

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Solange Schardong

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA NA ARTE DE ESCHER

Belo Horizonte
2023

Solange Schardong

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA NA ARTE DE ESCHER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Heleno da Silva Cunha.

Belo Horizonte

2023

Schardong, Solange

S311g A geometria hiperbólica na arte de Escher [manuscrito] /
Solange Schardong. – 2023.
88 f. il.

Orientador: Heleno da Silva Cunha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.87-88.

1. Matemática – Teses. 2. Poincaré, Séries de – Teses. 3. Geometria hiperbólica – Teses. I. Cunha, Heleno da Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

A geometria hiperbólica na arte de Escher

SOLANGE SCHARDONG

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Heleno S. C.

Prof. Heleno da Silva Cunha
UFMG

Lucas H. Rocha de Souza

Pósdoc. Lucas Henrique Rocha de Souza
UFMG

Susana C. Fornari

Profa. Susana Candida Fornari
UFMG

Belo Horizonte, 04 de agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador Heleno Cunha, pelos ensinamentos, dedicação, paciência e incentivo durante todos esses anos. Agradeço aos professores da Pós-Graduação pelas aulas e conhecimentos transmitidos, os quais foram fundamentais para concluir esta etapa. Também agradeço aos professores que passaram durante minha vida escolar, que sempre me incentivaram a seguir a vida acadêmica. Agradeço a minha família por sempre estar apoiando minhas decisões, em especial ao meu irmão Felipe Schardong, pelos conselhos dados e pelas vezes que me ajudou nos momentos de dificuldade. Agradeço aos meus amigos que fiz durante o mestrado.

*“Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente
cômodas, que nos dispensam ambas de refletir”(ERNST, 1991).*

RESUMO

Este trabalho aborda a geometria hiperbólica presente por trás das obras Limites Circulares I, III e IV elaboradas pelo matemático Maurits Cornelis Escher. Nestas obras encontramos elementos como curvas equidistantes e tesselações hiperbólicas regulares associadas a grupos triangulares. O objetivo do trabalho é determinar, mediante o teorema de Poincaré, polígonos fundamentais convexos e construir superfícies compactas pelo quociente Δ/Γ , onde Δ é o disco de Poincaré e Γ é um grupo discreto gerado por isometrias de Δ que identificam os lados do polígono.

Palavras-chave: teorema de Poincaré; geometria hiperbólica; limites circulares.

ABSTRACT

This work approaches the hyperbolic geometry present behind the works Circular Limits I, III and IV elaborated by the mathematician Maurits Cornelis Escher. In these works we find elements such as equidistant curves and regular hyperbolic tessellations associated with triangular groups. The objective of this work is to determine, using the Poincaré theorem, convex fundamental polygons and to construct compact surfaces by the quotient Δ/Γ , where Δ is the Poincaré disk and Γ is a discrete group generated by the isometries of Δ that identify the sides of the polygon.

Keywords: Poincaré's theorem; hyperbolic geometry; circular boundaries.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	A VIDA, ARTE E O INFINITO DE M. C. ESCHER	12
2.1	História de vida, técnicas de arte e obras produzidas	12
2.2	Ladrilhamento do plano Euclidiano	14
2.3	Infinito e limites circulares	19
3	MODELOS HIPERBÓLICOS	25
3.1	Transformações de Möbius	25
3.1.1	O subgrupo $PSL(2, \mathbb{R})$ de $PSL(2, \mathbb{C})$	29
3.2	Modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 e do disco de Poincaré Δ	30
3.3	Métrica hiperbólica	32
3.4	Geodésicas	37
3.5	Triângulos e polígonos hiperbólicos	40
3.5.1	Área hiperbólica	44
3.5.2	Trigonometria hiperbólica	47
3.6	Isometrias	53
3.6.1	Classificação das isometrias	54
4	SUBGRUPOS DISCRETOS E DOMÍNIOS FUNDAMENTAIS	58
4.1	Grupos descontínuos	58
4.2	Grupos fuchsianos	59
4.3	Domínios fundamentais	60
4.3.1	Polígono de Dirichlet	63
4.4	Teorema de Poincaré	67
5	GRUPOS TRIANGULARES E TESSELAÇÕES HIPERBÓ- LICAS	70
5.1	Grupos triangulares	70
5.2	Tesselações hiperbólicas	71
6	APLICAÇÕES NAS OBRAS LIMITES CIRCULARES	75
6.1	Limite Circular III	75
6.1.1	Curvas equidistantes	81
6.2	Limite Circular I	81
6.3	Limite Circular IV	84

7	CONCLUSÕES	86
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês conhecido pelas suas xilogravuras e litografias, em que representa construções de paisagens, ilusões de ótica, preenchimento regular do plano, metamorfoses e explorações do infinito. Em março de 2022 completaram-se cinquenta anos de sua morte, um dos motivos que nos inspirou a desenvolver um estudo sobre algumas de suas obras mais importantes, os Limites Circulares.

Nas obras Limites Circulares I, II, III e IV, o artista faz uma representação do infinito em uma circunferência. Por trás de cada obra existem vários elementos da Geometria Hiperbólica, como geodésicas, curvas equidistantes, triângulos, polígonos e tesselações hiperbólicas regulares associadas a grupos triangulares.

O objetivo inicial do trabalho é identificar a existência de tesselações hiperbólicas regulares associadas a grupos triangulares. Utilizando o teorema de Poincaré (Teorema 3.4.1), queremos determinar polígonos fundamentais convexos e construir superfícies compactas pelo quociente Δ/Γ , onde Δ é o disco de Poincaré e Γ é um grupo discreto gerado pelas isometrias de Δ que identificam os lados do polígono.

Através da teoria de superfícies que estudaremos, temos que todas as superfícies compactas de gênero $g \geq 2$ podem ser mapeadas por um polígono P_{4g} , de $4g$ lados e $4g$ vértices, que satisfaz certas condições em relação ao ciclo de vértices e a transformação associada ao ciclo. Buscaremos determinar tais tipos de polígonos em cada obra, pois neste caso sabemos que a superfície gerada é um toro de gênero g .

O resultado final obtido pela construção descrita acima é superfícies de gênero g que estão recobertas pelas imagens que aparecem em cada obra. Orientando os lados do polígono e definindo isometrias que identificam tais lados adequadamente, podemos obter as superfícies recobertas com as imagens se encaixando perfeitamente e preservando as cores que aparecem. Porém, conseguir identificar tal polígono (e se ele existe) nem sempre é tarefa fácil, pois seus vértices podem estar localizados perto da fronteira de Δ , o que dificulta o processo de construção e visualização. Além disso, o número de vértices do polígono pode ser grande, o que torna mais complicado de encontrá-lo.

Assim, para estudar estes problemas, primeiramente nos dedicamos a entender a teoria de Geometria Hiperbólica e alguns resultados importantes, como o teorema de Poincaré. A seguir, apresentamos a estrutura de cada capítulo do trabalho.

No Capítulo 1, faremos um breve relato sobre a história de vida, técnicas de arte, principais obras e ladrilhamentos do plano feitos por Escher. Veremos como surgiram

as primeiras ideias de introduzir o infinito em suas obras. Apresentaremos uma imagem feita pelo matemático Coxeter que inspirou Escher a obter a ideia de infinito em suas construções. Depois mostraremos cada uma das obras Limites Circulares I, II, III e IV.

No capítulo 2, vamos apresentar dois modelos da Geometria Hiperbólica, que são o modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 e o modelo do disco de Poincaré Δ . Descreveremos, primeiramente, as Transformações de Möbius e o subgrupo $PSL(2, \mathbb{R})$ de $PSL(2, \mathbb{C})$, cujo entendimento é necessário para construção dos modelos hiperbólicos. Na sequência apresentamos cada um dos modelos e construímos um isomorfismo entre eles. Abordamos a métrica hiperbólica, comprimento de curvas e descrevemos as geodésicas. Determinamos polígonos e triângulos hiperbólicos, mostrando resultados referentes à área e leis trigonométricas nesta geometria. Por fim, apresentamos as isometrias e sua classificação.

No capítulo 3 o principal objetivo é apresentar o teorema de Poincaré. Para isso, primeiramente, falaremos de grupos descontínuos, grupos fuchsianos, domínios e polígonos fundamentais. A partir deste estudo, veremos que qualquer grupo fuchsiano agindo de forma descontínua sobre o plano hiperbólico tem um polígono fundamental convexo (Teorema 3.3.3). Tal polígono é chamado de polígono de Dirichlet. Depois apresentamos o teorema de Poincaré, que nos fornece um método para construir grupos fuchsianos a partir de polígonos e uma identificação de lados, além de mostrar que o polígono será um polígono fundamental convexo para o grupo fuchsiano.

No capítulo 4 definiremos grupo triangular e tesselação hiperbólica regular. Apresentaremos tesselações autoduais, ou seja, tesselações do tipo $\{p, p\}$, geradas por polígonos de p lados onde em cada vértice do polígono se encaixam p de suas réplicas. Abordaremos também a teoria de superfícies obtidas através de polígonos regulares P_{4g} que geram uma tesselação autodual $\{4g, 4g\}$ e satisfazem o teorema de Poincaré.

No capítulo 5 aplicamos a teoria estudada nas obras Limites Circulares I, III e IV, mostrando a existência de tesselações hiperbólicas regulares associadas a grupos triangulares. Na obra Limite Circular III, definimos um polígono P_{4g} que gera uma tesselação autodual, satisfaz o teorema de Poincaré e gera uma superfície Δ/Γ de gênero g , tal que as isometrias que identificam os lados do polígono unem perfeitamente as imagens dos peixes que aparecem na obra, porém não preservam a cor dos peixes. Nesta obra, falaremos também sobre curvas equidistantes. Nas obras Limites Circulares I e IV veremos que as tesselações associadas a grupos triangulares são as mesmas nas duas obras.

2 A VIDA, ARTE E O INFINITO DE M. C. ESCHER

Neste capítulo vamos falar sobre a história e obras de Maurits Cornelis Escher. Escher nasceu em 17 de junho de 1898, em Leeuwarden, Holanda. Se tornou um artista muito conhecido devido às xilogravuras e litografias que desenvolveu. Nas suas primeiras obras produziu desenhos de paisagens reais e imaginárias que chamavam muita atenção devido à seleção de pontos de fuga, uso de luz, sombra e cores. Mais tarde, criou desenhos onde introduziu o tema sobre Perspectiva, reflexos e fez a representação de objetos tridimensionais em um desenho bidimensional, criando uma perfeita ilusão de ótica. Anos depois, começou a fazer ladrilhamentos, onde ilustrava muitos tipos de simetrias, utilizando ainda como temas a natureza, paisagens e vistas urbanas. Nestas obras, sempre demonstrou que um padrão de ladrilhamentos pode se estender indefinidamente tanto no espaço como no tempo. A partir de 1938, se dedicou a produzir obras que transmitem uma impressão gráfica do infinito em fronteiras finitas, fazendo um perfeito ladrilhamento do espaço, euclidiano e não euclidiano, onde são representadas. O estudo deste capítulo foi baseado nas referências Ernst [8], Gupta [10], Rodrigáñez [17], Rodrigues [18], Schattschneider [21] e Tjabbes [25].

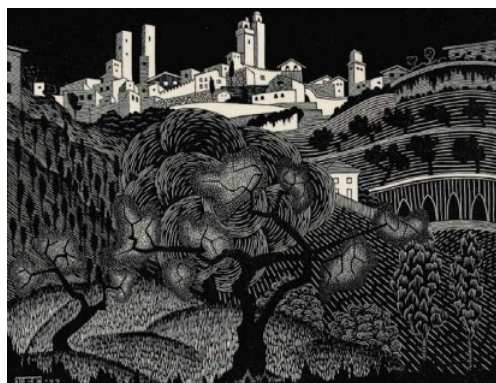
2.1 História de vida, técnicas de arte e obras produzidas

Escher foi filho do engenheiro holandês George Arnold Escher, que se casou com Sarah Gleichmann após a morte da sua primeira esposa. Sarah foi a mãe de Escher e ele foi o último dos cinco filhos da família. Apesar dos seus irmãos seguirem na área de ciências e engenharia, Escher não gostava muito de matemática, pois o seu interesse era em artes gráficas. O apoio dos seus pais era pouco para seguir esta carreira, pois achavam que o filho não teria sucesso e segurança econômica para a sua vida. Porém, o seu professor de artes gráficas, Samuel Jesserun de Mesquita, da escola onde estudou, acabou convencendo-os do talento do filho.

Escher era especializado em xilogravuras e litografias. As xilogravuras são feitas através do corte de um desenho num bloco de madeira. Para esculpir o desenho, são utilizadas ferramentas chamadas de goivas. Após esculpido o desenho, é aplicada uma tinta na matriz e a mesma é prensada em um papel para receber o desenho, como se fosse um carimbo. Já nas litografias, o desenho é feito sobre uma pedra plana especialmente tratada. Para fazer o desenho é utilizado um lápis bem gorduroso. Depois do desenho pronto, isolam-se partes que ficarão em branco com goma arábica e, em seguida, molha-se

com água e aplica-se a tinta na superfície, coloca-se o papel e, por fim, a prensa.

Em 1922, após concluir os seus estudos, Escher se mudou para a Itália, onde permaneceu até 1935. Neste período ele produziu muitos desenhos retratando as paisagens italianas, revelando sempre a visão escheriana, ou seja, o que ele sentia diante de determinada cena: a essência do local. A inspiração para criar os desenhos surgia através das várias viagens que realizou pelo país, muitas vezes acompanhado de outros pintores que havia conhecido em Roma, os quais compartilhavam o objetivo de capturar impressões e fazer esboços. Grande parte dos trajetos, principalmente pelo sul da Itália, eram feitos a pé e duravam vários dias. Nesta época, Escher ainda era bastante desconhecido. Tinha organizado algumas pequenas exposições e ilustrado dois ou três livros, mas raramente vendia alguma obra. A Figura 1.1 mostra algumas artes produzidas neste período.



(a) San Gimignano (1922)



(b) Barbarano, Cimino (1929)

Figura 1 – Paisagens italianas.

Fonte: Tjabbes (2013).

As imagens produzidas eram muito belas, porém tradicionalistas. Escher, então começou a produzir obras com novos temas. A Perspectiva foi uma das suas primeiras inovações, em que a técnica permite ao artista sugerir relação dentro de uma imagem. Ele fez experiências escolhendo um ponto de vista elevado ou baixo retratando, por exemplo, as montanhas italianas e vales. A obra “Atrani, (1932)”, Figura 1.2 (a), retrata um dos seus trabalhos neste estilo. Outro novo tema foi mostrar o conflito entre duas e três dimensões, que tem por objetivo representar uma figura que parece ser espacial, mas é plana. Podemos citar como obra produzida “Três Esferas I, (1945)”, Figura 1.2 (b). Nesta obra pode-se observar uma ilusão tridimensional, no entanto, trata-se apenas de projeções bidimensionais. Em outras obras explorou os reflexos de vários modos, por exemplo, na água e em um grande número de autorretratos que sempre envolviam o uso de um espelho. A obra “Três Mundos, (1950)”, Figura 1.2 (c), que mostra as folhas caídas das árvores na água, os reflexos de três árvores distintas e um peixe logo abaixo da superfície da água, é um exemplo. Também, a obra “Autorretrato em esfera espelhada, (1935)”, Figura 1.2

(d), que mostra uma esfera espelhada suspensa por uma mão refletindo todo o ambiente a sua volta numa única imagem em forma de disco, tem a mesma ideia.

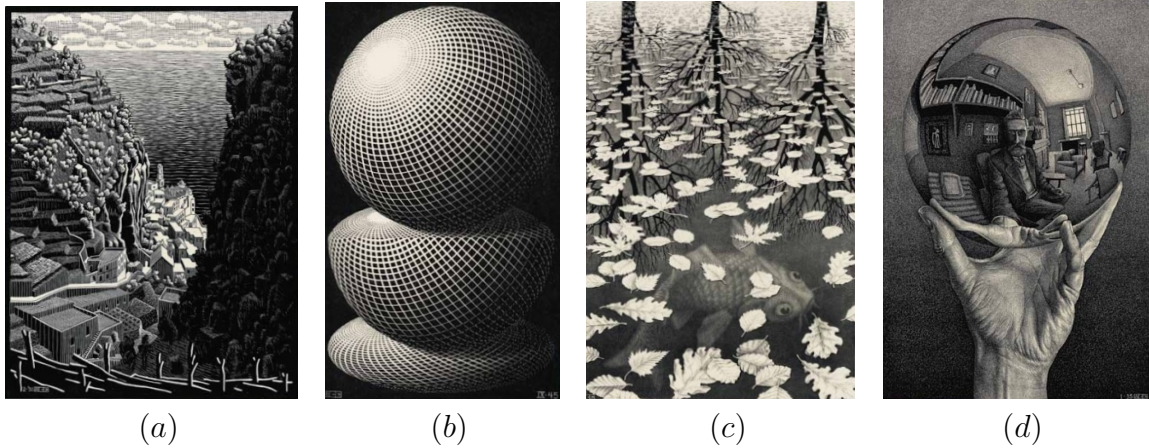


Figura 2 – Perspectiva, ilusão de ótica e reflexos.

Fonte: Tjabbes (2013).

As novas ideias e temas tornaram o seu trabalho mais atrativo e reconhecido. Mas sua carreira como artista começou a despertar interesse de um público maior quando introduziu nas suas obras o tema de ladrilhamentos, ou seja, o conceito de divisão regular do plano, conforme apresentamos na próxima seção.

2.2 Ladrilhamento do plano Euclidiano

Baseado em [18], dizemos que um ladrilhamento ou tesselação do plano euclidiano é uma cobertura deste plano por regiões poligonais congruentes, de tal modo que todo ponto do plano é coberto por pelo menos uma região, onde duas regiões distintas quaisquer não se interceptam, exceto somente em suas arestas ou vértices.

O interesse de Escher por ladrilhamentos surgiu após descobrir os azulejos mouros no Alhambra (em Granada, na Espanha) e os azulejos decorativos em Revello (na Itália). Escher e a sua esposa copiaram os ornamentos e depois do regresso da viagem ele investigou-os profundamente.

Segundo [17] e [21], a divisão regular do plano é possível somente para um total de dezessete sistemas diferentes, conforme os que aparecem na Figura 1.3. Porém, foi necessário muito tempo e muita matemática para demonstrar que estas dezessete maneiras são as únicas possíveis. Como Escher não era matemático, não tinha conhecimento o suficiente para explicar porque somente dezessete sistemas cobriam o plano perfeitamente, sem sobreposições. Então, procurou em bibliotecas assuntos relacionados e descobriu

um artigo do matemático húngaro George Pólya, intitulado “Sobre la analogia de las simetrías del cristal en el plan”, onde George explica essa classificação dos planos de simetria e mostra um exemplo para ilustrar cada caso. Sem entender muito o artigo, Escher, baseado nos desenhos de Pólya e nos seus próprios desenhos, passou mais de quatro anos construindo as suas teorias e explicações sobre como determiná-los. Então, em 1937 conseguiu realizar, em breves esboços, um sistema muito prático que, em 1941 e 1942, fixou por escrito, conseguindo dar uma explicação para cada um dos casos descritos por Pólya.

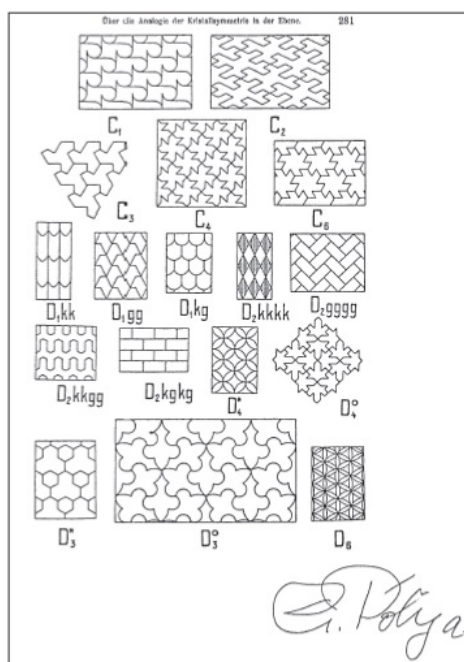


Figura 3 – Dezessete sistemas que ladrilham o plano.

Fonte: Schattschneider (2010).

Com o entendimento de todos os sistemas possíveis, Escher começou a criar teselações nas suas xilogravuras. Porém, ao invés de trabalhar com figuras geométricas tradicionais, como as que apareciam nos azulejos de Alhambra e Revello, buscou demonstrar novas possibilidades para uma divisão regular do plano. Uma característica especial e única da divisão de superfícies de Escher é que ele escolhe sempre representar alguma coisa concreta, principalmente algo existente na natureza. Sobre isso, ele escreve:

Os árabes eram mestres na arte de preencher superfícies, sem lacunas, sempre com a mesma figura. Eles decoraram, em especial, em Alhambra, na Espanha, paredes e pavimentos com peças de majólica coloridas e congruentes, ajustadas umas às outras, de forma contínua. É pena que a religião islâmica lhes proibisse a representação de imagens. Nos seus mosaicos limitaram-se sempre

a figuras geométricas abstractas. Tanto quanto é do meu conhecimento, nenhum artista árabe, arriscou alguma vez (ou nunca lhe teria vindo a ideia?) usar como elementos para preenchimento de superfícies, figuras concretas, perceptíveis e existentes na Natureza, como aves, peixes, répteis e pessoas. Esta limitação é para mim tanto mais incompreensível quanto o reconhecimento das componentes dos meus padrões é a razão do interesse que mantenho vivo neste campo. (ERNST, 1991, p. 37).

Escher fez duas contribuições específicas quanto aos ladrilhamentos: primeiro ele substituiu as formas geométricas, como paralelogramos, por imagens realistas, depois ele transformou estas imagens, fazendo-as evoluir em vez de se repetirem num padrão estático, criando assim uma metamorfose.

A Figura 1.4 (a), “Divisão regular da superfície para Dia e Noite”, mostra uma das mais simples possibilidades de preenchimento regular de uma superfície. O padrão de aves brancas e pretas transfere-se a si mesmo por translação. Ou seja, se deslocarmos uma ave branca mais para a direita ou para cima, resulta de novo o mesmo padrão.

A obra anterior, foi utilizada por Escher para criar a xilogravura “Dia e Noite”, conforme mostra Figura 1.4 (b), sendo uma das suas gravuras mais populares e admiradas. Podemos ver que de cima ao centro temos o mesmo preenchimento da Figura 1.4 (a), mas este não é o ponto de partida da obra, ele encontra-se em baixo, no centro. Ali temos uma região de campos retangulares brancos entre duas cidades típicas holandesas. Olhando para cima, estes campos aos poucos vão se transformando em aves brancas. Ou seja, a terra elevou-se de repente para o céu e pode voar para a direita sobre uma pequena aldeia na margem de um rio, na escuridão da noite. Agora, do mesmo modo, olhando para as regiões de campos retangulares pretos, a medida que estes elevam-se ao céu se transformam em aves pretas que voam para a esquerda sobre uma paisagem holandesa, iluminada pelo sol que é, exatamente, a imagem inversa da paisagem noturna do lado direito. Podemos ver que as duas imagens espelham-se mutuamente e estendem-se lado a lado, sendo formadas a partir de campos que começam a dar forma aos pássaros que sobrevoam as duas regiões.



(a) Divisão regular da superfície para Dia e Noite

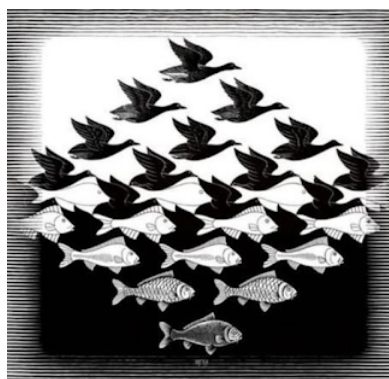


(b) Dia e Noite

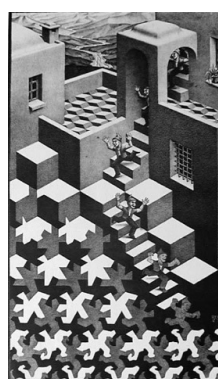
Figura 4 – Preenchimento regular da superfície.

Fonte: Ernst (1991) e Tjabbes (2013).

Além desta obra, podemos citar outras xilogravuras que Escher criou representando metamorfoses. Em “Céu e Água I”, Figura 1.5 (a), temos o retrato de peixes e aves, onde os peixes brancos aos poucos vão se transformando para dar forma ao céu e as aves pretas se misturam para dar forma à água. Também, a xilogravura “Ciclo”, Figura 1.5 (b), que mostra pequenos duendes que descem correndo uma escada de pedra, transformam-se em figuras geométricas e estas aos poucos dão forma a um bloco de pedra do pavimento ladrilhado do pequeno pátio murado do castelo. Lá por trás, num pequeno quarto, estas formas parecem serem transformadas em seres humanos.



(a) Céu e Água



(b) Ciclo

Figura 5 – Ilustrações de metamorfoses.

Fonte: Tjabbes (2013) e Ernst (1991).

Outra divisão regular da superfície aparece na obra “Anjos e Demônios”, Figura 1.6. Escolhendo um ponto onde se tocam as pontas de quatro asas, podemos girar todo o padrão em 90° e dessa maneira torná-lo congruente novamente. Mas nem todos estes pontos são iguais, ou seja, o encontro das pontas das asas no centro da imagem em A não

é o mesmo que em B , C , D e E . Porém, os pontos P , Q , R e S , aparecem no mesmo sentido que A .

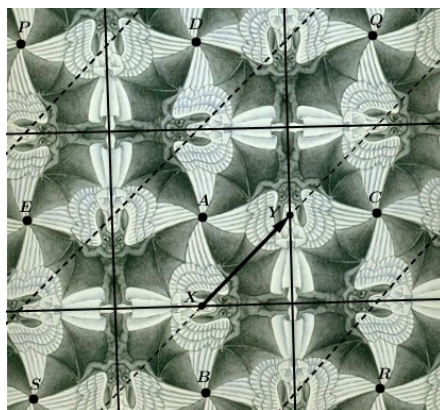


Figura 6 – “Anjos e Demonios”.

Fonte: Adaptado de Ernst (1991).

Além disso, também destacamos eixos de reflexão, determinados pelas linhas verticais e horizontais traçadas através dos eixos médios dos corpos de todos os anjos e demônios. Nestes eixos podemos refletir todo o conteúdo da superfície, de modo a ficar congruente. Além dos eixos de reflexão, existem também eixos de reflexão com escorregamento (linhas pontilhadas), sendo estes traçados pelas cabeças dos anjos e formam um ângulo de 45° com os eixos de reflexão. Neste caso, para obter padrões congruentes, primeiro efetua-se uma reflexão no respectivo eixo e depois se faz o desenho escorregar para cima segundo o vetor \overrightarrow{XY} , em diagonal, ao longo do eixo. Logo, o que obtemos são figuras de anjos e demônios que preenchem toda a superfície, em diversas direções, sem deixar qualquer lacuna.

Escher criou vários trabalhos representando a divisão regular da superfície. Mas, ao questionar o que conseguiu com esta divisão regular pode ver que não existia nenhum infinito ali, mas sim, só um fragmento dele. Observando as superfícies ladrilhadas, notou que se a superfície fosse infinitamente grande, poderia representar um número infinito de figuras como, por exemplo, anjos e demônios. Mas como vivemos numa realidade material e tridimensional sabemos que é impossível produzir uma superfície que se estende infinitamente em todas as direções.

Assim, Escher buscou outras ideias para fazer a representação do infinito, retratando o mesmo em fronteiras finitas determinadas por circunferências. Porém, para alcançar seu objetivo, não utilizou mais Geometria Euclidiana, mas sim a Geometria Hiperbólica em suas construções. Na próxima seção apresentaremos os trabalhos produzidos, os quais nomeou de Limites Circulares I, II, III e IV. Faremos um estudo mais detalhado sobre eles no Capítulo 4, pois precisamos de conceitos de Geometria Hiperbólica para seu

entendimento.

2.3 Infinito e limites circulares

Em 1959, Escher escreve em um artigo o que o inspirou para querer representar o infinito:

Não podemos imaginar que algures por trás da estrela mais longínqua do céu noturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual nada mais existe. O conceito de vácuo diz-nos ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio, de qualquer maneira na nossa fantasia, mas a nossa força de imaginação é incapaz de apreender o conceito de nada no sentido de ausência de espaço. Por isso nos agarramos a uma quimera, a um além, a um purgatório, a um céu e a um inferno, a uma ressurreição ou uma nirvana que de novo têm de ser eternos no tempo e infinitos no espaço, e isto desde que o homem na Terra se deita, senta ou levanta, desde que nela se arrasta e corre; navega, cavalga e voa (e da Terra para fora se projeta) (ERNST, 1991, p. 102).

Na primeira tentativa de conseguir representar o infinito, em 1939, Escher cria a obra “Evolução II” que aparece na Figura 1.7 (a), em que representa uma composição de figuras mostrando uma constante redução radial das margens para o ponto central. As figuras reduzem infinitamente de tamanho e um número infinito delas converge para um único ponto. Nesta xilogravura nota-se que ainda está presente o conceito de metamorfose.

Ao invés de representar o infinito por uma metamorfose, na sua próxima tentativa, Escher constrói figuras isomorfas, que vão apenas mudando de tamanhos e não de formas. A obra criada foi “Cada Vez Menor, (1958)”, ilustrada na Figura 1.7 (b), onde se nota que as componentes são sucessivamente reduzidas à metade. Mas essa redução mais uma vez foi insatisfatória, devido aos seus limites externos serem arbitrários. Assim, observou que a melhor maneira de obter uma totalidade de figuras logicamente contidas em uma região seria fazendo o processo inverso, ou seja, realizando a redução das figuras na direção do centro para as bordas, tais que estas estão limitadas dentro de uma circunferência. Em seus trabalhos posteriores, cria então as xilogravuras Limite Circular I, II, III e IV.

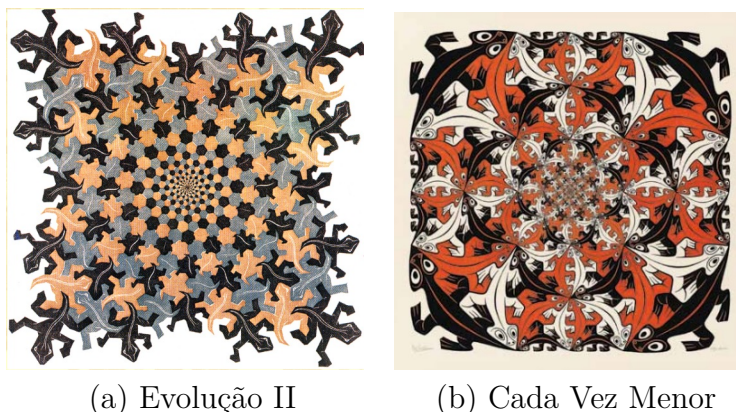


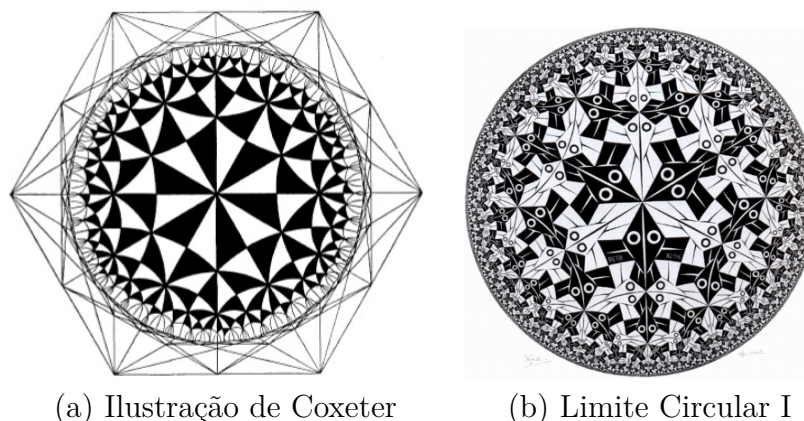
Figura 7 – Primeiras tentativas para representar o infinito.

Fonte: Ernst (1991) e Tjabbes (2013).

A inspiração de Escher para desenvolver limites circulares veio por meio de uma obra feita por Coxeter, Figura 1.8 (a), a qual estava no artigo “Crystal Symmetry and its Generalizations” que recebeu do mesmo. A ilustração de Coxeter é baseada em um modelo que o matemático Henri Poincaré construiu para o plano hiperbólico, uma superfície não euclidiana na qual por um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas a esta.

Quando olhamos para a imagem de Coxeter podemos notar a presença de triângulos (no ponto de vista hiperbólico) formados pela intersecção de retas que passam pelo ponto central e arcos de circunferências que diminuem a medida que se aproximam da fronteira da circunferência. Esses ladrilhos triangulares que se repetem infinitamente dentro de uma circunferência foram exatamente o que Escher precisava para obter o infinito em um espaço finito.

Escher trabalhou sobre a figura com régua e compasso, destacando vários pontos importantes que apareciam. Além disso, novamente sem utilizar muita matemática, buscou apenas entender como medir, ou seja, como são as “linhas” no modelo desenvolvido por Poincaré, pois a propriedade métrica neste modelo mostra que tudo está diminuindo de tamanho a medida que se aproxima da borda da circunferência e torna-se cada vez maior a medida que se afasta dela. A partir disso, conseguiu desenvolver o seu próprio plano de construção, produzindo, em 1958, a xilogravura Limite Circular I, mostrada na Figura 1.8 (b).



(a) Ilustração de Coxeter

(b) Limite Circular I

Figura 8 – Representação do infinito em fronteiras finitas.

Fonte: Coxeter (1979) e Tjabbes (2013).

A obra Limite Circular I retrata peixes pretos e brancos, onde os maiores estão localizados no centro da circunferência e um número infinito deles com tamanhos cada vez menores estão na fronteira circular. Esta configuração consiste, além de três linhas retas passando pelo centro, de arcos com raios cada vez menores a medida que aproxima-se da fronteira. Além disso, todos eles intersectam-se em ângulos retos.

Para Escher, a obra ainda apresentava muitas imperfeições, pois não só a forma dos peixes, desenvolvidos de abstrações retilíneas em criaturas rudimentares, mas também o seu arranjo, em relação ao todo e a cada um deixa a desejar. Podemos observar pares de peixes brancos que viram a cabeça um para o outro e pares de peixes pretos cujas caudas se tocam. Logo, não existe nenhuma continuidade, nenhuma direção de movimento e nenhuma cor homogênea em cada fileira. Outra imperfeição que existe na obra é que o padrão não tem simetria de cores, pois os peixes pretos e brancos não são congruentes. Existem várias diferenças nas formas dos peixes pretos e brancos, a mais óbvia é a diferença dos ângulos no nariz dos peixes.

Na sua segunda tentativa de obter o infinito em uma região limitada por uma circunferência, Escher cria a obra Limite Circular II, ilustrada na Figura 1.9. Dentre as obras Limites Circulares, esta é a menos conhecida, parece-se muito com Limite Circular I, porém agora com imagens de cruces que preenchem a região circular. Em uma conversa, Escher diz:

Na verdade esta versão deveria ser pintada na superfície interior duma semiesfera. Ofereci-a ao Papa Paulo para que ele pudesse decorar com ela o interior da cúpula de São Pedro. Imaginei um número infinito de cruces penduradas por cima da sua cabeça! Mas o papa não quis (ERNST, 1991, p. 109).



Figura 9 – Limite Circular II.

Fonte: Gupta (2006).

Em 1959, Escher cria a gravura Limite Circular III, Figura 1.10, que é sua obra mais conhecida neste gênero. Nela, novamente utiliza imagens de peixes, porém agora com quatro cores e faz algumas variações em relação a Limite Circular I. Os arcos que estão representados por traços brancos, parecem ser perpendiculares à fronteira da circunferência, mas não são, conforme veremos no Capítulo 5. Escher faz o seguinte relato sobre a obra:

Na xilogravura a cores Limite circular III, as deficiências do Limite Circular I estão aqui consideravelmente eliminadas. Agora não temos mais do que fileiras em tráfego contínuo, tendo todos os peixes que pertencem a uma mesma fileira, a mesma cor, e nadam uns atrás dos outros - cabeça de um, na cauda do outro - ao longo de um trajeto circular, de margem a margem. Quanto mais se aproximam do centro, tanto maiores se tornam. Foram necessárias quatro cores, para que cada fileira se distinga claramente das outras (ERNST, 1991, p. 109).



Figura 10 – Limite Circular III.

Fonte: Gupta (2006).

A última das obras produzidas na tentativa de representar o infinito numa região circular limitada foi Limite Circular IV, Figura 1.11, completada em julho de 1960, que também é conhecida como Céu e Inferno, pois ilustra imagens de anjos e demônios. Esta obra também utiliza o mesmo esquema de Coxeter.

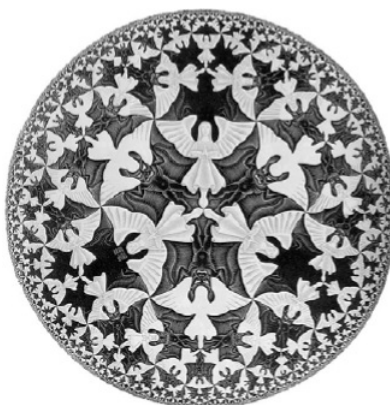


Figura 11 – Limite Circular IV.

Fonte: Gupta (2006).

Nas quatro obras, embora as figuras tenham tamanhos diferentes, no sentido euclidiano, quando se aproximam da fronteira da circunferência, veremos mais adiante que todas são congruentes sob a métrica da distância hiperbólica. Ou seja, estas xilogravuras produzidas na verdade possuem todas as figuras com tamanhos constantes no espaço hiperbólico. Diferentemente das obras Evolução II e Cada Vez Menor, podemos observar em Limites Circulares que Escher buscou introduzir sempre uma transformação gradual do elemento base em cada repetição sucessiva, para que a figura transformada continuasse a ser reconhecida como uma transformação da figura anterior, fazendo com que as características básicas da figura não tivessem mudanças. Além disso, como seu objetivo era

inserir um número infinito de imagens em uma tela finita, o tamanho e o deslocamento do elemento base não pode ser constante, assim, fez o tamanho das imagens tender a zero à medida que se aproximam da fronteira da circunferência, transmitindo a sensação de infinito desejada.

O trabalho será direcionado para o estudo das obras Limites Circulares I, III e IV. No Capítulo 5, veremos que em cada obra existem três classes de pontos significativos. Tais pontos formam polígonos que geram tesselações regulares para o plano hiperbólico. Cada tesselação está associada a um grupo triangular G^* , que possui como geradores a reflexão nos lados de um triângulo hiperbólico.

3 MODELOS HIPERBÓLICOS

Neste capítulo apresentaremos dois modelos da Geometria Hiperbólica, o modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 e o modelo do disco de Poincaré Δ . Inicialmente, descreveremos as transformações de Möbius, o grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ e a sua relação com o grupo de transformações de Möbius. Depois passaremos ao subgrupo $PSL(2, \mathbb{R})$ de $PSL(2, \mathbb{C})$ e veremos sua importância para o modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 . Na sequência definiremos o modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 e o modelo do disco de Poincaré Δ . Abordaremos a métrica hiperbólica, o comprimento hiperbólico de curvas e estudaremos as propriedades das “retas” hiperbólicas, também chamadas de geodésicas. Vamos apresentar os triângulos e polígonos hiperbólicos, definir e demonstrar resultados referentes a sua área, além de demonstrar o teorema de Pitágoras, as leis dos senos e cossenos hiperbólica. Por fim, veremos as isometrias hiperbólicas e a sua classificação. As principais referências para este capítulo são Anderson [1], Andrade [2], Beardon [4], Doria [6], Katok [11], Needham [16], Rodrigues [18], Santos [19] e Sousa R. [23].

3.1 Transformações de Möbius

Nesta seção iremos definir transformação de Möbius e estudar algumas de suas propriedades. Vamos considerar o plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Uma transformação de Möbius é uma aplicação $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.1)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

A condição $ad - bc \neq 0$ garante que a função não é constante. De fato, pois se $ad - bc = 0$ teríamos $ad = bc$. Assim, sendo $c \neq 0$, da igualdade temos $b = \frac{ad}{c}$. Logo,

$$g(z) = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d)}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Também, para a existência de $g(z)$, as constantes c e d não podem ser simultaneamente iguais a zero. Assim, se $c = 0$ e $ad = bc$, temos $d \neq 0$ e $a = \frac{bc}{d} = 0$, então $g(z) = \frac{b}{d}$. Portanto, se $ad - bc = 0$ a função $g(z)$ é uma constante, o que descaracteriza uma função de transformação.

Quando $c = 0$ a transformação de Möbius $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d}, & \text{se } z \neq \infty; \\ \infty, & \text{se } z = \infty; \end{cases} \quad (3.2)$$

e quando $c \neq 0$ temos

$$g(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \neq \left\{ \frac{-d}{c}, \infty \right\}; \\ \infty, & \text{se } z = \frac{-d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

A toda transformação de Möbius $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ está associada uma matriz 2×2 , dada por

$$[g] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tal matriz também é chamada de matriz de Möbius. A seguir vamos definir uma norma e uma métrica para matrizes associadas a uma transformação de Möbius.

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ definimos a matriz conjugada transposta A^* por

$$A^* = (\overline{A})^t = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}.$$

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, definimos

$$[A, B] = \text{tr}(AB^*) = a\bar{e} + b\bar{f} + c\bar{g} + d\bar{h}.$$

Uma verificação para as seguintes proposições pode ser vista em [4].

Proposição 3.1.1. $[A, B]$ é um produto escalar no espaço das matrizes 2×2 , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $[A, A] \geq 0$, sendo a igualdade válida se, e somente se, $A = 0$;
- (ii) $[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = \lambda_1 [A_1, B] + \lambda_2 [A_2, B]$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$;
- (iii) $[B, A] = \overline{[A, B]}$.

Proposição 3.1.2. O produto escalar induz uma norma no espaço das matrizes 2×2 , dada por

$$\|A\| = \sqrt{[A, A]} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}, \quad (3.4)$$

que satisfaz:

- (i) $\|A\| \geq 0$, sendo a igualdade válida se, e somente se, $A = 0$;
- (ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, com $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Proposição 3.1.3. *A norma $\|A\|$ induz a seguinte métrica*

$$\|A - B\| = \sqrt{[A - B, A - B]} = \sqrt{|a - e|^2 + |b - f|^2 + |c - g|^2 + |d - h|^2}, \quad (3.5)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\|A - B\| = 0$ se, e somente se, $A = B$;
- (ii) $\|B - A\| = \|A - B\|$;
- (iii) $\|A - B\| \leq \|A - C\| + \|C - B\|$.

Destacam-se os seguintes tipos de transformações de Möbius:

- Homotetia: $g(z) = \lambda z$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$;
- Translação: $g(z) = z + b$;
- Inversão: $g(z) = \frac{1}{z}$.

Além disso, a expressão da transformação de Möbius $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, quando $c \neq 0$, é gerada pela composição $g(z) = g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4(z)$, onde:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= z + \frac{a}{c}; \\ g_2(z) &= \frac{bc - da}{c^2}z; \\ g_3(z) &= \frac{1}{z}; \\ g_4(z) &= z + \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

Nas transformações acima, g_1 e g_4 são translações, g_2 é uma homotetia e g_3 é uma inversão. Quando $c = 0$, temos que $g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, ou seja, g é a composição de uma homotetia e uma translação.

Vamos denotar por \mathcal{M} o conjunto de todas as transformações de Möbius, ou seja, se $g \in \mathcal{M}$ então g é da forma 2.1.

Proposição 3.1.4. *\mathcal{M} é um grupo com a operação de composição de funções.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius. Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$, tais que

$$g_1 = \frac{az + b}{cz + d} \text{ e } g_2 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Então

$$(g_2 \circ g_1)(z) = g_2(g_1(z)) = \frac{\alpha \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}. \quad (*)$$

Como g_1 e g_2 satisfazem $ad - bc \neq 0$ e $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, respectivamente, temos que

$$(\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) =$$

$$\begin{aligned} \alpha\gamma b + \alpha\delta d + \beta c\gamma b + \beta c\delta d - \alpha b\gamma a - \alpha b\delta c - \beta d\gamma a - \beta d\delta c = \\ \alpha\delta(ad - bc) - \beta\gamma(ad - bc) = \\ (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $g_2 \circ g_1$ é uma transformação de Möbius.

Agora, temos três condições para verificar que \mathcal{M} é um grupo:

(i) Se $g_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, para $j = 1, 2, 3$, são transformações de Möbius, então

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3(z) = g_1((g_2 \circ g_3)(z)).$$

Por (*), temos

$$\begin{aligned} g_1((g_2 \circ g_3)(z)) &= \frac{a_1 \left(\frac{(a_2 a_3 + b_2 c_3)z + a_2 b_3 + b_2 d_3}{(c_2 a_3 + d_2 c_3)z + c_2 b_3 + d_2 d_3} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{(a_2 a_3 + b_2 c_3)z + a_2 b_3 + b_2 d_3}{(c_2 a_3 + d_2 c_3)z + c_2 b_3 + d_2 d_3} \right) + d_1} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 z + a_1 b_2 c_3 z + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 d_3 + b_1 c_2 a_3 z + b_1 d_2 c_3 z + b_1 c_2 b_3 + b_1 d_2 d_3}{c_1 a_2 a_3 z + c_1 b_2 c_3 z + c_1 a_2 b_3 + c_1 b_2 d_3 + d_1 c_2 a_3 z + d_1 d_2 c_3 z + d_1 c_2 b_3 + d_1 d_2 d_3}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2) \circ g_3(z) &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) \left(\frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3} \right) + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) \left(\frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3} \right) + c_1 b_2 + d_1 d_2} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 z + b_1 c_2 a_3 z + a_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 b_3 + a_1 b_2 c_3 z + b_1 d_2 c_3 z + a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 d_3}{c_1 a_2 a_3 z + d_1 c_2 a_3 z + c_1 a_2 b_3 + d_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 c_3 z + d_1 d_2 c_3 z + c_1 b_2 d_3 + d_1 d_2 d_3}. \end{aligned}$$

Portanto, $(g_1 \circ g_2) \circ g_3(z) = g_1((g_2 \circ g_3)(z))$.

(ii) Existe elemento identidade, ou seja, existe $g \in \mathcal{M}$, tal que $g \circ g_1 = g_1 \circ g = g_1$, para toda $g_1 \in \mathcal{M}$.

Afirmamos que $g(z) = z$, ou seja, $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde $b = c = 0$ e $a = d = 1$. Claramente g é uma transformação de Möbius e é a identidade.

(iii) Toda transformação de Möbius possui inversa, ou seja, se g é uma transformação, existe g^{-1} tal que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \text{Id}$.

Afirmamos que a inversa de $g \in \mathcal{M}$ corresponde a inversa da matriz associada. Ou seja, se $g = \frac{az + b}{cz + d}$, como $\det[g] = ad - bc \neq 0$, segue que $[g]$ é invertível e sua inversa é dada por

$$[g]^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Logo, a inversa da transformação de Möbius g é dada por

$$g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

De fato, pois

$$g \circ g^{-1}(z) = \frac{a \left(\frac{dz - b}{-cz + a} \right) + b}{c \left(\frac{dz - b}{-cz + a} \right) + d} = \frac{adz - ab - bcz + ba}{cdz - cb - dcz + ad} = \frac{z(ad - bc)}{ad - bc} = z \quad \text{e}$$

$$g^{-1} \circ g(z) = \frac{d \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) - b}{-c \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + a} = \frac{daz + db - bcz - bd}{-caz - cb + acz + ad} = \frac{z(ad - bc)}{ad - bc} = z.$$

□

3.1.1 O subgrupo $PSL(2, \mathbb{R})$ de $PSL(2, \mathbb{C})$

Nesta subseção vamos definir o subgrupo Linear Projetivo Especial $PSL(2, \mathbb{R})$ e falar sobre sua importância na Geometria Hiperbólica. Para isso, primeiramente, vejamos a construção do grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ e sua relação com as transformações de Möbius. Consideremos o seguinte grupo das matrizes 2×2

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}; ad - bc \neq 0 \right\},$$

o grupo com a operação de multiplicação de matrizes inversíveis, e o subgrupo

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}; ad - bc = 1 \right\}$$

de $GL(2, \mathbb{C})$, que corresponde as matrizes 2×2 que possuem determinante igual a 1.

Assim, para cada matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M} \\ A &\longmapsto g_A, \end{aligned}$$

em que $g_A : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é definida por $g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. A aplicação φ é um homomorfismo sobrejetor. De fato, dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

temos que a matriz AB é dada por

$$AB = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\varphi(AB) = g_{AB}(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} = \frac{a_1 \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \right) + d_1} = g_A(g_B(z)) = \varphi(A)\varphi(B).$$

Além disso, $\ker(\varphi) = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) : \varphi(A) = z\} = \{Id, -Id\}$. Portanto, pelo Teorema do Homomorfismo, segue que

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}} \simeq \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

Denotaremos por

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}}.$$

Logo, segue que

$$PSL(2, \mathbb{C}) \simeq \left\{ g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}. \quad (3.7)$$

Consideremos agora o subgrupo

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{Id, -Id\}}$$

de $PSL(2, \mathbb{C})$, que corresponde as transformações de Möbius $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, em que a, b, c e d são números reais e $ad - bc = 1$. Tais transformações preservam o semiplano superior formado por números complexos com parte imaginária positiva. De fato, se a, b, c e d são números reais tal que $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, então temos que

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{az + b}{cz + d} \left(\frac{c\bar{z} + d}{c\bar{z} + d} \right), \\ &= \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}, \\ &= \frac{ac|z|^2 + (ad + bc)Re(z) + (ad - bc)Im(z)i + bd}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Assim, se $Im(z)$ denota a parte imaginária de z e por $ad - bc = 1$, segue que

$$Im(g(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}.$$

Como $Im(z) > 0$ implica que $Im(g(z)) > 0$.

A importância do grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é que ele descreve o grupo de isometrias que preservam orientação para o modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 , conforme veremos na seção 2.6.

3.2 Modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 e do disco de Poincaré Δ

Nesta seção apresentaremos o modelo do disco de Poincaré Δ e do semiplano superior \mathbb{H}^2 , que são representações do espaço hiperbólico que permitem compreender melhor a geometria não euclidiana. Também mostraremos a relação entre os dois modelos através de uma isometria entre \mathbb{H}^2 e Δ .

O modelo do disco de Poincaré é definido como o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$, com $z = a + bi$, tais que $|z| < 1$, ou seja, todos os pontos que estão no interior da circunferência unitária centrada na origem.

O modelo do semiplano superior é o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$, com $z = a + bi$, tais que $Im(z) > 0$.

Denotamos o disco de Poincaré e o semiplano superior, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \Delta &= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ e} \\ \mathbb{H}^2 &= \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}. \end{aligned}$$

As fronteiras ideais de Δ e \mathbb{H}^2 são dadas, respectivamente, pelos seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \partial\Delta &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \text{ e} \\ \partial\mathbb{H}^2 &= \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Um ponto que pertence a fronteira ideal é chamado de ponto ideal. Para denotar a união de cada modelo com sua fronteira utilizamos a seguinte notação

$$\overline{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta \text{ e}$$

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2.$$

A Figura 2.1 (a) e (b) ilustra os modelos Δ e \mathbb{H}^2 , respectivamente.

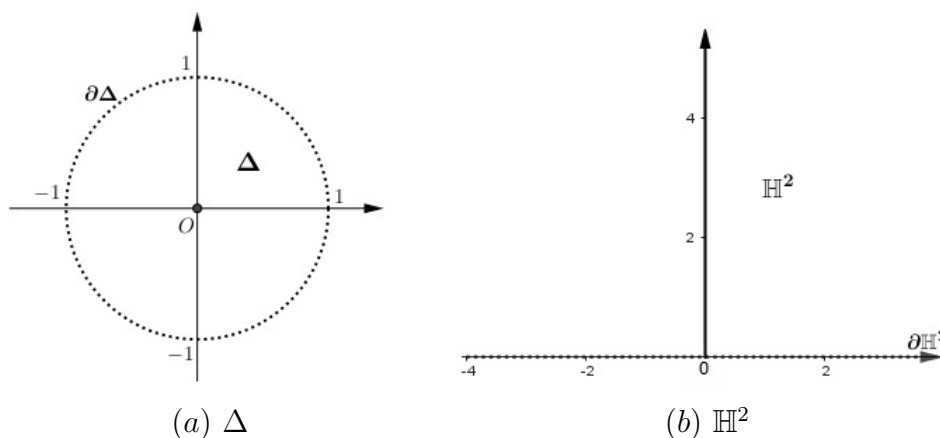


Figura 12 – Modelos hiperbólicos Δ e \mathbb{H}^2 .

Fonte: Elaborado pela autora.

Existe uma bijeção entre os dois modelos hiperbólicos. Para construir tal bijeção, consideramos a aplicação $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ definida por $\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}$. Tal aplicação mapeia o semiplano superior no disco de Poincaré. A inversa desta aplicação é dada por $\varphi^{-1} : \Delta \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $\varphi^{-1}(z) = \frac{zi + i}{1 - z}$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ \varphi^{-1})(z) &= \varphi(\varphi^{-1}(z)) = \frac{\left(\frac{zi+i}{1-z}\right) - i}{\left(\frac{zi+i}{1-z}\right) + i} = \frac{zi + i - i + zi}{zi + i + i - zi} = \frac{2zi}{2i} = z \text{ e} \\
 (\varphi^{-1} \circ \varphi)(z) &= \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \frac{\left(\frac{z-i}{z+i}\right) i + i}{1 - \left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = \frac{zi - i^2 + zi + i^2}{z + i - z + i} = \frac{2zi}{2i} = z,
 \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi \circ \varphi^{-1}(z) = \varphi^{-1} \circ \varphi(z) = Id$. Portanto, a aplicação φ é uma bijeção. A seguir, veremos que φ transforma \mathbb{H}^2 em Δ .

Considerando a métrica de cada modelo, a qual apresentamos na seção seguinte, temos que φ é uma isometria de \mathbb{H}^2 em Δ . Além disso, a fronteira de \mathbb{H}^2 é aplicada por φ na fronteira de Δ , pois $\varphi(\infty) = 1$, $\varphi(1) = -i$ e $\varphi(0) = -1$. Também, como a reta real divide o plano complexo em duas componentes, segue que φ aplica uma componente no interior da circunferência unitária e a outra é todo o exterior da circunferência. Observe que $\varphi(i) = 0$, logo \mathbb{H}^2 deve ser mapeado para Δ por φ .

3.3 Métrica hiperbólica

No espaço hiperbólico, a noção de distância é diferente da distância euclidiana e isso pode ser facilmente notado no modelo do disco de Poincaré, que é uma representação para o plano hiperbólico. Podemos observar que se calcularmos a distância entre dois pontos em Δ da mesma forma que determinamos a distância euclidiana, teremos que esta distância nunca será maior que dois, ou seja, duas vezes o raio do disco. Diante disso, vamos determinar uma métrica para os modelos hiperbólicos Δ e \mathbb{H}^2 , de tal forma que quando um dos pontos se aproxima da fronteira ideal a distância entre eles tende ao infinito.

Definimos a métrica riemanniana de Δ e \mathbb{H}^2 , respectivamente, por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)} \text{ e} \tag{3.8}$$

$$ds = \frac{|dz|}{Im(z)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \tag{3.9}$$

A partir da métrica riemanniana podemos definir o comprimento hiperbólico de curvas.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva contínua e diferenciável por partes, dada por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Definimos o comprimento hiperbólico de γ em \mathbb{H}^2 por

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{Im(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt. \tag{3.10}$$

Considerando a aplicação $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, definida por

$$t = \phi(s) = (1 - s)a + sb, \quad \forall s \in [0, 1],$$

temos que ϕ é diferenciável e a curva

$$\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \phi)(s) = \gamma(t)$$

é uma curva diferenciável por partes, em que $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{x}(s) + i\tilde{y}(s)$, com $s \in [0, 1]$. Assim,

$$\|\tilde{\gamma}\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2}}{\tilde{y}(s)} ds. \quad (3.11)$$

Como $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \phi)(s) = \gamma(\phi(s))$, temos que

$$\tilde{x}(s) = x(\phi(s)) \quad \text{e} \quad \tilde{y}(s) = y(\phi(s)).$$

Pela Regra da Cadeia, segue que

$$\tilde{x}'(s) = \frac{d\tilde{x}}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt}(b - a) = x'(t)(b - a); \quad (3.12)$$

$$\tilde{y}'(s) = \frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt}(b - a) = y'(t)(b - a); \quad (3.13)$$

$$dt = \frac{dt}{ds} ds = (b - a) ds. \quad (3.14)$$

Substituindo as equações 2.12, 2.13 e 2.14 em 2.11, obtemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}\|_{\mathbb{H}^2} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2}}{\tilde{y}(s)} ds, \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(b - a)^2 [x'(t)^2 + y'(t)^2]}}{y(t)} \frac{dt}{(b - a)}, \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}. \end{aligned}$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar as curvas sobre o intervalo $[0, 1]$ e definir o comprimento hiperbólico de γ por:

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt. \quad (3.15)$$

Dados dois pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$, a distância hiperbólica entre p_1 e p_2 é definida por

$$l(p_1, p_2) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}, \quad (3.16)$$

onde \inf é considerado o ínfimo sobre o conjunto de todas as curvas contínuas e diferenciáveis por partes ligando p_1 e p_2 em \mathbb{H}^2 , ou seja, todas as curvas diferenciáveis por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$.

Proposição 3.3.1. $l(.,.)$ é uma métrica.

Demonstração. Vamos verificar que as propriedades de métrica são válidas.

(i) $l(p_1, p_2) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} \geq 0$. A igualdade é válida se, e somente se, $p_1 = p_2$.

Como $y > 0$ e $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \geq 0$, segue que

$$\frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} \geq 0.$$

Portanto,

$$l(p_1, p_2) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \inf \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \right) \geq 0.$$

Também, temos

$$\begin{aligned} l(p_1, p_2) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = 0 &\Leftrightarrow \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 = 0 \Leftrightarrow x'(t) = y'(t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $l(p_1, p_2) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = 0$ se, e somente se, a curva é um único ponto, ou seja, $p_1 = p_2$.

(ii) $l(p_1, p_2) = l(p_2, p_1)$.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva qualquer ligando p_1 a p_2 com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$.

Considere $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(1 - s)$, para todo $s \in [0, 1]$. Assim, $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = p_2$ e $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = p_1$. Fazendo $t = 1 - s$, como $dt = -ds$, temos

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt, \\ &= - \int_1^0 \frac{\sqrt{x'(1-s)^2 + y'(1-s)^2}}{y(1-s)} ds, \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(1-s)^2 + y'(1-s)^2}}{y(1-s)} ds, \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2}}{\tilde{y}(s)} ds = \|\tilde{\gamma}\|_{\mathbb{H}^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \inf \|\tilde{\gamma}\|_{\mathbb{H}^2}$ e $l(p_1, p_2) = l(p_2, p_1)$.

iii) $l(p_1, p_3) \leq l(p_1, p_2) + l(p_2, p_3)$, para todo $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{H}^2$.

Considere $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ e $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, tais que $\gamma_1(0) = p_1$, $\gamma_1(1) = p_2$, $\gamma_2(0) = p_2$ e $\gamma_2(1) = p_3$. Vamos definir $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos que γ é uma curva contínua e diferenciável por partes, com $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = p_3$ e

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \|\gamma_1\|_{\mathbb{H}^2} + \|\gamma_2\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Aplicando o ínfimo na equação anterior, temos

$$\inf\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \inf(\|\gamma_1\|_{\mathbb{H}^2} + \|\gamma_2\|_{\mathbb{H}^2}) \leq \inf\|\gamma_1\|_{\mathbb{H}^2} + \inf\|\gamma_2\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Portanto, $l(p_1, p_3) \leq l(p_1, p_2) + l(p_2, p_3)$ □

Como existe uma isometria $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ entre \mathbb{H}^2 e Δ , é possível trabalhar com os dois modelos conforme for mais conveniente. Além disso, o comprimento hiperbólico de uma curva e a distância entre dois pontos em Δ estão diretamente associados ao que vimos em \mathbb{H}^2 .

Considerando $\rho : [a, b] \rightarrow \Delta$ uma curva contínua e diferenciável por partes em Δ , temos que $\varphi^{-1} \circ \rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma curva contínua e diferenciável por partes em \mathbb{H}^2 . Assim, através de algumas manipulações algébricas, que podem ser vistas em [18], segue que

$$\|\rho\|_{\Delta} = \|\varphi^{-1} \circ \rho\|_{\mathbb{H}^2} = \int_a^b \frac{2|\rho'(t)|}{1-|\rho(t)|^2} dt.$$

Portanto, temos a seguinte definição:

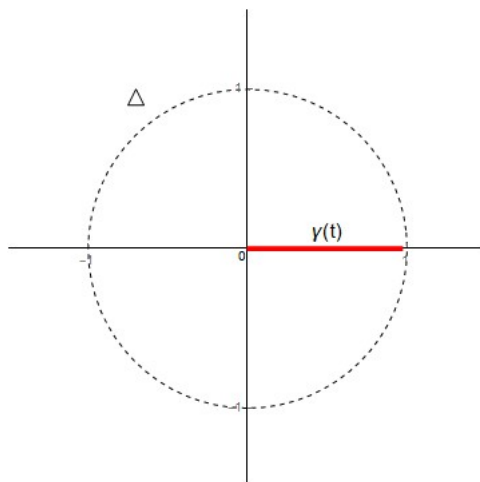
O comprimento hiperbólico de uma curva contínua e diferenciável por partes $\rho : [a, b] \rightarrow \Delta$, onde $\rho(t) = x(t) + iy(t)$, é dado por

$$\|\rho\|_{\Delta} = \int_a^b \frac{2\|\rho'(t)\|}{1-|\rho(t)|^2} dt = \int_a^b \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1-(x(t)^2 + y(t)^2)} dt. \quad (3.17)$$

Dados dois pontos $p_1, p_2 \in \Delta$, definimos a distância entre p_1 e p_2 como sendo

$$l^*(p_1, p_2) = l(\varphi^{-1}(p_1), \varphi^{-1}(p_2)).$$

Seja $\gamma : [0, r] \rightarrow \Delta$, definida por $\gamma(t) = t$, com $0 \leq r < 1$. Vamos calcular o comprimento hiperbólico da curva γ em Δ . Note que γ descreve um segmento sobre o eixo real definido em Δ (Figura 2.2).

Figura 13 – Curva γ em Δ .

Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, pela equação 2.17, temos que seu comprimento é dado por

$$\begin{aligned}
 \|\gamma\|_{\Delta} &= \int_0^r \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1 - (x^2(t) + y^2(t))} dt, \\
 &= \int_0^r \frac{2\sqrt{1^2 + 0^2}}{1 - (t^2 + 0^2)} dt, \\
 &= \int_0^r \frac{2}{1 - t^2} dt, \\
 &= \ln(1 + r) - \ln(1 - r), \\
 &= \ln\left(\frac{1 + r}{1 - r}\right).
 \end{aligned}$$

Note que quando $r \rightarrow 1$ o comprimento hiperbólico $\|\gamma\|_{\Delta} \rightarrow +\infty$. Agora, se calcularmos o comprimento euclidiano desta mesma curva temos que quando $r \rightarrow 1$, temos que este comprimento tende a um. Este exemplo mostra que as noções de comprimento são bem distintas nas geometrias hiperbólica e euclidiana.

Nos próximos dois teoremas apresentamos algumas igualdades válidas em relação a função distância em \mathbb{H}^2 e Δ . Tais igualdades são todas equivalentes e algumas delas são demonstradas em [4].

Teorema 3.3.2. *Sejam $z, w \in \mathbb{H}^2$. Então são válidas as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad l(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}; \quad (3.18)$$

$$(ii) \quad \cosh l(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}; \quad (3.19)$$

$$(iii) \quad \sinh \left(\frac{1}{2}l(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}; \quad (3.20)$$

$$(iv) \quad \cosh \left(\frac{1}{2}l(z, w) \right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}; \quad (3.21)$$

$$(v) \quad \tanh \left(\frac{1}{2}l(z, w) \right) = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|. \quad (3.22)$$

Teorema 3.3.3. *Sejam $z, w \in \Delta$. Então são válidas as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad l^*(z, w) = \log \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}; \quad (3.23)$$

$$(ii) \quad \sinh^2 \left(\frac{1}{2}l^*(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}; \quad (3.24)$$

$$(iii) \quad \cosh^2 \left(\frac{1}{2}l^*(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}; \quad (3.25)$$

$$(iv) \quad \tanh \left(\frac{1}{2}l^*(z, w) \right) = \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|. \quad (3.26)$$

Utilizaremos algumas destas igualdades na demonstração de resultados que veremos mais adiante.

3.4 Geodésicas

Nesta seção vamos falar sobre retas hiperbólicas, também chamadas de geodésicas. Veremos que, diferentemente da Geometria Euclidiana, em que a reta definida por dois pontos é sempre uma linha reta, na Geometria Hiperbólica as geodésicas podem ser curvas não lineares.

Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é dita uma geodésica se para quaisquer pontos $s, t \in [a, b]$, $s \neq t$, temos

$$l(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt,$$

ou seja, γ minimiza a distância entre os pontos de seu traço.

Proposição 3.4.1. *Sejam $z \in \mathbb{H}^2$ e C um semicírculo ortogonal ao eixo real ou uma semirreta ortogonal ao eixo real que o intersecta no ponto x_0 . Então*

$$f(z) = -\frac{1}{z - x_0} + w_0 \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

aplica C no eixo imaginário positivo, onde w_0 é escolhido adequadamente.

Demonstração. De fato, seja $x_1 \in \mathbb{R} \cup \infty$ o outro ponto em que C intersecta o eixo real. Então, $w_0 = 0$ se $x_1 = \infty$ e $w_0 = (x_1 - x_0)^{-1}$ se $x_1 \neq \infty$. \square

Dados dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ definimos o segmento de geodésica $[z_1, z_2]$ como sendo o arco de circunferência (ou segmento de reta) contido na geodésica γ determinada por z_1 e z_2 .

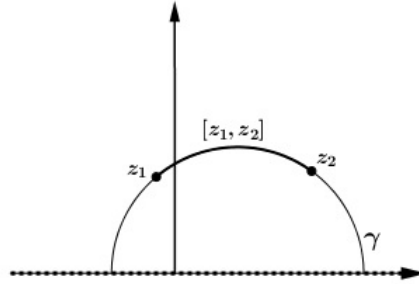


Figura 14 – Segmento de geodésicas.

Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 3.4.2. *As geodésicas de \mathbb{H}^2 são semicírculos ou semirretas ortogonais ao eixo real.*

Demonstração. Sejam p_1 e p_2 dois pontos de \mathbb{H}^2 . Suponha que $p_1 = ia$ e $p_2 = ib$, com $b > a$. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva contínua e diferenciável por partes ligando p_1 a p_2 , com $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Então

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Considere agora a curva $\psi(t) = u(t) + iv(t)$, em que $u(t) = 0$ e $v(t) = a + t(b - a)$, ou seja, o segmento do eixo imaginário ligando p_1 a p_2 . Como $u'(t) = 0$ e $v'(t) = b - a$, temos que seu comprimento é dado por

$$\|\psi\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{b - a}{a + t(b - a)} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Logo, $\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} \geq \|\psi\|_{\mathbb{H}^2}$, para toda curva $\gamma(t)$. Portanto a geodésica que liga p_1 a p_2 é o segmento do eixo imaginário que os une. Considere agora p_1 e p_2 pontos arbitrários em \mathbb{H}^2 . Seja C o semicírculo ou semirreta ortogonal ao eixo real unindo p_1 a p_2 . Pela Proposição 2.4.1, existe uma transformação $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ que mapeia C no eixo imaginário positivo. Como $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$ (ver Teorema 2.6.3, seção 2.6), o comprimento hiperbólico do segmento de linha ou semicírculo que une dois pontos em \mathbb{H}^2 é a distância hiperbólica

entre suas imagens sob a isometria que os aplica no eixo imaginário, ou seja, é a distância hiperbólica entre os próprios pontos. Logo, concluímos que a geodésica entre p_1 e p_2 é o segmento de C que une p_1 a p_2 . \square

Quaisquer dois pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$ podem ser unidos por uma única geodésica e a distância hiperbólica entre p_1 e p_2 é igual ao comprimento hiperbólico do segmento da geodésica que une os pontos.

Demonstração. Ver [11], Corolário 1.2.2. \square

Sejam p_1 e p_2 pontos distintos em \mathbb{H}^2 . Então

$$l(p_1, p_2) = l(p_1, x) + l(x, p_2)$$

se, e somente se, $x \in [p_1, p_2]$.

Demonstração. Ver [11], Corolário 1.2.3. \square

Proposição 3.4.3. *Toda isometria de \mathbb{H}^2 , em particular, toda transformação de $PSL(2, \mathbb{R})$, transforma geodésica em geodésica.*

Demonstração. Sejam $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ e $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$ e $x \in [p_1, p_2]$. Então pelo Corolário 2.4.2 e pelo Teorema 2.6.3, temos $g(x) \in [g(p_1), g(p_2)]$. Portanto, g aplica o segmento $[p_1, p_2]$ no segmento $[g(p_1), g(p_2)]$, ou seja, geodésica em geodésica. \square

Um par de geodésicas é classificado de acordo com a sua intersecção. Duas geodésicas em \mathbb{H}^2 são:

- i) concorrentes, quando as curvas se intersectam;
- ii) paralelas, quando as geodésicas formam um par de retas verticais paralelas ou um par de semicírculos que se intersectam sobre o eixo x ;
- iii) ultraparalelas, quando formam um par de semicírculos disjuntos.

Na Figura 2.4 estão ilustrados cada um destes casos.

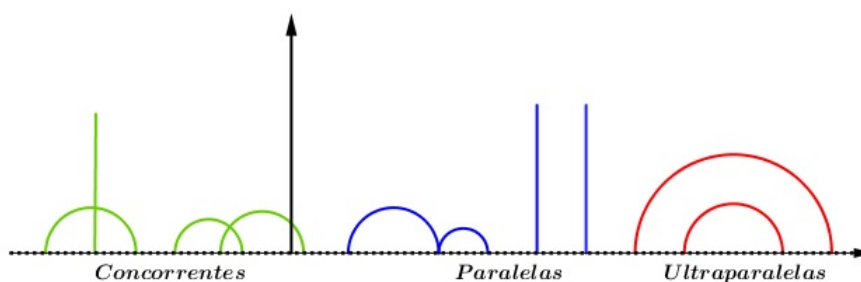


Figura 15 – Classificação de um par de geodésicas em \mathbb{H}^2 .

Fonte: Elaborado pela autora.

Antes de definir as geodésicas em Δ , apresentamos a definição de circunferências ortogonais referente a Geometria Euclidiana.

Dizemos que duas circunferências são ortogonais se as retas tangentes em seus pontos de intersecção formam um ângulo reto entre si.

Teorema 3.4.4. *As geodésicas de Δ são os seus diâmetros ou arcos de circunferência que intersectam perpendicularmente a $\partial\Delta$.*

Demonstração. Vimos que a aplicação φ definida na seção 2.2 é uma isometria. Além disso, φ aplica a fronteira de \mathbb{H}^2 na fronteira de Δ e as geodésicas de \mathbb{H}^2 são semirretas ou semicírculos ortogonais ao eixo real. Assim, a imagem destas geodésicas por φ serão ortogonais a fronteira de Δ , ou seja, serão os diâmetros ou arcos de circunferências que intersectam perpendicularmente a $\partial\Delta$. \square

Um par de geodésicas em Δ pode ser classificado como:

- (i) concorrentes, quando se intersectam em Δ ;
- (ii) paralelas, quando se intersectam em $\partial\Delta$;
- (iii) ultraparalelas, quando não se intersectam.

Cada um desses casos é mostrado na Figura 2.5.

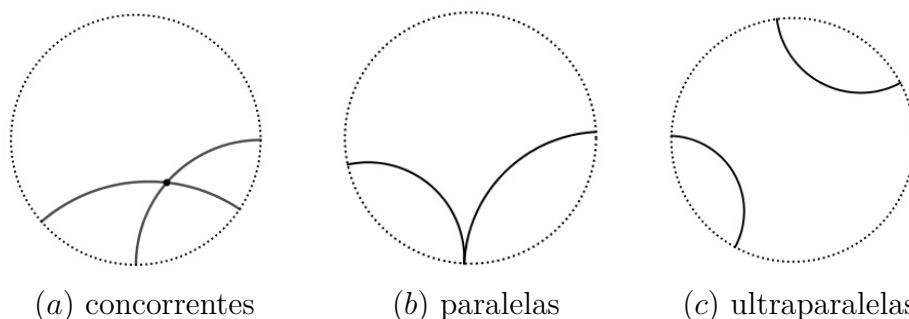


Figura 16 – Classificação de um par de geodésicas em Δ .

Fonte: Elaborado pela autora.

O Corolário 2.4.1, Corolário 2.4.2 e a Proposição 2.4.2 aplicam-se também para o modelo Δ .

3.5 Triângulos e polígonos hiperbólicos

Nesta seção vamos apresentar os triângulos e polígonos hiperbólicos. Veremos que suas propriedades são diferentes dos seus correspondentes na Geometria Euclidiana. Vamos realizar o estudo para ambos os modelos, ressaltando que podem existir vértices nas fronteiras ideais.

Em qualquer um dos modelos, dizemos que três pontos A , B e C são não colineares se não pertencem a uma mesma geodésica hiperbólica, caso contrário são colineares, veja Figura 2.6.

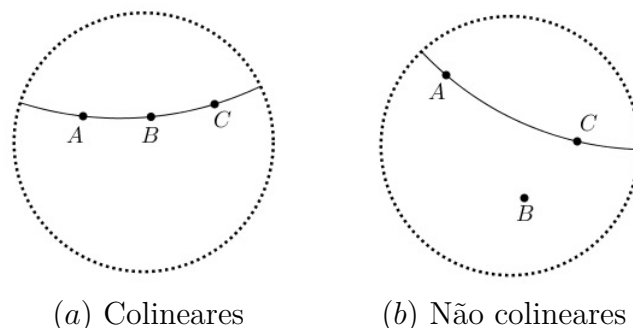


Figura 17 – Pontos colineares e não colineares.

Fonte: Elaborado pela autora.

Dados três pontos A , B e C não colineares definimos γ_{AB} , γ_{BC} e γ_{CA} as geodésicas determinadas pelos pares (A, B) , (B, C) e (C, A) , respectivamente. Assim, temos a seguinte definição de triângulo hiperbólico:

O triângulo hiperbólico $\triangle ABC$, definido pelos pontos não colineares A, B e C , é a região limitada pelas geodésicas γ_{AB} , γ_{BC} e γ_{CA} . Os vértices do $\triangle ABC$ são A, B e C enquanto os lados são os segmentos de geodésicas $[A, B]$, $[B, C]$ e $[C, A]$. A Figura 2.7 ilustra exemplos de triângulos nos dois modelos.

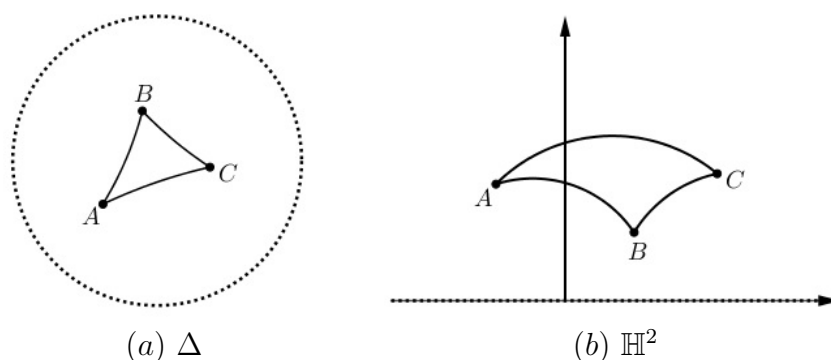


Figura 18 – Triângulos hiperbólicos .

Fonte: Elaborado pela autora.

Definimos a fronteira do triângulo $\triangle ABC$ como sendo $[A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$. Os ângulos internos de $\triangle ABC$ são os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} formados pelos seus lados, nos respectivos vértices.

A partir de agora vamos trabalhar em um triângulo com vértices, lados e ângulos definidos. Ou seja, vamos estabelecer que o triângulo $\triangle ABC$ tem vértices A, B e C , os

lados opostos aos vértices tem comprimento a, b e c , respectivamente, e os ângulos nos vértices A, B e C são α, β e γ , respectivamente, conforme Figura 2.8. Além disso, se um dos vértices do triângulo é um ponto ideal, então dizemos que o ângulo neste vértice tem medida zero.

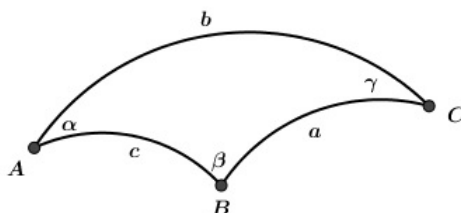


Figura 19 – Triângulo com lados, vértices e ângulos definidos.

Fonte: Elaborado pela autora.

Vejam as possibilidades para o posicionamento de um triângulo em relação a posição de seus vértices e como fica estabelecida a medida de seus lados e ângulos. Mostremos todos os casos possíveis em Δ e \mathbb{H}^2 , sendo que as duas imagens representadas em \mathbb{H}^2 ilustram um mesmo tipo de triângulo. Seja X igual a Δ ou \mathbb{H}^2 .

- i) $A, B, C \in X$. Então a medida de todos os lados e ângulos é finita (Figura 2.7);
- ii) $A \in \partial X$. Neste caso, $\alpha = 0$ e $b = c = \infty$ (Figura 2.9);
- iii) $A, B \in \partial X$. Temos que $\alpha = \beta = 0$ e $a = b = c = \infty$ (Figura 2.10);
- iv) $A, B, C \in \partial X$. No triângulo temos $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e $a = b = c = \infty$ (Figura 2.11).

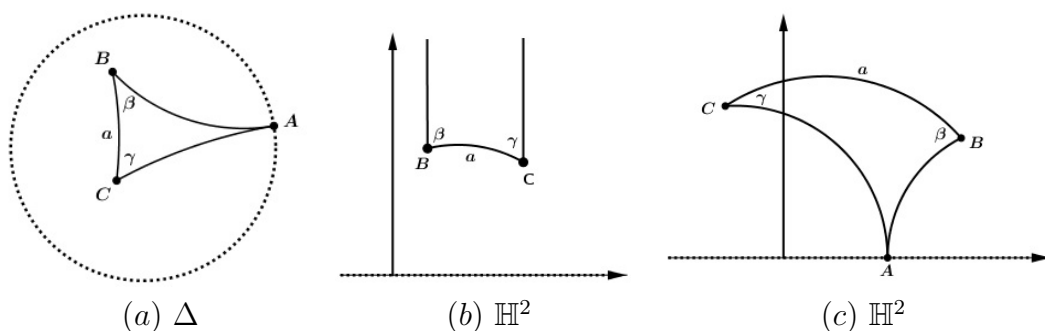


Figura 20 – $A \in X$.

Fonte: Elaborado pela autora.

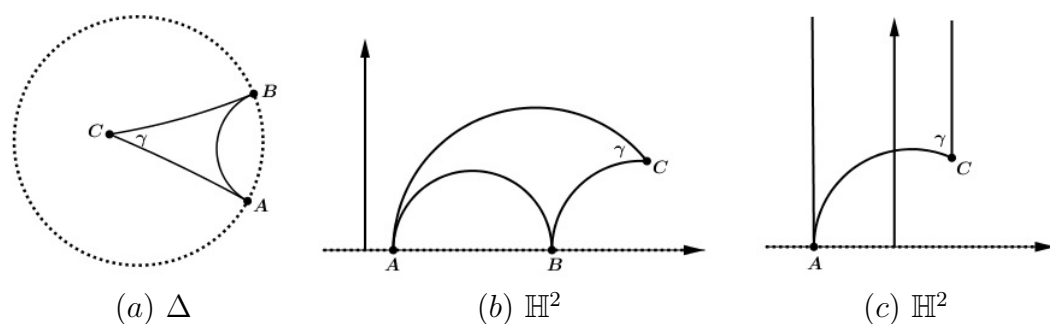


Figura 21 – $A, B \in \partial X$.

Fonte: Elaborado pela autora.

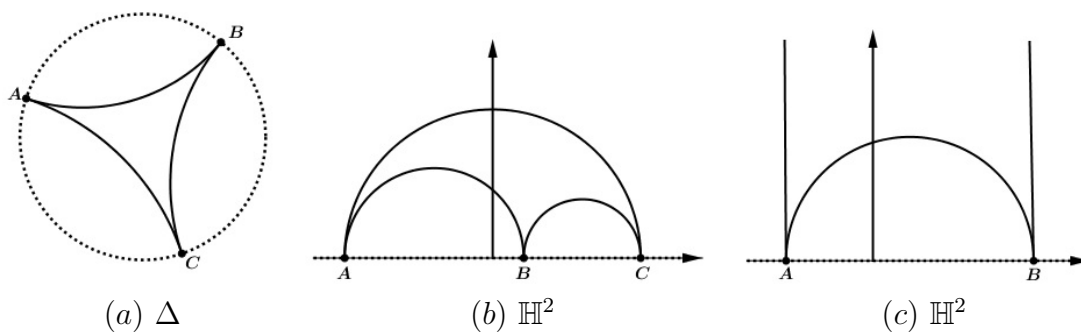


Figura 22 – $A, B, C \in \partial X$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Nos modelos hiperbólicos \mathbb{H}^2 e Δ a ideia de construir polígonos hiperbólicos é a mesma que na Geometria Euclidiana, ou seja, eles são obtidos por intersecções de segmentos de geodésicas .

Um polígono hiperbólico P com vértices P_1, P_2, \dots, P_n no plano hiperbólico é a região limitada por segmentos geodésicos $[P_1, P_2] \cup [P_2, P_3] \cup \dots \cup [P_{n-1}, P_n] \cup [P_n, P_1]$.

Na Figura 2.12 mostramos exemplos de polígonos hiperbólicos nos modelos \mathbb{H}^2 e Δ .

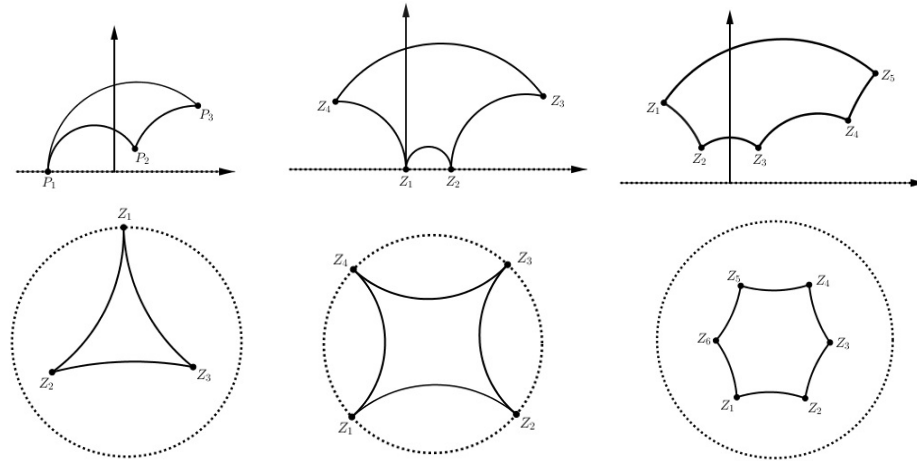


Figura 23 – Polígonos hiperbólicos em \mathbb{H}^2 e Δ .

Fonte: Elaborado pela autora.

Um polígono P de n lados, tal que todos os seus n lados têm o mesmo comprimento e os ângulos internos são iguais é chamado de polígono regular.

O próximo teorema caracteriza polígonos convexos.

Teorema 3.5.1. *Seja P um polígono com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então P é um polígono convexo se, e somente se, cada θ_j satisfaz $0 \leq \theta_j \leq \pi$.*

Demonstração. Ver [4], Teorema 7.16.1, página 154. □

3.5.1 Área hiperbólica

A área hiperbólica $A_{\mathbb{H}^2}(X)$ de um subconjunto $X \subset \mathbb{H}^2$ é dada pela integral

$$A_{\mathbb{H}^2}(X) = \int_X \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy, \tag{3.27}$$

onde $z = x + iy$.

Consideremos a região $X \subset \mathbb{H}^2$ determinada pelas três retas $t_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 : \text{Re}(z) = -1\}$, $t_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 : \text{Re}(z) = 1\}$ e $t_3 = \{z \in \mathbb{H}^2 : \text{Im}(z) = 1\}$. Observe que a reta t_3 não define uma geodésica, logo esta região não é um polígono hiperbólico. Como temos os intervalos $x \in [-1, 1]$ e $y \in [1, \infty)$, a área hiperbólica da região é dada por:

$$A_{\mathbb{H}^2}(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Teorema 3.5.2. *A área hiperbólica em \mathbb{H}^2 é invariante por transformações de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver [11], Teorema 1.4.1. □

O teorema acima nos diz que dado um subconjunto $X \subset \mathbb{H}^2$ e uma transformação $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ temos que a área $A_{\mathbb{H}^2}(g(X)) = A_{\mathbb{H}^2}(X)$.

O teorema a seguir mostra que a área de um triângulo hiperbólico é determinada apenas por seus ângulos.

Teorema 3.5.3. *A área de um triângulo hiperbólico Δ com ângulos internos medindo α, β e γ é*

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (3.28)$$

Demonstração. Vamos provar dois casos, um quando o triângulo possui um vértice ideal e outro quando nenhum dos vértices é ideal. Considere, inicialmente, que o Δ possui o vértice $v_3 \in \mathbb{R} \cup \infty$, logo o ângulo neste vértice é igual a zero. Se ele pertence ao eixo real, podemos considerar uma transformação de $PSL(2, \mathbb{R})$ que leva v_3 para ∞ e a geodésica ligando v_1 e v_2 na semicircunferência contida no círculo unitário $|z| = 1$, tal que $v_1 = e^{i\alpha}$ e $v_2 = e^{i\beta}$, com $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Como a área hiperbólica é invariante por transformações de $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos assumir que Δ possui vértices $v_3 = \infty$, $v_1 = e^{i\alpha}$ e $v_2 = e^{i\beta}$, conforme mostra a Figura 2.13.

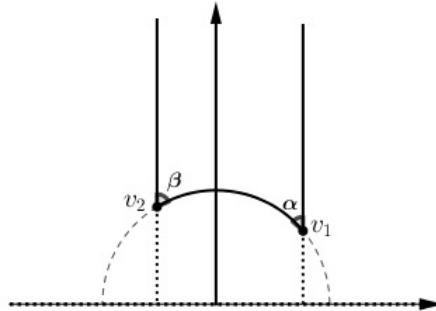


Figura 24 – Triângulo com um vértice ideal.

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) &= \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy, \\ &= \int_{\cos(\pi-\beta)}^{\cos(\alpha)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx, \\ &= \int_{\cos(\pi-\beta)}^{\cos(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Substituindo $x = \cos(\theta)$, então $dx = -\sin(\theta)d\theta$. Portanto, temos

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \int_{\pi-\beta}^{\alpha} \frac{-\sin(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \pi - \beta - \alpha.$$

Considere agora que o triângulo Δ possui ângulos α, β e γ e vértices v_1, v_2 e v_3 , tal que nenhum dos vértices é um ponto ideal. Então, vamos prolongar um dos lados do triângulo, digamos $[v_1, v_2]$ na direção de v_2 até $\partial\mathbb{H}^2$ e denote este novo vértice de v_4 . Assim, temos dois novos triângulos Δ_1 e $\Delta_2 = \Delta \cup \Delta_1$, conforme mostra a Figura 2.14.

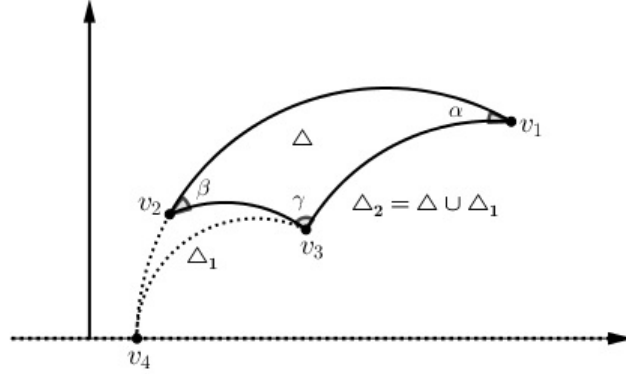


Figura 25 – Triângulo Δ com nenhum vértice ideal.

Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, o ângulo de Δ_1 no vértice v_2 é $\pi - \beta$ e o ângulo dos dois novos triângulos em v_4 é igual a zero. Denotando por ϕ o ângulo de Δ_1 no vértice v_3 . Como $\Delta_2 = \Delta \cup \Delta_1$ temos que

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) &= A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_2) - A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_1) \\ &= \pi - \alpha - (\gamma + \phi) - (\pi - (\pi - \beta) - \phi) \\ &= \pi - \alpha - \gamma - \beta. \end{aligned}$$

□

A soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π .

Demonstração. Ver [4], corolário página 150.

□

O teorema que enunciamos a seguir é válido para polígonos convexos e não convexos.

Teorema 3.5.4. *Se P é um polígono com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ então sua área é dada por $A_{\mathbb{H}^2}(P) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)$.*

Demonstração. Ver [4], Teorema 7.15.1.

□

Considerando o modelo do disco de Poincaré Δ , temos que a área de um subconjunto $X \subset \Delta$ é dada pela integral

$$A_{\Delta}(X) = \int_X \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dx dy = \int_X \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy. \quad (3.29)$$

Todos os resultados que vimos para o modelo \mathbb{H}^2 também são válidos no modelo Δ .

3.5.2 Trigonometria hiperbólica

Nesta seção vamos falar sobre as leis trigonométricas do plano hiperbólico que relacionam ângulos internos e comprimento de lados de um triângulo. Demonstraremos o Teorema de Pitágoras, a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos hiperbólica.

Inicialmente, recordemos as seguintes definições:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

Teorema 3.5.5 (Teorema de Pitágoras Hiperbólico). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com ângulos α , β e $\pi/2$ e lados medindo a , b e c . Então*

$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b). \quad (3.30)$$

Demonstração. Vamos considerar o $\triangle ABC$ em \mathbb{H}^2 com vértices

$$A = x + iy, \quad B = ki \quad \text{e} \quad C = i,$$

onde $k > 1$ e x e y são positivos e satisfazem $x^2 + y^2 = 1$, conforme mostra Figura 2.15.

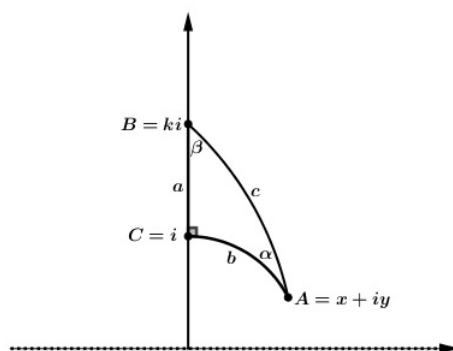


Figura 26 – Triângulo $\triangle ABC$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Pela equação 2.19, temos que

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh l(A, B) = \cosh l(x + iy, ki) = 1 + \frac{|x + i(y - k)|^2}{2yk} = \frac{x^2 + y^2 + k^2}{2yk} = \frac{1 + k^2}{2yk}; \\ \cosh(b) &= \cosh l(A, C) = \cosh l(x + iy, i) = 1 + \frac{|x + i(y - 1)|^2}{2y} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2y} = \frac{1 + 1}{2y} = \frac{1}{y}; \\ \cosh(a) &= \cosh l(B, C) = \cosh l(ki, i) = 1 + \frac{|i(k - 1)|^2}{2k} = \frac{k^2 + 1}{2k}. \end{aligned}$$

Das últimas três equações, concluímos que $\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b)$. \square

Teorema 3.5.6. *Se $\triangle ABC$ é um triângulo hiperbólico com lados medindo a , b e c e medidas dos ângulos opostos aos lados iguais a α , β e $\gamma = \frac{\pi}{2}$, respectivamente, então*

$$\sinh(b) = \sinh(c)\sin(\beta).$$

Demonstração. Ver referência [4], página 147. \square

Proposição 3.5.7 (Lei dos Senos). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico com lados a , b e c e ângulos opostos α , β e γ , respectivamente. Então*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}. \quad (3.31)$$

Demonstração. No disco de Poincaré, a menos de uma isometria, podemos supor que $[A, B]$ está contido sobre o diâmetro real, que a altura baixada do vértice C está contida o diâmetro imaginário e $Im(C) > 0$. Vamos considerar os triângulos retângulos hiperbólicos $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$. Seja h a medida hiperbólica do cateto comum $[O, C]$.

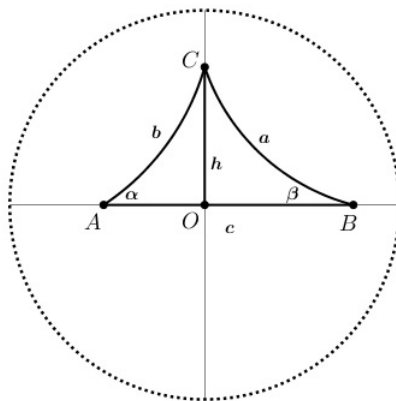


Figura 27 – Triângulo $\triangle ABC$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Aplicando o teorema 2.5.6 nos triângulos $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$, respectivamente, temos:

$$\sinh(h) = \sinh(b)\sin(\alpha) \quad \text{e} \quad \sinh(h) = \sinh(a)\sin(\beta).$$

Das duas igualdades anteriores, segue que

$$\operatorname{senh}(b)\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{senh}(a)\operatorname{sen}(\beta).$$

Logo, da última equação, temos

$$\frac{\operatorname{senh}(b)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

De modo análogo, baixando outra altura de outro vértice e procedendo de igual forma novamente, concluímos a Lei dos Senos. \square

Proposição 3.5.8. *As seguintes identidades são válidas:*

$$i) \quad \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1; \quad (3.32)$$

$$ii) \quad 2\cosh(x)\operatorname{senh}(x) = \operatorname{senh}(2x); \quad (3.33)$$

$$iii) \quad \operatorname{senh}^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x) - \frac{1}{2}; \quad (3.34)$$

$$iv) \quad \cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}; \quad (3.35)$$

$$v) \quad \operatorname{senh}^2(x)\cosh^2(y) + \cosh^2(x)\operatorname{senh}^2(y) = \frac{1}{2}(\cosh(2x)\cosh(2y) - 1). \quad (3.36)$$

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da relação $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. \square

Proposição 3.5.9 (Regra do Cosseno I). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico com lados a, b e c e ângulos opostos α, β e γ , respectivamente. Então*

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \operatorname{senh}(b)\operatorname{senh}(c)\cos(\alpha). \quad (3.37)$$

Demonstração. Considere em Δ o triângulo com vértices A sobre a origem, $B = r > 0$ sobre o eixo real e $C = se^{i\alpha}$, com $0 < \alpha < \pi$, conforme mostra a Figura 2.17. Assim,

$$\begin{aligned} r &= \tanh\left(\frac{1}{2}l^*(A, B)\right) = \tanh\left(\frac{1}{2}c\right) \quad \text{e} \\ s &= \tanh\left(\frac{1}{2}l^*(A, C)\right) = \tanh\left(\frac{1}{2}b\right). \end{aligned}$$

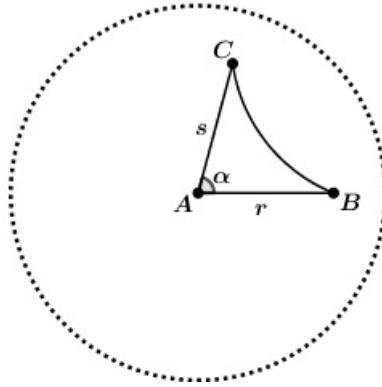


Figura 28 – Triângulo $\triangle ABC$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Aplicando a Lei Euclidiana dos Cossenos para o triângulo euclidiano de vértices A , B e C , temos

$$|B-C|^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos(\alpha) = \tanh^2\left(\frac{1}{2}c\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{2}b\right) - 2\tanh\left(\frac{1}{2}c\right)\tanh\left(\frac{1}{2}b\right)\cos(\alpha).$$

Pela equação 2.24, segue

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) = \sinh^2\left(\frac{1}{2}l^*(B,C)\right) = \frac{|B-C|^2}{(1-|B|^2)(1-|C|^2)} = \frac{|B-C|^2}{(1-r^2)(1-s^2)}. \quad (3.38)$$

Assim, por (2.38) e pela relação $\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x)$, temos

$$\begin{aligned} |B-C|^2 &= (1-r^2)(1-s^2)\sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) \\ &= \left(1 - \tanh^2\left(\frac{1}{2}c\right)\right)\left(1 - \tanh^2\left(\frac{1}{2}b\right)\right)\sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}c\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}b\right)\sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right). \end{aligned}$$

Logo, pelas duas igualdades anteriores para $|B-C|^2$, segue que

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}c\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}b\right)\sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) = \tanh^2\left(\frac{1}{2}c\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{2}b\right) - 2\tanh\left(\frac{1}{2}c\right)\tanh\left(\frac{1}{2}b\right)\cos(\alpha).$$

Como $\tanh^2(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$ e $\operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) &= \sinh^2\left(\frac{1}{2}c\right)\cosh^2\left(\frac{1}{2}b\right) + \sinh^2\left(\frac{1}{2}b\right)\cosh^2\left(\frac{1}{2}c\right) \\ &\quad - 2\sinh\left(\frac{1}{2}c\right)\sinh\left(\frac{1}{2}b\right)\cosh\left(\frac{1}{2}c\right)\cosh\left(\frac{1}{2}b\right)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Utilizando as igualdades da Proposição 2.5.2, segue que

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}a\right) &= \frac{1}{2}\cosh(a) - \frac{1}{2} \\ \sinh^2\left(\frac{1}{2}c\right)\cosh^2\left(\frac{1}{2}b\right) + \sinh^2\left(\frac{1}{2}b\right)\cosh^2\left(\frac{1}{2}c\right) &= \frac{1}{2}\cosh(b)\cosh(c) - \frac{1}{2} \\ -2\sinh\left(\frac{1}{2}c\right)\sinh\left(\frac{1}{2}b\right)\cosh\left(\frac{1}{2}c\right)\cosh\left(\frac{1}{2}b\right)\cos(\alpha) &= -\frac{1}{2}\sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\cosh(a) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cosh(b)\cosh(c) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha).$$

Portanto,

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha).$$

□

Proposição 3.5.10 (Regra do Cosseno II). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico com lados a, b e c e ângulos opostos α, β e γ , respectivamente. Então*

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sinh(\alpha)\sinh(\beta)}. \quad (3.39)$$

Demonstração. Sejam

$$X = \cosh(a), \quad Y = \cosh(b) \quad \text{e} \quad Z = \cosh(c).$$

Como $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$, segue que $\sinh^2(a) = \cosh^2(a) - 1$. Para $a > 0$, temos $\sinh(a) > 0$. Logo

$$\sinh(a) = \sqrt{\cosh^2(a) - 1} = \sqrt{X^2 - 1}.$$

Analogamente,

$$\sinh(b) = \sqrt{\cosh^2(b) - 1} = \sqrt{Y^2 - 1}$$

e

$$\sinh(c) = \sqrt{\cosh^2(c) - 1} = \sqrt{Z^2 - 1}.$$

Pela Lei dos Cossenos I, temos

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a)\sinh(b)} \\ &= \frac{XY - Z}{\sqrt{X^2 - 1}\sqrt{Y^2 - 1}} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{YZ - X}{\sqrt{Y^2 - 1}\sqrt{Z^2 - 1}} \text{ e} \\ \cos(\beta) &= \frac{XZ - Y}{\sqrt{X^2 - 1}\sqrt{Z^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\gamma) &= 1 - \cos^2(\gamma) \\ &= 1 - \left(\frac{XY - Z}{\sqrt{X^2 - 1}\sqrt{Y^2 - 1}} \right)^2 \\ &= \frac{(X^2 - 1)(Y^2 - 1) - X^2Y^2 + 2XYZ - Z^2}{(X^2 - 1)(Y^2 - 1)} \\ &= \frac{1 + 2XYZ - (X^2 + Y^2 + Z^2)}{(X^2 - 1)(Y^2 - 1)} \end{aligned}$$

Definindo $D = 1 + 2XYZ - (X^2 + Y^2 + Z^2)$, temos

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{X^2 - 1}\sqrt{Y^2 - 1}}$$

De forma análoga,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{Y^2 - 1}\sqrt{Z^2 - 1}}$$

e

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{X^2 - 1}\sqrt{Z^2 - 1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} &= \frac{\frac{YZ-X}{\sqrt{Y^2-1}\sqrt{Z^2-1}} \frac{XZ-Y}{\sqrt{X^2-1}\sqrt{Z^2-1}} + \frac{XY-Z}{\sqrt{X^2-1}\sqrt{Y^2-1}}}{\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{Y^2-1}\sqrt{Z^2-1}} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{X^2-1}\sqrt{Z^2-1}}} \\ &= \frac{(YZ - X)(XZ - Y) + (XY - Z)(Z^2 - 1)}{D} \\ &= \frac{XYZ^2 - Y^2Z - X^2Z + XY + XYZ^2 - XY - Z^3 + Z}{D} \\ &= Z \frac{1 + 2XYZ - (X + Y + Z)}{D} \\ &= Z \frac{D}{D} \\ &= Z. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{cosh}(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}.$$

□

3.6 Isometrias

As isometrias do plano hiperbólicas são transformações que preservam a distância segundo a métrica hiperbólica. Faremos as definições para o modelo \mathbb{H}^2 , mas elas podem ser feitas de forma análoga para o modelo Δ . Chamaremos de l -isometria a isometria de \mathbb{H}^2 que preserva distância segundo a métrica l definida em (2.16).

Uma aplicação $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria se f é uma bijeção contínua com inversa contínua e $l(f(u), f(v)) = l(u, v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{H}^2$.

As seguintes afirmações são válidas e podem ser verificados na referência [4]:

- (i) A reflexão em uma geodésica de \mathbb{H}^2 é uma l -isometria.
- (ii) Dadas duas geodésicas $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{H}^2$, existe uma l -isometria f tal que $f(\gamma_1) = \gamma_2$.

Dizemos que uma isometria $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ preserva orientação se f for diferenciável e $\det Df(z) > 0$, para todo $z \in \mathbb{H}^2$.

Nos modelos \mathbb{H}^2 e Δ existem isometrias que preservam orientação e as que invertem orientação. O conjunto de todas as isometrias que preservam orientação em \mathbb{H}^2 e Δ vamos denotar, respectivamente, por $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ e $Isom^+(\Delta)$.

Nos próximos dois teoremas apresentamos as isometrias de \mathbb{H}^2 e Δ que preservam e invertem orientação nos dois modelos. Omitimos sua demonstração, a qual pode ser vista em [4].

Teorema 3.6.1. *No modelo \mathbb{H}^2 , as isometrias $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ que*

i) preservam orientação são da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$;

ii) invertem orientação são da forma

$$f(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$.

Teorema 3.6.2. *No modelo Δ , as isometrias $g : \Delta \rightarrow \Delta$ que*

(i) preservam orientação são definidas por

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}},$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 = 1$;

(ii) invertem orientação são definidas por

$$g(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}},$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Assim, definimos $Isom(\mathbb{H}^2)$ como sendo a união de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ e isometrias que invertem orientação. De forma análoga, definimos $Isom(\Delta)$.

O seguinte teorema mostra que as $Isom^+(\mathbb{H}^2)$, que são transformações de $PSL(2, \mathbb{R})$, estão contidas em $Isom(H^2)$.

Teorema 3.6.3. $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$.

Demonstração. Ver [11], Teorema 1.1.2. □

3.6.1 Classificação das isometrias

Para compreender a classificação das isometrias utilizamos os modelos Δ e \mathbb{H}^2 , sendo que \mathbb{H}^2 é mais conveniente para realizar os cálculos enquanto que Δ é mais adequado para ver a sua geometria. Veremos que é possível classificar as isometrias do plano hiperbólico que preservam orientação em três tipos distintos: elíptica, parabólica e hiperbólica.

Para fazer este estudo, definimos $Fix_f = \{x \in \overline{\mathbb{H}^2} : f(x) = x\}$, onde $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$. Sugerimos a bibliografia [6] para maiores detalhes sobre o entendimento do parágrafo posterior.

Todo elemento $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ é o produto de no máximo duas reflexões, ou seja, $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$, onde σ_1 e σ_2 são reflexões em geodésicas λ_1 e λ_2 , respectivamente. Logo, temos as seguintes possibilidades:

- i) λ_1 e λ_2 são concorrentes e $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{p\} \in \mathbb{H}^2$. Então, $\sigma_2 \circ \sigma_1(p) = p \in \mathbb{H}^2$.
- ii) λ_1 e λ_2 são paralelas e $\lambda_1 \cap \lambda_2 = p \in \partial\mathbb{H}^2$. Então, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ possui um ponto fixo $p \in \partial\mathbb{H}^2$.
- iii) λ_1 e λ_2 são ultraparalelas e $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \emptyset$. Então, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ possui dois pontos fixos $p, q \in \partial\mathbb{H}^2$. Neste caso, a geodésica ρ ortogonal à λ_1 e λ_2 é invariante por $\sigma_2 \circ \sigma_1$ e os pontos $\rho \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{p, q\}$ são fixados por $\sigma_2 \circ \sigma_1$. A geodésica ρ é chamada de eixo de isometria de $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

Seja $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ e Fix_f como definido anteriormente. Dizemos que:

- (i) f é elíptica se possui um ponto fixo em \mathbb{H}^2 ;
- (ii) f é parabólica se possui um único ponto fixo em $\partial\mathbb{H}^2$;
- (iii) f é hiperbólica se possui dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H}^2$.

A Figura 2.18 mostra um exemplo de cada tipo de isometria.

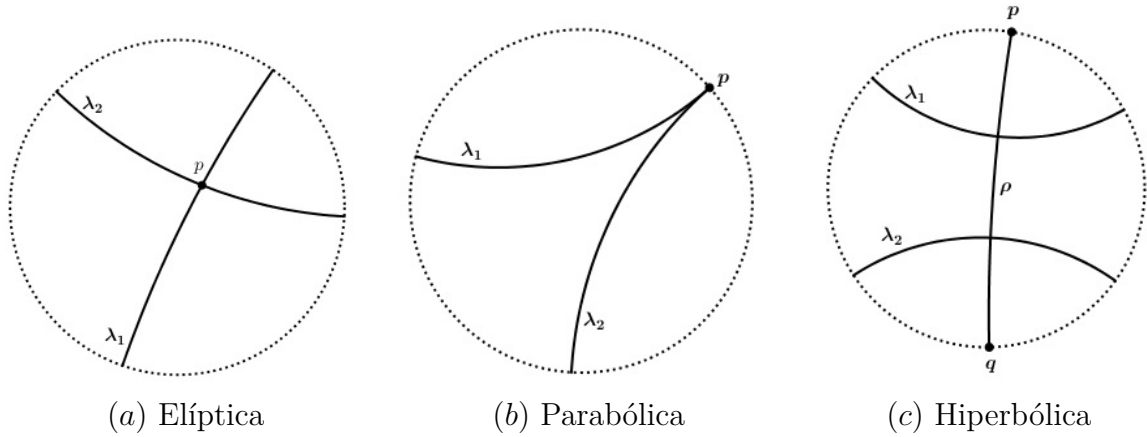


Figura 29 – Classificação das isometrias.

Fonte: Elaborado pela autora.

Os três tipos de isometrias também podem ser diferenciados pelo valor absoluto do traço da matriz associada a isometria, como veremos a seguir.

Dada $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$, tal que $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, definimos o traço de f por $tr(f) = |tr(A)|$, em que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad tr(f) = |a + d|.$$

Proposição 3.6.4. *Seja $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$, então:*

- (i) f é elíptica se, e somente se, $tr(f) < 2$;
- (ii) f é parabólica se, e somente se, $tr(f) = 2$;
- (iii) f é hiperbólica se, e somente se, $tr(f) > 2$.

Demonstração. Sejam $f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e z_0 um ponto fixo de f . Então,

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0 \iff cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0. \tag{3.40}$$

Considerando f como uma transformação de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, temos que f tem no máximo dois pontos fixos. O discriminante da equação 2.40 é

$$\begin{aligned} \Delta &= (d - a)^2 + 4bc \\ &= (d - a)^2 + 4(ad - 1) \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4 \\ &= [tr(A)]^2 - 4. \end{aligned}$$

Assim, temos os seguintes casos:

- (1) Se $|Tr(A)| < 2$, então a equação possui duas raízes complexas. Como estas raízes são conjugadas, apenas umas das raízes encontra-se em \mathbb{H}^2 . Portanto, f é elíptica.
- (2) Se $|Tr(A)| = 2$, então a equação possui uma raiz real. Logo, f possui um único ponto fixo em $\partial\mathbb{H}^2$. Portanto, f é parabólica.
- (3) Se $|Tr(A)| > 2$, então f possui dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H}^2$, pois a equação possui duas raízes reais. Consequentemente, f é hiperbólica. \square

A seguir, mostramos um exemplo de cada tipo de isometria.

i) A transformação $f(z) = \frac{\cos(\theta)z - \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$, com $0 < \theta < \pi$, é elíptica. De fato, como a matriz associada a transformação é $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, segue que $tr(f) = |2\cos(\theta)| < 2$.

ii) A transformação $f(z) = z + 1$, associada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, é uma isometria parabólica. De fato, pois $tr(f) = |1 + 1| = 2$.

(iii) A transformação $f(z) = kz$, com $k > 1$, é uma isometria hiperbólica. De fato, pois como a matriz associada a transformação é dada por $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que $tr(f) = |k + 1| > 2$.

Dizemos que duas matrizes $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ são conjugadas quando existe $C \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $A = CBC^{-1}$. Como a cada isometria podemos associar uma matriz, dizemos que duas isometrias $g_1, g_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ são conjugadas quando as matrizes correspondentes o forem.

Proposição 3.6.5. *Sejam $f_1(z) = \frac{\cos(\theta)z - \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$, $f_2(z) = z + 1$ e $f_3(z) = kz$, com $0 < \theta < \pi$ e $k > 1$, isometrias de \mathbb{H}^2 . Então toda $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$ é conjugada a uma das isometrias f_1, f_2 ou f_3 .*

Demonstração. Ver bibliografia [6], Proposição 4.16. \square

A isometria $f(z) = \frac{(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta))z - 2\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)z + (-\text{sen}(\theta) + \cos(\theta))}$, com $0 < \theta < \pi$, que possui matriz associada $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) & -2\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\text{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, é uma isometria elíptica, pois

$$tr(f) = |\cos(\theta) + \text{sen}(\theta) - \text{sen}(\theta) + \cos(\theta)| = |2\cos(\theta)| < 2.$$

Esta isometria é conjugada a isometria $f_1 = \frac{\cos(\theta)z - \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$, com matriz associada

$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. De fato, pois se $g(z) = z + 1$, com matriz

associada $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} CBC^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) & -2\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

4 SUBGRUPOS DISCRETOS E DOMÍNIOS FUNDAMENTAIS

O principal objetivo deste capítulo é apresentar o teorema de Poincaré. Utilizaremos os resultados no restante do trabalho e omitiremos algumas demonstrações, as quais podem ser encontradas nas referências. Inicialmente, introduziremos o assunto sobre grupos descontínuos e algumas de suas propriedades. Depois passaremos ao assunto sobre grupos fuchsianos. Para isso, antes apresentaremos alguns resultados e condições para que um grupo de isometrias do plano hiperbólico seja discreto. Por seguinte, abordaremos domínios e polígonos fundamentais, além da existência de um polígono fundamental para todo grupo fuchsiano, conhecido como domínio de Dirichlet. Por fim, apresentaremos o teorema de Poincaré, que nos fornece métodos para construir grupos fuchsianos a partir de um polígono e uma identificação de lados. As principais referências utilizadas para este capítulo são Beardon [4], Doria [6], Katok [11] e Munkres [15].

4.1 Grupos descontínuos

Iniciamos a seção com o conceito de espaço topológico e homeomorfismo, assuntos relacionada a Topologia Geral, que podem ser consultados em [15]. Na sequência apresentamos a teoria de grupos descontínuos, baseada na referência [4].

Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:

- i) Os subconjuntos \emptyset e X estão em τ ;
- ii) A união de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ ;
- iii) A interseção de qualquer subcoleção finita de τ está em τ .

Se X é um conjunto e τ é uma topologia definida sobre X , chama-se espaço topológico ao par (X, τ) .

Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua se para qualquer subconjunto aberto V de Y o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X .

Sejam X e Y espaços topológico. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma bijeção contínua com inversa contínua.

Para o estudo de grupos descontínuos, vamos considerar X um espaço topológico e G o grupo de homeomorfismos definido por

$$G = \{g : X \rightarrow X : g \text{ é homeomorfismo}\}.$$

Seja X um espaço topológico e G um grupo de homeomorfismos. Dizemos que G age de forma descontínua em X se, e somente se, para todo subconjunto compacto $K \subset X$ temos $G(K) \cap K = \emptyset$, exceto para um número finito de elementos $g \in G$.

Seja G um grupo de homeomorfismos do espaço X .

- (i) Dado $x \in X$, o estabilizador \mathcal{G}_x de x é o subgrupo de G definido por $\mathcal{G}_x = \{g \in G : g(x) = x\}$;
- (ii) A órbita $\mathcal{G}(x)$ de x é o subconjunto de X definido por $\mathcal{G}(x) = \{g(x) : g \in G\}$;
- (iii) Dado $Y \subset X$ dizemos que Y é G -invariante se $G(y) \in Y$, para todo $y \in Y$.

A seguir apresentamos algumas propriedades sobre ação descontínua do grupo de homeomorfismos G sobre o espaço topológico X . Uma demonstração para tais resultados pode ser encontrada na referência [4]. Suponha que G age de forma descontínua em X .

- (i) Todo subgrupo de G age de forma descontínua em X ;
- (ii) Se $\phi : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $\phi \circ G \circ \phi^{-1}$ age de forma descontínua em Y ;
- (iii) Se Y é um subconjunto G -invariante de X , então G age de forma descontínua em Y ;
- (iv) Se $x \in X$ e se g_1, g_2, \dots são elementos distintos de G , então a sequência $g_1(x), g_2(x), \dots$ não converge para nenhum $y \in X$;
- (v) Se $x \in X$ então o estabilizador \mathcal{G}_x é finito.

4.2 Grupos fuchsianos

Iniciamos o estudo com o conceito de subgrupo discreto de isometrias, baseado na referência [11]. Tal apresentação será feita no modelo do semiplano \mathbb{H}^2 , porém tudo pode ser feito de forma análoga para o modelo Δ . Seja $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $f = \frac{az + b}{cz + d}$ e

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ um representante de f . Definimos a norma de f como sendo a norma da matriz associada. Pela Equação 2.4, segue que esta norma é

$$\|f\| = \|M\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}.$$

Neste caso, se $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ e N a matriz associada a g , então $PSL(2, \mathbb{R})$ é um grupo topológico em relação a métrica $\|M - N\|$, que corresponde a métrica definida na Equação 2.5.

Um subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto quando a topologia induzida de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre G é discreta, isto é, G é um conjunto discreto no espaço topológico de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Sejam $f_n, f \in PSL(2, \mathbb{R})$ e

$$A_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

as respectivas matrizes associadas de f_n e f . Dizemos que $f_n \rightarrow f$ se $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$ e $d_n \rightarrow d$.

Proposição 4.2.1. *Um subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, dada um sequência $f_n \in G$, tal que $f_n \rightarrow Id$, então $f_n = Id$, para n suficientemente grande.*

Demonstração. Ver referência [11]. □

Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Na seção seguinte veremos a relação entre grupos fuchsianos e domínios fundamentais.

4.3 Domínios fundamentais

O objetivo desta seção é descrever domínios fundamentais para um grupo fuchsiano G . Veremos que para todo grupo fuchsiano está associado um domínio fundamental, chamado de domínio de Dirichlet, que descreve uma região poligonal determinada por geodésicas. Além disso, para cada lado s do polígono existe uma transformação de identificação de lados $g \in G$ tal que $g(s) = s'$, onde s' é outro lado do polígono. O conjunto de geradores de G é determinado por estas transformações de identificação de lados e a ação de G no polígono tessela o disco Δ . Apresentaremos no Capítulo 4 o conceito de tesselação hiperbólica detalhadamente. O desenvolvimento desta seção é baseado na referência [4].

Seja G um grupo fuchsiano agindo em Δ de forma descontínua. Dizemos que um subconjunto aberto $D \subset \Delta$ é um domínio fundamental para o grupo fuchsiano G se:

- i) $g(D) \cap D = \emptyset$, com $g \in G$ e $g \neq Id$;
- ii) $\bigcup_{g \in G} g(\overline{D}) = \Delta$.

A família $\{g(\overline{D}) : g \in G\}$ é chamada de tesselação de Δ . Além disso, para todo $z \in \Delta$ existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \overline{D}$.

Um domínio fundamental D de G é localmente finito se, e somente se, cada subconjunto compacto de Δ intersecta apenas um número finito de G -imagens de \overline{D} .

Se D é um domínio fundamental localmente finito, cada $z \in \Delta$ possui uma vizinhança compacta N que intersecta somente um número finito de imagens $g_i(\overline{D})$. Diminuindo N , se necessário, podemos supor que

- (i) $z \in g_1(\overline{D}) \cap \dots \cap g_n(\overline{D})$;
- (ii) $N \subset g_1(\overline{D}) \cup \dots \cup g_n(\overline{D})$;
- (iii) $h(D) \cap N = \emptyset$, a menos que h seja algum dos g_i ;

Seja G um grupo fuchsiano. Então P é um polígono fundamental convexo para G se, e somente se, P é um domínio fundamental convexo localmente finito para G .

Sejam G um grupo fuchsiano e P um polígono fundamental convexo para G .

- i) Um lado de P é um segmento geodésico de comprimento positivo da forma $\overline{P} \cap g(\overline{P})$, onde $g \in G$.
- ii) Um vértice de P é um único ponto $v \in \partial P$ da forma $v = \overline{P} \cap g(\overline{P}) \cap h(\overline{P})$, onde $g, h \in G$, $g, h \neq Id$ e $g \neq h$.

Como P é localmente finito, para todo $z \in \Delta$ existe um disco hiperbólico aberto N centrado em z e distintos elementos $g_1, \dots, g_t \in G$ tais que:

- i) $z \in g_1(\overline{P}) \cap \dots \cap g_t(\overline{P})$;
- ii) $N \subset g_1(\overline{P}) \cup \dots \cup g_t(\overline{P})$
- iii) se $g(\overline{P})$ intersecta N então $g = g_j$, para algum $j = 1, \dots, t$.

A seguir apresentamos algumas propriedades de polígonos fundamentais convexos. A verificação de tais propriedades decorre de todo grupo fuchsiano G ser sempre enumerável, pois é um subgrupo discreto de isometrias do plano hiperbólico, e por P ser localmente finito. Uma demonstração pode ser vista em [4].

- (1) Para cada $z \in \partial P$, existe $g \in G$, com $g \neq Id$, tal que $g(z) \in \partial P$;
- (2) P possui uma quantidade de lados e vértices enumerável;
- (3) Dado um subconjunto compacto $K \subset \Delta$, apenas um número finito de lados e vértices de P pode intersectar K ;
- (4) ∂P é igual a união dos lados de P ;
- (5) Cada vértice de P está em exatamente dois lados e é o ponto final comum a eles;
- (6) A interseção de um par de lados de P ou é vazia ou é um vértice que está na extremidade de cada um dos lados.

Teorema 4.3.1. *Sejam G um grupo fuchsiano e P um polígono fundamental convexo para G . Então o conjunto $G_0 = \{g \in G : \overline{P} \cap g(\overline{P}) \neq \emptyset\} \subset G$ gera o grupo G .*

Demonstração. Seja G^* o grupo gerado por G_0 . Suponha que G age de forma descontínua em Δ . Seja $z \in \Delta$ e $g \in G$ tal que $g(z) \in \overline{P}$. Tal g existe pois P é domínio fundamental. Suponha também que $h \in G$ tal que $h(z) \in \overline{P}$. Assim, a única possibilidade é que $g(z)$ e $h(z)$ estão em ∂P . Decorre que $h(z)$ pertence a $\overline{P} \cap hg^{-1}(\overline{P})$ e, conseqüentemente, $hg^{-1} \in G_0 \subset G^*$. Isso implica que $G^*h = G^*g$. Seja $\phi : \Delta \rightarrow G/G^*$ definida por $\phi(z) = G^*g$, onde $g(z) \in \overline{P}$. O que acabamos de mostrar é que esta aplicação está bem definida. Como P é localmente finito, segue que para todo $z \in \Delta$ existe um número finito de imagens $g_1(\overline{P}), \dots, g_m(\overline{P})$, em que cada uma contém z e a união destas imagens cobre uma vizinhança N de z . Se $w \in N$, então $w \in g_j(\overline{P})$ para algum $j = 1, \dots, m$ e $\phi(w) = G^*g_j^{-1} = \phi(z)$. Assim, concluímos que cada $z \in \Delta$ possui uma vizinhança aberta N onde ϕ é constante. Como Δ é aberto e conexo, toda função que satisfaça esta propriedade é constante em Δ . Isto mostra que $\phi(z) = \phi(w)$, para todo $z, w \in \Delta$. Dada

qualquer $g \in G$ e sejam $z \in P$ e $w \in g^{-1}(P)$. Então, como ϕ é constante

$$G^* = G^* Id = \phi(z) = \phi(w) = G^* g$$

e assim, $g \in G^*$. Isto prova que $G \subset G^*$. E, portanto, $G = G^* = \langle G_0 \rangle$.

□

Vamos descrever agora a relação entre o grupo fuchsiano G e o polígono fundamental P . Considere os conjuntos $G^* = \{g \in G : \overline{P} \cap g(\overline{P}) \text{ é um lado de } P\}$ e $S = \{\overline{P} \cap g(\overline{P}) : g \in G^*\}$ o conjunto dos lados de P . A diferença entre G_0 e G^* está nos elementos $g \in G_0$ tais que $\overline{P} \cap g(\overline{P})$ é apenas um vértice, ou seja, $G^* \subset G_0$. Cada $g \in G^*$ produz um único lado $s \in S$, ou seja, $s = \overline{P} \cap g(\overline{P})$ e cada lado surge desta forma. Assim, existe uma bijeção $\phi : G^* \rightarrow S$ definida por $\phi(g) = \overline{P} \cap g(\overline{P})$. A aplicação ϕ é sobrejetiva por definição, mas também é injetiva uma vez que se $\phi(g) = \phi(h)$ então $\overline{P} \cap g(\overline{P}) = \overline{P} \cap h(\overline{P})$ e isso não pode acontecer para os lados a menos que $g = h$. A existência de $\phi^{-1} : S \rightarrow G^*$ mostra que cada lado s de P associa uma única função $g_s \in G^*$ tal que $s = \overline{P} \cap g_s(\overline{P})$. Então $g_s^{-1}(s) = g_s^{-1}(\overline{P} \cap g_s(\overline{P})) \cap \overline{P} = s'$, onde s' é um lado de P de comprimento positivo. Assim, também podemos escrever $s' = \overline{P} \cap g_{s'}(\overline{P})$. Logo, sendo $s' = g_s^{-1}(s)$ concluímos que $g_{s'} = g_s^{-1}$. Assim, construímos uma função $s \mapsto s'$ de S em S e esta função é chamada de identificação de lados de P , pois $(s')' = g_{s'}^{-1}(s') = (g_s^{-1})^{-1}(g_s^{-1}(s)) = g_s g_s^{-1}(s) = s$. Portanto, o conjunto S dos lados de P particiona-se naturalmente em uma coleção de pares $\{s, s'\}$, isto é, $S = \cup \{s, s'\}$, onde $s' = g_s^{-1}(s)$ e $g_s \in G^*$, para o conjunto de lados de P .

Teorema 4.3.2. *O grupo G é gerado pelo conjunto G^* .*

Demonstração: Decorre do Teorema 3.3.1 que basta provarmos que se $\overline{P} \cap h(\overline{P}) \neq \emptyset$, então h está no grupo gerado pelas funções g_s . Considere então $w \in \overline{P} \cap h(\overline{P})$. Como P é localmente finito, existe um disco aberto N centrado em w e elementos $h_0 = Id, h_1, \dots, h_t \in G$ tais que $w \in h_0(\overline{P}) \cap \dots \cap h_t(\overline{P})$ e $N \subset h_0(\overline{P}) \cup \dots \cup h_t(\overline{P})$. Diminuindo o raio de N , se necessário, podemos assumir que N não contém nenhum vértice dos $h_j(\overline{P})$, exceto possivelmente w e que N não intersecta nenhum dos lados dos $h_j(\overline{P})$, exceto os que contém w . Como a fronteira de P é a união dos lados, então a fronteira de P em N consiste de um lado contendo w ou dois lados distintos partindo de w . O mesmo é verdade para cada $h_j(\overline{P})$, logo temos uma das situações ilustradas na Figura 3.1.

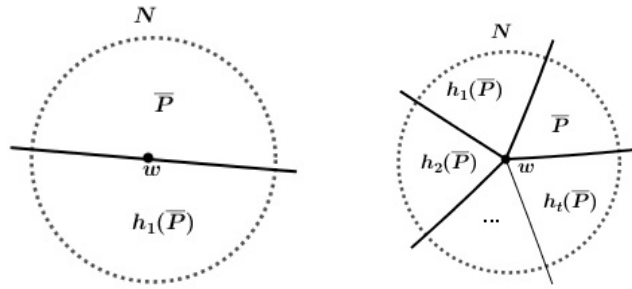


Figura 30 – Fronteira de P e $h_j(\overline{P})$ em N .

Fonte: Elaborado pela autora.

Por construção, assumiremos que os polígonos consecutivos $h_0 = \overline{P}, h_1(\overline{P}), \dots, h_t(\overline{P})$ têm um lado em comum. Assim, para todo $j = 0, \dots, t$, segue que $\overline{P} \cap h_j^{-1}h_{j+1}(\overline{P})$ é um segmento geodésico de comprimento positivo, portanto é um lado de P . Então, $h_{j+1} = h_j g_s$, para alguma função de emparelhamento g_s . Note que, para $j = 0$, temos

$$h_1 = h_0 g_s = Id \ g_s = g_s,$$

para alguma $g_s \in G^*$. A partir daí, cada h_j , com $j = 1, \dots, t$ vai ser sempre um produto de funções de emparelhamento. Portanto, como $h = h_j$, para algum $0 \leq j \leq t$, segue que $h \in G^*$.

□

4.3.1 Polígono de Dirichlet

Veremos agora que a todo grupo fuchsiano está associado um polígono fundamental convexo. Seja G um grupo fuchsiano agindo em Δ e $w \in \Delta$ um ponto que não é fixado por nenhum elemento elíptico de G . Para cada $g \in G, g \neq Id$, definimos os conjuntos

$$L_g(w) = \{z \in \Delta : l^*(z, w) = l^*(z, gw)\}$$

$$H_g(w) = \{z \in \Delta : l^*(z, w) < l^*(z, gw)\}.$$

O conjunto $L_g(w)$ é a geodésica mediatriz dos pontos w, gw e $H_g(w)$ é um semiplano convexo contendo w e que é limitado por $L_g(w)$, conforme mostra a Figura 3.2.

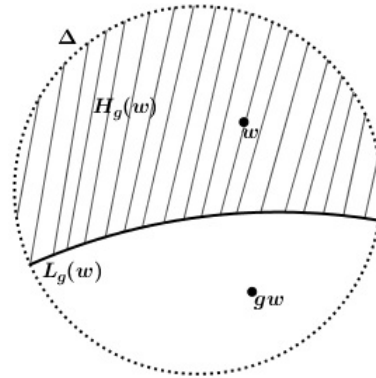


Figura 31 – $L_g(w)$ e $H_g(w)$.

Fonte: Elaborado pela autora.

O polígono de Dirichlet $D(w)$ com centro em $w \in \Delta$ associado ao grupo Fuchsiano G é

$$D(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g(w). \tag{4.1}$$

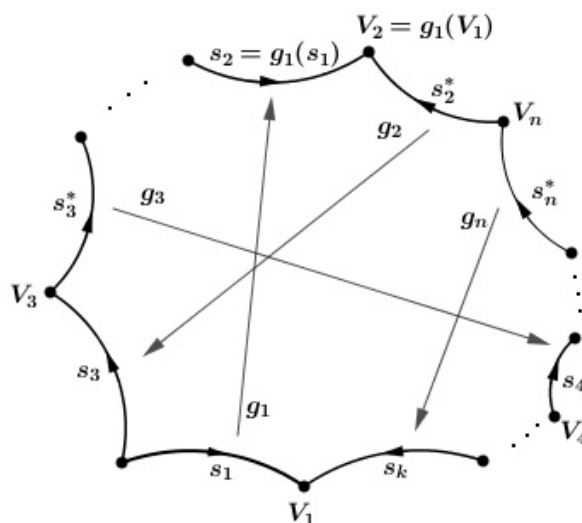
Teorema 4.3.3. *O polígono de Dirichlet $D(w)$ é um polígono fundamental convexo para G .*

Demonstração: Ver referência [4]. □

Sejam G é um grupo fuchsiano e $D(w)$ é um polígono de Dirichlet para G . Para cada vértice do polígono podemos definir um ciclo de vértices e uma transformação associada a tal ciclo. Vamos considerar que $D(w)$ possui todos os vértice em Δ . Assim, conforme vimos anteriormente, para cada lado s de $D(w)$ existe uma transformação de identificação $g \in G$ tal que $g(s) = s'$ define um outro lado de $D(w)$. Desse modo, respeitando a orientação de cada lado do polígono, para construir um ciclo de vértices faremos o seguinte procedimento:

- (i) Seja V_1 um vértice de $D(w)$ e s_1 um lado com extremidade em V_1 . Seja g_1 a transformação de identificação lateral associado a s_1 . Assim, g_1 aplica s_1 para outro lado s_2 de $D(w)$.
- (ii) Seja $s_2 = g_1(s_1)$ e $V_2 = g_1(V_1)$. Logo, obtemos um novo par (V_2, s_2) .
- (iii) Considere agora o par (V_2, s_2^*) , que é formado pelo vértice V_2 e o lado s_2^* de $D(w)$ diferente de s_2 com um ponto final de V_2 .
- (iv) Considere g_2 a transformação de identificação lateral associada ao lado s_2^* . Assim, $g_2(s_2^*)$ é um lado s_3 de $D(w)$ e $g_2(V_2)$ é um vértice V_3 de $D(w)$.
- (v) Repetimos este processo até retornar no vértice e lado inicial V_1 e s_1 , respectivamente. O esquema e a figura a seguir descrevem o processo anterior.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{g_1} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_2^* \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{g_2} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_3^* \end{pmatrix} \\
 \vdots \\
 \xrightarrow{g_{n-1}} \begin{pmatrix} V_n \\ s_n \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_n \\ s_n^* \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{g_n} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_k \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$



A partir deste processo, obtemos uma seqüência de vértices $\{V_1, V_2, \dots\}$ e uma seqüência de identificadores de lados $\{g_1, g_2, \dots\}$. Seja n o menor inteiro positivo tal que $g_n g_{n-1} \dots g_2 g_1(V_1) = V_1$. Assim, temos a seguinte definição:

A seqüência de vértices $\mathcal{C} = V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n$ é chamada de ciclo de vértices. A transformação $g_n g_{n-1} \dots g_2 g_1$ é chamada de transformação associada ao ciclo de vértices.

Observe o polígono da Figura 3.3 com lados orientados, vértices e transformações de pares de lados identificados.

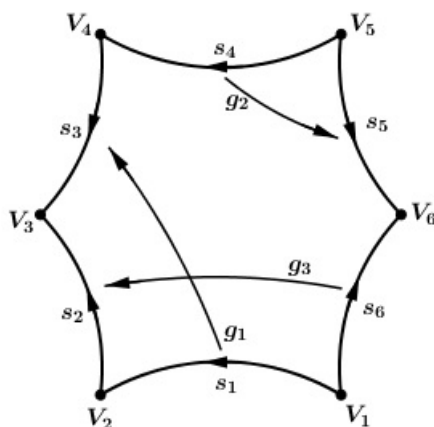


Figura 32 – Polígono com lados, vértices e identificação de lados rotulados.

Fonte: Elaborado pela autora.

Realizando o processo descrito anteriormente obtemos:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{g_1} & \begin{pmatrix} V_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_2} & \begin{pmatrix} V_6 \\ s_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_6 \\ s_6 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_3} & \begin{pmatrix} V_3 \\ s_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_1^{-1}} & \begin{pmatrix} V_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_3^{-1}} & \begin{pmatrix} V_1 \\ s_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Assim, o ciclo do vértice V_1 é dado por $V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_6 \rightarrow V_3 \rightarrow V_2$ e a transformação do ciclo é $g_3^{-1}g_1^{-1}g_3g_2g_1$. Note que o vértice V_5 não está no ciclo descrito, assim, ele determina um outro ciclo:

$$\begin{pmatrix} V_5 \\ s_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{g_2} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

Logo, temos o ciclo V_5 e a ele associada a transformação g_2 .

Seja $\mathcal{C} = V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n$ o ciclo do vértice V_1 e θ_i o ângulo no vértice V_i . Então o ângulo do ciclo é definido por

$$\theta(\mathcal{C}) = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \tag{4.2}$$

Proposição 4.3.4. *Seja G um grupo fuchsiano e P um polígono de Dirichlet com todos os vértices em Δ . Se \mathcal{C} é um ciclo de vértices e $\theta(\mathcal{C})$ é o ângulo do ciclo, então existe um número natural $m \geq 1$ tal que $m \theta(\mathcal{C}) = 2\pi$. Além disso, m denota a ordem de \mathcal{C} , a qual representamos por $m = \text{Ord}(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Ver [11]. □

Assim, a cada grupo fuchsiano G associamos um polígono fundamental convexo P que ladrilha Δ . O conjunto de geradores de G determina os pares de lados que são identificados. Uma condição necessária para que o polígono P ladrilhe Δ é:

(I) para todo ciclo $C \subset \partial\overline{P}$, a soma dos ângulos internos de ciclo é da forma $\theta(\mathcal{C}) = \frac{2\pi}{m}$, onde $m = \text{Ord}(\mathcal{C}) \in \mathbb{N}$.

4.4 Teorema de Poincaré

Na seção anterior verificamos que todo grupo fuchsiano G agindo em Δ possui um polígono fundamental convexo, denominado de polígono de Dirichlet. A ação de G em P tessela Δ e a coleção de emparelhamento de lados de P gera G . Além disso, a soma dos ângulos internos deve satisfazer (I). O teorema de Poincaré fornece um método para construir grupos fuchsianos. Suponha que se comece com um polígono hiperbólico convexo e um conjunto de transformações de emparelhamento de lados, queremos saber quando essas transformações de emparelhamento lateral geram um grupo fuchsiano. Assim, o objetivo do teorema é provar que G é discreto e que P é um polígono fundamental convexo para G .

Vamos assumir que P é um polígono hiperbólico convexo com vértice em Δ e $S = \{s \subset \partial\bar{P} : s \text{ é lado de } P\}$. Além disso, vamos considerar uma partição do conjunto de lados S , dada por

$$S = \bigcup \{s, s'\}.$$

Seja $G_S = \{g \in \text{Isom}(\Delta) : s = \bar{P} \cap g(\bar{P}), s \in S\}$. Dizemos que o conjunto G_S é subordinado à partição S se G_S admite uma partição

$$G_S = \bigcup_{g_s \neq Id} \{g_s, g_s^{-1}\},$$

em que $s = \bar{P} \cap g_s(\bar{P})$ e $s' = \bar{P} \cap g_s^{-1}(\bar{P})$.

A seguir apresentamos o teorema de Poincaré e omitimos a sua demonstração por sua complexidade. Uma prova para o resultado pode ser vista em [4].

Teorema 4.4.1 (Poincaré). *Seja P um polígono hiperbólico convexo com um número finito de lados. Seja $S = \{s \subset \partial\bar{P} : s \text{ é lado de } P\}$ e seja $S = \bigcup \{s, s'\}$ uma partição de S em pares de lados. Suponha que*

- i) $G_S = \{g \in \text{Isom}(\Delta) : \bar{P} \cap g(\bar{P}) \subset S\}$ é um conjunto de isometrias de Δ subordinada a partição $S = \bigcup \{s, s'\}$,*
- ii) a condição (I) é satisfeita.*

Então, o grupo G gerado por G_S é um grupo fuchsiano e P é um polígono fundamental convexo para G .

O seguinte exemplo é uma aplicação do teorema de Poincaré para um octógono cujos ângulos internos têm medida igual $\frac{\pi}{4}$.

Considere o octógono regular de vértices v_1, \dots, v_8 , lados s_1, \dots, s_8 e $g_1, \dots, g_4 \in \text{Isom}(\Delta)$, conforme mostra Figura 3.4.

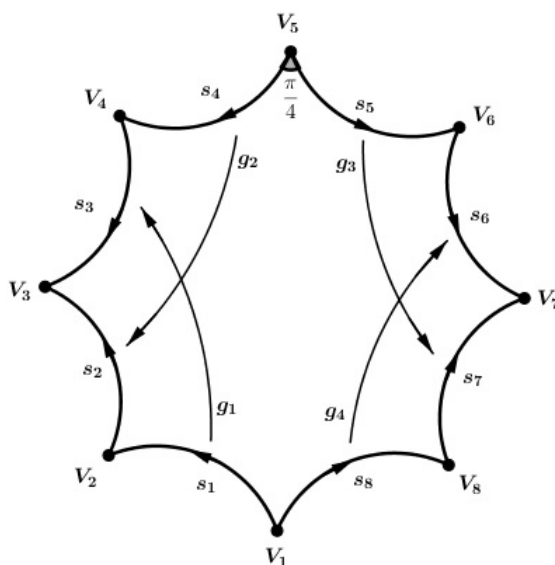


Figura 33 – Octógono hiperbólico regular de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Realizando o procedimento descrito na seção anterior, vamos calcular o ciclo do vértice V_1 . Assim temos:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{g_1} \begin{pmatrix} V_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_2} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_1^{-1}} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_2^{-1}} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_5 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_3} \begin{pmatrix} V_8 \\ s_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_8 \\ s_8 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_4} \begin{pmatrix} V_7 \\ s_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_7 \\ s_7 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_3^{-1}} \begin{pmatrix} V_6 \\ s_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_6 \\ s_6 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{g_4^{-1}} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_8 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Assim, existe apenas um ciclo de vértice dado por

$$\mathcal{C} = V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_3 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5 \rightarrow V_8 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6,$$

com a seguinte transformação associada

$$g_4^{-1}g_3^{-1}g_4g_3g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1.$$

Como o ângulo em cada vértice do octógono é igual a $\frac{\pi}{4}$, a soma dos ângulos internos do ciclo é igual a

$$8\frac{\pi}{4} = 2\pi.$$

Portanto, a condição (I) é válida. Pelo teorema de Poincaré, o grupo gerado pelas transformações de emparelhamento g_1, g_2, g_3 e g_4 gera um grupo fuchsiano e o octógono é um polígono fundamental convexo para tal grupo.

5 GRUPOS TRIANGULARES E TESSELAÇÕES HIPERBÓLICAS

Os conceitos que estudaremos neste capítulo são sobre grupos triangulares e tesselações hiperbólicas regulares. Mostraremos uma condição para que uma tesselação hiperbólica seja regular e expomos um exemplo de tesselação feito por Coxeter. Abordaremos também alguns resultados sobre teoria de superfícies. Utilizamos como referências Doria [6], Leite [13], Magnus [14], Munkres [15] e Stillwell [24].

5.1 Grupos triangulares

Baseamos o estudo desta seção nas referências [6] e [14].

Consideremos um triângulo hiperbólico $\triangle ABC$ com ângulos internos $\alpha = \frac{\pi}{p}$, $\beta = \frac{\pi}{q}$ e $\gamma = \frac{\pi}{r}$, com $p, q, r \in \mathbb{N}$. Sejam a, b e c os lados do triângulo opostos aos ângulos α , β e γ , respectivamente, e r_a, r_b e r_c as reflexões sobre tais lados.

O grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_a, r_b, r_c \rangle$, gerado por r_a, r_b e r_c , é chamado de grupo triangular.

As transformações que pertencem ao grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ são isometrias de \mathbb{H}^2 . Cada grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ possui um subgrupo $G(\alpha, \beta, \gamma)$ que preserva orientação, em que seus geradores são produto de reflexões em dois lados adjacentes do triângulo, isto é, $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_a r_b, r_b r_c, r_a r_c \rangle$. Devido as seguintes relações

$$r_i^{-1} = r_i, (r_i r_j)^{-1} = r_j r_i \text{ e } r_b r_c = (r_a r_b)^{-1} (r_a r_c),$$

segue que $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_a r_b, r_a r_c \rangle$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é sempre menor que π , pela fórmula da área de um triângulo, segue que os valores p, q e r devem satisfazer a condição

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) < 1. \quad (5.1)$$

Ao assumirmos $p \leq q \leq r \leq \infty$, a primeira 3-upla possível é $(2, 3, 7)$, ou seja, o triângulo que possui ângulos $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ e $\gamma = \frac{\pi}{7}$. Na Geometria Hiperbólica existem infinitos triângulos que satisfazem a condição (4.1).

5.2 Tesselações hiperbólicas

Estudaremos nesta seção as tesselações hiperbólicas relacionadas com os grupos triangulares. Desenvolvemos tal teoria a partir das referências [6], [13] e [14].

Uma tesselação regular do plano hiperbólico é uma partição do plano por polígonos regulares não sobrepostos, todos congruentes, com a condição de que somente se interceptam em suas arestas ou vértices e o número de polígonos é o mesmo em cada vértice, independente do vértice.

Uma tesselação regular constituída por polígonos de p lados, onde em cada vértice existem q polígonos será denotada por $\{p, q\}$. Se $p = q$, então a tesselação $\{p, p\}$ é denominada auto-dual.

Proposição 5.2.1. *Para existir uma tesselação $\{p, q\}$ é necessário que $\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi$, ou seja, $(p - 2)(q - 2) > 4$.*

Demonstração. Considere P um polígono regular com p lados e ângulos internos medindo $\frac{2\pi}{q}$. Seja S_i a soma dos ângulos internos de P . Então

$$S_i = p \frac{2\pi}{q} \text{ e } S_i < (p - 2)\pi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (p - 2)\pi > p \frac{2\pi}{q} &\iff p\pi - 2\pi > p \frac{2\pi}{q} \\ &\iff pq - 2q > 2p \\ &\iff pq - 2p - 2q > 0 \\ &\iff pq - 2p - 2q + 4 > 4 \\ &\iff (p - 2)(q - 2) > 4. \end{aligned}$$

□

Em nosso trabalho iremos apenas considerar tesselações geradas por polígonos hiperbólicos regulares que não possuem vértices em $\partial\Delta$. A Figura 4.1 mostra exemplos de tesselações hiperbólicas geradas por polígonos deste tipo.

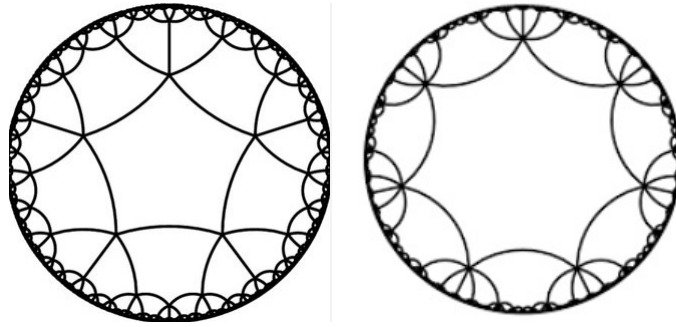


Figura 34 – Tesselações hiperbólicas $\{5, 5\}$ e $\{7, 7\}$.

Fonte: Adaptado de Doria (2019).

A cada tesselação $\{p, q\}$ existe um grupo triangular $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ associado, gerado pelas reflexões r_a, r_b e r_c nos lados de um triângulo hiperbólico de ângulos $\alpha = \frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}$ e $\gamma = \frac{\pi}{r}$, satisfazendo a condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Consequentemente, a descrição do grupo triangular associado a cada tesselação $\{p, q\}$ é apresentada conforme o teorema a seguir.

Teorema 5.2.2. *Sejam r_a, r_b e r_c as reflexões nos lados do triângulo hiperbólico $\triangle ABC$ de ângulos $\alpha = \frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}$ e $\gamma = \frac{\pi}{r}$ (satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$). As imagens do $\triangle ABC$ sob a ação de distintos elementos do grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ preenchem o plano hiperbólico sem lacunas e sobreposições (exceto nos bordos) e o grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ é definido localmente pela seguinte relação*

$$G^*(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_a, r_b, r_c : r_a^2 = r_b^2 = r_c^2 = (r_a r_b)^p = (r_a r_c)^q = (r_b r_c)^r = 1 \rangle.$$

Demonstração. Ver referência [14], Teorema 2.8, página 81. □

A seguir apresentamos uma tesselação do plano hiperbólico associada ao grupo triangular $G^*\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$. Tal tesselação foi feita pelo matemático Coxeter e inspirou Escher para criar as obras Limites Circulares.

Na Figura 4.2, o triângulo $\triangle PQR$ possui ângulos $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$ e $\gamma = \frac{\pi}{6}$ nos vértices P, Q e R , respectivamente. Considerando p, q e r os lados opostos aos ângulos α, β e γ , respectivamente, e r_p, r_q e r_r as reflexões nos respectivos lados, segue pelo Teorema 4.2.1 que a ação do grupo $G^*(\alpha, \beta, \gamma)$ no triângulo $\triangle PQR$ preenche o plano hiperbólico sem lacunas e sobreposições.

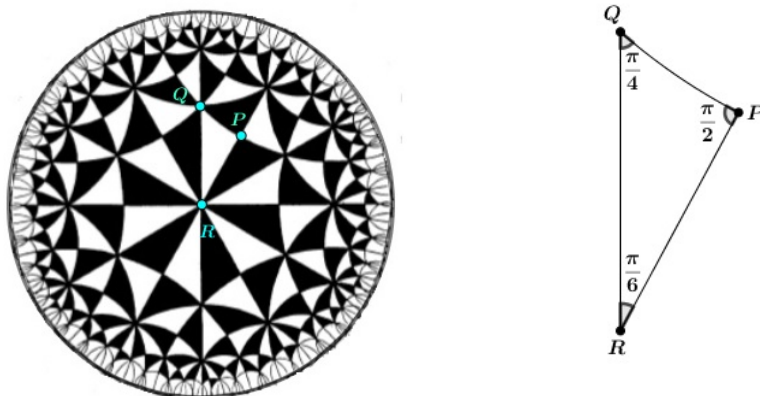


Figura 35 – Grupo triangular $G^*(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$.

Fonte: Adaptado de Coxeter (1979) .

Note que no centro da imagem, seis triângulos brancos mais seis triângulos pretos formam um hexágono regular. Em cada vértice do hexágono se encaixam quatro de suas réplicas. Como a condição $(6 - 2)(4 - 2) = 8 > 4$ é satisfeita, segue que existe uma tesselação regular $\{6, 4\}$, conforme mostra a Figura 4.3.

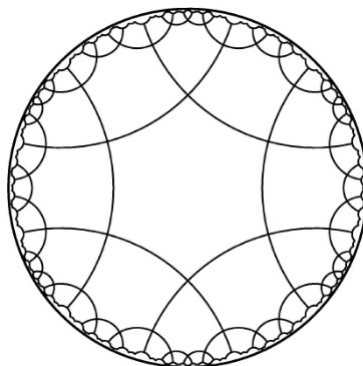


Figura 36 – Tesselação $\{6, 4\}$.

Fonte: Adaptado de Doria (2019).

A seguir apresentamos a teoria de superfícies relacionada com uma tesselação autodual.

Se a tesselação gerada for autodual restrita a condição $p = q = 4g$, para algum inteiro $g \geq 2$, por meio da identificação dos lados do polígono P_{4g} , com $4g$ lados e vértices, dadas por $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ (geradores de um grupo fuchsiano Γ) obtemos uma superfície compacta e orientada Δ/Γ de gênero g . Sem perda de generalidade, podemos supor que P_{4g} está centrado na origem.

Todas as superfícies orientadas de gênero $g \geq 2$ podem ser mapeadas por um polígono hiperbólico P_{4g} , onde os lados são identificados em pares por isometrias hiperbólicas. As isometrias que identificam os lados são os geradores de um grupo fuchsiano Γ . Além disso, para o polígono P_{4g} existe um único ciclo de vértices cujo ângulo associado a tal ciclo é igual a 2π e a transformação associada é da forma $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$. A aplicação quociente Δ/Γ é que gera a superfície de gênero g . Para mais informações sobre a construção de tais superfícies podem ser consultadas as referências [14] e [24].

Se $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ é a transformação associada ao único ciclo de vértice, temos que w representa um caminho fechado na superfície. Também, cada duas arestas de P_{4g} são transformadas em uma curva fechada na superfície e a união das $2g$ curvas fechadas terá um ponto x_0 em comum [13]. A Figura 4.4 mostra a construção de uma superfície de gênero $g = 2$, a partir de um polígono P_8 , com ângulos medindo $\frac{\pi}{4}$, que gera uma tesselação autodual $\{8, 8\}$.

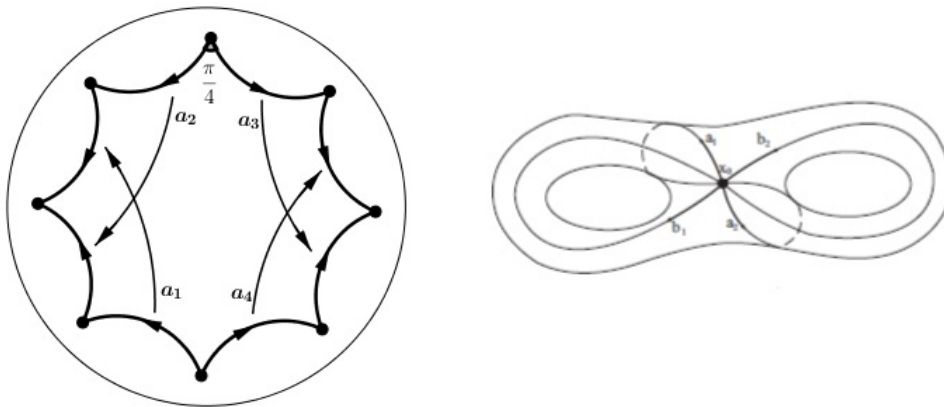


Figura 37 – Construção de uma superfície de gênero $g = 2$ por um polígono P_8 .

Fonte: Adaptado de Leite (2012).

No capítulo 5, quando apresentaremos a obra Limite Circular III, veremos a construção detalhada desta superfície a partir do polígono P_8 .

6 APLICAÇÕES NAS OBRAS LÍMITES CIRCULARES

Nas obras Limites Circulares podemos aplicar resultados da teoria que apresentamos. Iremos estudar cada obra separadamente. Inicialmente queremos obter informações sobre tesselações hiperbólicas associadas a grupos triangulares. Em Limite Circular III, vamos mostrar a existência de uma tesselação autodual restrita a condição $p = q = 4g$ e mostrar que o polígono P_{4g} com o emparelhamento de lados construído satisfaz o teorema de Poincaré e gera uma superfície hiperbólica definida pelo quociente Δ/Γ . Mostraremos também que nem todos os arcos de circunferências que aparecem nesta obra são geodésicas, mas sim descrevem curvas equidistantes. Para o desenvolvimento do capítulo utilizadas algumas informações das referências Coxeter [5] e Dunham [7]. As demais análises e resultados obtidos foram desenvolvidos pelos autores aplicando a teoria estudada anteriormente.

6.1 Limite Circular III

Na obra Limite Circular III destacamos três classes de pontos \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} . Os pontos $P \in \mathcal{P}$ descrevem as barbatanas direitas de quatro peixes que se juntam, ocorrendo em duas cores alternadas; $Q \in \mathcal{Q}$ são onde as barbatanas esquerdas de três peixes se juntam, utilizando três das quatro cores que aparecem e nos pontos $R \in \mathcal{R}$ as bocas de três peixes e as caudas de outros três se encontram, também aparecendo três cores neste tipo de ponto, conforme observamos na Figura 5.1.

Ao analisar os pontos $P \in \mathcal{P}$ verificamos que, no ponto de vista hiperbólico, são vértices de um triângulo equilátero e cada um desses triângulos possui como centro um ponto do tipo Q ou R , veja Figura 5.2 (a). Além disso, o ângulo em cada vértice é de $\frac{\pi}{4}$, conforme representado na Figura 5.2 (b), diferente do caso euclidiana onde este valor corresponde a $\frac{\pi}{3}$. O triângulo $\triangle PPP$, com todos os ângulos medindo $\frac{\pi}{4}$, satisfaz a condição

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$



Figura 38 – Pontos notáveis na obra Limite Circular III.

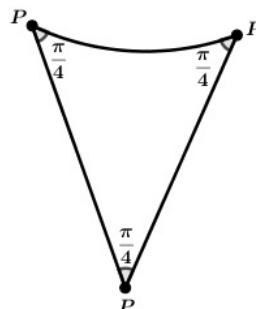
Fonte: Adaptado de Gupta (2006).

Logo, o grupo $G^*(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, gerado pelas reflexões nos lados deste triângulo, é um grupo triangular. Pelo Teorema 4.2.1, a ação de G^* em $\triangle PPP$ preenche o plano hiperbólico sem lacunas e sobreposições.

No centro da imagem ao redor do ponto P existem oito triângulos e como a condição $(3 - 2)(8 - 2) = 6 > 4$ é satisfeita, pela Proposição 4.2.1 temos uma tesselação regular $\{3, 8\}$. Vejamos a existência de outra tesselação, a tesselação autodual $\{8, 8\}$.



(a) Triângulos equiláteros.



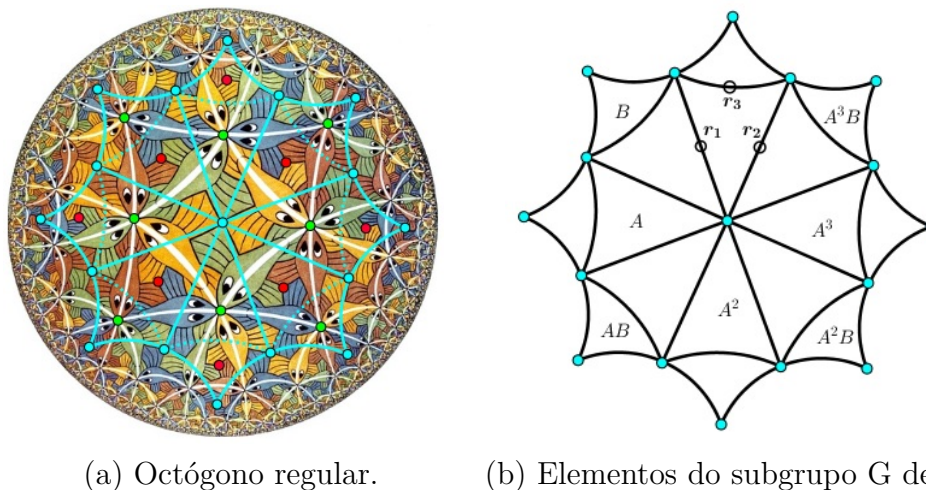
(b) $\triangle PPP$ com ângulos $\frac{\pi}{4}$.

Figura 39 – Limite Circular III.

Fonte: Elaborado pela autora.

Refletindo cada um dos triângulos da Figura 5.2 (a) em um de seus lados, obtemos a Figura 5.3 (a). Olhando para a Figura 5.3 (b), que é uma cópia da anterior, vamos considerar $A = r_1r_2$ e $B = r_1r_3$ os gerados do grupo $G(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Neste novo octógono formado, os triângulos marcados em função de A e B são elementos que pertencem ao subgrupo $G(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de $G^*(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Neste último octógono, temos que o ângulo em cada um de seus vértices é igual a $\frac{\pi}{4}$. Logo, ao redor de cada vértice se encaixam oito de suas réplicas e como a condição $(8 - 2)(8 - 2) = 36 > 4$ é satisfeita temos uma tesselação do tipo $\{8, 8\}$. Pela teoria do capítulo anterior, podemos definir tal polígono como $P_{4g} = P_8$, onde $g = 2$.



(a) Octógono regular. (b) Elementos do subgrupo G de G^* .

Figura 40 – Tesselação $\{8, 8\}$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Agora, vamos identificar os vértices V_1, \dots, V_8 no sentido horário, dar uma orientação para os lados s_1, \dots, s_8 e fazer o emparelhamento de lados pelas isometrias $g_1, g_2, g_3, g_4 \in Isom(\Delta)$, conforme mostra a Figura 5.4.

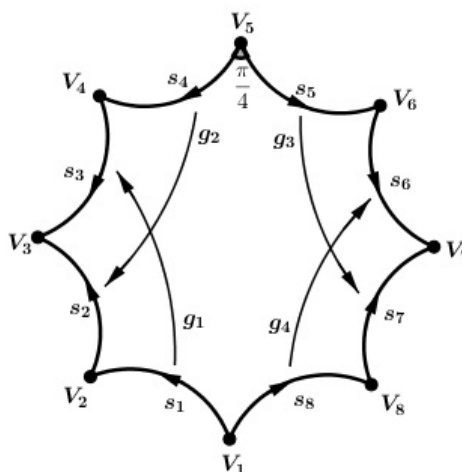


Figura 41 – Identificação de lados do octógono regular.

Fonte: Elaborado pela autora.

Calculando o ciclo do vértice V_1 , temos:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{g_1} \begin{pmatrix} V_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_2} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_3 \\ s_3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_1^{-1}} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_2^{-1}} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_5 \\ s_5 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_3} \begin{pmatrix} V_8 \\ s_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_8 \\ s_8 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_4} \begin{pmatrix} V_7 \\ s_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_7 \\ s_7 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_3^{-1}} \begin{pmatrix} V_6 \\ s_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_6 \\ s_6 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{g_4^{-1}} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_8 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} V_1 \\ s_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, existe um único ciclo de vértices dado por

$$\mathcal{C} = V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_3 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5 \rightarrow V_8 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6,$$

com a seguinte transformação associada

$$g_4^{-1} g_3^{-1} g_4 g_3 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1.$$

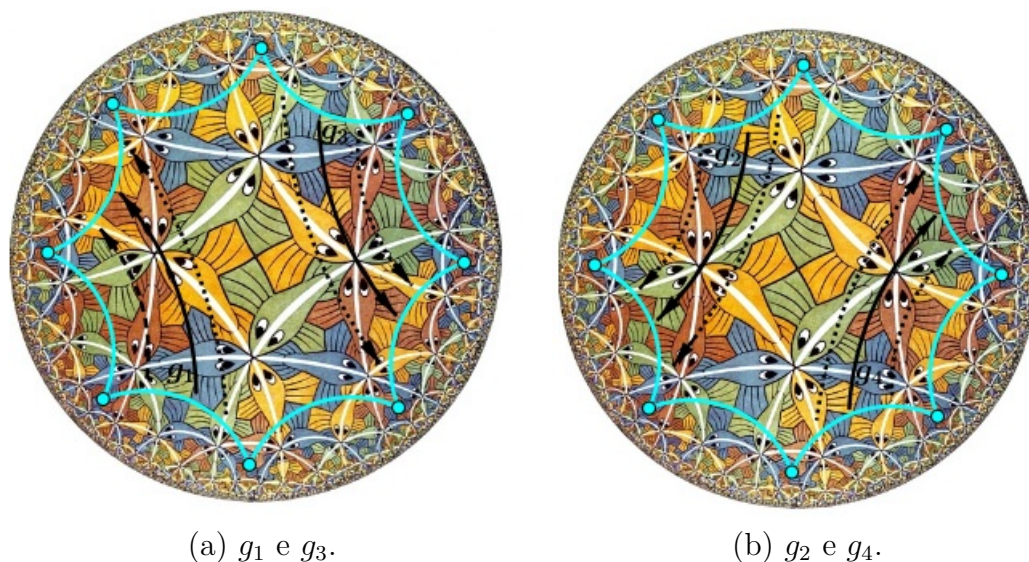
Como o ângulo em cada vértice do octógono é igual a $\frac{\pi}{4}$, a soma dos ângulos internos do ciclo é igual a

$$8 \frac{\pi}{4} = 2\pi.$$

Pelo teorema de Poincaré, segue que o grupo gerado pelas transformações de emparelhamento g_1, g_2, g_3 e g_4 gera um grupo fuchsiano Γ e o octógono é um polígono fundamental convexo para tal grupo. Além disso, Δ/Γ gera uma superfície hiperbólica de gênero $g = 2$.

Na Figura 5.5 (a) podemos observar pelas setas pontilhadas, por exemplo, que a isometria g_1 leva a cabeça do peixe verde no corpo do peixe amarelo e o corpo do peixe verde na cabeça do peixe amarelo; a isometria g_3 aplica o corpo do peixe verde na cabeça do peixe amarelo e a cabeça do peixe verde no corpo do amarelo. De mesma forma, podemos analisar as isometrias g_2 e g_4 da Figura 5.5 (b). Ou seja, tais isometrias levam

um peixe no outro, juntando-os perfeitamente, porém as cores não são preservadas. Logo, a superfície de gênero $g = 2$, gerada por Δ/Γ , estaria recoberta com as imagens dos peixes, porém sem manter iguais as respectivas cores em cada curva fechada formada por cada par de arestas identificados.



(a) g_1 e g_3 .

(b) g_2 e g_4 .

Figura 42 – Identificação de cores das isometrias.

Fonte: Elaborado pela autora.

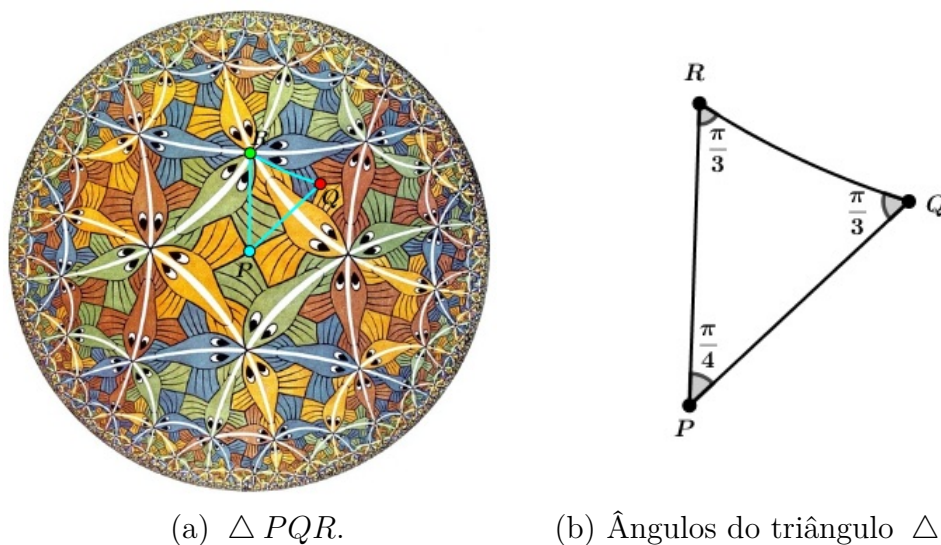
Vejamos mais uma tesselação presente na obra. Vamos observar os triângulos formados pelos pontos P , Q e R , conforme mostra a Figura 5.6 (a). Em qualquer triângulo ΔPQR os ângulos nos vértices são dados por

$$\hat{P} = \frac{\pi}{4}, \quad \hat{Q} = \frac{\pi}{3} \quad e \quad \hat{R} = \frac{\pi}{3},$$

conforme mostra a Figura 5.6 (b). Note que os valores de \hat{P} , \hat{Q} e \hat{R} satisfazem

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{12} < 1.$$

Ou seja, o grupo $G^*(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ gerado pelas reflexões nos lados do ΔPQR é um grupo triangular.



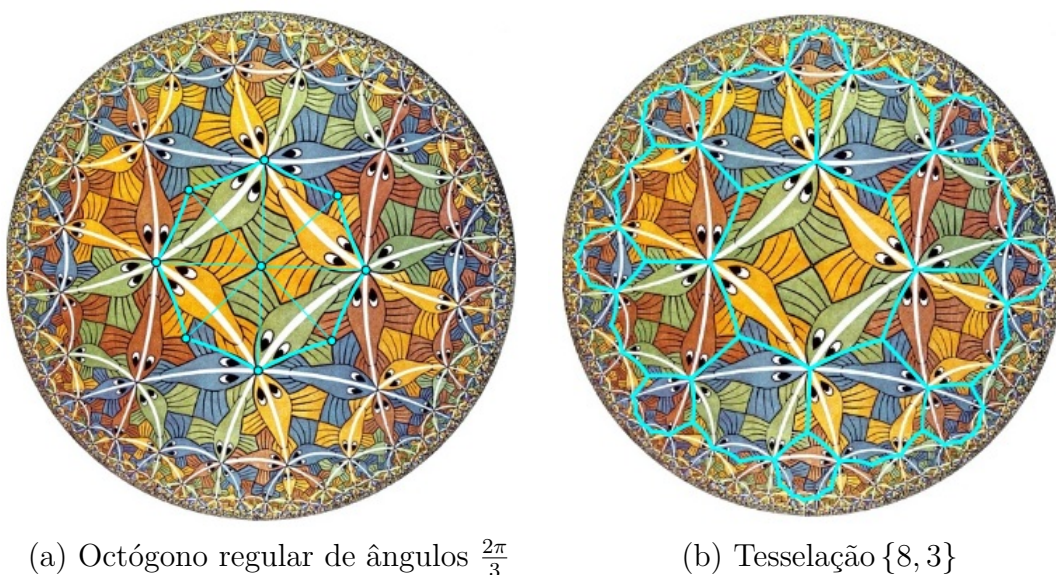
(a) $\triangle PQR$.

(b) Ângulos do triângulo $\triangle PQR$.

Figura 43 – Triângulo formado pelos ponto P , Q e R .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Marcando a primeira sequência de pontos Q e R , obtemos um octógono Hiperbólico regular que possui ângulos $\frac{2\pi}{3}$ nos vértices. Tal octógono é subdividido em oito triângulos $\triangle PQR$, como mostra Figura 5.7 (a). Em cada vértice do octógono se encaixam três de suas réplicas e como a condição $(8 - 2)(3 - 2) = 6 > 4$ é satisfeita, segue que existe uma tesselação regular $\{8, 3\}$, conforme apresentamos na Figura 5.7 (b).



(a) Octógono regular de ângulos $\frac{2\pi}{3}$

(b) Tesselação $\{8, 3\}$

Figura 44 – Tesselação regular $\{8, 3\}$

Fonte: Elaborado pela autora.

Utilizaremos tal tesselação para apresentar curvas equidistantes na subseção se-

guinte.

6.1.1 Curvas equidistantes

Na Figura 5.8 (a), onde está representada a tesselação $\{8,3\}$, podemos observar que os arcos que contém os pontos $RRR\dots$ parecem determinar uma geodésica em Δ . Tais arcos são as curvas brancas que dividem os peixes ao meio na Figura 5.7 (b). Vamos ver que eles não descrevem geodésicas. Considerando o arco que contém os pontos $QQQ\dots$ temos a existência de uma curva $QRQRQR\dots$ entre os dois arcos. Cada segmento de geodésica QR descreve um lado de um octógono, logo todos possuem o mesmo comprimento no ponto de vista hiperbólico, digamos 2ϕ . A afirmação é que os pontos médios de cada lado QR pertencem a uma mesma geodésica a de Δ , Figura 5.8 (b). A distância de qualquer ponto de a aos arcos $QQQ\dots$ e $RRR\dots$ é sempre constante, digamos δ . O par de arcos, sendo o lugar geométrico dos pontos que possuem uma distância δ de a , é chamado de curva equidistante com eixo a e altitude δ .

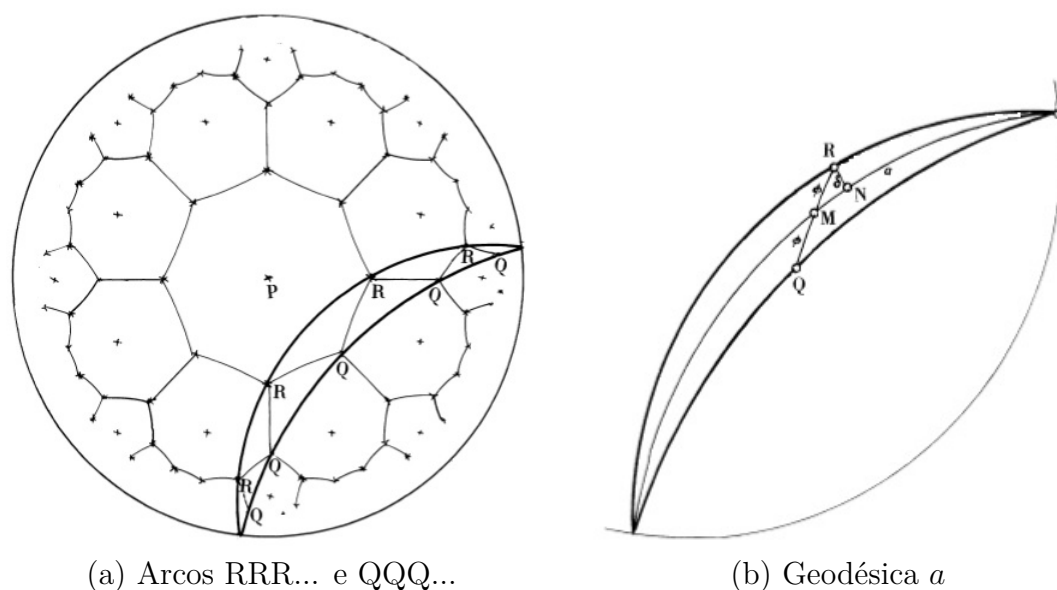


Figura 45 – Curvas equidistantes.

Fonte: Coxeter (1979).

Logo, existem curvas que não são geodésicas mas que são equidistantes de alguma geodésica.

6.2 Limite Circular I

Na obra Limite Circular I também destacamos três classes de pontos notáveis \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} . Os pontos $P \in \mathcal{P}$ são onde as bocas de três peixes pretos e a cauda de três peixes

brancos se encontram; $Q \in \mathcal{Q}$ os pontos onde as bocas de dois peixes brancos e a cauda de dois peixes pretos se intersectam e $R \in \mathcal{R}$ onde as barbatanas direitas de dois peixes brancos e dois peixes pretos se encontram. Os ângulos do triângulo $\triangle PQR$ destacado na Figura 5.9 são dados por

$$\hat{P} = \frac{\pi}{6}, \hat{Q} = \frac{\pi}{4} \text{ e } \hat{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, temos que os ângulos do $\triangle PQR$ satisfazem a condição

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12} < 1.$$

Assim, o grupo $G^*(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ gerado pelas reflexões nos lados deste triângulo é um grupo triangular. Pelo Teorema 4.2.1 a ação de $G^*(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ em $\triangle PQR$ preenche o plano hiperbólico sem lacunas e sobreposições.



Figura 46 – Limite Circular I.

Fonte: Elaborado pela autora.

No centro da imagem, no ponto P , temos que doze triângulos $\triangle PQR$ formam um hexágono regular cujos ângulos possuem medida $\frac{\pi}{2}$, conforme mostra a Figura 5.10 (a). Em cada vértice do hexágono se encaixam quatro de suas cópias. Logo, como a condição $(6 - 2)(4 - 2) = 8 > 4$ é válida, existe uma tesselação regular $\{6, 4\}$, veja Figura 5.10 (a).

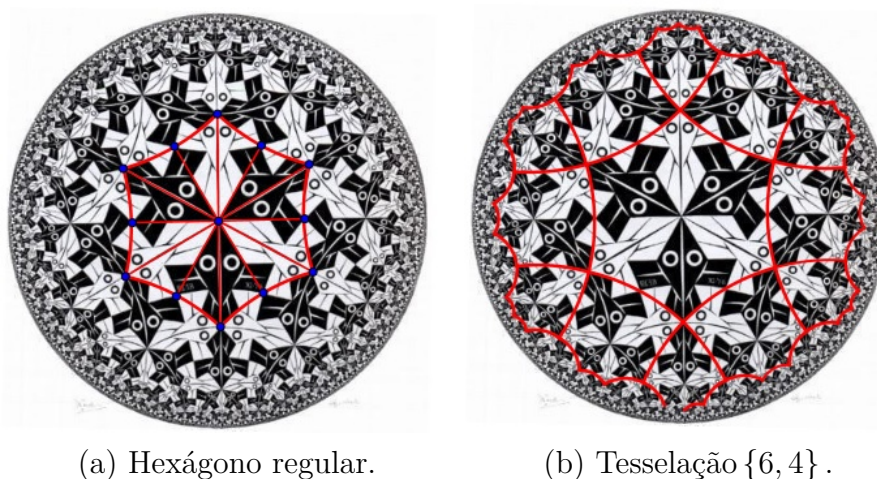


Figura 47 – Limite Circular I.

Fonte: Elaborado pela autora.

Note que esta tesselação $\{6, 4\}$ é a mesma que aparece na Figura 4.3 desenvolvida por Coxeter.

Além da tesselação $\{6, 4\}$ existe outra tesselação em Limite Circular I. Considere o triângulo $\triangle PQP$ da Figura 5.11. Tal triângulo possui ângulos medindo

$$\hat{P} = \frac{\pi}{6} \text{ e } \hat{Q} = \frac{\pi}{2}.$$

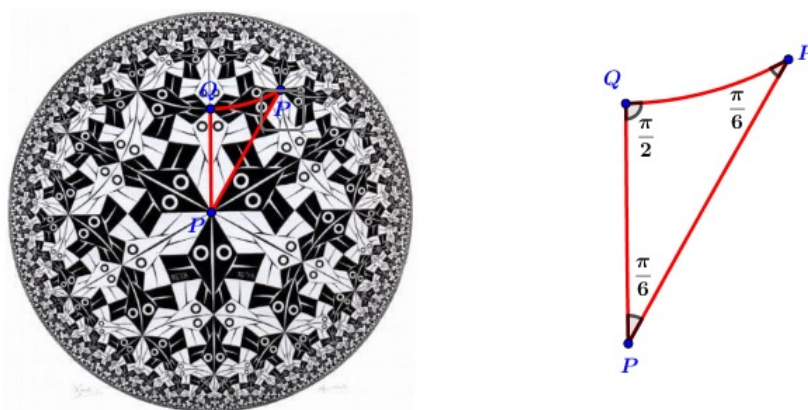


Figura 48 – $\triangle PQP$ com ângulos $P = \frac{\pi}{6}$ e $Q = \frac{\pi}{2}$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, temos que os ângulos do $\triangle PQP$ satisfazem a condição

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} < 1.$$

Assim, o grupo $G^*(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ gerado pelas reflexões nos lados deste triângulo é um grupo triangular e sua ação no triângulo preenche o plano hiperbólico sem lacunas e sobreposições.

No centro da imagem, no ponto P , temos que doze réplicas de $\triangle PQP$ formam um hexágono regular cujos ângulos possuem medida igual a $\frac{\pi}{3}$, ver Figura 4.7 (a). Em cada vértice do hexágono se encaixam seis de suas cópias. Como a condição $(6 - 2)(6 - 2) = 16 > 4$ é satisfeita, segue que existe uma tesselação autodual $\{6, 6\}$, conforme mostra Figura 4.7 (b).

Na obra Limite Circular I fizemos apenas a análise da existência de tesselações e grupos triangulares associados a elas, pois não conseguimos determinar nenhum polígono P_{4g} que satisfaz o teorema de Poincaré.

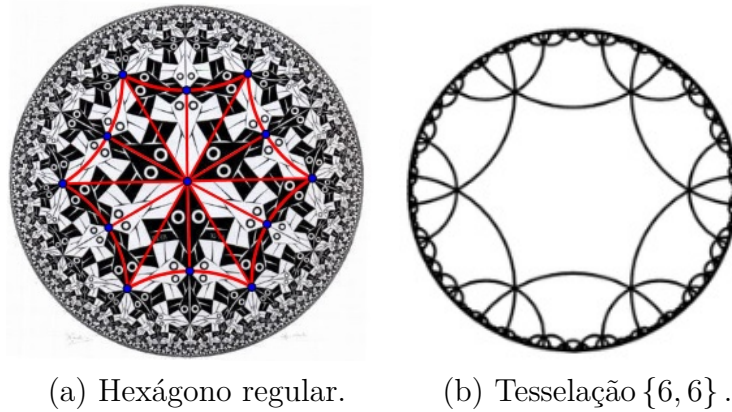


Figura 49 – Limite Circular I.

Fonte: Elaborado pela autora.

Na próxima seção apresentamos a obra Limite Circular IV. Veremos que os resultados obtidos nesta obra são os mesmos que em Limite Circular I.

6.3 Limite Circular IV

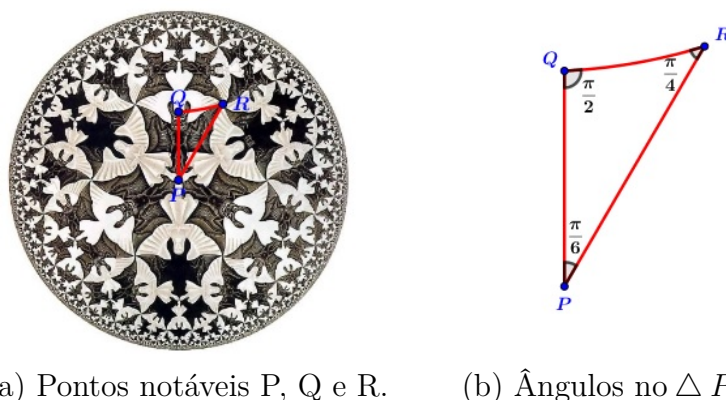
Da mesma forma que as obras trabalhadas anteriormente, em Limite Circular IV também temos três classes de pontos \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} . Os ponto $P \in \mathcal{P}$ são onde as pontas de três pés de três anjos e demônios se juntam; os pontos $Q \in \mathcal{Q}$ são definidos como o centro das cabeças dos anjos e os pontos $R \in \mathcal{R}$ onde quatro asas de quatro anjos e quatro demônios se encontram, conforme mostra a Figura 5.13 (a). Em qualquer triângulo $\triangle PQR$ os ângulos nos vértices são dados por

$$\hat{P} = \frac{\pi}{6}, \hat{Q} = \frac{\pi}{2} \text{ e } \hat{R} = \frac{\pi}{4},$$

conforme Figura 5.13 (b). Observe que o triângulo $\triangle PQR$ satisfaz a condição

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12} < 1.$$

Logo, o grupo $G^*(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ gerado pelas reflexões nos lados deste triângulo é um grupo triangular. Note que este grupo triangular G^* é o mesmo que determinamos na obra Limite Circular I e na obra de Coxeter. Assim, a análise e resultados da obra Limite Circular IV decorre de forma análoga a Limite Circular I, como veremos a seguir.

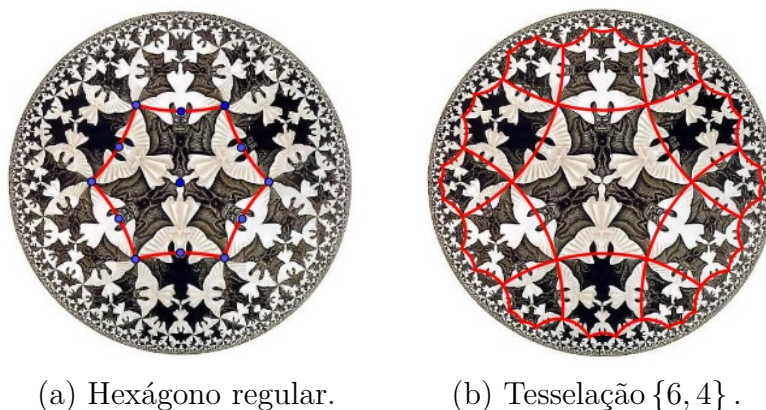


(a) Pontos notáveis P, Q e R. (b) Ângulos no $\triangle PQR$.

Figura 50 – Limite Circular IV.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Marcando a primeira sequência de ponto Q e R obtemos o hexágono regular da Figura 5.14 (a), que possui ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Em cada vértice do hexágono se encaixam quatro de suas réplicas, formando assim a tesselação regular $\{6, 4\}$, veja Figura 5.14 (b).



(a) Hexágono regular. (b) Tesselação $\{6, 4\}$.

Figura 51 – Tesselação $\{6, 4\}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma análoga como fizemos em Limite Circular I, podemos construir em Limite Circular IV a tesselação autodual $\{6, 6\}$, cuja construção omitimos aqui.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho o objetivo inicial foi identificar tesselações hiperbólicas associadas a grupos triangulares nas obras Limites Circulares I, III e IV. Em seguida verificamos a existência de polígonos regulares que satisfazem o teorema de Poincaré e geram superfícies compactas Δ/Γ , onde Γ é um grupo fuchsiano e seus geradores são as isometrias que identificam os lados do polígono.

Na obra Limite Circular III, conseguimos identificar três tipos de tesselações $\{3, 8\}$, $\{8, 8\}$ e $\{8, 3\}$. Além disso, determinamos um polígono P_8 , que gera uma tesselação autodual $\{8, 8\}$ e uma superfície de gênero $g = 2$. Ao analisar as isometrias que identificam os lados deste polígono, concluímos que as imagens se unem perfeitamente, porém não há preservação de cor.

Nas obras Limites Circulares I e IV, obtivemos os mesmos resultados para ambas. Identificamos as tesselações $\{6, 4\}$ e $\{6, 6\}$. Nestas obras não conseguimos encontrar um polígono regular que gera uma tesselação autodual. Porém, desconfiamos da existência de um polígono P_{12} que gera uma tesselação autodual $\{12, 12\}$. Tal polígono pode ter vértices euclidianamente próximos a fronteira de Δ , o que torna mais difícil sua identificação.

Para trabalhos futuros, na obra Limite Circular III queremos estudar a existência de um polígono fundamental cuja a identificação de lados por isometrias de Δ gera uma superfície compacta Δ/Γ que preserva as imagens e suas respectivas cores. Já nas obras Limites Circulares I e IV continuaremos a estudar a existência de um dodecágono que gera uma tesselação autodual $\{12, 12\}$.

REFERÊNCIAS

- [1] ANDERSON, J. W. Hyperbolic Geometry. Second Edition. London: Springer-Verlang, 2005.
- [2] ANDRADE, P. Introdução à geometria hiperbólica: o modelo de Poincaré. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [3] ARCARI, I. Um texto de geometria hiperbólica. 2008. 127p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2008.
- [4] BEARDON, A. F. The geometry of discrete groups. New York: Springer-Verlang, 1983.
- [5] COXETER, H. S. M. The non-euclidean symmetry of Escher's picture 'circle limit III'. The Mit Press. Leonardo, Vol. 12, p. 19 - 25, 1979.
- [6] DORIA, C. M. Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica. Rio de Janeiro: SBM, 2019.
- [7] DUNHAM, D. A tale both shocking and hyperbolic. Math Horizons. p. 22 - 26, Abril 2003.
- [8] ERNST, B. O espelho mágico de M. C. Escher. Hohenzollernring: Taschen, 1991.
- [9] GUAZZI, E. P. D. O. Caracterizações algébrica e geométrica das regiões de uniformização de curvas hiperelípticas via equação diferencial fuchsiana para a construção de constelações de sinais hiperbólicas. 2019. 201p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2019.
- [10] GUPTA, M. S. El arte de Escher, la gráfica smith y la geometría hiperbólica. EEE Microwave News, San Diego, p. 66 - 76, Outubro 2006.
- [11] KATOK, S. Fuchsian groups. Chicago: The University of Chicago Press, 1992.
- [12] KINSEY, L. C. Topology of surfaces. New York: Springer-Verlang, 1993.
- [13] LEITE, E. J. F. Tópicos de códigos geometricamente uniformes em espaços hiperbólicos. 2012. 72p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2012.

- [14] MAGNUS, W. Noneuclidean Tessellations and Their Groups. New York: Academic Press, 1974.
- [15] MUNKRES, J. R. Topology: a first course. New Jersey: Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [16] NEEDHAM, T. Visual complex analysis. 1^o edição. New York: Oxford University Press, 1997.
- [17] RODRIGÁNEZ, C. C. Escher I: las matemáticas para construir. SUMA, Madrid, p. 101 - 108, Junio, 2005.
- [18] RODRIGUES, A. A. S. Emparelhamentos de arestas do polígono hiperbólico associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$. 2017. 101p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2017.
- [19] SANTOS, E. J. Introdução às transformações de Möbius: aspectos geométricos e algébricos. 2019. 91p. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.
- [20] SERIES, S.; MALONI, S. Hyperbolic Geometry MA 448, January 4, 2013.
- [21] SCHATTSCHEIDER, D. The mathematical side of M. C. Escher. Notices of the AMS, Volume 57, p. 706 - 718, Junho/ Julho 2010.
- [22] SOUSA, C. B. Geometria hiperbólica: consistência do modelo de disco de Poincaré. 2014. 112p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014.
- [23] SOUSA, R. P. Grupos fuchsianos identificados em uma ordem dos quatérnios. 2009. 90p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.
- [24] STILLWELL, J. Geometry of surfaces. New York: Springer-Verlang, 1992.
- [25] TJABBES, P. A magia de Escher. São Paulo: Art Unlimited, 2013.
- [26] VALÉRIO, V. P. Assinatura de grupos fuchsianos finitamente gerados e aplicações. 2006. 88p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2006.
- [27] WALKDEN, C. Hyperbolic geometry. 12th January, 2019.