

## FOREIGN EXCHANGE: UMA COMPARAÇÃO ENTRE AS APLICAÇÕES DE SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS E DO MODELO ARIMA-GARCH PARA PREVISÃO DA TAXA DE CÂMBIO EUR/USD COM DADOS DE ALTA FREQUÊNCIA

Rafael Junio Abreu – Graduado em Controladoria e Finanças UFMG

Rafael Moraes de Souza – Professor do Departamento de Ciências Contábeis e do Programa de Pós-Graduação em Controladoria e Contabilidade UFMG

### Resumo:

O mercado de *Foreign Exchange* (FOREX) abrange transações *spot* e *forward*, *swaps* cambiais, opções cambiais e outros derivativos com exposição a mais de uma moeda. De acordo com o *Bank For International Settlements* em 2013 o mercado de FOREX movimentou em média 5,3 trilhões de dólares por dia. Esse é o mercado financeiro mais líquido do mundo e dele participam bancos, fundos de pensão, *hedge funds*, grandes corporações e investidores de varejo. Devido à sua importância, vários trabalhos têm sido elaborados com o objetivo de melhor descrever o comportamento das taxas cambiais e de modelá-las, bem como prevê-las ou prever suas volatilidades. O objetivo desse trabalho foi modelar a série alta frequência (um minuto) das taxas de câmbio do par EUR/USD através do método estimação *Singular Spectrum Analysis* (não paramétrico) e do ARIMA-GARCH (paramétrico) e avaliar qual gera previsões mais satisfatórias para um horizonte de tempo de cinco minutos. Para tanto foram utilizadas três amostras do fechamento da cotação Ask do câmbio, sendo uma tendência de alta, outra tendência de baixa e outra sem tendência dominante. A fim de se avaliar os resultados, foram utilizadas as medidas de qualidade de previsão MAPE, RMSE e TIC. A análise dos resultados mostrou que para os três movimentos do mercado as previsões feitas através do SSA foram mais aproximadas das observações reais.

**Palavras-Chave:** Taxas de câmbio; Dólar; Euro; previsão de séries temporais.

### 1. Instruções para elaboração de artigos do CASI

Nas últimas duas décadas pôde-se observar que, com o intenso avanço da globalização, o fluxo de comércio internacional atingiu patamares antes inimagináveis, em que transações envolvendo diferentes pares de moedas se tornaram fundamentais para os diversos agentes da economia. Segundo a Organização Mundial do Comércio (2014), somente em 2014 as exportações de mercadorias entre seus países membros totalizaram o montante de 18 trilhões de dólares. Para a instituição o crescimento do comércio é condição necessária ao desenvolvimento da economia global e ao combate à pobreza. Muitos fatores têm influenciado esse crescimento, entre eles, os tratados de cooperação internacional e, possibilitada pelo progresso da tecnologia de informação, novas abordagens estatísticas para mensurar as transações em termos de valor adicionado.

Nesse contexto, para Atkočiūnas *et al.* (2010), taxas de câmbio têm papel central porque permitem que preços de bens e serviços produzidos em diferentes países sejam facilmente comparados, e porque governos, companhias e indivíduos que participam do comércio em escala global estão expostos ao risco das variações cambiais. Portanto, prever as taxas de câmbio é um objeto de pesquisa relevante.

O mercado de *Foreign Exchange* (FOREX) abrange transações *spot* e *forward*, *swaps* cambiais, opções cambiais e outros derivativos com exposição a mais de uma moeda. De acordo com o *Bank For International Settlements* (2013) em 2013 o mercado de FOREX movimentou em média 5,3 trilhões de dólares por dia, mais de um trilhão que em 2010 e dois trilhões do que em 2007, sendo, portanto, o nicho do mercado financeiro mais líquido do mundo. O dólar americano foi a moeda predominante tendo sido utilizada em 87% das transações daquele ano e o euro, por sua vez, foi a segunda moeda mais negociada com um *share* de 33%.

Diferente do mercado de ações, os negócios no FOREX, em sua maior parte, acontecem no mercado *over-the-counter* (OTC). Bancos, fundos de pensão, *hedge funds* e grandes corporações são os principais participantes no mercado OTC (HULL, 2015). O que difere esse tipo mercado da bolsa de valores, por exemplo, é seu sistema descentralizado que não envolve regulamentações de governos específicos. Essas são características fundamentais que garantem a eficiência necessária do fluxo de transações que se dá diretamente entre as partes. Bancos agem com frequência como *market makers* e estão sempre preparados para cotar o preço de compra ou venda e assumir um dos lados da transação, (HULL, 2015).

Apesar do comércio com diferentes pares de moeda não ser um advento recente, foi o *boom* tecnológico que lhe proporcionou tal vultuosidade. A possibilidade de obtenção de dados em tempo real aliada ao aumento da capacidade de processamento dos mesmos, fez com que, ao longo dos últimos anos, se tornasse cada vez mais comum o uso de modelos estatísticos e matemáticos sofisticados quando do estudo de fenômenos do mercado financeiro. Têm-se desenvolvido e aplicado tais modelos, por exemplo, para testar se o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) ou a *Arbitrage Pricing Theory* (APT) são paradigmas que melhor determinam o retorno sobre ativos de risco; para explicar as variáveis determinantes na avaliação de títulos de créditos; para obter o *hedge* ótimo e minimizar riscos; para testar se a divulgação da mudança na política de distribuição de dividendos afeta ou não o preço das ações de uma empresa; e para medir e prever a volatilidade e preços de ações bem como a taxa de câmbio entre pares de moedas (BROOKS, 2008).

A não-estacionariedade da média ou variância, e as quebras estruturais das séries financeiras apresentam-se como desafios à modelagem e previsão dessas séries, visto que tais características não são intrínsecas aos dados, mas provêm de fatores tais quais choques exógenos, mudanças políticas e tecnológicas, mudanças das preferências dos consumidores e da assimetria informacional. Modelos clássicos falham ao lidar com esses problemas e, por isso, técnicas novas têm sido desenvolvidas para contorná-los. Entre elas, podem-se citar aplicações do modelo de estado de espaços e o filtro de Kalman, que consideram a variabilidade de coeficientes (como o beta do CAPM) ao longo do tempo; modelos semi e não paramétricos; modelos com cointegração e correção de interceptos, dentre outros (HASSANI e THOMAKOS, 2010).

Modelos estruturais ou autorregressivos de séries temporais assumem a normalidade, linearidade e estacionariedade dos dados ou resíduos. Isso limita seu uso prático visto que as séries financeiras frequentemente não se restringem a esses pressupostos. Além do mais, outro elemento que pode limitar a capacidade preditiva dos modelos é a presença de ruído. Para Hassani e Thomakos (2010), em geral existem duas abordagens principais no que diz respeito à previsão de séries temporais com ruído: na primeira, ignora-se a presença do mesmo e

ajusta-se um modelo que melhor extraia as dinâmicas determinísticas subjacentes; por sua vez, na segunda abordagem, que é mais efetiva, tenta-se decompor a série em subcomponentes, identificar o componente de ruído e extraí-lo, para só então prever novas informações da série filtrada.

Recentemente, tem-se admitido que métodos baseados na Decomposição em Valores Singulares (SVD) são capazes de produzir redução de ruídos em séries não estacionárias (HASSANI e THOMAKOS, 2010).

Devido à sua importância, vários trabalhos têm sido elaborados com o objetivo de melhor descrever o comportamento das taxas cambiais e de modelá-las, bem como prevê-las ou prever suas volatilidades. Yao e Tan (2000), por exemplo, utilizaram indicadores de análise técnica para alimentar redes neurais e prever a taxa de câmbio entre o dólar americano e o iene japonês, o marco alemão, a libra esterlina, o franco suíço, e o dólar australiano. Abraham (2005), por sua vez, comparou métodos de *soft computing* (inteligência artificial, computação evolucionária, lógica probabilística e lógica difusa) e *hard computing* (análise numérica e lógica binária) para previsão das taxas de retorno médio mensais no FOREX. Lai, Yu e Wang (2005) apresentaram uma rede neural com sistema de suporte à decisão (DSS, na sigla em inglês) para prever mudanças de tendência nas taxas de câmbio. Alamili (2011) comparou as previsões das taxas de câmbio obtidas por máquinas de vetores de suporte (SVM, na sigla em inglês) e por redes neurais. Ravi, Lal e Kiran (2012), apresentaram a aplicação dos seguintes métodos de inteligência computacional para previsão de taxas de *Foreign Exchange*: redes neurais com *wavelets*, splines de regressão adaptativa multivariada, *support vector machine*, sistema dinâmico evolutivo e programação genética. Dacorogna, *et. al.* (2001) demonstraram como o uso de dados de alta frequência do FOREX melhoram a eficiência das estimativas de valor em risco. Chaudhuri e Ghosh (2016) utilizaram redes neurais alimentadas por variáveis macroeconômicas para prever o preço da rúpia indiana frente ao dólar americano.

Nesse trabalho, propõe-se a seguinte questão de pesquisa: dentre a *Singular Spectrum Analysis* e o ARIMA-GARCH, qual método de modelagem da taxa de câmbio EUR/USD apresenta melhores resultados quando da utilização de dados de alta frequência para previsão de informações futuras?

Assim, o presente estudo tem como objetivo geral avaliar qual a modelagem da taxa de câmbio do par EUR/USD gera previsões mais satisfatórias quando da utilização de dados de alta frequência. Para isso, são adotados os seguintes passos: 1) modelagem da série de um minuto das taxas de câmbio do par EUR/USD através do método estimação *Singular Spectrum Analysis* (não paramétrico) e do ARIMA-GARCH (paramétrico); 2) previsões por meio dos dois modelos<sup>1</sup> e; 3) avaliação de qual modelo é o mais adequado, por meio do *Root Mean Square Error* (RMSE), do *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) e do *Theil's Inequality Coefficient* (TIC).

De acordo com Makridakis e Hibon (1997), depois de refletir sobre o problema das correlações espúrias, o estatístico britânico George Udny Yule introduziu na década de 1920 os modelos autoregressivos (AR). Em seguida, o economista Eugen Slutsky propôs o modelo

---

<sup>1</sup> O SSA não é um modelo, propriamente dito, mas sim um método de estimação espectral. Para fins didáticos, no entanto, usar-se-á nesse trabalho os termos “modelo SSA” e “modelagem SSA” para referir-se às estimações espectrais realizadas.

de médias móveis (MA, na sigla em inglês) ao sugerir a possibilidade da presença de erros de medição em dados econômicos e que componentes cíclicos de tais dados podem ser causados por eventos aleatórios. Por sua vez, em 1938, Herman Wold demonstrou que séries temporais estacionárias podem ser modeladas pela combinação de elementos autoregressivos e de médias móveis, dando origem, assim, ao modelo ARMA.

Para Makridakis e Hibon (1997), a utilização do modelo de Wold se tornou possível em meados da década 1960 quando computadores (e por consequência a capacidade de realizar os cálculos requeridos e otimizar parâmetros) se popularizaram. Ainda segundo os autores, foi nesse contexto que em 1970 (edição original, posteriormente publicada em 1976) Box e Jenkins introduziram a metodologia para modelos ARIMA (em que “I” representa o parâmetro de integração necessário para transformar séries não estacionárias em estacionárias) que foi amplamente utilizada no meio acadêmico desde então.

O método proposto por Box e Jenkins começou a ser questionado quando outras técnicas menos sofisticadas se mostraram mais precisas. Groff (1973), por exemplo, realizou previsões de sessenta e três séries de vendas utilizando, para tanto, a metodologia de Box e Jenkins e alisamento exponencial; concluiu que os erros de previsão dos melhores modelos estimados pelo método Box-Jenkins foram superiores àqueles gerados pelo alisamento exponencial. Makridakis e Hibon (1979) aplicaram vários métodos de previsão a cento e onze séries temporais e concluíram que, para todas, métodos mais simples obtiveram melhores resultados que os modelos ARIMA.

No ano de 1982 foi publicado pela revista científica *Econometrica* o artigo *Autorregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Em seu trabalho, Robert Engle mostra não ser plausível o pressuposto de variância constante dos modelos ARIMA e introduz o modelo ARCH. Tal modelo foi o predecessor de inúmeros outros que tratam da variância condicional, sendo o GARCH um dos mais amplamente utilizados.

Como o próprio nome sugere o GARCH, proposto por Bollerslev (1986), é uma generalização do modelo de Heterocedasticidade Condicional Autoregressiva introduzido por Engle. Os modelos GARCH clássicos expressam a variância condicional como uma função linear do quadrado dos valores passados da série (FRANCO E ZAKOIAN, 2010) o que é útil na modelagem de diferentes fenômenos econômicos e financeiros (BOLLERSLEV, 1986). A generalização do modelo original abrange os principais fatores que caracterizam as séries financeiras, como o comportamento aleatório dos retornos, o agrupamento de volatilidade e assimetrias e, portanto, obteve sucesso no que diz respeito à sua aplicabilidade nesse ramo da ciência. Segundo Asai, McAleer e Yu (2006), uma ampla gama de modelos multivariados GARCH têm sido desenvolvidos, analisados e aplicados quando da caracterização da volatilidade inerente de séries temporais do campo das finanças. Para Bauwens *et al.* (2006), desde que publicado por Engles, os modelos ARIMA foram adaptados a fim de incorporar a variância condicional e modelos da família ARCH têm sido comumente utilizados para descrever e prever mudanças na volatilidade de séries financeiras.

*Singular Spectrum Analysis* (SSA) é uma técnica não paramétrica que incorpora elementos clássicos da análise de séries temporais, geometria multivariada, sistemas dinâmicos e processamento de sinais (HASSANI, 2007), e que pode ser aplicada em processos estatísticos arbitrários, lineares ou não lineares, estacionários ou não, Gaussianos ou não-Gaussianos,

(HASSANI, 2010). O SSA possui duas propriedades que justificam seu uso na análise de séries temporais financeiras: a primeira, é que não faz pressuposições acerca dos dados; e a segunda, é que diferentemente de outros métodos, pode ser aplicado em amostras pequenas, (HASSANI, 2007).

Apesar de se mostrar uma técnica bem sucedida em outros ramos da ciência, como meteorologia, oceanografia, biomedicina, tratamento digital de imagens e processamento de sinais digitais, suas aplicações em finanças ainda são recentes.

A modelagem da taxa de câmbio é um problema complexo que envolve conceitos e propriedades estatísticas como a não estacionariedade, ausência de autocorrelações (*random walk*), volatilidades instáveis, distribuições com curtose e assimetria elevada, sazonalidade e ruído. No entanto, apesar da complexidade, a análise de tal série é de suma importância para diversos agentes que atuam direta ou indiretamente na economia e no mercado financeiro.

Espera-se com esse trabalho, portanto, aplicar o SSA no âmbito do mercado de FOREX e verificar quais as vantagens ou desvantagens desse método se comparado ao modelo clássico ARIMA-GARCH.

Com intuito de alcançar os objetivos aqui traçados, além dessa introdução, este está organizado da seguinte forma: a seção 2 traz a metodologia e a base de dados onde, inicialmente, há a apresentação dos aspectos matemáticos de cada modelo e, em seguida, é realizada a descrição da coleta e análise dos dados; a seção 3, por sua vez, discute os resultados obtidos; a seção 4, por fim, apresenta as considerações finais.

## 2. Metodologia e Base de Dados

### 2.1. Subseções Modelo ARIMA-GARCH

Conforme Makridakis e Hibon (1997), uma série ARMA estacionária  $x_t$  pode ser modelada como combinação de seus valores passados bem como de erros passados:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1)$$

$$x_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Em que  $p$  é o número de termos AR e  $q$  o número de termos MA.

O resumo da definição matemática do modelo GARCH apresentada por Bollerslev (1996) é apresentado a seguir. Seja  $\varepsilon_t$  um processo estocástico discreto e  $\psi_t$  o conjunto de todas as informações através do tempo  $t$ . O processo GARCH(r,s) é, então, dado por:

$$\varepsilon_t | \psi_t \sim N(0, h_t) \quad (3)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^s a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^r \beta_i h_{t-i} = a_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (4)$$

Em que  $p \geq 0$ ;  $q > 0$ ;  $a_0 > 0$ ;  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ ; e  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

A especificação de um modelo ARMA-GARCH pode, então, ser representada por:

$$\sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^s a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^r \beta_i h_{t-i} + \varepsilon_t + a_0 \quad (5)$$

## 2.2. Singular Spectrum Analysis

O surgimento do SSA usualmente é associado à publicação dos artigos de Broomhead e King (1986) e Broomhead et al. (1987). A partir daí, muitos trabalhos que tratam dos aspectos metodológicos e das aplicações do SSA foram difundidos: Vautard et al. (1992), Allen e Smith (1996), Danilov e Zhigljavsky (1997), por exemplo (GOLYANDINA, NEKRUTKIN E ZHIGLJAVSKY, 2001, p.14).

O método mais básico do SSA consiste na transformação de uma série temporal de valores reais não nulos, em uma soma de séries, de modo que cada componente dessa soma possa ser reconhecido como tendência, sazonalidade ou ruído (HASSANI, 2007). Para tanto, o algoritmo dessa técnica resume-se em duas etapas: decomposição e reconstrução. A primeira etapa é feita pela transformação dos dados em uma matriz trajetória e sua decomposição em valores singulares (SVD). A segunda etapa, por sua vez, trata do agrupamento de elementos da matriz trajetória decomposta para formação de subgrupos a partir dos quais a série de tempo será novamente obtida, (HASSANI, 2010).

### 2.2.1. Decomposição

Elsner e Tsonis (1996) e Ruelle (1980) demonstraram a possibilidade de se aplicar uma análise estatística multivariada a uma única amostra de série temporal. Segundo os autores, os registros de um sistema dinâmico é o resultado da interação de todas as variáveis e, portanto, uma única amostra deve conter informações sobre a dinâmica das principais variáveis envolvidas na evolução do sistema. De acordo com Elsner e Tsonis (1996), assume-se que tais variáveis satisfazem um conjunto de  $p$  equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \\ &\vdots \\ \dot{x}_p &= f_p(x_1, x_2, \dots, x_p), \end{aligned} \quad (6)$$

Em que  $\dot{x}_l$  indica a primeira derivada da variável  $x_l$  em relação ao tempo  $\left(\frac{dx}{dt}\right)$  e assim por diante. Através de sucessivas diferenciações, esse sistema pode ser transformado em uma única equação diferencial de ordem  $p$  que representa todo o sistema sem nenhuma perda de informação:

$$x_1^{(p)} = f(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{p-1}), \quad (7)$$

De maneira análoga, é possível fazer a transformação inversa de uma série de tempo discreta e seus sucessivos lags. Seja uma série de tempo  $x_t$ , em que  $t = 1, 2, \dots, n$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_t \quad (8)$$

E seja  $m$  o número de lags, tal que  $2 < m < t$ . Então se pode obter da série original  $n - m + 1$  subconjuntos de tamanho  $m$ , e com elementos subsequentes.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_m) \\
 v_2 &= (x_2, x_3, \dots, x_{m+1}) \\
 &\vdots \\
 v_{n-m+1} &= (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Que então são escritos na forma vetorial para obtenção da matriz trajetória X:

$$X = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ \vdots \\ x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Portanto, o processo de decomposição se dá pelo mapeamento da série unidimensional  $x_T = (x_1, \dots, x_t)$  em uma matriz  $X_{(t-m+1) \times l}$ .

A matriz trajetória, então, será composta por  $X_1, \dots, X_{n-m+1}$  com  $X_i = (y_i, \dots, y_{i+m-1}) \in R^L$ ;  $m$  representa o tamanho da janela de decomposição (*lags*) e é o único parâmetro a ser definido. A matriz trajetória resultante desse passo é uma matriz de Hankel. Conforme Pan, Rami e Wang (2002), a matriz de Hankel é dada por  $a_{i,j} \in X \rightarrow a_{i,j} = a_{i-1,j+1}$  e pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & \ddots & & h_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

A matriz trajetória X simétrica é então transformada em uma soma de matrizes elementares.

Seja  $S = XX^T$ , e  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$  os autovalores de S ordenados em ordem decrescentes de magnitude, e  $U_1, \dots, U_m$  o sistema ortogonal de seus autovetores correspondentes aos autovalores. Seja  $d = \text{posto}(X) = \max(i \mid \lambda_i > 0)$ . Então, se  $V_i = \frac{X^T U_i}{\sqrt{\lambda_i}}$  ( $i = 1, \dots, d$ ), a SVD da matriz trajetória pode ser escrita como  $X = X_1 + \dots + X_d$  em que  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ , denominado autotripla.

### 2.2.2. Reconstrução

Conforme Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001), uma vez que se obteve a matriz trajetória  $X = X_1, \dots, X_{n-m+1}$  pode-se agrupar os componentes da mesma em subconjuntos e transformar cada matriz resultante desse agrupamento em uma nova série de tempo de tamanho  $m$ . A demonstração matemática desse passo está além do escopo desse trabalho e pode ser encontrada nos trabalhos dos autores citados.

Hassani (2007) propôs a observação de informações suplementares como método para selecionar os componentes da matriz trajetória que serão agrupados e transformados em séries distintas de tendência, sazonalidade e ruído. Para o autor, tais informações são como uma ponte entre a decomposição e a reconstrução; a ideia é dar praticidade ao processo de identificação das autotriplas que constituem cada componente. São consideradas “informações suplementares”, por exemplo, os autovalores e autovetores da matriz S, e a

matriz de correlação ponderada. Hassani (2007) mostra que quebras ou saltos entre os autovalores indicam diferentes componentes da série temporal e que, como regra, o ruído produz uma sequência de autovalores que decresce lentamente. Essas características podem ser observadas no gráfico de autovalores da matriz trajetória S obtida da série original. Além do gráfico gerado pelos autovalores, pode-se analisar também o gráfico gerado pelos elementos de um determinado autovetor e verificar se o autovetor em questão é componente da autotripla que gera de tendência, sazonalidade ou ruído. Para averiguar a separabilidade das autotriplas, ou seja, confirmar se os agrupamentos formados não apresentem correlação entre si, utiliza-se a matriz de correlação ponderada.

### 2.2.3. Características, aplicações e variações do SSA

O *Singular Spectrum Analysis* tem como característica o fato de ser uma técnica aplicável a séries de tempo com poucas observações. Isso possibilitou seu uso em uma gama de estudos em que os dados são pouco frequentes ou em que a coleta em alta frequência dos mesmos é inviável. Hassani e Zhigljavsky (2009), por exemplo, demonstraram que a utilização do SSA foi satisfatória para a previsão de séries macroeconômicas tanto pequenas como grandes.

Apesar de o SSA ter se tornado uma ferramenta amplamente utilizada na análise e previsão de séries climáticas (VAUTARD e GHIL, 1989); meteorológicas (GHIL e VAUTARD, 1991; ZHU, JIANG e ZHANG, 2010; KE-HONG, CHENG E HAN-JIANG, 2007; LIU, 2004); hidrológicas (DE MENEZES, *et. al.*, 2013), oceanográficas (YUAN, XIE e YU, 2008), biomédicas (SANEI e HASSANI, 2015; TOMÉ, *et al.*, 2010); geofísicas (YIOU *et al.*, 1996), de tratamento digital de imagens (RODRIGUEZ-ARAGÓN e ZHIGLJAVSKY, 2010), de processamento de sinais digitais (VAUTARD, YIOU e GHIL, 1992) e também em outros campos do conhecimento, tais como ciências sociais e física, (HASSANI, 2010); sua aplicação em séries econômicas e financeiras ainda é recente. Hassani e Thomakos (2010) revisaram o desenvolvimento do uso do SSA na análise desse tipo de dados.

Outra característica importante e que deve ser ressaltada é que, embora alguns conceitos probabilísticos e estatísticos sejam empregados nos métodos que se baseiam no SSA, os mesmos não assumem pressupostos de estacionariedade da série analisada e da normalidade dos resíduos (HASSANI e THOMAKOS, 2010).

Segundo Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001) o SSA pode ser modificado de diversas maneiras, resultando em variações tais como o *Single and Double Centering SSA*, *Toeplitz SSA*, e *Sequential SSA*. Uma modificação comumente encontrada nos estudos e publicações acerca do SSA é o *Multi-channel Singular Spectrum Analysis* (MSSA). Essa última modificação se aplica aos casos em que a série de tempo se constitui de várias variáveis correlacionadas entre si, (VAUTARD, YIOU e GHIL, 1992)

### 2.3. Divergência entre os modelos

Diferentemente do SSA, a aplicação do modelo ARIMA-GARCH depende do tamanho da amostra e de pressupostos como a distribuição da mesma. Segundo Ng e Lam (2006), diferentes tamanhos de uma série temporal guiam a estimação do modelo para diferentes pontos de soluções ótimas locais. Em seu trabalho, os autores utilizaram amostras de tamanho que variavam de 200 a 3000 observações do índice NASDAQ de retornos diários e

concluíram que a amostra com 1000 observações apresentou o melhor resultado, apesar de o dia do início das observações interferirem no mesmo.

#### 2.4. Medidas de Qualidade

Para se testar a capacidade preditiva dos modelos foram realizadas as seguintes medições:

- *Mean Absolute Percentage Error:*

$$MAPE = \frac{100}{T} \sum_{i=1}^T \left| \frac{x_i - x'_i}{x_i} \right| \quad (12)$$

- *Root Mean Square Error:*

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |x'_i - x_i|} \quad (13)$$

- *Theil's Inequality Coefficient:*

$$TIC = \frac{RMSE}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}} \quad (14)$$

Em que  $x_i$  é a  $i$ -ésima observação,  $x'_i$  é o  $i$ -ésimo previsão e  $n$  é o horizonte de previsão. Para todas as medidas, vale a seguinte regra: quanto mais próximo de zero, melhor o ajuste dos modelos.

#### 2.5. Estudos anteriores

Vautard et al. (1992) avaliaram as propriedades teóricas e algorítmicas do SSA e de sua capacidade de extrair informações fidedignas de séries temporais geofísicas, com poucas observações e muito ruído, e sem o conhecimento prévio das propriedades físicas e biológicas do sistema. Allen e Smith (1996) desenvolveram o Monte Carlo SSA a fim de identificar oscilações intermitentes ou modulares, e distinguir tais oscilações de formas simples de ruído em séries climáticas e geofísicas. Danilov e Zhigljavsky (1997) descreveram o método de previsão de séries temporais baseado no SSA e na Análise do Componente Principal aplicado à matriz derivada dos dados originais.

Engle (2001) e Engle, Focardi e Fabozzi (2007) analisaram o desenvolvimento dos modelos ARCH e GARCH para fins de modelagem de séries financeiras, e aplicaram esses modelos para a mensuração do valor em risco de uma carteira de ações. Por sua vez, Zhuang e Chan (2004) utilizam uma variante do GARCH para prever a volatilidade do retorno de ações do *Hang Seng Index* (HSI), o indicador de desempenho da bolsa de Hong Kong. Ng e Lam (2006) avaliaram como o tamanho da amostra afeta o modelo GARCH. Mikosch e Starica (2003) aplicaram o modelo no estudo de mudanças estruturais na série do log dos retornos da S&P500.

## 2.6. Base de Dados

Para consecução dos objetivos propostos, realizou-se pesquisa descritiva dividida em duas partes: a primeira consiste na modelagem da taxa de câmbio EUR/USD pelo SSA e pelo modelo ARIMA(p,d,q)-GARCH(r,s). A segunda parte consiste na previsão de dados futuros por meio dos modelos ótimos obtidos na etapa anterior. Os resultados da segunda etapa são utilizados para medir a precisão das estimativas e para se averiguar qual técnica gera previsões mais satisfatórias.

Foram utilizadas três amostras do preço de fechamento *ask* do par EUR/USD com frequência de 1 minuto. Os dados foram coletados por meio do software Marketscope 2.0® da corretora FXCM. A escolha se deu pelo fato de que a corretora fornece cotações por meio do *Electronic Communication Network* (ECN), ou seja, diretamente dos provedores de liquidez (maiores participantes do mercado), e não interfere nas mesmas.

Diferente das bolsas de valores, o mercado de FOREX, além de apresentar extrema liquidez, pode ser operado 24h por dia a partir das 17h (UTC) dos domingos (quando abre a seção asiática, com liquidez proveniente do Japão – sendo Tóquio o polo mais importante - China, Austrália, Nova Zelândia, Rússia e outros) até às 17h (UTC) das sextas-feiras (quando fecha a seção americana – sendo Nova Iorque o polo mais importante). Assim sendo, não foi necessário se preocupar com *gaps* (inclusive nos finais de semana).

Os dados foram selecionados de modo que se pudessem obter os três movimentos típicos dos mercados financeiros: a tendência de alta (*uptrend* ou *bull trend*); a tendência de baixa (*downtrend* ou *bear trend*); e a ausência de tendência (*range*). A análise das previsões para ambos os modelos foi feita para cada uma das amostras.

Segundo Murphy (1999), “tendência” é a direção em que o mercado se move, no entanto, esse movimento não se dá em linha reta, mas em uma sequência de “zigzags”. Tais “zigzags” formam uma série sucessiva de picos e fundos. Assim, para Murphy (1999), pode-se definir a tendência de alta como uma série sucessiva de picos e fundos cada vez mais altos; a tendência de baixa, por sua vez, como uma série sucessiva de picos e fundos cada vez mais baixos; e a ausência de tendência por uma série de picos e fundos horizontais.

O gráfico 1 mostra a evolução do fechamento da taxa de câmbio minuto a minuto da primeira amostra. O intervalo de tempo estende-se entres os dias 23/08/2016 das 08h e 02min (UTC) e 24/08/2016 às 03h e 02min (UTC). Os gráficos 2 e 3 apresentam, respectivamente, as amostras 2 e 3 utilizadas para estimação dos modelos em tendência de alta (das 15h e 21min UTC do dia 17/08/2016 às 16h e 05min UTC do dia 18/08/2016) e em *range* (das 09h e 41min UTC do dia 16/08/2016 às 13h e 54min UTC do dia 17/08/2016).

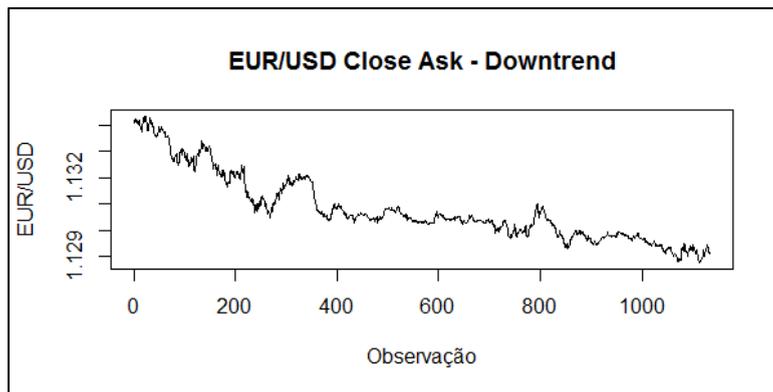


Gráfico 1. Amostra 1. Evolução do fechamento da taxa de câmbio do par EUR/USD em tendência de baixa.

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

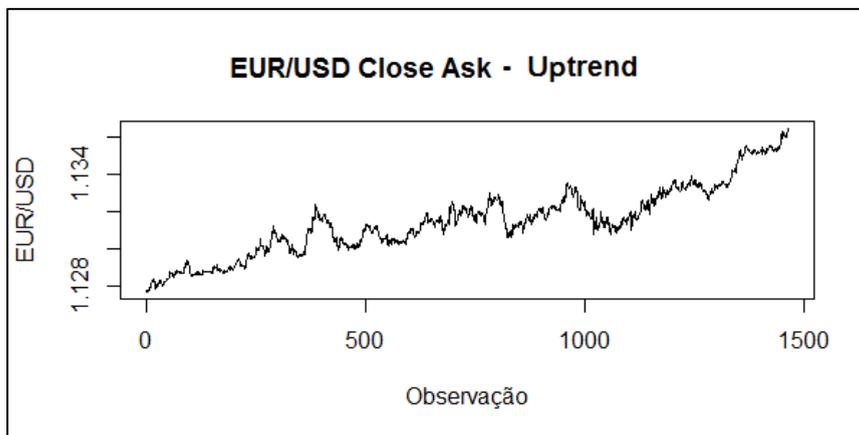


Gráfico 2. Amostra 2. Evolução do fechamento da taxa de câmbio do par EUR/USD em tendência de alta.

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

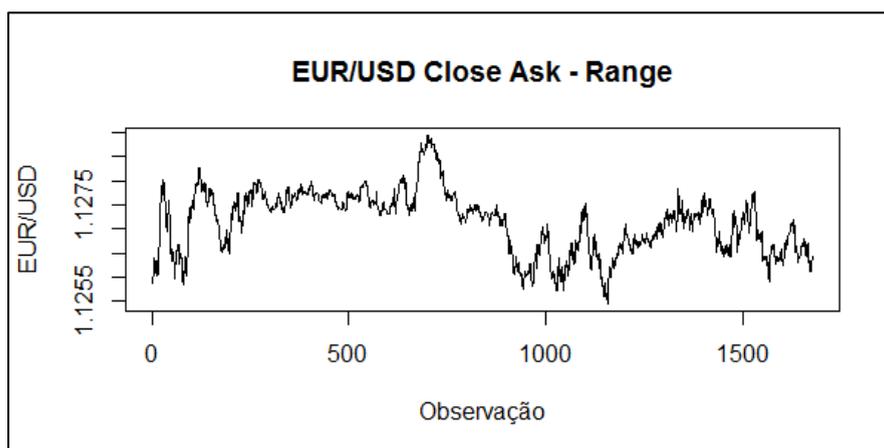


Gráfico 3. Amostra 3. Evolução do fechamento da taxa de câmbio do par EUR/USD sem tendência dominante.

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

De acordo com Égert e Kočenda (2013), assim como outros instrumentos do mercado financeiro, taxas de câmbio são muito sensíveis aos acontecimentos na economia real que são

canalizados via notícias. O impacto das notícias micro e macroeconômicas no FOREX foi objeto de estudo, por exemplo, de Omrane, Bauwens e Giot (2003) que usaram *frameworks* da família ARCH para modelar a volatilidade da taxa de câmbio EUR/USD antes da divulgação de notícias agendadas.

Deve-se ressaltar, porém, que diferente do mercado acionário, em sua maior parte e principalmente no que diz respeito ao par EUR/USD, a frequência e os impactos das notícias no FOREX se dá em escala global e não local. Tendo em vista esse aspecto do mercado das taxas de câmbio, foram retirados da amostra 34 *outliers* decorridos da divulgação de notícias e/ou relatórios econômicos (*GDP, Personal Spending, Core PCE Price Index, ISM Manufacturing, ADP Employment Survey, FOMC – Fed Funds Rate, Sovereign Debt to be Rated, PMI*, dentre outros).

Como no FOREX a taxa de câmbio também pode ser entendida como preço, uma vez que ao se transacionar um par de moedas o agente vende uma moeda ao mesmo tempo em que compra outra, o critério para definir *outlier* foi:

$$ABS(r_t * 100.000) > 50 \rightarrow x_t = outlier \quad (15)$$

Em que  $r_t$  é dado por:

$$r_t = \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) \quad (16)$$

E  $x_t$  é a observação  $x$  no instante de tempo  $t$ . O módulo do retorno foi multiplicado por 100.000 visto que a unidade padrão no FOREX (denominada *pip*) é 0,0001 e as diferenças de cotação entre momentos subsequentes da amostra em geral são da ordem de 0,00001. O gráfico 4 mostra, como exemplo, o log retorno da amostra 1 (tendência de baixa) com e sem *outliers*.

### 3. Resultados

Para cada conjunto amostral foram estimados o modelo SSA e o modelo ARIMA(p,d,q)-GARCH(r,s). Para tanto, utilizou-se o software R, versão 3.3.0 para Windows®, bem como o ambiente de desenvolvimento integrado RStudio®, versão 0.99.484.

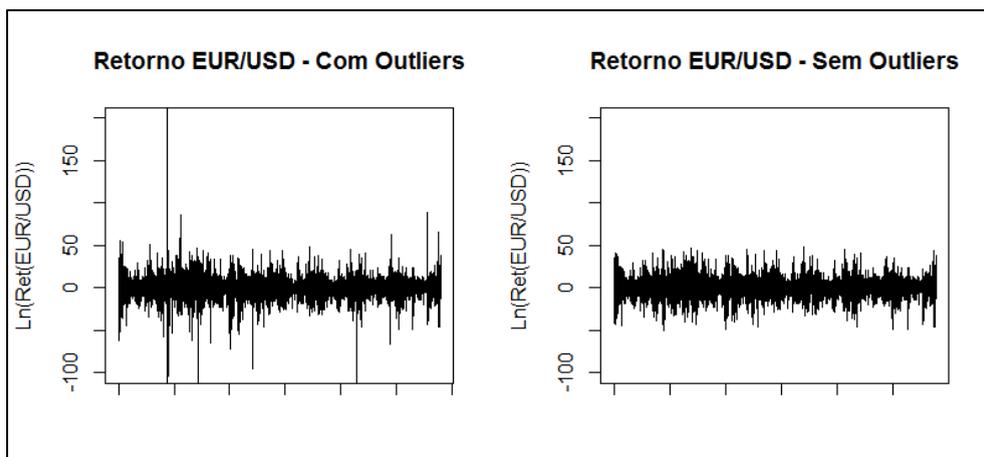


Gráfico 4. Log-retorno da Amostra 1 com e sem outliers.

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

Para a modelagem da série por meio do SSA, utilizou-se o pacote “Rssa” desenvolvido por Anton Korobeynikov, Alex Shlemov, Konstantin Usevich e Nina Golyandina e disponibilizado no repositório oficial do software estatístico. Para a modelagem da série por meio do ARIMA-GARCH, utilizou-se o pacote “rugarch” desenvolvido por Alexios Ghalanos, também disponibilizado no repositório oficial.

### 3.1. Modelagem pelo SSA

Segundo Elsner e Tsonis (1996) a janela de decomposição (mencionada na seção 2.2.) é o único parâmetro a ser definido e deve ser um quarto do número de observações. No entanto, isso não é consenso na literatura. Para Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001), por exemplo, a janela de decomposição depende de propriedades intrínsecas de cada série a ser modelada. Para Hassani (2007), é possível que  $2 \leq L \leq T$  onde  $L$  é a janela de decomposição e  $T$  o número de observações, mas o autor sugere que  $\max\{L\} = \frac{T}{2}$ .

O parâmetro em questão exerce grande influência na “separabilidade” da série. Conforme Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001), o principal propósito do SSA é a decomposição da série original em uma soma de séries, de modo que cada componente nessa soma possa ser identificado como tendência, componente periódico ou ruído. Para os autores a decomposição só será bem sucedida se os componentes aditivos forem separáveis uns dos outros.

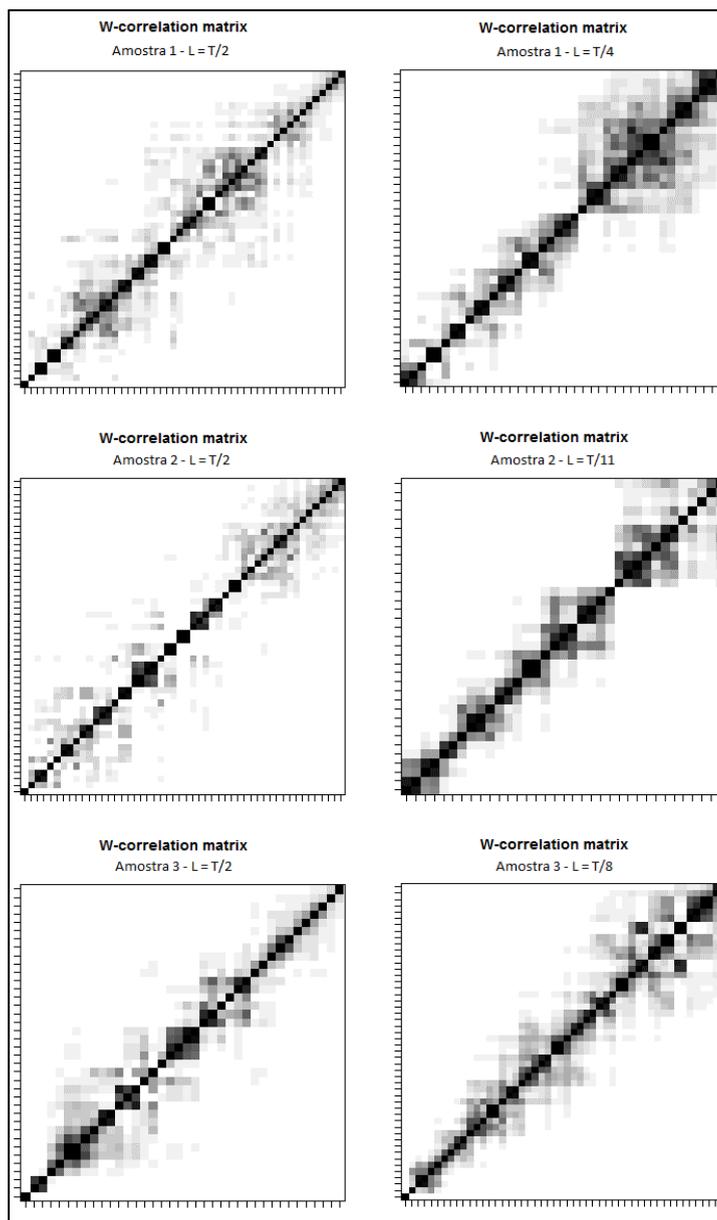


Gráfico 5. Matriz de correlação ponderada para diferentes janelas de decomposição das amostras.

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

A fim de se obter a melhor janela, nesse trabalho foram realizadas diversas decomposições pelo método de tentativa e erro, partindo-se do valor máximo sugerido por Hassani (2007),  $L = \frac{T}{2}$ . A “separabilidade” de cada decomposição foi averiguada por meio da matriz de correlação ponderada dos vetores da matriz trajetória. O gráfico 5 mostra algumas das matrizes de correlação ponderada resultantes das diferentes janelas de decomposição das amostras.

A Tabela 1 mostra os parâmetros ótimos encontrados para cada conjunto amostral. Tais parâmetros foram encontrados pelo método de tentativa e erro:

Tabela 1. Tamanho da janela de decomposição para cada conjunto amostral

Amostra*	T	L
1-Downtrend	1135	ROUND/(T/4)=284
2-Uptrend	1466	ROUND/(T/11)=133
3-Range	1681	ROUND/(T/11)=841

\*Não inclui o horizonte de previsão.

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

Uma vez encontrados os parâmetros ótimos das janelas de decomposição das séries, prosseguiu-se para a análise dos autovetores de cada conjunto amostral. O gráfico 6 mostra em vermelho a série reconstruída utilizando-se apenas o primeiro autovetor e em preto a série original de cada amostra. Para as três amostras o primeiro autovetor é o mais significativo:

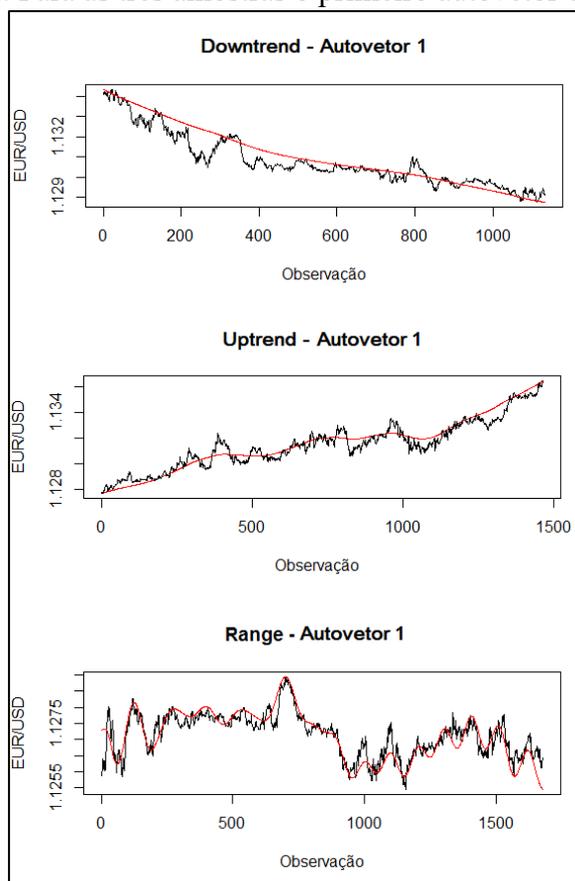


Gráfico 6. Reconstrução do conjunto amostral pelo autovetor 1.

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

Analisando-se em conjunto a matriz de correlações ponderadas e os demais autovetores adicionou-se outros componentes que apresentaram características periódicas. Os demais autovetores foram considerados componentes de ruído e foram excluídos da reconstrução utilizada para realizar as previsões. O gráfico 7 mostra a reconstrução dos componentes de ruído de cada amostra.

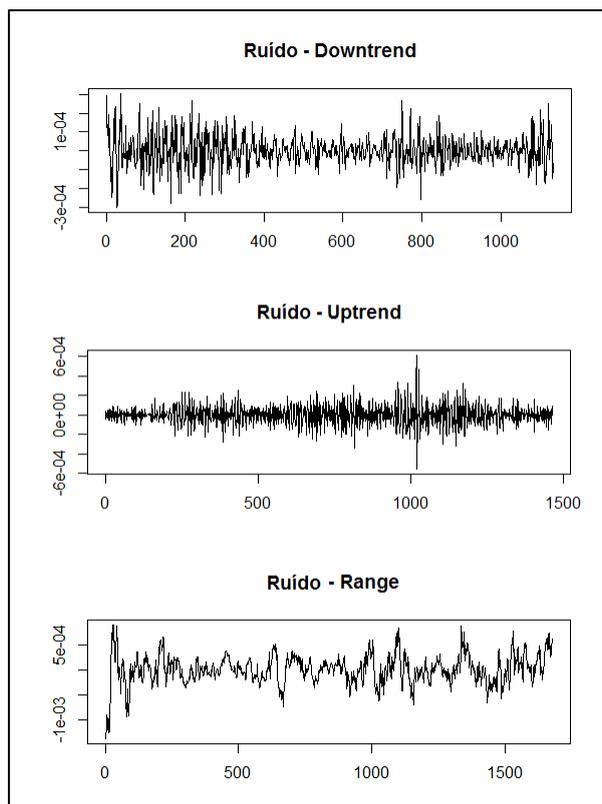


Gráfico 7. Reconstrução dos componentes de ruído de cada amostra.

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

### 3.2. Modelagem ARIMA-GARCH

Para a modelagem das séries pelo ARIMA( $p,d,q$ )-GARCH( $r,s$ ), utilizou-se o método sugerido por Box e Jenkins (1976). Para Makridakis e Hibon (1997) o método pode ser resumido em (1) verificar se a série é estacionária ou não e, caso não seja, transformá-la em série estacionária em sua média e variância; (2) determinar os parâmetros  $p$  e  $q$  por meio dos coeficientes de autocorrelação e autocorrelação parcial; (3) checar se o modelo é adequado.

A fim de verificar se as séries eram estacionárias, foi utilizado os testes de Dickey-Fuller Aumentado e Phillips-Perron. A tabela 2 apresenta os resultados dos testes para cada série.

Tabela 2. Testes Dickey-Fuller Aumentado e Phillips-Perron para as três amostras.

Teste ADF			
	Amostra 1 ( <i>downtrend</i> )	Amostra 2 ( <i>uptrend</i> )	Amostra 3 ( <i>range</i> )
Nº observações	1135	1466	1681
Estatística de Dickey-Fuller	-3,45	-2,54	-4,33
Lag order	10	11,00	11,00
p-valor	0,05	0,35	< 0,01
Hipótese alternativa: estacionariedade			

Teste PP			
	Amostra 1 ( <i>downtrend</i> )	Amostra 2 ( <i>uptrend</i> )	Amostra 3 ( <i>range</i> )
Nº observações	1135	1466	1681
Z (alfa)	-19,23	-21,14	-35,04
Lag order	7,00	7,00	8,00
p-valor	0,08	0,06	< 0,01
Hipótese alternativa: estacionariedade			

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

Conforme os resultados da tabela 2, as séries das amostras 1 e 2 não apresentaram estacionariedade. Ambas foram diferenciadas obtendo-se então  $I(1)$  e submetidas novamente ao teste. A tabela 3 mostra os novos resultados.

Tabela 3. Testes Dickey-Fuller Aumentado e Phillips-Perron para as séries diferenciadas.

Teste ADF		
	Amostra 1 ( <i>downtrend</i> )	Amostra 2 ( <i>uptrend</i> )
Nº observações	1135	1466
Estatística de Dickey-Fuller	-10,24	-11,86
Lag order	10	11,00
p-valor	< 0,01	< 0,01
Hipótese alternativa: estacionariedade		

Teste PP		
	Amostra 1 ( <i>downtrend</i> )	Amostra 2 ( <i>uptrend</i> )
Nº observações	1135	1466
Z (alfa)	-1099,3	-1403,60
Lag order	7,00	7,00
p-valor	< 0,01	< 0,01
Hipótese alternativa: estacionariedade		

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

O gráfico 8 apresenta as autocorrelações e autocorrelações parciais de cada amostra. A fim de serem considerados parcimoniosos, foram especificados modelos com a ordem máxima igual a 5 para os parâmetros  $p$  e  $q$  e ordem máxima igual a 1 para os parâmetros  $r$  e  $s$ .

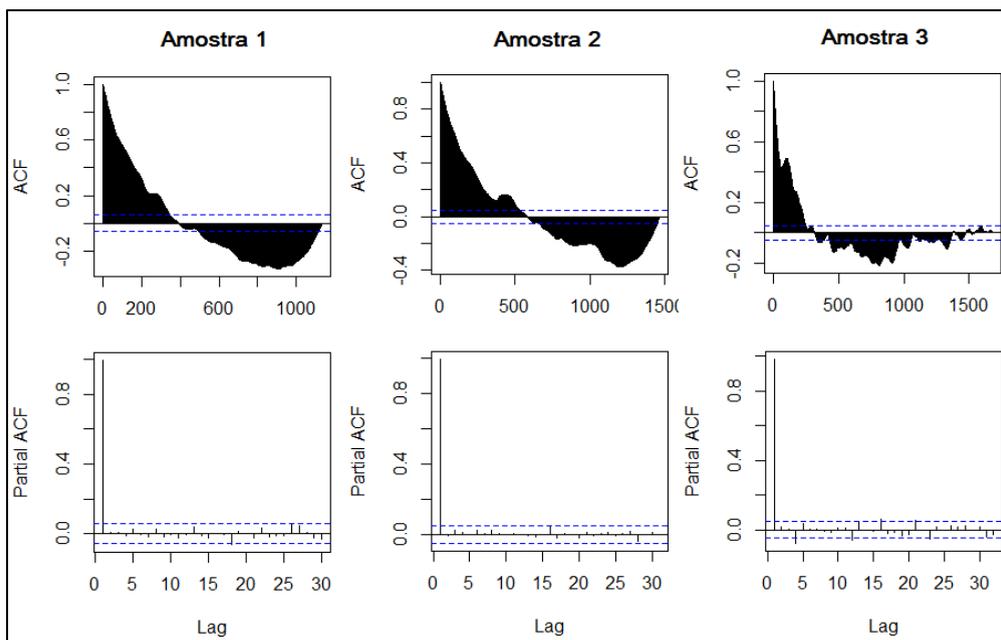


Gráfico 8 – ACF e PACF das séries.

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

A seleção do modelo ótimo para cada conjunto amostral se deu pelo critério de Akaike. A tabela 4 mostra os parâmetros estimados dos modelos ótimos e os respectivos critérios AIC. No Apêndice A pode-se encontrar os resultados obtidos para vários modelos especificados.

Tabela 4. Parâmetros e critério AIC dos modelos selecionados.

Amostra*	ARIMA	GARCH	AIC
1 - Downtrend	(1,1,1)	(1,0)	-15,782
2 - Uptrend	(5,1,1)	(1,0)	-14,909
3 - Range	(4,0,1)	(1,1)	-15,547

Fonte: elaboração própria a partir do pacote RSSA do software estatístico R.

### 3.3. Comparação dos Resultados

Uma vez estimados os parâmetros, estabeleceu-se o horizonte de previsão de 5 minutos. As tabelas 5, 6 e 7 apresentam as previsões realizadas por cada modelo bem como o resultado das medidas de qualidade para as amostras 1, 2 e 3 respectivamente.

Tabela 5. Resultados de previsão para a amostra 1.

Amostra 1 - Downtrend					
Observações: 1135					
Observações	Previsão ARIMA-GARCH	Previsões SSA	Medidas de Qualidade	Modelos	
				ARIMA(1,1,1)	SSA
1,12922	1,129090	1,129181		GARCH(1,0)	L = T/4
1,12930	1,129080	1,129194			
1,12928	1,129070	1,129226	MAPE	0,01628%	0,005898%
1,12926	1,129060	1,129274	RMSE	0,000187	0,000078
1,12921	1,129050	1,129330	THEIL	0,000083	0,000034

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

Tabela 6. Resultados de previsão para a amostra 2.

Amostra 2 - Uptrend					
Observações: 1466					
Observações	Previsão ARIMA-GARCH	Previsões SSA	Medidas de Qualidade	Modelos	
				ARIMA(5,1,1) GARCH(1,0)	SSA L = T/11
1,13589	1,136392	1,135931	MAPE	0,042457%	0,008645%
1,13606	1,136406	1,135931			
1,13575	1,136390	1,135920	RMSE	0,000492	0,000113
1,13586	1,136372	1,135887	THEIL	0,000217	0,000050
1,13596	1,136371	1,135836			

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

Tabela 7. Resultados de previsão para a amostra 3.

Amostra 3 - Range					
Observações: 1681					
Observações	Previsão ARIMA-GARCH	Previsões SSA	Medidas de Qualidade	Modelos	
				ARIMA(4,0,1) GARCH(1,1)	SSA L = T/2
1,12631	1,126359	1,126352	MAPE	0,008221%	0,007227%
1,12639	1,126355	1,126379			
1,12651	1,126348	1,126406	RMSE	0,000104	0,000107
1,12648	1,126351	1,126435	THEIL	0,000046	0,000047
1,12626	1,126348	1,126465			

Fonte: Elaboração própria com dados obtidos através do Marketscope 2.0®.

Conforme os resultados mostrados nas tabelas acima, as previsões realizadas pelo SSA foram as que mais se aproximaram das observações originais para os três casos em que a técnica foi aplicada e para todas as medidas de qualidade, exceto no Amostra 3 em que o RMSE e o TIC mostraram-se melhores para no caso do ARIMA-GARCH. Tal fato permite concluir que as previsões do SSA, no que diz respeito às taxas de câmbio no período em questão, são mais adequadas que aquelas obtidas pelo modelo ARIMA-GARCH independente do movimento do mercado, ou seja, tanto para tendências de alta e baixa como para quando não houve tendência dominante.

#### 4. Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi avaliar qual a modelagem do fechamento da taxa de câmbio (ask) do par EUR/USD gera previsões mais satisfatórias quando da utilização de dados de alta frequência (1 minuto). Para alcançar tal objetivo, a pesquisa foi dividida em duas partes: a primeira consistiu na estimação dos parâmetros de cada técnica; a segunda, na utilização dos modelos estimados para previsão das séries em um horizonte de tempo de 5 minutos. Os resultados mostraram que as previsões foram mais satisfatórias quando realizadas por meio da decomposição espectral não paramétrica.

Cabe ressaltar que os tipos de previsões decorridas das duas técnicas, pelo SSA e pelo modelo clássico ARIMA-GARCH, são de tipos diferentes. No primeiro caso, busca-se identificar e desmembrar as séries em seus componentes de tendência, componentes periódicos e ruídos. Em seguida, elimina-se o componente de ruído e efetuam-se as previsões. No segundo caso, assume-se que o ruído é o erro estocástico com variância condicional e busca-se modelá-lo junto com os demais componentes autoregressivos e sazonais.

Quanto às limitações da pesquisa, deve-se mencionar o fato de que as amostras utilizadas na modelagem e previsão da taxa de câmbio possuem tamanhos diferentes. Esse pode ser um fator relevante quando da estimação dos parâmetros do modelo ARIMA-GARCH. De acordo

com o trabalho de Ng e Lam (2006), o tamanho da amostra pode guiar a estimação para diferentes soluções ótimas locais, por esse motivo as amostras selecionadas são relativamente pequenas.

Outra questão a ser considerada é o período do qual as amostras foram selecionadas. Se as observações fossem provenientes de outra época do ano as previsões realizadas pelo modelo clássico ainda seriam menos satisfatórias? Essa é uma pergunta pertinente visto que o mercado FOREX apresenta diferentes volatilidades em diferentes períodos do ano e até mesmo em períodos dentro de um mesmo dia.

Tendo em vista os resultados encontrados e as limitações desse trabalho, sugere-se como tema de pesquisas posteriores a previsão da volatilidade da taxa de câmbio EUR/USD; o impacto da diferença de volatilidade em diferentes períodos nas previsões dos modelos; a previsão dos retornos e/ou volatilidade dos retornos no mercado acionário brasileiro; a utilização do SSA para previsões com amostras dinâmicas (ou seja, rolagem de observações); e a utilização do SSA para especificação de um modelo de *Value at Risk* não paramétrico.

## 5. Referências

ABRAHAM, A. **Hybrid Soft and Hard Computing Based Forex Monitoring Systems. In Fuzzy Systems Engineering.** Em Fuzzy Systems Engineering. Springer Berlin Heidelberg, p. 113-129, 2005.

ALAMILI, M. **Exchange Rate Prediction using Support Vector Machines.** Dissertação de Doutorado. Delft University Of Technology, 2011.

ASAI, M.; McALEER, M; YU, J. Multivariate stochastic volatility: a review. **Econometric Reviews**, v.25, n.2-3, p.145-175. 2006.

ATKOČIŪNAS, V.; MAČIULIS, N.; KLIMAVIČIENĖ, A.; KALENDIENĖ, J. **Short-term Currency Exchange Rate Forecasting with Econometric Models.** Dissertação de Doutorado. ISM Vadybos ir Ekonomikos Universitetas. 2010.

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS. Monetary and Economic Department. **Triennial Central Bank Survey. Foreign exchange turnover in April 2013:** preliminary global results. 2013. Disponível em <<http://www.bis.org/publ/rpfx13fx.pdf>>. Acesso em: 24 out. 2016.

BAUWENS, L.; LAURENT, S; ROMBOUTS, J.V. Multivariate GARCH models: a survey. **Journal of applied econometrics**, v.21, n.1, pp.79-109. 2006.

BAUWENS, L.; OMRANE, W.B.; GIOT, P. News announcements, market activity and volatility in the euro/dollar foreign exchange market. **Journal of International Money and Finance**, v.24, n.7, p.1108-1125. 2005.

BOLLERSLEV, T.; CHOU, R.Y; KRONER, K.F. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. **Journal of econometrics**, v.52, n.1-2, p.5-59. 1992.

BROOKS, C. **Introductory Econometrics for Finance**. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

BROOMHEAD, D.S.; KING, G.P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. **Physica D**, 20:217–236, 1986.

BROOMHEAD, D.S.; JONES, R.; KING, G.P; PIKE, E.R. Singular system analysis with application to dynamical systems. **Chaos, Noise and Fractals**, pg.15–27. IOP Publishing, Bristol, 1987.

CHAUDHURI, T. D.; GHOSH, I. Artificial Neural Network and Time Series Modeling Based Approach to Forecasting the Exchange Rate in a Multivariate Framework. **Journal of Insurance and Financial Management**, v.1, no.5, p.92-123, 2016.

DACOROGNA, M. M.; MÜLLER, U. A.; PICTET, O. V; DE VRIES, C. G. Extremal forex returns in extremely large data sets. **Extremes**, v.4, no.2, p.105-127, 2001.

DE MENEZES, M. L.; JÚNIOR L. A. T.; DE SOUZA R. M.; KEILA MARA CASSIANO, K. M.; PESSANHA J. F. M.; SOUZA, R. C. Hydroelectric Energy Forecast. **International Journal of Energy and Statistics**, vol.1, n.3, p.205-214. 2013.

ÉGERT, B.; KOČENDA, E. The impact of macro news and central bank communication on emerging European forex markets. **Economic Systems**, v.38, n.1, p.73-88. 2014.

ELSNER, J. B; TSONIS, A. A. **Singular Spectral Analysis: A New Tool in Time Series Analysis**. New York: Plenum Press, 1996.

ENGLE, R.F.; BOLLERSLEV, T. Modelling the persistence of conditional variances. **Econometric reviews**, v.5, n.1, p.1-50. 1986.

ENGLE, R.F.; FOCARDI, S.M.; FABOZZI, F.J. ARCH/GARCH models in applied financial econometrics. **Handbook of Finance**. 2008. Disponível em: <<http://pages.stern.nyu.edu/~rengle/ARCHGARCH.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2016.

GHIL, M; VAUTARD, R. Interdecadal oscillations and the warming trend in global temperature time series. **Nature**, p.350:324-7, 1991.

GOLYANDINA, N.; NEKRUTKIN, V.; ZHIGLJAVSKY A. A. **Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.

HASSANI, H. Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison. **Journal of Data Science**, v.5, p. 239-257, 2007.

\_\_\_\_\_. **A Brief Introduction to Singular Spectrum Analysis**. 2010. Disponível em: <[http://ssa.cf.ac.uk/a\\_brief\\_introduction\\_to\\_ssa.pdf](http://ssa.cf.ac.uk/a_brief_introduction_to_ssa.pdf)>. Acesso em: 29 mar. 2016.

HASSANI, H.; THOMAKOS, D. A Review on Singular Spectrum Analysis for Economic and Financial Time Series. **Statistics And Its Interface**, v.3, p. 377-397, 2010.

LAI, K.K.; YU, L.; WANG, S. **A neural network and web-based decision support system for forex forecasting and trading**. Em Data Mining and Knowledge Management. Springer Berlin Heidelberg, p. 243-253, 2005.

MAKRIDAKIS, S.; HIBON, M. **ARMA models and the Box–Jenkins methodology**. 1997. Disponível em: <[https://hephaestus.nup.ac.cy/bitstream/handle/11728/6345/ARMA%20Models%20and%20the%20Box-Jenkins%20Methodology%20\(Journal%20of%20Forecasting\)%20with%20M.%20Hibon.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://hephaestus.nup.ac.cy/bitstream/handle/11728/6345/ARMA%20Models%20and%20the%20Box-Jenkins%20Methodology%20(Journal%20of%20Forecasting)%20with%20M.%20Hibon.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>. Acesso em: 24 out. 2016.

MURPHY, J.J. **Technical analysis of the financial markets: A comprehensive guide to trading methods and applications**. Penguin. New York Institute of Finance. 1999.

PAILLARD, D.; LABEYRIE, L.; YIOU, P. Macintosh program performs time series analysis. **Eos, Transactions American Geophysical Union**, v.77, p.379, 1996.

PAN, V.Y.; RAMI, Y.; WANG, X. Structured matrices and Newton's iteration: unified approach. **Linear algebra and its applications**, v.343, p.233-265. 2002.

RAVI, V.; LAL, R.; KIRAN, N.R. Foreign Exchange Rate Prediction using Computational Intelligence Methods. **International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications**, v.4, p.659-670, 2012.

SANEI, S.; HASSANI, H. **Singular Spectrum Analysis of Biomedical Signals**. Boca Raton: CRC Press, 2015.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K.; WHITE, P. R. Interactive SVD Method For Noise Reduction of Low-Dimensional Chaotic Time Series. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.13, no.1, p.115-124, 1999.

VAUTARD, R; GHIL, M. Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v.35(3), p.395-424, 1989.

WORLD TRADE ORGANIZATION. **International Trade Statistics**. 2014. Disponível em <[https://www.wto.org/english/res\\_e/statis\\_e/its2014\\_e/its14\\_toc\\_e.htm](https://www.wto.org/english/res_e/statis_e/its2014_e/its14_toc_e.htm)>. Acesso em: 24 out. 2016.

YAO, J.; TAN, C.L. A case study on using neural networks to perform technical forecasting of forex. **Neurocomputing**, v.34 no.1, p.79-98, 2000.

YULE, G.U. Why do we sometimes get nonsense-correlations between Time-Series?--a study in sampling and the nature of time-series. **Journal of the Royal Statistical Society**, v.89, n.1, p.1-63. 1926.

ZHIGLJAVSKYA, A.; HASSANI, H.; HERAVI, S. Forecasting European Industrial Production with Multivariate Singular Spectrum Analysis. **Journal of Forecasting**, v.32, no. 5, p. 395-408, 2013.

ZHUANG, X.F.; CHAN, L.W.; Volatility forecasts in financial time series with HMM-GARCH models. **International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning**, p.807-812, 2004.