1) satisfaz, para todo $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle(-\Delta_p)^s u, \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}u\phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi \mathrm{d}x,$$

em que

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

O funcional "energia" $I \in C^1\left(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ (veja Lema C.1) associado ao problema (2.1) é definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x,$$

em que

$$F(u) = \int_0^u f(t)\mathrm{d}t$$

é a primitiva de f. Observe que,

$$F(u) = G(u) + \frac{|u|^p}{p}$$

sendo G a primitiva de g. Como a derivada deste funcional é dada por

$$I'(u)\cdot v = \langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\mathrm{d}x,$$

vemos que pontos críticos de $I(u)$ são soluções fracas do problema (2.1).

Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema 2.1 *Para $s \in (0,1)$, $p \in [2,+\infty)$, $sp \leq N$ $(N \geq 2)$ e $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$. Suponhamos que*

(i) $sp = N$ e a função f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;

(ii) $sp < N$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.

Então o problema (2.1) *possui infinitas soluções radialmente simétricas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. O mesmo resultado é válido no caso limite $s = 1$.*

Como informado na Introdução, podemos obter uma versão não radial do Teorema 2.1. Essa é dada por:

Teorema 2.2 *Sejam $g(t) = -|t|^{p-2}t + f(t)$, $s \in (0,1)$, $p \in [2,+\infty)$, $sp \leq N$. Com M escolhido como na partição do $\mathbb{R}^N$ apresentada anteriormente e satisfazendo para $N = 4$ ou $N \geq 6$ e $N - 2M \neq 1$, suponhamos que*

(i) $sp = N$ e a função f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;

(ii) $sp < N$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.

Então o problema (2.1) *possui infinitas soluções não radiais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. O mesmo resultado é válido no caso limite $s = 1$.*

Também provamos a existência de uma solução de estado fundamental de energia mínima (= ground state) para o problem (2.1).

Teorema 2.3 *Suponhamos que $N \geq 2$. O problema* (2.1) *admite um ground state não negativo, radialmente simétrico e decrescente se*

1. *$sp = N$, $N \geq 2$ e f satisfaz $(f1)$, $(f3)$ e $(f4)$;*
2. *$sp < N$, $N \geq 2$ e f satisfaz $(f1) - (f3)$.*

2.1 Prova do Teorema 2.1

Nosso primeiro resultado adapta os argumentos apresentados em Berestycki-Lions [14, Theorem 10] ao espaço $W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$. Vamos denotar por $\mathbb{S}^{n-1}$ a esfera unitária no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma aplicação contínua ímpar $\pi_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \to W^{s,p}_r(\mathbb{R}^N)$ tal que*

(i) $\pi_n(\sigma)$ é radialmente simétrica em $\mathbb{S}^{n-1}$;

(ii) $0 \notin \pi_n(\mathbb{S}^{n-1})$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(\pi_n(\sigma))\mathrm{d}x \geq 1$, *para todo* $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Este resultado é obtido ao considerarmos o subconjunto $V \subset W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e o funcional $J\colon W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definidos, respectivamente, por

$$V = \left\{ v \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \ : \ \int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x = 1 \right\} \quad \text{e} \quad J(w) = \int_{\mathbb{R}^N} F(w)\mathrm{d}x.$$

Temos que J é contínuo, enquanto $(f3)$ implica que J é coercivo. Assim, existe $w_1 \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $J(w_1) > 1$. Seja $\bar{B}_\ell$ a bola fechada centrada na origem e com raio $\ell = \|w_1\|_{s,p}$. Decorre do Teorema do Valor Intermediário a existência de $v \in \bar{B}_\ell$ tal que $J(v) = 1$, provando que $V \neq \emptyset$.

Lema 2.1 *A geometria do Teorema da Passo da Montanha Simétrico é satisfeita. Mais precisamente,*

(i) existem $\beta,\ \rho > 0$ *tais que* $I(u) \geq \beta > 0$ *para* $\|u\|_{s,p} = \rho$ *e* $I(u) \geq 0$ *para* $\|u\|_{s,p} \leq \rho$;

(ii) se $n \in \mathbb{N}$, *existe uma aplicação contínua ímpar* $\gamma_n\colon \mathbb{S}^{n-1} \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $I(\gamma_n(\sigma)) < 0$, *para todo* $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Prova: Como f é ímpar e contínua, temos $f(0) = 0$ e $I(0) = 0$.

Vamos considerar inicialmente o caso $sp = N$. Fixado qualquer $\theta > p$, decorre da Proposição 1.1 a existência de $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno) e $C > 0$ tais que

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon |t|^p}{p} + CQ(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\varepsilon}{p}|u|^p + CQ(|u|)|u|^\theta \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\|u\|_1^p - C \int_{\mathbb{R}^N} Q(|u|)|u|^\theta \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

em que

$$\|u\|_1^p = \frac{1}{p}[u]_{s,p}^p + \frac{1-\varepsilon}{p}\|u\|_p^p < C_1\|u\|_{s,p}$$

é uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{s,p}$.

Portanto, para qualquer $r > p$ fixo, podemos tomar $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ tal que $\alpha_1 r \in (0, \alpha_0)$. Aplicando a desigualdade de Hölder com $r' = r/(r-1)$, obtemos

$$I(u) \geq \frac{C_1}{p}\|u\|_{s,p}^p - C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (Q(|u|))^{r'} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\theta r} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Suponhamos agora que $\|u\|_{s,p} \leq 1$. Decorre da desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema 1.2, veja também a Observação 1.1) que

$$I(u) \geq \frac{C_1}{p}\|u\|_{s,p}^p - CC_{\alpha r}\|u\|_{\theta r}^\theta \geq \|u\|_{s,p}^p \left(C' - \|u\|_{s,p}^{\theta - p} \right).$$

Como $\theta - p > 0$, obtemos (i) ao tomar $\|u\|_{s,p}$ suficientemente pequeno.

Para obter (ii), notamos que o fato de π_n ser contínua garante a existência de $M > 0$ tal que $\|\pi_n(\sigma)\|_{s,p} \le M$ para todo $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$. Definimos então, para $t \ge 1$,

$$\phi_n^t(\sigma)(x) = \pi_n(\sigma)\left(\frac{x}{t}\right) : \mathbb{S}^{n-1} \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Decorre de $(f3)$ que

$$\begin{aligned} I(\phi_n^t) &= \frac{t^{N-sp}}{p}[\pi_n(\sigma)]_{s,p}^p + \frac{t^N}{p}\|\pi_n(\sigma)\|_p^p - t^N\int_{\mathbb{R}^N} F(\pi_n(\sigma))\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{p}[\pi_n(\sigma)]_{s,p}^p + t^N\left(\frac{1}{p}\|\pi_n(\sigma)\|_p^p - \frac{\mu}{q}\|\pi_n(\sigma)\|_q^q\right) \\ &= \frac{1}{p}B_1^p + t^N\left(\frac{B_2^p}{p} - \frac{\mu B_3^q}{q}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que $B_1 = [\pi_n(\sigma)]_{s,p}$, $B_2 = \|\pi_n(\sigma)\|_p$ e $B_3 = \|\pi_n(\sigma)\|_q$ são constantes. Para μ suficientemente grande, o termo entre parênteses é negativo. Assim, existe $\bar{t} > 1$ tal que $I(\phi_n^{\bar{t}}) < 0$, o que conclui a prova de (ii) no caso $sp = N$.

Passemos então ao caso $sp < N$. As hipóteses $(f1)$ e $(f2)$ implicam (veja Proposição C.1) a existência de $\varepsilon > 0$ pequeno e $C_\varepsilon > 0$ tais que

$$|F(t)| \le \frac{\varepsilon|t|^p}{p} + C_\varepsilon|t|^{p_s^*}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Então, como no caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\ge \frac{1}{p}\|u\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon|u|^p}{p} + C_\varepsilon|u|^{p_s^*}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}[u]_{s,p}^p + \frac{1-\varepsilon}{p}\|u\|_p^p - C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p_s^*}\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{C}{p}\|u\|_{s,p}^p - \tilde{C}\|u\|_{s,p}^{p_s^*}. \end{aligned}$$

O restante da demonstração é como no caso $sp = N$. □

Adaptando algumas ideias de Zhang and Chen [38] obtemos o próximo resultado.

Lema 2.2 *Qualquer sequência (u_j) satisfazendo a condição $(PS)_c$ é limitada em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: A sequência (u_j) satisfaz

$$\frac{1}{p}\|u_j\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\mathrm{d}x \to c$$

e

$$\langle(-\Delta_p)^s u_j, \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{p-2}u_j\phi\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)\phi\mathrm{d}x = o(1)\|\phi\|$$

para qualquer $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Por contradição, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $0 < \|u_j\|_{s,p} \to +\infty$ quando $j \to \infty$.

Definimos então

$$v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{s,p}},\ j \in \mathbb{N}.$$

Obtemos então $v_j \rightharpoonup v \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ (pois (v_j) é limitada), $v_j \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p_s^*)$ e também $v_j(x) \to v(x)$ q.t.p. no $\mathbb{R}^N$.

Suponhamos inicialmente que $v \neq 0$. Então o conjunto

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, v(x) \neq 0\}$$

tem medida positiva e $|u_j(x)| = |v_j(x)|\,\|u_j\|_{s,p} \to \infty,\ \forall\, x \in \Theta$.

Decorre então de $(f3)$ que $F(v_j) \geq 0$ para todo j e

$$\frac{F(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^p} \geq \frac{\mu|u_j|^q}{\|u_j\|_{s,p}^p} = \frac{\mu|v_j|^q\|u_j\|_{s,p}^q}{\|u_j\|_{s,p}^p} = \mu|v_j|^q\|u_j\|_{s,p}^{q-p},\ \forall x \in \Theta.$$

Decorre então do Lema de Fatou que

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Theta \frac{F(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^p}\mathrm{d}x \geq \int_\Theta \liminf_{j\to\infty} \mu|v_j|^q\|u_j\|_{s,p}^{q-p}\mathrm{d}x = \infty.$$

Mas também temos

$$(c + o(1)) = \frac{1}{p}\|u_j\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\mathrm{d}x$$

e

$$\frac{1}{p} - \frac{(c+o(1))}{\|u_j\|_{s,p}^p} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^p}\mathrm{d}x \geq \int_\Theta \frac{F(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^p}\mathrm{d}x.$$

Chegamos assim a uma contradição.

Agora vamos considerar o caso $v = 0$. Como $I'(u_j) \cdot \phi = o(1)\|\phi\|_{s,p}$, dividindo esta expressão por $\|u_j\|_{s,p}^{p-1}$, obtemos

$$\langle(-\Delta_p)^s v_j, \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_j|^{p-2}u_j\phi}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\mathrm{d}x = \frac{o(1)\|\phi\|_{s,p}}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}. \tag{2.3}$$

Passando ao limite quando $j \to \infty$ em (2.3), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\mathrm{d}x \to 0,\ \forall\, \phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\phi\mathrm{d}x\right| \leq C\|\phi\|_{s,p},\ \forall\, \phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$, definimos

$$T_j(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\mathrm{d}x,\ \phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, $\{T_j\}$ é uma família de funcionais lineares limitados e $\sup_{j\in\mathbb{N}} |T_j(\phi)| \leq C$ para todo $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, segue do Teorema da Limitação Uniforme que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\| < \infty.$$

Tendo em vista a imersão $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [p, +\infty)$ (respectivamente, $q \in [p, p_s^*]$ se $sp < N$), o Teorema de Hahn-Banach garante a existência de um funcional linear contínuo $\tilde{T}_j$ definido em $L^q(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{T}_j(\phi) = T_j(\phi)$ para todo $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, com $\|\tilde{T}_j\| = \|T_j\|$.

Logo, existem funções $h_j \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\|\tilde{T}_j\| = \|h_j\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}$ e

$$\tilde{T}_j(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} h_j \phi \mathrm{d}x.$$

Obtemos, assim, que para todo $\phi \in L^q(\mathbb{R}^N)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_j \phi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \mathrm{d}x = 0. \tag{2.4}$$

Se tivermos $sp = N$, decorre do Lema 1.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|f(u_j)|}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \right)^{q'} \mathrm{d}x \leq \frac{C^{q'}}{\|u_j\|_{s,p}^{q'(p-1)}} \int_{\mathbb{R}^N} (Q(|u_j|))^{q'} \mathrm{d}x.$$

Como $(Q(|u_j|))^{q'} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ veja Lema 1.2, segue-se que

$$\frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, se tivermos $sp < N$, inferimos de $(f2)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|f(u_j)|}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \right)^{q'} \mathrm{d}x \leq \frac{C^{q'}}{\|u_j\|_{s,p}^{q'(p-1)}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_j|^{p_s^*-1}\right)^{q'} \mathrm{d}x.$$

Como $\left(|u_j|^{p_s^*-1}\right)^{q'} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, também obtemos

$$\frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, se $sp \leq N$, concluímos que

$$h_j - \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad h_j(x) = \frac{f(u_j(x))}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \quad \text{q.t.p. no } \mathbb{R}^N.$$

Tomando $\phi = v_j$ em (2.4) resulta em

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} v_j \mathrm{d}x \right| \leq \left\| \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} \right\|_{q'} \|v_j\|_q = \|h_j\|_{q'} \|v_j\|_q \leq K \|v_j\|_q.$$

Como $v_j \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, concluímos então que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)v_j}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}}\mathrm{d}x \to 0.$$

Portanto,

$$\|v_j\|_{s,p}^p = \frac{I'(u_j)v_j}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{s,p}^{p-1}} v_j \mathrm{d}x \to 0$$

e concluímos que $v_j \to 0$ em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Mas isto é uma contradição, pois $\|v_j\|_{s,p} = 1$. Concluímos então que a sequência (u_j) é limitada. $\square$

Lema 2.3 *Passando a uma subsequência (se necessário), qualquer sequência (u_j) satisfazendo a condição $(PS)_c$ converge fortemente em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: O Lema 2.2 garante que (u_j) é limitada. Assim, podemos supor que $u_j \rightharpoonup u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, that $u_j \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p_s^*)$ e $u_j(x) \to u(x)$, q.t.p. no $\mathbb{R}^N$.

Assim, $(u_j - u)$ é limitada no espaço $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $I'(u_j) \to 0$ converge fortemente no dual de $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$I'(u_j) \cdot (u_j - u) \to 0.$$

Logo,

$$\langle(-\Delta_p)^s u_j, u_j - u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)(u_j - u)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{p-2}u_j(u_j - u)\mathrm{d}x + o(1)$$

o que nos permite concluir que

$$\langle(-\Delta_p)^s u_j, u_j - u\rangle \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{p-1}|u_j - u|\mathrm{d}x + o(1).$$

Como $\|u_j\|_p^p < \infty$, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{p-1}|u_j - u|\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j - u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C}\|u_j - u\|_p.$$

Suponhamos inicialmente que $sp = N$. Decorre do Lema 1.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \le C \int_{\mathbb{R}^N} Q(|u_j|)|u_j - u|\mathrm{d}x.$$

Se $\alpha \in (0, \alpha_0)$, podemos tomar $r > 1$ tal que $\alpha r \in (0, \alpha_0)$. Aplicando novamente a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \le C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (Q(|u_j|))^{r'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j - u|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Concluímos então da desigualdade de Trudinger-Moser que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \le C\|u_j - u\|_r$$

e segue-se que

$$\langle(-\Delta_p)^s u_j, u_j - u\rangle \leq \tilde{C}\|u_j - u\|_p + C\|u_j - u\|_r + o(1) \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Por outro lado, se tivermos $sp < N$, decorre de $(f2)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{p_s^*-1}|u_j - u|\mathrm{d}x.$$

Tomando $r \in [p, p_s^*]$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{(p_s^*-1)r'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j - u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como $\left(|u_j|^{(p_s^*-1)}\right)^{r'} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, decorre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \leq \tilde{C}_1\|u_j - u\|_r.$$

Assim, como antes, temos

$$\langle(-\Delta_p)^s u_j, u_j - u\rangle \leq \tilde{C}\|u_j - u\|_p + \tilde{C}_1\|u_j - u\|_r + o(1) \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Portanto, para $sp \leq N$, temos

$$\begin{aligned}\|u_j - u\|_{s,p}^p = \langle A(u_j), u_j - u\rangle &+ \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{p-2}u_j(u_j - u)\mathrm{d}x - I'(u)\cdot(u_j - u)\\ &- \int_{\mathbb{R}^p} f(u)(u_j - u)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)(u_j - u)\mathrm{d}x \to 0,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Definimos agora, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \inf_{\gamma\in\Gamma_n}\max_{\sigma\in\mathbb{D}_n} I(\gamma(\sigma)), \tag{2.5}$$

em que

$$\Gamma_n = \left\{\gamma \in C(\mathbb{D}_n, W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma \ \text{ é ímpar e } \ \gamma = \gamma_n \ \text{ em } \ \partial\mathbb{D}_n\right\},$$

com $\mathbb{D}_n$ denotando o disco unitário em $\mathbb{R}^n$ cuja a fronteira é $\partial\mathbb{D}_n = \mathbb{S}^{n-1}$ e γ_n definido no Lema 2.1.

Também definimos

$$\tilde{\gamma}_n(\sigma) = \begin{cases} |\sigma|\gamma_n(\frac{\sigma}{|\sigma|}), & \sigma \in \mathbb{D}_n \setminus \{0\},\\ 0, & \sigma = 0.\end{cases}$$

Como $\tilde{\gamma}_n \in \Gamma_n$, temos $\Gamma_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando uma sequência (u_j) satisfazendo a condição (PS), como $I(u_j) \to b_n$ e

$$\{u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \,:\, \|u\|_{s,p} = \rho\} \cap \gamma(\mathbb{D}_n) \neq \emptyset, \ \forall\, \gamma \in \Gamma_n,$$

concluímos que $\beta \leq b_n$, em que β é o mesmo que aparece no Lema 2.1. Logo, $0 < \beta \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provaremos agora que o funcional $I(u)$ possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Lema 2.4 *As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

(i) b_n *é um valor crítico de* $I(u)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $b_n \to \infty$ *quando* $n \to \infty$.

Prova: Temos que b_n é um valor crítico para todo $n \in \mathbb{N}$ como consequência do Teorema do Passo da Montanha Simétrico.

Como em [36, Chapter 9], definimos

$$\tilde{\Gamma}_n = \left\{ h(\overline{\mathbb{D}_m \setminus Z}); h \in \Gamma_n, m \geq n, Z \in \mathcal{E}_m \text{ e } gen(Z) \leq m - n \right\},$$

em que $gen(A)$ denota o gênero de Krasnoselski e $\mathcal{E}_m$ é uma família de subconjuntos fechados $A \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ satisfazendo $A = -A$ (veja as principais propriedades do $gen(A)$ na Proposição A.1).

Definimos a sequência (d_n) de valores minimax de $I(u)$ por

$$d_n = \inf_{A \in \tilde{\Gamma}_n} \max_{u \in A} I(u).$$

Temos

$$d_n \leq b_n \;\text{ e }\; d_n \leq d_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $I(u)$ satisfaz a condição de (PS), concluímos que

$$d_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Uma vez que $d_n \leq b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, também temos

$$b_n \to \infty \quad \text{ quando } n \to \infty.$$

A demonstração está completa no caso $0 < s < 1$.

No caso limite $s = 1$, consideramos o problema (2.1) com o operador $E = -\Delta_p$, isto é

$$-\Delta_p u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.6}$$

em que $2 \leq p < \infty$, $p \leq N$, $2 \leq N \in \mathbb{N}$, $-\Delta_p$ é o operador p-Laplaciano e g como no caso $0 < s < 1$.

O operador $p-$Laplaciano é definido pela expressão

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

veja M. Badiale e E. Serra [8].

O espaço de Sobolev natural no caso $s = 1$ é

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N); \|\nabla u\|_p < \infty\},$$

em que

$$\|\nabla u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \mathrm{d}x.$$

A norma usual no espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$\|u\|_{1,p}^p = \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p,$$

a qual torna $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach reflexivo, veja H. Brezis [15].

Se u é uma solução fraca do problema (2.6), então u satisfaz

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)vdx, \, \forall v \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

sendo

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^p} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx.$$

Vemos que soluções fracas de (2.6) são pontos críticos de

$$I(u) = \frac{1}{p}||\nabla u||_{1,p}^p - \int_{\mathbb{R}^p} G(u)dx,$$

em que $I(u)$ é o funcional de energia associado naturalmente ao problema (2.6).

Para o caso em que falham as imersões contínuas de Sobolev, $p = N$, aplicamos a desigualdade de Trudinger-Moser como no Teorema 1.2.

Como podemos perceber, pre-requisitos e resultados equivalentes àqueles apresentados na Introdução para o caso $0 < s < 1$ são válidos para o caso $s = 1$. Logo, os argumentos já apresentados podem ser adaptados e o resultado é obtido. $\square$

Para obter o Teorema 2.2, note que a argumentação apresentada em [24, Prova do Lema 4.2] pode ser adaptada para o espaço X de nosso texto. Observe que:

- Tanto na prova do [24, Lema 4.2] quanto na prova do [14, Teorema 10] não foi usado que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert. Usou-se apenas a estrutura dos espaços de Banach, bem como a densidade das funções escada nesses espaços.

- L. Jeanjean e L.-S. Lu em [24, Prova do Lema 4.2] substituíram u ser uma função "radialmente simétrica" por u ser uma função "par" na definição de $u \in N_k(R)$ na prova do item (a) do [14, Teorema 10], e fizeram os devidos ajustes. Notaram que os itens (b)-(c) da prova do [14, Teorema 10] não sofreriam alterações devido à essa mudança.

- Graças à nossa hipótese $(f3)$ obtemos o [14, Lema 8] (respectivamente, [24, Lema 4.3]) de modo direto. De fato, por $(f3)$ existem $\mu = \frac{q}{|(\pi_n(l))|^q} > 0$ e $q \in (p, p_s^*)$ tais que
$$F(t) \geq \frac{\mu|t|^q}{q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Segue-se que
$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\pi_n(l))\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mu|(\pi_n(l))|^q}{q}\mathrm{d}x = \frac{\mu\|(\pi_n(l))\|_q^q}{q} = 1.$$
Logo,
$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\pi_n(l))\mathrm{d}x \geq 1, \quad \forall l \in \mathbb{S}^{n-1}.$$
Agora os passos utilizados na demonstração do Teorema2.1 podem ser repetidos.

2.2 Ground state

Nossas principais referências são os artigos de Hirata, Ikoma and Tanaka [22] e o de Ambrosio [6].

Definimos os níveis minimax associados ao funcional I e ao Teorema do Passo da Montanha:
$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$
em que
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W^{s,p}(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma(0) = 0,\ I(\gamma(1)) < 0\}$$
e
$$b_r = \inf_{\gamma \in \Gamma_r} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{2.7}$$
em que
$$\Gamma_r = \{\gamma \in C([0,1], W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma(0) = 0,\ I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Também consideramos o nível minimax b_1 obtido ao se tomar $n = 1$ em (2.5).

Provaremos no Lema 2.5 que o valor b_r não depende do caminho γ tal que $I(\gamma(1)) < 0$.

Lema 2.5 *O conjunto*
$$\mathcal{B} := \{u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \,:\, I(u) < 0\}.$$
é conexo por caminhos.

Prova: Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$, podemos supor que

$$\mathrm{supp}(u_1) \cup \mathrm{supp}(u_2) \subset B_R,$$

em que $B_R := \{u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \, : \, \|u\|_{s,p} \leq R\}$ para algum $R > 0$.

Definimos, para $i = 1, 2$ e $t > 0$

$$u_i^t(x) = u_i\left(\frac{x}{t}\right).$$

Temos

$$I(u_i^t) = \frac{t^{N-sp}}{p}[u_i]_{s,p}^p - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x,$$

em que

$$G(u_i) = F(u) - \frac{|u|^p}{p}$$

é a primitiva de g.

Note que $u_i \in \mathcal{B}$ implica $\int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x > 0$. Derivando em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(u_i^t) &= \frac{N-sp}{p}t^{N-sp-1}[u_i]_{s,p}^p - Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x \\ &= Nt^{N-1}\left(\frac{t^{-sp}}{p}[u_i]_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x\right) - st^{N-sp-1}[u_i]_{s,p}^p.\end{aligned}$$

Assim, $t \geq 1$ implica $t^{-sp} \leq 1$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(u_i^t) \leq Nt^{N-1}I(u_i) - st^{N-sp-1}[u_i]_{s,p}^p < 0.$$

Logo, a expressão $I(u_i^t)$ garante que, para qualquer $sp \leq N$, temos $I(u_i^t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.

Portanto, podemos escolher $t_1, t_2 > 1$ tais que

$$I(u_1^{t_1}) \leq -1 - \max_{t \in [0,1]} |I(tu_2)| \tag{2.8}$$

e

$$I(u_2^{t_2}) \leq -1 - \max_{t \in [0,1]} |I(tu_1^{t_1})| \tag{2.9}$$

Como $u_1^1(x) = u_1(x)$, concluímos que u_1^t é um caminho ligando u_1 e $u_1^{t_1}$ no qual I é negativo.

Definimos então $u_3^\theta(x) := u_1^{t_1}(x + 2\theta R(t_1 + t_2)e_1)$ para $\theta \in [0, 1]$, em que $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$. Então, para todo $\theta \in [0, 1]$, vale

$$I(u_3^\theta) = I(u_3^0) = I(u_1^{t_1}) < 0,$$

pois u_3^θ foi definida de modo que a perturbação de $u_1^{t_1}$ esteja fora de seu suporte para qualquer $\theta > 0$.

Observamos então que $\operatorname{supp}(u_3^1) \cap \operatorname{supp}(u_2^t) = \emptyset$ para todo $t \in [1, t_2]$. Logo, decorre de (2.8) que

$$I(u_3^1 + \theta u_2) = I(u_3^1) + I(\theta u_2) < 0, \quad \forall\, \theta \in [0, 1].$$

Também temos

$$\begin{aligned} I(u_3^1 + u_2^t) &= I(u_3^1) + I(u_2^t) < 0 \quad \text{e} \quad I(u_2^t) < 0 \quad \forall\, t \in [1, t_2] \\ I(\theta u_3^1 + u_2^t) &= I(\theta u_1^{t_1}) + I(u_2^{t_2}) < 0, \quad \forall\, \theta \in [0, 1], \end{aligned}$$

como consequência de (2.9).

Agora, ao considerarmos os seguintes caminhos

$$\begin{array}{llll} \gamma_1(\theta) = u_1^\theta, & \text{para } \theta \in [1, t_1]; & \gamma_4(\theta) = u_3^1 + u_2^\theta, & \text{para } \theta \in [1, t_2]; \\ \gamma_2(\theta) = u_3^\theta, & \text{para } \theta \in [0, 1]; & \gamma_5(\theta) = \theta u_3^1 + u_2^{t_2}, & \text{para } \theta \in [0, 1]; \\ \gamma_3(\theta) = u_3^1 + \theta u_2, & \text{para } \theta \in [0, 1]; & \gamma_6(\theta) = u_2^\theta, & \text{para } \theta \in [1, t_2], \end{array}$$

obtemos um caminho ligando u_1 e u_2 no qual I é negativo. □

Lema 2.6 *Os níveis minimax estão assim relacionados: $b = b_r = b_1$.*

Prova: Claramente temos $b \leq b_r \leq b_1$. Assim, para provar nossa afirmação, é suficiente mostrar que $b_1 \leq b$. Vamos mostrar inicialmente que $b = \bar{b}$, em que

$$\bar{b} = \inf_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

em que $\bar{\Gamma} = \{\gamma \in C([0, 1], W^{s,p}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \gamma_1(1)\}$, com γ_1 definido no Lema 2.1. Como $I(\gamma_1(1)) < 0$, decorre que $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ e, portanto, que $b \leq \bar{b}$. Pelo provado no Lema 2.5, para qualquer $\gamma \in \Gamma$ existe um caminho $\bar{\gamma} \in C([0, 1], W^{s,p}(\mathbb{R}^N))$ conectando $\gamma_1(1)$ a $\gamma(1)$ com $I(\bar{\gamma}(t)) < 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Logo, de certa forma, pode-se dizer que $\Gamma \subset \bar{\Gamma}$, o que prova a desigualdade contrária.

Para uso futuro, notamos que podemos assumir

$$\gamma(1)(x) \geq 0, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad \gamma_1(|x|) = \gamma_1(x)$$

e também que $r \mapsto \gamma_1(1)r$ é linear por partes e não crescente (veja [14, 13]), pois pelo fato de F ser par, temos

$$I(|u|) \leq I(u), \qquad \text{para todo } u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, observando que $I(-u) = I(u)$, $\gamma_1(1) \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\gamma(-t) = -\gamma(t)$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$, mostraremos que

$$b_1 = \bar{b} = \inf_{\gamma \in \bar{\Gamma}_r} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

em que $\bar{\Gamma}_r = \{\gamma \in C([0,1], W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \gamma_1(1)\}$.

Por definição, vale $\bar{b} \leq b_1$. Para provar a desigualdade contrária, tomamos $\eta \in \bar{\Gamma}$ e definimos $\gamma(t) := |\eta(t)|$.

Temos então $\gamma \in C\left([0,1], W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\right)$. Como G é par e $[|u|]_{s,p} \leq [u]_{s,p}$ para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que, para todo $t \in [0,1]$, vale

$$\begin{aligned} I(\gamma(t)) &= \frac{1}{p}[|\eta(t)|]_{s,p}^p + \frac{1}{p}\||\eta(t)|\|_p^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(|\eta(t)|)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}[|\eta(t)|]_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(|\eta(t)|)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{p}[\eta(t)]_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(\eta(t))\mathrm{d}x = I(\eta(t)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $\gamma_1(1) \geq 0$, temos

$$\gamma(1) = |\eta(1)| = |\gamma_1(1)| = \gamma_1(1),$$

mostrando que $\gamma \in \bar{\Gamma}$.

Denotamos por $\gamma^*(t)$ a simetrização de Schwarz de $\gamma(t)$. Temos $\gamma^*(t) \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. A continuidade de G e a desigualdade de Pólya-Szegö fracionária [5] garantem que

$$[\gamma^*(t)]_{s,p} \leq [\gamma(t)]_{s,p}$$

e daí decorre que

$$I(\gamma^*(t)) \leq I(\gamma(t)), \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Como o rearranjo é contínuo em todo $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ (veja [5]), temos

$$\gamma^* \in C\left([0,1], W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)\right).$$

Como $(\gamma_1(1))^* = \gamma_1(1)$, deduzimos que $\gamma^* \in \bar{\Gamma}_r$.

Portanto, decorre de (2.10) que

$$b_1 \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma^*(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\eta(t)),$$

provando que $b_1 \leq \bar{b}$ e concluindo nossa demonstração. □

A prova do Teorema 2.3 é obtida como consequência do seguinte resultado.

Teorema 2.5 *Suponha que* $N \geq 2$ *e que as hipóteses* $(f_1)-(f_4)$ *sejam satisfeitas. Então, para* b_r *definido em* (2.7), *temos*

(*i*) *Existe uma solução não negativa* u_0 *do problema* (2.1) *tal que*

$$I(u_0) = b_r;$$

(ii) Para toda solução não trivial v do problema (2.1), temos

$$b_r \leq I(v).$$

Prova: A prova do item (i) segue do Lema 2.3.

Para provar (ii), consideremos v solução não trivial qualquer do problema (2.1) e definamos

$$\gamma(t)(x) := \begin{cases} v(\frac{x}{t}), & \text{se } \ t > 0; \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\gamma \in C\left([0,\infty), W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)\right)$ satisfaz

$$\|\gamma(t)\|_{s,p}^p = t^{N-sp}[v]_{s,p}^p + t^N\|v\|_p^p$$

e

$$I(\gamma(t)) = \frac{t^{N-sp}}{p}[v]_{s,p}^p + \frac{t^N}{p}\|v\|_p^p - t^N\int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x.$$

Agora vamos adaptar ao nosso contexto a ideia do Lema 2.1 em Jeanjean e Tanaka [25] (veja também J. Byeon [16]). Para isso, escolhemos $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (1,\infty)$ e $\theta_1 > 1$, e consideramos o caminho γ constituído por três partes:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \\ \theta & \mapsto \theta v_{t_0} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [t_0,t_1] & \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \\ t & \mapsto v_t \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [1,\theta_1] & \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \\ \theta & \mapsto \theta v_{t_1} \end{array}$$

em que $v_t(x) = v(\frac{x}{t})$.

Como $v \neq 0$ é solução do problema (2.1) temos

$$[v]_{s,p}^p = \langle (-\Delta_p)^s v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Uma vez que estamos adotando a norma usual em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, devemos ter $[v]_{s,p}^p > 0$. Logo, podemos escolher $\theta_1 > 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v)v\mathrm{d}x > 0, \quad \forall \theta \in [1,\theta_1]. \tag{2.12}$$

Recordando que $g(s) = -|s|^{p-2}s + f(s)$, segue-se da nossa hipótese $(f1)$ que

$$\varphi(s) := \frac{g(s)}{|s|^{p-1}}$$

é contínua. Decorre daí que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}I(\theta v_t) = I'(\theta v_t)v_t &= \langle (-\Delta_p)^s(\theta v_t), v_t\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v_t)v_t\mathrm{d}x \\ &= \theta^{p-1}t^{N-sp}\left([v]_{s,p}^p - t^{sp}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\theta v)|v|^{p-1}v\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Se $sp < N$, ao escolher $t_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} I(\theta v_{t_0}) > 0, \quad \forall\, \theta \in [0,1].$$

Decorre de (2.12) que podemos escolher $t_1 > 1$ suficientemente grande de modo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} I(\theta v_{t_1}) < 0, \quad \forall\, \theta \in [1,\theta_1].$$

Também notamos que, fixado $\theta = 1$ e levando em conta que v satisfaz (2.11), temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) &= t^{N-sp}\left([v]_{s,p}^p - t^{sp}\int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x\right)\\ &= t^{N-sp}[v]_{s,p}^p(1-t^{sp}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) > 0, \text{ if } t < 1$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) < 0, \text{ if } t > 1.$$

Em outras palavras, $I(\theta v_t)$ assume seu valor máximo em $\theta = 1$.

Agora consideramos o caso $N = sp$. Temos

$$\frac{d}{d\theta} I(\theta v_t) = \theta^{p-1}\left([v]_{s,p}^p - t^N \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\theta v)|v|^{p-1}v\mathrm{d}x\right)$$

e

$$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) = [v]_{s,p}^p(1-t^N).$$

Logo, utilizando a argumentação do caso $sp < N$, também concluímos que $I(\theta v_t)$ assume seu valor máximo $I(v)$ em $\theta = 1$.

Finalmente, notamos que

$$I(\theta_1 v_{t_1}) = \frac{t_1^{N-sp}}{p}[\theta_1 v]_{s,p}^p + \frac{t_1^N}{p}\|\theta_1 v\|_p^p - t_1^N \int_{\mathbb{R}^N} F(\theta_1 v)\mathrm{d}x.$$

Consideremos o caso $sp < N$. Decorre da hipótese $(f3)$ que

$$I(\theta_1 v_{t_1}) \le t_1^{N-sp}\theta_1^p\left[\frac{1}{p}[v]_{s,p}^p + t_1^{sp}\left(\frac{1}{p}\|v\|_p^p - \frac{\mu\theta_1^{q-p}}{q}\|v\|_q^q\right)\right].$$

Como $\theta_1^{q-p} > 1$, podemos escolher

$$\mu > \frac{q\|v\|_p^p}{p\|v\|_q^q}.$$

Logo, concluímos que $I(\theta_1 v_{t_1}) < 0$.

Se $N = sp$, temos

$$I(\theta_1 v_{t_1}) \leq \theta_1^p \left[\frac{1}{p}[v]_{s,p}^p + t_1^N \left(\frac{1}{p}\|v\|_p^p - \frac{\mu\theta_1^{q-p}}{q}\|v\|_q^q \right) \right]$$

e também concluímos que $I(\theta_1 v_{t_1}) < 0$.

Portanto, após uma mudança adequada de escala em t, existe um caminho $\gamma(t) : [0,1] \to W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\gamma(0) = 0, \quad I(\gamma(1)) < 0, \quad v \in \gamma([0,1]) \text{ e } \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(v).$$

Ou seja, $b_r \leq I(v)$ para toda solução não trivial v do problema (2.1), concluindo a prova de (ii). $\square$

Capítulo 3

Bilaplaciano

Neste capítulo estabelecemos existência e multiplicidade de soluções e existência de solução de estado fundamental (ground state) para o problema

$$\Delta^2 u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,\ N \geq 4, \tag{3.1}$$

em que $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ é o operador bilaplaciano e g é uma função contínua que satisfaz algumas propriedades que serão explicitadas oportunamente.

Considerável atenção foi dedicada ao estudo de equações envolvendo o operador biharmônico nos últimos anos. Ele aparece em muitos modelos decorrentes de fenômenos da vida real: na Biologia (por exemplo, deformação de membranas elásticas), Física (por exemplo, mecânica contínua), Matemática (por exemplo, no estudo das equações de Paneitz-Branson e de Willmore), dentre outras, veja [21].

Estendemos para o problema (3.1) os resultados de Hirata, Ikoma e Tanaka [22] e Ambrosio [6]. As técnicas usadas em [6, 22] dependem fortemente da identidade Pohožaev para o operador fracionário, que desempenha um papel crucial para provar a condição de compacidade para as sequências de Palais-Smale. Como uma prova da identidade de Pohožaev para o operador bilaplaciano é ainda desconhecida, procuramos uma abordagem alternativa, adaptando ideias de Zhang e Chen [38]. Além disso, como nos trabalhos [6, 22], obtivemos nossos resultados sem supor a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Denotamos o expoente crítico de Sobolev por

$$2_2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-4}, & \text{se } \ N > 4; \\ +\infty, & \text{se } N = 4. \end{cases}$$

Quando $N \geq 4$, é bem conhecido que $W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in [2, 2_2^*]$, se $2_2^* < \infty$, e para qualquer $q \in [2, 2_2^*)$, se $2_2^* = +\infty$ (veja [18, Teorema 2.31]). Também sabemos que $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ está compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in (2, 2_2^*)$ (veja [27, Teorema II.1]).

Inspirados pelos artigos de Alves, Figueiredo e Siciliano [3] e Alves, Souto e Montenegro [4], escrevemos a não linearidade g em (3.1) na forma $g(t) = -t + f(t)$, em que f é uma função *contínua impar* satisfazendo

$(f1)$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 0;$

$(f2)$ $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{|t|^{2_2^*-1}} \leq 1, \quad N > 4;$

$(f3)$ existe $\mu > 0$ e $q \in (2, 2_2^*)$ tal que $f(t) \geq \mu t^{q-1},\ \forall\, t \geq 0;$

$(f4)$ se $N = 4$, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t^2}} = 0$$

(respectivamente, $= +\infty$), se $\alpha > \alpha_0$ (respectivamente, $\alpha < \alpha_0$).

O espaço ambiente natural para o problema (3.1) é o espaço de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

em que $\hat{u}$ denota a transformada de Fourier da função u. Sabemos que $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Entretanto, quando $s = 2$, temos

$$W^{2,2}(\mathbb{R}^N) = H^2(\mathbb{R}^N),$$

(veja [18, Proposição 4.9]).

A norma usual em $W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} |D^\alpha u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

mas, graças à teoria de interpolação, [2, Corolário 6.14], podemos negligenciar as derivadas intermediárias e considerar a norma

$$\|u\|_{2,2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + |\Delta u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

a qual é equivalente à norma usual $\|\cdot\|$, que é gerada pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \int_{\mathbb{R}^N} uv + \Delta u \Delta v \mathrm{d}x,\ \forall u, v \in H^2(\mathbb{R}^N),\ \text{veja [18]}.$$

Devido ao Princípio de Criticalidade Simétrica (veja [33]), é suficiente estabelecermos soluções para o problema (3.1) no subespaço fechado das funções radiais, isto é, no espaço

$$H_r^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N); u(|x|) = u(x)\}.$$

Uma solução fraca para o problema (3.1) satisfaz, para qualquer $\phi \in H_r^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta \phi + u\phi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi \mathrm{d}x.$$

O funcional "energia" $I \in C^1\left(H_r^2(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ (veja Lema C.1) associado ao problema (3.1) é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{2,2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x,$$

em que F é a primitiva de f e

$$F(u) = G(u) + \frac{|u|^2}{2}.$$

Dado que este funcional tem derivada

$$I'(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta v + uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\mathrm{d}x,$$

podemos ver que pontos críticos de $I(u)$ são soluções para o problema (3.1).

Nosso resultado principal é o seguinte

Teorema 3.1 *Seja $N \geq 4$ e $g(t) = -t + f(t)$. Então* (3.1) *tem infinitas soluções radialmente simétricas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ se*

(*i*) *$N = 4$ e a função f satisfaz $(f1)$ e $(f3) - (f4)$;*

(*ii*) *$N > 4$ e a função f satisfaz $(f1) - (f3)$.*

Como no caso do p-Laplaciano fracionário (Capítulo 2) podemos obter a versão não simétrica do Teorema 3.1

Teorema 3.2 *Sejam $g(t) = -t + f(t)$, M escolhido como na partição do $\mathbb{R}^N$ apresentada na Introdução, $N = 4$ ou $N \geq 6$ e $N - 2M \neq 1$. Se f satisfizer $(f1) - (f4)$, então o problema* (3.1) *possui infinitas soluções não radiais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $I(u_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$.*

Teorema 3.3 *Se $N \geq 4$, $g(t) = -t + f(t)$ e f satisfaz $(f1) - (f4)$, então o problema* (3.1) *admite ground state radialmente simétrico e decrescente.*

A prova do Teorema 3.3 requer poucas mudanças na prova do Teorema 2.3, no que tange a mostrar existência de ground state. No entanto, a parte da comparação dos vários níveis minimax não será possível para o problema (3.1).

3.1 Prova do Teorema 3.1

Seja $\mathbb{S}^{n-1}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $H_r^2(\mathbb{R}^N)$ está imerso em $H_r^1(\mathbb{R}^N)$, temos que o Theorem 10 em Berestycki-Lions [14] é valido para o problema (3.1).

Teorema 3.4 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, existe uma aplicação contínua ímpar* $\pi_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \to H_r^2(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

(*i*) $\pi_n(\sigma)$ *é radialmente simétrica em* $\mathbb{S}^{n-1}$*;*

(*ii*) $0 \notin \pi_n(\mathbb{S}^{n-1})$*;*

(*iii*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(\pi_n(\sigma))\mathrm{d}x \geq 1$*, para todo* $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Lema 3.1 *A geometria do Teorema do Passo da Montanha Simétrico é satisfeita. Mais precisamente,*

(*i*) *Existem* $\beta,\ \rho > 0$ *tal que* $I(u) \geq \beta > 0$ *para* $\|u\|_{2,2} = \rho$ *e* $I(u) \geq 0$ *para* $\|u\|_{2,2} \leq \rho$;

(*ii*) *Se* $n \in \mathbb{N}$*, existe uma aplicação contínua impar* $\gamma_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \to H_r^2(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $I(\gamma_n(\sigma)) < 0,\ \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Prova: Como f é impar, segue $f(0) = 0$ e $I(0) = 0$.

Consideremos inicialmente o caso $N = 4$. Fixe qualquer $\theta > 2$.

Como na demonstração do Lema 2.1, obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - C\int_{\mathbb{R}^4} Q(|u|)|u|^{\theta}\mathrm{d}x,$$

em que

$$\|u\|_1^2 = \frac{1}{2}\|\varDelta u\|_2^2 + \frac{1-\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 < C_1\|u\|_{2,2}$$

é uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{2,2}$.

Como antes, obtemos

$$I(u) \geq \frac{C_1}{2}\|u\|_{2,2}^2 - CC_{\alpha r}\|u\|_{r\theta}^{\theta} \geq \|u\|_{2,2}^2\left(C' - \|u\|_{2,2}^{\theta-2}\right)$$

e (i) decorre ao tomarmos $\|u\|_{2,2}$ suficientemente pequeno.

Também seguindo a demonstração do Lema 2.1, obtemos (2.2) com $p = 2$ e $N = 4$ em que $B_1 = \|\varDelta(\pi_n(\sigma))\|_2$, $B_2 = \|\pi_n(\sigma)\|_2$ e $B_3 = \|\pi_n(\sigma)\|_q$ são constantes. A prova de (ii) é então obtida como antes.

Agora consideremos o caso $N > 4$. Segue das hipótese $(f1)$ e $(f2)$ a existência de $\varepsilon > 0$ pequeno e $C_\varepsilon > 0$ tais que

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon|t|^2}{2} + C_\varepsilon|t|^{2_2^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, como na prova do Lema 2.1, obtemos então

$$I(u) \geq \frac{C}{2}\|u\|_{2,2}^2 - \tilde{C}\|u\|_{2,2}^{2_2^*}.$$

O resto da prova segue de modo análogo à do caso $N = 4$. $\square$

Adaptando algumas ideias de Zhang and Chen [38] obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.2 *Qualquer sequência (u_j) satisfazendo a condição $(PS)_c$ é limitada em $H_r^2(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: A sequência (u_j) satisfaz

$$\frac{1}{2}\|u_j\|_{2,2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\mathrm{d}x \to c,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_j \Delta\phi + u_j\phi - f(u_j)\phi\mathrm{d}x = o(1)\|\phi\|,$$

para qualquer $\phi \in H_r^2(\mathbb{R}^N)$.

Por contradição, passando a uma subsequência se necessário, suponhamos que $0 < \|u_j\|_{2,2} \to +\infty$ quando $j \to \infty$. Definindo

$$v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{2,2}}, \ j \in \mathbb{N}$$

obtemos, como na demonstração do Lema 2.1, $v_j \rightharpoonup v \in H_r^2(\mathbb{R}^N)$, $v_j \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, 2_2^*)$ e também $v_j(x) \to v(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$.

O caso $v \neq 0$ é descartado como na demonstração do Lema 2.1, apenas trocando $\|\cdot\|_{s,p}$ por $\|\cdot\|_{2,2}$ e p por 2.

Suponhamos então, que se tenha $v = 0$. Como $I'(u_j)\cdot\phi = o(1)\|\phi\|_{2,2}$, dividindo esta expressão por $\|u_j\|_{2,2}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta v_j \Delta\phi\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_j\phi}{\|u_j\|_{2,2}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{2,2}}\mathrm{d}x = \frac{o(1)\|\phi\|_{2,2}}{\|u_j\|_{2,2}}$$

e, como na demonstração do Lema 2.1, chegamos na igualdade (2.4):

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_j\phi\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)\phi}{\|u_j\|_{2,2}}\mathrm{d}x = 0.$$

Considerando separadamente os caso $N = 4$ e $N > 4$ obtemos, como na demonstração do Lema 2.1,

$$\frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{2,2}} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\|v_j\|_{2,2}^2 = \frac{I'(u_j)v_j}{\|u_j\|_{2,2}} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_j)}{\|u_j\|_{2,2}}v_j\mathrm{d}x \to 0,$$

o que nos permite concluir que $v_j \to 0$ em $H_r^2(\mathbb{R}^N)$ e chegamos a uma contradição, pois $\|v_j\|_{2,2} = 1$. Assim, (u_j) tem que ser limitada. $\square$

Lema 3.3 *Seja (u_j) uma sequência $(PS)_c$. Passando a uma subsequência se necessário, (u_j) converge fortemente em $H^2_r(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: O Lema 3.2 garante que (u_j) é limitada. Assim, podemos supor que $u_j \rightharpoonup u \in H^2_r(\mathbb{R}^N)$, $u_j \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in (2, 2^*_2)$ e $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Como na demonstração do Lema 2.2, obtemos $I'(u_j) \cdot (u_j - u) \to 0$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_j \Delta(u_j - u)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u_j||u_j - u|\mathrm{d}x + o(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_j||u_j - u|\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_j - u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{C}\|u_j - u\|_2.$$

Consideramos então, separadamente, os casos $N = 4$ e $N > 4$. O caso $N = 4$ decorre da aplicação da desigualdade de Trudinger-Moser, que nos permite obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \leq C\|u_j - u\|_r$$

e concluir que, quando $j \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_j \Delta(u_j - u)\mathrm{d}x \leq \tilde{C}\|u_j - u\|_p + C\|u_j - u\|_r + o(1) \to 0. \tag{3.2}$$

Se $N > 4$, a hipótese $(f2)$ nos permite concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)||u_j - u|\mathrm{d}x \leq \tilde{C}_1\|u_j - u\|_r$$

e obtemos novamente (3.2).

Então, se $N \geq 4$ temos

$$\begin{aligned}\|u_j - u\|^2_{2,2} = &\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_j \Delta(u_j - u)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} u_j(u_j - u)\mathrm{d}x - I'(u)\cdot(u_j - u) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(u_j - u)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)(u_j - u)\mathrm{d}x \to 0\end{aligned}$$

e isso conclui nossa prova. □

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$b_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{\sigma \in \mathbb{D}_n} I(\gamma(\sigma)),$$

onde $\Gamma_n = \left\{\gamma \in C(\mathbb{D}_n, H^2_r(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma \text{ é impar e } \gamma = \gamma_n \text{ em } \partial\mathbb{D}_n\right\}$ e $\mathbb{D}_n$ é o disco unitário em $\mathbb{R}^n$, com $\partial\mathbb{D}_n = \mathbb{S}^{n-1}$. Definimos

$$\tilde{\gamma}_n(\sigma) = \begin{cases} |\sigma|\gamma_n(\frac{\sigma}{|\sigma|}), & \sigma \in \mathbb{D}_n \setminus \{0\}, \\ 0, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Como $\tilde{\gamma}_n \in \mathit{\Gamma}_n$, temos $\mathit{\Gamma}_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando a sequência (PS), $\quad (u_j)$, dado que $I(u_j) \to b_n$ e

$$\{u \in H^2_r(\mathbb{R}^N); \|u\|_{2,2} = \rho\} \cap \gamma(\mathbb{D}_n) \neq \emptyset,\ \forall \gamma \in \mathit{\Gamma}_n,$$

segue que $\beta \leq b_n$. Assim, $0 < \beta \leq b_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Agora vamos provar que o funcional $I(u)$ possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Lema 3.4 *As seguintes afirmativas são válidas.*

(i) b_n *é uma sequência de valores críticos de* $I(u)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $b_n \to \infty$ *quando* $n \to \infty$.

Prova: A demonstração é a mesma apresentada para o Lema 2.4. □

3.2 Ground state

Observamos que o valor minimax de $I(u)$ pode ser definido por

$$b_r = \inf_{\gamma \in \mathit{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{3.3}$$

em que

$$\mathit{\Gamma}_r = \{\gamma \in C([0,1], H^2_r(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \ell_0\}$$

e $\ell_0 \in H^2_r(\mathbb{R}^N)$ escolhido de tal forma que $I(\ell_0) < 0$.

No Lema 3.5 provamos que o valores minimax definidos em (2.7) não dependem do ponto final ℓ_0 e assim, podemos escrever

$$\mathit{\Gamma} = \{\gamma \in C([0,1], H^2_r(\mathbb{R}^N)) \,:\, \gamma(0) = 0,\ I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Lema 3.5 *O conjunto*

$$\mathcal{B} := \{u \in H^2_r(\mathbb{R}^N)\,;\, I(u) < 0\}$$

é conexo por caminhos.

Prova: Escrevemos

$$G(u) = F(u) - \frac{|u|^2}{2},$$

em que G é a primitiva de g. Note que $u_i \in \mathcal{B}$ implica $\int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x > 0$. Como na demonstração do Lema 2.5, segue-se que

$$I(u_i^t) = \frac{t^{N-4}}{2}\|\mathit{\Delta} u_i\|_2^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(u_i^t) = Nt^{N-1}\left(\frac{t^{-4}}{4}\|\Delta u_i\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_i)\mathrm{d}x\right) - 2t^{N-5}\|\Delta u_i\|_2^2.$$

Para $t \geq 1$ temos $t^{-4} \leq 1$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(u_i^t) \leq Nt^{N-1}I(u_i) - 2t^{N-5}\|\Delta u_i\|_2^2 < 0.$$

Logo, para $N \geq 4$, concluímos que $I(u_i^t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. A partir desse momento a demonstração é idêntica à do Lema 2.5. □

Concluímos a prova do Teorema 3.3, ao aplicarmos o seguinte resultado:

Teorema 3.5 *Suponha $N \geq 4$ e $(f_1) - (f_4)$. Então, para b_r definido em (3.3), temos*

(*i*) *Existe uma solução u_0 do problema (2.1) tal que*

$$I(u_0) = b_r;$$

(*ii*) *Para qualquer solução não trivial v do problema (2.1), temos que*

$$b_r \leq I(v).$$

Destacamos que, para o bilaplaciano não vale uma desigualdade de Pólya-Szegö e não podemos aplicar simetrização de Schwarz e fazer comparação dos níveis de energia como no Lema 2.6 (veja Enno Lenzmann [26] para detalhes). Mais ainda, não podemos assumir que

$$\gamma_k(t)(x) \geq 0, \quad \forall\, t \in [0,1], \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, não podemos garantir nem mesmo que nossa solução ground state é não negativa.

A prova do item (*i*) segue do Lema B.2.

Seja v uma solução não trivial qualquer do problema (3.1). Definimos

$$\gamma(t)(x) := \begin{cases} v(\frac{x}{t}), & \text{se } \ t > 0; \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Notamos que $\gamma \in C\left([0,\infty), H_r^2(\mathbb{R}^N)\right)$ satisfaz

$$\|\gamma(t)\|_{2,2}^2 = t^{N-4}\|\Delta v\|_2^2 + t^N\|v\|_2^2$$

e

$$I(\gamma(t)) = \frac{t^{N-4}}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{t^N}{2}\|v\|_2^2 - t^N\int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x.$$

Para adaptando ao nosso contexto a ideia do Lema 2.1 em Jeanjean e Tanaka [25], escolhemos $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (1,\infty)$ e $\theta_1 > 1$, e consideramos o caminho γ constituído por três partes:

$$\begin{array}{ll} [0,1] & \to H_r^2(\mathbb{R}^N) \\ \theta & \mapsto \theta v_{t_0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} [t_0,t_1] & \to H_r^2(\mathbb{R}^N) \\ t & \mapsto v_t \end{array} \qquad \begin{array}{ll} [1,\theta_1] & \to H_r^2(\mathbb{R}^N) \\ \theta & \mapsto \theta v_{t_1} \end{array}$$

em que $v_t(x) = v(\frac{x}{t})$.

Como $v \neq 0$ é solução do problema (3.1) tem-se que

$$\|\Delta v\|_2^2 = \langle \Delta^2 v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Uma vez que estamos adotando a norma usual em $H_r^2(\mathbb{R}^N)$, devemos ter $\|\Delta v\|_2^2 > 0$.

De fato, caso contrário teríamos $\Delta v = 0$. Como $v(x) = v(r),\ r = |x|$, segue-se que

$$\Delta v = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{3.5}$$

Supondo $v'(r) \neq 0$, segue da equação (3.5) que

$$v'(r) = cr^{1-N} \text{ em } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

Note que $v'(r)$ é ilimitada quando $r \to 0^+$. Assim, v não pertence ao espaço $H_r^2(\mathbb{R}^N)$, o que é uma contradição. Logo, só resta ser $v'(r) = 0$ o que implica $v = 0$. Ou seja, não é possível ter $\Delta v = 0$, sendo $v \neq 0$ solução do problema (3.1).

Sendo assim, podemos escolher $\theta_1 > 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v)v\mathrm{d}x > 0, \quad \forall \theta \in [1,\theta_1]. \tag{3.6}$$

Recordando que $g(s) = -s + f(s)$, segue-se da nossa hipótese $(f1)$ que

$$\varphi(s) := \frac{g(s)}{|s|}$$

é contínua. Decorre daí que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}I(\theta v_t) &= I'(\theta v_t)v_t = \langle \Delta^2(\theta v_t), v_t\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v_t)v_t\mathrm{d}x \\ &= \theta t^{N-4}\left(\|\Delta v\|_2^2 - t^4\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(\theta v)|v|v\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Se $N > 4$, ao escolher $t_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}I(\theta v_{t_0}) > 0, \quad \forall\, \theta \in [0,1].$$

Considerando (3.4) em (3.6), podemos escolher $t_1 > 1$ suficientemente grande de modo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}I(\theta v_{t_1}) < 0, \quad \forall\, \theta \in [1,\theta_1].$$

Também notamos que, fixado $\theta = 1$ e levando em conta que v satisfaz (3.4), temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) = t^{N-4}\left(\|\Delta v\|_2^2 - t^4\int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x\right)$$
$$= t^{N-4}\|\Delta v\|_2^2(1-t^4).$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) > 0, \text{ se } \ t < 1$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) < 0, \text{ se } \ t > 1.$$

Em outras palavras, $I(\theta v_t)$ assume seu valor máximo em $\theta = 1$.

Agora consideramos o caso $N = 4$. Temos

$$\frac{d}{d\theta} I(\theta v_t) = \theta\left(\|\Delta v\|_2^2 - t^4\int_{\mathbb{R}^4}\varphi(\theta v)|v|v\mathrm{d}x\right)$$

e

$$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) = \|\Delta v\|_2^2(1-t^4).$$

Logo, utilizando a argumentação do caso $N > 4$, também concluímos que $I(\theta v_t)$ assume seu valor máximo $I(v)$ em $\theta = 1$.

Finalmente, notamos que

$$I(\theta_1 v_{t_1}) = \frac{t_1^{N-4}}{2}\|\Delta\theta_1 v\|_2^2 + \frac{t_1^N}{2}\|\theta_1 v\|_2^2 - t_1^N\int_{\mathbb{R}^N} F(\theta_1 v)\mathrm{d}x.$$
$$= \frac{t_1^{N-4}\theta_1^4}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{t_1^N\theta_1^2}{2}\|v\|_2^2 - t_1^N\int_{\mathbb{R}^N} F(\theta_1 v)\mathrm{d}x.$$

Consideremos o caso $N > 4$. Decorre da hipótese $(f3)$ que

$$I(\theta_1 v_{t_1}) \le t_1^{N-4}\theta_1^2\left[\frac{\theta_1^2}{2}\|\Delta v\|_2^2 + t_1^4\left(\frac{1}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu\theta_1^{q-2}}{q}\|v\|_q^q\right)\right].$$

Como $\theta_1^{q-2} > 1$, podemos escolher

$$\mu > \frac{q\|v\|_2^2}{2\|v\|_q^q}.$$

Logo, concluímos que $I(\theta_1 v_{t_1}) < 0$.

Se $N = 4$, temos

$$I(\theta_1 v_{t_1}) \le \theta_1^2\left[\frac{\theta_1^2}{2}\|\Delta v\|_2^2 + t_1^4\left(\frac{1}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu\theta_1^{q-2}}{q}\|v\|_q^q\right)\right]$$

e também concluímos que $I(\theta_1 v_{t_1}) < 0$.

Portanto, após uma mudança adequada de escala em t, existe um caminho $\gamma(t) : [0,1] \to H_r^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\gamma(0) = 0, \quad I(\gamma(1)) < 0, \quad v \in \gamma([0,1]) \text{ e } \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(v).$$

Ou seja, $b_r \le I(v)$ para toda solução não trivial v do problema (3.1), concluindo a prova de (ii).

Apêndices

Apêndice A

O Gênero de Krasnoselskii

Seja E, de acordo com o operador estudado, um espaço de Banach. Seja $\mathcal{E}$ a classe de subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbf{N}} \setminus \{0\}$ que são fechados e simétricos em relação à origem. Para $A \in \mathcal{E}$, definimos o gênero de Krasnoselskii de A por $gen(A)$ onde

$$gen(A) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, \phi \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}),\ \phi(x) = -\phi(-x)\right\}$$

e, se tal mínimo não for atingido, definimos $gen(A) = +\infty$.

As principais propriedades do gênero são as seguintes (veja [36] para detalhes):

Proposição A.1 *Sejam $A, B \in \mathcal{E}$. Então:*

(*i*) *Se existe uma função impar $f \in C(A, B)$, então $gen(A) \leq gen(B)$.*

(*ii*) *Se $A \subset B$, então $gen(A) \leq gen(B)$.*

(*ii*) *Se existe um homeomorfismo impar entre A e B, então $gen(A) = gen(B)$.*

(*iv*) *Se $\mathbb{S}^{N-1}$ é a esfera unitária de $\mathbb{R}^N$, então $gen(\mathbb{S}^{N-1}) = N$.*

(*v*) *$gen(A \cup B) \leq gen(A) + gen(B)$.*

(*vi*) *Se $gen(B) < +\infty$, então $gen(\overline{A \setminus B}) \geq gen(A) - gen(B)$.*

(*vii*) *Se A é compacto, então $gen(A) < +\infty$, e existe $\delta > 0$ tal que $gen(A) = gen(N_\delta(A))$ onde $N_\delta(A) = \{x \in \mathbf{E} \,:\, d(x, A) \leq \delta\}$.*

(*viii*) *Se Y é um subespaço de $\mathbf{E}$ com codimensão k, e $gen(A) > k$, então $A \cap Y \neq \emptyset$.*

Apêndice B

Uma abordagem alternativa

Apresentamos aqui uma prova alternativa do Teorema 3.3. Nossa argumentação para tal, consta de alterações simples nos resultados obtidos por Alves, Figueiredo e Siciliano [3].

Consideremos o conjunto das soluções não triviais do problema (3.1), isto é

$$\Sigma = \left\{u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \ : \ I'(u) = 0\right\}.$$

Denotamos por m o nível de energia ground state, isto é, $m = \inf_{u \in \Sigma} I(u)$. Definimos o conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \ : \ \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\mathrm{d}x = 0\right\}, \tag{B.1}$$

em que $G(t) = F(t) - \dfrac{t^2}{2}$ é a primitiva de $g(t)$. Definimos

$$T(u) = \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 \qquad D = \inf_{u \in \mathcal{M}} T(u).$$

Observe que

$$2D = \inf_{u \in \mathcal{M}} \|\Delta u\|_2^2.$$

Definimos Também o nível minimax associado ao funcional I

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \text{ onde} \tag{B.2}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)) \ : \ \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Como I satisfaz à geometria do Passo da Montanha em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, (veja o Lema 2.1), segue-se que $\Gamma \neq \emptyset$.

Lema B.1 *O conjunto $\mathcal{M}$ definido em* (B.1) *é não vazio e uma variedade de classe C^1.*

Prova: Seja $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $w(x) > 0$ e definimos

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(tw)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} F(tw)\mathrm{d}x - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2\mathrm{d}x.$$

Para $t > 0$ suficientemente pequeno, por $(f1)$ segue

$$h(t) \leq \frac{\varepsilon - 1}{2}t^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2\mathrm{d}x.$$

Concluímos daí que $h(t) < 0$ se $\varepsilon < 1$ e $t > 0$ é suficientemente pequeno. Pela hipótese $(f3)$ segue-se que

$$\begin{aligned} h(t) &\geq \frac{\lambda t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} w^q\mathrm{d}x - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2\mathrm{d}x \\ h'(t) &\geq \lambda t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} w^q\mathrm{d}x - t\int_{\mathbb{R}^N} w^2\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Assim, $h(t) > 0$ e $h'(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Então, existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{t}w)\mathrm{d}x = 0,$$

e concluímos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Agora provamos que $\mathcal{M}$ é variedade. De fato, se $w \in \mathcal{M}$ então $w \neq 0$. Assim, por $(f1)$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} w(x) = 0$, existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $g(w(x_0)) < 0$. Pela continuidade de g, existe uma bola aberta $\mathcal{B}_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$g(w(x)) < 0, \forall x \in \mathcal{B}_\delta(x_0).$$

Definindo

$$J(w) := \int_{\mathbb{R}^N} G(w)\mathrm{d}x$$

podemos encontrar $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$J'(w).\phi = \int_{\mathbb{R}^N} g(w)\phi\mathrm{d}x < 0,$$

e concluímos que $J'(w) \neq 0$.

$\square$

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente sobre uma sequência (u_n) para obter a convergência $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Lema B.2 *Suponhamos que f satisfaça $(f1)$ e $(f3)_{gs} - (f4)$.*

Seja $(u_n) \subset W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência de funções radiais tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\sup_n \|\Delta u_n\|_2^2 = \rho < 1 \quad e \quad \sup_n \|u_n\|_2^2 = M < \infty.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $u \in W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N)$, $\quad u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. do $\mathbb{R}^N$ e

$$\lim_{|x|\to+\infty} u_n(x) = 0, \text{ uniformemente em } n.$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (veja Teorema 1.1), para cada $m \in (0,1)$ e $M > 0$ existe $C = C(m, M) > 0$ tal que

$$\sup_{u\in\mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx \leq C(m, M),$$

onde

$$\mathcal{B} = \{u \in W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N) : \|\Delta u_n\|_2^2 \leq m \text{ e } \|u\|_2^2 \leq M\}.$$

Escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $m = \frac{\rho}{(1-\varepsilon)^2} \in (0,1)$ e ponha

$$\tau := \frac{\alpha}{(1-\varepsilon)^2} > \alpha > \alpha_0.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\tau|u_n|^2} - 1 dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\tau(1-\varepsilon)^2\left(\frac{|u_n|}{1-\varepsilon}\right)^2} - 1 dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha\left(\frac{|u_n|}{1-\varepsilon}\right)^2} - 1 dx$$

Como $u_n \in \mathcal{B}$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\tau|u_n|^2} - 1 dx \leq \sup_{u\in\mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx \leq C(m, M)$$

Defina $P(t) := F(t)$ e $Q(t) := e^{\alpha t^2} - 1$.

A hipótese $(f1)$ implica $\lim_{t\to 0} \dfrac{F(t)}{t^2} = 0$ e pela regra de L'Hospital temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{Q(t)} = \frac{1}{\alpha}.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(t)}{Q(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^2} \frac{t^2}{Q(t)} = 0.$$

Por outro lado, o Lema 1.1 (ii) garante que

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = 0.$$

Pela última desigualdade, temos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n)| < +\infty.$$

Como $P(t) = F(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. do $\mathbb{R}^N$, segue que

$$P(u_n(x)) \to P(u(x)) \text{ q.t.p. do } \mathbb{R}^N \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim (veja [17, Lema 2.4]),

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^N} P(u),$$

ou equivalentemente ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u),$$

concluindo a prova.

□

A relação entre o número D e o nível minimax definido em (B.2) é dado pelo seguinte resultado.

Lema B.3 *É válida a relação* $0 < D \leq b$.

Prova: Arguindo como no LemaB.1, dado $v \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ com $v^+ \neq 0$, existe $t_0 > 0$ tal que $t_0 v^+ \in \mathcal{M}$. Segue que

$$D \leq \frac{1}{2}\|\Delta t_0 v^+\|_2^2 = I(t_0 v^+) \leq \max_{t\geq 0} I(tv^+).$$

Por outro lado, como $f(t) = 0$ para $t \leq 0$, se $0 \neq v \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ com $v^+ = 0$, então $\max_{t\geq 0} I(tv) = +\infty$. Assim, em qualquer caso $D \leq b$.

Agora, provamos que $D > 0$. Suponha $D = 0$ e seja (u_n) em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante (não negativa, radial) para D, isto é,

$$\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|_2^2 \to 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) = 0.$$

Para cada $\lambda_n > 0$, a função $v_n(x) := u_n(x/\lambda_n)$ satisfaz

$$\|\Delta v_n(x)\|_2^2 = \lambda_n^{N-4}\|\Delta u_n(x)\|_2^2 = \|\Delta u_n(x)\|_2^2 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n) = 0.$$

Como

$$\|v_n\|_2^2 = \lambda_n^2 \|u_n\|_2^2,$$

escolhendo $\lambda_n = \|u_n\|_2^{-2}$ obtemos

$$\frac{1}{2}\|\Delta v_n(x)\|_2^2 \to 0, \quad \|v_n\|_2^2 = 1 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n)\mathrm{d}x = 0$$

Suponhamos que exista $v \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ radial tal que $v_n \rightharpoonup v \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Do Lema B.2 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x.$$

Note que $\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n)\mathrm{d}x = 0$ implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

e concluímos que $v \neq 0$.

Por outro lado, por $v_n \rightharpoonup v$, segue-se que

$$\frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\Delta v_n\|_2^2 \to 0$$

o que implica

$$\Delta v = 0.$$

Como $v(x) = v(r),\ r = |x|$ em $\mathbb{R}^N$, pode-se deduzir que

$$\Delta v = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{B.3}$$

Supondo $v'(r) \neq 0$ na equação (B.3), deduz-se que

$$v'(r) = cr^{1-N} \text{ em } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

Deste modo, $v'(r)$ é ilimitada quando $r \to 0^+$ e v não pode pertencer ao espaço $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Logo, resta ser $v'(r) = 0$ o que implica $\nabla v = 0$ e, consequentemente, que v é a função constante identicamente nula. Esta contradição encerra a prova.

□

Lema B.4 *Se* $\mu > \mu^*$ *então* $b < \frac{1}{2}$

Prova: Seja $\psi \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\|\psi\|_{2,2} = 1 \text{ e } \|\psi\|_q^2 = C_q^{-1}.$$

Pela definição de b e por $(f3)$, temos

$$\begin{aligned} b \leq \max_{t\geq 0} I(t\psi) &\leq \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2} - \frac{\mu t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\psi^q\mathrm{d}x\right\} \\ &= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2} - \frac{\mu t^q}{q}C_q^{-q/p}\right\} \\ &= \frac{(q-2)}{2q}\frac{C_q^{q/(q-2)}}{\mu^{\frac{2}{q-2}}} \end{aligned}$$

Pela aplicação de nossas hipóteses, segue que

$$b \leq \frac{(q-2)}{pq}\frac{C_q^{q/(q-2)}}{\mu^{\frac{2}{q-2}}} < \frac{(q-2)}{2q}\frac{C_q^{q/(q-2)}}{\left(\left(\frac{q-2}{q}\right)^{\frac{q-2}{2}}C_q^{q/2}\right)^{\frac{p}{q-2}}} = \frac{1}{2}.$$

□

Para completar a prova do Teorema 3.3, resta provar que D é atingido para u, onde u é o limite fraco de (u_n) e provar que $m = b = D$.

Prova:[Prova of Theorem 3.3]

Inicialmente, provamos que D é atingido. De fato, seja $(u_n) \subset W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para D, isto é

$$\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|_2^2 \to D \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\mathrm{d}x = 0 \tag{B.4}$$

Argumentando como no Lema B.3 podemos supor que

$$\|u_n\|_p^p = 1$$

e combinando (B.4) como o que foi provado acima, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|\Delta u_n\|_2^2 \leq 2D \leq 2b < 1.$$

Pelo Lema B.2, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x, \tag{B.5}$$

onde $u_n \rightharpoonup u$ em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Segue de (B.4) e (B.5) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

e como consequência, $u \neq 0$ e $\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 \leq D$.

Precisamos provar que $u \in \mathcal{M}$, isto é, $\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\mathrm{d}x = 0$. Lembrando que

$$\|u\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_2^2$$

e isto implica que $\|u\|_2^2 \leq 1$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\|u\|_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\|u\|_2^2 \geq 0.$$

Argumentando pro contradição nós supomos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\mathrm{d}x > 0.$$

Como em nossos argumentos anteriores, definimos $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(tu)\mathrm{d}x$. Pela condição de crescimento de f temos $h(t) < 0$ para t próximo de 0 e $h(1) =$

$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\mathrm{d}x > 0$. Logo, por continuidade, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0 u) = 0$, isto é $t_0 u \in \mathcal{M}$. Consequentemente,

$$D \leq \frac{t_0^2}{2}\|\Delta u\|_2^2 \leq t_0^2 D < D,$$

a qual é uma contradição. Portanto, D é atingido.

Agora, provemos que $m = b = D$.

Como u é uma solução do problema de minimização, isto é

$$D = T(u) = \inf_{w\in\mathcal{M}} T(w),$$

existe um multiplicador de Lagrange λ associado, tal que, no sentido fraco,

$$-\Delta u = \lambda g(u), \text{ para qualquer } u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N).$$

Definindo

$$u_\sigma := u(\sigma x), \text{ para } \sigma > 0,$$

podemos ver que

$$-\Delta u_\sigma = \lambda \sigma^4 g(u_\sigma)$$

e escolhendo $\sigma = \lambda^{\frac{1}{4}}$ obtemos uma solução do problema (3.1). Logo,

$$m \leq I(u_\sigma) = \frac{1}{2}\|\Delta u_\sigma\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_\sigma)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|\Delta u_\sigma\|_2^2 = D,$$

isto é

$$m \leq D.$$

Como provado no Lema B.3, $D \leq b$. Segue que

$$m \leq D \leq b.$$

Resta mostrar que $b \leq m$, o qual provamos no seguinte resultado.

Proposição B.1 *Para qualquer solução não trivial v do problema* (3.1)*, existe um caminho $\gamma_w \in \Gamma$ tal que $w \in \gamma_w([0,1])$ e $I(w) = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_w(t))$.*

Prova:

Consideremos v uma solução não trivial do problema (3.1) e defina

$$\gamma(t)(x) := \begin{cases} v(\frac{x}{t}), & \text{se } t > 0; \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\gamma \in C\left([0,\infty), W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)\right)$ satisfaz

$$\|\gamma(t)\|_{2,2}^2 = \|\Delta v\|_2^2 + t^N \|v\|_2^2$$

e

$$I(\gamma(t)) = \frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{t^4}{2}\|v\|_2^2 - t^4 \int_{\mathbb{R}^N} F(v)\mathrm{d}x.$$

Adaptando ideias de Jeanjean e Tanaka [25, Lema 2.1] escolhemos $t_0 \in (0,1)$, $t_1 \in (1,\infty)$ e $\theta_1 > 1$ e consideremos o caminho γ constituído dos três pedaços.

$$\begin{array}{llllll} [0,1] & \to W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \qquad & [t_0,t_1] & \to W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \qquad & [1,\theta_1] & \to W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \\ \theta & \mapsto \theta v_{t_0} & t & \mapsto v_t & \theta & \mapsto \theta v_{t_1} \end{array}$$

onde $v_t(x) = v(\frac{x}{t})$.

Como $v \neq 0$ é solução do problema (3.1), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x = \|\Delta v\|_2^2 > 0. \tag{B.6}$$

Assim, podemos escolher $\theta_1 > 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v)v\mathrm{d}x > 0, \quad \forall \theta \in [1,\theta_1].$$

Notemos que, de acordo com nossas hipóteses,

$$\varphi(s) := \frac{g(s)}{s}$$

é função contínua. Segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} I(\theta v_t) = I'(\theta v_t)v_t &= \langle A(\theta v_t), v_t\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g(\theta v_t)v_t\mathrm{d}x \\ &= \theta\left(\|\Delta v\|_2^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\theta v)v\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $t_0 \in (0,1)$ pequeno o suficiente, temos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} I(\theta v_{t_0}) > 0, \ \forall \theta \in [0,1].$$

Mais ainda, por (B.6), podemos escolher $t_1 > 1$ grande o suficiente, tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} I(\theta v_{t_1}) < 0, \ \forall \theta \in [1,\theta_1].$$

Notemos também, que fixado $\theta = 1$ e levando em conta que v satisfaz (2.11), temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) &= \left(\|\Delta v\|_2^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} g(v)v\mathrm{d}x\right) \\ &= \|\Delta v\|_2^2(1-t^N). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=1} I(\theta v_t) > 0, \ \text{se} \ \ t < 1$$

e

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=1} I(\theta v_t) < 0, \text{ se } \ t > 1.$$

Em outras palavras, $I(\theta v_t)$ atinge seu valor máximo em $\theta = 1$.

Finalmente, notemos que

$$I(\theta_1 v_{t_1}) = \frac{1}{2}\|\Delta(\theta_1 v)\|_2^2 + \frac{t_1^N}{2}\|\theta_1 v\|_2^2 - t_1^N \int_{\mathbb{R}^N} F(\theta_1 v)\mathrm{d}x.$$

De $(f3)$ obtemos

$$I(\theta_1 v_{t_1}) \leq \theta_1^2 \left[\frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 + t_1^N \left(\frac{1}{2}\|v\|_2^2 - \frac{\mu\theta_1^{q-2}}{q}\|v\|_q^q\right)\right].$$

Observamos que $\theta_1^{q-2} > 1$ ao escolhermos

$$\mu > \frac{q\|v\|_2^2}{2\|v\|_q^q}$$

concluímos que $I(\theta_1 v_{t_1}) < 0$.

Portanto, após um apropriado reescalonamento em t, existe um caminho

$$\gamma(t) : [0,1] \to W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \text{ tal que}$$

$$\gamma(0) = 0, \quad I(\gamma(1)) < 0, \quad v \in \gamma([0,1]) \text{ e } \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(v).$$

Isto é, $b \leq I(v)$ para qualquer v solução não trivial do problema (3.1) concluindo a prova da Proposição B.1. □

Portanto,

$$m = b = D,$$

e a função u_σ é uma solução ground state para o problema (3.1), o que conclui a prova do Teorema 3.3. □

Apêndice C

Resultados Auxiliares

Para tornar a leitura mais simples, apresentamos e daremos a prova de alguns resultados utilizados nos capítulos anteriores.

C.1 Sobre o crescimento da não linearidade f

Consideramos nessa tese, dois tipos de crescimento da nossa não linearidade f : **Crescimento exponencial** e **Crescimento polinomial.** Para cada um deles, distinguimos os casos **crítico** e **subcrítico**. Vamos à definição de cada um deles.

Definição C.1 (Crescimento subcrítico exponencial) *Dizemos que f tem crescimento subcrítico exponencial se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t^{\frac{N}{N-s}}}} = 0,$$

para qualquer $\alpha > 0$.

Ou seja, a exponencial sempre "domina" f, independentemente do tamanho de $\alpha > 0$. Por outro lado, f tem um crescimento crítico quando o tamanho de $\alpha > 0$ fizer diferença para o limite em questão. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição C.2 (Crescimento crítico exponencial) *Dizemos que f tem crescimento crítico exponencial se existir $\alpha_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t^{\frac{N}{N-s}}}} = \begin{cases} 0, & se \;\; \alpha > \alpha_0; \\ +\infty, & se \; 0 < \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Definição C.3 (Crescimento subcrítico polinomial) *Dizemos que f tem crescimento subcrítico polinomial se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{P_s^*-1}} = 0.$$

Note que neste caso teremos

$$|F(t)| \leq \varepsilon \frac{|t|^{p_s^*}}{p_s^*},$$

em que $\varepsilon > 0$ é pequeno e $F(t)$ é a primitiva de f . Ou seja, jamais teremos

$$|F(t)| = \frac{|t|^{p_s^*}}{p_s^*}.$$

Dito de outro modo, a potência crítica não será atingida. Porém, na definição a seguir, estamos admitindo no limite o caso extremo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{P_s^*-1}} = 1.$$

Desta forma, podemos ter $|F(t)| = \frac{|t|^{p_s^*}}{p_s^*}$. Ou seja, a potência crítica pode ser atingida.

Definição C.4 (Crescimento crítico polinomial) *Dizemos que f tem crescimento crítico polinomial se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{P_s^*-1}} \leq 1.$$

Proposição C.1 *Suponhamos $(f1) - (f2)$ satisfeitas. Então existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$, tais que*

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon|t|^p}{p} + C_\varepsilon|t|^{p_s^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$. Pela hipótese $(f1)$ e a regra de L'Hospital, segue-se que

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon|t|^p}{p}, \quad \forall t \in [-\delta, \delta],$$

para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Pela hipótese $(f2)$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq C_1|t|^{p_s^*}, \quad \forall |t| \geq R_0,$$

em que $R_0 > 0$ suficientemente maior que 1.

Observe que a função

$$h(t) = \frac{p_s^*|F(t)|}{|t|^{p_s^*}}$$

é contínua no compacto $[-R_0, -\delta]$. Logo, assume máximo absoluto nesse intervalo. Sendo assim, existe $C_2 > 0$ satisfazendo

$$|F(t)| \leq C_2|t|^{p_s^*}, \quad \forall |t| \in [-R_0, -\delta].$$

De modo similar, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq C_3|t|^{p_s^*}, \quad \forall |t| \in [\delta, R_0].$$

Consideremos então, $C = \max\{C_1,\ C_2,\ C_3\}$. Segue-se que

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon |t|^p}{p} + C|t|^{p_s^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e a prova está completa.

$\square$

C.2 Operador p-laplaciano fracionário

Definição C.5 *Sejam $u \in C_0^\infty$ e $s \in (0,1)$. A menos de uma constante multiplicativa $C(N,s)$, 0 operador p-laplaciano fracionário $(-\Delta)_p^s$ é definido por*

$$\begin{aligned}(-\Delta)_p^s u(x) &:= P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy,\end{aligned}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, em que P.V. é o valor principal da integral.

No caso $p = 2$, a menos da constante

$$C(N,s) = \frac{4^s \Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(-s)},$$

temos a definição do operador laplaciano fracionário, $(-\Delta)^s$.

C.3 Alguns resultados da Análise Funcional

Apresentamos aqui as definições da diferencial de Gateaux e Frechet e um resultado que será útil para mostrar que nosso funcional energia é de classe C^1.

Definição C.6 *Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função, em que U é um aberto em V. Se existir o limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

ele será chamado derivada de Gateaux de F em u_0 na direção $h \in V$ a qual denotamos por $\langle F'(u_0), h \rangle$.

Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$ em que E é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X.

Teorema C.1 *(Veja [28, Proposição 1.3]) Se ϕ possui uma derivada de Gateaux contínua em E, então $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

No que segue, apresentamos alguns resultados da Análise Funcional.

Proposição C.2 (*Veja [15, Proposição 3.5]) Seja X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Se (x_n) converge fracamente para $x \in X$, então $\|x_n\|_X$ é limitada e*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Teorema C.2 (*Veja [15, Teorema 4.1])[Lema de Fatou]. Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz*

(a) para todo n, $f_n \geq 0$ q.t.p. de Ω;

(b) $\sup_n f_n < \infty$;

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

Teorema C.3 (*Veja [15, Teorema 4.2])[Teorema da convergência dominada de Lebesgue]. Sejam f_n uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, satisfazendo :*

(a) $f_n \to f$ q.t.p. em Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$$

Teorema C.4 (*Veja [15, Teorema 4.9]) Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $u_{n_k} \to u$, q.t.p. em Ω,

(ii) $|u_{n_k}| \leq h$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p em Ω.

Teorema C.5 (*Veja [15, Teorema 4.11])[Teorema da representação de Riesz]. Sejam $p, p' > 1$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u f dx \qquad \text{para todo } f \in L^p(\Omega),$$

além disso

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema C.6 (*Veja [15, Teorema 4.5])[Teorema de Fubini] Suponha que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dydx.$$

Teorema C.7 (*Veja [15, Teorema 2.2]*)*[Banach-Steinhaus ou Princípio da Limitação Uniforme] Sejam E e F espaços de Banach e seja $\{T_{i\in I}\}$ uma família de operadores lineares contínuos de E em F. Suponha que a família $\{T_{i\in I}\}$ seja "pontualmente limitada", isto é,*

$$\sup_{i\in I}\{\|T_i x\|\} < \infty, \ \forall\, x \in E.$$

Então

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que

$$\|T_i x\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in E \ \text{ e } \forall i \in I.$$

Proposição C.3 *$W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N)$ é subespaço fechado do espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{s,p}$. Como $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Banach, tem-se que

$$u_n \to u, \ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Devemos mostrar que

$$u \in W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N).$$

Suponhamos por contradição, que

$$u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N).$$

A definição de $W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N)$ é dada pela ação do grupo ortogonal do $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{O}(N)$. Mais precisamente,

$$W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N) := Fix(\mathcal{O}(N)) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : \tau(u) = u, \forall \tau \in \mathcal{O}(N)\}.$$

A ação é dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(N) \times W^{s,p}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (\tau, u) & \longmapsto & \tau(u) \end{array}$$

e satisfaz às seguintes condições:

(i) $1 \cdot u = u$;

(ii) $(\tau\varphi)u = \tau(\varphi u)$;

(iii) $u \mapsto \tau(u)$ é linear;

(iii) a ação é isométrica, isto é, $\|\tau(u)\|_{s,p} = \|u\|_{s,p}$, $\forall u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Lembramos que estamos supondo $u \notin W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N)$. Ou seja,

$$\tau(u) = v \neq u, \forall \tau \in \mathcal{O}(N).$$

Tem-se que

$$0 \leftarrow \|u_n - u\|_{s,p} = \|\tau(u_n - u)\|_{s,p} = \|u_n - v\|_{s,p} \Rightarrow \|u_n - v\|_{s,p} \to 0.$$

O que contraria a unicidade do limite. Portanto, devemos ter $u \in W^{s,p}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^N)$, o que encerra nossa prova. $\square$

C.4 Resultados da Teoria de Pontos Críticos

Teorema C.8 *Sejam X um espaço topológico compacto e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente (s.c.i., isto é, $f^{-1}((a,\infty))$ é aberto em X para todo $a \in \mathbb{R}$). Então f é limitada inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$f(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

Prova: Note que $f^{-1}((-n,\infty))$ são abertos em X para $n = 1, 2, 3, \cdots$ e

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n,\infty)).$$

Como X é compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} f^{-1}((-n,\infty)).$$

Logo, $-n_0 < f(u)$, para toda $u \in X$, donde

$$-\infty < L = \inf_{u \in X} f(u).$$

Para provar que o ínfimo de f é atingido, suponhamos por contradição que não exista $u \in X$ tal que $f(u) = L$.

Por um raciocínio análogo ao anterior, escrevemos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(L + \frac{1}{n}, \infty\right)\right).$$

Mais uma vez, por X ser compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{k} f^{-1}\left(\left(L + \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$$

e consequentemente,

$$f(u) > L + \frac{1}{k}, \ \forall u \in X.$$

Sendo assim, teremos

$$\frac{1}{k} + L < L,$$

o que é uma contradição. Portanto, deve existir $u_0 \in X$ tal que

$$f(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

□

Corolário C.1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função fracamente semicontínua inferiormente (f.s.c.i., isto é, s.c.i. na topologia fraca). Suponha ainda que*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} f(u) = \infty.$$

Então, f é limitada inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$f(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

Prova: Seja $M = f(0)$. Vamos escolher $R > 0$ tal que

$$f(x) > M, \text{ sempre que } \|u\| \geq M.$$

Consideremos $f\big|_{B_R(0)}$ em que $B_R(0) = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$. Como X é reflexivo, segue-se que $B_R(0)$ é fracamente compacta. Aplicando o Teorema C.8 existe $u_0 \in B_R(0)$ tal que

$$f(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

Segue daí que,

$$f(u_0) \leq M = f(0) \leq f(u), \quad \text{se } \|u\| \geq R.$$

Logo, $f(u_0)$ é um mínimo global para f, ou melhor,

$$f(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

□

Corolário C.2 *Suponha válidas as hipóteses do Corolário C.1 e, adicionalmente, que f seja diferenciável em X. Então, o ponto de mínimo u_0 obtido é um ponto crítico de f. Ou seja, $f'(u_0) = 0$.*

Prova: De fato,

Consideremos

$$\psi(t) = f(u_0 + tu),\ t \in \mathbb{R}.$$

Segue-se que ψ é diferenciável e $t = 0$. Como $\psi(0) = f(u_0)$ é um mínimo local, segue-se que $\psi'(0) = 0$. Logo,

$$\psi'(0) = f'(u_0) \cdot u = 0, \forall u \in X.$$

$\square$

Teorema C.9 (*Veja [36, Teorema 2.2]*) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisfazendo à condição (PS). Suponha $I(0) = 0$ e*

(1) existem constantes $\rho,\ \alpha > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ e

(2) existe $e \in E \setminus B_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, o qual é caracterizado por

$$c = \inf_{g \in \varGamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

em que

$$\varGamma = \{g \in C([0,1], E)\ \ ;\ \ g(0) = 0\ ,\ g(1) = e\}.$$

Teorema C.10 (*Veja [36, Teorema 9.12]*) *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par satisfazendo à condição (PS). Suponha que $I(0) = 0$. Se $E = Y \oplus Z$, em que Y tem dimensão finita e*

(1) existem constantes $\rho,\ \alpha > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho \cap Z} \geq \alpha$ e

(2) para cada subespaço $Y \subset E$ com $\dim Y < \infty$ existe $R = R(Y)$ tal que $I < 0$ sobre $Y \setminus B_{R(Y)}$.

Então, I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Teorema C.11 (*Veja [35, Lema 2]*) *O funcional*

$$\begin{array}{rcl} J : W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & J(w) = \dfrac{1}{p}[w]_{s,p}^p \end{array}$$

é de classe $C^1\left(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\langle J'(w), v\rangle = \langle (-\varDelta_p)^s\, w, v\rangle,$$

para toda $v \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $w_n \rightharpoonup w,\ w \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\langle (-\varDelta_p)^s\, w_n, \varphi\rangle \to \langle (-\varDelta_p)^s\, w, \varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

C.5 Regularidade do funcional energia I.

Em nosso próximo resultado mostramos que o funcional energia I associado ao problema (1) está bem definido e é de classe $I \in C^1$. Também provamos a expressão para a derivada do mesmo.

Salientamos que esta prova pode ser adaptada facilmente para os funcionais associados aos problemas (5) e (6). No entanto, os detalhes das mesmas não serão dados aqui.

Lema C.1 *Suponha f satisfazendo $(f1)-(f4)$, então o funcional "energia" associado ao problema* (1)

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{s,p}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x$$

está bem definido, $I \in C^1\left(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ e sua derivada é dada por

$$I'(u)\cdot v = \langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\mathrm{d}x,$$

em que

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Prova: Sejam $I_1, I_2 : W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ em que

$$I_1(u) = \frac{1}{p}[u]_{s,p}^p + \frac{1}{p}\|u\|_p^p \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Vamos provar inicialmente a boa definição do funcional I. Com efeito, como I_1 corresponde a norma do espaço $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que I_1 está bem definido veja [20, 35]. Vamos provar agora a boa definição de I_2. Seja $u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Vamos considerar primeiro o caso $sp = N$. Fazendo uso da hipótese $(f4)$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |F(u)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_0^u f(t)dt\right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^u |f(t)|dt\right] \mathrm{d}x \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^u e^{(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})}\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}})} \left[\int_0^u \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}})}|u|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e argumentando como na Proposição 1.1, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|\mathrm{d}x &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{\left(\frac{N}{N-s}\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right)}\mathrm{d}x\right]^{(N-s)/N}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{s/N}\\ &\leq C\|u\|_{s,p}^{s/N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{\left(\frac{N}{N-s}\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right)}\mathrm{d}x\right]^{(N-s)/N}.\end{aligned}$$

Usando densidade e outros argumentos clássicos da Análise Funcional, concluímos que $e^{\left(\frac{N}{N-s}\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|dx < \infty$. Portanto, o funcional I_2 está bem definido.

Vamos considerar agora o caso $sp < N$. Pelo uso da hipótese $(f2)$ segue-se que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_0^u f(t)dt\right|\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_0^u |f(t)|dt\right]\mathrm{d}x\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_0^u |t|^{p_s^*-1}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|t|^{p_s^*-1}\left[\int_0^u \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p_s^*-1}|u|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Escolhendo $r \in [p, p_S^*]$, aplicando a desigualdade de Hölder e argumentando a partir da hipótese $(f2)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|\mathrm{d}x &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{(p_s^*-1)r'}\mathrm{d}x\right]^{1/r'}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq C\|u\|_{s,p}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{(p_s^*-1)r'}\mathrm{d}x\right]^{1/r'}.\end{aligned}$$

Por argumentos semelhantes aos do caso $sp = N$, concluímos que $\int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|\mathrm{d}x \leq \infty$. Portanto, o funcional I_2 está bem definido.

Vamos provar agora que I_1 e I_2 são de classe $C^1(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Afirmação 1) I_1 é de classe $C^1(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$I_1'(u)\cdot\phi = \langle(-\Delta_p)^s u, \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi\mathrm{d}x.$$

De fato, isto segue de [35, Lema 2] (a parte da seminorma, $[\cdot]_{s,p}$) e de [15, 37] (a parte da norma $\|\cdot\|_p$).

Afirmação 2) I_2 é de classe $C^1(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$I_2'(u)\cdot\phi = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi\mathrm{d}x.$$

De fato, seja $u \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e para cada $\phi \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ definimos

$$r(\phi) := I_2(u+\phi) - I_2(u) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi \mathrm{d}x.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{\|v\|_{s,p}\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|_{s,p}} = 0,$$

ou equivalentemente, que

$$\lim_{\|v_n\|_{s,p}\to 0} \frac{r(v_n)}{\|v_n\|_{s,p}} = 0,$$

em que $(v_n) \subset W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência convergindo forte para 0 em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$\|v_n\|_{s,p} \to 0.$$

Consideramos a função g definida por

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) &= F(u+tv_n). \end{aligned}$$

Como g é derivável, aplicando a regra da cadeia obtemos

$$g'(t) = f(u+tv_n)v_n.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue-se que

$$F(u+v_n) - F(u) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Assim,

$$F(u+v_n) - F(u) = \int_0^1 f(u+tv_n)v_n \mathrm{d}t$$

e substituindo $\phi = v_n$ em $r(\phi)$, obtemos

$$\begin{aligned} |r(v_n)| &= \left| I_2(u+v_n) - I_2(u) - \int_0^1 f(u)v_n \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (F(u+v_n) - F(u))\mathrm{d}x - \int_0^1 f(u)v_n \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 f(u+tv_n)v_n \mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_0^1 f(u)v_n \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 [f(u+tv_n) - f(u)]v_n \mathrm{d}t\mathrm{d}x \right|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|r(v_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 [f(u+tv_n) - f(u)]v_n \mathrm{d}t\mathrm{d}x \right|. \tag{C.1}$$

Agora vamos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}^N \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto g_n(x,t) &= \big[f\big(u(x) + tv_n(x)\big) - f(u(x))\big]v_n(x). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, segue-se que

$$\begin{aligned} |g_n| &\leq |f(u+tv_n) - f(u)||v_n| \\ &\leq \frac{|f(u+tv_n) - f(u)|^r}{r} + \frac{|v_n|^{r'}}{r'}, \end{aligned}$$

em que r' é o conjugado de $r \in [p,\infty)$ se $sp = N$ (respectivamente, $r \in [p, p_S^*]$ se $sp < N$). Sabendo que $t^r,\ t \geq 0$, é crescente e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|f(u+tv_n) - f(u)|^r \leq (|f(u+tv_n)| + |f(u)|)^r.$$

Como $2^r(a^r + b^r) - (a+b)^r \geq 0$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ positivos, tem-se

$$(a+b)^r \leq 2^r(a^r + b^r).$$

Assim,

$$(|f(u+tv_n)| + |f(u)|)^r \leq 2^r[|f(u+tv_n)|^r + |f(u)|^r]$$

e obtemos

$$|f(u+tv_n) - f(u)|^r \leq 2^r[|f(u+tv_n)|^r + |f(u)|^r].$$

Sendo $sp = N$, pelas hipóteses $(f1)$ e $(f4)$, podemos encontrar constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|f(u+tv_n)| \leq C_1 e^{\left(\alpha(|u|+t|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)} \ \text{ e } \ |f(u)| \leq C_2 e^{\left(\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)}. \tag{C.2}$$

Assim

$$|f(u+tv_n) - f(u)|^r \leq 2^r\left[C_3 e^{\left(r\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)} + C_4 e^{\left(r\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)}\right]$$

e consequentemente

$$|g_n| \leq \frac{C_3 2^r \exp\left(r\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)}{r} + \frac{C_4 2^r \exp\left(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)}{r} + \frac{|v_n|^{r'}}{r'}.$$

Argumentando como anteriormente, temos que

$$e^{\left(r\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)}, \quad e^{\left(r\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Como $v_n \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N \times [0,1]} |g_n(x,t)| \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty.$$

Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n é integrável. Assim podemos aplicar o Teorema de Fubini na equação (C.1) e reescrevê-la como

$$|r(v_n)| = \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} [f(u + tv_n) - f(u)] v_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right|.$$

Segue-se pela aplicação da desigualdade de Hölder, que

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|v_n\|_{L^{r'}(\mathbb{R})} \mathrm{d}t.$$

Uma vez que $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que

$$|r(v_n)| \leq C\|v_n\|_{s,p} \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \mathrm{d}t. \tag{C.3}$$

Por outro lado, como (v_n) converge fortemente em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, existe $w \in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, verificando

$$|v_n(x)| \leq w(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Obtemos assim,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^r \leq 2^r \left[C_3 e^{\left(r\alpha(|u|+|w|)^{\frac{N}{N-s}}\right)} + C_4 e^{\left(r\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)} \right],$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Denotando por

$$l := 2\left[C_3 \exp\left(2\alpha(|u| + |w_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)) + C_4 \exp\left(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right) \right],$$

temos pelo provado acima que $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ou seja, provamos a existência de uma função $l \in L^1(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo

$$|f(u(x)) + tv_n(x) - f((u(x)))|^r \leq l(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Como $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ (veja [20, Teorema 6.9])) e $\|v_n\|_{s,p} \to 0$, para alguma constante $C > 0$, temos que

$$\|u + tv_n - u\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)} \leq \|v_n\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|v_n\|_{s,p} \to 0.$$

Ou seja, $u + tv_n \to u$ em $L^{r'}(0,1)$. Então, a menos de subsequência,

$$u(x) + tv_n(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, pela continuidade de f, segue-se que

$$f(u(x) + tv_n(x)) \to f(u(x)), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Dito de outro modo,

$$|f(u(x)+tv_n(x))-f(u(x))|^{r'}\to 0,\quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Assim sendo, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema C.3 que

$$\|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)}\to 0.$$

Agora, multiplicando a desigualdade (C.3) por $\|v_n\|_{s,p}{}^{-1}$, obtemos

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|_{s,p}}\le C\int_0^1 \|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N M)}dt,$$

daí, tomando o limite quando $\|v_n\|_{s,p}\to 0$, obtemos

$$\lim_{\|v_n\|_{s,p}\to 0}\frac{r(v_n)}{\|v_n\|_{s,p}}=0.$$

Resta mostrar que $I_2'(u): W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo.

De fato, a linearidade de I_2' é herdada da integração. Vamos provar agora a sua limitação. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\langle I_2'(u),\phi\rangle|=\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi \mathrm{d}x\right|\le \|f(u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\|\phi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)}\le C\|f(u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\|\phi\|_{s,p}.$$

Como $e^{\left(r\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right)}\in L^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $\tilde{C}>0$, dependendo de u, tal que

$$|\langle I_3',\phi\rangle|\le \tilde{C}\|\phi\|_{s,p},\quad \text{para todo } \phi\in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, $I_3'(u)$ é limitado. Portanto, I_3' é Frechét diferenciável e sua derivada é dada por

$$\langle I_3'(u),\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N} f(u)\phi \mathrm{d}x.$$

Agora mostraremos que I_3 é contínua. Seja $(u_n)\subset W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\to u$ em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Segue-se que

$$\begin{aligned}\|I_3'(u_n)-I_3'(u)\|_{(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N))^*}&=\sup_{\phi\in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N),\,\|\phi\|_{s,p}=1}|\langle I_3'(u_n)-I_3'(u),\phi\rangle|\\&=\sup_{\phi\in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N),\,\|\phi\|_{s,p}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f(u_n)-f(u))\phi \mathrm{d}x\right|\\&\le C_1\sup_{\phi\in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N),\,\|\phi\|_{s,p}=1}\int_{\mathbb{R}^N}|f(u_n)-f(u)||\phi|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e lembrando que $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, para alguma constante $C>0$, temos

$$\|I_3'(u_n)-I_3'(u)\|_{(W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N))^*}\le C\sup_{\phi\in W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N),\,\|\phi\|_{s,p}=1}\|f(u_n)-f(u)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\|\phi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)}.$$

Como $u_n \to u$ em $W_r^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, por um argumento análogo ao que usamos para provar que $\|f(u - tv_n) - f(u)\|_r \to 0$, concluímos que

$$\|f(u_n) - f(u)\|_r \to 0,$$

e isto conclui a continuidade de I_3'.

Encerramos assim a prova do Lema C.1 no caso $sp = N$. Para o caso $sp < N$, consideramos de modo análogo

$$|r(v_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n \mathrm{d}t \mathrm{d}x \right|$$

e

$$g_n(x,t) = \ \big[f\big(u(x) + tv_n(x)\big) - f(u(x))\big] v_n(x).$$

No entanto, para as estimativas em (C.2) usamos $(f1)-(f2)$ em vez de $(f1)$ e $(f4)$ usadas outrora. O restante da prova segue de modo análogo ao caso $sp = N$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. Adachi e K. Tanaka: *Trudinger type inequalities in* $\mathbb{R}^N$ *and their best exponentes*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 7, 2051-2057.

[2] R. A. Adams: "Sobolev spaces", Academic Press, New York-London, 1975.

[3] C. O. Alves, G. M. Figueiredo e G. Siciliano: *Ground state solutions for fractional scalar field equations under a general critical nonlinearity*, Commun. on Pure and Appl. Anal. **18** (2019), no. 5, 2199-2215.

[4] C. O. Alves, M. A. S. Souto e M. Montenegro: *Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth*, Calc. Var. Partial Differential Equations **43** (2012), no. 3-4, 537-554.

[5] F.J. Almgren e E. Lieb: *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous*, J. Am. Math. Soc. **2** (1989), no. 4, 683-773.

[6] V. Ambrosio: *Mountain pass solutions for the fractional Berestycki-Lions problem*, Adv. Differential Equations **23** (2018), no. 5-6, 455-488.

[7] V. Ambrosio: "Nonlinear Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$", Frontiers in Elliptic and Parabolic Problems, Birkhäuser, Cham, 2021.

[8] M. Badiale e E. Serra: "Semilinear elliptic equations for beginners. Existence results via the variational approach,"Springer, London 2011.

[9] A. Bahrouni: *Trudinger-Moser type inequality and existence of solution for perturbed non-local elliptic operators with exponential nonlinearity*, Commum. Pure Appl. Anal. **16** (2017), no. 1, 243-252.

[10] T. Bartsh e M. Willem: *Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation*, J. Funet. Anal. **117**, (1993), no. 2, 447-460.

[11] P. Belchior, H. Bueno, O.H. Miyagaki e G.A. Pereira: *Remarks about a fractional Choquard equation: Ground state, regularity and polynomial decay*, Nonlinear Analysis **164** (2017), 38-53.

[12] H. Berestycki, T. Gallouët e O. Kavian, *Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **297** (1983), no. 5, 307-310.

[13] H. Berestycki e P.L. Lions: *Nonlinear scalar field equations, I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313-345.

[14] H. Berestycki e P.L. Lions: *Nonlinear scalar field equations, II. Existence of infinitely many solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 347-375.

[15] H. Brezis : "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations", Springer-New York. Math. 2010.

[16] J. Byeon: *Singularly perturbed nonlinear Dirichlet problems with a general nonlinearity*, Transactions of the American Mathematical Society **362** (2010), no. 4, 1981-2001.

[17] X. Chang e Z-Q Wang: *Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity*, Nonlinearity **26**, (2013), no. 2, 479-494.

[18] F. Demengel e G. Demengel: "Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations", Springer, Lodon, 2012.

[19] L.R. de Freitas: *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear equations with exponential critical growth*, Nonlinear Analysis, **95**, (2014), 607–624.

[20] E. Di Nezza, G. Palatucci e E. Valdinoci: *Hitchhikers's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., **136** (2012), no. 5, 521-573.

[21] F. Gazzola, H.C. Grunau and G. Sweers: "Polyharmonic boundary value problems," Positively preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[22] J. Hirata, N. Ikoma e K. Tanaka: *Nonlinear scalar field equations in $\mathbb{R}^N$: Mountain pass and symmetric mountain pass approaaches*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **35** (2010), no. 2, 253-276.

[23] N. Ikoma: *Multiplicity of radial and nonradial solutions to equations with fractional operators* , Communications on Pure & Applied Analysis **32**, (2007), 1245-1260.

[24] L. Jeanjean e S.-S. Lu: *Nonlinear scalar field equations with general nonlinearity* , Nonlinear Analysis **190**, (2020), 111604.

[25] L. Jeanjean e K. Tanaka: *A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$*, Proceedings of the American Mathematical Society **131** (2003), no. 8, 2399-2408.

[26] E. Lenzmann and J. Sok: *A Sharp Rearrangement Principle in Fourier Space and Symmetry Results for PDEs with Arbitrary Order*, International Mathematics Research Notices **2021** (2020), no. 19, 15040-15081.

[27] P.L. Lions: *Symetrié et compacité dans les espaces de Sobolev*, J. Functional Analysis, **49** (1982), no. 3, 315-334.

[28] J. Mawhin e M. Willem: "Critical point theory and Hamiltonian systems", Applied mathematical sciences, 74, Springer-Verlang, New York Inc., 1989.

[29] V. Maz'ya: "Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations,"Second, revised and augmented edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 342. Springer, Heidelberg, 2011.

[30] J. Mederski: *Nonradial solutions of nolinear scalar field equations*, Nonlinearity, **33**, (2020), no. 12, 6349-6380.

[31] P. Mironescu: *The role of the Hardy type inequalities in the theory of function spaces*, Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées, Editura Academiei Române **63**, (2018), no. 4, 447-525.

[32] T. Ozawa: *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 259-269.

[33] R. S. Palais: *The Principle of Symmetric Criticality*, Commun. Math. Phys. **69** (1979), 19-30.

[34] G. Palatucci: *The Dirichlet problem for the p-fractional Laplace equation*, Nonlinear Analysis, **177** (2018), Part B , 699-732.

[35] P. Pucci, M. Xiang e B. Zhang: *Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Calc. Var. Partial Differential Equations **54**, (2015), no. 3, 2785-2806.

[36] P. H. Rabinowitz: "Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,"CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **65**, the American Math. Society, Providence, RI, 1986.

[37] M. Willem: *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser, Boston, 1996.

[38] Yimin Zhang e Yaotian Shen: *Existence of solutions for elliptic equations without superquadraticity condition*, Front. Math. China **7** (2012), no. 3, 587-595.