UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA AO ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

ROMERO HENRIQUE ABDON SILVA

Belo Horizonte
2014

ROMERO HENRIQUE ABDON SILVA

A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA AO ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Monografia apresentada à banca examinadora do Curso de Especialização em Matemática do Ensino Básico do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Prof. Dr. Jussara de Matos Moreira

Belo Horizonte

2014

Silva, Romero Henrique Abdon.

S586m A metodologia da resolução de problemas aplicada ao ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo [manuscrito] / Romero Henrique Abdon Silva. — 2014.
62.f. il.

Orientadora: Jussara de Matos Moreira. Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências 62.

1. Matemática. 2. Ensino-aprendizagem. 3 Resolução de problemas. 4. Trigonometria I. Moreira, Jussara de Matos.II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51 (043)

ATA DA 160a MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADO PELO ALUNO ROMERO HENRIQUE ABDON SILVA

Aos seis dias de junho de 2014, às 10h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **Romero Henrique Abdon Silva**, intitulada: "A *metodologia da resolução de problemas aplicada ao ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo*", como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, com ênfase em Matemática do Ensino Básico. Abrindo a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profa. Jussara de Matos Moreira, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da Comissão Examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado **Aprovado,** por unanimidade, com nota 100 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 06 de junho de 2014.

Profa. Jussara de Matos Moreira
Orientadora

Prof. André Gimenez Bueno
Examinador

Heleno da Silva Cunha

Prof. Heleno da Silva Cunha
Examinador

À minha família pelo reconhecimento. Aos meus amigos, visíveis e invisíveis, pelos bons momentos que me proporcionaram nessa caminhada. E aos meus atuais e ex-alunos, razão do meu esforço.

RESUMO

O trabalho que se segue aborda a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem e sua utilização no ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Com o objetivo de mostrar a utilidade desta metodologia como proposta pedagógica eficaz no ensino do referido conteúdo matemático, partimos do seguinte questionamento: Como a metodologia da resolução de problemas pode ser aplicada para favorecer o ensino-aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo? Buscando responder tal questão, organizamos o trabalho da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos a metodologia da resolução de problemas; no segundo, abordamos um breve histórico sobre a trigonometria; no terceiro, apresentamos a trigonometria no triângulo retângulo; no quarto e último capítulo, apresentamos uma proposta de atividade a ser desenvolvida em sala de aula utilizando a metodologia da resolução de problemas no ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo e finalizamos expondo os resultados da aplicação deste trabalho numa escola da rede estadual de Minas Gerais.

Palavras-chave: Metodologia de ensino-aprendizagem, Resolução de problemas, Trigonometria no triângulo retângulo

ABSTRACT

The following text discusses problem-solving as a teaching-learning methodology and its use in teaching trigonometric relationships in the right triangle. With the aim of demonstrating the usefulness of this methodology as an effective pedagogical proposal in teaching the aforementioned mathematical content, we start with the following question: How can the problem-solving methodology be applied to favor the teaching-learning of trigonometric relationships in the right triangle? To answer this question, we organized the work as follows: in the first chapter, we present the problem-solving methodology; in the second, we address a brief history of trigonometry; in the third, we present trigonometry in the right triangle; in the fourth and final chapter, we present a proposal for an activity to be developed in the classroom using the problem-solving methodology in teaching trigonometric ratios in the right triangle and conclude by exposing the results of applying this work in a school of Minas Gerais state network.

Keywords: Teaching-learning methodology, Problem-solving, Trigonometry in the right triangle

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O trabalho com resolução de problemas tem grande importância no processo de ensino-aprendizagem, tanto da Matemática como de outras disciplinas, já que o ser humano é desafiado a resolver problemas a todo o momento em seu dia a dia. Segundo Giovanni Jr. (2009), a competência para resolver problemas não é exclusividade da Matemática, mas as habilidades e os conhecimentos adquiridos no aprendizado dessa disciplina auxiliam muito o seu desenvolvimento. De acordo com este mesmo autor, tendo em vista o fato de que a formação matemática propicia ao ser humano uma maior facilidade em elaborar estratégias para encontrar as soluções ou vislumbrar diferentes caminhos para resolver os problemas que enfrenta, enxerga-se nessa prática um instrumento valioso e sugere-se que seja dada uma atenção especial nesse sentido.

> Com a prática da resolução de problemas nas aulas de matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Isso porque, além de contextualizar os conteúdos estudados, por levarem os alunos a aplicar e a entender a utilidade do que aprenderam, os problemas desafiam os alunos a utilizar o raciocínio, a lógica, o cálculo mental, a estimativa, ou seja, todos os seus conhecimentos e habilidades prévios na busca de uma resolução. (GIOVANNI JR., 2009, p. 10)

Um dos conteúdos matemáticos estudados ainda no ensino fundamental é a trigonometria no triângulo retângulo. A palavra trigonometria, do grego *trígono* (triangular) e *metria* (medida), significa medida das partes de um triângulo. Na antiguidade, a necessidade de se calcular grandes distâncias, aliada à falta de instrumentos adequados para esse fim, era um grande problema para os estudos de Astronomia, para a navegação e agrimensura. Há indícios de que os babilônios efetuaram estudos rudimentares de trigonometria. Mais tarde, os estudos de Astronomia feitos por egípcios e gregos deram grande impulso no desenvolvimento da trigonometria. A partir desses estudos, grandes distâncias puderam ser calculadas considerando as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. A trigonometria possui aplicações na Engenharia, na Eletrônica, na Medicina, na Aeronáutica e também na Música, o que justifica seu estudo no ensino básico.

De acordo com as orientações pedagógicas da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (SEE/MG), baseadas na proposta curricular que define os conteúdos básicos comuns (CBC), “um dos principais objetivos do ensino de Matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver habilidades para a solução de problemas”. Ainda de acordo com essa proposta, “a solução de uma ampla variedade de problemas desenvolve a capacidade de abstração do aluno, bem como a habilidade de atribuir significado aos conceitos abstratos estudados”. Em relação ao ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo, a SEE/MG explica que “um dos fatores relevantes do ensino desse tópico é que ele contém uma idéia criada para resolver inicialmente certos tipos de problemas geométricos. Ao estudar a trigonometria no triângulo retângulo, o aluno tem contato com resultados que tornam possíveis calcular medidas de formas indiretas”.

> Muitas medidas são feitas com o uso de métodos indiretos. Tais métodos são utilizados ou porque as medidas não são diretamente possíveis, ou porque esses métodos são mais cômodos ou menos dispendiosos. São exemplos de situações em que as medições indiretas podem ser realizadas com a utilização da trigonometria no triângulo retângulo: a altura de uma montanha; a altura de uma árvore ou torre; o comprimento de um cabo de sustentação que deve ser amarrado no topo de um poste ao chão; a confecção de peças triangulares, sextavadas, etc.; a distância entre dois astros – Hiparco (180 a 125 a.C) calculou a distância da Terra à Lua –; o cálculo da área de um triângulo; o cálculo da área de um terreno; a projeção de uma área num plano. (Orientações Pedagógicas da SEE/MG para o ensino de Matemática – Ensino Fundamental e Médio)

Considerando então a importância da resolução de problemas e do ensino de trigonometria, unida às orientações pedagógicas da SEE/MG, justificamos a idéia de aliar a metodologia abordada ao ensino do tópico em questão.

1. A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Soares e Pinto (2001), um dos fatos fundamentais que caracteriza as mudanças educacionais e motiva as diferentes pesquisas em educação é a busca pelo desenvolvimento nos alunos da capacidade de aprender a aprender. Percebe-se nas diferentes áreas da educação a necessidade de fazer com que o aluno obtenha habilidades e estratégias que lhe proporcione a busca, por si mesmo, de novos conhecimentos e não apenas a obtenção de conhecimentos prontos e acabados, fazendo assim com que se torne um cidadão capaz de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que ele busque aprender novos conhecimentos e habilidades. Assim, uma das formas mais acessíveis de proporcionar ao aluno tal capacidade é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino.

A resolução de problemas como metodologia baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam do aluno uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento, promovendo dessa forma o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis para dar respostas a situações variáveis e diferentes. Assim, faz-se necessário que o aluno seja incentivado ao hábito da problematização e
à busca de respostas de suas próprias indagações e questionamentos como forma de aprender. Para que uma determinada situação seja considerada um problema, deverá implicar em um processo de reflexão, de tomada de decisões quanto ao caminho a ser utilizado para sua resolução, onde automatismos não permitam a sua solução imediatamente.

Neste contexto, a resolução de problemas tem significativo poder motivador para o aluno, por proporcionar novas situações e diferentes atitudes na busca pelo conhecimento. Desse modo, sua utilização como metodologia no ensino de matemática deve merecer atenção por parte dos professores. A partir do estudo de problemas reais é que se pode envolver o aluno em situações da vida real, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar matemático, visto que praticamente todos os ramos importantes da matemática surgiram em resposta a tais problemas.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1995, p. V)

A proposta da resolução de problemas no ensino de matemática não se refere a problemas rotineiros e algorítmicos, ou seja, a problemas que são resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos, sem estratégia para a sua solução. Esses problemas tradicionais geralmente são propostos após a apresentação dos conteúdos nos capítulos dos livros didáticos, semelhantes aos exemplos mostrados, onde a solução já está contida no próprio enunciado e a tarefa básica é interpretar a questão e transformar a linguagem utilizada numa linguagem matemática adequada, identificando quais operações ou algoritmos são apropriados para resolver o problema. Esses problemas rotineiros são aplicados para fixar o conteúdo visto sem despertar a curiosidade dos alunos e sem desafiá-los a alcançar novos conhecimentos.

Ao adotar a resolução de problemas como estratégia, é interessante que estes estejam vinculados à realidade do aluno. Neste sentido, jornais e revistas, por exemplo, podem ser utilizados como fontes para desenvolver este tipo de trabalho, onde os problemas reais podem surgir de um simples anúncio de venda de um imóvel, contendo a planta e a localização, permitindo o trabalho com escala, área, orientação espacial, perímetro, custo de materiais, confecção de maquetes, sólidos geométricos e tudo que a criatividade e a motivação permitirem. Pesquisas de opinião também são exemplos de fontes ricas para o trabalho com resolução de problemas, permitindo questionamentos do tipo: Como uma pesquisa é realizada? Como se realiza a coleta de dados, a tabulação, a análise e a interpretação dos dados estatísticos? Ao buscar respostas para tais questionamentos, tem-se a oportunidade de se trabalhar com porcentagem, tabelas, gráficos, além de tornar claro o porquê de se fazer pesquisa.

Com a utilização de material concreto, é possível uma participação ativa dos alunos, que podem colaborar com material que tenha despertado atenção e curiosidade. Segundo Polya (1995), um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Dante (1988) enfatiza que os objetivos ao se trabalhar com a resolução de problemas são:

1. Fazer o aluno pensar produtivamente.
2. Desenvolver o raciocínio do aluno.
3. Preparar o aluno para enfrentar situações novas.
4. Dar oportunidade aos alunos de se envolverem com aplicações de matemática.
5. Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.
6. Equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de situações onde se procura um ou mais elementos desconhecidos.
7. Dar uma boa alfabetização matemática ao cidadão comum.

Envolver o aluno em situações-problema estimulantes e desafiadoras implica em fazê-lo pensar produtivamente, raciocinar logicamente para indicar soluções que possam resolver os problemas. Em diversas situações do cotidiano é exigido do ser humano agir com criatividade e independência, sendo que tal iniciativa pode ser desenvolvida desde cedo no aluno através da resolução de problemas.

Dante (1988) classifica os problemas em:

1. Exercícios de reconhecimento;
2. Exercícios de algoritmos;

3. Problemas padrões (já citados anteriormente): são necessários, porém não devem ser predominantes;
4. Problemas-processo ou heurísticos;

> Este tipo de problema exige do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução e, por isso, tornam-se mais interessantes do que os problemas padrões. Eles aguçam a curiosidade do aluno e permitem que o mesmo desenvolva sua criatividade, a sua iniciativa e seu espírito explorador. E, principalmente, inicia o aluno ao desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema o que, em muitos casos é mais importante que a própria resposta correta das mesmas. (DANTE, 1988, p. 86 apud SOARES; PINTO, 2001, p. 6)

5. Problemas de aplicações ou situações-problema;

> Usando conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabela, traçando gráficos, tirando informações a partir dos dados e dos gráficos, fazendo operações, etc. Em geral exigem pesquisa e levantamento de dados. Eles podem ser apresentados em forma de projetos e serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática. (SOARES; PINTO, 2001, p. 6)

6. Problemas de quebra-cabeça.

É importante que no planejamento de um trabalho com resolução de problemas sejam estabelecidos claramente os objetivos que se pretende atingir. Para se desenvolver um bom trabalho, independente do tipo de problema selecionado, o principal é analisar o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes; na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática. Selecionar ou formular problemas que possibilitem aos alunos pensar sobre o próprio pensamento e que os coloquem diante de variadas situações é o melhor critério para planejar uma boa atividade.

1.1 BUSCANDO A SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

Ao procurarmos a solução de uma situação-problema, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encará-la. A princípio, nossa concepção do problema pode ser muito incompleta, mas à medida que vamos progredindo, nossa perspectiva vai mudando e é ainda mais diferente quando estamos próximos de solucioná-lo. Assim, é importante organizarmos o nosso modo de pensar através de algumas indagações. Tais indagações são sugeridas e agrupadas convenientemente por Polya (1995) em quatro fases, apresentadas a seguir.

1.1.1 Compreensão do problema

Primeiro, é preciso compreender o problema.

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante. (POLYA, 1995, p. 4)

Inicialmente é preciso que o enunciado do problema fique bem entendido. O aluno precisa estar em condições de identificar as partes principais do problema: a incógnita, os dados, a condicionante. Deve considerar estas partes sob vários pontos de vista, atento e repetidamente. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçá-la e nela indicar a incógnita e os dados, adotando uma notação adequada, pois ao escolher os símbolos apropriados, deverá considerar os elementos para os quais os símbolos foram adotados.

1.1.2 Estabelecimento de um plano

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução do problema.

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

> Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da idéia de um plano. Esta idéia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “idéia brilhante”. A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma idéia luminosa. (POLYA, 1995, p. 5)

Para perceber a posição do aluno, o professor deve se colocar no lugar deste, levando em consideração sua própria experiência, em relação às dificuldades encontradas e sucessos obtidos na sua trajetória ao resolver problemas.

É difícil ter uma boa idéia, se pouco conhecemos sobre o problema. Se nada conhecemos, é impossível tê-la. As boas idéias surgem através das experiências passadas e dos conhecimentos previamente adquiridos. As habilidades indispensáveis para resolver um problema matemático são provenientes do conhecimento matemático já adquirido, tal como problemas anteriormente resolvidos. De acordo com Polya (1995), a dificuldade está em que, geralmente, há problemas demais que estão, de uma maneira ou de outra, relacionados com o nosso, isto é, que têm com este algum ponto em comum. “Se conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que seja intimamente relacionado com o nosso, teremos tido muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a.” (POLYA, 1995, p. 6).

Caso não seja possível associar o problema a outro resolvido anteriormente, é preciso procurar outra forma apropriada de examinar os diversos aspectos do mesmo, podendo assim reformulá-lo. A variação do problema pode levar a um problema auxiliar adequado. Mas, de acordo com Polya (1995), ao tentarmos aplicar problemas conhecidos, cogitando de diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos distanciar tanto do nosso problema original que correremos o risco de perdê-lo por completo e, para que isso não ocorra, é importante verificar se utilizou todos os dados e toda a condicionante.

1.1.3 Execução do plano

Execute o seu plano.

Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Segundo Polya (1995, p. 8), "conceber um plano, a idéia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa." O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar mais convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não passe nenhum erro despercebido.

> Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranqüilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a idéia final, não perdera facilmente essa idéia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo. (POLYA, 1995, p. 9)

1.1.4 Retrospecto

Examine a solução obtida.

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 1995, p. 10)

Ao cumprir o plano e escrever a resolução verificando cada passo, o aluno tem boas razões para crer que resolveu corretamente o seu problema, porém é possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Assim, é conveniente verificar o resultado. Se houver um processo rápido e intuitivo para tal verificação, ele não deverá ser desprezado.

De acordo com Polya (1995), um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os alunos poderão achar realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, poderão ficar ansiosos para ver o que mais podem conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido.

1.2 O PAPEL DO PROFESSOR

Soares e Pinto (2001) ressaltam que quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das idéias apresentadas pelos alunos, de modo que estas sejam produtivas, levando os alunos a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final.

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 1995, p. 1)

Dado um problema para ser resolvido em grupo ou individualmente, é importante que o professor permita a leitura e a compreensão do mesmo, proporcione a discussão entre os alunos para que todos entendam o que se busca no problema, propiciando a verbalização, não responda diretamente às perguntas feitas durante o trabalho e sim os incentive com novos questionamentos, idéias e dicas. Após a determinação da solução pelos alunos, é importante também que o professor discuta os diferentes caminhos de resolução, incentivando para soluções variadas, discuta soluções errôneas e estimule a verificação.

Como sugere Polya (1995, p. 1), “se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista.” O melhor é, então, ajudá-lo com naturalidade, colocando-se no lugar do mesmo, percebendo seu ponto de vista, procurando compreender o que se passa em sua cabeça e fazendo uma pergunta ou indicando um passo que complete seu raciocínio.

Soares e Pinto (2001) destacam que se deve ter alguns cuidados, como longas listas de problemas, que são desmotivadoras, assim como constantes fracassos e repetições são frustrantes. Para evitar essas atitudes convém:

1. Apresentar poucos problemas com graduação de dificuldades e aplicação de diferentes estratégias. A linguagem deve ser simples evitando a não compreensão do problema.
2. Permitir o uso de materiais concretos.
3. Evitar valorizar a resposta e sim todo o processo para determiná-la.
4. Incentivar as descobertas do aluno, a diversidade de estratégias utilizadas, a exposição de dificuldades, a análise e verificação da solução, a criação de novos problemas e a identificação do erro, para que através dele possa compreender melhor o que deveria ter sido feito.

2. BREVE HISTÓRICO SOBRE A TRIGONOMETRIA

Como conta Boyer (1974), a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem – ou nação. Teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo.

Com os gregos, pela primeira vez é encontrado um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua.

Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As proposições II. 12 e II. 13 de *Os elementos*, por exemplo, são equivalentes à lei dos cossenos para ângulos obtusos e agudos respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por meio semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos.

O teorema da corda quebrada de Arquimedes pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica, sendo equivalente às fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – notadamente Eratóstenes De Cirene (por volta de 276-194 A. C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 A. C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio; mas o que quer que ele tenha escrito sobre esse assunto se perdeu. Em vez disso, temos dele um tratado, talvez escrito antes (cerca de 260 A. C), *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, que assume um universo geocêntrico. O que faltou para chegar a uma avaliação dos tamanhos do Sol e da Lua foi só a medida do raio da Terra. Aristóteles tinha mencionado uma estimativa de 60000 quilômetros para a circunferência da Terra (talvez devida a Eudoxo) e Arquimedes contava que alguns de seus contemporâneos calculavam que o perímetro seria de uns 45000 quilômetros. Um cálculo muito melhor, e de longe o mais célebre, deveu-se a Eratóstenes, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco, que forneceu um perímetro de 37000 quilômetros.

Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presume-se que durante a segunda metade do segundo século A. C., o astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 A. C.) construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica, sendo considerado por isso como "o pai da trigonometria".

Aristarco sabia que num dado círculo, a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°, aproximando-se do limite 1. No entanto, parece que antes de Hiparco empreender a tarefa, ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos. Foi sugerido, no entanto, que Apolônio pode ter-se antecipado a Hiparco quanto a isto e que a contribuição desse último à trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores. Hiparco evidentemente calculou suas tabelas para serem usadas na sua astronomia, sobre cuja origem pouco se sabe.

Não se sabe bem quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente tinha dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam (excetuado um comentário sobre um poema astronômico popular por Aratus). É provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu, pois Teon de Alexandria, comentando a tabela de cordas de Ptolomeu, referiu que Hiparco antes tinha escrito um tratado em doze livros sobre cordas em um círculo.

Teon menciona também outro tratado, em seis livros, por Menelau de Alexandria (cerca de 100 D. C.) tratando de *Cordas num círculo*. Outras obras de matemática e astronomia de Menelau são citadas por comentadores gregos e árabes posteriores, inclusive um *Elementos de geometria*, mas a única que se preservou – e somente em árabe – foi sua *Sphaerica*. No Livro I desse tratado, Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos análoga à de Euclides I para triângulos planos. Contém um teorema que não tem um análogo euclidiano – que dois triângulos esféricos são congruentes se ângulos correspondentes são iguais (Menelau não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos); e o teorema $A+B+C > 180°$ é provado. O segundo livro de *Sphaerica* descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático. O Livro III, o último, contém o bem conhecido “teorema de Menelau” como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica – uma geometria ou trigonometria de cordas num círculo.

O teorema de Menelau desempenhou papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia, mas de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática*, obra em treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria cerca de meio século depois de Menelau. Essa célebre “Síntese matemática” era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores (Aristarco inclusive) por ser a de Ptolomeu chamada a coleção “maior” e a de Aristarco e outros, a coleção “menor”. Devido às frequentes referências à primeira como *megiste* (maior), surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o *Almajesto* (“o maior”) e é por esse nome que a obra é conhecida a partir daí então.

O *Almajesto* de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas num círculo* de Hiparco, mas esta influência não pode ser especificada com segurança. Em astronomia, Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam, ou não, em grande parte, de seu reputado predecessor não se pode saber. O *Almajesto* não foi perdido com o passar do tempo e por isso temos não só suas tabelas trigonométricas, mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção.

Desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como *razões trigonométricas*. Os gregos e depois deles os hindus e os árabes usaram *linhas trigonométricas*. Essas a princípio tiveram a forma de cordas num círculo e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas. Para isso, duas convenções eram necessárias: (1) alguma regra para subdividir a circunferência de um círculo e (2) alguma regra para subdividir o diâmetro.

A divisão de uma circunferência em 360 graus parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, embora não se saiba bem como a convenção surgiu. Não é improvável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze "signos" ou 36 "decanatos". Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia facilmente ser posto em correspondência com o sistema de signos zodiacais e decanatos, subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Nosso sistema comum de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência.

Além disso, como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta partes *minutae primae*, cada uma das quais era dividida em sessenta partes *minutae secundae*, e assim por diante. É das frases latinas que os tradutores usaram que provêem nossas palavras "minutos" e "segundos". Foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas ele subdividiu de novo em sessenta minutos e cada minuto de comprimento em sessenta segundos.

Boyer (1974) conta ainda que o período de Hiparco a Ptolomeu, cobrindo três séculos, foi uma fase em que a matemática aplicada esteve em posição proeminente. Houve progressos na astronomia e geografia, óptica e mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na matemática.

> É verdade que durante esses três séculos se desenvolveu a trigonometria, mas esse tópico era então, na melhor das hipóteses, uma aplicação à mensuração da geometria elementar que satisfazia às necessidades da astronomia, não parte da matemática pura. Além disso, não é se quer claro se houve ou não qualquer progresso significativo na trigonometria de Ptolomeu em 150 D. C. relativamente à de Hiparco, em 150 A. C. – ou mesmo talvez à de Apolônio e Arquimedes um século antes ainda. (BOYER, 1974, p. 126)

No entanto, foram precisamente esses aspectos da matemática grega que mais atraíram os hindus e os árabes, que serviram de ponte para o mundo moderno. Como conta Dante (2005), importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, no final do século VIII, mostrando o quanto aquele povo estava familiarizado com a trigonometria, sendo os responsáveis pelas notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes.

No século XV, Purback, um matemático nascido na Baviera, procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, introduzindo o seno e a tangente na trigonometria e construindo a primeira tábua trigonométrica. Porém, o primeiro tratado de trigonometria feito de maneira sistemática é chamado *De triangulis* ou *Tratado dos triângulos* e foi escrito pelo matemático alemão Johann Muler, também conhecido como Regiomontanus, e que foi discípulo de Purback.

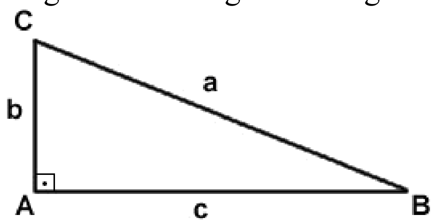
> Atualmente, a trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários campos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Encontramos, também, aplicações da trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos de atividades, aplicações essas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à trigonometria. (DANTE, 2005, p. 187)

3. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo, apresentamos a trigonometria no triângulo retângulo com o objetivo específico de embasar a proposta de atividade apresentada no capítulo seguinte, na qual serão aplicadas as razões trigonométricas.

Se ABC é um triângulo retângulo em **A**, temos:

Figura 1 – Triângulo Retângulo

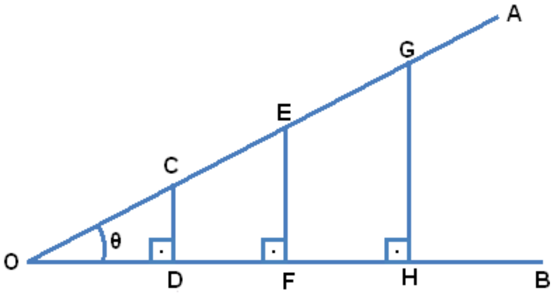


Ilustrado pelo autor

- **a** é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- **b** e **c** são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos;
- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{AB}$ é cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

Consideremos agora um ângulo $A\hat{O}B$ = θ, 0° < θ < 90° e tracemos, a partir dos pontos **C**, **E**, **G**, etc. da semi-reta AO, as perpendiculares CD, EF, GH, etc., à semi-reta OB.

Figura 2 – Ângulo α



Ilustrado pelo autor

Os triângulos OCD, OEF, OGH, etc., são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Podemos portanto escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \ \text{... (constante)}$$

Essa relação depende apenas do ângulo **θ** (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual **θ** é um dos ângulos agudos) e é chamada de **seno de θ** e escrevemos:

$$sen\ \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \qquad (0° < \theta < 90°)$$

De modo análogo, da semelhança dos triângulos obtemos as relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \ \text{... (constante)}$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \ \text{... (constante)}$$

que também dependem apenas do ângulo **θ** e que definimos, respectivamente, como **cosseno do ângulo θ** e **tangente do ângulo θ**:

$$\cos\ \theta = \frac{OD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$tg\ \theta = \frac{CD}{OD} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta} \qquad (0° < \theta < 90°)$$

As razões $sen\ \theta = \frac{CD}{OC}$, $\cos\ \theta = \frac{OD}{OC}$ e $tg\ \theta = \frac{CD}{OD}$ são chamadas *razões trigonométricas* em relação ao ângulo **θ**.

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas:

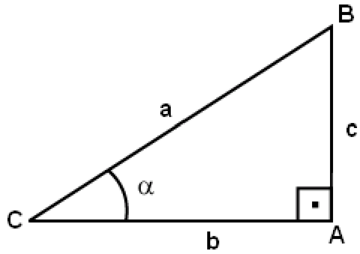
1ª) *Relação fundamental do triângulo retângulo*

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad\qquad (0° < \alpha < 90°)$$

Demonstração:

Consideremos um ângulo **α** de vértice **C** e um triângulo CAB, retângulo em **A**, como mostra a figura.

Figura 3 – Triângulo Retângulo



Ilustrado pelo autor

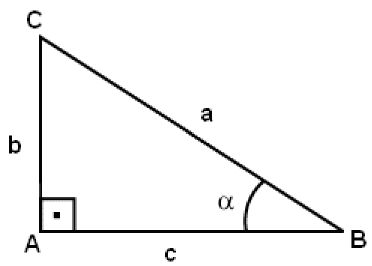
Pelo teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, logo:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

2ª) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} \qquad (0° < \alpha < 90°)$

Demonstração:

Figura 4 – Triângulo Retângulo



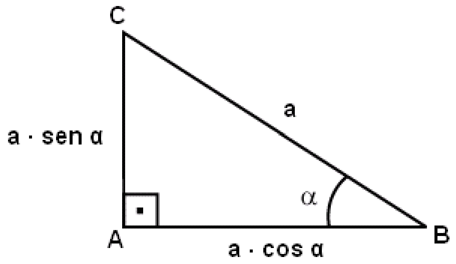
Ilustrado pelo autor

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = tg\ \alpha \qquad \text{ou} \qquad tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

(dividimos ambos os termos da razão por $a \neq 0$)

3ª) Se num triângulo retângulo conhecemos um ângulo agudo **α** e a medida **a** da hipotenusa, os catetos medirão:

Figura 5 – Triângulo Retângulo



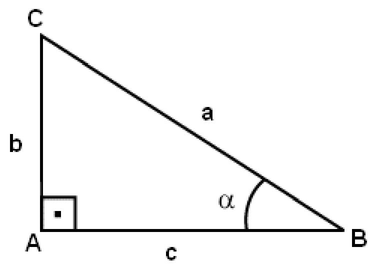
$a \cdot sen\ \alpha$ (cateto oposto a α)

$a \cdot \cos\ \alpha$ (cateto adjacente a α)

Ilustrado pelo autor

Demonstração:

Figura 6 – Triângulo Retângulo



$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \cdot sen\ \alpha$$

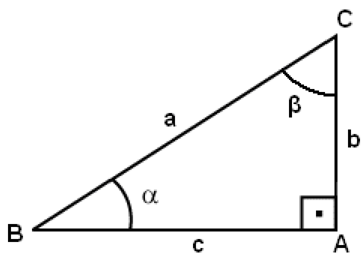
$$\cos\ \alpha = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a \cdot \cos\ \alpha$$

Ilustrado pelo autor

4ª) Se dois ângulos **α** e **β** são complementares (**α** + **β** = 90°), então **sen α = cos β** (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar e vice-versa) e $tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \beta}$.

Demonstração:

Figura 7 – Triângulo Retângulo



Ilustrado pelo autor

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo, temos:

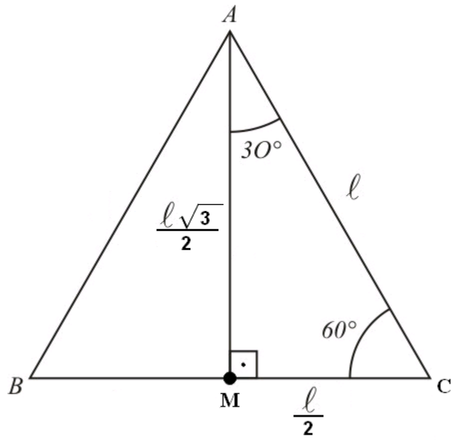
$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \cos\ \beta$$

$$\cos\ \alpha = \frac{c}{a} = sen\ \beta$$

$$tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{tg\ \beta}$$

Vamos determinar os valores do seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°, chamados de ângulos notáveis por aparecerem em diversas situações. Para isso, vamos recorrer a algumas figuras planas em que esses ângulos aparecem. Considere inicialmente um triângulo eqüilátero de lado l e altura AM. O triângulo retângulo AMC tem ângulos agudos iguais a 30° e 60°.

Figura 8 – Triângulo eqüilátero



Ilustrado pelo autor

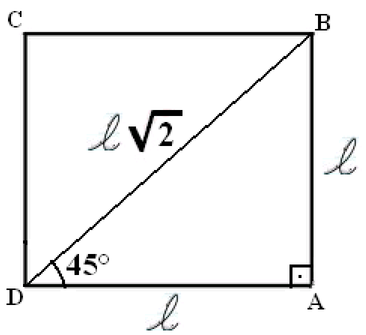
Aplicando as razões trigonométricas ao triângulo AMC, temos:

$$sen\ 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\ 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para obter as razões trigonométricas do ângulo de 45°, considere um quadrado de lado l. A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.

Figura 9 - Quadrado



Ilustrado pelo autor

No triângulo ABD, temos:

$$sen\ 45° = \cos\ 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Podemos agora resumir as razões trigonométricas dos ângulos notáveis numa tabela:

	30°	45°	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. PROJETO: INVESTIGANDO ALTURAS

O Projeto Investigando Alturas é uma proposta de atividade a ser desenvolvida em sala de aula na qual se utiliza a metodologia da resolução de problemas como estratégia no ensino-aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Baseando-se no que foi abordado no primeiro capítulo deste trabalho, o problema tratado aqui pode ser classificado como **problema de aplicação** ou **situação-problema**, onde se procura matematizar uma situação real usando conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos.

O desenvolvimento do projeto parte do seguinte questionamento: *Como medir a altura de coisas muito altas?* Hoje em dia é possível fazer medições cada vez mais precisas, graças aos modernos equipamentos de medição e ao desenvolvimento de sistemas de posicionamento, como o GPS – do inglês *Global Positioning System* -, que é baseado em satélites. No entanto, o objetivo aqui é aguçar a curiosidade dos alunos em saber calcular a altura de determinada estrutura através de uma medição indireta, utilizando um instrumento simples que eles mesmos irão construir.

4.1 ETAPAS

O projeto é dividido em quatro etapas apresentadas a seguir:

4.1.1 Pesquisa de campo

Nesta primeira etapa é proposto que os alunos formem grupos e percorram o bairro onde moram ou outra região investigando estruturas como prédios, torres, etc. Em seguida, deverão selecionar três estruturas a serem medidas. Para cada estrutura selecionada, farão anotações utilizando um formulário como este:

Investigando alturas
Grupo: .... Ano: ....
Componentes: ....
Data: ....

Bairro investigado: ....

Estrutura observada (prédio, torre, poste, etc.): ....

Altura estimada: ....

Foto ou desenho: (reservar um espaço para a foto ou desenho da estrutura escolhida)

Cálculo: (reservar um espaço para os cálculos que serão feitos na 3ª etapa)

Altura calculada: ....

Após o levantamento destes dados, os grupos exporão ao professor suas escolhas e explicarão como estimaram as alturas. Este formulário deverá ser guardado para utilização na 3ª etapa do projeto.

4.1.2 Textos informativos e construção do astrolábio

Nesta segunda etapa é explicado aos alunos que atualmente as medições são feitas com equipamentos bem modernos, mas que um longo trajeto foi percorrido pela humanidade até chegar a esse ponto. Para informá-los sobre os processos de medição da antiguidade, lhes é entregue os seguintes textos sugeridos por Giovanni Jr. (2009, p. 344):

O DESAFIO DA PIRÂMIDE

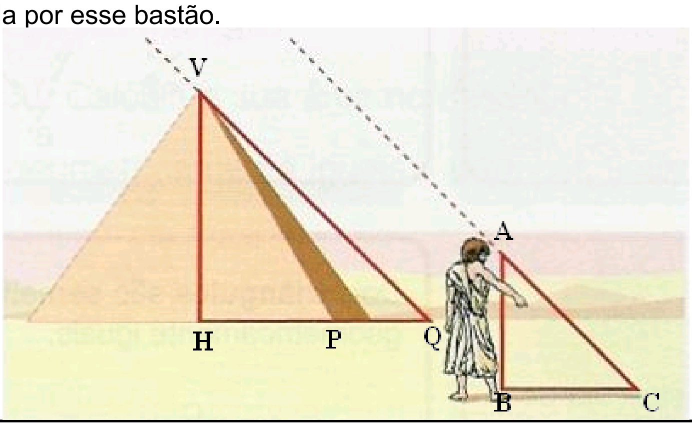
O filósofo Tales de Mileto foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops.

A solução de Tales surpreendeu os egípcios. Ele fincou um bastão perpendicularmente ao chão e mediu, com passos, o comprimento da sombra desse bastão. Em seguida mediu o comprimento da sombra da pirâmide. Sua idéia era calcular a altura da pirâmide com base na proporção entre as sombras.

Matematicamente, dizemos: a razão entre a altura da pirâmide e a soma dos comprimentos da sombra projetada e da metade da medida da aresta da base é igual à razão entre a altura do bastão e o comprimento da sombra projetada por esse bastão.

Assim:

$$\frac{\overline{VH}}{\overline{HP}+\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$



UM DOS MAIS ANTIGOS INSTRUMENTOS CIENTÍFICOS

Astrolábio é um antigo instrumento usado, na Idade Média, para medir a altura dos astros acima do horizonte. O nome astrolábio vem do grego e significa algo como “pegador de estrelas”. Sua invenção é atribuída ao grego Hiparco.

Dentre os vários tipos de astrolábio que existiam, destacaram-se três como os mais importantes: o esférico, o planisférico e o náutico.

O astrolábio náutico, em sua forma primitiva, era composto por uma peça circular de madeira, suspensa por um anel, dividida em graus, em cujo centro girava uma régua.

No final da Idade Média, o astrolábio foi aperfeiçoado, recebendo tabelas de declinação do sol ao horizonte. Essas tabelas permitiam aos navegadores determinar sua posição nos oceanos.

Astrolábio náutico Astrolábio planisférico Astrolábio esférico

Após a leitura dos textos informativos, é proposta a construção de um astrolábio que será utilizado na 3ª etapa do projeto. Para a construção de tal instrumento, os alunos precisarão de apenas dois materiais: um transferidor de 180° e um canudinho de refresco. Para construir o astrolábio, basta fixar com um pino uma das extremidades do canudinho no centro do transferidor. Desse modo, o canudinho poderá girar em torno desse pino, percorrendo livremente a parte graduada e permitindo que se faça a leitura dos ângulos de elevação.

Ilustração 1 - Utilizando o astrolábio

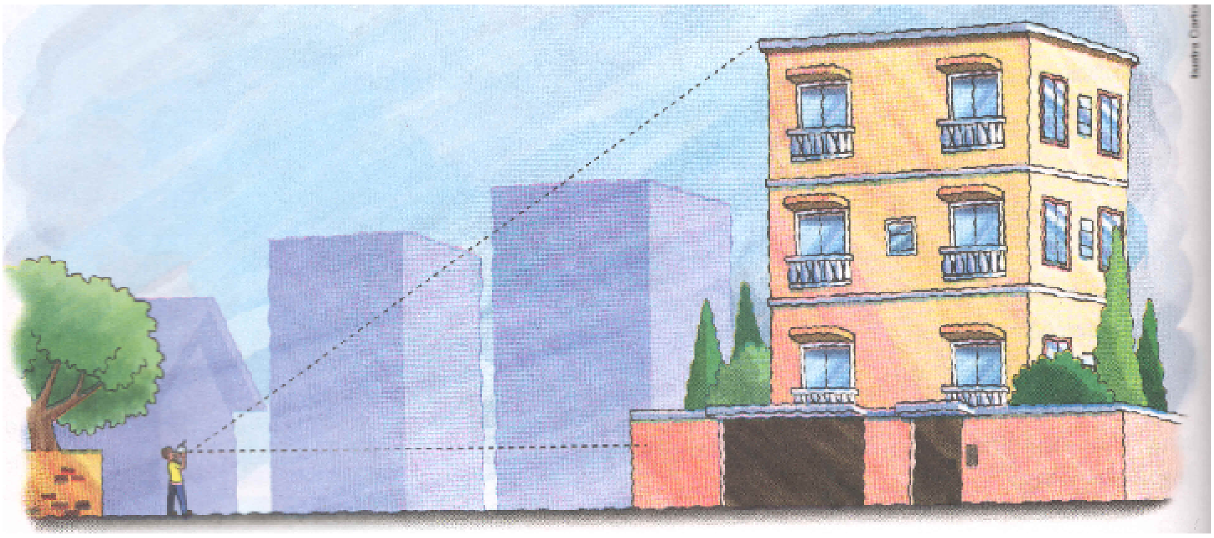
Fonte: GIOVANNI JR., 2009, p. 345

4.1.3 Medição

Nesta terceira etapa, usando o astrolábio, os grupos irão calcular as alturas das estruturas selecionadas e comparar as medidas encontradas com as estimativas que fizeram na 1º etapa.

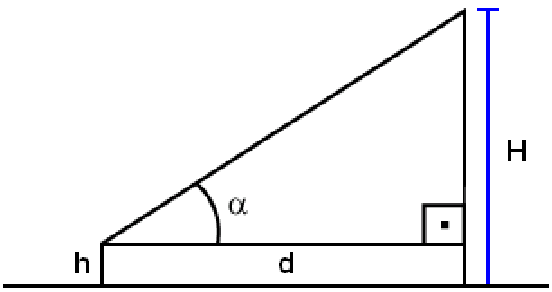
Para fazer tal medição, inicialmente será preciso se posicionar a uma distância ***d*** da estrutura selecionada: um prédio, por exemplo. Com o auxílio do astrolábio construído, será possível determinar o ângulo de elevação do prédio. Para isso, primeiro deve-se direcionar a linha de fé do transferidor horizontalmente para um ponto do prédio. Depois, mantendo o instrumento fixo nessa posição, deve-se girar o canudinho, apontando-o para o alto do prédio, e em seguida observar a medida ***α*** indicada na escola do transferidor.

Ilustração 2 - Medição



Fonte: GIOVANNI JR., 2009, p. 346

Supondo que a altura do astrolábio em relação ao solo é ***h***, com os valores de ***h***, ***d*** e ***α***, é possível determinar a altura ***H*** do prédio. O modelo matemático fica assim:



No triângulo retângulo, temos:

$$tg\ \alpha = \frac{H - h}{d}$$

Ilustrado pelo autor

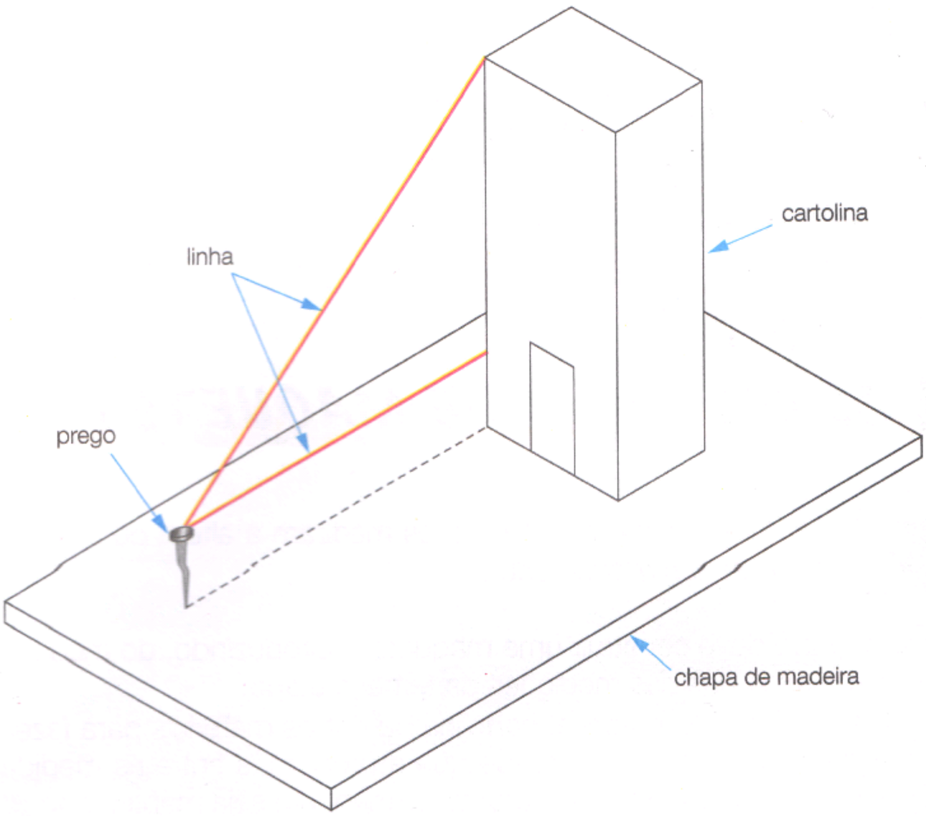
Com o auxílio de uma calculadora científica ou de uma tabela trigonométrica, para um dado valor de ***α***, é possível encontrar ***tg α***. Substituindo os valores de ***h***, ***d*** e ***tg α*** na igualdade, obtém-se ***H***.

4.1.4 Construção de maquetes

Nesta quarta e última etapa, cada grupo deve construir uma maquete, reproduzindo, do modo mais fiel possível, as estruturas envolvidas nas medições da 3ª etapa. Os alunos podem usar isopor, madeira, cartolina ou outros materiais para fazer a representação dessas estruturas na maquete, desde que a proporção entre as medidas reais e as medidas das representações dessas estruturas na maquete seja mantida. Deverão usar etiquetas para identificar o nome e altura real de cada estrutura representada na maquete, bem como as medidas dos ângulos e a escola que utilizaram para reproduzi-la. As maquetes poderão ficar expostas na escola para visitação.

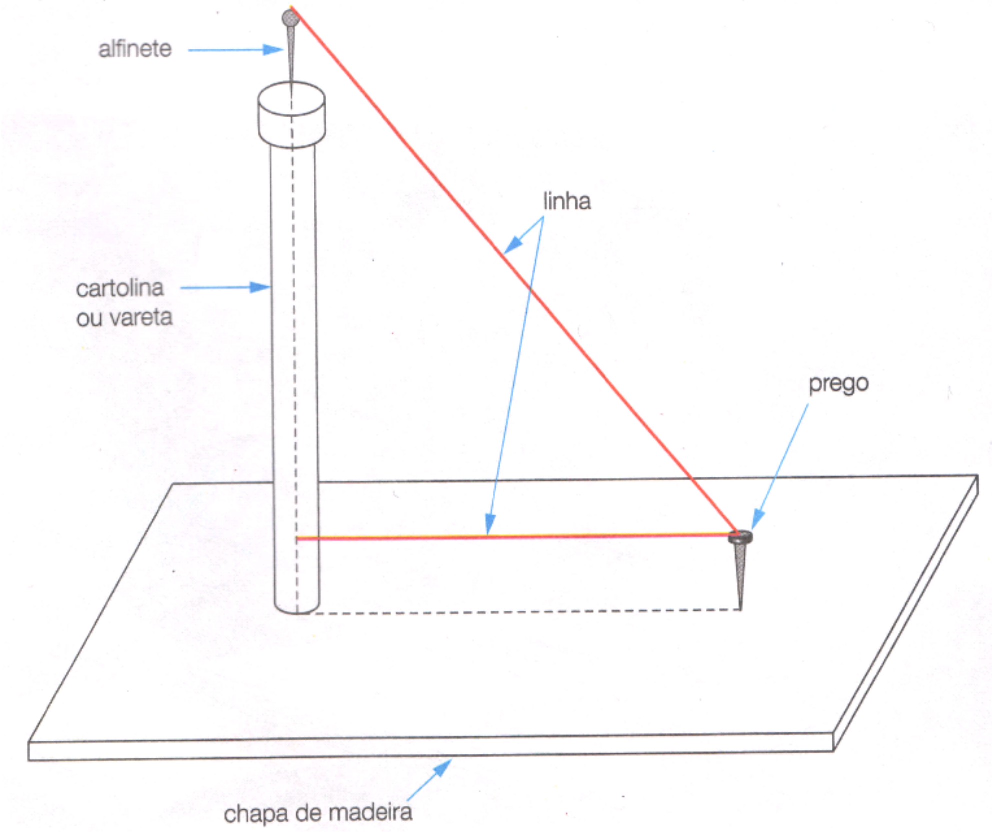
Algumas sugestões:

Ilustração 4 – Maquete (prédio)



Fonte: GIOVANNI JR., 2009, p. 348

Ilustração 5 – Maquete (poste)



Fonte: GIOVANNI JR., 2009, p. 348

4.2 APLICAÇÃO E RESULTADOS

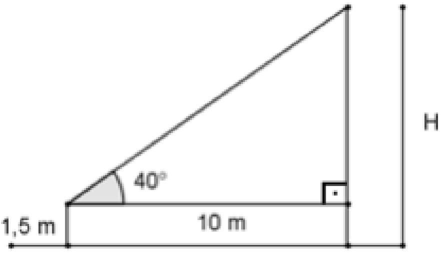
O Projeto Investigando Alturas foi aplicado em turmas do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Bernardo Monteiro, localizada no bairro Calafate, região Oeste de Belo Horizonte. As turmas foram divididas em seis grupos, cujos resultados apresentamos a seguir.

4.2.1 Grupo 1

O grupo 1 selecionou um poste, uma igreja e uma torre, estruturas localizadas no bairro Santa Maria, região Noroeste de Belo Horizonte. A altura estimada para o poste foi de 7 m; para a igreja e a torre, 20 m.

Cálculo da altura do poste:

Ilustração 6 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$tg\ 40^{o} = \frac{H - 1{,}5}{10}$$

$$0{,}839 = \frac{H - 1{,}5}{10}$$

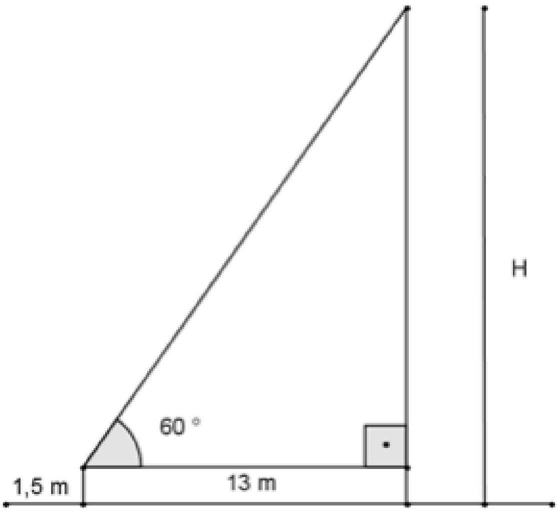
$$H = 9{,}89 \text{ m}$$

Foto 1 - Poste (grupo 1)

Foto tirada por Alice Oliveira

Cálculo da altura da igreja:

Ilustração 7 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 2 - Igreja (grupo 1)

Foto tirada por Alice Oliveira

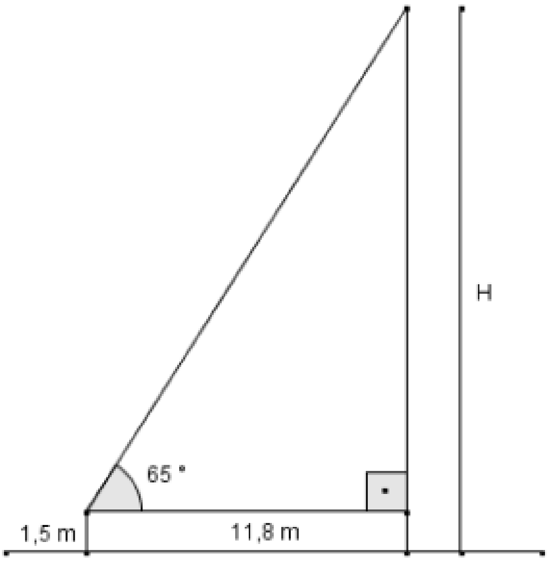
$$\text{tg } 60° = \frac{H - 1{,}5}{13}$$

$$1{,}732 = \frac{H - 1{,}5}{13}$$

$$H = 24{,}01 \text{ m}$$

Cálculo da altura da torre:

Ilustração 8 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 3 - Torre (grupo 1)

Foto tirada por Alice Oliveira

$$\text{tg } 65^\circ = \frac{H - 1{,}5}{11{,}8}$$

$$2{,}144 = \frac{H - 1{,}5}{11{,}8}$$

$$H = 26{,}79 \text{ m}$$

Foi pedido para que escolhessem uma entre as três estruturas para a construção da maquete. O poste foi a estrutura selecionada:

Foto 4 - Maquete (grupo 1)

Foto tirada pelo autor

Foto 5 - Maquete (grupo 1)

Foto tirada pelo autor

Foto 6 - Maquete (grupo 1)

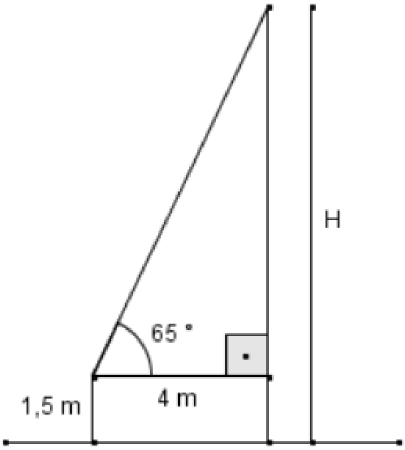
Foto tirada pelo autor

4.2.2 Grupo 2

O grupo 2 selecionou um prédio, um poste e a estátua do Cristo, estruturas localizadas no bairro Milionários, região administrativa do Barreiro, em Belo Horizonte. A altura estimada para o Cristo foi de 8 m; para o prédio, 30 m; e para o poste, 5 m.

Cálculo da altura da estátua do Cristo:

Ilustração 9 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 7 - Cristo (grupo 2)

Foto tirada por Vinícius Sousa

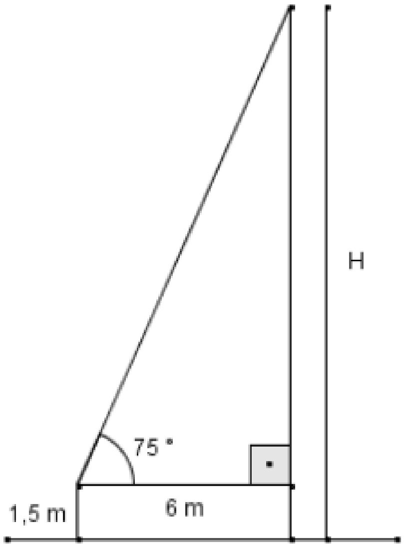
$$tg\ 65° = \frac{H - 1{,}5}{4}$$

$$2{,}144 = \frac{H - 1{,}5}{4}$$

$$H = 10{,}08\ \text{m}$$

Cálculo da altura do prédio:

Ilustração 10 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 8 - Prédio (grupo 2)

Foto tirada por Vinícius Sousa

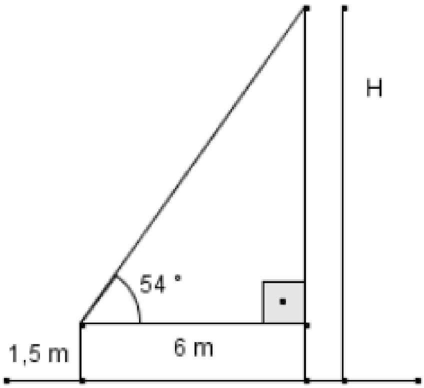
$$tg\ 75° = \frac{H - 1{,}5}{6}$$

$$3{,}732 = \frac{H - 1{,}5}{6}$$

$$H = 23{,}89\ \text{m}$$

Cálculo da altura do poste:

Ilustração 11 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 54° = \frac{H - 1{,}5}{6}$$

$$1{,}376 = \frac{H - 1{,}5}{6}$$

$$H = 9{,}76 \text{ m}$$

Foto 9 - Poste (grupo 2)

Foto tirada por Vinícius Sousa

O prédio foi a estrutura selecionada para a construção da maquete:

Foto 10 - Maquete (grupo 2)

Foto tirada pelo autor

Foto 11 - Maquete (grupo 2)

Foto tirada pelo autor

Foto 12 - Maquete (grupo 2)

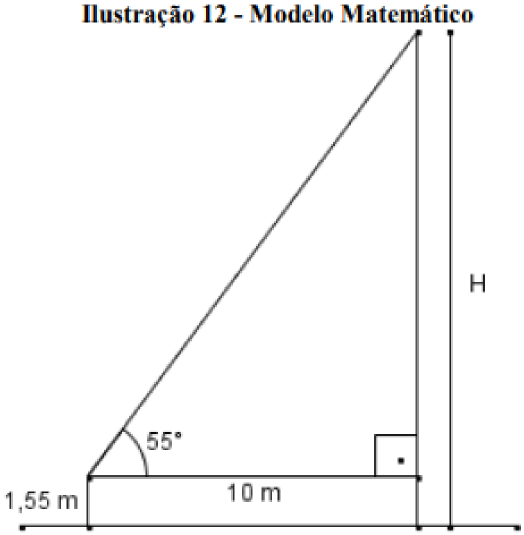
Foto tirada pelo autor

4.2.3 Grupo 3

O grupo 3 selecionou um prédio e um poste, localizados no bairro Jardim América, região Oeste de Belo Horizonte, e um segundo poste localizado no bairro Industrial, Contagem. A altura estimada para o prédio foi de 12 m e para os postes, 8 m.

Cálculo da altura do prédio:

Ilustração 12 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 13 - Prédio (grupo 3)

Foto tirada por Tayna Fernanda

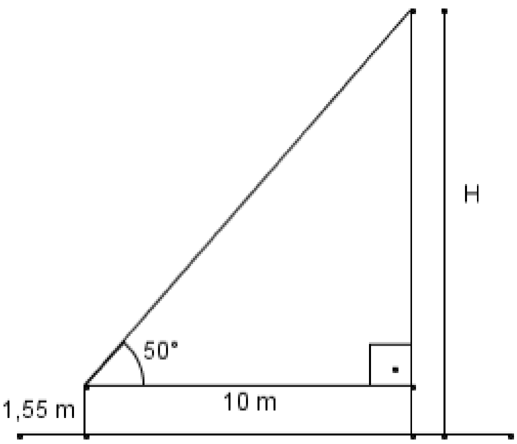
$$\text{tg } 55^\circ = \frac{H - 1{,}55}{10}$$

$$1{,}428 = \frac{H - 1{,}55}{10}$$

$$H = 15{,}83 \text{ m}$$

Cálculo da altura do poste 1:

Ilustração 13 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 14 - Poste 1 (grupo 3)

Foto tirada por Tayna Fernanda

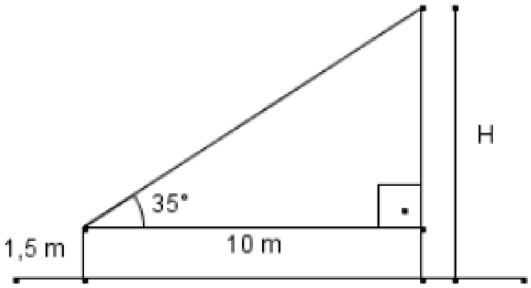
$$\text{tg } 50^\circ = \frac{H - 1{,}55}{10}$$

$$1{,}192 = \frac{H - 1{,}55}{10}$$

$$H = 13{,}47 \text{ m}$$

Cálculo da altura do poste 2:

Ilustração 14 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 35° = \frac{H - 1{,}5}{10}$$
$$0{,}7 = \frac{H - 1{,}5}{10}$$
$$H = 8{,}5 \text{ m}$$

Foto 15 - Poste 2 (grupo 3)

Foto tirada por Tayna Fernanda

O prédio foi a estrutura selecionada para a construção da maquete:

Foto 16 - Maquete (grupo 3)

Foto tirada pelo autor

Foto 17 - Maquete (grupo 3)

Foto tirada pelo autor

Foto 18 - Maquete (grupo 3)

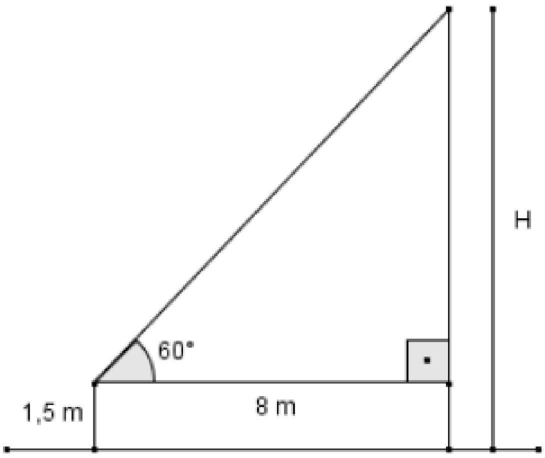
Foto tirada pelo autor

4.2.4 Grupo 4

O grupo 4 selecionou dois prédios e um poste, localizados no bairro Prado, região Oeste de Belo Horizonte. A altura estimada para os prédios foi de 12 m e para o poste, 8 m.

Cálculo da altura do prédio 1:

Ilustração 15 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 19 – Prédio 1 (grupo 4)

Foto tirada por Nayane Oliveira

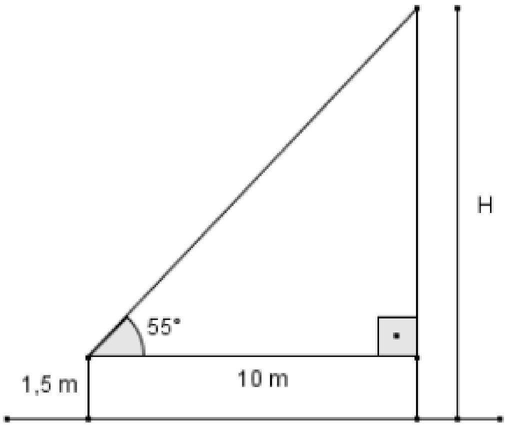
$$tg\ 60° = \frac{H - 1{,}5}{8}$$

$$1{,}732 = \frac{H - 1{,}5}{8}$$

$$H = 15{,}36\ m$$

Cálculo da altura do prédio 2:

Ilustração 16 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 20 - Prédio 2 (grupo 4)

Foto tirada por Nayane Oliveira

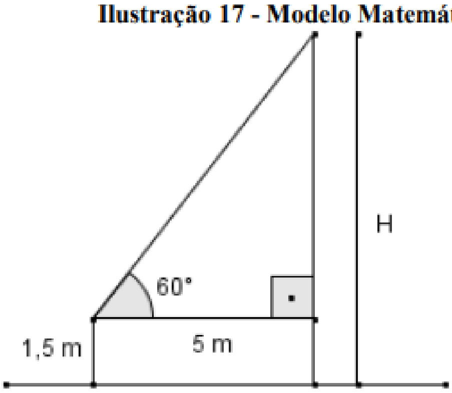
$$tg\ 55° = \frac{H - 1{,}5}{10}$$

$$1{,}428 = \frac{H - 1{,}5}{10}$$

$$H = 15{,}78\ m$$

Cálculo da altura do poste:

Ilustração 17 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$tg\ 60° = \frac{H - 1{,}5}{5}$$

$$1{,}732 = \frac{H - 1{,}5}{5}$$

$$H = 10{,}16\ m$$

Foto 21 - Poste (grupo 4)

Foto tirada por Nayane Oliveira

O poste foi a estrutura selecionada para a construção da maquete:

Foto 22 - Maquete (grupo 4)

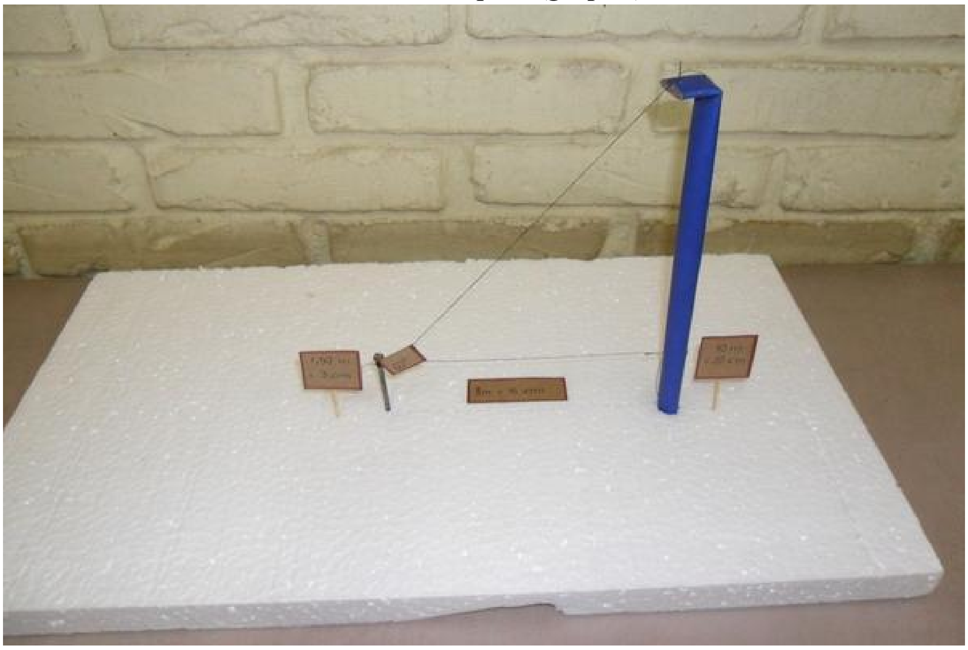


Foto tirada pelo autor

Foto 23 - Maquete (grupo 4)

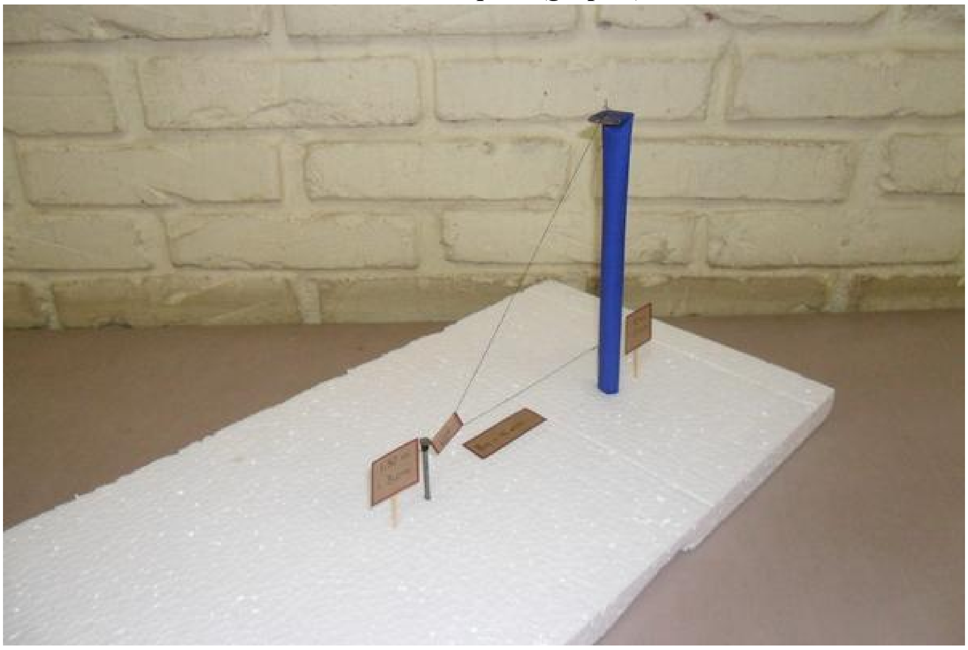


Foto tirada pelo autor

Foto 24 - Maquete (grupo 4)

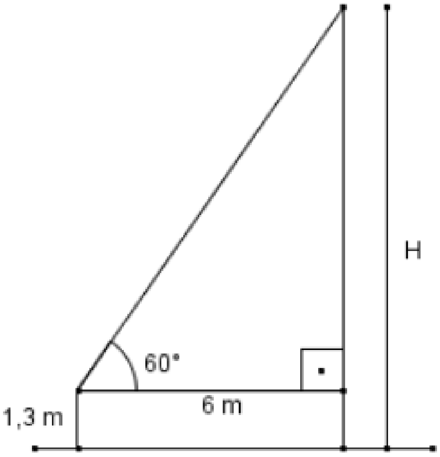
Foto tirada pelo autor

4.2.5 Grupo 5

O grupo 5 selecionou um prédio, uma igreja e um poste, estruturas localizadas no bairro Vila Oeste, região Noroeste de Belo Horizonte. A altura estimada para o prédio foi de 10 m, para a igreja, 9 m, e para o poste, 8,5 m.

Cálculo da altura do prédio:

Ilustração 18 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 60° = \frac{H - 1,3}{6}$$

$$1,73 = \frac{H - 1,3}{6}$$

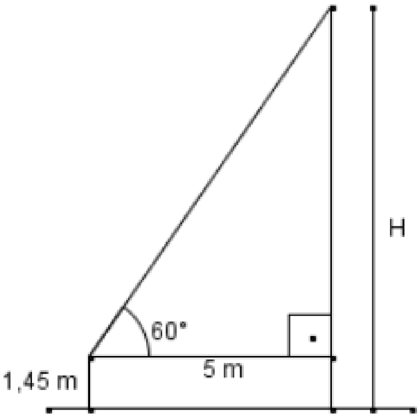
$$H = 11,68 \text{ m}$$

Foto 25 - Prédio (grupo 5)

Foto tirada por Thais Ruas

Cálculo da altura da igreja:

Ilustração 19 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 60° = \frac{H - 1,45}{5}$$

$$1,73 = \frac{H - 1,45}{5}$$

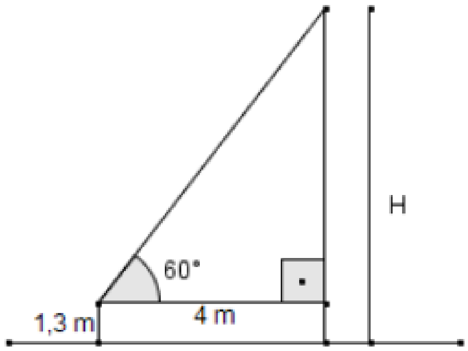
$$H = 10,1 \text{ m}$$

Foto 26 - Igreja (grupo 5)

Foto tirada por Thais Ruas

Cálculo da altura do poste:

Ilustração 20 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 60° = \frac{H - 1,3}{4}$$

$$1,73 = \frac{H - 1,3}{4}$$

$$H = 8,22 \text{ m}$$

Foto 27 - Poste (grupo 5)

Foto tirada por Thais Ruas

O prédio foi a estrutura selecionada para a construção da maquete:

Foto 28 - Maquete (grupo 5)

Foto tirada pelo autor

Foto 29 - Maquete (grupo 5)

Foto tirada pelo autor

Foto 30 - Maquete (grupo 5)

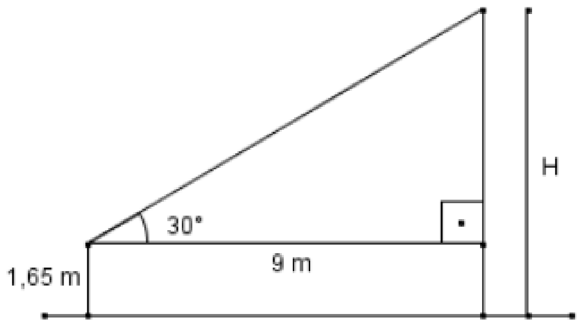
Foto tirada pelo autor

4.2.6 Grupo 6

O grupo 6 selecionou dois postes localizados no bairro Lindéia, região do Barreiro, e um prédio localizado no conjunto Estrela D'Alva, região Oeste de Belo Horizonte. A altura estimada para os postes foi de 8 m e para o prédio, 18 m.

Cálculo da altura dos postes:

Ilustração 21 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

Foto 31 - Postes (grupo 6)

Foto tirada por Áquilas Matheus

$$\text{tg } 30° = \frac{H - 1{,}65}{9}$$

$$0{,}577 = \frac{H - 1{,}65}{9}$$

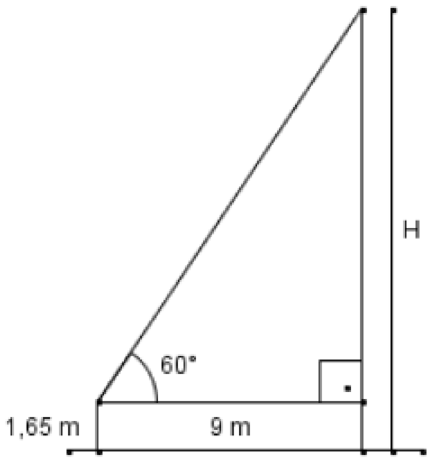
$$H = 6{,}84 \text{ m}$$

Cálculo da altura do prédio:

Foto 32 - Prédio (grupo 6)

Foto tirada por Áquilas Matheus

Ilustração 22 - Modelo Matemático



Ilustrado pelo autor

$$\text{tg } 60° = \frac{H - 1{,}65}{9}$$

$$1{,}732 = \frac{H - 1{,}65}{9}$$

$$H = 17{,}24 \text{ m}$$

O prédio foi a estrutura selecionada para a construção da maquete:

Foto 33 - Maquete (grupo 6)

Foto tirada pelo autor

Foto 34 - Maquete (grupo 6)

Foto tirada pelo autor

Foto 35 - Maquete (grupo 6)

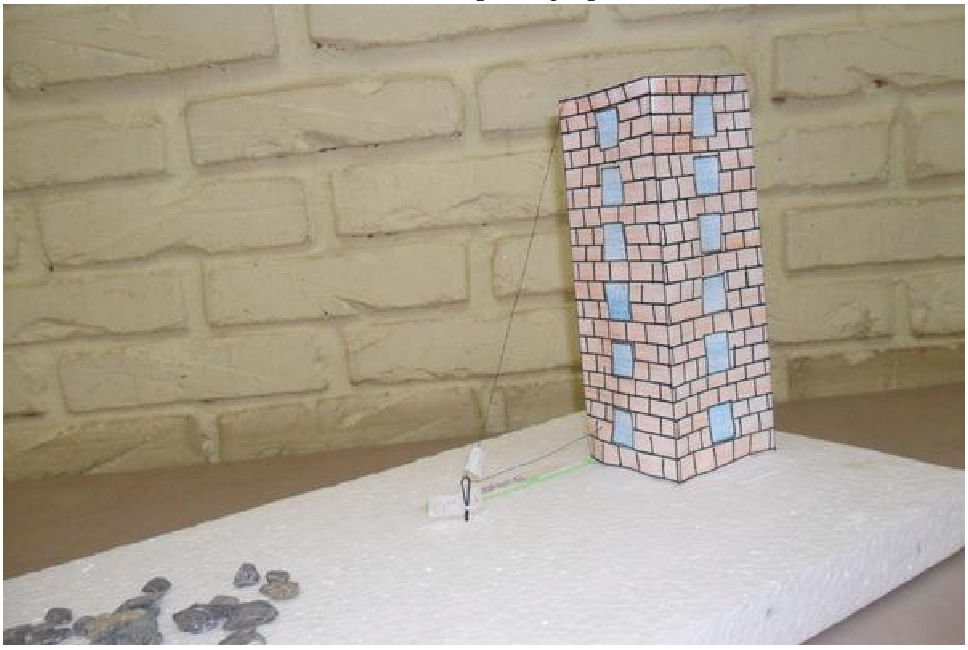


Foto tirada pelo autor

4.3 REAÇÃO DOS ALUNOS

A diferença entre a aula tradicional e o trabalho com a metodologia adotada ficou evidente para os alunos, que a princípio foram resistentes em largar o modelo expositivo de aula, pois se acostumaram com essa forma tradicional de ensino desde as séries iniciais. Aos poucos essa resistência foi diminuindo, pois o trabalho em grupo fez com que cada aluno, fazendo parte de uma comunidade pensante, pudesse se mostrar mais atuante na resolução de problemas, levantando suposições, colaborando e trocando idéias. Não se sentindo assim um elemento passivo em sala de aula, podendo agir na construção de um conhecimento com significado e compreensão. Desta forma, com o decorrer do trabalho, foram mostrando interesse e entusiasmo em trabalhar de uma forma diferente.

O trabalho também despertou nos alunos o interesse pela investigação e pesquisa, deixando-os atentos à necessidade dessa matemática na vida profissional que muitos pretendem seguir. Em uma das etapas do projeto, foi discutido com aqueles que pretendem ser engenheiros sobre a necessidade de outros conteúdos matemáticos na formação desses profissionais. Levantaram a hipótese de que, se quiserem ser engenheiros que trabalhem apenas como tecnólogos, bastam as fórmulas. Entretanto, se quiserem ser engenheiros criativos e não apenas seguidores de projetos dos outros, é preciso que os conteúdos matemáticos necessários sejam bem entendidos e suas idéias possam ser transferidas a outras situações encontradas na vida profissional.

Apesar das dificuldades, percebeu-se que o aluno é capaz de desenvolver estratégias para solucionar problemas matemáticos os quais lhe são propostos, mas apresenta dificuldades em trabalhar os conceitos matemáticos modelados em situações reais, isso porque é uma metodologia nova para ele. Notou-se que os alunos consideraram interessante e importante conhecer a aplicação dos conteúdos matemáticos que estão estudando, para que saibam aproveitar seus conhecimentos em situações da vida real.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente é comum os alunos indagarem o professor sobre a aplicabilidade do conteúdo matemático que estão estudando. Julgam os assuntos tratados em sala como conteúdos afastados da realidade, não conseguindo perceber sua utilidade além das situações escolares. O Projeto Investigando Alturas proporcionou aos alunos o prazer da descoberta, fazendo com que percebessem a aplicabilidade prática das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Possibilitou a motivação e o envolvimento com os conhecimentos e contribuições deixadas pelos estudiosos matemáticos através dos tempos, percebendo a Matemática como uma construção humana decorrente da necessidade de solucionar problemas.

A prática do Projeto Investigando Alturas mostrou que aplicar os conceitos da Trigonometria para calcular medidas de formas indiretas tornou o processo de ensino-aprendizagem mais interativo, construtivo e participativo, provocando o envolvimento dos alunos com a pesquisa, além de desafiá-los a analisar, refletir e tirar conclusões.

A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem exige do professor dedicação, avaliação e planejamento para a escolha de situações-problema que provoquem curiosidade e mantenham a motivação do aluno. Assim, o aluno utiliza seus conhecimentos matemáticos já adquiridos e desenvolve a capacidade de administrar as informações ao seu redor, ampliando seu conhecimento, desenvolvendo seu raciocínio lógico e conhecendo as aplicações da matemática.

Como sugere Polya (2005), o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve despertar-lhes o interesse por problemas e proporciona-lhes muitas oportunidades de indagar e praticar. Assim, o estudante chegará ao uso correto das indagações e sugestões, adquirido algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**, 9º ano (Manual do Professor). 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

Orientações Pedagógicas da SEE/MG para o ensino de Matemática – Ensino Fundamental e Médio

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da resolução de problemas**. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/home.php?id=24>. Acesso em: 01 set. 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 7. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.