

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Alan Bruno do Nascimento

**BOA COLOCAÇÃO E COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES NO ESPAÇO DE
ENERGIA PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR 3D CÚBICA**

Belo Horizonte
2020

Alan Bruno do Nascimento

BOA COLOCAÇÃO E COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES NO ESPAÇO DE ENERGIA PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR 3D CÚBICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias

Belo Horizonte
2020

Nascimento, Alan Bruno do.

N244b Boa colocação e comportamento de soluções no espaço de energia para a equação de Schrödinger não-linear 3D cúbica [recurso eletrônico] / Alan Bruno do Nascimento — 2020.
1 recurso online (76 f. il, color.): pdf.

Orientador: Luiz Gustavo Farah Dias.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 74 – 76

1. Matemática – Teses. 2. Equação de Schrödinger – Teses. 3. Interpolação– Teses. 4. Espalhamento – Teses. I. Dias, Luiz Gustavo Farah. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Boa colocação e comportamento de soluções no
espaço de energia para a equação de Schrödinger
não-linear 3D cúbica*

ALAN BRUNO DO NASCIMENTO

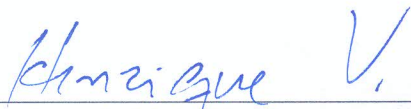
Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:



Prof. Luiz Gustavo Farah Dias
UFMG



Prof. Carlos Manuel Guzmán Jiménez
UFF



Prof. Henrique de Melo Versieux
UFMG

Belo Horizonte, 28 de fevereiro de 2020.

*“Mathematics, rightly viewed, possesses not only
truth, but supreme beauty — a beauty cold and
austere [...]”*
- Bertrand Russell

RESUMO

Neste trabalho estudamos a boa colocação local e global, bem como a explosão em tempo finito e espalhamento das soluções no espaço de energia do problema de valor inicial associado à equação de Schrödinger não-linear em \mathbb{R}^3

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^2 u = 0. \quad (1)$$

No Capítulo 2 introduzimos ferramentas essenciais de análise funcional e análise harmônica, assim como propriedades da equação elíptica $\Delta\psi - \psi + \psi^3 = 0$, que são importantes para o entendimento dos fenômenos da equação de Schrödinger acima enunciados. No Capítulo 3 demonstramos a boa colocação local para a equação (1), por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach. No Capítulo 4, utilizamos o método de decomposição em perfis em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para determinar a constante ótima para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg $\|f\|_{L^4}^4 \leq c \|\nabla f\|_{L^2}^3 \|f\|_{L^2}$, um resultado valioso para o entendimento da dicotomia boa colocação global e explosão, demonstrada em seguida. Finalmente, no Capítulo 5, passamos ao estudo do comportamento assintótico das soluções globais de (1). Demonstramos que, abaixo do limiar massa-energia da equação elíptica associada, as soluções globais têm espalhamento.

Palavras-chave: equação de Schrödinger não-linear, espaço de energia, interpolação, boa-colocação, explosão, espalhamento.

ABSTRACT

In this work we study the local and global well-posedness, as well as the finite time blow-up and scattering of the solutions in the energy space of the initial value problem associated with the nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{R}^3

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^2 u = 0. \quad (1)$$

In Chapter 2, we introduce essential tools from functional and harmonic analysis, as well as properties of the elliptic equation $\Delta\psi - \psi + \psi^3 = 0$, which are important for understanding the phenomena of the Schrödinger equation above stated. In Chapter 3 we show the local well-posedness for the equation (1), via the Banach Fixed Point Theorem. In Chapter 4, we make use of the profile decomposition method in $H^1(\mathbb{R}^3)$ to determine the sharp constant for the Gagliardo-Nirenberg inequality $\|f\|_{L^4}^4 \leq c \|\nabla f\|_{L^2}^3 \|f\|_{L^2}$, a valuable result for understanding the dicotomy global well-posedness and blow-up, that we then show. Finally, in Chapter 5, we switch to the study of the global solution's asymptotic behaviour, showing that, below the threshold mass-energy of the associated elliptic equation, the global solutions of (1) scatters.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, energy space, elliptic equation, interpolation, well-posedness, blow-up, scattering.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, especialmente à minha mãe, Flávia, aos meus avós, Vicente, Nilza, Ailton e Maria (*In Memoriam*), às minhas tias Débora e Jaqueline, por todo o suporte, pelos ensinamentos, pelo amor e carinho e por se fazerem sempre por perto, e à minha irmã, Ana Paula, por sempre acreditar em mim. Sem vocês nada disso seria possível.

Agradeço a todos os meus amigos. Em especial agradeço ao César, Guilherme, Naraiane, Danilo, Paulo, Lucas (Blem), Bruna, Raphael, Hudson, Gleisson, Gabriel, Mateus, Isabela, Bob, Luiz Felipe e Thiago. À amiga Ana Teresa pela ajuda na revisão deste texto. Ao Júlio e ao Emerson pelo xadrez às sextas-feiras e pelo café. Ao Ralf, pela amizade e por pacientemente me ouvir e ajudar na resolução dos meus problemas de matemática. Aos amigos da moradia universitária, especialmente do 302/5(Limbo), que tornaram a moradia um lugar inesquecível.

À Universidade Federal de Minas Gerais, ao corpo docente e à administração do departamento de matemática, por me proporcionarem um ensino superior público, gratuito e de qualidade. Em especial, sou grato às secretárias Andréa e Kelly, aos professores Hamilton Bueno, Ana Cristina Vieira, Bernardo Nunes e Israel Vainsencher, que me inspiraram. Também quero agradecer aos colegas Luccas e Mykael, que me ajudaram enormemente no entendimento dos tópicos deste trabalho, e aos colegas de mestrado pelas valiosas discussões ao longo destes dois anos.

Sou muito grato ao professor Remy Sanchis, por todos os conselhos ao longo da graduação e do mestrado e também pela experiência em matemática que com ele adquiri. Remy é um grande professor e amigo, que com certeza é um dos responsáveis por eu ter chegado até aqui.

Agradeço ao meu orientador, Luiz Gustavo Farah, pela confiança que depositou em mim, por todos os conselhos, pela paciência e limpidez com que ensina matemática, pela disponibilidade e pontualidade. Tudo isso contribuiu enormemente para o sucesso deste trabalho.

Também sou grato aos membros da banca Henrique Versieux, Carlos Guzmán e ao Alex Ardila, que também me deu apoio nas dificuldades que tive no decorrer desta dissertação.

Finalmente, agradeço à Capes, pelo indispensável apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	16
2.1	Notações	16
2.2	A Transformada de Fourier	17
2.3	Espaços de Sobolev	18
2.4	Interpolação	20
2.4.1	O Grupo Unitário e as Estimativas de Strichartz	24
2.5	A Equação Elíptica	31
2.6	Lemas Auxiliares	33
3	Boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^3)$	35
3.1	A Fórmula de Duhamel	35
3.2	Boa Colocação Local	36
4	Boa colocação Global e Explosão	40
4.1	Decomposição em Perfis e Identidade Virial	40
4.2	A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg	48
4.3	Boa Colocação e Explosão	53
5	Espalhamento	58
5.1	CrITÉrio de Espalhamento	58
5.2	Coercividade	64
5.3	Identidade Virial	67
5.4	Estimativa Virial	69

SUMÁRIO

5.5 Evacuação da Energia e Espalhamento	72
Referências	74

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudaremos a *boa colocação local e global*, bem como a explosão em tempo finito e o *espalhamento* das soluções, do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^2 u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (1.0.1)$$

O estudo dessa equação remonta a meados do século XIX, quando pela primeira vez foi observado o fenômeno hidrodinâmico que veio a ser chamado de *soliton*, ou *onda solitária*, que consiste em uma única onda, um pulso, que viaja com velocidade constante e formato inicial preservado (Scott, Chu e McLaughlin [33]).

Este fenômeno permaneceu pouco compreendido por um longo período e foi só em 1871 que J.V. Boussinesq desenvolveu o primeiro modelo analítico para o soliton e em 1877 introduziu a equação de Korteweg-deVries, que hoje leva este nome devido a Korteweg e deVries a terem estudado e popularizado a partir de 1895 (veja Korteweg e deVries [28]). Esta equação serviu de modelo para vários outros fenômenos do tipo soliton, observados, por exemplo, em cristais (Narayanamurti e Varma [31]) e ondas íon-acústicas no plasma (Ikezi, Taylor e Baker [23]). A equação de Korteweg-deVries também impulsionou largamente a teoria matemática das ondas não-lineares nas décadas subsequentes, quando foi compreendido que a existência de ondas solitárias só é possível por causa da interação entre os efeitos não-lineares e os efeitos dispersivos presentes na equação.

A equação de Schrödinger não-linear veio a ser estudada mais tarde, a partir da década de 1960, está na classe das equações que exibem soluções do tipo soliton e tem grande importância na física aplicada. Para além dos solitons, a equação pode ser considerada como a aproximação clássica da equação de campo para um sistema quântico não relativístico de muitos corpos (Ginibre e Velo [17]), modela os fenômenos de *self-trapping* (Karpman e Kruskal [25]) e *self-focusing* (Kelley [26]) em ótica não-linear, a propagação de pulsos de calor em um sólido (Tappert e Varma [36]), dentre outros. Para derivações dessa equação a partir de vários sistemas

físicos e outras informações do gênero, veja (C.Sulem e P.Sulem [34]). É, portanto, importante colocar a teoria sobre a equação (1.0.1) em uma sólida base matemática. Notamos, desde já, que, no caso unidimensional, algumas soluções podem ser escritas explicitamente em termos de funções elementares (veja Scott, Chu e McLaughlin [33]). No entanto, em dimensões mais altas e em particular neste importante caso tridimensional, não há soluções explícitas para a equação, sendo necessário um estudo qualitativo cuidadoso desta.

Dado $T > 0$, uma função $u \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^3))$ é dita solução de (1.0.1), se satisfaz a equação de Duhamel

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2u)(s)ds, \quad (1.0.2)$$

para todo $t \in [0, T]$. Onde $\{e^{it\Delta}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo unitário de Schrödinger, dado por

$$e^{it\Delta}f(x) := \left(e^{-4\pi^2it|\xi|^2} \widehat{f} \right)^\vee(x), \quad (1.0.3)$$

que é solução do problema de valor inicial, com dado inicial $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ em que

$$\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2} < \infty$$

e, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

e

$$\|f\|_{L^\infty} := \text{ess sup } f = \inf \left\{ \sup_{x \in N^c} |f(x)|; \mu(N) = 0 \right\}.$$

Dizemos que o PVI (1.0.1) é *localmente bem colocado* se para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, existe $T > 0$ e uma única função u tal que

1. u é solução da equação;
2. $u \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^3))$ (Persistência);
3. Há a dependência contínua com relação aos dados iniciais, isto é

$$u_0^n \rightarrow u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3) \implies u^n \rightarrow u \text{ em } C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^3)).$$

Caso a solução exista para qualquer tempo $T > 0$, dizemos que o problema é *globalmente bem colocado* e, caso não exista globalmente, dizemos que a solução tem explosão (*blow-up*) em tempo finito.

Dizemos que a solução global u de (1.0.1) se espalha (em inglês *scattering*), se existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{it\Delta}u_+\|_{H^1} = 0.$$

Ao longo desse trabalho, a conservação de massa e energia, assim como outras invariâncias da equação, se fazem muito úteis.

Definimos a massa $M : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^+$ e a energia $E : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$M[f] = \|f\|_{L^2}^2, \quad (1.0.4)$$

$$E[f] = \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|f\|_{L^4}^4. \quad (1.0.5)$$

A massa e a energia das soluções da equação (1.0.1) são preservadas no tempo. Mais precisamente, na seção 4.3 demonstramos a seguinte proposição.

Proposição 1.1. *Seja u uma solução da equação de Schrödinger (1.0.1). Então a massa e a energia de u são conservadas no tempo. Isto é, para todo $t \in I$,*

$$M[u(t)] = M[u_0] \quad e \quad E[u(t)] = E[u_0]. \quad (1.0.6)$$

Por causa da propriedade de conservação da energia – em contraposição com outros espaços, onde a energia pode não estar bem-definida – o espaço H^1 é por vezes chamado espaço de energia. Mais ainda, dada uma solução u de (1.0.1), então as seguintes funções são soluções da mesma equação:

1. $u_c(x, t) = e^{icx} e^{i|c|^2 t} u(x - 2tc, t)$, $c \in \mathbb{R}^3$, (Invariância Galileana)
2. $u_\mu(x, t) = \mu u(\mu x, \mu^2 t)$, (Mudança de escala)
3. $u_\omega(x, t) = e^{i\omega} u(x, t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, (Mudança de fase)
4. $u_{a,b}(x, t) = u(x - a, t - b)$. (Translação)

Mais especificamente, no Capítulo 2 estabelecemos de maneira sucinta resultados de análise harmônica, análise funcional e outros resultados auxiliares importantes para a compreensão dos teoremas principais do texto, como a transformada de Fourier, os espaços de Sobolev e interpolação de operadores e espaços funcionais. Também introduzimos resultados essenciais sobre a equação elíptica

$$\Delta\psi - \psi + \psi^3 = 0, \quad (1.0.7)$$

que está relacionada com a equação (1.0.1). De fato, para todo $\omega > 0$,

$$u_\omega(x, t) = e^{i\omega t} \sqrt{\omega} \psi(\sqrt{\omega} x)$$

é solução da equação (1.0.1), onde ψ é solução de (1.0.7). A princípio poderia haver mais de uma solução da equação (1.0.7), no entanto, a solução de menor norma L^2 (chamada aqui de *ground state*) desempenha um papel fundamental na dicotomia boa

colocação global e explosão. Notamos aqui que grande parte desses resultados e suas demonstrações aqui apresentadas valem com maior generalidade e não fazem qualquer uso da estrutura específica do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , podendo ser generalizados para \mathbb{R}^n .

No Capítulo 3, seguindo F. Linares e G. Ponce [30], provamos o seguinte resultado de boa colocação local.

Teorema 1.2. *Considere o PVI (1.0.1). Então para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe $T > 0$ e uma única solução u da equação integral (1.0.2) no intervalo $[0, T]$ com*

$$u \in C([0, T]: H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^8([0, T]: W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)),$$

onde a norma em $W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)$ é dada por $\|f\|_{W^{1,12/5}} := \|f\|_{L^{12/5}} + \|\nabla f\|_{L^{12/5}}$.

Além disso, para todo $T' < T$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que a função

$$\mathbb{F}: V \rightarrow C([0, T']: H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^8([0, T']: W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)), \tilde{u}_0 \mapsto \tilde{u}(t)$$

é Lipschitz.

Para estabelecer o resultado acima, demonstramos que o operador associado à (1.0.2) é uma contração e concluímos a existência e a unicidade da solução aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach a esse operador.

No Capítulo 4, seguindo J. Holmer e S. Roudenko [22], passamos à discussão sobre sob quais circunstâncias a solução de (1.0.1) é global, supondo que o produto massa-energia (veja (1.0.4) e (1.0.5)) esteja abaixo da massa-energia do *ground state* ϕ da equação elíptica (1.0.7) (isto é, que $M[u]E[u] < M[\phi]E[\phi]$). Exibimos condições suficientes para que haja boa colocação global ou explosão em tempo finito. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado

Teorema 1.3. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $I = (-T^*, T^*)$ o intervalo maximal de existência da solução u do PVI (1.0.1) e ϕ a solução de *ground state* da equação (1.0.7). Suponha que $M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]$.*

1. *Se a condição inicial u_0 satisfaz*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2},$$

então $I = \mathbb{R}$, isto é, a solução é global. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

2. *Por outro lado, se*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2},$$

então, para todo $t \in I$,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

Mais ainda, se $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $T^* < \infty$ e, portanto, a solução explode em tempo finito¹.

A demonstração do Teorema 1.3 é uma aplicação da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^2}^3$$

com constante ótima

$$C = \frac{4}{3\sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2},$$

demonstrada por M. Weinstein [37]. Este resultado é provado aqui utilizando um método alternativo ao de Weinstein, baseado no *profile decomposition* de T. Hmidi e S. Keraani [21] e conecta a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, a equação elíptica (1.0.7) e a equação de Schrödinger (1.0.1). Resultados sobre o que acontece acima do limiar massa-energia, isto é, quando $M[u]E[u] \geq M[\phi]E[\phi]$, podem ser encontrados nos artigos de L. Campos e M. Cardoso [5], T. Duyckaerts e S. Roudenko [14] e [13], onde o último analisa o caso $M[u]E[u] = M[\phi]E[\phi]$ e [5], [14] consideram equações das quais (1.0.1) é um caso particular.

Finalmente, no Capítulo 5, seguindo B. Dodson e J. Murphy [9], demonstramos que, abaixo do *ground state*, se adicionarmos a hipótese de radialidade na condição inicial, então a solução se espalha.

Teorema 1.4. *Seja ϕ a solução de ground state da equação elíptica (1.0.7). Suponha que o dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ de (1.0.1) seja radial e que $M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]$. Se*

$$\|u_0\|_{L^2} \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\phi\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2},$$

então a solução global u da equação de Schrödinger (1.0.1) tem espalhamento.

A demonstração desse teorema utiliza diversas ferramentas de análise harmônica, em busca de mostrar que a solução satisfaz o critério de espalhamento de Terence Tao [35] (veja o Teorema 5.2 abaixo). Observamos também que esse teorema já foi obtido em dimensão arbitrária ($n \geq 2$) e para equações similares (veja os trabalhos recentes de A.K. Arora, B. Dodson e J. Murphy [2], L. Campos [4], B. Dodson e J. Murphy [10], A.K. Arora [1] e V.D. Dinh [11], onde, nos três últimos, a hipótese de radialidade não é utilizada).

¹O mesmo resultado vale substituindo a hipótese $|x|u_0 \in L^2$ por u_0 ser radial. Não estudaremos esse caso no presente trabalho, mas o leitor interessado pode encontrar a demonstração original no artigo de T. Ogawa e Y. Tsutsumi [32].

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Notações

Escrevemos $a \lesssim b$, se existe uma constante $c > 0$ tal que $a \leq cb$. Algumas vezes escrevemos $a \lesssim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} b$ para indicar a dependência $c = c(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Escrevemos ainda $a \gtrsim b$ quando $b \lesssim a$. Quando necessário, a constante c será mantida explicitamente, podendo mudar de uma expressão para outra. Denotamos por \mathbb{R}^+ o conjunto $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ dos números reais não negativos.

Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, f de classe C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, e um *multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, escrevemos

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}; \quad \partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3} f, \quad |\alpha| \leq k. \quad (2.1.1)$$

Dados dois espaços de funções $X(\Omega, \mathbb{C})$, $Y(I, \mathbb{C})$, munidos das normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio e dada uma função $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(\cdot, t) \in X$, para todo $t \in I$, e $g(x, *) \in Y$, para todo $x \in \Omega$, denotamos a norma de g no espaço $Y(I; X(\Omega))$ por

$$\|g\|_{Y(I; X(\Omega))} = \|g\|_{Y_I X_\Omega} := \|\|g\|_{X_\Omega}\|_{Y_I}.$$

Se $I = [0, T]$, escrevemos ainda $\|g\|_{Y_I X_\Omega} = \|g\|_{Y_T X_\Omega}$. Se $I = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$ ou se pelo contexto estiver claro qual o domínio dos espaços em questão, denotamos a norma mista simplesmente por $\|g\|_{Y_t X_x}$. Utilizamos a notação $\|g(\cdot, t)\|_X$ e $\|g(x, *)\|_Y$ para evidenciar que a norma foi tomada em relação às variáveis x e t , respectivamente. Denotamos o produto interno entre dois elementos x, y em um espaço vetorial X por $x \cdot y$ ou pela justaposição xy .

Dado $p \in [1, \infty]$, denotamos por p' o seu expoente conjugado, isto é, o par (p, p') satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

2.2 A Transformada de Fourier

Para as demonstrações dos resultados desta seção veja R. Iório e V. Iório [24], capítulos V e IX.

Definição 2.1. A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ é a função

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx. \quad (2.2.1)$$

Proposição 2.2 (Propriedades da transformada). *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Então*

1. O operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$ está bem bem definido, é linear e

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \quad (2.2.2)$$

2. A função $\widehat{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.
3. $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$, quando $|\xi| \rightarrow \infty$. (Riemann-Lebesgue)
4. $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{2\pi i y \xi} \widehat{f}(\xi)$, onde $\tau_y f(x) = f(x + y)$.
5. $\widehat{\delta_a f}(\xi) = a^{-3} \widehat{f}(a^{-1} \xi)$, onde $\delta_a f(x) = f(ax)$.
6. $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Passamos agora aos resultados sobre a transformada em um espaço de funções com maior regularidade.

Definição 2.3. O Espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, é a coleção das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tais que, para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty.$$

Observe que o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, das funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ de suporte compacto está contido no espaço de Schwartz.

Teorema 2.4. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Teorema 2.5. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e α um multi-índice. Então

1. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ é um isomorfismo, com inversa

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = f^\vee(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

2. $f(x) = (\widehat{f})^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$. (Fórmula de Inversão)
3. $\int_{\mathbb{R}^3} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx$. (Identidade de Plancherel-Parseval)
4. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

A transformada de Fourier em geral não pode ser definida em L^2 pela fórmula (2.2.1), pois a integral pode não convergir. No entanto, utilizando a densidade da classe de Schwartz e a identidade de Plancherel-Parseval, podemos definir um operador linear unitário em $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Definição 2.6. A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ é a única extensão contínua de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ a $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Mais geralmente, uma consequência do Teorema de Riesz-Thorin (veja o Teorema 2.17 a seguir) nos permite definir uma extensão contínua $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^3)$, para $p \in [1, 2]$.

Teorema 2.7 (Hausdorff-Young). Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq 2$. Então $\widehat{f} \in L^{p'}$ e

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Veja F. Linares e G. Ponce [30], página 29, Teorema 2.3. □

2.3 Espaços de Sobolev

Vamos agora introduzir os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$, e $H^s(\mathbb{R}^3)$, $s \geq 0$. Neste trabalho estamos principalmente interessados no espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$, mas, via interpolação, os outros espaços desempenham um papel importante nas demonstrações dos teoremas.

Denotamos por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ o espaço das funções localmente integráveis. Isto é, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ se para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$\int_K f(x) dx < \infty.$$

Definição 2.8. Dadas $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ e um multi-índice α , dizemos que g é a α -ésima derivada fraca de f , denotada $D^\alpha f = g$, se para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^3} g(x) \varphi(x) dx.$$

Definição 2.9. O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ é o conjunto

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^3) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \mid D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^3), |\alpha| \leq k\}.$$

onde D^α denota a derivada fraca.

Proposição 2.10. Para todo $p \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Banach, quando munido da norma

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \|f\|_{k,p} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Veja L.C. Evans [15], página 249, Teorema 2. □

Os espaços $W^{k,2}(\mathbb{R}^3)$ são espaços de Hilbert, por esta razão distinguimos estes espaços com a notação $H^k(\mathbb{R}^3) := W^{k,2}(\mathbb{R}^3)$.

Definição 2.11. Definimos o Espaço de Sobolev de ordem $s \geq 0$, denotado $H^s(\mathbb{R}^3)$, por

$$H^s(\mathbb{R}^3) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \Lambda^s f(x) := ((1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f})^\vee(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Note que quando $s = k \in \mathbb{N}$ esta definição coincide com a dada anteriormente dos espaços H^k . Para uma demonstração deste fato, veja L.C. Evans [15], página 282, Teorema 7.

Teorema 2.12.

1. $H^s(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^s f(x) \overline{\Lambda^s g(x)} dx, \quad f, g \in H^s(\mathbb{R}^3).$$

2. O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ das funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ de suporte compacto é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, para $1 \leq p < \infty$. (Friedrichs)

3. Se $s < s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}^3) \subset H^s(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. 1. veja F. Linares e G. Ponce [30]. 2. veja H. Brezis [3], página 265, Teorema 9.2. A Terceira afirmação segue da desigualdade

$$\int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int (1 + |\xi|^2)^{s'} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

2.4 Interpolação

Passaremos agora à exposição de várias desigualdades de interpolação entre espaços L^p , que são ferramentas de análise funcional e de análise harmônica de grande importância no estudo da equação (1.0.1).

Proposição 2.13 (Desigualdade de Hölder). *Dado $m \in \mathbb{N}$, sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $f_k \in L^{p_k}(X)$, com $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq p_k \leq \infty$. Se*

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k},$$

então $\prod f_k \in L^r(X)$ e

$$\left\| \prod_{k=1}^m f_k \right\|_{L^r} \leq \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Demonstração. Para $m = 2$ e $r = 1$, veja H. Brezis [3], página 92, Teorema 4.6. Para $m = 2$ e r satisfazendo $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$, temos

$$\|f_1 f_2\|_{L^r}^r = \|f_1^r f_2^r\|_{L^1} \leq \|f_1^r\|_{L^{p_1/r}} \|f_2^r\|_{L^{p_2/r}} = \|f_1\|_{L^{p_1}}^r \|f_2\|_{L^{p_2}}^r.$$

O caso geral segue agora do princípio de indução finita. □

Proposição 2.14. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(X)$, então*

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(X)}=1} \int_X f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Demonstração. A desigualdade de Hölder implica

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}(X)}=1} \int_X f(x) \overline{g(x)} dx \leq \|f\|_{L^p}.$$

Por outro lado, o Teorema de Hahn-Banach garante que existe $g_0 \in L^{p'}(X)$ tal que

$$\|f\|_{L^p} = \int_X f(x) \overline{g_0(x)} dx,$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 2.15. *Sejam $p, q \in [1, \infty]$, p', q' seus expoentes conjugados, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis. Se $f \in L^q(Y : L^p(X))$, então*

$$\|f\|_{L_Y^q L_X^p} = \sup_{\|g\|_{L_Y^{q'} L_X^{p'}}=1} \int_Y \int_X f(x, y) \overline{g(x, y)} dx dy.$$

Demonstração. Utilizando o fato que o dual de $L^q(Y: L^p(X))$ é $L^{q'}(Y: L^{p'}(X))$ (Veja J. Diestel e J.J. Uhl [8], página 98, Teorema 1.), a demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.14. \square

Proposição 2.16 (Desigualdade Integral de Minkowski). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ espaços mensuráveis e $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $f_y \in L^p(X)$ para todo $y \in Y$ e $\|\int_Y |f(\cdot, y)| dy\|_{L^p} < \infty$. Então*

$$\left\| \int_Y |f(\cdot, y)| dy \right\|_{L^p} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} dy.$$

Demonstração. Se $p = 1$ a desigualdade segue imediatamente do Teorema de Fubini. Se $p = \infty$,

$$\left\| \int_Y |f(\cdot, y)| dy \right\|_{L^\infty} = \sup_X \left| \int_Y |f(x, y)| dy \right| \leq \int_Y \sup_X |f(x, y)| dy = \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^\infty} dy.$$

Agora tome $1 < p < \infty$. A Proposição 2.14, o Teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder nos permitem escrever

$$\begin{aligned} \left\| \int_Y |f(\cdot, y)| dy \right\|_{L^p} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_X g(x) \int_Y |f(x, y)| dy dx \\ &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_Y \int_X g(x) |f(x, y)| dx dy \\ &\leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} dy \\ &= \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} dy. \end{aligned}$$

\square

Teorema 2.17 (Riesz-Thorin). *Sejam $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1, T$ um operador linear contínuo de $L^{p_0}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{q_0}(\mathbb{R}^3)$ com norma M_0 e de $L^{p_1}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{q_1}(\mathbb{R}^3)$ com norma M_1 . Então T é contínuo de $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^3)$ com norma M_θ tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (2.4.1)$$

Demonstração. Veja F. Linares e G. Ponce [30], página 26, Teorema 2.1. \square

Teorema 2.18 (Desigualdade de Young). *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$, com $p, q \in [1, \infty]$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Então, a convolução $f * g$ pertence a $L^r(\mathbb{R}^3)$, onde $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Além disso,*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Fixemos $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ e consideremos $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ arbitrária. Pela Proposição 2.16 e pela invariância por translações da norma,

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \int_{\mathbb{R}^3} \|g(\cdot - y)f(y)\|_{L^q} dy = \|g\|_{L^q} \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)| dy = \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^1}.$$

Por outro lado, a desigualdade de Hölder nos dá

$$\|f * g\|_{L^\infty} = \sup |f * g(x)| \leq \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q}.$$

Podemos então aplicar o Teorema de Riesz-Thorin ao operador de convolução com g , que, como vimos, tem norma limitada por $\|g\|_{L^q}$ em ambos os espaços, para obter

$$\frac{\|f * g\|_{L^r}}{\|f\|_{L^p}} \leq \sup_{f \in L^p} \frac{\|f * g\|_{L^r}}{\|f\|_{L^p}} \leq \|g\|_{L^q}^{1-\theta} \|g\|_{L^q}^\theta = \|g\|_{L^q},$$

onde $1/p = (1 - \theta) + \theta/q' = 1 - \theta/q$ e

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \theta}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1 - \theta}{q} - 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1.$$

□

Definição 2.19. Para $0 < \alpha < n$, definimos o Potencial de Riesz de ordem α , denotado I_α , por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy = k_\alpha * f, \quad (2.4.2)$$

onde $k_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$.

Teorema 2.20 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sejam $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ tais que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então o Potencial de Riesz (2.4.2) está bem-definido para quase todo x em \mathbb{R}^n e, se $p > 1$, vale*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p} \quad (2.4.3)$$

Demonstração. Veja F. Linares e G. Ponce [30], página 35, Teorema 2.6. □

Definição 2.21. Definimos a derivada fracionária de ordem $s \in \mathbb{R}$ por

$$D^s f := \left((2\pi|\xi|)^s \widehat{f} \right)^\vee.$$

Lema 2.22. *Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ com $0 < s < 3/p$, então $f \in L^r(\mathbb{R}^3)$, onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{s}{3}$, e*

$$\|f\|_{L^r} \lesssim \|D^s f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}}.$$

Em particular, se $p = 2$,

$$\|f\|_{L^r} \lesssim \|D^s f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{H^s}. \quad (2.4.4)$$

Demonstração. Observe que

$$D^s f = g \iff f = D^{-s} g = c (|\xi|^{-s} \widehat{g})^\vee = c k_s * g = c I_s g,$$

pois $(|\xi|^{-s})^\vee = k_s$ (veja F. Linares e G. Ponce [30], exercício 1.14). Então pelo Teorema 2.20,

$$\|f\|_{L^r} = c \|I_s g\|_{L^r} \lesssim \|g\|_{L^p} = \|D^s f\|_{L^p} \|f\|_{W^{s,p}}.$$

□

Definição 2.23. Denotamos por $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ o subespaço das funções radiais $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Lema 2.24. Se $f \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$, então

$$\| |x|f \|_{L_x^\infty} \lesssim \|f\|_{H^1}. \quad (2.4.5)$$

Demonstração. Usamos o Teorema Fundamental do Cálculo e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para estimar

$$\begin{aligned} \| |x|f \|^2 &= -|x|^2 \int_{|x|}^{\infty} \partial_r (\overline{f(r)} f(r)) dr = -2|x|^2 \operatorname{Re} \int_{|x|}^{\infty} \overline{f(r)} \partial_r f(r) dr \\ &\leq -2 \operatorname{Re} \int_{|x|}^{\infty} r \overline{f(r)} r \partial_r f(r) dr \\ &\leq 2 \left(\int_{|x|}^{\infty} r^2 |f(r)|^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_{|x|}^{\infty} r^2 |\partial_r f(r)|^2 dr \right)^{1/2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,|x|)} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,|x|)} |\nabla f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

onde utilizamos que $|f(r)| \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, que $|\partial_r f| = |\nabla f|$ e que a área da casca esférica de raio r é $4\pi r^2$.

Daí,

$$\| |x|f \|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla f\|_{L^2}^{1/2} \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

□

Teorema 2.25. Seja $f \in W^{s,p}$. Se $s > 3/p$, então $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e

$$\|f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}}.$$

Demonstração. Veja F. Demengel e G. Demengel [7], página 210, Teorema 4.47. □

2.4.1 O Grupo Unitário e as Estimativas de Strichartz

Veremos agora resultados acerca do grupo unitário de Schrödinger $\{e^{it\Delta}\}_{t \in \mathbb{R}}$, que aparece naturalmente, por meio do método da transformada de Fourier, como a solução $e^{it\Delta}u_0$ do PVI linear com dado inicial u_0 associado ao PVI não-linear (1.0.1). Dentre os resultados, veremos as estimativas de Strichartz, que constituem uma ferramenta de interpolação de espaços L^p que é fundamental para a demonstração dos resultados de boa colocação e de espalhamento ao longo do texto. Recordemos que, por definição,

$$e^{it\Delta}f(x) := \frac{e^{-|x|^2/4it}}{(4\pi it)^{3/2}} * f(x) = \left(e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \widehat{f} \right)^\vee(x).$$

Proposição 2.26. *Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $t, t' \in \mathbb{R}$.*

1. $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ é uma isometria.
2. $e^{i0\Delta} = I$.
3. $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$, em particular $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta}$.
4. $(e^{it\Delta})^* = e^{-it\Delta}$.
5. Fixada f , a função $t \mapsto e^{it\Delta}f$ é contínua.

Demonstração. Pela identidade de Plancherel-Parseval (Teorema 2.5, item 3), temos

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\Delta}f(x) \overline{e^{it\Delta}f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{4\pi^2 it |\xi|^2} \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi = \|f\|_{L^2}^2.$$

Além disso, um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned} e^{it\Delta}(e^{it'\Delta}f)(x) &= \left(e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \widehat{e^{it'\Delta}f} \right)^\vee(x) = \left(e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} e^{-4\pi^2 it' |\xi|^2} \widehat{f} \right)^\vee(x) \\ &= \left(e^{-4\pi^2 i(t+t') |\xi|^2} \widehat{f} \right)^\vee(x) = e^{i(t+t')\Delta}f(x). \end{aligned}$$

Novamente pela identidade de Plancherel-Parseval,

$$\begin{aligned} \langle e^{it\Delta}f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e^{4\pi^2 it |\xi|^2} \widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \overline{e^{-it\Delta}g(x)} dx = \langle f, e^{-it\Delta}g \rangle. \end{aligned}$$

Resta demonstrar a continuidade temporal do operador. Para isto, observe que, pela linearidade da Transformada de Fourier e pela identidade de Plancherel-Parseval,

$$\|e^{it\Delta}f - e^{it'\Delta}f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} - e^{-4\pi^2 it' |\xi|^2} \right) \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi.$$

Tome $t_n \rightarrow t$ e defina

$$f_n(\xi) = \left| e^{-4\pi^2 it |\xi|^2} - e^{-4\pi^2 it_n |\xi|^2} \right|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Temos $f_n \rightarrow 0$ pontualmente e $|f_n(\xi)| \leq 4|\widehat{f}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. O Teorema da Convergência Dominada garante, portanto, que

$$\|e^{it\Delta} f - e^{it_n\Delta} f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f_n(\xi) d\xi \rightarrow 0.$$

□

Teorema 2.27. *O operador $e^{it\Delta}$ é diferenciável em $t = 0$, com derivada $i\Delta$. Em outras palavras, seja $\Phi_f: \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ definido por $\Phi_f(t) = e^{it\Delta} f$, então Φ_f é diferenciável em $t = 0$ e*

$$\partial_t \Phi_f(0) = i\Delta f.$$

Este teorema é um caso particular do Teorema de Stone para grupos unitários, cuja demonstração pode ser encontrada em K. Yosida [39], página 345, Teorema 1.

A majoração para o grupo dada pela próxima proposição é chamada na literatura de estimativa dispersiva.

Proposição 2.28. *Se $t \neq 0$, $1/p + 1/p' = 1$ e $p' \in [1, 2]$, então o operador $e^{it\Delta}: L^{p'}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ é contínuo e*

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^p} \lesssim |t|^{-\frac{3}{2}(1/p' - 1/p)} \|f\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Se $p = \infty$, pelo Teorema 2.18, podemos escrever

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty} := \left\| \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{3/2}} * f(\cdot) \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{3/2}} \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \lesssim |t|^{-3/2} \|f\|_{L^1}.$$

Além disso, já sabemos que $e^{it\Delta}: L^2 \rightarrow L^2$ é uma isometria e, portanto, a proposição está demonstrada para $p' = 1, 2$. Para $p' \in (1, 2)$ utilizamos o Teorema de Riesz-Thorin 2.17 para obter

$$\sup_{f \in L^{p'}} \frac{\|e^{it\Delta} f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^{p'}}} \lesssim \sup_{\|f\|_{L^1}=1} \|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty}^{1-\theta} \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \|e^{it\Delta} f\|_{L^2}^\theta \lesssim (|t|^{-3/2})^{1-\theta},$$

onde $1/p = \theta/2$ e $1/p' = 1 - \theta + \theta/2$, isto é, $1 - \theta = 1/p' - 1/p$. □

Definição 2.29. *Dizemos que o par $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ é admissível se*

$$\begin{cases} 2 \leq p \leq 6, \\ \frac{2}{q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{p}. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Teorema 2.30 (Estimativas de Strichartz). *Seja (p, q) um par admissível. Para $t \in \mathbb{R}$ e $t_0 \leq t$, o operador $e^{it\Delta}$ satisfaz*

$$1. \quad \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|f\|_{L^2}. \quad (2.4.7)$$

$$2. \quad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}. \quad (2.4.8)$$

$$3. \quad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}. \quad (2.4.9)$$

$$4. \quad \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}. \quad (2.4.10)$$

Além disso, todas as desigualdades acima são equivalentes.

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar (2.4.8), depois vamos demonstrar que todas as estimativas são equivalentes. Observe que, pela Proposição 2.16,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}} \left\| e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') \right\|_{L^p} dt'$$

e pelo Lema 2.28, se $\alpha = (3/p' - 3/p)/2$,

$$\left\| e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') \right\|_{L^p} \lesssim |t - t'|^{-\alpha} \|g(\cdot, t')\|_{L^{p'}}.$$

Então pelo Teorema 2.20,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} &\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|g(\cdot, t')\|_{L^{p'}}}{|* - t'|^{1-(1-\alpha)}} dt' \right\|_{L^q} \\ &= \left\| I_{1-\alpha} \|g\|_{L_x^{p'}}(t) \right\|_{L^q} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}, \end{aligned}$$

desde que $0 < 1-\alpha < 1$ e $1/q = 1/q' - (1-\alpha)$. Utilizando as identidades $1/q' = 1 - 1/q$ e $1/p' = 1 - 1/p$, vemos que estas condições sobre α , q e q' são equivalentes a $2 < p < 6$ e $2/q = 3/2 - 3/p$. Resta demonstrar a identidade para os pares extremos $(2, \infty)$ e $(6, 2)$. A demonstração do caso em que $p = 6$ foi feita por M.Keel e T.Tao [29] e por ser mais delicada, a omitimos. Agora se $p = 2$, basta aplicar a desigualdade de Minkowski e a propriedade de isometria em $L^2(\mathbb{R}^3)$ do grupo unitário de Schrödinger.

(2.4.9) \implies (2.4.7). Observe que, pelo Corolário 2.15,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p} = \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\Delta} f(x) g(x, t) dx dt \right\}.$$

Pelo Teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\Delta} f(x) g(x, t) dx dt \right\} &= \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt dx \right\} \\ &\leq \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \|f\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt \right\|_{L^2} \\ &\lesssim \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

(2.4.7) \implies (2.4.9). Analogamente, como pela identidade de Plancherel-Parseval

$$e^{it\Delta} g(x, t) f(x) = e^{it\Delta} f(x) g(x, t),$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right\|_{L^2} &= \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{it\Delta} f(x) g(x, t) dx dt \right\} \\ &\leq \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta} f(x)\|_{L^p} \|g(\cdot, t)\|_{L^{p'}} dt \right\} \\ &\leq \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p} \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \\ &\lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}. \end{aligned}$$

(2.4.8) \implies (2.4.9). Como $\overline{e^{it\Delta}} = e^{-it\Delta}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it'\Delta} g(\cdot, t') dt' \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} g(x, t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} \overline{g(x, t')} dt' dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|g\|_{L_x^{p'}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} \overline{g(x, t')} dt' \right\|_{L_x^p} dt \\ &\leq \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} \overline{g(x, t')} dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} \\ &\lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}^2. \end{aligned}$$

(2.4.9) \implies (2.4.8). Temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} &= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} h(x, t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(x, t') dt' dx dt \right\} \\ &= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(x, t) dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it'\Delta} g(x, t') dt' \right) dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(\cdot, t) dt \right\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-it'\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L^2} \right\} \\
&\lesssim \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \right\} \\
&\lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}.
\end{aligned}$$

(2.4.8) \implies (2.4.10). Basta aplicar (2.4.8) à função $h(x, t') = g(x, t')\chi_{(t_0, t)}(t')$. De fato, temos

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} = \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(*-t')\Delta} h(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}.$$

Como t_0, t são arbitrários, a recíproca é imediata. \square

Corolário 2.31. *Sejam $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$ pares admissíveis e $I = [0, T]$ ou \mathbb{R} . Então*

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'_0} L_x^{p'_0}}. \quad (2.4.11)$$

Demonstração. Primeiro observe que, pela propriedade de isometria em $L^2(\mathbb{R}^3)$ de $e^{it\Delta}$ e por (2.4.9), se $h(x, t') = g(x, t')\chi_{[t_0, t]}(t')$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^\infty L_x^2} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| e^{it\Delta} \int_{t_0}^t e^{-it'\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^2} \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-it'\Delta} h(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^2} \\
&\lesssim \|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}} \lesssim \|g\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}.
\end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Suponha sem perda de generalidade que $2 \leq p_0 \leq p_1$. Pelo Teorema 2.17 aplicado à inclusão,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^{q_0} L_x^{p_0}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^2}^{q_0(1-\theta)} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^{p_1}}^{q_0\theta} dt \right)^{1/q_0} \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^2}^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_x^{p_1}}^{q_0\theta} dt \right)^{1/q_0} \\
&= \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^{1-\theta} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^{q_0\theta} L_x^{p_1}}^\theta, \quad (2.4.13)
\end{aligned}$$

com a condição de que

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p_1} \iff \theta = \frac{p_1(2-p_0)}{p_0(2-p_1)}.$$

Agora observe que, como os pares (p_0, q_0) e (p_1, q_1) são admissíveis, de (2.4.6) segue que $p_i = (3q_i - 4)/6q_i$, logo, substituindo na equação para θ , temos $q_1 = q_0\theta$. Com esta observação, (2.4.12) e (2.4.10), a estimativa (2.4.13) se torna

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_T^{q_0} L_x^{p_0}} \\ & \leq \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^{1-\theta} \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}}^\theta \\ & \lesssim \|g\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}^{1-\theta} \|g\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}^\theta = \|g\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Finalmente, utilizando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Fubini, estimamos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} \\ & = \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} h(x, t) \int_{t_0}^t e^{i(t-t')\Delta} g(x, t') dt' dx dt \right\} \\ & \leq \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\{ \int_{t_0}^\infty \int_{\mathbb{R}^3} g(x, t') \int_{t'}^\infty e^{i(t-t')\Delta} h(x, t) dt dx dt' \right\} \\ & \quad + \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\{ \int_{-\infty}^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, t') \int_{-\infty}^{t'} e^{i(t-t')\Delta} h(x, t) dt dx dt' \right\} \\ & \lesssim \|g\|_{L_{(t_0, \infty)}^{q'_0} L_x^{p'_0}} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\| \int_{t'}^\infty e^{i(t-t')\Delta} h(x, t) dt \right\|_{L_{(t_0, \infty)}^{q_0} L_x^{p_0}} \\ & \quad + \|g\|_{L_{(-\infty, t_0)}^{q'_0} L_x^{p'_0}} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\| \int_{-\infty}^{t'} e^{i(t-t')\Delta} h(\cdot, t) dt \right\|_{L_{(-\infty, t_0)}^{q_0} L_x^{p_0}} \\ & \lesssim \|g\|_{L_t^{q'_0} L_x^{p'_0}} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \|h\|_{L_t^{q'_1} L_x^{p'_1}} \\ & = \|g\|_{L_t^{q'_0} L_x^{p'_0}}, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

onde na última desigualdade majoramos a norma temporal em (t_0, ∞) e em $(-\infty, t_0)$ pela norma em \mathbb{R} e depois utilizamos a estimativa (2.4.14), que podemos verificar que é ainda válida quando substituimos o domínio de integração (t_0, t) por $(-\infty, t')$ ou

(t', ∞) e trocamos o operador de Schrödinger pelo seu conjugado. Observe ainda que a simetria entre (2.4.14) e (2.4.15) justifica não perdermos generalidade ao supor que $2 \leq p_0 \leq p_1$ no início da demonstração. Assim obtemos a desigualdade para $I = \mathbb{R}$, para obter a desigualdade no intervalo $[0, T]$ basta repetir o argumento em (2.4.12), (2.4.13) e (2.4.14) com o termo $\chi_{[0, T]}(t)$ e observar que, assim como em (2.4.15),

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t e^{i(*-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{L_T^{q_1} L_x^{p_1}} \\ & \leq \sup_{\|h\|_{L_T^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\{ \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^3} g(x, t') \int_{t'}^T e^{i(t-t')\Delta} h(x, t) dt dx dt' \right\} \\ & \quad + \sup_{\|h\|_{L_T^{q'_1} L_x^{p'_1}}=1} \left\{ \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, t') \int_0^{t'} e^{i(t-t')\Delta} h(x, t) dt dx dt' \right\} \\ & \lesssim \|g\|_{L_T^{q'_0} L_x^{p'_0}}. \end{aligned}$$

□

Observação. Note que se a estimativa (2.4.7) é válida para um par (p, q) (e consequentemente, todas as estimativas do Teorema 2.30), então a relação $\frac{2}{q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{p}$ deve ser satisfeita. Com efeito, considere o *scaling* $f_\lambda(x) := \lambda^{3/2} f(\lambda x)$ e observe que a norma L^2 é preservada, i.e., $\|f\|_{L^2} = \|f_\lambda\|_{L^2}$. A estimativa (2.4.7) nos dá então, para todo $\lambda > 0$,

$$\|e^{it\Delta} f_\lambda\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

Por outro lado,

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \lambda^{3/2} \lambda^{-3} \widehat{f}(\xi/\lambda) = \lambda^{-3/2} \widehat{f}(\xi/\lambda),$$

logo,

$$e^{it\Delta} f_\lambda(x) = \lambda^{-3/2} \left(e^{-4\pi^2 it \lambda^2 |\xi/\lambda|^2} \widehat{f}(\xi/\lambda) \right)^\vee(x) = \lambda^{3/2} \left(e^{-4\pi^2 it \lambda^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(\lambda x).$$

Calculando a norma L^p no espaço, temos

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f_\lambda\|_{L_x^p} &= \lambda^{3/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(e^{-4\pi^2 it \lambda^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(\lambda x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \frac{\lambda^{3/2}}{\lambda^{3/p}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(e^{-4\pi^2 it \lambda^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Pondo $g(\lambda^2 t) := \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(e^{-4\pi^2 it \lambda^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$ e calculando a norma L^q no tempo, temos

$$\|e^{it\Delta} f_\lambda\|_{L_t^q L_x^p} = \lambda^{3/2-3/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda^2 t)|^q dt \right)^{1/q} = \lambda^{3/2-3/p-2/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

$$= \lambda^{3/2-3/p-2/q} \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p}.$$

Assim, concluímos que, para todo $\lambda > 0$,

$$\lambda^{3/2-3/p-2/q} \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p} \lesssim \|f\|_{L^2},$$

o que força que o expoente de λ seja nulo, i.e.,

$$\frac{2}{q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{p},$$

como em (2.4.6).

Lema 2.32. *Se $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$, então $e^{it\Delta} f \in L^4(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^3))$ e vale*

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L_t^4 L_x^\infty} \lesssim \|\nabla f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{H^1}$$

A demonstração do Lema 2.32 faz uso da decomposição de Littlewood-Paley e iremos omiti-la. Veja T. Tao [35], Lema 3.1.

2.5 A Equação Elíptica

Nesta seção demonstraremos as identidades de Pohozaev, que relacionam massa e energia das soluções da seguinte equação elíptica

$$\Delta\psi - \psi + \psi^3 = 0. \tag{2.5.1}$$

Como veremos posteriormente, foi demonstrado por M. Weinstein [37] que o *ground state* desta equação, isto é, a solução de menor massa, está intimamente ligada à constante ótima para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.2.2).

Definição 2.33. *Uma função $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca da equação $\Delta\psi(x) = g(\psi(x))$ se para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,*

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(\psi(x))\varphi(x)dx.$$

Teorema 2.34. *Seja $0 \neq \psi$ uma solução fraca real da equação (2.5.1), então $\psi \in W^{3,p}(\mathbb{R}^3)$ para todo $2 \leq p < \infty$. Em particular, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ é uma solução forte e para todo multi-índice β tal que $|\beta| \leq 2$,*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |D^\beta\psi(x)| = 0.$$

Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$e^{\varepsilon|x|}(|\psi(x)| + |\nabla\psi(x)|) \in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Este teorema de regularidade de soluções é um caso particular do Teorema 8.1.1, página 256, de T. Cazenave [6] e justifica a convergência das integrais na próxima proposição.

Proposição 2.35 (Identidades de Pohozaev). *Se $\psi \in H^1$ é solução real da equação elíptica (2.5.1), então valem as seguintes identidades*

$$\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 = 3\|\psi\|_{L^2}^2, \quad \|\psi\|_{L^4}^4 = 4\|\psi\|_{L^2}^2. \quad (2.5.2)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.5.1) por ψ e integrando por partes, temos

$$0 = \int \psi(x)\Delta\psi(x) - \psi^2(x) + \psi^4(x)dx = -\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^4}^4. \quad (2.5.3)$$

Por outro lado, multiplicando a equação pelo produto interno $x\nabla\psi := x \cdot \nabla\psi$, segue que

$$\int x\nabla\psi(x)\Delta\psi(x) - \psi(x)x\nabla\psi(x) + \psi^3(x)x\nabla\psi(x)dx = 0$$

e, pela regra de Leibniz e integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int x\nabla\psi\Delta\psi dx &= \int \sum_{i,j=1}^3 x_j\partial_j\psi\partial_i^2\psi dx = -\sum_{i,j=1}^3 \int \partial_i(x_j\partial_j\psi)\partial_i\psi dx \\ &= -\int |\nabla\psi|^2 - \sum_{i,j=1}^3 x_j\partial_{i,j}\psi\partial_i\psi dx \\ &= -\int |\nabla\psi|^2 dx - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 \int \partial_j(|\nabla\psi|^2)x_j dx \\ &= -\int |\nabla\psi|^2 dx + \frac{3}{2}\int |\nabla\psi|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int \psi x\nabla\psi dx &= -\int \psi x\nabla\psi dx - 3\int \psi^2 dx \\ \Rightarrow \int \psi x\nabla\psi dx &= -\frac{3}{2}\|\psi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int \psi^3 x\nabla\psi dx = -\frac{3}{4}\|\psi\|_{L^4}^4.$$

Obtemos então que

$$\frac{1}{2} \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} \|\psi\|_{L^4}^4 = 0. \quad (2.5.4)$$

Combinando as equações (2.5.3) e (2.5.4), obtemos o resultado. \square

Estamos interessados em utilizar essas identidades para o *ground state* ϕ da equação (2.5.1). Veremos no capítulo 4 que, de fato, ϕ é uma solução real.

2.6 Lemas Auxiliares

Lema 2.36. *Se $f, g \in H^1(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\left| |f|^2 f - |g|^2 g \right| \lesssim (|f|^2 + |g|^2) |f - g| \quad (2.6.1)$$

e

$$|\nabla(|f|^2 f - |g|^2 g)| \lesssim |\nabla f| |f + g| |f - g| + |g|^2 |\nabla(f - g)|. \quad (2.6.2)$$

Demonstração. Vamos demonstrar (2.6.2). Observe que

$$\nabla(|f|^2 f - |g|^2 g) = 2(|f|^2 \nabla f - |g|^2 \nabla g) + f^2 \nabla \bar{f} - g^2 \nabla \bar{g}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| |f|^2 \nabla f - |g|^2 \nabla g \right| &= \left| \nabla f (|f|^2 - |g|^2) + |g|^2 \nabla(f - g) \right| \\ &\leq |\nabla f| \left| |f|^2 - |g|^2 \right| + |g|^2 |\nabla(f - g)| \\ &\leq |\nabla f| |f + g| |f - g| + |g|^2 |\nabla(f - g)|, \end{aligned}$$

pois $\left| |f|^2 - |g|^2 \right| = \left| |f^2| - |g^2| \right| \leq |f^2 - g^2| = |f + g| |f - g|$.

Analogamente,

$$\left| f^2 \nabla \bar{f} - g^2 \nabla \bar{g} \right| \leq |\nabla f| |f + g| |f - g| + |g|^2 |\nabla(f - g)|.$$

Assim, segue que

$$\left| \nabla(|f|^2 f - |g|^2 g) \right| \leq 3|\nabla f| |f + g| |f - g| + 3|g|^2 |\nabla(f - g)|.$$

Para demonstrar (2.6.1), veja que por um procedimento análogo obtemos

$$\left| |f|^2 f - |g|^2 g \right| \lesssim (|f|(|f| + |g|) + |g|^2) |f - g| \lesssim (|f|^2 + |g|^2) |f - g|,$$

pois $|f||g| \leq |f|^2 + |g|^2$. \square

Lema 2.37. *Seja $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Então $|\nabla|f(x)|| \leq |\nabla f(x)|$.*

Demonstração. Basta notar que

$$\nabla|f| = \nabla [(f\bar{f})^{1/2}] = \frac{1}{2} \frac{(\bar{f})^{1/2} \nabla f}{f^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{f^{1/2} \nabla \bar{f}}{\bar{f}^{1/2}}.$$

Tomando o módulo na última equação e utilizando a desigualdade triangular, temos o resultado. \square

Lema 2.38. *Se $f, |\nabla g|, |\nabla h| \in L^{12/5}$, então $fgh \in L^{12/7}$ e vale*

$$\|fgh\|_{L^{12/7}} \lesssim \|f\|_{L^{12/5}} \|\nabla g\|_{L^{12/5}} \|\nabla h\|_{L^{12/5}}$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|fgh\|_{L^{12/7}} \leq \|f\|_{L^{12/5}} \|g\|_{L^{12}} \|h\|_{L^{12}}.$$

Pelo Lema 2.22, com $p = 12/5$ e, portanto, $s = 1$, $\|g\|_{L^{12}} \lesssim \|\nabla g\|_{L^{12/5}}$ e $\|h\|_{L^{12}} \lesssim \|\nabla h\|_{L^{12/5}}$, de onde segue o resultado. \square

Capítulo 3

Boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^3)$

Nesta seção, seguindo F. Linares e G. Ponce [30], demonstramos que o problema de valor inicial (1.0.1) está bem colocado no espaço de energia.

3.1 A Fórmula de Duhamel

Para justificar a nossa definição de solução, primeiro vejamos que toda solução clássica da equação de Schrödinger (1.0.1) de fato satisfaz a fórmula de Duhamel (1.0.2).

Sejam $u \in C^1([0, T]: C^2(\mathbb{R}^3))$ uma solução clássica de (1.0.1) e $\Psi(s) = e^{i(t-s)\Delta}u$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(s+h) - \Psi(s)}{h} &= \frac{e^{i(t-s-h)\Delta}u(s+h) - e^{i(t-s-h)\Delta}e^{ih\Delta}u(s)}{h} \\ &= e^{i(t-s-h)\Delta} \left(\frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{e^{ih\Delta}u(s) - u(s)}{h} \right). \end{aligned}$$

Logo, a continuidade de $e^{it\Delta}$ e o Teorema 2.27 garantem que

$$\Psi'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(s+h) - \Psi(s)}{h} = e^{i(t-s)\Delta}(\partial_s u(s) - i\Delta u) = ie^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^2 u(s).$$

Integrando de 0 a t , temos

$$u(t) - e^{it\Delta}u_0 = \int_0^t \Psi'(s)ds = i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^2 u(s)ds,$$

como queríamos. Portanto, a nossa definição de solução generaliza a noção de solução clássica da equação diferencial. Para maiores informações, como sob quais hipóteses a recíproca é verdadeira, veja F. Linares e G. Ponce [30], página 96.

3.2 Boa Colocação Local

Teorema 3.1. *Considere o PVI (1.0.1). Então para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe $T > 0$ e uma única solução u no intervalo $[0, T]$ com*

$$u \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^8([0, T] : W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)),$$

onde a norma em $W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)$ é dada por $\|f\|_{W^{1,12/5}} := \|f\|_{L^{12/5}} + \|\nabla f\|_{L^{12/5}}$.

Além disso, para todo $T' < T$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que a função

$$\mathbb{F} : V \rightarrow C([0, T'] : H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^8([0, T'] : W^{1,12/5}(\mathbb{R}^3)), \tilde{u}_0 \mapsto \tilde{u}(t),$$

é Lipschitz.

Demonstração. Defina

$$E^1(T, a) := \{v \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^8([0, T] : L_1^{12/5}(\mathbb{R}^3)) ; \|v\|_T \leq a\}$$

Onde T e a são constantes a serem definidas posteriormente e

$$\|v\|_T := \|v\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|\nabla v\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v\|_{L_T^8 L_x^{12/5}} + \|\nabla v\|_{L_T^8 L_x^{12/5}}.$$

Vamos demonstrar que

$$\Phi(u)(x, t) := e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} (|u|^2 u)(t') dt'$$

está bem-definida e é uma contração em $E^1(T, a)$, daí o resultado segue do Teorema de Ponto Fixo de Banach, pois $E^1(T, a)$ é uma bola fechada em um espaço de Banach, sendo portanto um espaço métrico completo.

Vamos ver que Φ está bem definida.

Como o operador $e^{it\Delta}$ comuta com o gradiente e preserva a norma L^2 ,

$$\begin{aligned} \sup_{[0, T]} \|\Phi(u)\|_{H^1} &\leq \|u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2} + \sup_{[0, T]} \left\{ \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} (|u|^2 u)(t') dt' \right\|_{L_x^2} \right\} \\ &\quad + \sup_{[0, T]} \left\{ \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} \nabla (|u|^2 u)(t') dt' \right\|_{L_x^2} \right\} \\ &\leq c \left(\|u_0\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2} + \left\| |u|^2 u \right\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}} + \left\| \nabla (|u|^2 u) \right\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}} \right), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos a estimativa de Strichartz (2.4.11).

Analogamente, utilizando (2.4.7) para cotar o primeiro termo de Φ e (2.4.11) para cotar o segundo,

$$\|\Phi(u)\|_{L_T^8 L_x^{12/5}} \leq c \|u_0\|_{L^2} + c \||u|^2 u\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}}$$

e

$$\|\nabla\Phi(u)\|_{L_T^8 L_x^{12/5}} \leq c \|\nabla u_0\|_{L^2} + c \|\nabla(|u|^2 u)\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}}.$$

Para majorar o termo não-linear, observe que pelo Lema 2.36, com $f = u$ e $g = 0$, temos,

$$|\nabla(|u|^2 u)| \leq c|u|^2 |\nabla u|,$$

assim, pelo Lema 2.38, com $f = |\nabla u|$ e $g = h = u$,

$$\|\nabla(|u|^2 u)\|_{L_x^{12/7}} \leq c \||u|^2 \nabla u\|_{L_x^{12/7}} \leq c \|\nabla u\|_{L_x^{12/5}}^3$$

e de maneira análoga,

$$\||u|^2 u\|_{L_x^{12/7}} \leq c \|u\|_{L_x^{12/5}} \|\nabla u\|_{L_x^{12/5}}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \||u|^2 u\|_{L_x^{12/7}} + \|\nabla(|u|^2 u)\|_{L_x^{12/7}} &\leq c \|\nabla u\|_{L_x^{12/5}}^2 \left(\|u\|_{L_x^{12/5}} + \|\nabla u\|_{L_x^{12/5}} \right) \\ &\leq c \|u\|_{L_x^{12/5}}^3 + c \|\nabla u\|_{L_x^{12/5}}^3. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\||u|^2 u\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}} + \|\nabla(|u|^2 u)\|_{L_T^{8/7} L_x^{12/7}} \leq c \|u\|_{L_T^{24/7} L_x^{12/5}}^3 + c \|\nabla u\|_{L_T^{24/7} L_x^{12/5}}^3.$$

Agora, pela desigualdade de Hölder na variável temporal, com $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{24/7} - \frac{1}{8}$, isto é, com $\gamma = 6$, que

$$\|u\|_{L_T^{24/7} L_x^{12/5}} \leq T^{1/6} \|u\|_{L_T^8 L_x^{12/5}}$$

e

$$\|\nabla u\|_{L_T^{24/7} L_x^{12/5}} \leq T^{1/6} \|\nabla u\|_{L_T^8 L_x^{12/5}}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_T &\leq c \|u_0\|_{H^1} + c\sqrt{T} \left(\|u\|_{L_T^8 L_x^{12/5}}^3 + \|\nabla u\|_{L_T^8 L_x^{12/5}}^3 \right) \\ &\leq c \|u_0\|_{H^1} + c\sqrt{T} \|u\|_T^3 \end{aligned}$$

Então escolhendo $a = 2c \|u_0\|_{H^1}$, como $u \in E^1(T, a)$, temos

$$\|\Phi(u)\|_T \leq \frac{a}{2} + \sqrt{T}a^3 \leq a \Leftrightarrow T \leq \frac{1}{ca^4} = \frac{1}{c\|u_0\|_{H^1}^4}.$$

Tomando

$$T \leq \frac{1}{c\|u_0\|_{H^1}^4} \quad (3.2.1)$$

segue que $\Phi : E^1(T, a) \rightarrow E^1(T, a)$ está bem-definida.

Mostraremos agora que Φ é uma contração. De fato, analogamente ao que já fizemos, segue das estimativas de Strichartz que dadas $u, v \in E^1(T, a)$,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_T \leq c\| |u|^2u - |v|^2v \|_{L_T^{8/7}L_x^{12/7}} + c\|\nabla(|u|^2u - |v|^2v)\|_{L_T^{8/7}L_x^{12/7}}.$$

Para cotar o segundo termo, observe que, pelo Lema 2.36,

$$|\nabla(|u|^2u - |v|^2v)| \leq 3|\nabla u||u + v||u - v| + 3|v|^2|\nabla(u - v)|.$$

Portanto pelo Lema 2.38,

$$\begin{aligned} \|\nabla(|u|^2u - |v|^2v)\|_{L_x^{12/7}} &\leq c\|\nabla(u - v)\|_{L_x^{12/5}} \left(\|\nabla u\|_{L_x^{12/5}} \|\nabla(u + v)\|_{L_x^{12/5}} + \|\nabla v\|_{L_x^{12/5}}^2 \right) \\ &\leq c\|\nabla(u - v)\|_{L_x^{12/5}} \left(\|\nabla u\|_{L_x^{12/5}} + \|\nabla v\|_{L_x^{12/5}} \right)^2 \\ &\leq c\|\nabla(u - v)\|_{L_x^{12/5}} \left(\|\nabla u\|_{L_x^{12/5}}^2 + \|\nabla v\|_{L_x^{12/5}}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Logo, pela desigualdade de Hölder na variável t ,

$$\|\nabla(|u|^2u - |v|^2v)\|_{L_T^{8/7}L_x^{12/7}} \leq c\sqrt{T} \left(\|\nabla u\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 + \|\nabla v\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 \right) \|\nabla(u - v)\|_{L_T^8L_x^{12/5}},$$

e de maneira análoga,

$$\||u|^2u - |v|^2v\|_{L_T^{8/7}L_x^{12/7}} \leq c\sqrt{T} \left(\|\nabla u\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 + \|\nabla v\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 \right) \|u - v\|_{L_T^8L_x^{12/5}}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_T &\leq c\sqrt{T} \left(\|\nabla u\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 + \|\nabla v\|_{L_T^8L_x^{12/5}}^2 \right) \\ &\quad \times \left(\|u - v\|_{L_T^8L_x^{12/5}} + \|\nabla(u - v)\|_{L_T^8L_x^{12/5}} \right) \\ &\leq ca^2\sqrt{T} \left(\|u - v\|_{L_T^8L_x^{12/5}} + \|\nabla(u - v)\|_{L_T^8L_x^{12/5}} \right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\leq ca^2\sqrt{T}\|u - v\|_T. \quad (3.2.4)$$

Escolhendo

$$T < \frac{1}{c^2 a^4} = \frac{1}{c^2 \|u_0\|_{H^1}^4} \quad (3.2.5)$$

e satisfazendo a condição (3.2.1), segue de (3.2.3) que Φ é uma contração em $E^1(T, a)$.

□

Capítulo 4

Boa colocação Global e Explosão

Neste capítulo demonstramos que sob certas condições a existência de soluções globais, assim como de soluções que explodem em tempo finito, para o PVI (1.0.1) estão intimamente relacionadas à constante ótima C para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^4}^4 \leq C \|\nabla f\|_{L^2}^3 \|f\|_{L^2}. \quad (4.0.1)$$

4.1 Decomposição em Perfis e Identidade Virial

No que se segue, provamos dois resultados úteis na demonstração do Teorema principal deste capítulo. O Lema 4.1 nos dá uma espécie de decomposição ortogonal para sequências em H^1 e é peça chave para encontrar a contante ótima da desigualdade (4.0.1), já a Proposição 4.3 é fundamental na demonstração da explosão em tempo finito da norma H^1 da solução u de (1.0.1). Originalmente, o Lema 4.1 foi provado por T. Hmidi e S. Keraani [21] e a Proposição 4.3 obtida por R. T. Glassey [19].

Lema 4.1 (Profile Decomposition). *Seja $(v_n)_n$ uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Então existem uma subsequência de $(v_n)_n$ (ainda denotada por $(v_n)_n$), uma família $\{(x_n^j)_n\}_j$ de sequências em \mathbb{R}^3 , e uma sequência de funções $(V^j)_j$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, tais que*

1. para todo $k \neq j$,

$$|x_n^k - x_n^j| \rightarrow \infty, \quad (4.1.1)$$

quando $n \rightarrow \infty$;

2. para todo $l \geq 1$ e para todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^l V^j(x - x_n^j) + v_n^l(x), \quad (4.1.2)$$

com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n^l\|_{L^p} \rightarrow 0, \quad (4.1.3)$$

para todo $p \in (2, 6)$.

3. Além disso, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\|v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^l \|V^j(x)\|_{L^2}^2 + \|v_n^l\|_{L^2}^2 + o(1) \quad (4.1.4)$$

e

$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^l \|\nabla V^j(x)\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^l\|_{L^2}^2 + o(1). \quad (4.1.5)$$

Demonstração. Seja $\Omega(\mathbf{v})$ o conjunto dos limites fracos de subsequências das seqüências transladadas $(v_n(\cdot + x_n))_n$, isto é,

$$\Omega(\mathbf{v}) := \{V \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid \exists (x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, v_{n_k}(\cdot + x_{n_k}) \rightharpoonup V\}.$$

Observe que como $H^1(\mathbb{R}^3)$ é reflexivo (pelo Teorema de Representação de Riesz, todo espaço de Hilbert é reflexivo) e $\mathbf{v} = (v_n)_n$ é limitada, então para toda seqüência $(x_n)_n$ em \mathbb{R}^3 , existe uma subsequência de $(v_n(\cdot + x_n))_n$ que converge para alguma $V \in H^1$ na topologia fraca (veja H. Brezis [3], Capítulo 3, página 55).

Seja $\eta(\mathbf{v}) := \sup\{\|V\|_{H^1} ; V \in \Omega(\mathbf{v})\}$, e $(V_m)_m$ em $\Omega(\mathbf{v})$ tal que $\|V_m\|_{H^1} \rightarrow \eta(\mathbf{v})$. Tome então $(x_n^m)_n$ tal que $v_{n_k}(\cdot + x_{n_k}^m) \rightharpoonup V_m$, temos que $\|V_m\|_{H^1} \leq \liminf_k \|v_{n_k}(\cdot + x_{n_k}^m)\|_{H^1}$ e, portanto, observando que $n_k = n_k(m)$,

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{v}) &\leq \sup_m \liminf_k \|v_{n_k}(\cdot + x_{n_k}^m)\|_{H^1} = \sup_m \liminf_k \|v_{n_k}\|_{H^1} \\ &\leq \sup_m \limsup_k \|v_{n_k}\|_{H^1} \leq \limsup_n \|v_n\|_{H^1} < \infty. \end{aligned}$$

Primeiramente vamos demonstrar a existência de uma seqüência $(V^j)_j$ em $\Omega(\mathbf{v})$ e de uma família $\{(x_n^j)_n\}_j$ em \mathbb{R}^3 satisfazendo (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5) e

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \eta(\mathbf{v}^l) = 0, \quad (4.1.6)$$

onde $\mathbf{v}^l = (v_n^l)_n$, e finalmente utilizaremos (4.1.6) para demonstrar a afirmação (4.1.3) do lema.

Se $\eta(\mathbf{v}) = 0$, tomamos $V^j \equiv 0$, $v_n^l = v_n$, para $l \geq 1$, e o processo termina.

Suponha agora que $\eta(\mathbf{v}) > 0$, então existe $V^1 \in \Omega(\mathbf{v})$ tal que

$$\|V^1\|_{H^1} \geq \frac{\eta(\mathbf{v})}{2} > 0.$$

Por definição, existe $(x_n^1)_n$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$v_n(\cdot + x_n^1) \rightharpoonup V^1.$$

Defina

$$v_n^1 = v_n - V^1(\cdot - x_n^1), \quad (4.1.7)$$

então,

$$\|v_n^1\|_{L^2}^2 = \|v_n - V^1(\cdot - x_n^1)\|_{L^2}^2 = \|V^1\|_{L^2}^2 + \|v_n\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re} \langle v_n(\cdot + x_n^1), V^1 \rangle.$$

Como $\operatorname{Re} \langle v_n(\cdot + x_n^1), V^1 \rangle \rightarrow \|V^1\|_{L^2}^2$, segue que quando $n \rightarrow \infty$

$$\|v_n\|_{L^2}^2 = \|V^1\|_{L^2}^2 + \|v_n^1\|_{L^2}^2 + o(1) \quad (4.1.8)$$

e, analogamente,

$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \|\nabla V^1\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_n^1\|_{L^2}^2 + o(1).$$

Repetindo o processo com $\mathbf{v}^1 = (v_n^1)_n$, se $\eta(\mathbf{v}^1) = 0$, tome $V^j \equiv 0$ para $j > 1$ e $v_n^l = v_n^1$ para todo l .

Se $\eta(\mathbf{v}^1) > 0$, obtemos V^2 , $(x_n^2)_n$ e $\mathbf{v}^2 = (v_n^2)_n$ satisfazendo $\|V^2\|_{H^1} > \eta(\mathbf{v}^1)/2$, $v_n^1(\cdot + x_n^2) \rightharpoonup V^2$ e $v_n^2 = v_n^1 - V^2(\cdot - x_n^2)$. Temos, Além disso, que $|x_n^1 - x_n^2| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Com efeito, caso contrário a sequência das diferenças possui uma subsequência limitada, logo, a menos de subsequência, existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$y_n := x_n^2 - x_n^1 \rightarrow x_0.$$

Como $v_n^1(\cdot + x_n^2) = v_n^1(\cdot + y_n + x_n^1)$ e, por (4.1.7), $v_n^1(\cdot + x_n^1)$ converge fracamente para zero, temos

$$\begin{aligned} |\langle v_n^1(\cdot + y_n + x_n^1), \psi \rangle| &= |\langle v_n^1(\cdot + x_n^1), \psi(\cdot - y_n) \rangle| \leq |\langle v_n^1(\cdot + x_n^1), \psi(\cdot - x_0) \rangle| \\ &\quad + |\langle v_n^1(\cdot + x_n^1), \psi(\cdot - y_n) - \psi(\cdot - x_0) \rangle| \\ &\leq |\langle v_n^1(\cdot + x_n^1), \psi(\cdot - x_0) \rangle| + \|v_n^1\|_{L^2} \|\psi(x_0 - y_n)\|_{L^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e portanto,

$$V^2(x) = v_n^1(x + y_n + x_n^1) - v_n^2(x + x_n^2) \xrightarrow{n} 0.$$

Segue daí que $0 = \|V^2\|_{H^1} \geq \eta(\mathbf{v}^1)/2 > 0$, um absurdo.

Além disso, analogamente a (4.1.8), temos

$$\|v_n^1\|_{L^2}^2 = \|V^2\|_{L^2}^2 + \|v_n^2\|_{L^2}^2 + o(1),$$

então substituindo $\|v_n^1\|_{L^2}^2$ em (4.1.8) segue que

$$\|v_n\|_{L^2}^2 = \|V^1\|_{L^2}^2 + \|V^2\|_{L^2}^2 + \|v_n^2\|_{L^2}^2 + o(1).$$

Prosseguindo indutivamente obtemos então, para todo $l \in \mathbb{N}$, V^1, \dots, V^l , $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^l$ e $(x_n^1)_n, \dots, (x_n^l)_n$ satisfazendo (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4) e (4.1.5). Além disso, por construção, temos

$$\eta(\mathbf{v}^j) \leq 2 \|V^{j+1}\|_{H^1}.$$

Como $\|V^j\|_{H^1}$ é o termo geral da série convergente $\sum_{j \geq 1} \|V^j\|_{H^1}$, temos (4.1.6).

Resta demonstrar (4.1.3). Para isto, seja $\chi_R \in S(\mathbb{R}^3)$ tal que $\hat{\chi}_R(\xi) = 1$, se $|\xi| \leq R$ e $\hat{\chi}_R(\xi) = 0$, se $|\xi| \geq 2R$. Então, se δ denota o Delta de Dirac,

$$v_n^l = \chi_R * v_n^l + (\delta - \chi_R) * v_n^l, \quad (4.1.9)$$

já que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ e $\widehat{\delta} \equiv 1$. Vamos agora majorar os dois termos do lado direito desta igualdade. Para $p \in (2, 6)$ fixado e $R \geq 1$, a imersão de Sobolev (2.4.4) nos dá, com $0 < s < 1$,

$$\begin{aligned} \|(\delta - \chi_R) * v_n^l\|_{L^p} &\lesssim \|D^s((\delta - \chi_R) * v_n^l)\|_{L^2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s \left| \widehat{(\delta - \chi_R) * v_n^l}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s \left| \widehat{(\delta - \chi_R)}(\xi) \right| \left| \widehat{v_n^l}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\int_{|\xi| > R} |\xi|^s \left| \widehat{v_n^l}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{|\xi| > R} |\xi|^{s-2} |\xi|^2 \left| \widehat{v_n^l}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\lesssim R^{\frac{s-2}{2}} \|v_n^l\|_{H^1} \leq cR^{s-1} \|v_n^l\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\chi_R * v_n^l|^2 |\chi_R * v_n^l|^{p-2} dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left\| |\chi_R * v_n^l|^2 \right\|_{L^1}^{1/p} \left\| |\chi_R * v_n^l|^{p-2} \right\|_{L^\infty}^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\chi_R * v_n^l\|_{L^2}^{2/p} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty}^{1-2/p} \\
&\leq \|v_n^l\|_{L^2}^{2/p} \|\chi_R * v_n^l\|_{L^\infty}^{1-2/p},
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

pois, pela identidade de Plancherel-Parseval, $\|\chi_R * v_n^l\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\chi_R}|^2 |\widehat{v_n^l}|^2 d\xi \leq \int_{B(0,2R)} |v_n^l|^2 dx \leq \|v_n^l\|_{L^2}^2$. Afirmamos que

$$\limsup_n \|\chi_R * v_n^l\|_\infty = \sup_{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3} \left\{ \limsup_n |\chi_R * v_n^l(x_n)| \right\}.$$

De fato,

$$\|\chi_R * v_n^l\|_\infty = \sup_{(x_k)_k \subset \mathbb{R}^3} |\chi_R * v_n^l(x_n)| \geq |\chi_R * v_n^l(x_n)|.$$

A monotonicidade do limite superior nos dá

$$\limsup_n |\chi_R * v_n^l(x_n)| \leq \limsup_n \left\{ \sup_{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3} |\chi_R * v_n^l(x_n)| \right\}.$$

Em particular,

$$\limsup_n \|\chi_R * v_n^l\|_\infty \geq \sup_{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3} \left\{ \limsup_n |\chi_R * v_n^l(x_n)| \right\}.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere x_n tal que

$$\|\chi_R * v_n^l\|_\infty - 1/n < |\chi_R * v_n^l(x_n)|,$$

então

$$\begin{aligned}
\limsup_n \|\chi_R * v_n^l\|_\infty &= \limsup_n \|\chi_R * v_n^l\|_\infty - \lim_n 1/n \\
&\leq \limsup_n |\chi_R * v_n^l(x_n)| \leq \sup_{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3} \limsup_n |\chi_R * v_n^l(x_n)|.
\end{aligned}$$

Além disso, pela definição de $\Omega(\mathbf{v}^1)$,

$$\begin{aligned}
\limsup_n |\chi_R * v_n^l| &= \limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}^3} \chi_R(y) v_n^l(-y + x_n) dy \right| \\
&\leq \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^3} V(y) \chi_R(-y) dy \right|; V \in \Omega(\mathbf{v}^1) \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder,

$$\limsup_n \|\chi_R * v_n^l\|_\infty \leq \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^3} V(y) \chi_R(-y) dy \right|; V \in \Omega(\mathbf{v}^1) \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq cR^3 \sup \{ \|V\|_{L^2}; V \in \Omega(\mathbf{v}^l) \} \\ &\leq cR^3 \eta(\mathbf{v}^l), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

onde $cR^3 = 4\pi(2R)^3/3$ é o volume da bola de raio $2R$ em \mathbb{R}^3 .

Assim, de (4.1.9)-(4.1.12), segue que

$$\|v_n^l\|_{L^p} \leq cR^{s-1} \|v_n^l\|_{H^1} + cR^{3(1-2/p)} \eta(\mathbf{v}^l)^{1-2/p} \|v_n^l\|_{L^2}^{2/p}.$$

Como $(v_n)_n$ é limitada em H^1 , de (4.1.4) e (4.1.5), segue que a família $\{(v_n^l)_n\}_l$ também é uniformemente limitada em H^1 , isto é, existe $K > 0$ tal que $\|v_n^l\|_{H^1} \leq K$, para $n, l \in \mathbb{N}$. Então dado $\varepsilon > 0$, tome $R > (\varepsilon/2K)^{1/(1-s)}$ e $l_0 = l_0(\varepsilon, R)$, tal que para $l > l_0$, $\eta(\mathbf{v}^l)^{1-2/p} < \varepsilon/(2cR^{3(1-2/p)}K)$ e temos (4.1.3). \square

A seguinte proposição, demonstrada por N. Hayashi, K. Nakamitsu e M. Tsutsumi em [20], garante que se $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $|x|u(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ para todo t .

Proposição 4.2. *Se $u \in C(I, H^1(\mathbb{R}^3))$ é solução do PVI (1.0.1) tal que $x_j u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, para algum $j = 1, 2, 3$, então $x_j u(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $t \in I$.*

Proposição 4.3 (Identidade Virial). *Seja $u(x, t)$ solução da equação (1.0.1) tal que $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e T seu tempo máximo de existência. Então para todo $t \in [0, T)$*

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx = 4 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}(x, t) (\nabla u(x, t) \cdot x) dx \quad (4.1.13)$$

e

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx = 24E[u_0] - 4 \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2. \quad (4.1.14)$$

Demonstração. Consideremos a equação (1.0.1). Multiplicando ambos os membros por $2\bar{u}$, temos

$$\operatorname{Im}(2i \bar{u} \partial_t u) = -\operatorname{Im}(2\bar{u} \Delta u).$$

Como $\partial_t |u|^2 = \partial_t(u\bar{u}) = \bar{u} \partial_t u + u \partial_t \bar{u} = \operatorname{Re}(2\bar{u} \partial_t u) = \operatorname{Im}(2i \bar{u} \partial_t u)$, segue que

$$\partial_t |u|^2 = -\operatorname{Im}(2\bar{u} \Delta u) = -\nabla \cdot (\operatorname{Im}(\bar{u} \nabla u)).$$

Assim, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \nabla \cdot (\operatorname{Im}(\bar{u} \nabla u)) dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla |x|^2 \cdot (\operatorname{Im}(\bar{u} \nabla u)) dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 x_j (\operatorname{Im}(\bar{u} \nabla u)_j) dx \end{aligned}$$

$$= 4\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} (\nabla u \cdot x) dx,$$

o que demonstra (4.1.13).

Para demonstrar (4.1.14), observe que, tomando a derivada temporal, que aqui será denotada por u_t , e integrando por partes,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx &= 4\text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} (\nabla u_t \cdot x) + \bar{u}_t (\nabla u \cdot x) dx \right\} \\ &= 4\text{Im} \left\{ \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_t (x_j \partial_{x_j} u) + \bar{u} (x_j \partial_{x_j} u_t)) dx \right\} \\ &= 4\text{Im} \left\{ \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_t (x_j \partial_{x_j} u) - u_t \partial_{x_j} (\bar{u} x_j)) dx \right\} \\ &= 4\text{Im} \left\{ \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (x_j \bar{u}_t \partial_{x_j} u - x_j u_t \partial_{x_j} \bar{u} - u_t \bar{u}) dx \right\} \\ &= 4\text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{u}_t (\nabla u \cdot x) - \overline{\bar{u}_t (\nabla u \cdot x)} - 3u_t \bar{u}) dx \right\} \\ &= 4\text{Im} \left\{ 2 \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}_t (\nabla u \cdot x) dx - 3 \int_{\mathbb{R}^3} u_t \bar{u} dx \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

onde na última igualdade utilizamos a identidade $\text{Im}(z - \bar{z}) = \text{Im}(2z)$.

Agora observe que, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} u_t \bar{u} dx \right\} &= \text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} (i\Delta u + i|u|^2 u) dx \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ -i \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + i \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx \right\} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}_t (\nabla u \cdot x) dx \right\} &= -\text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} u_t (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\} \\ &= -\text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (i\Delta u + i|u|^2 u) (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\} \\ &= -\text{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} i\Delta u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx + i \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\} \\ &= -\text{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \Delta u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx &= \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_k}^2 u (x_j \partial_{x_j} \bar{u}) dx \\
&= - \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_k} u (x_j \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \bar{u}) - (\partial_{x_k} x_j) \partial_{x_j} \bar{u}) dx \\
&= - \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \bar{u}) dx - \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_k} u \partial_{x_k} \bar{u} dx \\
&= - \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \bar{u}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.1.18)
\end{aligned}$$

Logo, tomando a parte real em (4.1.18), integrando por partes e utilizando a identidade $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ - \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_k} (\partial_{x_j} \bar{u}) dx \right\} - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j \partial_{x_j} (\partial_{x_k} u \partial_{x_k} \bar{u}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \partial_{x_j} x_j dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

Por outro lado, integrando por partes o segundo termo em (4.1.17) e escrevendo $|u|^2 (u \partial_{x_j} \bar{u} + \bar{u} \partial_{x_j} u) = \frac{1}{2} \partial_{x_j} (|u|^4)$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u (\nabla \bar{u} \cdot x) dx \right\} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j |u|^2 (u \partial_{x_j} \bar{u} + \bar{u} \partial_{x_j} u) dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} x_j \partial_{x_j} (|u|^4) dx \\
&= - \frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx. \quad (4.1.20)
\end{aligned}$$

Combinando os resultados (4.1.15)-(4.1.20) e utilizando (1.0.5), obtemos a identidade para a segunda derivada temporal (4.1.14). \square

Para justificativas detalhadas da convergência das integrais na Proposição 4.3, veja T. Cazenave [6], seção 6.5.

4.2 A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

O próximo teorema é um caso particular do que foi demonstrado por Weinstein [37] em 1983, utilizando a imersão compacta $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ para minimizar o funcional

$$J(u) = \frac{\|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^3}{\|u\|_{L^4}^4}. \quad (4.2.1)$$

Aqui fazemos uma outra demonstração, onde, ao invés da imersão compacta, utilizamos fortemente a chamada decomposição em perfis do Lema 4.1 para minimizar o funcional. Veja, por exemplo, Xie, Lie e Zhu [38]. Lembramos que o *ground state* de (2.5.1) é a solução de menor massa (Veja (1.0.4)).

Teorema 4.4. *A constante ótima para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*

$$\|f\|_{L^4}^4 \leq C \|\nabla f\|_{L^2}^3 \|f\|_{L^2} \quad (4.2.2)$$

é dada por

$$C = \frac{4}{3\sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2},$$

onde $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é o *ground state* da equação elíptica (2.5.1).

Demonstração. Considere o funcional de Weinstein (4.2.1). Vamos mostrar que o ínfimo $J = \inf_{u \in H^1} J(u)$ é atingido em ϕ . Note que $J(u)$ está bem-definido em $H^1(\mathbb{R}^3)$, de fato segue do Lema 2.22 que

$$\|u\|_{L^4} \lesssim \|D^{3/4}u\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{H^1}. \quad (4.2.3)$$

Observe também que $J(u)$ é invariante por *scalings*, isto é, se $u(x) = \mu v(\lambda x)$, então $J(u) = J(v)$. Com efeito, temos

$$\|u\|_{L^2}^2 = \mu^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v(\lambda x)|^2 dx = \frac{\mu^2}{\lambda^3} \|v\|_{L^2}^2,$$

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \mu^2 \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v(\lambda x)|^2 dx = \frac{\mu^2}{\lambda} \|v\|_{L^2}^2$$

e

$$\|u\|_{L^4}^4 = \mu^4 \int_{\mathbb{R}^3} |v(\lambda x)|^4 dx = \frac{\mu^4}{\lambda^3} \|v\|_{L^4}^4.$$

Daí,

$$J(u) = \frac{\|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^3}{\|u\|_{L^4}^4} = \frac{\frac{\mu}{\lambda^{3/2}} \|v\|_{L^2} \frac{\mu^3}{\lambda^{3/2}} \|\nabla v\|_{L^2}^3}{\frac{\mu^4}{\lambda^3} \|v\|_{L^4}^4} = \frac{\|v\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}^3}{\|v\|_{L^4}^4} = J(v).$$

Seja $(v_n)_n$ uma seqüência minimizante e defina $u_n = \mu_n v_n(\lambda_n x)$, onde μ_n, λ_n são constantes escolhidas de maneira que $\|u_n\|_{L^2} = \|\nabla u_n\|_{L^2} = 1$, isto é, $\mu_n = \|\nabla v_n\|_{L^2} / \|v_n\|_{L^2}^2$ e $\lambda_n = \|\nabla v_n\|_{L^2} / \|v_n\|_{L^2}$. Segue da invariância do funcional que $(u_n)_n$ é também uma seqüência minimizante e temos $J(u_n) = 1 / \|u_n\|_{L^4}^4$, além disso, por (4.2.3), sabemos que $\|u_n\|_{L^4} \lesssim \|u_n\|_{H^1} \lesssim 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto

$$J = \lim_n \frac{1}{\|u_n\|_{L^4}^4} \gtrsim 1 > 0.$$

Podemos considerar sem perda de generalidade que $u_n(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. De fato, pela Proposição 2.37 vale a relação $J(|u_n|) \leq J(u_n)$ e portanto a seqüência real $(|u_n|)_n$ também é minimizante. Pelo Lema 4.1, possivelmente passando a uma subsequência, podemos encontrar uma seqüência de funções $(U^j)_j$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e uma família de seqüências $\{(x_n^j)_n\}_j$ em \mathbb{R}^3 , tais que

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^l U_n^j(x) + u_n^l(x),$$

onde $U_n^j(x) = U^j(x - x_n^j)$ e $\limsup_n \|u_n^l\|_{L^p} \rightarrow 0$, quando $l \rightarrow \infty$, para todo $p \in (2, 6)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^4}^4 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) + u_n^l(x) \right|^4 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^l U_n^j(x) + u_n^l(x) \right)^4 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right|^4 dx + \sum_{k=1}^4 \binom{4}{k} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right)^{4-k} u_n^l(x)^k dx. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Agora, para todo $l \in \mathbb{N}$, vale

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right|^4 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^l |U^j(x)|^4 dx. \quad (4.2.5)$$

De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right|^4 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^l |U_n^j(x)|^4 dx + \sum_{\substack{1 \leq j_k \leq l \\ j_1 \neq j_2}} \int_{\mathbb{R}^3} U_n^{j_1} U_n^{j_2} U_n^{j_3} U_n^{j_4}(x) dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^l |U_n^j(x)|^4 dx + \sum_{\substack{1 \leq j_k \leq l \\ j_1 \neq j_2}} \|U_n^{j_1} U_n^{j_2}\|_{L^2} \|U_n^{j_3}\|_{L^4} \|U_n^{j_4}\|_{L^4}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis e utilizando a desigualdade (4.2.3) temos que para todo $j \leq l$, $\|U_n^j\|_{L^4} = \|U^j\|_{L^4} \lesssim \|U^j\|_{H^1}$, daí por (4.1.4) e (4.1.5),

$$\begin{aligned} \|U_n^j\|_{L^4}^2 &\leq c \left(\sum_{j=1}^l \|U_n^j(x)\|_{L^2}^2 + \|u_n^l\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^l \|\nabla U_n^j(x)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_n^l\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq c(\|u_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + o(1)) \leq 2c + 1, \end{aligned}$$

desde que n seja suficientemente grande.

Portanto

$$\sum_{\substack{1 \leq j_k \leq l \\ j_1 \neq j_2}} \|U_n^{j_1} U_n^{j_2}\|_{L^2} \|U_n^{j_3}\|_{L^4} \|U_n^{j_4}\|_{L^4} \lesssim \sum_{\substack{1 \leq j_k \leq l \\ j_1 \neq j_2}} \|U_n^{j_1} U_n^{j_2}\|_{L^2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $r > 0$ de modo que para $i = 1, 2$,

$$\|U^{j_i}\|_{L^4(B(0,r)^c)} < \frac{\varepsilon}{\|U^{j_1}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} + \|U^{j_2}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}}. \quad (4.2.6)$$

Assim, por uma mudança de variáveis, pela desigualdade triangular em $L^2(\mathbb{R}^3)$ e pela desigualdade de Hölder, pondo $\tau_n(x) := x - (x_n^{j_2} - x_n^{j_1})$, temos

$$\begin{aligned} \|U_n^{j_1} U_n^{j_2}\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |U^{j_1}(x) U^{j_2} \circ \tau_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| U^{j_1}(x) U^{j_2} \circ \tau_n(x) \chi_{B(0,r)} + U^{j_1}(x) U^{j_2} \circ \tau_n(x) \chi_{B(0,r)^c} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|U^{j_1}(U^{j_2} \circ \tau_n)\|_{L^2(B(0,r))} + \|U^{j_1}(U^{j_2} \circ \tau_n)\|_{L^2(B(0,r)^c)} \\ &\leq \|U^{j_1}\|_{L^4(B(0,r))} \|U^{j_2}\|_{L^4(B(\tau_n(0),r))} + \|U^{j_1}\|_{L^4(B(0,r)^c)} \|U^{j_2}\|_{L^4(B(\tau_n(0),r)^c)} \\ &\leq \|U^{j_1}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \|U^{j_2}\|_{L^4(B(\tau_n(0),r))} + \|U^{j_1}\|_{L^4(B(0,r)^c)} \|U^{j_2}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Logo, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ de maneira que $B(\tau_n(0), r) \subset B(0, r)^c$, de (4.2.6) segue que

$$\|U_n^{j_1} U_n^{j_2}\|_{L^2} < \varepsilon,$$

o que demonstra a afirmação (4.2.5).

Agora vamos mostrar que o último termo em (4.2.4) vai para zero quando $l \rightarrow \infty$. Com efeito pela desigualdade de Hölder, com $1 = \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k}$, onde, para $k = 1, 2, 3$, $\alpha_k = 4/(4 - k)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right|^{4-k} |u_n^l(x)|^k dx \leq \left\| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right\|_{L^4}^{4-k} \|u_n^l\|_{L^4}^k,$$

agora pelo Lema 4.1, $\limsup_n \|u_n^l\|_{L^4} \rightarrow 0$ se $l \rightarrow \infty$, então para demonstrar a afirmação basta verificar que a norma $\left\| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right\|_{L^4}$ é uniformemente limitada em n e em l .

De fato,

$$\left\| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right\|_{L^4} \leq \|u_n\|_{L^4} + \|u_n^l\|_{L^4} \lesssim \|u_n\|_{H^1} + \limsup_n \|u_n^l\|_{L^4}.$$

O Lema 4.1 garante que existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\limsup_n \|u_n^l\|_{L^p} \leq 1$ para $l \geq l_0$ e como $\|u_n\|_{H^1} = 2$, existe $M > 0$ tal que para todo $l \geq l_0$ e $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right\|_{L^p} \leq M$ e isso implica que

$$\sum_{k=1}^4 \binom{4}{k} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^l U_n^j(x) \right)^{4-k} u_n^l(x)^k dx \xrightarrow{l} 0.$$

Finalmente, temos

$$\frac{1}{J} = \lim_n \|u_n\|_{L^4}^4 = \lim_l \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^l |U^j(x)|^4 dx = \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^4}^4.$$

Por outro lado, como $U^j \in H^1$ para todo j , pela definição de J ,

$$\|U^j\|_{L^4}^4 \leq \frac{1}{J} \|U^j\|_{L^2} \|\nabla U^j\|_{L^2}^3.$$

Além disso como $\|u_n\|_{L^2} = \|\nabla u_n\|_{L^2} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (4.1.4) e (4.1.5) segue que $\sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^2}^2 \leq 1$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla U^j\|_{L^2}^2 \leq 1$ e, portanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|U^{j_0}\|_{L^2} = \sup_j \|U^j\|_{L^2} \leq 1$. Assim,

$$1 = J \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^4}^4 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^2} \|\nabla U^j\|_{L^2}^3 \leq \|U^{j_0}\|_{L^2} \sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla U^j\|_{L^2}^3$$

$$\leq \|U^{j_0}\|_{L^2} \sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla U^j\|_{L^2}^2 \leq \|U^{j_0}\|_{L^2} \leq 1.$$

Logo todas as desigualdades acima são igualdades e temos

$$\|U^{j_0}\|_{L^2} = 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^2},$$

o que implica $U^j = 0$ q.t.p para $j \neq j_0$, portanto,

$$\|U^{j_0}\|_{L^4}^4 = \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^4}^4 = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{\infty} \|U^j\|_{L^2} \|\nabla U^j\|_{L^2}^3 = \frac{1}{J} \|U^{j_0}\|_{L^2} \|\nabla U^{j_0}\|_{L^2}^3$$

e daí segue que U^{j_0} é o minimizador do funcional de Weinstein $J(u)$. Para concluir calcularemos a derivada de Gateaux de $J(u)$ em U^{j_0} . Como U^{j_0} é um mínimo do funcional, temos, para todo $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon}(U^{j_0} + \varepsilon W) \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.2.7)$$

por outro lado como $\|U^{j_0}\|_{L^2} = \|\nabla U^{j_0}\|_{L^2} = 1$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|U^{j_0} + \varepsilon W\|_{L^2} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \int \overline{U^{j_0}} W + \overline{W} U^{j_0} dx = \operatorname{Re} \langle U^{j_0}, W \rangle \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|\nabla(U^{j_0} + \varepsilon W)\|_{L^2}^3 \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{3}{2} \int \overline{\nabla U^{j_0}} \nabla W + \overline{\nabla W} \nabla U^{j_0} dx = \operatorname{Re} \langle 3\nabla U^{j_0}, \nabla W \rangle \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|U^{j_0} + \varepsilon W\|_{L^4}^4 \right|_{\varepsilon=0} &= 2 \int |U^{j_0}|^2 (\overline{U^{j_0}} W + \overline{W} U^{j_0}) dx = \operatorname{Re} \langle 4|U^{j_0}|^2 U^{j_0}, W \rangle. \end{aligned}$$

Onde utilizamos que se $a, b \in \mathbb{C}$, então $\bar{a}b + a\bar{b} = 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em L^2 . Logo, por (4.2.7) e pela regra de Leibniz, para $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,

$$\operatorname{Re} \langle 4J|U^{j_0}|^2 U^{j_0}, W \rangle = \operatorname{Re} \langle U^{j_0}, W \rangle + \operatorname{Re} \langle 3\nabla U^{j_0}, \nabla W \rangle,$$

em particular, aplicando em $iW \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\operatorname{Im} \langle 4J|U^{j_0}|^2 U^{j_0}, W \rangle = \operatorname{Im} \langle U^{j_0}, W \rangle + \operatorname{Im} \langle 3\nabla U^{j_0}, \nabla W \rangle,$$

o que implica que

$$-\langle 3\nabla U^{j_0}, \nabla W \rangle = \langle U^{j_0} - 4J|U^{j_0}|^2 U^{j_0}, W \rangle$$

e, portanto, U^{j_0} é solução fraca da equação

$$\psi - 3\Delta\psi - 4J|\psi|^2\psi = 0.$$

Defina agora

$$\phi(x) := 2\sqrt{J}U^{j_0}(\sqrt{3}x)$$

e observe que U^{j_0} é uma função real, já que $\lim_n u_n(\cdot + x_n^{j_0}) = U^{j_0}$ e $u_n(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $n \in \mathbb{N}$, conseqüentemente ϕ também é uma função real e vale $|\phi|^2 = \phi^2$, portanto ϕ é solução da equação elíptica (2.5.1) e

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \frac{4J}{3\sqrt{3}} \|U^{j_0}\|_{L^2}^2 = \frac{4J}{3\sqrt{3}},$$

o que implica que

$$C = \frac{1}{J} = \frac{4}{3\sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2}.$$

Suponha agora que $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma outra solução da equação elíptica (2.5.1), com $\|\psi\|_{L^2} < \|\phi\|_{L^2}$. Neste caso,

$$J(\psi) = \frac{3\sqrt{3} \|\psi\|_{L^2}^2}{4} < \frac{3\sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2}{4} = J,$$

uma contradição com a minimalidade de J . Portanto, ϕ é a solução de (2.5.1) com a menor norma $L^2(\mathbb{R}^3)$, o que completa a demonstração do teorema. \square

Pode ser demonstrado que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e é a única solução positiva e radial da equação (2.5.1) (veja F. Linares e G. Ponce [30], página 94, Teorema 5.1 e parágrafo anterior).

4.3 Boa Colocação e Explosão

Nesta seção utilizamos as ferramentas apresentadas neste capítulo para estudar o problema da existência de soluções globais para a equação (1.0.1). Primeiro vejamos que, de fato, a massa e a energia das soluções são preservadas no tempo.

Proposição 4.5. *Seja u uma solução da equação de Schrödinger (1.0.1). Então a massa e a energia de u são conservadas no tempo. Isto é, para todo $t \in I$,*

$$M[u(t)] = M[u_0] \quad e \quad E[u(t)] = E[u_0]. \quad (4.3.1)$$

Demonstração. Basta demonstrar que $\partial_t M[u(t)] = \partial_t E[u(t)] = 0$. Usando o Teorema da Convergência Dominada e depois integrando por partes, obtemos

$$\partial_t M[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |u|^2 dx = 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} \partial_t u dx = 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} i\bar{u}(\Delta u + |u|^2 u) dx$$

$$= -2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}\Delta u dx = 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\nabla u|^2 dx &= \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\partial_t u) \nabla \bar{u} dx = -\text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t u \Delta \bar{u} dx \\ &= -\text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} (i\Delta u + i|u|^2 u) \Delta \bar{u} dx = -\text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} i|u|^2 u \Delta \bar{u} dx \\ &= \text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 u \Delta \bar{u} dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |u|^4 dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \partial_t |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \text{Re}(\bar{u} \partial_t u) dx \\ &= \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \bar{u} (i\Delta u + i|u|^2 u) dx = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} i|u|^2 \bar{u} \Delta u dx \\ &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \bar{u} \Delta u dx. \end{aligned}$$

Portanto, como $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\partial_t E[u(t)] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |u|^4 dx = 0.$$

□

Teorema 4.6. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $I = [0, T^*)$ o intervalo maximal de existência da solução $u(t)$ do PVI (1.0.1) e ϕ a solução de menor norma $L^2(\mathbb{R}^3)$ (ground state) da equação (2.5.1). Suponha que*

$$M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]. \quad (4.3.2)$$

1. *Se a condição inicial u_0 satisfaz*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}, \quad (4.3.3)$$

então $I = \mathbb{R}$, isto é, a solução é global. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \quad (4.3.4)$$

2. *Por outro lado, se*

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}, \quad (4.3.5)$$

então para todo $t \in I$,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}. \quad (4.3.6)$$

Mais ainda, se $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $T^ < \infty$ e, portanto, a solução explode em tempo finito.*

Demonstração. Defina

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}\|\phi\|_{L^2}^2}x^3. \quad (4.3.7)$$

Observe que, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.2.2) e pela conservação de massa e energia (Proposição 1.1), temos

$$\begin{aligned} M[u]E[u] &= \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \|u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|u(t)\|_{L^4}^4 \|u_0\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \|u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}\|\phi\|_{L^2}^2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^3 \|u_0\|_{L^2}^3 \\ &= f(\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Temos $f'(x) = x(1 - \frac{1}{\sqrt{3}\|\phi\|_{L^2}^2}x)$ e daí é fácil ver que f possui um mínimo local em 0 e um máximo local em $\sqrt{3}\|\phi\|_{L^2}^2$, que, pela Proposição 2.35, podemos reescrever como

$$\sqrt{3}\|\phi\|_{L^2}^2 = \|\nabla\phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

Além disso, $f(0) = 0$, $f(\|\nabla\phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}) = \frac{1}{6} \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2$ e novamente pela Proposição 2.35, por (4.3.2) e pela conservação da energia, para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned} f(\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}) &\leq M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi] \\ &= \frac{1}{6} \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2 = f(\|\nabla\phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Segue de (4.3.9), da hipótese (4.3.3) e da continuidade de u , que, para todo $t \in I$,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} < \|\nabla\phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

De fato, se existir $t_0 \in I$ tal que $\|\nabla u(t_0)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} \geq \|\nabla\phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}$, então, pela continuidade de u , também deve existir $0 < t_1 \leq t_0$ tal que $M[u_0]E[u_0] < f(\|\nabla u(t_1)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2})$, o que contraria (4.3.9) (veja a Figura 4.1). Consequentemente, a norma H^1 da solução é uniformemente limitada, isto é, existe $E > 0$ tal que, para todo I ,

$$\|u\|_{L^\infty H_x^1} \leq E$$

Vamos ver que isso é suficiente para que a solução seja global. De fato, da demonstração do Teorema 3.1 (veja (3.2.1), (3.2.5)), sabemos que o tempo T de existência da solução é da ordem

$$T \sim \|u_0\|_{H^1}^{-4}.$$

Então existe $c > 0$ tal que, para qualquer $t_0 \in I$, a solução u' do PVI (1.0.1), com dado inicial $u'_0(x) := u(x, t_0)$ está definida pelo menos no intervalo de tempo $[0, T_0]$, onde

$$T_0 = cE^{-4} > 0.$$

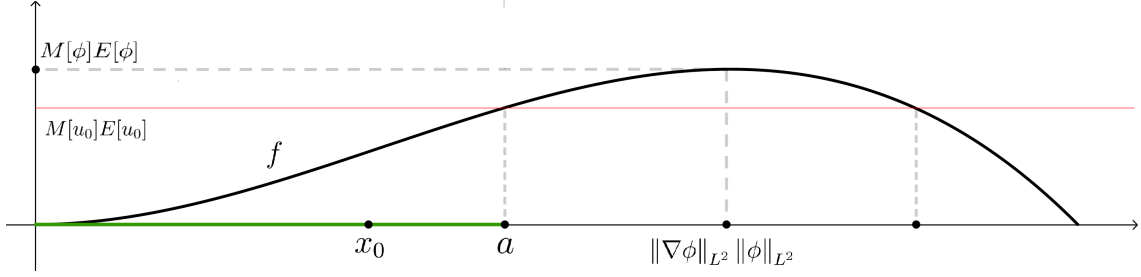


Figura 4.1: $x_t := \|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}$ fica confinada no intervalo $[0, a)$.

Agora suponha u definida em $[0, T_0]$ com condição inicial u_0 . Estendemos u ao intervalo $[0, 2T_0]$ considerando a solução com dado inicial $u_1(x, 0) = u(x, T_0)$ e definindo $u(x, T_0 + t) = u_1(x, t)$ em $[0, T_0]$. Prosseguindo indutivamente, obtemos u definida em toda a semirreta $[0, \infty)$.

Agora suponhamos que $\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}$. Analogamente, pela continuidade de u , temos

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

Sabemos, portanto, que a norma H^1 da solução está cotada inferiormente, mas isto não é suficiente para garantir que a solução explode em tempo finito. A ideia agora é refinar essa desigualdade e utilizar a identidade virial (4.1.14). Escolha $0 < \delta_1 < 1$ tal que

$$M[u_0]E[u_0] < (1 - \delta_1)M[\phi]E[\phi]. \quad (4.3.10)$$

Assim como em (4.3.9), temos

$$f(\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}) \leq M[u_0]E[u_0] < (1 - \delta_1)f(\|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2})$$

e o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(1 - \delta_1)f(\|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}) = f((1 + \delta_2)\|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}).$$

Da hipótese (4.3.5) sob a condição inicial e da continuidade de u , segue que, para todo $t \in I$,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} > (1 + \delta_2)\|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}. \quad (4.3.11)$$

Pela Proposição 4.3, estimamos uniformemente

$$\begin{aligned} M[u_0]\partial_t^2 \int |x|^2 |u(x, t)|^2 dx &= 24M[u_0]E[u_0] - 4\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \|u_0\|_{L^2}^2 \\ &< 24(1 - \delta_1)\frac{1}{6}\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2 - 4(1 + \delta_2)\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2 \\ &= -4(\delta_1 + \delta_2)\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2 < 0. \end{aligned}$$

Escrevendo $A := 4(\delta_1 + \delta_2) \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2 M[u_0]^{-1}$ e integrando ambos os lados da desigualdade no intervalo $[0, t]$ duas vezes, temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(x, t)|^2 dx < -\frac{A}{2} t^2 + \| |x| \partial_t u(x, 0) \|_{L^2} t + \| |x| u_0 \|_{L^2}.$$

Como o membro direito da desigualdade é estritamente negativo para todo t suficientemente grande, deve existir $T > 0$ tal que u não está definida para $t \geq T$, isto é, o intervalo I é finito. Afirmamos que, nessas condições, a norma H^1 da solução u explode. Com efeito, suponha que exista $t_n \rightarrow T$ tal que a sequência $(\|u(t_n)\|_{H^1})_n$ é limitada, seja $\bar{E} = \sup_n \|u(t_n)\|_{H^1} < \infty$ e defina

$$\bar{T}_0 = \bar{E}^{-4}.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\bar{T}_0 - t_{n_0}| < \bar{T}_0/2$ e considere a condição inicial $u_0(x) := u(x, t_{n_0})$. O Teorema 3.1 garante a existência de uma única solução u_1 definida em $[0, \bar{T}_0]$ tal que $u_1(x, 0) = u_0(x)$, isto é, estendemos u ao intervalo $[0, t_{n_0} + \bar{T}_0/2] \not\supseteq [0, T]$, o que contradiz a maximalidade de T . Concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_{H^1} = \infty.$$

□

Observações: Sem as desigualdades refinadas (4.3.10) e (4.3.11), não seria possível concluir a demonstração. De fato, assim teríamos apenas que $\partial_t^2 \| |x| u \|_{L^2} < 0$ e o processo de integração nos daria $\| |x| u \|_{L^2} \leq ct + d$ e para este caso o argumento falha. Poderíamos ter, por exemplo, $\| |x| u \|_{L^2} = \ln(1 + t)$, que tem segunda derivada estritamente negativa, mas está definida em toda a semirreta positiva.

Finalmente, o item 2 do Teorema 4.6 também é válido substituindo a hipótese $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ por $u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$. A demonstração desse fato é devida a T. Ogawa e Y. Tsutsumi e pode ser encontrada em [32].

Capítulo 5

Espalhamento

O primeiro resultado acerca do comportamento assintótico das soluções de (1.0.1) foi demonstrado por J. Holder e S. Roudenko [22] para o caso em que a condição inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é radial, e, pouco mais tarde, por T. Duyckaerts, J. Holmer e S. Roudenko [12], para o caso não radial. As técnicas utilizadas nesses artigos são baseadas no método *concentration compactness* empregado anteriormente por C. Kenig e F. Merle [27] para a equação de Schrödinger não-linear de energia crítica. Neste trabalho, seguimos os autores B. Dodson e J. Murphy [9], que desenvolveram um novo método para a demonstração do espalhamento, baseando-se no Critério de Terence Tao que veremos a seguir. Neste capítulo nos restringimos às soluções radiais u da equação de Schrödinger (1.0.1) que satisfazem as hipóteses (4.3.2) e (4.3.3) do Teorema 4.6, que são, em particular, soluções globais. Notamos ainda que pode ser demonstrado que $u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ implica que $u \in C([0, \infty), H_{rad}^1(\mathbb{R}^3))$.

Lembramos aqui que uma solução $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ da equação de Schrödinger (1.0.1) *se espalha*, se existe $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - e^{it\Delta} u^+\|_{H^1} = 0.$$

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema

Teorema 5.1. *Suponha que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ seja radial e que $M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]$. Se $\|u_0\|_{L^2} \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\phi\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2}$, então a solução global u da equação de Schrödinger (1.0.1) se espalha.*

5.1 Critério de Espalhamento

A ideia é demonstrar que a solução satisfaz o seguinte critério de espalhamento, devido a Terence Tao [35].

Teorema 5.2 (Critério de Espalhamento). *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução radial da equação de Schrödinger (1.0.1) satisfazendo*

$$\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq E \quad (5.1.1)$$

para algum $E > 0$. *Existem $\varepsilon = \varepsilon(E) > 0$ e $R = R(E) > 0$ tais que, se*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} |u(t, x)|^2 dx \leq \varepsilon^2, \quad (5.1.2)$$

então *u se espalha*.

Para demonstrar esse critério precisaremos de dois lemas.

Lema 5.3. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução da equação (1.0.1). Então, para todo intervalo $I = [T, T + \tau] \subset \mathbb{R}$,*

$$\|u\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} \lesssim (1 + \tau)^{1/2}, \quad \|u\|_{L_I^2 L_x^\infty} \lesssim (1 + \tau)^{1/2}, \quad \|u\|_{L_I^4 L_x^\infty} \lesssim (1 + \tau)^{1/4}. \quad (5.1.3)$$

Demonstração.

Considere a representação integral (1.0.2) de u . Como o grupo unitário $e^{it\Delta}$ comuta com a derivada, a Proposição 2.16 nos permite permutar a norma com a integral e o par (6, 2) é admissível, pela estimativa de Strichartz (2.4.7), segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} &= \left\| e^{i(t-T)\Delta} u(T) + i \int_T^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds \right\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} \\ &\leq \|e^{i(t-T)\Delta} u(T)\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} + \int_T^{T+\tau} \|e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s)\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} ds \\ &\lesssim \|u(T)\|_{H^1} + \int_T^{T+\tau} \| |u(s)|^2 u(s) \|_{H^1} ds. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Utilizaremos (2.6.2) (com $f = u$ e $g = 0$) e a desigualdade de Hölder para cotar o segundo termo. Temos

$$\int_T^{T+\tau} \| |u(s)|^2 u(s) \|_{H^1} ds \leq \tau^{1/2} \|u\|_{L_I^4 L_x^\infty}^2 \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}. \quad (5.1.5)$$

Agora observe que, pelo Teorema 2.25, $\|u\|_{L_I^2 L_x^\infty} \lesssim \|u\|_{L_I^2 W_x^{1,6}}$ e, pelo Lema 2.32, $\|e^{it\Delta} f\|_{L_I^4 L_x^\infty} \lesssim \|f\|_{H^1}$ para toda $f \in H^1$. Logo, a estimativa (5.1.4) também é válida para as normas $\|u\|_{L_I^2 L_x^\infty}$ e $\|u\|_{L_I^4 L_x^\infty}$. Definindo então

$$X := \|u\|_{L_I^2 W_x^{1,6}} + \|u\|_{L_I^2 L_x^\infty} + \|u\|_{L_I^4 L_x^\infty},$$

segue de (5.1.5) e de (5.1.1) que, para todo $\tau > 0$,

$$X \lesssim 1 + \tau^{1/2} \|u\|_{L_t^4 L_x^\infty}^2 \lesssim 1 + \tau^{1/2} X^3$$

Seja agora τ_1 suficientemente pequeno de forma que $X \lesssim 1$, se $|I| \leq \tau_1$, e tal que $\tau/\tau_1 \in \mathbb{N}$. Temos, para $I = [T, T + \tau]$,

$$\|u\|_{L_t^2 W_x^{1,6}}^2 = \sum_{j=1}^{\tau/\tau_1} \int_{T+(j-1)\tau_1}^{T+j\tau_1} \|u\|_{W_x^{1,6}}^2 dt \lesssim_{\tau_1} \tau.$$

Segue daí que para todo $\tau > 0$, $\|u\|_{L_t^2 W_x^{1,6}}^2 \lesssim 1 + \tau$. Analogamente, $\|u\|_{L_t^2 L_x^\infty}^2 \lesssim 1 + \tau$ e $\|u\|_{L_t^4 L_x^\infty}^4 \lesssim 1 + \tau$, como queríamos. \square

A chave para a demonstração do Teorema 5.2 é o conteúdo do próximo lema.

Lema 5.4. *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução radial da equação de Schrödinger (1.0.1). Suponha que exista $0 < \varepsilon < 1$ tal que (5.1.2) seja satisfeita. Então existe $T > 0$ tal que*

$$\|e^{i(\cdot-T)\Delta} u(T)\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon^{1/32}.$$

Demonstração. Observe que, pela imersão de Sobolev (2.4.4) e pela estimativa de Strichartz (2.4.7), temos

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^4 L_x^6} \lesssim \|D^{1/2}(e^{it\Delta} u_0)\|_{L_t^4 L_x^3} \lesssim \|u_0\|_{H^1} < \infty.$$

Note que o operador $e^{it\Delta}$ comuta com a diferencial. Definindo $u_n = u_0 \chi_{\{|x|>n\}}$, temos $u_n \rightarrow 0$ pontualmente e o Teorema da Convergência Dominada garante que existe $T_0 > \varepsilon^{-1/4}$ tal que

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^4([T_0,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon. \quad (5.1.6)$$

Para $T > T_0$ a ser escolhido posteriormente, defina $I_1 = [T - \varepsilon^{-1/4}, T]$, $I_2 = [0, T - \varepsilon^{-1/4}]$. Pela equação de Duhamel [veja (1.0.2)]

$$u(T) = e^{iT\Delta} u_0 + i \int_0^T e^{i(T-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds,$$

temos

$$e^{i(t-T)\Delta} u(T) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_{I_1} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds + i \int_{I_2} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds.$$

Vamos mostrar que as integrais em I_1 e I_2 ficam arbitrariamente pequenas se escolhermos T e R adequados. Primeiramente, utilizando a desigualdade de

Minkowski (Proposição 2.16), a imersão de Sobolev (2.4.4), a estimativa de Strichartz (2.4.7) e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{I_1} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds \right\|_{L_t^4 L_x^6} &\lesssim \int_{I_1} \|e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s)\|_{L_t^4 L_x^6} ds \\
&\lesssim \int_{I_1} \|D^{1/2} (e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s))\|_{L_t^4 L_x^3} ds \\
&\lesssim \int_{I_1} \| |u(s)|^2 u(s) \|_{H_x^1} ds \\
&\lesssim \|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^3} \|u\|_{L_{I_1}^2 L_x^\infty} \|u\|_{L_{I_1}^2 W_x^{1,6}}. \tag{5.1.7}
\end{aligned}$$

Note que na última desigualdade utilizamos o Lema 2.36 para cotar o termo $\|\nabla(|u|^2 u)\|_{L_x^2}$ e a desigualdade de Hölder, com $1/2 = 1/3 + 1/6 + 1/\infty$ no espaço e $1 = 1/2 + 1/2 + 1/\infty$ no tempo. Por interpolação,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^3} &\leq \|\chi_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^3} + \|(1 - \chi_R)u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^3} \\
&\lesssim \|\chi_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2}^{1/2} \|\chi_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^6}^{1/2} + \|(1 - \chi_R)u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^\infty}^{1/3} \|(1 - \chi_R)u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2}^{2/3} \\
&\lesssim \|\chi_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2}^{1/2} \|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^6}^{1/2} + \|(1 - \chi_R)u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^\infty}^{1/3} \|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2}^{2/3},
\end{aligned}$$

onde $\chi_R(x) := \chi^\rho(x/R)$ e $\chi^\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vale 1 dentro da bola unitária e 0 fora da bola de raio $1 + \rho$.

Pela hipótese (5.1.2), podemos encontrar $T > T_0$ tal que $\int \chi_R |u(x, T)|^2 dx < 2\varepsilon^2$. Agora, integrando por partes e usando a equação (1.0.1), temos

$$\begin{aligned}
\partial_t \int \chi_R |u|^2 dx &= 2 \int \operatorname{Re}(\chi_R \bar{u} \partial_t u) dx = -2 \int \operatorname{Im}(\chi_R \bar{u} \Delta u) dx \\
&= 2 \int \operatorname{Im}(\bar{u} \nabla \chi_R \nabla u + \chi_R |\nabla u|^2) dx = 2 \operatorname{Im} \int \bar{u} \nabla \chi_R \nabla u dx.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Hölder e pela limitação uniforme (5.1.1),

$$\left| \partial_t \int \chi_R |u|^2 dx \right| \leq \|u\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_x^2} \|\nabla \chi_R\|_{L^\infty} \lesssim_E \frac{1}{R}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos então, para $t \in I_1$,

$$\frac{-\varepsilon^{-1/4}}{R} \lesssim \int \chi_R |u(x, t)|^2 dx - \int \chi_R |u(x, T)|^2 dx \lesssim \frac{\varepsilon^{-1/4}}{R},$$

o que implica que

$$\int \chi_R |u(x, t)|^2 dx \lesssim \frac{\varepsilon^{-1/4}}{R} + \varepsilon^2.$$

Escolhendo $R > \varepsilon^{-9/4}$, obtemos

$$\|\chi_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2} \lesssim \varepsilon.$$

Por outro lado, pela imersão de Sobolev radial (2.4.5),

$$\|(1 - \chi_R)u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^\infty} \leq \frac{1}{R} \| |x|u \|_{L_{I_1}^\infty L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{R} \|u\|_{L_{I_1}^\infty H_x^1} \lesssim_E \frac{1}{R}.$$

Logo,

$$\|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^3} \lesssim \varepsilon^{1/2} + R^{-1/3} \lesssim \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/4} \lesssim \varepsilon^{1/2},$$

já que, pela imersão de Sobolev (2.4.4) e por (5.1.1), os termos $\|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^6}$ e $\|u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2}$ são uniformemente limitados por E . Agora, considerando a estimativa (5.1.7) e o Lema 5.3, temos

$$\left\| \int_{I_1} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds \right\|_{L_t^4 L_x^6} \lesssim \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{-1/8} \varepsilon^{-1/8} = \varepsilon^{1/4}. \quad (5.1.8)$$

Passaremos agora à limitação para a integral sobre o intervalo I_2 , que denotaremos por F_2 . Note que, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{I_2} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) ds \right\|_{L_t^4 L_x^6} &\leq \left\| \|F_2\|_{L_x^3}^{1/2} \|F_2\|_{L_x^\infty}^{1/2} \right\|_{L_t^4} \\ &\leq \left\| \|F_2\|_{L_x^3}^{1/2} \right\|_{L_t^8} \left\| \|F_2\|_{L_x^\infty}^{1/2} \right\|_{L_t^8} \\ &= \|F_2\|_{L_t^4 L_x^3}^{1/2} \|F_2\|_{L_t^4 L_x^\infty}^{1/2}. \end{aligned}$$

Segue da fórmula de Duhamel (1.0.2) que,

$$F_2(t) = e^{i(t-T+\varepsilon^{-1/4})\Delta} [u(T - \varepsilon^{-1/4}) - e^{i(T-\varepsilon^{-1/4})\Delta} u_0],$$

portanto, como o par $(3, 4)$ é admissível, pela estimativa de Strichartz (2.4.7) e pela Proposição 1.1,

$$\|F_2\|_{L_t^4 L_x^3} \lesssim \left\| u(T - \varepsilon^{-1/4}) - e^{i(T-\varepsilon^{-1/4})\Delta} u_0 \right\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{L^2} \lesssim_E 1.$$

Por outro lado, pela desigualdade integral de Minkowski, Proposição 2.28 e imersão de Sobolev (2.4.4),

$$\begin{aligned} \|F_2\|_{L_x^\infty} &\leq \int_{I_2} \left\| e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s) \right\|_{L_x^\infty} ds \lesssim \int_{I_2} |t-s|^{-3/2} \|u(s)\|_{L_x^3}^3 ds \\ &\lesssim \int_{I_2} |t-s|^{-3/2} \|u(s)\|_{L_t^\infty H_x^1}^3 ds \lesssim_E (t-T+\varepsilon^{-1/4})^{-1/2} \end{aligned}$$

e daí segue que

$$\|F_2\|_{L^4([T,\infty):L^\infty(\mathbb{R}^3))} \lesssim \left(\int_T^\infty (t-T+\varepsilon^{-1/4})^{-2} dt \right)^{1/4} = \varepsilon^{1/16}$$

e, conseqüentemente,

$$\|F_2\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon^{1/32}. \quad (5.1.9)$$

Coletando (5.1.6), (5.1.8) e (5.1.9), obtemos a estimativa desejada. \square

Demonstração do Teorema 5.2. Utilizando as estimativas obtidas para a solução linear, estimamos a solução não-linear. Com efeito, pela Fórmula de Duhamel (1.0.2),

$$u(t) = e^{i(t-T)\Delta}u(T) + i \int_T^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^2u(s)ds,$$

obtemos, portanto, do Lema 5.4, que

$$\|u\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon^{1/32} + \left\| \int_T^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^2u(s)ds \right\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3)}$$

e por imersão de Sobolev (2.4.4) e a estimativa de Strichartz (2.4.11),

$$\begin{aligned} \left\| \int_T^t e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^2u(t')dt' \right\|_{L_t^4L_x^6} &\lesssim \left\| \int_T^t e^{i(t-t')\Delta}D^{1/2}(\chi_{[T,\infty)}|u(t')|^2u(t'))dt' \right\|_{L_t^4L_x^3} \\ &\lesssim \left\| D^{1/2}(\chi_{[T,\infty)}|u|^2u) \right\|_{L_t^2L_x^{6/5}} \\ &\lesssim \| |u|^2u \|_{L_t^2W_x^{1,6/5}}. \end{aligned}$$

Podemos estimar o último termo utilizando o Lema 2.36 para controlar o gradiente e depois aplicando a desigualdade de Hölder. De fato,

$$\| |u|^2u \|_{L_t^2W_x^{1,6/5}} \lesssim \|u\|_{L_t^4L_x^6}^2 \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}, \quad (5.1.10)$$

onde fizemos a interpolação com os pares $5/6 = 1/3 + 1/2$ no espaço e $1/2 = 1/2 + 1/\infty$ no tempo. Temos então que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} &\lesssim \varepsilon^{1/32} + \|u\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))}^2 \|u\|_{L^\infty([T,\infty):H^1(\mathbb{R}^3))} \\ &\lesssim \varepsilon^{1/32} + E \|u\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))}^2. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Substituindo o intervalo $[T, \infty)$ por $[T, T+\tau)$ e escrevendo $X(\tau) = \|u\|_{L^4([T,T+\tau):L^6(\mathbb{R}^3)}$, segue de (5.1.11) e da fórmula de bháskara que, se τ é suficientemente pequeno,

$$X(\tau) \lesssim \frac{1 - \sqrt{1 - 4E\varepsilon^{1/32}}}{2E}, \quad (5.1.12)$$

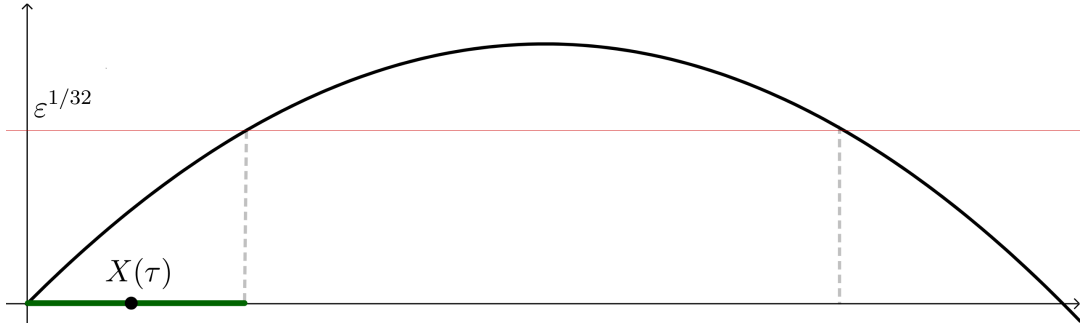


Figura 5.1: O gráfico da função $x - Ex^2$.

desde que $1 > 4E\varepsilon^{1/32}$ (veja a figura 5.1). Note que o lado direito de (5.1.12) vai para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, logo, tomando ε suficientemente pequeno, temos que $X(\tau) \lesssim \varepsilon^{1/32}$. Agora como (5.1.11) vale para todo $\tau > 0$, tomando o limite quando $\tau \rightarrow \infty$, a continuidade da integral garante que

$$\|u\|_{L^4([T,\infty):L^6(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon^{1/32}.$$

Defina

$$u_+ := e^{-iT\Delta}u(T) - i \int_T^\infty e^{-is\Delta}|u(s)|^2u(s)ds$$

e observe que $u_+ \in H^1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|u_+\|_{H^1} &= \|e^{it\Delta}u_+\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1} + \left\| \int_T^\infty e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^2u(s)ds \right\|_{H^1} \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^1} + \| |u|^2u \|_{L_t^2W_x^{1,6/5}} < \infty, \end{aligned}$$

onde utilizamos a estimativa de Strichartz (2.4.11) (note que o par $(2, \infty)$ é admissível) e a estimativa (5.1.10). Pela fórmula de Duhamel, temos, para todo $t \geq T$,

$$u(t) - e^{-it\Delta}u_+ = i \int_t^\infty e^{-is\Delta}|u(s)|^2u(s)ds.$$

Assim, como $|u|^2u \in L_t^2W_x^{1,6/5}$, mais uma aplicação da estimativa (2.4.11) nos dá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{-it\Delta}u_+\|_{H^1} \lesssim \lim_{t \rightarrow \infty} \| |u|^2u \|_{L_{[t,\infty)}^2W_x^{1,6/5}} = 0. \quad (5.1.13)$$

□

5.2 Coercividade

Para utilizar o Teorema 5.2, no restante do capítulo nos dedicaremos a demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 5.5. *Existem uma sequência de tempos $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow \infty$, e uma sequência de raios $(R_n)_n$, $R_n \rightarrow \infty$, tais que*

$$\lim_n \int_{|x| \leq R_n} |u(t_n)|^4 dx = 0. \quad (5.2.1)$$

Começamos com um lema provado por D. Fang, J. Xie e T. Cazenave [16], que nos fornece uma primeira coercividade importante.

Lema 5.6. *Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução da equação (1.0.1) e ϕ o ground state da equação elíptica (2.5.1). Se $M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]$ e $\|\nabla u_0\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} \leq \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}$, então, para todo $t \in I$,*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2} \leq \left(\frac{M[u_0]E[u_0]}{M[\phi]E[\phi]} \right)^{1/2} \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}. \quad (5.2.2)$$

Demonstração. Considere a função f dada por (4.3.7). Da demonstração do Teorema 4.6, sabemos que f possui um máximo local em $\sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2 = \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}$. Além disso, é fácil ver que $f(x) \geq \frac{1}{6}x^2$, para todo $x \in [0, \sqrt{3} \|\phi\|_{L^2}^2]$. Assim, segue da hipótese e de (4.3.8), que

$$\frac{1}{6} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^2}^2 \leq f(\|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}) \leq M[u]E[u].$$

Multiplicando a última desigualdade por $\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2$, utilizando a identidade

$$M[\phi]E[\phi] = \frac{1}{6} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{L^2}^2,$$

dada pela Proposição 2.35, rearranjando os termos, tirando a raiz quadrada e considerando a conservação de massa e de energia, temos (5.2.2). \square

O próximo lema apresenta uma segunda coercividade que será usada no futuro próximo.

Lema 5.7. *Seja $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|\nabla f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} < (1 - \delta) \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}$. Então existe $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ tal que*

$$\|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4}^4 \geq \delta' \|f\|_{L^4}^4. \quad (5.2.3)$$

Demonstração. Escreva o primeiro termo de (5.2.3) como

$$\|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4}^4 = 3E[f] - \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2.$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.2.2) com constante ótima

$$C = \frac{4}{3 \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}},$$

temos

$$\begin{aligned} E[f] &\geq \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 \left[1 - \frac{1}{2} C \|\nabla f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \right] \\ &> \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 \left[1 - \frac{1}{2} (1 - \delta) C \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \right] = \left(\frac{1}{6} + \frac{\delta}{3} \right) \|\nabla f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Assim, temos $\|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} \|f\|_{L^4}^4 \geq \delta \|\nabla f\|_{L^2}^2$ e, portanto,

$$\delta \|\nabla f\|_{L^2}^2 \geq \frac{3\delta}{4(1-\delta)} \|f\|_{L^4}^4.$$

Combinando as duas desigualdades temos (5.2.3), com $\delta' = 3\delta/(4(1-\delta))$. \square

Em seguida, generalizamos as duas coercividades obtidas anteriormente para coercividades sobre bolas. Pelos dois lemas anteriores, dada $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ nas hipóteses do Teorema 5.1, então existem $\delta, \delta' > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$, temos

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2} \leq (1-2\delta) \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} \|u(t)\|_{L^4}^4 \geq \delta' \|u(t)\|_{L^4}^4.$$

Lema 5.8. *Sob as hipóteses do Lema 5.6, seja $\chi^\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ a característica suave da bola unitária em \mathbb{R}^3 , isto é, $\chi^\rho(x) = 1$ se $|x| < 1$ e $\chi^\rho(x) = 0$ se $|x| > 1 + \rho$, e $\chi_R(x) := \chi^\rho(x/R)$. Então,*

$$\int |\chi_R \nabla u|^2 dx = \int |\nabla(\chi_R u)|^2 + \chi_R \Delta(\chi_R) |u|^2 dx \quad (5.2.4)$$

e existe $R = R(\delta, M[u], \phi) > 0$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\chi_R u(t)\|_{L_x^2} \|\nabla(\chi_R u(t))\|_{L_x^2} \leq (1-\delta) \|\phi\|_{L_x^2} \|\nabla \phi\|_{L_x^2}.$$

Em particular, existe $\delta'' > 0$ tal que

$$\|\nabla \chi_R u(t)\|_{L_x^2}^2 - \frac{3}{4} \|\chi_R u(t)\|_{L_x^4}^4 \geq \delta'' \|\chi_R u(t)\|_{L_x^4}^4.$$

Demonstração. Note que $\|\chi_R u(t)\|_{L_x^2} \leq \|u(t)\|_{L_x^2}$, e, por uma integração por partes,

$$\begin{aligned} &\int |\nabla(\chi_R u)|^2 + \chi_R \Delta(\chi_R) |u|^2 dx \\ &= \int |u \nabla \chi_R|^2 + |\chi_R \nabla u|^2 + 2\text{Re}(\overline{\chi_R \nabla u} u \nabla \chi_R) dx \\ &\quad - \int |u \nabla \chi_R|^2 + \chi_R \bar{u} \nabla u \nabla \chi_R + \chi_R u \overline{\nabla u} \nabla \chi_R dx \\ &= \int |\chi_R \nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Logo

$$\|\nabla(\chi_R u)\|_{L_x^2}^2 \leq \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}M[u]\right)$$

e a primeira desigualdade segue se escolhermos R suficientemente grande ao passo que a segunda é uma consequência direta do Lema 5.7. \square

5.3 Identidade Virial

A seguinte identidade Virial é uma generalização da Proposição 4.3 e tem papel importante na demonstração de que u satisfaz o critério de espalhamento (5.1.2).

Proposição 5.9 (Identidade de Morawetz/Virial). *Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução da equação (1.0.1) e $a \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ uma função radial tal que $\partial^\alpha a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, para $|\alpha| \leq 4$ e defina*

$$Z(t) = 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} \nabla u \nabla a \, dx.$$

Então,

$$\partial_t Z(t) = 4\text{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j,k=1}^3 \partial_{jk} a \partial_j \bar{u} \partial_k u \, dx \right\} - \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 \Delta a - |u|^2 \Delta \Delta a \, dx. \quad (5.3.1)$$

Demonstração. Analogamente à demonstração de (4.1.14), utilizamos a equação (1.0.1) e integramos por partes repetidas vezes até obter o resultado. Temos

$$\begin{aligned} \partial_t Z(t) &= 2\text{Im} \left\{ \int (\nabla u \nabla a) \bar{u}_t + (\nabla u_t \nabla a) \bar{u} \, dx \right\} \\ &= 2\text{Im} \left\{ \int (\nabla u \nabla a) \bar{u}_t - (\nabla \bar{u} \nabla a + \bar{u} \Delta a) u_t \, dx \right\} \\ &= 2\text{Im} \left\{ \int 2(\nabla u \nabla a) \bar{u}_t - u_t \bar{u} \Delta a \, dx \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \int u_t \bar{u} \Delta a \, dx \right\} &= \text{Im} \left\{ \int i(\Delta u + |u|^2 u) \bar{u} \Delta a \, dx \right\} \\ &= \int |u|^4 \Delta a \, dx + \text{Re} \left\{ \int \bar{u} \Delta a \Delta u \, dx \right\} \\ &= \int |u|^4 \Delta a \, dx - \text{Re} \left\{ \int [\nabla \bar{u} \Delta a + \bar{u} \nabla(\Delta a)] \nabla u \, dx \right\} \\ &= \int |u|^4 \Delta a \, dx - \int \Delta a |\nabla u|^2 \, dx - \text{Re} \left\{ \int \bar{u} \nabla(\Delta a) \nabla u \, dx \right\} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int \bar{u}(\nabla \Delta a) \nabla u \, dx \right\} &= \frac{1}{2} \int (\nabla \Delta a) (\bar{u} \nabla u + u \nabla \bar{u}) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \nabla(\Delta a) \nabla(|u|^2) \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int |u|^2 \Delta \Delta a \, dx.
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Além disso, utilizando novamente a equação (1.0.1), podemos escrever

$$\operatorname{Im} \left\{ \int (\nabla u \nabla a) \bar{u}_t \, dx \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ \int (\Delta u + |u|^2 u) (\nabla \bar{u} \nabla a) \, dx \right\}. \tag{5.3.5}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int (\nabla \bar{u} \nabla a) \Delta u \, dx &= \sum_{j,k} \int \partial_{jk} u \, \partial_k \bar{u} \, \partial_j a \, dx \\
&= - \sum_{j,k} \int \partial_{jk} a \, \partial_k \bar{u} \, \partial_j u + \partial_{jk} \bar{u} \, \partial_j u \, \partial_k a \, dx \\
&= - \int (\nabla u \nabla a) \Delta \bar{u} \, dx - \sum_{j,k} \int \partial_{jk} a \, \partial_k \bar{u} \, \partial_j u \, dx,
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int \Delta \bar{u} \nabla u \nabla a \, dx \right\} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int \nabla a \nabla(|\nabla u|^2) \, dx \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \nabla a \nabla(|\nabla u|^2) \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \Delta a |\nabla u|^2 \, dx
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ \int |u|^2 u \nabla \bar{u} \nabla a \, dx \right\} &= \frac{1}{2} \int |u|^2 u \nabla \bar{u} \nabla a + |u|^2 \bar{u} \nabla u \nabla a \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int |u|^2 \nabla a (u \nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla u) \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int \nabla a \nabla(|u|^4) \, dx \\
&= -\frac{1}{4} \int \Delta a |u|^4 \, dx.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Coletando (5.3.2)-(5.3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t Z(t) = & 4 \left(\sum_{j,k} \operatorname{Re} \int \partial_{jk} a \partial_k \bar{u} \partial_j u dx - \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \Delta a dx + \frac{1}{4} \int \Delta a |u|^4 dx \right) \\ & - 2 \left(- \int |\nabla u|^2 \Delta a dx + \int \Delta a |u|^4 dx + \frac{1}{2} \int |u|^2 \Delta \Delta a dx \right). \end{aligned}$$

Simplificando esta expressão obtemos a identidade desejada. \square

Para justificar os cálculos formais feitos na demonstração da Proposição 5.9 é necessário primeiramente considerar soluções mais regulares e em seguida tomar um limite usando a dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais. Esse tipo de argumento pode ser encontrado, por exemplo, em J. Ginibre e G. Velo [18], página 20, Proposition 3.4.

5.4 Estimativa Virial

Em seguida utilizamos a Identidade Virial para demonstrar uma estimativa do tipo Virial/Morawetz para a média temporal da norma $L^4(\mathbb{R}^3)$ na bola da solução u . Esta é a ferramenta principal para mostrar o anulamento da norma $L^4(\mathbb{R}^3)$ enunciado na Proposição 5.5.

Dado $R > 0$ a ser definido posteriormente, defina $a \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ por

$$a(x) = \begin{cases} |x|^2, & |x| \leq R, \\ 2R|x|, & |x| > 2R, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

satisfazendo as seguintes condições na região intermediária $R < |x| \leq 2R$

$$\partial_r a \geq 0, \quad \partial_r^2 a \geq 0, \quad |\partial^\alpha a| \lesssim R|x|^{-|\alpha|+1}, \quad \text{para } |\alpha| \geq 1. \quad (5.4.2)$$

Onde ∂_r denota a derivada radial

$$\partial_r a = \nabla a \cdot \frac{x}{|x|} \quad \text{e} \quad \partial_i a = \frac{x_i}{|x|} \partial_r a. \quad (5.4.3)$$

Observe que para $|x| \leq R$,

$$\partial_{jk} a = 2\delta_{jk}, \quad \nabla a = 2x, \quad \Delta a = 6, \quad \Delta \Delta a = 0$$

e para $|x| > 2R$,

$$\partial_{jk} a = \frac{2R}{|x|} \left[\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{|x|^2} \right], \quad \nabla a = \frac{2Rx}{|x|}, \quad \Delta a = \frac{2R}{|x|}$$

e

$$\partial_j^2 \left(\frac{2R}{|x|} \right) = \partial_j \left(\frac{2Rx_j}{|x|^3} \right) = \frac{2R}{|x|^3} - \frac{6Rx_j^2}{|x|^5}.$$

Portanto,

$$\Delta \Delta a = \Delta \frac{2R}{|x|} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2R}{|x|^3} - \frac{6Rx_j^2}{|x|^5} \right) = 0.$$

Note que $\partial^\alpha a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, para $|\alpha| \leq 4$.

Proposição 5.10. *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução radial da equação (1.0.1) satisfazendo (4.3.2) e (4.3.3). Para $T > 0$ e $R = R(\delta, M[u], \phi)$ suficientemente grande,*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{|x| \leq R} |u(x, t)|^4 dx dt \lesssim_{E, \delta} \frac{R}{T} + \frac{1}{R^2}. \quad (5.4.4)$$

Demonstração. Tome R dado pelo Lema 5.8 e a como definida em (5.4.1). Como u é uniformemente limitada em H^1 , a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos dá

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |Z(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| 2 \operatorname{Im} \int \bar{u} \nabla u \nabla a dx \right| \lesssim R \sup_{t \in \mathbb{R}} \int |\bar{u} \nabla u| dx \lesssim R \|u\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_x^2} \lesssim_E R \quad (5.4.5)$$

Agora, utilizando (5.3.1), as hipóteses e as relações encontradas para a função a acima, temos

$$\begin{aligned} \partial_t Z(t) &= 8 \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx + \int_{|x| > 2R} \frac{-4R}{|x|} |u|^4 dx \\ &\quad + \int_{|x| > 2R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j,k} \frac{8R}{|x|} \left[\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{|x|^2} \right] \partial_j \bar{u} \partial_k u \right\} dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} 4 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j,k} \partial_{jk} a \partial_j \bar{u} \partial_k u \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{R}{|x|^3} |u|^2 + \frac{R}{|x|} |u|^4 \right) dx. \end{aligned}$$

Agora observe que a terceira integral é nula, pois

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \frac{8R}{|x|} \left[\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{|x|^2} \right] \partial_j \bar{u} \partial_k u &= \frac{8R}{|x|} |\nabla u|^2 - \frac{8R}{|x|} \sum_{j,k} \frac{x_j x_k}{|x|^2} \partial_j \bar{u} \partial_k u \\ &= \frac{8R}{|x|} |\nabla u|^2 - \frac{8R}{|x|} \sum_j \frac{x_j}{|x|} \partial_j \bar{u} \sum_k \frac{x_k}{|x|} \partial_k u \\ &= \frac{8R}{|x|} |\nabla u|^2 - \frac{8R}{|x|} \partial_r \bar{u} \partial_r u \\ &= \frac{8R}{|x|} |\nabla u|^2 - \frac{8R}{|x|} |\partial_r u|^2 = 0, \end{aligned}$$

uma vez que, por (5.4.3), $|\nabla u| = |\partial_r u|$, se u for radial. De maneira análoga, novamente por (5.4.3), temos

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \partial_{jk} a \partial_j \bar{u} \partial_k u &= \sum_{j,k} \left\{ \left[\partial_r^2 a \frac{x_j x_k}{|x| |x|} - \partial_r a \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|} - \frac{x_j x_k}{|x|^3} \right) \right] |\partial_r u|^2 \frac{x_j x_k}{|x| |x|} \right\} \\ &= \partial_r^2 a |\partial_r u|^2 - \partial_r a |\partial_r u|^2 \sum_{j,k} \left(\frac{\delta_{jk} x_j x_k}{|x|^3} - \frac{x_j^2 x_k^2}{|x|^5} \right) \\ &= \partial_r^2 a |\partial_r u|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_t Z &\geq 8 \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx - \int_{|x| > 2R} \frac{4R}{|x|} |u|^4 dx \\ &\quad + \int_{R < |x| \leq 2R} \mathcal{O} \left(\frac{R}{|x|^3} |u|^2 + \frac{R}{|x|} |u|^4 \right) dx \\ &\geq 8 \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx - c \int_{|x| > R} |u|^4 dx - \frac{cM[u_0]}{R^2}. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar a integral na bola $B(0, R)$. Considere χ_R como no Lema 5.8, então para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\rho > 0$ suficientemente pequeno, de forma que

$$-\varepsilon < \int_{\mathbb{R}^3} \chi_R^2 |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} \chi_R^2 |u|^4 dx - \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx$ (observe que a desigualdade (5.2.3) garante que $\varepsilon > 0$, desde que R seja escolhido suficientemente grande), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} |u|^4 dx &> \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_R^2 |\nabla u|^2 - \frac{3}{4} \chi_R^2 |u|^4 dx \\ &= \frac{1}{2} \int |\chi_R \nabla u|^2 - \frac{3}{4} |\chi_R u|^4 dx + \frac{3}{8} \int (\chi_R^4 - \chi_R^2) |u|^4 dx. \end{aligned}$$

Além disso, a identidade (5.2.4) implica

$$\int \chi_R^2 |\nabla u|^2 dx \geq \|\nabla(\chi_R u)\|_{L_x^2}^2 - \frac{\|\chi^\rho \Delta \chi^\rho\|_{L^\infty}}{R^2} M[u_0].$$

Logo, pelo Lema 5.7,

$$\begin{aligned} \partial_t Z &\geq 4 \|\nabla(\chi_R u)\|_{L_x^2}^2 - \frac{4}{R^2} \|\chi^\rho \Delta \chi^\rho\|_{L^\infty} M[u_0] - 3 \|\chi_R u\|_{L_x^4}^4 + 3 \int (\chi_R^4 - \chi_R^2) |u|^4 dx \\ &\quad - c \int_{|x| > R} |u|^4 dx - \frac{cM[u_0]}{R^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 4 \left(\|\nabla(\chi_R u)\|_{L_x^2}^2 - \frac{3}{4} \|\chi_R u\|_{L_x^4}^4 \right) - \frac{4 \|\chi^\rho \Delta \chi^\rho\|_{L^\infty} + c}{R^2} M[u_0] \\
&\quad - (c+3) \int_{|x|>R} |u|^4 dx \\
&\geq 4\delta' \|\chi_R u\|_{L_x^4}^4 - \frac{4 \|\chi^\rho \Delta \chi^\rho\|_{L^\infty} + c}{R^2} M[u_0] - (c+3) \int_{|x|>R} |u|^4 dx,
\end{aligned}$$

pois $\chi_R^4 - \chi_R^2 \geq -1$. Integrando a última desigualdade no intervalo $[0, T]$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^T \int_{|x|\leq R} |u(x, t)|^4 dx dt \lesssim \sup_{t \in \mathbb{R}} |Z(t)| + \frac{T}{R^2} M[u_0] + \int_0^T \int_{|x|>R} |u(x, t)|^4 dx dt.$$

Pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 2.24,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>R} |u(x, t)|^4 dx &\leq \frac{1}{R^2} \int |x|^2 |u(x, t)|^4 dx \leq \frac{1}{R^2} \| |x|u \|_{L_x^\infty}^2 \|u\|_{L_x^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{R^2} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^2 M[u_0].
\end{aligned}$$

Finalmente, tendo em vista a majoração (5.4.5), obtemos (5.4.4). \square

5.5 Evacuação da Energia e Espalhamento

Finalmente, temos todas as ferramentas para demonstrar a Proposição 5.5 e o Teorema 5.1, os quais repetimos aqui os enunciados.

Proposição 5.11. *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução radial da equação (1.0.1) satisfazendo (4.3.2) e (4.3.3). Existem sequências $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow \infty$, e $(R_n)_n$, $R_n \rightarrow \infty$, tais que*

$$\lim_n \int_{|x|\leq R_n} |u(t_n)|^4 dx = 0. \tag{5.5.1}$$

Demonstração. Seja $T_n \rightarrow \infty$ e defina $R_n := T_n^{1/3}$, então pela Proposição 5.10, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x|\leq R_n} |u(t)|^4 dx dt \lesssim T_n^{-2/3} \rightarrow 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, T_n]$, obtemos $t_n \in (0, T_n)$ tal que

$$\int_{|x|\leq R_n} |u(t_n)|^4 dx = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x|\leq R_n} |u(t)|^4 dx dt \rightarrow 0. \tag{5.5.2}$$

Note que $t_n \rightarrow \infty$, pois caso contrário, a menos de subsequência, existiria t^* tal que $t_n \rightarrow t^*$, daí, pela continuidade do fluxo e (5.5.2), teríamos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(t^*)|^4 dx = \lim_n \int_{|x| \leq R_n} |u(t_n)|^4 dx = 0,$$

o que implica $u(t^*) = 0$ q.t.p e, conseqüentemente, $\|u_0\|_{L^2} = \|u(t^*)\|_{L^2} = 0$, o que é uma contradição com a hipótese $u_0 \neq 0$. \square

Teorema 5.12. *Suponha que $u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ e que $M[u_0]E[u_0] < M[\phi]E[\phi]$. Se $\|u_0\|_{L^2} \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\phi\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^2}$, então a solução global u da equação de Schrödinger (1.0.1) se espalha.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.6, sabemos que a solução u é global e uniformemente limitada em H^1 . Sejam ε , R e também $(t_n)_n$, $(R_n)_n$ dados pelo Lema 5.2 e pela Proposição 5.5, respectivamente. Tomando n tal que $R_n > R$, a desigualdade de Hölder nos dá

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, t_n)|^2 dx \lesssim R^{3/2} \left(\int_{|x| \leq R_n} |u(x, t_n)|^4 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Segue do Lema 5.2 que u se espalha. \square

Referências

- [1] A. K. Arora. Scattering of radial data in the focusing NLS and generalized hartree equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 39(11):6643–6668, 2019.
- [2] A. K. Arora, B. Dodson, and J. Murphy. Scattering below the ground state for the 2d radial nonlinear schrödinger equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, page 1, 2019.
- [3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York, 2010.
- [4] L. Campos. Scattering of radial solutions to the Inhomogeneous Nonlinear Schrödinger Equation. *arXiv e-prints*, page arXiv:1905.02663, May 2019.
- [5] L. Campos and M. Cardoso. Blow up and scattering criteria above the threshold for the focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. *arXiv e-prints*, page arXiv:2001.11613, Jan 2020.
- [6] T. Cazenave and F. B. Weissler. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1 . *Manuscripta Math.*, 61(4):477–494, 1988.
- [7] F. Demengel and G. Demengel. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. Universitext. Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2012. Translated from the 2007 French original by Reinie Ern e.
- [8] J. Diestel and J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1977.
- [9] B. Dodson and J. Murphy. A new proof of scattering below the ground state for the 3D radial focusing cubic NLS. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(11):4859–4867, 2017.
- [10] B. Dodson and J. Murphy. A new proof of scattering below the ground state for the non-radial focusing NLS. *Mathematical Research Letters*, 25(6):1805–1825, 2018.

- [11] V. Duong Dinh. Non-radial scattering theory for nonlinear Schrödinger equations with potential. *arXiv e-prints*, page arXiv:2001.01783, Jan 2020.
- [12] T. Duyckaerts, J. Holmer, and S. Roudenko. Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation. *arXiv e-prints*, page arXiv:0710.3630, Oct. 2007.
- [13] T. Duyckaerts and S. Roudenko. Threshold solutions for the focusing 3D cubic Schrödinger equation. *Rev. Mat. Iberoam.*, 26(1):1–56, 2010.
- [14] T. Duyckaerts and S. Roudenko. Going beyond the threshold: scattering and blow-up in the focusing NLS equation. *Comm. Math. Phys.*, 334(3):1573–1615, 2015.
- [15] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [16] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave. Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation. *Sci. China Math.*, 54(10):2037–2062, 2011.
- [17] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Functional Analysis*, 32(1):1–32, 1979.
- [18] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear schrödinger equations. i. the cauchy problem, general case. *Journal of Functional Analysis*, 32(1):1–32, Apr. 1979.
- [19] R. T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18(9):1794–1797, 1977.
- [20] N. Hayashi, K. Nakamitsu, and M. Tsutsumi. On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, 71(2):218–245, 1987.
- [21] T. Hmidi and S. Keraani. Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(46):2815–2828, 2005.
- [22] J. Holmer and S. Roudenko. A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 282(2):435–467, 2008.
- [23] H. Ikezi, R. J. Taylor, and D. R. Baker. Formation and interaction of ion-acoustic solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 25:11–14, Jul 1970.
- [24] R. Iório Júnior and V. d. M. a. Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides. [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, third edition, 2013.

- [25] V. I. Karpman and E. Krushkal. Modulated waves in a nonlinear dispersive media. *Sov.Phys.-JETP*, 28(2):277–281, 1969.
- [26] P. L. Kelley. Self-focusing of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 16:384–384, Feb 1966.
- [27] C. E. Kenig and F. Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear schrödinger equation in the radial case. *Inventiones mathematicae*, 166(3):645–675, Oct. 2006.
- [28] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. (5)*, 39(240):422–443, 1895.
- [29] Z. Li. Endpoint Strichartz estimates for magnetic wave equations on two dimensional hyperbolic spaces. *Differential Integral Equations*, 32(7-8):369–408, 2019.
- [30] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, 2009.
- [31] V. Narayanamurti and C. M. Varma. Nonlinear propagation of heat pulses in solids. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1105–1108, Oct 1970.
- [32] T. Ogawa and Y. Tsutsumi. Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 92(2):317–330, 1991.
- [33] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. The soliton: a new concept in applied science. *Proc. IEEE*, 61:1443–1483, 1973.
- [34] C. Sulem and P.-L. Sulem, editors. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. Springer New York, 2004.
- [35] T. Tao. On the asymptotic behavior of large radial data for a focusing non-linear Schrödinger equation. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 1(1):1–48, 2004.
- [36] F. D. Tappert and C. M. Varma. Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1108–1111, 1970.
- [37] M. I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Comm. Math. Phys.*, 87(4):567–576, 1982/83.
- [38] Y. Xie, L. Li, and S. Zhu. Dynamical behaviors of blowup solutions in trapped quantum gases: concentration phenomenon. *J. Math. Anal. Appl.*, 468(1):169–181, 2018.
- [39] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.