

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística  
Curso de Especialização em Estatística

Gabriel Salgueiro Soares

**911. QUAL É SUA EMERGÊNCIA?**  
**modelagem de séries temporais para previsão de demandas de ligações para**  
**centrais de emergências.**

Belo Horizonte

2023

Gabriel Salgueiro Soares

**911. QUAL É SUA EMERGÊNCIA?**

**modelagem de séries temporais para previsão de demandas de ligações para centrais de emergências.**

Monografia de especialização apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador(a): Profa. Dr. Ela Mercedes Medrano de Toscano

Coorientador: Prof. Dr. Luís Alberto Toscano Medrano

Belo Horizonte

2023

2023, Gabriel Salgueiro Soares.  
Todos os direitos reservados

Soares, Gabriel Salgueiro

S676n 911. Qual é sua emergência? [manuscrito]:  
modelagem de séries temporais para previsão de  
demandas de ligações para centrais de emergências /  
Gabriel Salgueiro Soares — 2023.  
69.f. il.

Orientadora: Ela Mercedes Medrano de Toscano.  
Coorientador: Luís Alberto Toscano Medrano  
Monografia (especialização) - Universidade Federal  
de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,  
Departamento de Estatística.  
Referências: 68-69.

1. Estatística. 2. Análise de séries temporais. 3.  
Previsão 4. Centrais telefônicas. I. Medrano de Toscano,  
Ela Mercedes. II. Toscano Medrano, Luís Alberto. III.  
Universidade Federal de Minas Gerais I. Instituto de  
Ciências Exatas, Departamento de Estatística. IV. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB  
6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Departamento de Estatística**  
**Programa de Pós-Graduação / Especialização**  
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha  
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: [pgest@ufmg.br](mailto:pgest@ufmg.br)  
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

## **ATA DO 306º. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE GABRIEL SALGUEIRO SOARES.**

Aos seis dias do mês de setembro de 2023, às 09:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Gabriel Salgueiro Soares**, intitulado: “*911. QUAL É SUA EMERGÊNCIA?": modelagem de séries temporais para previsão de demandas de ligações para centrais de emergências.*”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, a Presidente da Comissão, Professora Ela Mercedes Medrano – Orientadora, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado **Aprovado condicional** às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pela Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 06 de setembro de 2023.

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** ELA MERCEDES MEDRANO DE TOSCANO  
Data: 14/09/2023 10:46:52-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

**Prof.ª Ela Mercedes Medrano (Orientadora)**  
**Departamento de Estatística / UFMG**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** LUIS ALBERTO TOSCANO MEDRANO  
Data: 12/09/2023 23:38:54-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

**Prof. Luis Alberto Toscano Medrano (Coorientador)**  
**UFRRJ**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** SUELI APARECIDA MINGOTI  
Data: 08/09/2023 19:20:53-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

**Prof.ª Sueli Aparecida Mingoti**  
**Departamento de Estatística / UFMG**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MARIO ERNESTO PISCOYA DIAZ  
Data: 11/09/2023 21:09:52-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

**Prof. Mario Ernesto Piscoya Diaz**  
**IME / UFG**

À minha mãe e à minha avó materna,  
Cristina e Lair (*in memoriam*),  
respectivamente, que sempre previram –  
sem qualquer fator de erro! – as minhas  
necessidades e os meus desejos.

*Se algo lhe parece difícil de ser conquistado, não pense que se trata de algo impossível, pois que se é possível e em conformidade com a natureza humana, pense que você também pode eventualmente conquistá-lo.*

Marco Aurélio. **Meditações** (Livro 6, parágrafo 19).



## RESUMO

Este estudo teve como objetivo realizar uma previsão do número diário de chamadas ao serviço de emergência em Baltimore. Para alcançar esse objetivo, empregou-se a metodologia proposta por Box-Jenkins e utilizaram-se dados coletados no período de 2015 a 2021.

As chamadas recebidas no número telefônico 911 inicialmente foram classificadas de acordo com suas naturezas, abrangendo categorias como emergências de saúde, tráfego e incêndio. Contudo, para a análise, essas categorias foram unificadas.

Após uma análise exploratória detalhada dos dados, foram desenvolvidos dois modelos SARIMA. Esses modelos incorporaram uma variabilidade sazonal diária de 7 dias, com parâmetros que demonstraram ser significativamente diferentes de zero. Além disso, foi verificado se esses modelos estavam na região de estacionariedade e invertibilidade adequada para uma previsão precisa.

O passo seguinte foi assegurar que o vetor de resíduos dos modelos se comportasse como um processo de ruído branco, garantindo a confiabilidade das previsões geradas. Posteriormente, realizou-se a estimativa das previsões com base nos modelos desenvolvidos.

Por meio da avaliação das estatísticas de erros de previsão, foi possível identificar e selecionar o modelo que se mostrou mais adequado para fins de prognóstico. Esse processo de análise sistemática e rigorosa permitiu obter resultados confiáveis na previsão do número diário de chamadas para o serviço de emergência em Baltimore.

Palavras-chave: **séries temporais, previsão, ligações telefônicas**



## **ABSTRACT**

*This study aimed to forecast the daily number of emergency service calls in Baltimore. To achieve this goal, the methodology proposed by Box-Jenkins was employed, and data collected from 2015 to 2021 were used.*

*Initially, calls received at the 911 telephone number were classified according to their nature, encompassing categories such as health emergencies, traffic incidents, and fires. However, for the analysis, these categories were consolidated.*

*Following a detailed exploratory analysis of the data, two SARIMA models were developed. These models incorporated a daily seasonal variability of 7 days, with parameters that proved to be significantly different from zero. Furthermore, it was verified that these models were in the appropriate stationarity and invertibility region for accurate forecasting.*

*The next step was to ensure that the residuals' vector of the models behaved like a white noise process, ensuring the reliability of the generated forecasts. Subsequently, forecasts were estimated based on the developed models.*

*By evaluating forecast error statistics, it was possible to identify and select the model that proved most suitable for forecasting purposes. This systematic and rigorous analysis process allowed for obtaining reliable results in forecasting the daily number of calls for the emergency service in Baltimore.*

**Keywords:** *time series, prediction, phone calls*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de gráfico de autocorrelação.....	32
Figura 2 - Exemplo de gráfico de autocorrelação parcial.....	33
Figura 3 - Histograma dos dados.....	41
Figura 4 - Box-plot das segmentações dos dados.....	42
Figura 5 - Decomposição aditiva da tendência, sazonalidade e resíduos.....	44
Figura 6 - Gráfico de autocorrelação da série original.....	45
Figura 7 - Gráfico de autocorrelação parcial da série original.....	45
Figura 8 - Gráfico de linha da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 1.....	46
Figura 9 - Gráfico FAC da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 1.....	47
Figura 10 - Gráfico FACP da série diferenciada sazonalmente para Modelo 1.....	47
Figura 11 - Sumário do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente.....	48
Figura 12 - Coeficientes do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente.....	48
Figura 13 - Representação gráfica das raízes características do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	49
Figura 14 - Gráfico de linha dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	49
Figura 15 - Gráfico FAC dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	50
Figura 16 - Gráfico FACP dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	50
Figura 17 - Histograma dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	51
Figura 18 - Gráfico Q-Q dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	51
Figura 19 - Gráfico de linha da série diferenciada sazonal e não sazonalmente para o Modelo 2.....	52
Figura 20 - Gráfico FAC da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 2.....	53
Figura 21 - Gráfico FACP da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 2.....	53
Figura 22 - Sumário do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente.....	54
Figura 23 - Coeficientes do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente.....	54
Figura 24 - Representação gráfica das raízes características do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	55
Figura 25 - Gráfico de linha dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	56
Figura 26 - Gráfico FAC dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	56
Figura 27 - Gráfico FACP dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	57
Figura 28 - Gráfico Q-Q dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	57
Figura 29 - Histograma dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	57
Figura 30 - Diagnóstico do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	58
Figura 31 - Previsões para período de treino do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7].....	60
Figura 32 - Previsões para o período de treino do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7].....	60
Figura 33 - Previsão para o período de validação dos Modelos 1 - SARIMA(1,0,0)(0,1,1)[7].....	61
Figura 34 - Previsão para o período de validação do Modelo 2 - SARIMA(0,1,2)(0,1,1)[7].....	62
Figura 35 - Comparação de previsão dos Modelos 1 e 2.....	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Análise exploratória do período de 01/01/2016 a 31/12/2018.....	41
Tabela 2 - Teste de Dickey-Fuller Aumentado para a amostra tratada.....	44
Tabela 3 - Raízes características do Modelo 1 .....	48
Tabela 4 - Teste de normalidade de Shapiro-Wilk para Modelo 1.....	52
Tabela 5 - Teste de normalidade de Anderson-Darling do Modelo 1 .....	52
Tabela 6 - Raízes características do Modelo 2 .....	54
Tabela 7 - Teste de normalidade de Shapiro-Wilk para Modelo 2.....	58
Tabela 8 - Teste de normalidade de Anderson-Darling do Modelo 2 .....	58
Tabela 9 - Métricas de erros dos modelos para o período de teste.....	59
Tabela 10 - Métricas de erros dos modelos para o período de validação.....	61
Tabela 11 - Comparação das previsões dos modelos ante os valores observados .....	63

## LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1 – Função de autocorrelação .....	18
Equação 2 - Exemplo de equação de diferenciação .....	20
Equação 3 - Transformação de Box-Cox.....	21
Equação 4 - Cálculo da Função de Autocorrelação (FAC).....	22
Equação 5 - Cálculo da Função de Autocorrelação Parcial (FACP) .....	22
Equação 6 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR) .....	24
Equação 7 - Equação geral de um modelo de média móvel (MA) .....	25
Equação 8 - Equação geral de um modelo autorregressivo e de média móvel (ARMA) .....	25
Equação 9 - Equação geral de um modelo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA).....	26
Equação 10 - Equação geral de um modelo autorregressivo integrado de médias móveis com sazonalidade (SARIMA) .....	27
Equação 11 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR) .....	28
Equação 12 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR) em notação de polinômio de defasagem .....	28
Equação 13 - Equação de um modelo AR(p) para obtenção das raízes características.....	29
Equação 14 - Equação geral de um modelo de médias móveis (MA) .....	29
Equação 15 - Equação geral de um modelo de médias móveis (MNA) em notação de polinômio de defasagem .....	30
Equação 16 - Equação de um modelo MA(q) para obtenção das raízes características .....	30
Equação 17 - Equação referente ao teste de Ljung-Box.....	35
Equação 18 - Equação referente à métrica de erro MAE .....	37
Equação 19 - Equação referente à métrica de erro MSE .....	38
Equação 20 - Equação referente à métrica de erro RMSE .....	38
Equação 21 - Equação referente à métrica de erro MAPE .....	39
Equação 22 - Equação referente ao Modelo 1 .....	48
Equação 23 - Equação referente ao Modelo 2 .....	54

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b> .....	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Abordagem teórica</b> .....	<b>15</b>
2.1.1	Componentes .....	15
2.1.2	Estacionariedade .....	17
2.1.3	Transformações .....	19
2.1.4	Autocorrelação e Autocorrelação parcial .....	21
2.1.5	Modelos para séries temporais estacionárias .....	23
2.1.5.1	Modelo AR .....	23
2.1.5.2	Modelo MA .....	24
2.1.5.3	Modelo ARMA .....	25
2.1.5.4	Modelo ARIMA .....	26
2.1.5.5	Modelo SARIMA .....	27
2.1.5.6	Considerações sobre as raízes das equações .....	28
2.1.6	Relação entre o gráfico FAC, os modelos de séries temporais e os componentes .....	31
2.1.7	Avaliação de resíduos da série temporal .....	33
2.1.7.1	Testes aplicáveis .....	34
2.1.8	Métricas de precisão .....	36
2.1.8.1	Erro Médio Absoluto ( <i>MAE</i> ) .....	37
2.1.8.2	Erro Quadrático Médio ( <i>MSE</i> ) .....	37
2.1.8.3	Raiz do Erro Quadrático Médio ( <i>RMSE</i> ) .....	38
2.1.8.4	Erro Percentual Absoluto Médio ( <i>MAPE</i> ) .....	38
2.1.8.5	Erro Médio Absoluto Escalado ( <i>MASE</i> ) .....	39
<b>2.2</b>	<b>O caso</b> .....	<b>39</b>
2.2.1	Análise exploratória .....	41
2.2.2	Modelagem .....	45
2.2.2.1	Modelo 1: diferenciação sazonal .....	46
2.2.2.1.1	Análise dos resíduos do Modelo 1 .....	49
2.2.2.2	Modelo 2: diferenciação sazonal cumulada com diferenciação não sazonal .....	52
2.2.2.2.1	Análise dos resíduos do Modelo 2 .....	55
2.2.2.3	Conclusões sobre os modelos .....	58
2.2.3	Previsão .....	59
<b>3</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>68</b>



## 1 INTRODUÇÃO

As ligações de emergência são fundamentais para uma resposta rápida e eficiente em situações críticas, como acidentes de trânsito, incêndios, crimes e problemas médicos urgentes. Com o avanço das tecnologias de comunicação, o número de ligações de emergência tem aumentado significativamente, apresentando um desafio para os serviços de atendimento e despacho de emergência, pois nem todas as chamadas são igualmente urgentes ou requerem a mesma resposta.

Nesse cenário, a capacidade de previsão se torna particularmente útil, pois distinguir entre chamadas verdadeiramente emergenciais e chamadas não urgentes pode levar a uma alocação mais eficiente de recursos e uma resposta mais rápida aos casos críticos.

A aplicação bem-sucedida desses modelos de previsão pode trazer vários benefícios práticos. Por exemplo, a triagem automatizada das chamadas de emergência pode levar a tempos de resposta mais rápidos, uma vez que as chamadas verdadeiramente emergenciais podem

ser identificadas e priorizadas imediatamente.

Vários estudos utilizaram algoritmos de classificação, como árvores de decisão, redes neurais e *Support Vector Machines (SVM)* para categorizar as chamadas em emergenciais ou não emergenciais (ANTHONY, MISHRA, *et al.*, 2021). Outros estudos se concentraram na detecção de informações específicas, como a presença de armas de fogo, ferimentos graves ou sintomas médicos urgentes, para fornecer informações adicionais aos serviços de emergência (LAZUKO, GUI, *et al.*, 2023).

Este trabalho se concentrará na previsão do número de ligações para centrais de emergência usando modelos clássicos de séries temporais.

Uma série temporal de ligações pode apresentar variações significativas ao longo do tempo, influenciada por fatores como eventos sazonais, feriados, padrões diários e horários. Portanto, é essencial empregar técnicas apropriadas capazes de capturar e modelar essas características temporais.

Nesse contexto, os modelos autorregressivos integrados de médias móveis com sazonalidade (ou, em inglês, *seasonal autoregressive integrated moving average - SARIMA*) têm se mostrado eficazes na previsão de séries temporais com padrões sazonais. Esses modelos são extensões dos modelos autorregressivos integrados de médias móveis (ou, em inglês, *autoregressive integrated moving average - ARIMA*),

que levam em consideração a presença de sazonalidade nos dados. Ao combinar componentes autorregressivos, de média móvel e sazonais, os modelos SARIMA possuem a capacidade de capturar padrões complexos e realizar previsões precisas.

A aplicação de modelos que considerem flutuações periódicas traz várias vantagens neste tipo de previsão. Primeiramente, esses modelos podem lidar com variações sazonais e tendências de longo prazo, que são comuns nesse tipo de dado. Além disso, a inclusão de componentes autorregressivos e de média móvel permite considerar a dependência temporal existente nas séries, aprimorando a capacidade de previsão.

Serão analisadas as características principais desses modelos, os métodos de estimação de parâmetros, a avaliação do desempenho e as estratégias de validação.

Além disso, a presente monografia utilizará conjuntos de dados reais provenientes de serviços de emergência, que incluem informações sobre o número de ligações recebidas ao longo do tempo. Esses conjuntos de dados serão submetidos a uma cuidadosa etapa de pré-processamento e análise exploratória, com o intuito de identificar possíveis padrões sazonais e tendências que serão incorporados nos modelos SARIMA.

Com base nessas análises, será possível avaliar o desempenho dos modelos destacados na previsão de ligações para o serviço de emergência. Serão considerados os métodos de estimação de parâmetros, as estratégias de validação e a avaliação das métricas de desempenho.

Espera-se que esta monografia contribua significativamente para o avanço do conhecimento na área de previsão de ligações para o serviço de emergência, fornecendo inspirações valiosas sobre a aplicação dos modelos SARIMA. No final das contas, acredita-se que, em uma área hipotética, em um determinado espaço de tempo, os gestores possam utilizar de maneira mais eficiente os operadores de teleatendimento, reduzindo o tempo de espera e, conseqüentemente, aumentando a velocidade de resposta. Para tanto, será utilizada a metodologia de séries temporais.

É importante ressaltar que os resultados e conclusões obtidos ao longo desta monografia podem ser úteis não apenas para profissionais e gestores envolvidos na gestão de serviços de emergência, mas também para pesquisadores e acadêmicos interessados na área de previsão de séries temporais. A aplicação de modelos de séries temporais na previsão de ligações para o serviço de emergência pode abrir



caminho para futuras pesquisas e desenvolvimento de abordagens mais avançadas, contribuindo para aprimorar ainda mais a eficiência e a eficácia dos serviços de emergência.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 Abordagem teórica

As séries temporais são conjuntos de observações coletadas sequencialmente ao longo do tempo, onde cada ponto de dados está associado a um determinado momento no tempo. A compreensão e a modelagem adequada dessas séries são fundamentais para a tomada de decisões, previsões e inferências em uma ampla gama de contextos (PEIXEIRO, 2022). A análise de séries temporais é uma área essencial no campo da ciência de dados e da análise de dados, com uma ampla gama de aplicações em diversos setores, como finanças, economia, saúde, meteorologia e engenharia.

A importância das séries temporais reside no fato de que muitos fenômenos do mundo real exibem comportamentos e padrões específicos ao longo do tempo. Esses dados sequenciais fornecem informações valiosas sobre as tendências, sazonalidades, flutuações e padrões de repetição que podem ocorrer em determinado fenômeno. Ao analisar essas séries, é possível extrair conhecimentos, identificar padrões e fazer previsões sobre o comportamento futuro (MORETTIN, 2006) (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

Além disso, a análise de séries temporais permite identificar anomalias, detectar mudanças de regime, avaliar a eficácia de políticas e intervenções, realizar simulações e otimizar processos. Com o avanço das técnicas de aprendizado de máquina e inteligência artificial, novas abordagens, como redes neurais recorrentes e modelos baseados em *Deep Learning*, têm sido aplicadas com sucesso na análise de séries temporais, trazendo resultados ainda mais precisos e sofisticados.

#### 2.1.1 Componentes

As séries temporais podem exibir diferentes componentes que contribuem para sua dinâmica e comportamento ao longo do tempo. Os principais componentes das séries temporais são a tendência, a sazonalidade, ciclos e o ruído.

A identificação visual desses componentes pode ser feita por meio de gráficos, como gráficos de linhas ou decomposição de séries temporais. Um gráfico de linhas mostra a evolução dos dados ao longo do tempo e permite observar tendências, padrões sazonais e flutuações irregulares. A decomposição de séries temporais

envolve a separação dos componentes (tendência, sazonalidade, ciclo e ruído) para análise individual.

Vale destacar, ainda, que estes componentes são frequentemente considerados componentes independentes em uma série temporal. No entanto, é importante notar que esses componentes podem interagir entre si. Por exemplo, a sazonalidade pode influenciar a tendência em certos períodos, ou o ruído pode obscurecer a identificação clara da tendência e da sazonalidade.

A tendência é um padrão de longo prazo que mostra a direção geral do comportamento da série ao longo do tempo. A presença de uma tendência indica uma mudança sistemática na série temporal ao longo do tempo. Uma tendência ascendente indica um aumento gradual nos dados, enquanto uma tendência descendente indica uma diminuição gradual. A tendência pode afetar a média dos dados, resultando em uma série temporal que está se afastando constantemente de um valor central. Visualmente, ela pode ser identificada através de um padrão linear ou não linear nos dados ao longo do tempo. A tendência reflete mudanças graduais na série e pode ser influenciada por fatores econômicos, demográficos, tecnológicos ou outros. A identificação e modelagem da tendência são importantes para entender a evolução da série e para realizar previsões de longo prazo (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015) (PEIXEIRO, 2022).

A sazonalidade é um padrão repetitivo e regular que ocorre em intervalos fixos de tempo. Pode ser diária, semanal, mensal, trimestral, anual ou em qualquer outro período específico, dependendo do fenômeno em estudo. A sazonalidade pode ser causada por fatores sazonais, como feriados, estações do ano, eventos climáticos ou comportamentos periódicos. A sazonalidade pode afetar os dados de forma que eles apresentem flutuações regulares em torno de uma linha central, indicando um comportamento consistente que se repete no mesmo período. Graficamente, a sazonalidade pode ser observada como picos e vales regulares em determinados intervalos de tempo. A detecção e modelagem da sazonalidade são cruciais para capturar essas variações regulares e incorporá-las aos modelos de previsão (MORETTIN, 2006).

O ciclo é uma variação de médio a longo prazo que ocorre além da tendência e da sazonalidade. Ao contrário da sazonalidade, o ciclo não é periódico e pode ter duração variável. Ele está relacionado a flutuações econômicas, ciclos de negócios ou outros fatores que afetam a série temporal em intervalos mais longos. Em termos

gráficos, O ciclo pode ser visualizado como padrões de oscilação que ocorrem em intervalos irregulares e não repetitivos (PEIXEIRO, 2022).

O ruído, também conhecido como flutuações aleatórias, é o componente estocástico de uma série temporal. Representa as variações imprevisíveis e não sistemáticas da série. O ruído pode ser causado por fatores aleatórios, eventos imprevistos ou outras influências não explicadas pelos componentes determinísticos, como a tendência e a sazonalidade. É importante modelar e entender o ruído para identificar as informações úteis contidas na série e para avaliar a qualidade das previsões (FÁVERO e BELFIORE, 2017).

Os componentes de séries temporais são elementos fundamentais para entender o comportamento e a variação de uma série. No entanto, é preciso levar em conta que a presença de tendência e sazonalidade pode indicar que a série não é estacionária.

A estacionariedade é uma propriedade importante de séries temporais que indica que as estatísticas descritivas da série (como média e variância) são constantes ao longo do tempo. A ausência dela pode dificultar a modelagem e interpretação da série, e por isso é importante verificar a presença desta propriedade antes de prosseguir com a análise.

### 2.1.2 Estacionariedade

A constância das propriedades estatísticas de uma série temporal ao longo do tempo é uma característica importante conhecida como estacionariedade. Em outras palavras, uma série temporal é considerada estacionária quando suas propriedades, como média, variância e estrutura de autocorrelação, permanecem constantes independentemente do momento em que são observadas.

Existem duas formas de avaliar a estacionariedade: estacionariedade estrita e estacionariedade em sentido fraco. A estacionariedade estrita requer a constância de todas as propriedades estatísticas ao longo do tempo, enquanto a estacionariedade em sentido fraco permite que a média e a autocovariância variem, desde que o comportamento médio seja constante (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

Uma das condições para a estacionariedade é a constância da média ao longo do tempo. Outra condição para a estacionariedade é a constância da autocovariância entre observações. A autocovariância entre  $X_t$  e  $X_{t+h}$  é definida como:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

onde  $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$  é a função de covariância. Para uma série estacionária, a autocovariância  $\gamma(h)$  deve ser independente de  $t$  e depender apenas do intervalo  $h$ .

A estacionariedade se modifica ao longo do tempo, mas assume o mesmo valor para observações que são espaçadas no mesmo intervalo de tempo  $h$ . A autocorrelação entre  $X_t$  e  $X_{t+h}$  é definida como:

**Equação 1 – Função de autocorrelação**

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

onde  $\gamma(0)$  é a variância de  $X_t$ . Para uma série estacionária, a autocorrelação  $\rho(h)$  deve ser independente de  $t$  e depender apenas do intervalo  $h$ .

A estacionariedade<sup>1</sup> é uma suposição fundamental na análise de séries temporais, uma vez que facilita a modelagem e previsão de séries temporais, permitindo a aplicação de mais métodos estatísticos.

Os testes de raízes unitárias são uma abordagem comum para verificar a ordem da diferenciação e a estacionariedade de uma série temporal - sem prejuízo de outros métodos de análise gráfica.

O teste Dickey-Fuller aumentado (ADF) é um dos testes de raízes unitárias mais utilizados. Ele avalia a hipótese nula de que a série possui uma raiz unitária e, se essa hipótese for rejeitada, indica que a série é estacionária. O ADF considera a presença de tendência determinística e autocorrelação serial na série temporal, o que o torna mais robusto (PEIXEIRO, 2022).

Um método gráfico amplamente utilizado é o gráfico de linha da série temporal. Ao plotar os pontos da série temporal ao longo do tempo, pode-se observar visualmente se há uma tendência clara ou se a média parece variar ao longo do tempo. Se a linha média apresentar uma tendência ascendente ou descendente significativa, indica uma série não estacionária.

---

<sup>1</sup> Para maiores definições e provas dos testes aplicáveis, consulte (GUJARATI e PORTER, 2011) e (MORETTIN, 2006)

Outro método gráfico é o gráfico de dispersão ou gráfico de dispersão *lag*. Nesse gráfico, plotamos a série temporal original em relação a ela mesma defasada em um ou mais períodos. Se a dispersão dos pontos estiver concentrada em torno de uma linha reta ou se não houver um padrão discernível, isso sugere a presença de estacionariedade. Por outro lado, se houver uma dispersão ampla ou um padrão visível, isso indica não estacionariedade.

Além disso, é possível utilizar os gráficos das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) para analisar a presença de dependência serial na série temporal. Se os valores de autocorrelação decaírem rapidamente para zero, indica a presença de estacionariedade. Por outro lado, se os valores de autocorrelação forem significativamente diferentes de zero em vários atrasos, isso sugere a presença de não estacionariedade.

Caso uma série temporal não seja estacionária, é possível aplicar transformações para torná-la estacionária. A técnica comum de diferenciação, que envolve a subtração de observações adjacentes, pode ser usada para remover tendências e padrões não estacionários. Outras transformações, como a aplicação de logaritmo ou a transformação de Box-Cox, também podem ser utilizadas para alcançar a estacionariedade.

### 2.1.3 Transformações

A fim de melhorar sua propriedade estatística ou facilitar a análise, transformações podem ser aplicadas em séries temporais, modificando seus dados. Essas transformações podem ser aplicadas com o objetivo de tornar a série mais estacionária, reduzir a variabilidade, remover tendências ou sazonalidades, tornar os dados mais interpretáveis, ou até mesmo tornar os dados analisados mais próximos de uma distribuição normal - visto que uma distribuição normal é desejável em muitas análises estatísticas, pois permite a aplicação de métodos paramétricos mais robustos.

Uma das transformações mais comuns é a diferenciação, que visa tornar a série estacionária. A diferenciação envolve calcular a diferença entre os valores consecutivos da série. Essa transformação é útil quando a série apresenta tendências ou sazonalidades que precisam ser removidas para a aplicação de modelos estatísticos. A diferenciação de primeira ordem é calculada subtraindo o valor atual

pelo valor anterior, enquanto a diferenciação de ordem superior pode ser aplicada repetidamente para remover tendências mais complexas:

***Equação 2 - Exemplo de equação de diferenciação***

$$\Delta^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

Onde:

- $\Delta X_t$  é a série temporal diferenciada de ordem  $d$  no tempo  $t$
- $B$  é o operador de atraso;
- $d$  é a ordem de diferenciação
- $X_t$  é a série temporal original no tempo  $t$

É frequente se deparar com a transformação logarítmica<sup>2</sup>. A aplicação do logaritmo aos dados é útil quando a série apresenta uma variação muito ampla, com valores que abrangem várias ordens de magnitude. A transformação logarítmica reduz a escala dos valores, tornando a série mais compacta e reduzindo a influência de valores extremos. Essa transformação também pode ajudar a linearizar relações não lineares e facilitar a modelagem estatística (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

A transformação de escala é uma outra técnica que busca normalizar a amplitude dos dados, tornando-os comparáveis ou mais adequados para determinadas análises. Existem várias formas de realizar a transformação de escala, como a padronização (subtrair a média e dividir pelo desvio padrão), a normalização min-max (redimensionar os valores para um intervalo específico) e a transformação de Box-Cox (uma transformação paramétrica que otimiza a distribuição dos dados) (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

É importante destacar a transformação Box-Cox. Essa transformação é especialmente útil quando os dados apresentam uma distribuição assimétrica ou quando há heterocedasticidade, ou seja, quando a variância dos dados não é constante ao longo do tempo<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup> No caso a ser analisado, não foi cogitada uma transformação logarítmica nos dados – a despeito da variável ser discreta e diferente de zero – por motivos de parcimônia. Conforme será demonstrado adiante, mesmo sem a dita transformação foram obtidos resultados satisfatórios.

<sup>3</sup> É importante ressaltar que a transformação Box-Cox pode não ser adequada para todos os conjuntos de dados. Antes de aplicar a transformação, é recomendado avaliar a adequação da suposição de normalidade e verificar se os pressupostos do método Box-Cox são atendidos. Além disso, a interpretação dos dados transformados deve considerar a transformação aplicada e levar em conta o contexto e os objetivos da análise.

A transformação Box-Cox é definida pela seguinte equação:

***Equação 3 - Transformação de Box-Cox***

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, \lambda \neq 0 \\ \log y, \lambda = 0 \end{cases}$$

O parâmetro  $\lambda$  controla a transformação aplicada aos dados. Quando  $\lambda$  é diferente de zero, a transformação é uma potência dos dados elevados a  $\lambda$ , subtraída de 1 e dividida por  $\lambda$ . Quando  $\lambda$  é igual a zero, a transformação é o logaritmo dos dados.

Ao encontrar o valor ótimo de  $\lambda$  por meio de técnicas de otimização, podemos aplicar a transformação Box-Cox aos dados originais. O resultado é uma versão transformada dos dados, que pode ser utilizada em análises estatísticas subsequentes.

É importante ressaltar que essas transformações não são aplicáveis a todos os tipos de séries temporais, e a escolha da transformação adequada depende das características específicas dos dados<sup>4</sup>. Além disso, é importante ter cuidado ao interpretar os resultados após a transformação, pois os valores transformados podem ter uma escala diferente e precisam ser interpretados com base na transformação aplicada.

#### ***2.1.4 Autocorrelação e Autocorrelação parcial***

O estudo estatístico de séries temporais desempenha um papel fundamental na análise e modelagem de fenômenos que evoluem ao longo do tempo. Medidas de autocorrelação e autocorrelação parcial são duas ferramentas importantes nesse contexto, que nos permitem compreender a estrutura de dependência temporal presente em uma série de dados.

---

<sup>4</sup> Além dessas transformações, também é possível aplicar outras técnicas específicas para lidar com problemas particulares nas séries temporais. Por exemplo, a transformação de decomposição, como o uso da decomposição em tendência e sazonalidade, pode ajudar a separar esses componentes da série, permitindo uma análise mais granular de cada um. Outra técnica é a suavização exponencial, que visa reduzir a variabilidade dos dados ao aplicar ponderações exponenciais aos valores passados (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2023).



A autocorrelação é uma medida que avalia a relação linear entre observações em uma série temporal e suas defasagens, ou seja, mensura a relação dos valores atuais com valores passados, defasados. É representada por meio do gráfico de autocorrelação (referenciado pelo acrônimo FAC, do inglês *Autocorrelation Function - FAC*, que exibe a correlação entre uma observação e suas defasagens em diferentes intervalos de tempo. O FAC fornece informações sobre a força e a natureza da dependência temporal presente nos dados, indicando se existem padrões periódicos ou tendências significativas.

O cálculo da FAC pode ser expresso como:

**Equação 4 - Cálculo da Função de Autocorrelação (FAC)**

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_t)(X_{t+k} - \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_t)^2}, \quad k \geq 1$$

Onde:

- $k$  é o número de defasagens (lag);
- $n$  é o número total de observações;
- $X_t$  é o valor da série temporal no momento  $t$ , e
- $\bar{X}_t$  é a média dos valores da série temporal.

Por sua vez, a autocorrelação parcial é uma medida que busca isolar a correlação entre observações, eliminando a influência das defasagens intermediárias. Ela é representada pelo gráfico de autocorrelação parcial (referenciado pelo acrônimo FACP, do inglês *Partial Autocorrelation Function - FACP*, que mostra a correlação direta entre uma observação e sua defasagem, após remover o efeito das defasagens intermediárias. A FACP permite identificar diretamente os padrões de dependência temporal entre os dados, revelando a contribuição única de cada defasagem na previsão do valor atual.

O cálculo da FACP pode ser expresso como:

**Equação 5 - Cálculo da Função de Autocorrelação Parcial (FACP)**

$$\phi_{kk} = \text{Corr} \left( \frac{X_t, X_{t+k}}{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}} \right)$$

Onde:

- $\phi_{kk}$  é uma variável que representa a correlação entre duas séries temporais  $X_t$  e  $X_{t+k}$ , onde  $k$  é um valor inteiro que determina o número de períodos de tempo entre as observações;
- $X_t$  é uma série temporal que representa uma variável em um ponto específico no tempo  $t$ ;
- $X_{t+k}$  é uma série temporal que representa a mesma variável, mas em um ponto no futuro, deslocado por  $k$  períodos de tempo a partir de  $t$ ;
- A função *Corr* representa o cálculo da correlação entre duas séries temporais. Nesse contexto, ela mede o grau de relação linear entre  $X_t$  e  $X_{t+k}$ , e
- O termo  $\frac{X_t, X_{t+k}}{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}}$  denota a correlação entre  $X_t$  e  $X_{t+k}$  normalizada pela correlação média das observações intermediárias entre  $t$  e  $t+k$ .

As funções FAC e FACP estão intimamente conectadas e fornecem informações complementares sobre a estrutura temporal da série: o FAC mostra a correlação total entre observações e suas defasagens, ao passo que o FACP revela as correlações parciais, considerando apenas a influência direta de cada defasagem.

Essa conexão é importante para identificar o modelo adequado para a série temporal, pois determinadas formas de FAC e FACP podem indicar a presença de componentes específicos, como sazonalidade ou tendências: por exemplo, se houver picos a cada sete defasagens significativas (i.e., além de intervalo de confiança de 95%, por exemplo) em um gráfico de FAC diário, isso pode sugerir uma sazonalidade semanal na série; uma autocorrelação positiva significativa em defasagens consecutivas no gráfico de FAC, isso pode sugerir uma tendência de crescimento - por outro lado, uma autocorrelação negativa significativa em defasagens consecutivas pode indicar uma tendência de queda.

### 2.1.5 Modelos para séries temporais estacionárias

#### 2.1.5.1 Modelo AR

A dependência temporal é uma das características fundamentais das séries temporais. Ela significa que o valor de uma observação em determinado momento

depende dos valores observados anteriormente. Isso pode ser capturado por meio de modelos autorregressivos, nos quais o valor atual é modelado como uma função linear dos valores passados da série. Os modelos autorregressivos são representados pelo acrônimo *AR*, do inglês *Autoregressive* (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

O modelo *AR* assume que o valor atual da série temporal depende linearmente dos valores passados, sendo especificado pela ordem  $p$ , que representa a quantidade de valores anteriores considerados na previsão. Matematicamente, um modelo  $AR(p)$  pode ser expresso como:

**Equação 6 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR)**

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Onde:

- $X_t$  é o valor observado da série temporal no tempo  $t$ ;
- $c$  é o intercepto ou componente de deslocamento constante;
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são os coeficientes autorregressivos que representam a influência dos valores anteriores da série temporal;
- $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$  são os valores anteriores da série temporal, e
- $\varepsilon_t$  é o termo de erro aleatório ou inovação.

#### 2.1.5.2 Modelo MA

As flutuações aleatórias, também conhecidas como ruído, são componentes imprevisíveis presentes nas séries temporais. Elas podem ser modeladas por meio de modelos de média móvel (referenciado pelo acrônimo *MA*, do inglês *Moving Average*), nos quais o valor atual é uma combinação linear dos erros passados. Esses modelos ajudam a capturar as flutuações não explicadas pelos outros componentes da série (MORETTIN, 2006)

O modelo *MA* é baseado na média móvel dos erros passados e é especificado pela ordem  $q$ , que representa a quantidade de erros passados considerados na previsão. Um modelo  $MA(q)$  pode ser expresso como:

**Equação 7 - Equação geral de um modelo de média móvel (MA)**

$$X_t = c + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Onde:

- $X_t$  é o valor observado da série temporal no tempo  $t$ ;
- $c$  é o intercepto ou componente de deslocamento constante;
- $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são os coeficientes de média móvel que representam a influência dos termos de erro anteriores;
- $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  são os termos de erro anteriores.

### 2.1.5.3 Modelo ARMA

O modelo *ARMA* combina os componentes autorregressivo (*AR*) e de média móvel (*MA*) em um único modelo. Um modelo *ARMA*( $p, q$ ) pode ser expresso como:

**Equação 8 - Equação geral de um modelo autorregressivo e de média móvel (ARMA)**

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Onde:

- $X_t$  é o valor observado da série temporal no tempo  $t$ ;
- $c$  é o intercepto ou componente de deslocamento constante;
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são os coeficientes autorregressivos que representam a influência dos valores anteriores da série temporal;
- $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$  são os valores anteriores da série temporal;
- $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são coeficientes de média móvel que representam a influência dos termos de erro anteriores;
- $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  são os termos de erro anteriores.

Nesse modelo, o valor observado da série temporal  $X_t$  depende linearmente dos termos de erro passados multiplicados pelos coeficientes de média móvel  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ , além de um termo de erro atual  $\varepsilon_t$  e dos valores passados da série.

#### 2.1.5.4 Modelo ARIMA

Como citado anteriormente, as tendências são padrões de longo prazo que mostram a direção geral do comportamento dos dados ao longo do tempo. Uma série temporal pode exibir uma tendência ascendente (crescente), uma tendência descendente (decrecente) ou nenhuma tendência em particular.

O modelo *ARIMA* é uma extensão do modelo *ARMA* que considera a diferenciação dos dados para torná-los estacionários. A diferenciação é necessária quando a série temporal exibe tendências ou sazonalidades. Um modelo *ARIMA*( $p, d, q$ ) pode ser expresso como:

***Equação 9 - Equação geral de um modelo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA)***

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Onde:

- $Y_t = \Delta^d X(t)$ , que é a diferença de ordem  $d$  aplicada à série temporal para torná-la estacionária.;
- representa a variável dependente no período  $t$ , que é o valor que estamos tentando prever ou explicar;
- $c$  é uma constante que representa o intercepto da equação, ou seja, o valor de  $Y_t$  quando todas as outras variáveis independentes são iguais a zero;
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são os coeficientes das variáveis independentes  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$ , respectivamente. Eles representam a influência dos valores passados de  $Y_t$  sobre o valor atual  $Y_t$ ;
- $\varepsilon_t$  é o erro aleatório no período  $t$ , que representa a parte não explicada ou aleatória do modelo. É a diferença entre o valor observado  $Y_t$  e o valor previsto com base nas variáveis independentes e nos termos de lag.
- $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são os coeficientes dos erros passados  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ , respectivamente. Eles representam a influência dos erros passados sobre o valor atual do erro  $\varepsilon_t$ .

O modelo *ARIMA* é usado para modelar séries temporais que possuem tanto autocorrelação quanto dependência nos termos de erro passados, além de serem sujeitas a diferenciação para se tornarem estacionárias.

#### 2.1.5.5 Modelo SARIMA

As sazonalidades referem-se a padrões regulares e repetitivos que ocorrem em intervalos de tempo específicos. Esses padrões podem ser diários, mensais, trimestrais ou anuais, dependendo do fenômeno em estudo. Modelos *SARIMA* são utilizados para capturar e modelar essas variações sazonais.

Além disso, as séries temporais podem sofrer mudanças estruturais, que são alterações significativas no comportamento da série ao longo do tempo. Essas mudanças podem ser causadas por eventos econômicos, políticos, sociais ou outros fatores externos. Identificar e modelar essas mudanças é essencial para evitar previsões incorretas.

O modelo *SARIMA* é uma extensão do modelo *ARIMA* que leva em consideração a sazonalidade presente nos dados. A sazonalidade é modelada por meio de componentes sazonais adicionais, que capturam as variações regulares em um determinado período.

Um modelo *SARIMA*( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ )[ $s$ ] pode ser expresso como:

**Equação 10 - Equação geral de um modelo autorregressivo integrado de médias móveis com sazonalidade (SARIMA)**

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t = \Theta_Q(B^S)\Theta_q(B)a_t$$

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B_S)W_t = \Theta_q(B)\Theta_Q(B_S)\varepsilon_t$$

Onde:

- $W_t = \Delta^d \Delta^D (X_m)$ ,
- $\Phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) = 0$  é o polinômio autorregressivo de ordem  $p$ ,
- $\Theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) = 0$  é o polinômio de médias móveis de ordem  $q$  com raízes fora do círculo unitário e sem raízes comuns;

- $\Phi_p(B^S) = (1 - \phi_1 B^S - \dots - \phi_p B^{SP}) = 0$  é o polinômio autorregressivo sazonal de ordem  $P$ ;
- $\Theta_Q(B^S) = (1 - \theta_1 B^S - \dots - \theta_Q B^{QS}) = 0$  é o polinômio de médias móveis sazonal de ordem  $Q$ ,
- e  $a_t$  é um processo ruído branco com média zero  $E(a_t) = 0$  e variância constante  $Var(a_t) = \sigma^2$

Há outros modelos conhecidos, como *ARCH* e *GARCH* (GUJARATI e PORTER, 2011). Contudo, em benefício da brevidade, não serão abordados - visto que, principalmente, não serão úteis ao desenvolvimento deste trabalho.

#### 2.1.5.6 Considerações sobre as raízes das equações

Raízes características, círculo unitário, invertibilidade e estacionariedade são conceitos fundamentais na análise de séries temporais. Esses conceitos estão interligados e fornecem uma compreensão mais profunda do comportamento dessas séries.

As raízes características são soluções da equação característica de um modelo de série temporal. Essa equação relaciona os coeficientes do modelo com suas raízes, que podem ser complexas ou reais.

Em termos de garantia de estacionariedade, a observação deve focar na parcela autorregressiva do modelo.

#### **Equação 11 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR)**

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Para tanto, é necessário expressar o processo um processo AR de ordem  $p$  – AR(p) – em notação de polinômio de defasagem:

#### **Equação 12 - Equação geral de um modelo autorregressivo (AR) em notação de polinômio de defasagem**

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) X_t = \varepsilon_t,$$

onde  $L$  é o operador de defasagem e  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são os coeficientes do modelo. Em seguida, substitui-se o operador  $L$  por uma variável  $\lambda$  e iguala-se o polinômio a zero:

**Equação 13 - Equação de um modelo AR(p) para obtenção das raízes características**

$$1 - \phi_1\lambda - \phi_2\lambda^2 - \dots - \phi_p\lambda^p = 0$$

As raízes características são os valores de  $\lambda$  que resolvem essa equação. Existem  $p$  delas, embora algumas delas possam ser iguais.  $X_t$  é um processo estacionário se todas as raízes estiverem fora do círculo unitário.

O círculo unitário é uma representação gráfica das raízes características no plano complexo. Especificamente, o círculo unitário é o conjunto de pontos no plano complexo que estão a uma distância de uma unidade da origem. As raízes características podem ser representadas como pontos no círculo unitário. Portanto, se todas as raízes estiverem fora do círculo unitário, o modelo é considerado estável. Matematicamente, as raízes estão fora do círculo unitário se  $|\lambda_i| > 1$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ , onde  $\lambda_i$  são as raízes características. Em se tratando de números complexos, pode-se dizer que os valores absolutos das raízes precisa ser maiores do que 1.

A invertibilidade de uma série temporal está relacionada à capacidade de reconstruir a série original a partir de seus valores passados. Em outras palavras, uma série temporal é considerada invertível se for possível estimar os coeficientes de um modelo que descreva a série.

Em termos de garantia de invertibilidade, a observação deve focar na parcela de médias móveis do modelo.

**Equação 14 - Equação geral de um modelo de médias móveis (MA)**

$$X_t = c + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Para tanto, é necessário expressar o processo um processo MA de ordem  $q$  – MA(q) – em notação de polinômio de defasagem.



**Equação 15 - Equação geral de um modelo de médias móveis (MNA) em notação de polinômio de defasagem**

$$(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) X_t = \varepsilon_t$$

onde  $L$  é o operador de defasagem e  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  são os coeficientes do modelo. Em seguida, substitui-se o operador  $L$  por uma variável  $\rho$  e iguala-se o polinômio a zero:

**Equação 16 - Equação de um modelo MA(q) para obtenção das raízes características**

$$1 + \theta_1 \rho + \theta_2 \rho^2 + \dots + \theta_q \rho^q = 0$$

As raízes características são os valores de  $\rho$  que resolvem essa equação. Existem  $q$  delas, embora algumas delas possam ser iguais.  $X_t$  é um processo invertível se todas as raízes estiverem fora do círculo unitário. Conforme dito anteriormente, matematicamente, as raízes estão fora do círculo unitário se  $|\rho_i| > 1$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ , onde  $\rho_i$  são as raízes características. Em se tratando de números complexos, pode-se dizer que os valores absolutos das raízes precisam ser maiores do que 1.

Como dito anteriormente, a estacionariedade de uma série temporal é um conceito fundamental na análise de séries temporais. Uma série é considerada estacionária se suas propriedades estatísticas não mudarem ao longo do tempo. Isso significa que a média, a variância e a autocovariância da série são constantes em diferentes períodos. A estacionariedade é desejável porque permite a aplicação de técnicas estatísticas para modelar e prever o comportamento futuro da série.

Conforme indicado por Hyndman (2014): "um modelo invertível deve ter todas as raízes fora do círculo unitário. Equivalentemente, as raízes inversas devem estar dentro do círculo unitário. [Tradução própria]". Assim, é usual a representação gráfica das raízes inversas, visto que podem ser plotadas em gráficos todas as raízes, sem, eventualmente, precisar fazer um gráfico tender ao infinito.

Hyndman (2014), de forma seminal, oferece uma abordagem em R para calcular as raízes características dos modelos.

O autor propõe uma abordagem usando o círculo unitário, de tal forma que, caso o valor do inverso da raiz ultrapasse 1, a representação desta se tornaria vermelha; se adequado o valor (isto é, menor do que 1), sua representação seria preta.

### 2.1.6 Relação entre o gráfico FAC, os modelos de séries temporais e os componentes

O gráfico de autocorrelação desempenha um papel fundamental na análise e modelagem de séries temporais. Ele fornece informações sobre a relação de autocorrelação entre os valores passados e futuros da série, ajudando a identificar os padrões presentes nos dados.

Ao observar o gráfico de FAC, é possível identificar a presença de componentes específicos em uma série temporal. Os principais componentes de uma série temporal são a autocorrelação, a média móvel e a sazonalidade. Esses componentes são a base para a construção de modelos de séries temporais, como os modelos autorregressivos (*AR*), de média móvel (*MA*) e autorregressivos integrados de média móvel.

A autocorrelação refere-se à dependência dos valores da série temporal em relação a seus próprios valores anteriores ou posteriores no tempo. Quando você observa a FAC, pode detectar picos ou quedas que indicam padrões de autocorrelação. Isso pode ajudar a identificar se a série temporal exibe algum tipo de tendência ou padrão de repetição.

A média móvel é outro componente importante em uma série temporal. Ela descreve a média dos valores em um intervalo móvel de tempo. A presença de picos na FAC pode indicar a influência de médias móveis na série, o que pode sugerir a existência de algum tipo de suavização ou filtragem nos dados.

A sazonalidade se refere a padrões que se repetem em um ciclo regular, como sazonalidade anual em vendas de produtos sazonais, como árvores de Natal. A FAC pode revelar picos em intervalos regulares que indicam a presença de sazonalidade na série temporal. Isso é importante para entender flutuações sazonais nos dados.

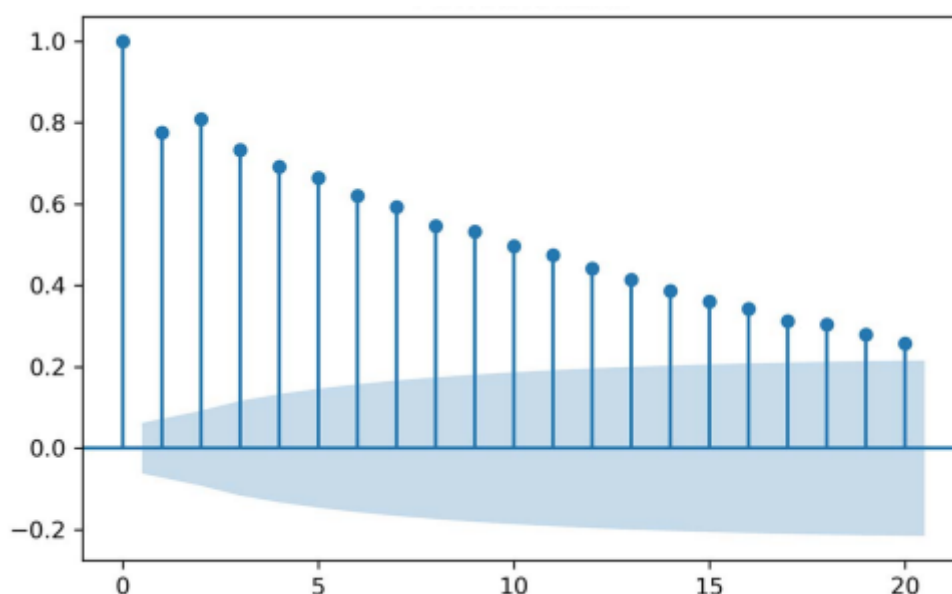
No gráfico de FAC, as autocorrelações são representadas pelos coeficientes de correlação entre os valores passados e futuros da série. Se houver autocorrelações significativas em determinados *lags*, isso provavelmente indica a presença de um componente autorregressivo. Por exemplo, se os coeficientes de correlação decaírem gradualmente após um certo *lag*, pode-se sugerir a presença de um modelo AR de ordem correspondente.

Por outro lado, se houver autocorrelações significativas em múltiplos *lags*, com picos decrescentes após cada *lag*, isso indica a presença de um componente de média móvel (*MA*). Nesse caso, um modelo *MA* de ordem correspondente ao número do *lag* pode ser adequado para modelar a série temporal.

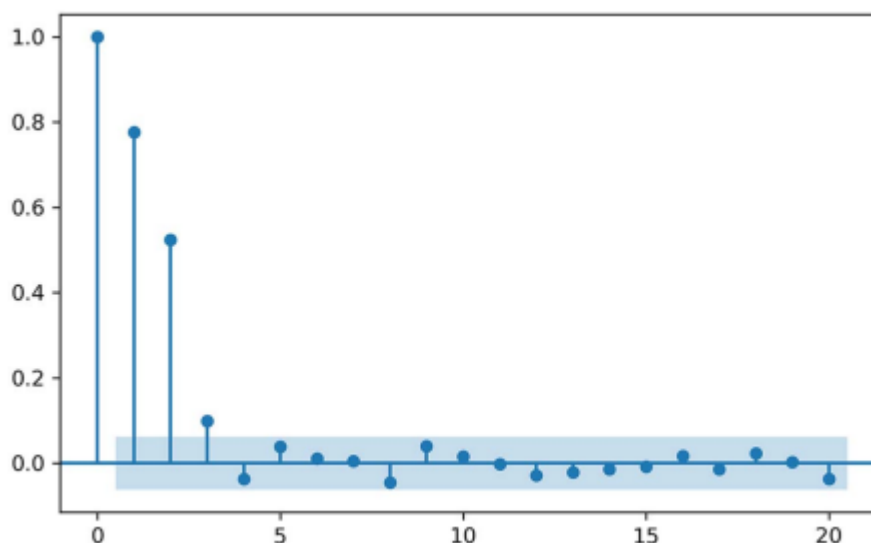
Além disso, o gráfico de *FAC* também pode revelar a presença de padrões sazonais. Se houver autocorrelações significativas em *lags* múltiplos do período sazonal, isso indica a presença de sazonalidade na série. Nesse caso, modelos *ARIMA* sazonais podem ser apropriados para capturar esses padrões.

É importante ressaltar que a interpretação do gráfico de *FAC* deve ser realizada em conjunto com o gráfico de autocorrelação parcial, que ajuda a identificar a ordem dos componentes *AR* e *MA* de forma mais precisa. O gráfico de *FACP* mostra as correlações parciais entre os valores passados e futuros da série, removendo as influências intermediárias.

Note-se o exemplo abaixo, que retrata o fluxo em uma dada loja de departamento (PEIXEIRO, 2022):



**Figura 1 - Exemplo de gráfico de autocorrelação**



**Figura 2 - Exemplo de gráfico de autocorrelação parcial**

Observe-se como o gráfico de FAC está decaindo lentamente – indicando, então, um processo autorregressivo. Do gráfico de FACP é possível perceber que os coeficientes não são significativos após o *lag* 3, indicando se tratar de um processo  $AR(3)$ .

### 2.1.7 Avaliação de resíduos da série temporal

A avaliação de resíduos da série temporal é uma importante etapa no processo de análise de dados temporais.

Os resíduos são as diferenças entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo de série temporal. Essa análise visa verificar se os resíduos possuem algum padrão ou estrutura que não foi capturada pelo modelo.

Um dos principais métodos utilizados na avaliação de resíduos da série temporal é a verificação de normalidade, independência e homoscedasticidade dos resíduos.

Se os resíduos seguirem uma distribuição gaussiana, isso indica que o modelo está capturando adequadamente a estrutura dos dados – embora possa não ser o único modelo capaz de tal feito. A independência, a seu turno, é importante para garantir que não haja correlação serial entre os resíduos, enquanto a homoscedasticidade indica que a variância dos resíduos é constante ao longo do tempo.

Assim, diz-se que o resíduo se comporta como um ruído branco<sup>5</sup> (na medida em se tem uma série temporal em que os valores são independentes e tem variância constante) e seguem uma distribuição normal com média zero. Ele serve como uma referência para avaliar se os resíduos de um modelo de série temporal são adequados.

#### 2.1.7.1 Testes aplicáveis

A normalidade dos resíduos pode ser testada de várias maneiras. Um teste comum é o teste de Shapiro-Wilk. Esse teste é baseado na estatística de teste  $W$  e verifica se os resíduos seguem uma distribuição normal. A hipótese nula do teste é que os resíduos são normalmente distribuídos<sup>6</sup> (GUJARATI e PORTER, 2011).

A interpretação dos resultados do teste de Shapiro-Wilk é feita comparando o valor-p calculado com um nível de significância pré-determinado (a rigor, a região da rejeição da hipótese nula é construída a partir de um nível de significância pré-determinado). Se o valor-p for maior que o nível de significância (geralmente 0,05), a hipótese nula de normalidade não é rejeitada, sugerindo que os resíduos podem ser considerados normalmente distribuídos. Por outro lado, se o valor-p for menor que o nível de significância, a hipótese nula é rejeitada, indicando a falta de normalidade nos resíduos (PEIXEIRO, 2022).

A independência (ou autocorrelação) dos resíduos pode ser aferida, a seu turno, pelo teste de Ljung-Box. Ele verifica se existe alguma correlação serial nos resíduos, ou seja, se as observações passadas influenciam as observações futuras (FÁVERO e BELFIORE, 2017).

---

<sup>5</sup> “Se uma série temporal consiste em observações não correlacionadas e tem constantes variância, dizemos que é ruído branco” (Tradução própria) (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

<sup>6</sup> É importante mencionar que o teste de Shapiro-Wilk é frequentemente preferido em muitos casos em relação aos testes de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Lilliefors, especialmente quando a normalidade dos dados é uma suposição crítica. Isso ocorre porque o teste de Shapiro-Wilk é considerado mais poderoso para detectar desvios da normalidade, especialmente em amostras pequenas. No entanto, vale ressaltar que os testes de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Lilliefors são opções válidas quando o teste de Shapiro-Wilk não está disponível ou não é apropriado para os dados em questão. Cada um desses testes possui suas próprias características e sensibilidades, tornando-os úteis em diferentes situações de análise estatística. É importante escolher o teste que melhor se adapte às suas necessidades e às propriedades dos dados que você está analisando. Além disso, é sempre aconselhável complementar os resultados dos testes de normalidade com métodos de visualização, como gráficos Q-Q e histogramas, para uma avaliação mais abrangente da distribuição dos dados (FÁVERO e BELFIORE, 2017) (WOOLDRIDGE, 2015).

A hipótese nula do teste é que não há autocorrelação nos resíduos, e a estatística de teste  $Q(m)$  é calculada com base nas autocorrelações amostrais dos resíduos até a ordem  $m$ , a saber:

**Equação 17 - Equação referente ao teste de Ljung-Box**

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\widehat{\rho}_k^2}{n - k}$$

Onde:

- $n$  é o tamanho da amostra (número de observações na série temporal);
- $h$  é o número de lags (atrasos) para os quais você deseja testar a autocorrelação, e
- $\widehat{\rho}_k$  é a autocorrelação amostral no lag  $k$ .

Essa estatística segue aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade, sob a hipótese nula de independência dos resíduos. Se o valor observado de  $Q(m)$  for significativamente maior do que os valores críticos, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que há evidências de autocorrelação nos resíduos do modelo.

O valor-p é usado para interpretar os resultados do teste de Ljung-Box. Em estatística, o valor-p é a probabilidade de obter resultados pelo menos tão extremos quanto os resultados observados de um teste de hipótese estatística, assumindo que a hipótese nula é correta. Quanto menor o p-valor, menor a probabilidade de a hipótese nula ser verdadeira. No caso do teste de Ljung-Box, se o valor-p for menor que um nível de significância pré-determinado (geralmente 0,05), a hipótese nula é rejeitada, indicando a presença de autocorrelação significativa nos resíduos. Por outro lado, se o valor-p for maior que o nível de significância, a hipótese nula não é rejeitada, sugerindo que os resíduos são independentes (FÁVERO e BELFIORE, 2017) (NIELSEN, 2019).

O teste de Breusch-Pagan é uma técnica estatística utilizada para verificar a presença de heterocedasticidade em séries temporais. A heterocedasticidade ocorre quando a variância dos resíduos de um modelo varia de forma sistemática ao longo do tempo, violando a suposição de homoscedasticidade<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> O teste de Breusch-Pagan é uma ferramenta importante na análise de regressão, projetada para avaliar a presença de heteroscedasticidade nos resíduos de um modelo de regressão.

Conforme Gujarati (2011), a teste de Breusch-Pagan é baseado na regressão dos resíduos ao quadrado em relação às variáveis independentes do modelo – como o tempo, tendência e variáveis exógenas. A hipótese nula do teste é que a variância dos resíduos é constante, indicando a presença de homoscedasticidade. Se o valor-p associado ao teste for menor que um nível de significância pré-definido (geralmente 0,05), a hipótese nula é rejeitada, sugerindo a presença de heterocedasticidade.

No entanto, é necessário pontuar que a noção de ruído branco é uma simplificação teórica: na prática, é difícil obter resíduos completamente consistentes com um ruído branco, principalmente em séries temporais reais, que geralmente apresentam complexidade e estrutura - isto é, os resíduos frequentemente irão exibir algum grau de autocorrelação residual, não sendo totalmente independentes.

Conforme Hyndman (2023):

Nenhum dos modelos aqui considerados [refere-se ao exemplo prático do livro] passa em todos os testes residuais. Na prática, normalmente usaríamos o melhor modelo que pudéssemos encontrar, mesmo que não passasse em todos os testes.  
[Tradução própria]

Assim, é possível concluir que descumprimento destas premissas, no geral, indica que o modelo pode não estar capturando todas as informações disponíveis na estrutura temporal dos dados. Não é uma avaliação binária: é possível utilizar o modelo que viola premissas; ele só será impreciso - motivo pelo qual deve-se preferir os modelos que mais se adequam aos preceitos.

### 2.1.8 Métricas de precisão

As medidas de precisão desempenham um papel fundamental na avaliação e comparação de modelos de séries temporais. Essas medidas fornecem uma maneira de quantificar o desempenho dos modelos na previsão de valores futuros em relação aos valores observados.

---

Heteroscedasticidade ocorre quando a variância dos resíduos não é constante em relação às variáveis independentes, o que viola uma das suposições fundamentais da regressão linear (WOOLDRIDGE, 2015). No entanto, é importante destacar que o teste de Breusch-Pagan funciona melhor quando a distribuição dos resíduos é normal. Isso significa que ele pode não ser tão confiável quando a normalidade dos resíduos não é atendida. A normalidade dos resíduos é outra suposição importante da análise de regressão, e a não conformidade com essa suposição pode levar a resultados enganosos. Em casos em que a normalidade dos resíduos não é satisfeita, é aconselhável considerar outros testes que sejam mais robustos em relação a essa suposição. Alguns desses testes incluem o teste de White, teste de Goldfeld-Quandt, teste de Levene, transformações dos dados e modelos robustos (GREENE, 2012).

As métricas a seguir descritas brevemente permitem uma avaliação objetiva do desempenho dos modelos, fornecendo uma compreensão clara da qualidade das previsões em relação aos dados observados.

É possível medir a precisão da previsão resumindo os erros de previsão de diferentes maneiras. Em geral, as análises de resíduos são divididas em duas espécies: (i) erros dependentes de escala, aplicável para fins de comparação apenas para dados de séries temporais que possuem a mesma escala, e (ii) erros de porcentagem, que têm a vantagem de não terem unidades de medida desde o início do cálculo - e, portanto, são frequentemente usados para comparar desempenhos de previsão entre conjuntos de dados que não estejam na mesma unidade de medida -, porém possuem a desvantagem ao lidar com valores próximos a zero (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2023) (MONTGOMERY, JENNINGS e KULAHCI, 2015).

Há, ainda, propostas particulares, que visam remover problemas conhecidos dos modelos (RINK, 2021). É o caso do modelo proposto por Hyndman (2006, denominado Erro Médio Absoluto Escalado (tradução de *Mean Absolute Scaled Error*, que produz o acrônimo *MASE*, o qual será tratado adiante.

#### 2.1.8.1 Erro Médio Absoluto (MAE)

O Erro Médio Absoluto (*Mean Absolute Error*, *MAE*) é uma medida simples da diferença média absoluta entre as previsões e os valores observados. É calculado pela média das diferenças absolutas entre as previsões  $\hat{Y}_t$  e os valores observados  $Y_t$  em um determinado período  $T$ , sendo  $t$  a  $t$ -ésima observação em um conjunto de dados:

***Equação 18 - Equação referente à métrica de erro MAE***

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\hat{Y}_t - Y_t|$$

O grande ponto positivo da métrica está na sua facilidade de computação e interpretação. Porém, acaba não penalizando suficiente outliers, além de herdar a desvantagem de seu gênero (erros de escala): não ser válido para comparar séries com outras unidades de medida.

#### 2.1.8.2 Erro Quadrático Médio (MSE)



O Erro Quadrático Médio (*Mean Squared Error, MSE*) é uma medida que calcula a média dos quadrados das diferenças entre as previsões e os valores observados. É calculado pela média dos quadrados das diferenças entre as previsões  $\hat{Y}_t$  e os valores observados  $Y_t$  em um determinado período  $T$ , sendo  $t$  a  $t$ -ésima observação em um conjunto de dados:

**Equação 19 - Equação referente à métrica de erro MSE**

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{Y}_t - Y_t)^2$$

O destaque da métrica MSE é a sensibilidade aos *outliers* - visto que, tal como indica, leva a média dos erros ao quadrado (diferenças entre  $\hat{Y}_t$  e  $Y_t$ ). Isto, porém, pode ser uma desvantagem - visto que pode haver uma supervalorização dos erros grandes em relação aos pequenos. Em linhas gerais, o *MSE* é adequado para situações em que realmente deseja se concentrar em grandes erros.

#### 2.1.8.3 Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)

O RMSE é a raiz quadrada do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Squared Error, RMSE*), e é uma medida comumente usada para avaliar a precisão de previsões em séries temporais. Ele fornece uma medida de erro na mesma escala que os dados originais. O *RMSE* é calculado como a raiz quadrada do *MSE*:

**Equação 20 - Equação referente à métrica de erro RMSE**

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

Embora herde a vantagem do *MSE*, mas com o acréscimo de que não há perda da unidade de medida, o *RMSE* também é muito sensível a *outliers*.

#### 2.1.8.4 Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)

O Erro Percentual Absoluto Médio (*Mean Absolute Percentage Error, MAPE*) é uma medida relativa da diferença média absoluta entre as previsões e os valores observados. É calculado pela média dos erros percentuais absolutos entre as

previsões  $\hat{Y}_t$  e os valores observados  $Y_t$  em um determinado período  $T$ , sendo  $t$  a  $t$  –ésima observação em um conjunto de dados

***Equação 21 - Equação referente à métrica de erro MAPE***

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{\hat{Y}_t - Y_t}{Y_t} \right| \times 100$$

As vantagens do *MAPE* são sua independência de escala e fácil interpretabilidade entre séries de diferentes unidades. Contudo, há desvantagem de gerar valores infinitos ou indefinidos para valores reais zero ou próximos de zero, e aplicar uma penalidade mais pesada aos erros negativos do que aos erros positivos, o que leva a uma assimetria (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2023).

**2.1.8.5 Erro Médio Absoluto Escalado (MASE)**

O MASE é calculado tomando o *MAE* e dividindo-o pelo *MAE* de um benchmark ingênuo (*naive benchmark*) dentro da amostra (baseado nos dados de treinamento) (HYNDMAN e KOEHLER, 2006).

Valores de MASE maiores que 1 indicam que as previsões são piores, em média, do que as previsões de uma etapa dentro da amostra do modelo ingênuo (HYNDMAN e KOEHLER, 2006).

Como se trata de uma métrica livre de escala, é possível comparar a precisão do modelo em diferentes séries temporais. Ao contrário das métricas de erro relativas, ela não fornece valores indefinidos ou infinitos, o que a torna uma métrica adequada para dados de séries temporais com zeros.

## **2.2 O caso**

Para análise, escolheu-se a base de dados *Baltimore 911 Calls*, disponível na plataforma Kaggle. Este *dataset*, provido pelo Município de Baltimore, em Maryland, nos Estados Unidos, compila dados de ligações para o serviço de emergência de 2015 a 2021 - o que resultou em mais de 2,8 milhões de registros.

Como tratado anteriormente, o objetivo deste trabalho é prever o quantitativo de ligações diárias para este serviço, a fim de que haja modulação adequada de operadores disponíveis para atendê-las.

O período de teste eleito se inicia em 01/01/2016, e se estende até 31/12/2017. O período de previsão, a seu turno, são os 35 dias subsequentes, iniciado em 01/01/2018. O recorte se deu de forma aleatória.

De posse dos dados, o primeiro passo foi aglutinar o total de ligações por dia e apenas pelo seu gênero (qual seja, "ligações para o número 911" - número telefônico único das centrais emergências dos EUA). Isto porque o *dataset* traz não só o registro de cada uma das ligações, mas também a sua natureza (emergência médica, policial, de tráfego etc.).

O passo-a-passo para modelagem e previsão das séries temporais seguirá o proposto pela metodologia de Box-Jenkins. Trata-se de um framework estatístico amplamente utilizado para modelagem e previsão de séries temporais desenvolvida pelos estatísticos George Box e Gwilym Jenkins, e que fornece um conjunto sistemático de etapas para identificar, estimar e diagnosticar modelos de séries temporais (BOX e JENKINS, 1970).

A metodologia de Box-Jenkins é composta por três fases principais: identificação, estimação e diagnóstico. Na fase de identificação, o objetivo é identificar a ordem dos componentes do modelo, como a ordem de autocorrelação (AR) e a ordem de média móvel (MA), por meio da análise dos gráficos de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Essa etapa auxilia na compreensão dos padrões presentes nos dados e na seleção do modelo apropriado (BOX e JENKINS, 1970) (GUJARATI e PORTER, 2011).

Na fase de estimação, os parâmetros do modelo são estimados usando técnicas como o método dos mínimos quadrados ou a máxima verossimilhança (BOX e JENKINS, 1970). Essa etapa envolve ajustar o modelo aos dados observados, otimizando os parâmetros de acordo com a função de ajuste escolhida, como o critério de informação de Akaike (*AIC*) ou o critério de informação bayesiano (*BIC*) (GUJARATI e PORTER, 2011) (PEIXEIRO, 2022).

Após a estimação, a fase de diagnóstico é realizada para verificar a adequação do modelo aos dados. Isso envolve a análise dos resíduos do modelo por meio de gráficos de autocorrelação dos resíduos, testes de normalidade e outros diagnósticos estatísticos (BOX e JENKINS, 1970). Se os resíduos não apresentarem estrutura significativa, indica-se que o modelo é adequado para descrever a série temporal (GUJARATI e PORTER, 2011) (PEIXEIRO, 2022).

A metodologia de Box-Jenkins é flexível e permite a inclusão de componentes adicionais, como sazonalidade e tendência, por meio de modelos ARIMA sazonais, simples ou complexos.

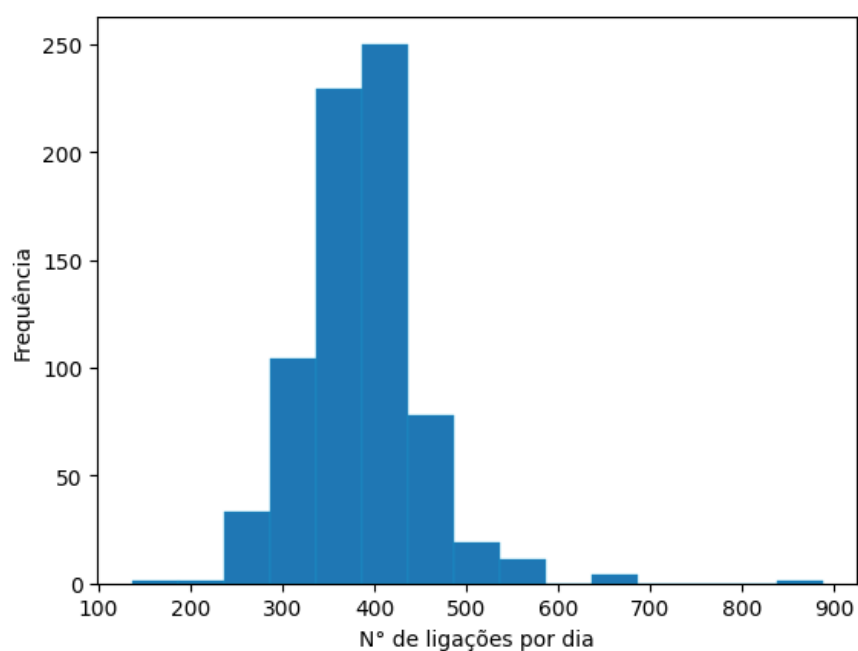
### 2.2.1 Análise exploratória

Após a dita aglutinação, foi realizada uma análise exploratória. Os resultados são tratados na Tabela 1 e ilustrados pela Figura 3:

**Tabela 1 - Análise exploratória do período de 01/01/2016 a 31/12/2018**

Medida W	Valor
Contagem	731 observações
Média	386,7346
Desvio-padrão	63,1823
Valor mínimo	136
1 IQR	348,5
2 IQR	386
3 IQR	419
Valor máximo	887

**Figura 3 - Histograma dos dados**



**Fonte: Elaboração própria**

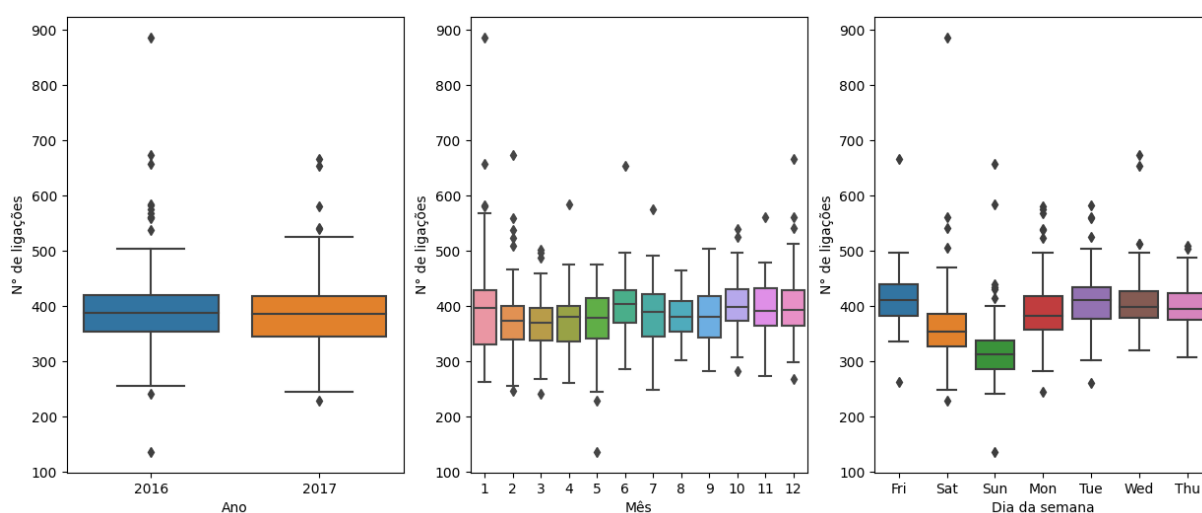
Uma análise exploratória indicou que, dentre os dias do período de validação, há 20 *outliers*. Este dado, então, convida para uma análise mais ampla.

Considerando que houve uma aglutinação do quantitativo de ligações que desconsiderou a espécie de cada ligação (isto é, trata-se de uma medida indireta), além da hipótese de registros equivocados (inerente a qualquer base amostral), é possível também que os registros que estão além do terceiro intervalo interquartil representem eventos anormais na cidade de Baltimore, como um acidente de trânsito mais extenso, mais ações criminosas em um mesmo dia, ou uma mera anormalidade de subnotificação de situações de emergências médicas.

Assim, ao fim de um determinado dia, pouco importaria se, naquela data, as demandas de outras naturezas permaneceram regulares: basta apenas uma espécie de ligação seja sub representada ou super-representada para diminuir ou elevar todo o número diário.

Após, prosseguiu-se, então, para a análise a análise em box-plot do período de teste. Note-se que a análise foi segmentada por ano, mês e dia da semana:

**Figura 4 - Box-plot das segmentações dos dados**

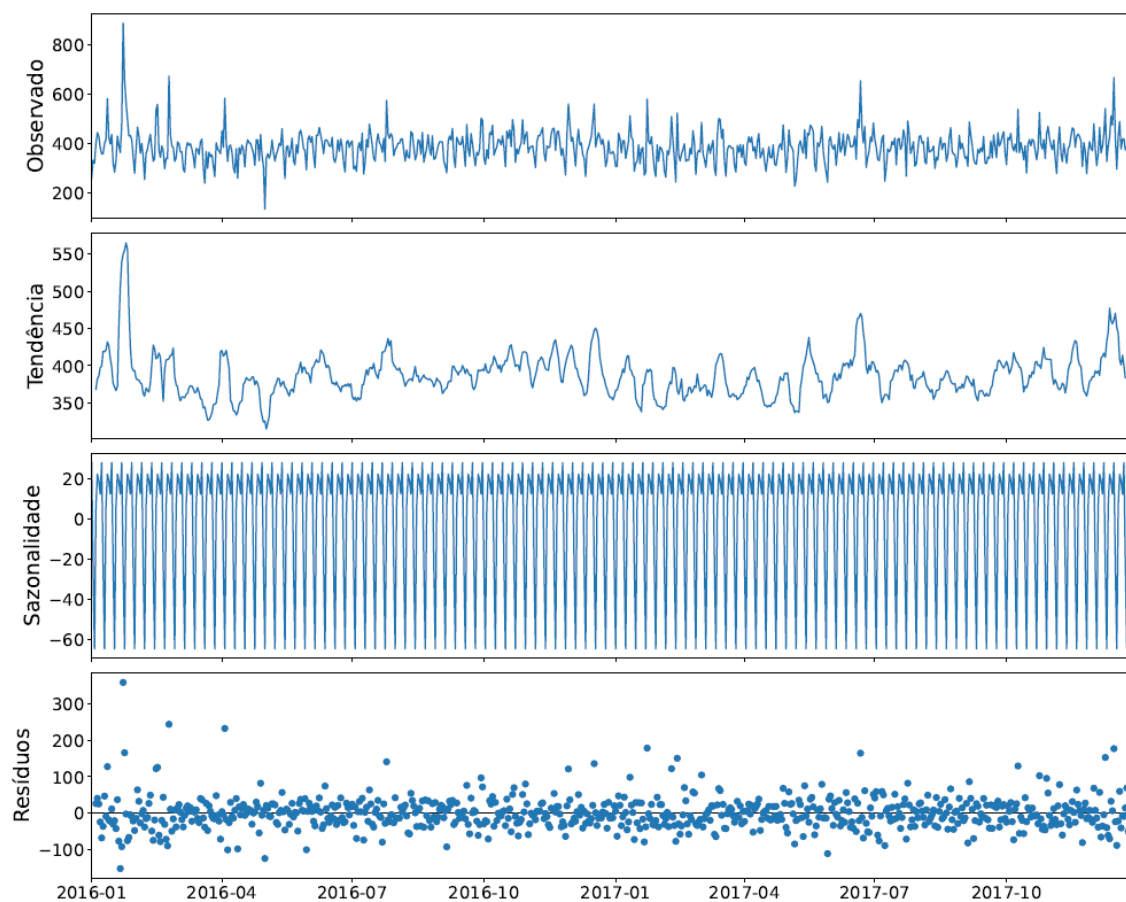


**Fonte: Elaboração própria**

Embora já tivesse sido ventilada teoricamente a hipótese de sazonalidade semanal em dados diários (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2023), o box=lot semanal dá suporte fático à conclusão, haja vista a variação da mediana dentro de uma mesma semana.

O próximo passo, então, foi decompor de forma aditiva os componentes de tendência, sazonalidade e ruído da série temporal analisada. O procedimento foi realizado por meio da função *tsa.seasonal\_decompose*, da biblioteca em Python *StatsModels*. Optou-se pelo modelo aditivo (por ser a primeira opção) e periodicidade de 7 (por conta das evidências trazidas pela Figura 4).

**Figura 5 - Decomposição aditiva da tendência, sazonalidade e resíduos (elaboração própria)**



**Fonte: Elaboração própria**

Embora haja uma sazonalidade aparente – o que, então, evidencia a necessidade de ao menos uma diferenciação -, é necessário que seja realizado o teste de Dickey-Fuller Aumentado.

Usando do pacote *tseries*, do R, roda-se o referido teste através da função *adf.test()* para todas as 731 observações.

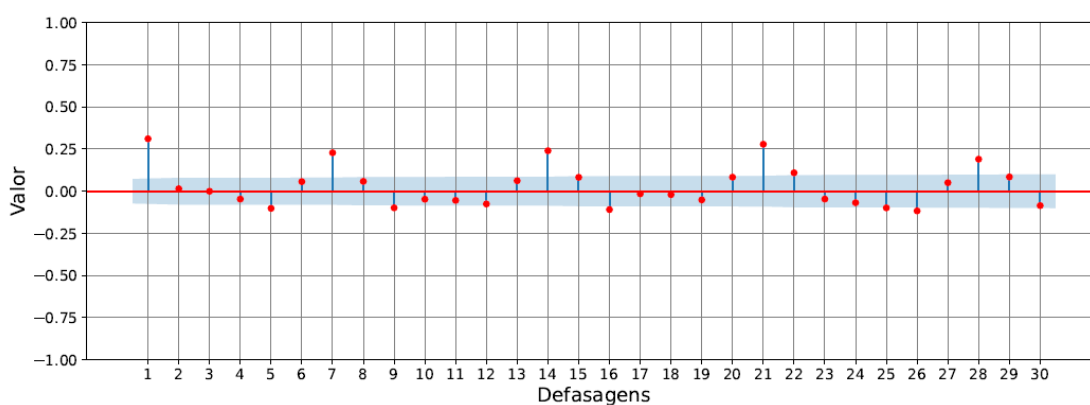
Os resultados estão na Tabela 2:

**Tabela 2 - Teste de Dickey-Fuller Aumentado para a amostra tratada**

Teste estatístico	P-valor
-8.1586	0.01

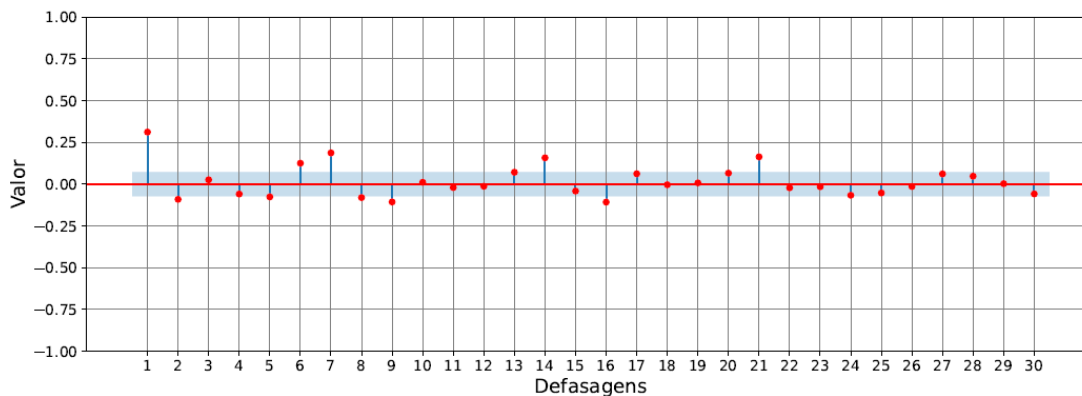
Por fim, é necessário confrontar o resultado defronte do teste ADF com os gráficos de autocorrelação (Figura 6) e autocorrelação parcial (Figura 7). O intervalo de confiança configurado foi de 95%.

**Figura 6 - Gráfico de autocorrelação da série original**



**Fonte: Elaboração própria**

**Figura 7 - Gráfico de autocorrelação parcial da série original**



**Fonte: Elaboração própria**

Em que pese a decomposição realizada indicar sazonalidade nos dados, o teste ADF indica a estacionariedade (haja vista o p-valor do teste ser menor do que a margem de significância), o que também é corroborado pelos gráficos FAC e FACP.

Assim, findando a parte investigativa, é possível concluir que: (1) os dados são estacionários, e (2) há ao menos uma sazonalidade de ordem 7.

### 2.2.2 Modelagem



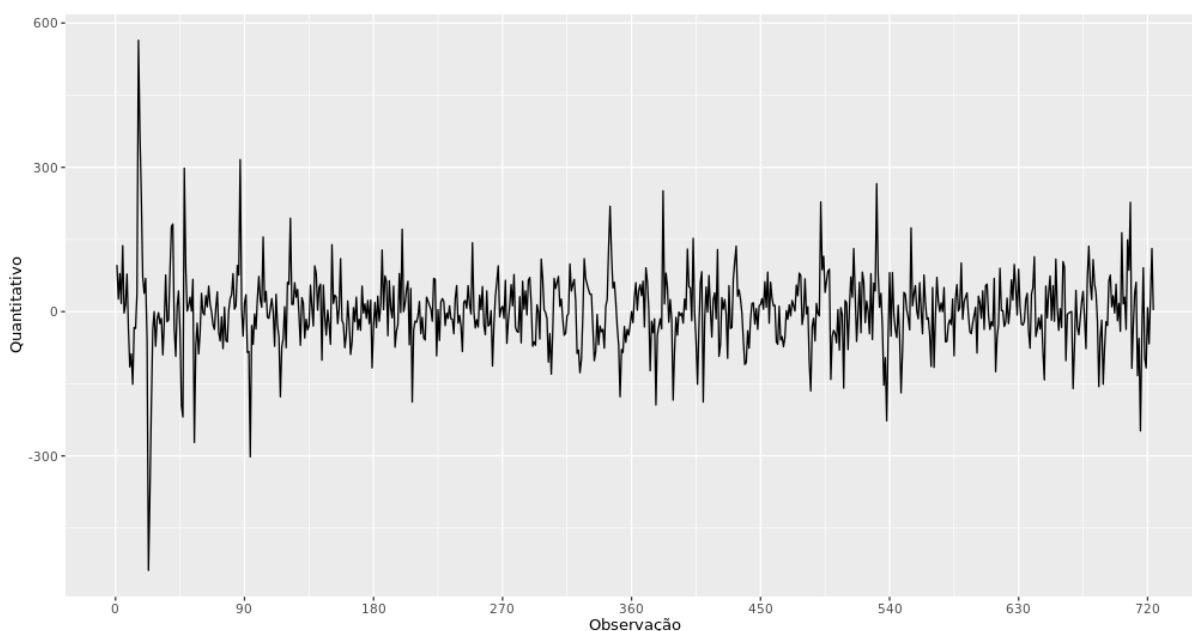
O objetivo na presente é realizar a validação das hipóteses previamente delineadas. Tendo identificado a aparente discordância entre os resultados do teste estatístico de estacionariedade e a presença visual de sazonalidade nos dados, agora nos deparamos com a necessidade crucial de investigar e confirmar modelos que se ajustem aos dados analisados.

De imediato, para resolver a questão da sazonalidade, surgem duas hipóteses: apenas uma diferenciação sazonal (cuja análise será denominada de Modelo 1) e a adição a esta diferenciação sazonal de uma outra, desta vez não-sazonal (denominada Modelo 2).

#### 2.2.2.1 Modelo 1: diferenciação sazonal

Após uma diferenciação sazonal de ordem 7 ( $lag = 7$ ), a série passou a ter comportamento retratado no gráfico de linha a seguir:

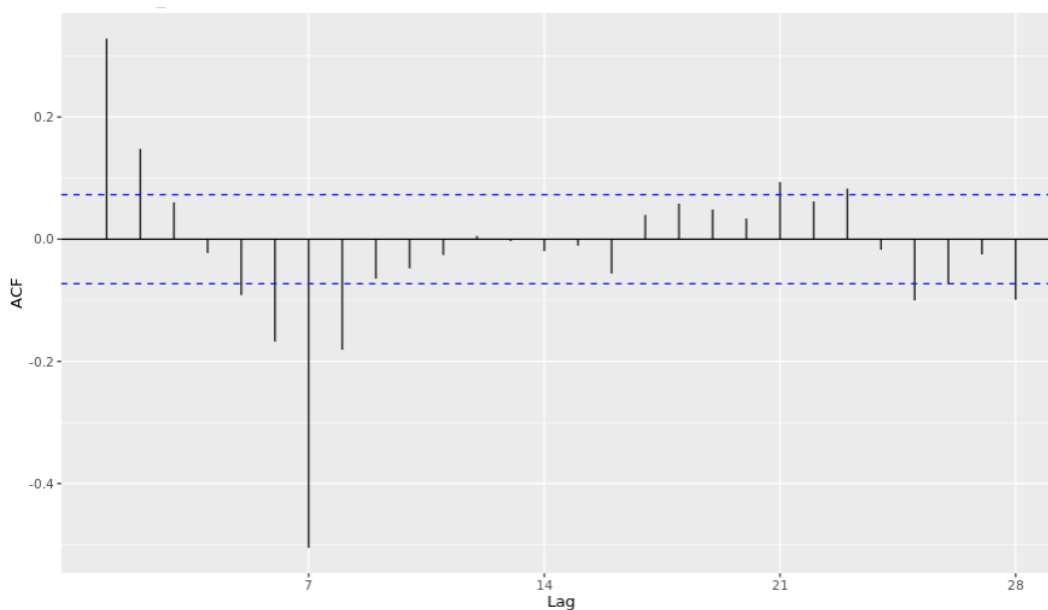
**Figura 8 - Gráfico de linha da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 1**



**Fonte: Elaboração própria**

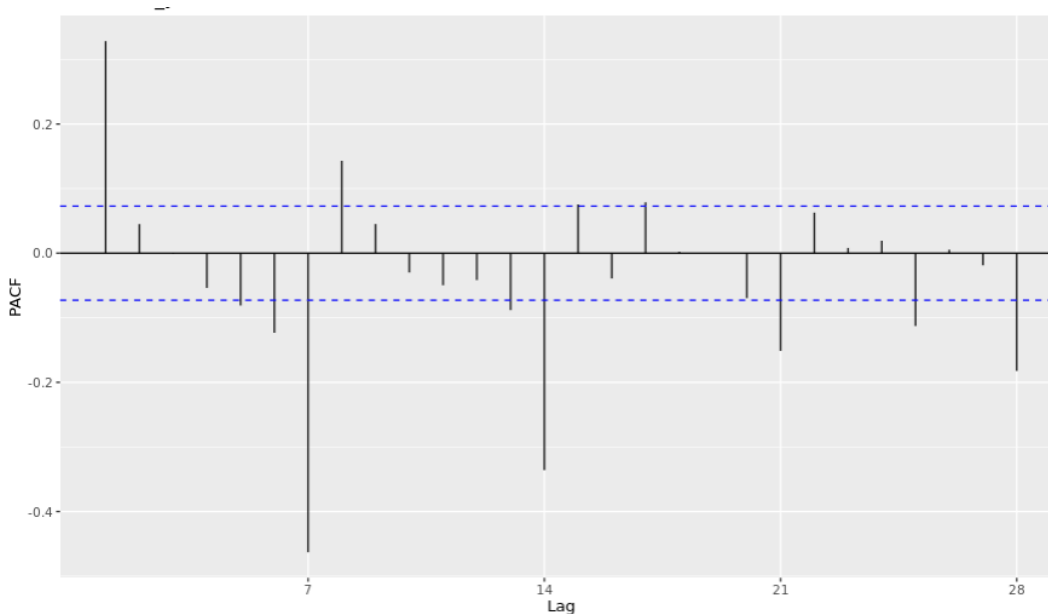
Os gráficos de FAC e FACP da referida série, noutro turno, assim se apresentaram:

**Figura 9 - Gráfico FAC da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 1**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 10 - Gráfico FACP da série diferenciada sazonalmente para Modelo 1**



Fonte: Elaboração própria

Após a análise dos gráficos e diversas tentativas, sugere-se o modelo  $SARIMA(1,0,0)(0,1,1)[7]$ , haja vista o decaimento do gráfico de FAC e o comportamento no FACP.

**Equação 22 - Equação referente ao Modelo 1**

$$(1 - \phi B)(1 - B^S)Y_t = (1 - \Theta B^S)a_t$$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Y_{t-s} - \phi Y_{t-(s+1)} + a_t - \Theta a_{t-s}$$

Estimando pelo método dos mínimos quadrados, eis o sumário do modelo sugerido e a respectiva análise dos coeficientes:

**Figura 11 - Sumário do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente**

```
ARIMA(1,0,0)(0,1,1)[7]
Coefficients:
      ar1      sma1
    0.3271  -0.9455
s.e.  0.0338   0.0131

sigma^2 = 2882:  log likelihood = -3910.59

Training set error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
Training set 0.4947898 53.35282 36.30987 -1.565121 9.41778 0.6818048 -0.006280237
```

**Figura 12 - Coeficientes do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente**

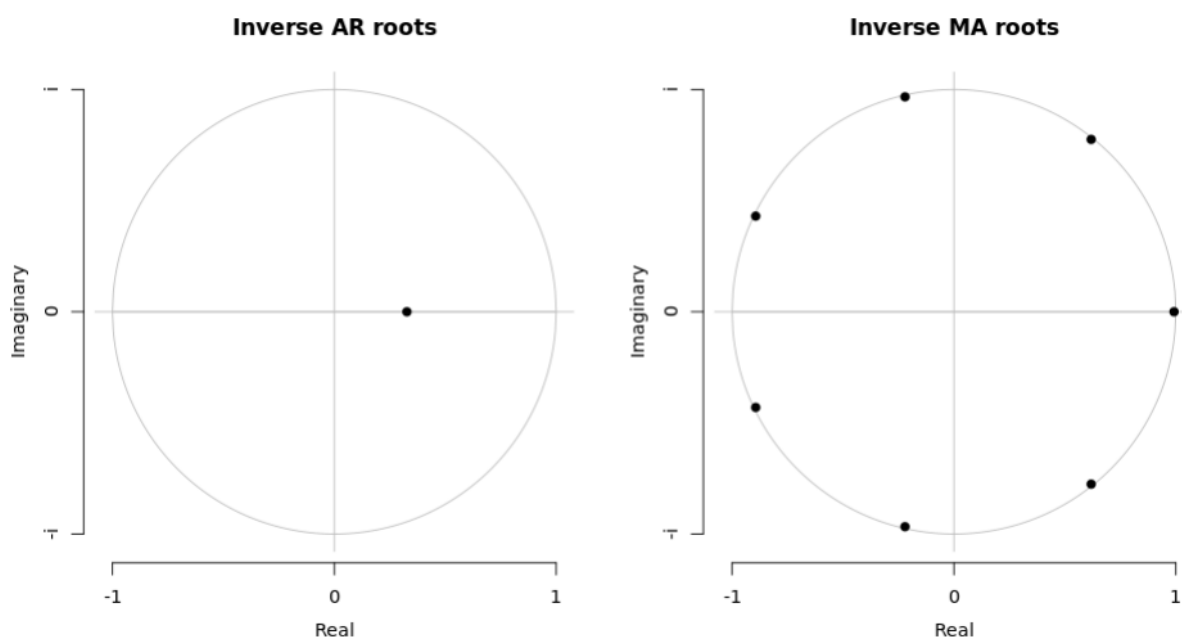
```
z test of coefficients:

      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
ar1  0.327134   0.033782   9.6838 < 2.2e-16 ***
sma1 -0.945532   0.013136  -71.9805 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

**Tabela 3 - Raízes características do Modelo 1**

Parcela	Valor Imaginário	Raiz inversa
Autorregressiva	3.056852+0i	0.3271339
Médias móveis	0.6284984+0.7881120i	0.9920309
	-0.9082065+0.4373692i	0.9920309
	-0.2243085-0.9827596i	0.9920309
	0.6284984-0.7881120i	0.9920309
	-0.2243085+0.9827596i	0.9920309
	-0.9082065-0.4373692i	0.9920309
	1.0080331+0.0000000i	0.9920309

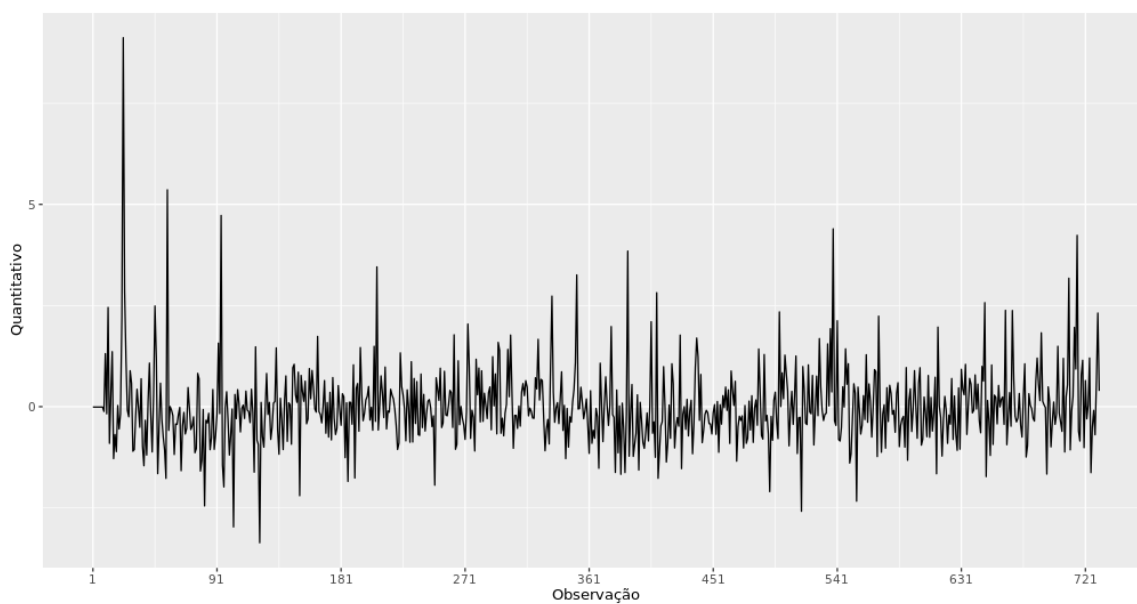
**Figura 13 - Representação gráfica das raízes características do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**



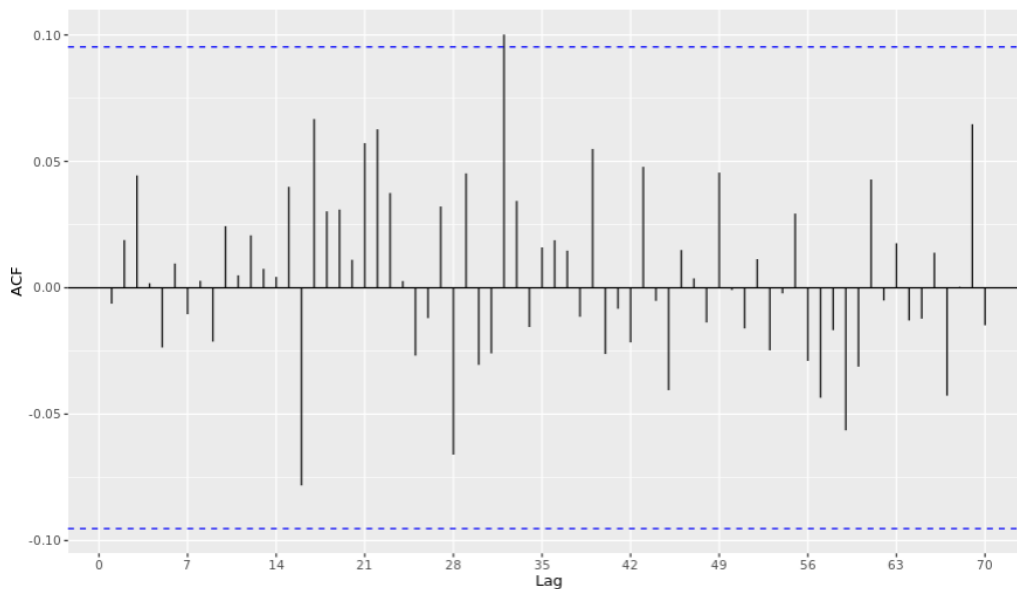
#### 2.2.2.1.1 Análise dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]

A seguir, os resíduos do referido modelo:

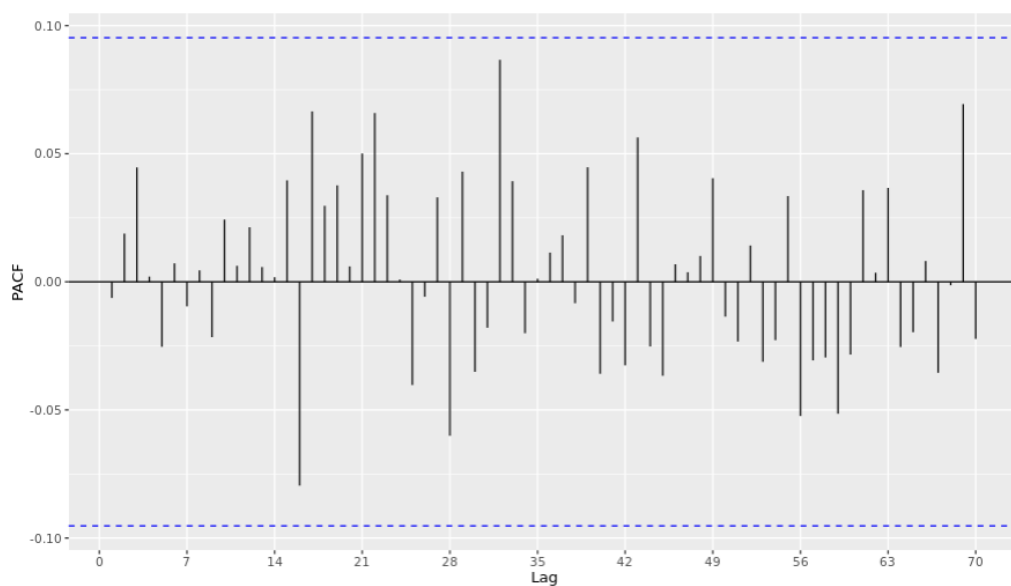
**Figura 14 - Gráfico de linha dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 15 - Gráfico FAC dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**

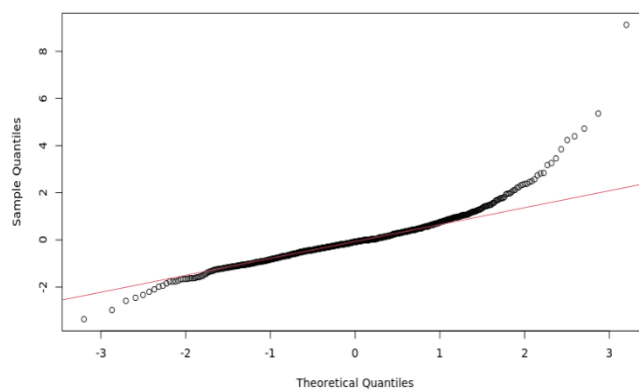
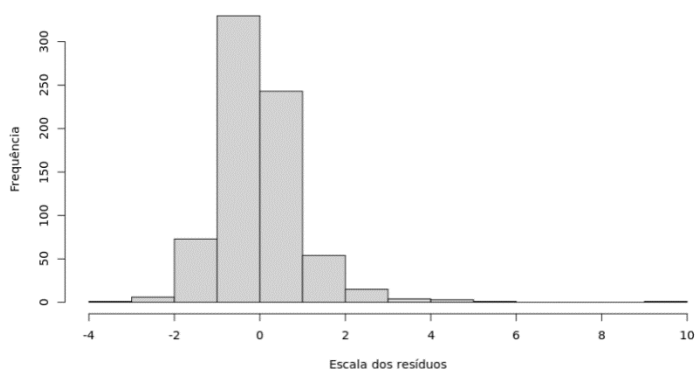
Fonte: Elaboração própria

**Figura 16 - Gráfico FACP dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**

Fonte: Elaboração própria

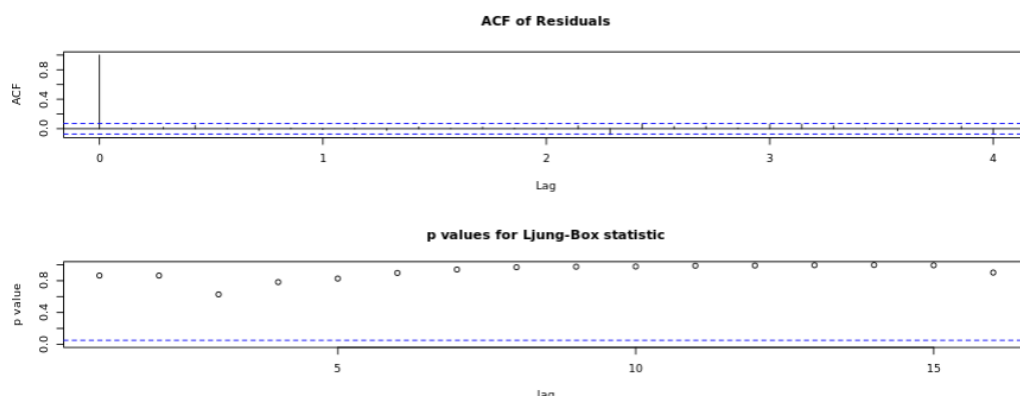
O histograma, o gráfico Q-Q e uma representação didática dos resíduos padronizada estão representados respectivamente nas figuras abaixo:

**Figura 17 - Histograma dos resíduos do Modelo 1 - Figura 18 - Gráfico Q-Q dos resíduos do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 19 - Diagnóstico do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

Por fim, os testes de normalidade de Anderson-Darling e Shapiro-Wilk do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]:

**Tabela 4 - Teste de normalidade de Shapiro-Wilk para Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**

Teste estatístico	P-valor
W = 0.88832	< 2.2e-16

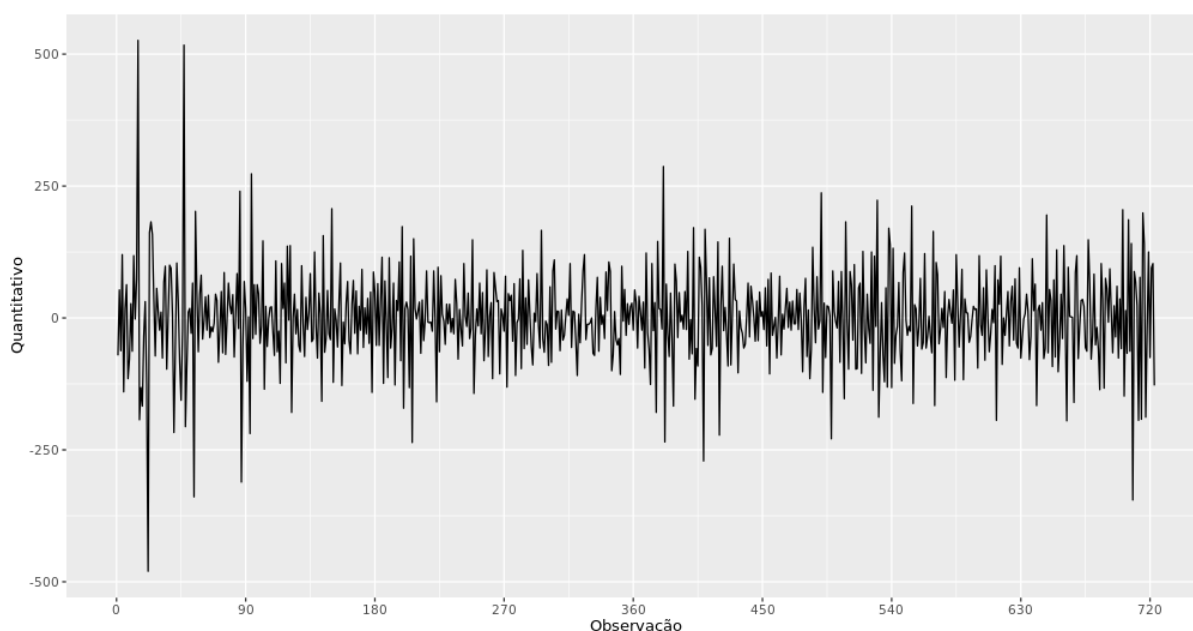
**Tabela 5 - Teste de normalidade de Anderson-Darling do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**

Teste estatístico	P-valor
A = 12.403	A = 12.403

### 2.2.2.2 Modelo 2: diferenciação sazonal cumulada com diferenciação não sazonal

Após uma diferenciação não-sazonal e outra sazonal de ordem 7 ( $lag = 7$ ), a série passou a ter comportamento retratado no gráfico de linha a seguir:

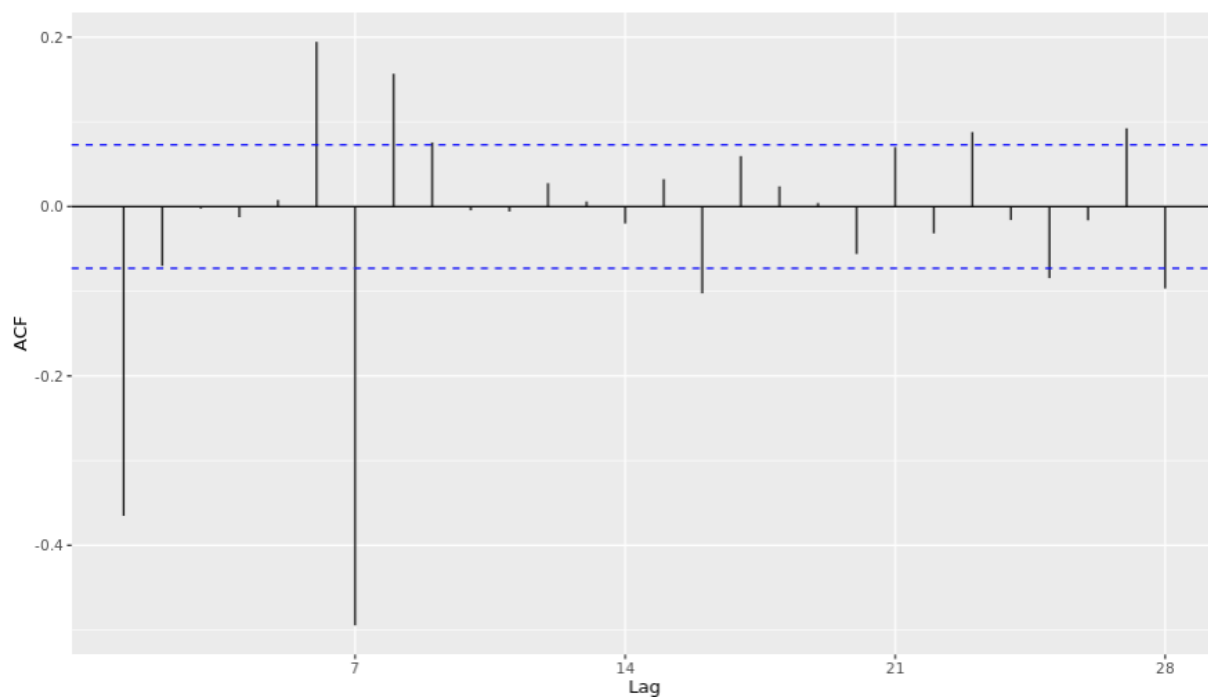
**Figura 19 - Gráfico de linha da série diferenciada sazonal e não sazonalmente para o Modelo 2**



Fonte: Elaboração própria

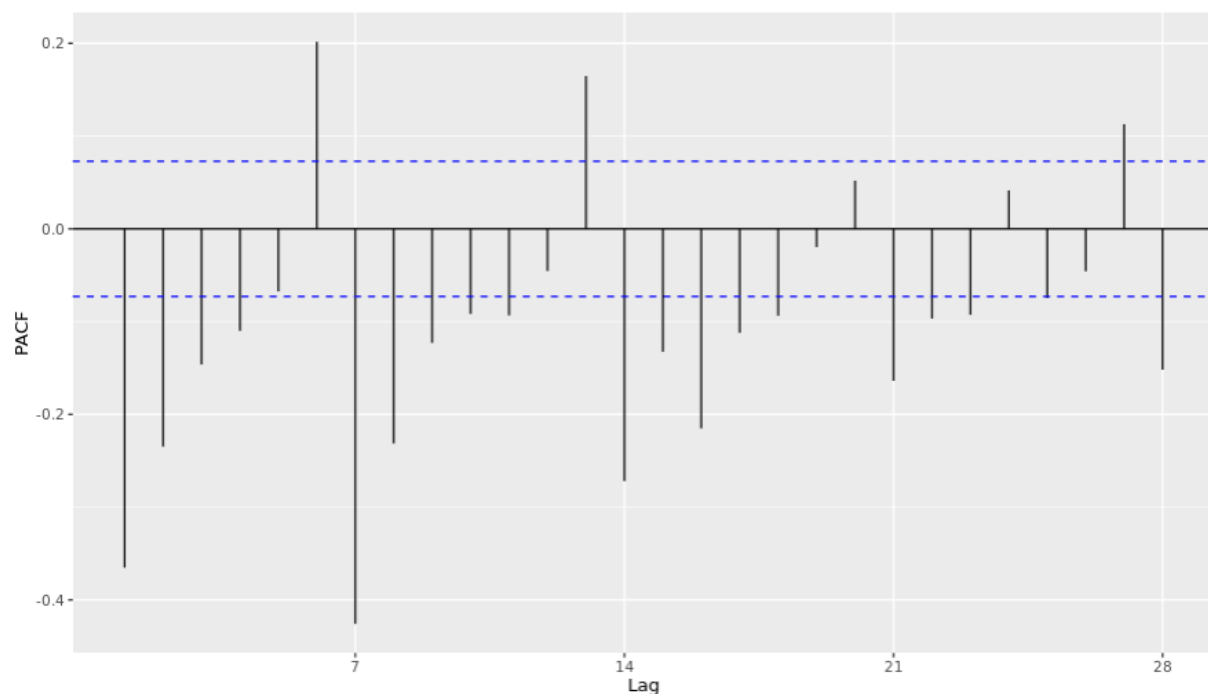
Os gráficos de FAC e FACP da referida série, por outro lado, assim se apresentaram:

**Figura 20 - Gráfico FAC da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 2**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 21 - Gráfico FACP da série diferenciada sazonalmente para o Modelo 2**



Fonte: Elaboração própria



Após a análise dos gráficos e diversas tentativas, sugere-se o modelo  $SARIMA(0,1,2)(0,1,1)[7]$ , haja vista o comportamento dos gráficos FAC e FACP, indicando uma possível média móvel não sazonal de segunda ordem e média móvel sazonal de ordem 1.

**Equação 23 - Equação referente ao Modelo 2**

$$(1 - B)(1 - B_s)Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \Theta B_s)a_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-s} - Y_{t-(s+1)} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \Theta a_{t-s} + q_1 \Theta a_{t-(s+1)} + q_2 \Theta a_{t-(s+2)}$$

Estimando pelo método dos mínimos quadrados, eis o sumário do modelo sugerido e a respectiva análise dos coeficientes:

**Figura 22 - Sumário do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente**

```
ARIMA(0,1,2)(0,1,1)[7]
Coefficients:
      ma1      ma2      sma1
      -0.5686  -0.1754  -0.8859
s.e.      0.0366   0.0354   0.0174

sigma^2 = 3355:  log likelihood = -3959.14

Training set error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
Training set -4.4166  57.48666  40.74374 -2.740612  10.66731  0.7650612  0.001744282
```

**Figura 23 - Coeficientes do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7] ante a série diferenciada sazonalmente**

```
z test of coefficients:

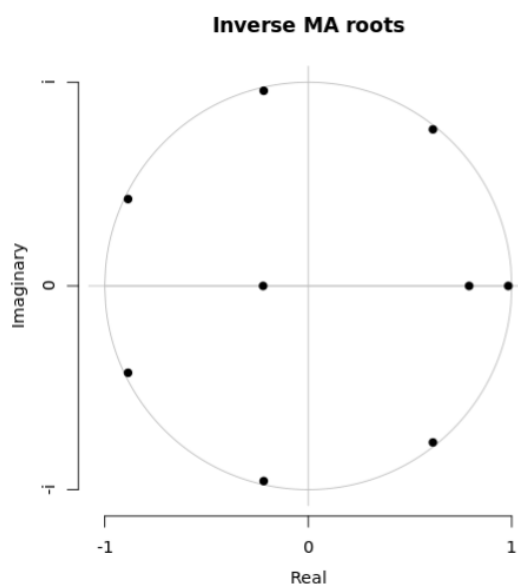
      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
ma1  -0.568597   0.036615 -15.5290 < 2.2e-16 ***
ma2  -0.175378   0.035427  -4.9503 7.408e-07 ***
sma1 -0.885929   0.017395 -50.9289 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

**Tabela 6 - Raízes características do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**

Parcela	Valor Imaginário	Raíz inversa
Autorregressiva	0	0
Médias móveis	0.6343717+0.7954769i	0.9828462

	-0.9166936+0.4414564i	0.9828462
	-0.2264046-0.9919435i	0.9828462
	0.6343717-0.7954769i -	0.9828462
	0.2264046+0.9919435i	0.9828462
	-0.9166936-0.4414564i	0.9828462
	1.0174531-0.0000000i	0.9828462
	1.2650799+0.0000000i	0.7904639
	-4.5071975+0.0000000i	0.2218674

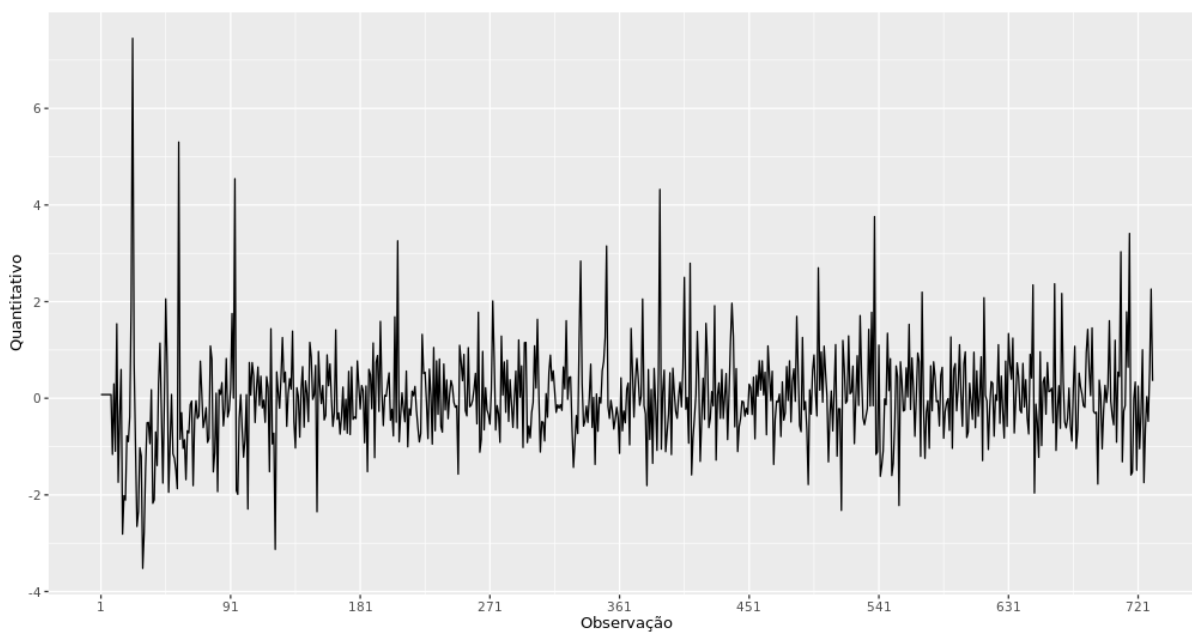
**Figura 24 - Representação gráfica das raízes características do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



#### 2.2.2.2.1 Análise dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]

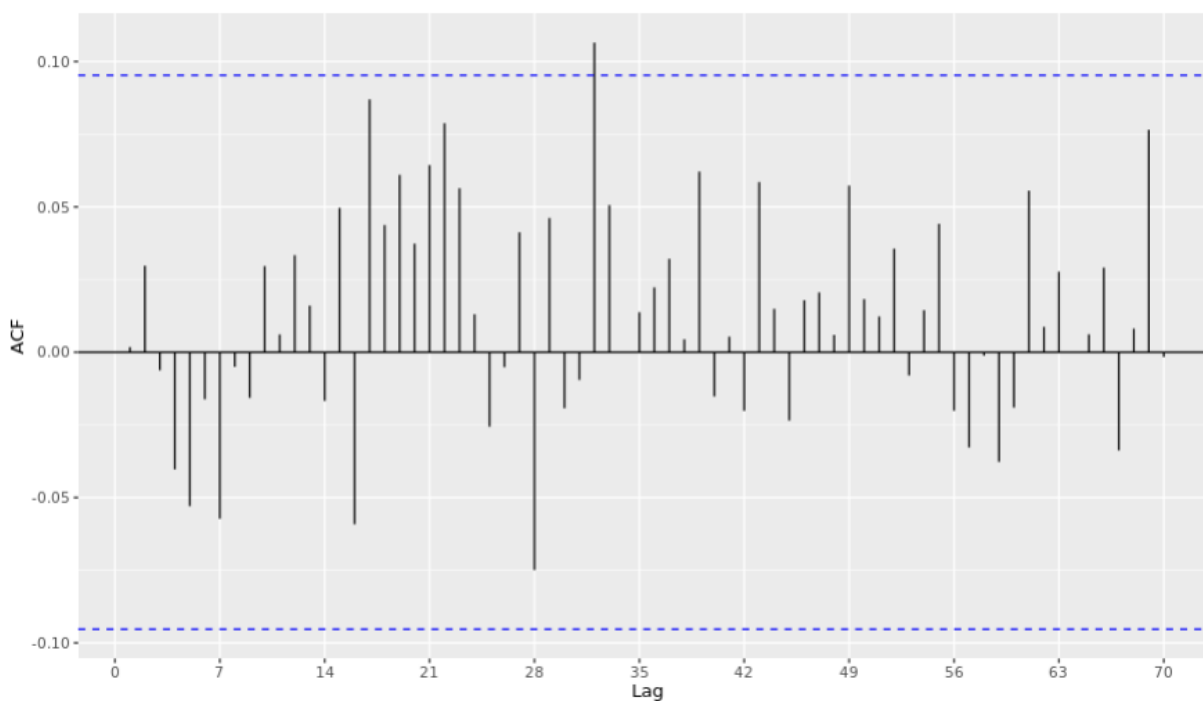
A seguir, os resíduos do referido modelo:

**Figura 25 - Gráfico de linha dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



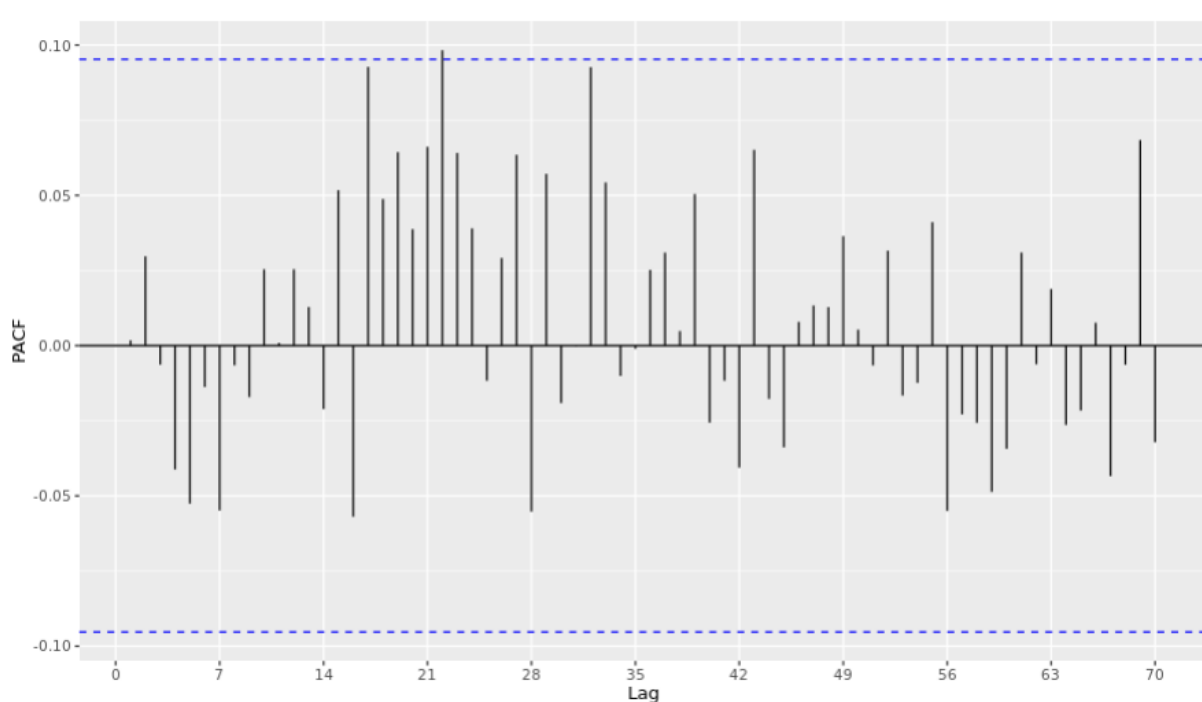
Fonte: Elaboração própria

**Figura 26 - Gráfico FAC dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

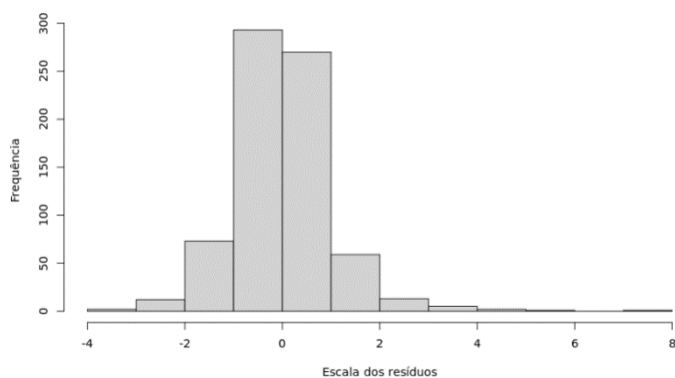
**Figura 27 - Gráfico FACP dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



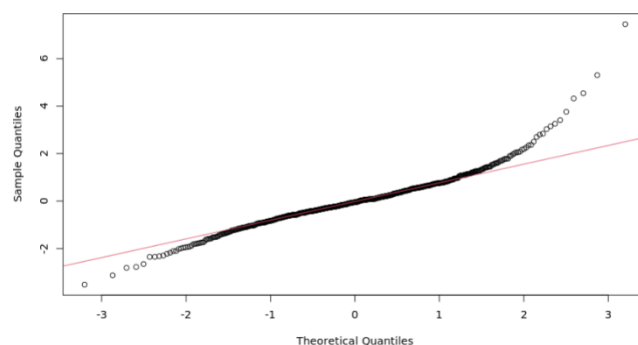
Fonte: Elaboração própria

O histograma, o gráfico Q-Q e uma representação didática dos resíduos padronizada estão representados respectivamente nas figuras a seguir:

**Figura 29 - Histograma dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**

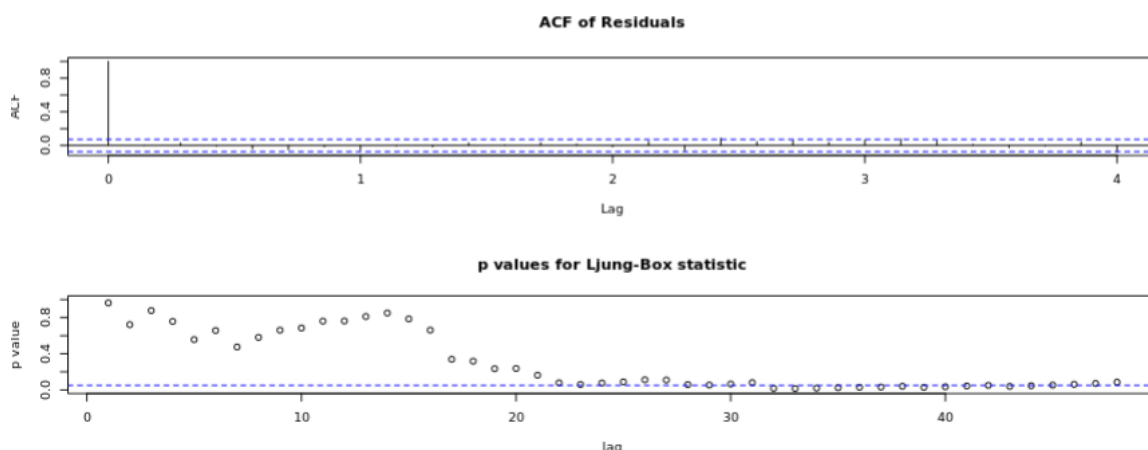


**Figura 28 - Gráfico Q-Q dos resíduos do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

**Figura 30 - Diagnóstico do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



Fonte: Elaboração própria

Por fim, os testes de normalidade de Anderson-Darling e Shapiro-Wilk do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]:

**Tabela 7 - Teste de normalidade de Shapiro-Wilk para Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**

Teste estatístico	P-valor
W = 0.93153	< 2.2e-16

**Tabela 8 - Teste de normalidade de Anderson-Darling do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**

Teste estatístico	P-valor
A = 7.651	A = 12.403

### 2.2.2.3 Conclusões sobre os modelos

Com base na análise dos modelos *SARIMA*, concluímos que ambos os modelos são adequados para a etapa de previsão. Os modelos exibem coeficientes estatisticamente significativos e invertíveis, o que sugere que as relações identificadas entre as variáveis são robustas e não são o resultado de especificações espúrias. A invertibilidade dos modelos implica que os choques temporários têm apenas um impacto transitório, retornando ao equilíbrio de longo prazo.

Apesar de os resíduos não aderirem estritamente a uma distribuição gaussiana, eles exibem características de um ruído branco. Isso é uma indicação crucial de que

os modelos são capazes de extrair toda a informação disponível nos dados, e que os resíduos não contêm padrões previsíveis que poderiam ser explorados para melhorar as previsões.

Essas características sugerem que os modelos são capazes de capturar adequadamente os padrões e tendências inerentes aos dados, tornando-os confiáveis para a realização de previsões futuras. Isso implica que podemos empregar esses modelos para gerar previsões precisas e confiáveis sobre o comportamento futuro das variáveis em estudo. No entanto, é imperativo lembrar que todas as previsões estão sujeitas a incertezas inerentes e, portanto, devem ser interpretadas com a devida cautela.

### 2.2.3 Previsão

Serão geradas, de início, previsões para ambos os modelos. Em seguida, serão calculadas métricas de precisão para as previsões de ambos os modelos durante o período amostral, comparando as previsões com os valores reais.

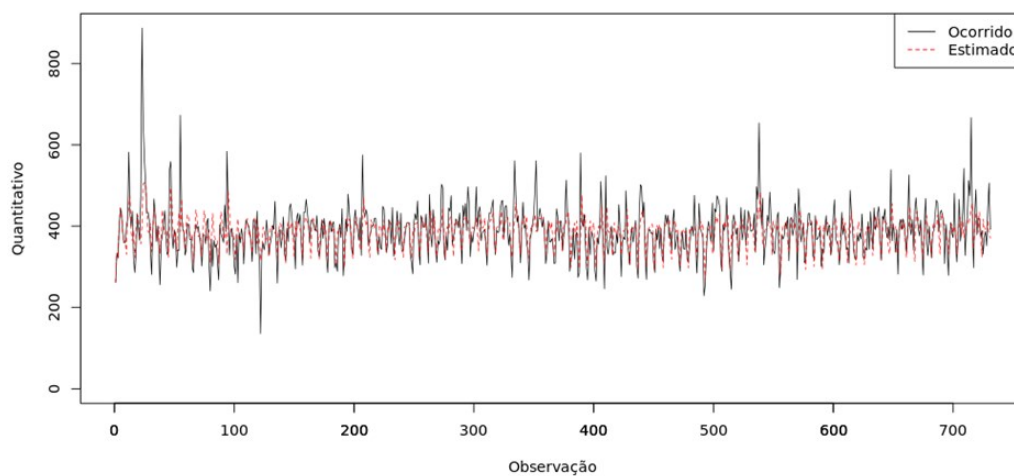
As métricas para o período amostral constam da Tabela 9:

**Tabela 9 - Métricas de erros dos modelos para o período de teste**

	Modelo 1 <i>SARIMA(1,0,0)(0,1,1)[7]</i>	Modelo 2 <i>SARIMA(0,1,2)(0,1,1)[7]</i>
<b>ME</b>	0,4947	-4,4166
<b>RMSE</b>	53,3528	57,4866
<b>MAE</b>	36,3098	40,7437
<b>MPE</b>	-1,5651	-2,7406
<b>MAPE</b>	9,4177	10,6673

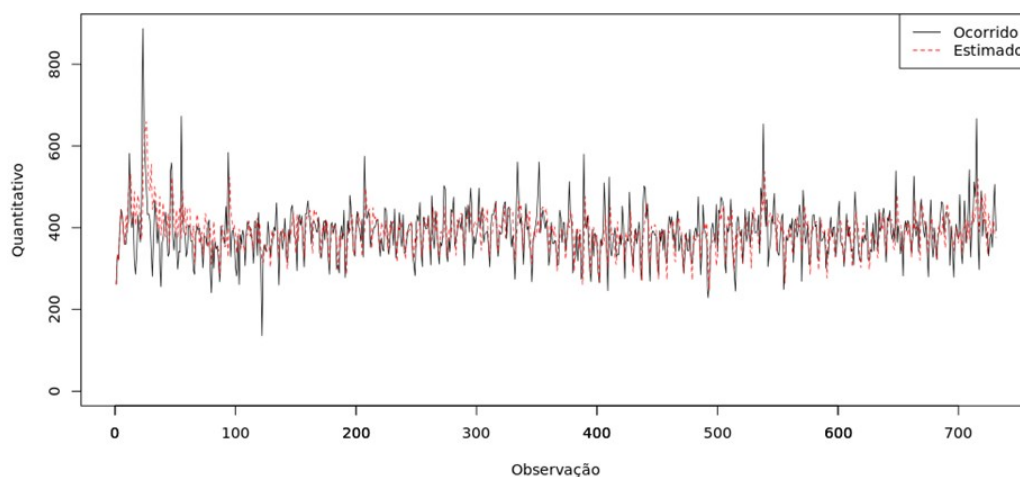
Os gráficos para o período amostral são representados a seguir:

**Figura 31 - Previsões para período de treino do Modelo 1 - SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]**



**Fonte: Elaboração própria**

**Figura 32 - Previsões para o período de treino do Modelo 2 - SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]**



**Fonte: Elaboração própria**

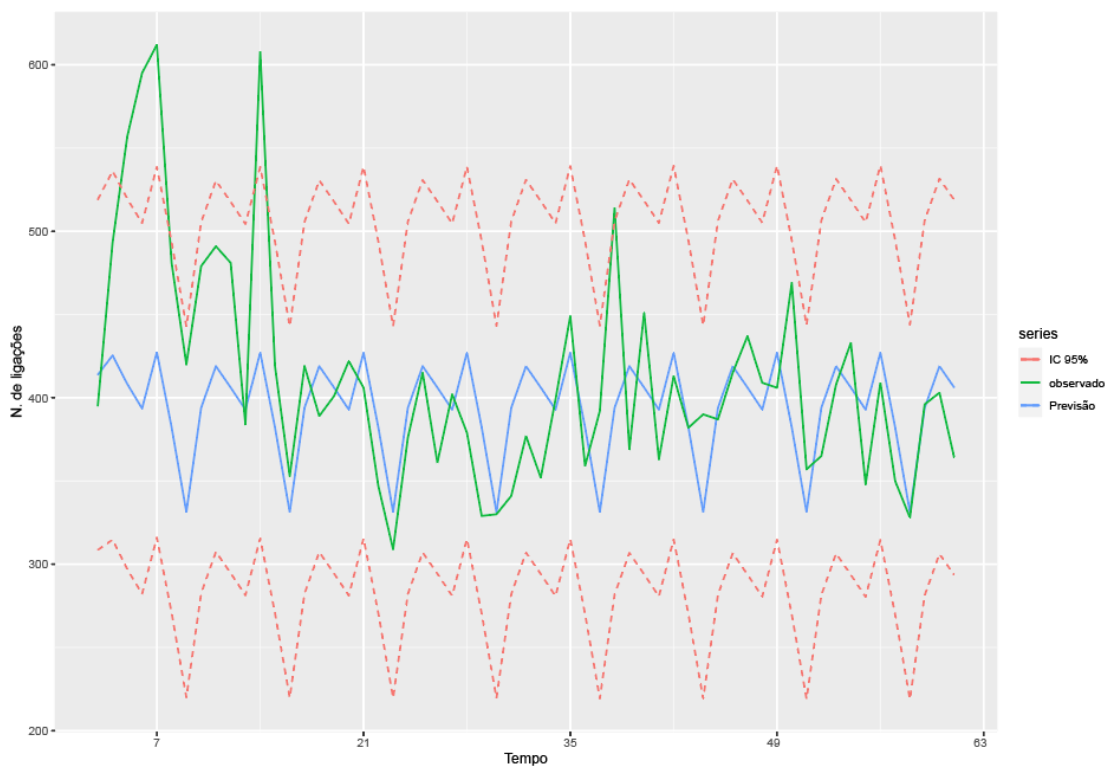
Posteriormente, as métricas semelhantes são calculadas para o período de validação, onde as previsões são comparadas com valores reais diferentes. O horizonte de previsão é de 59 dias e tem um nível de confiança de 95%. Os resultados constam da Tabela 10:

**Tabela 10 - Métricas de erros dos modelos para o período de validação**

	Modelo 1 <i>SARIMA (1,0,0)(0,1,1)[7]</i>	Modelo 2 <i>SARIMA (0,1,2)(0,1,1)[7]</i>
<b>ME</b>	17,2958776	-22,7220151
<b>RMSE</b>	63,3675479	68,6655454
<b>MAE</b>	44,590557	58,0974368
<b>MPE</b>	2,4812624	-7,5651840
<b>MAPE</b>	9,9823436	14,1974938

Os gráficos para o período de validação dos Modelos 1 e 2 constam das figuras a seguir:

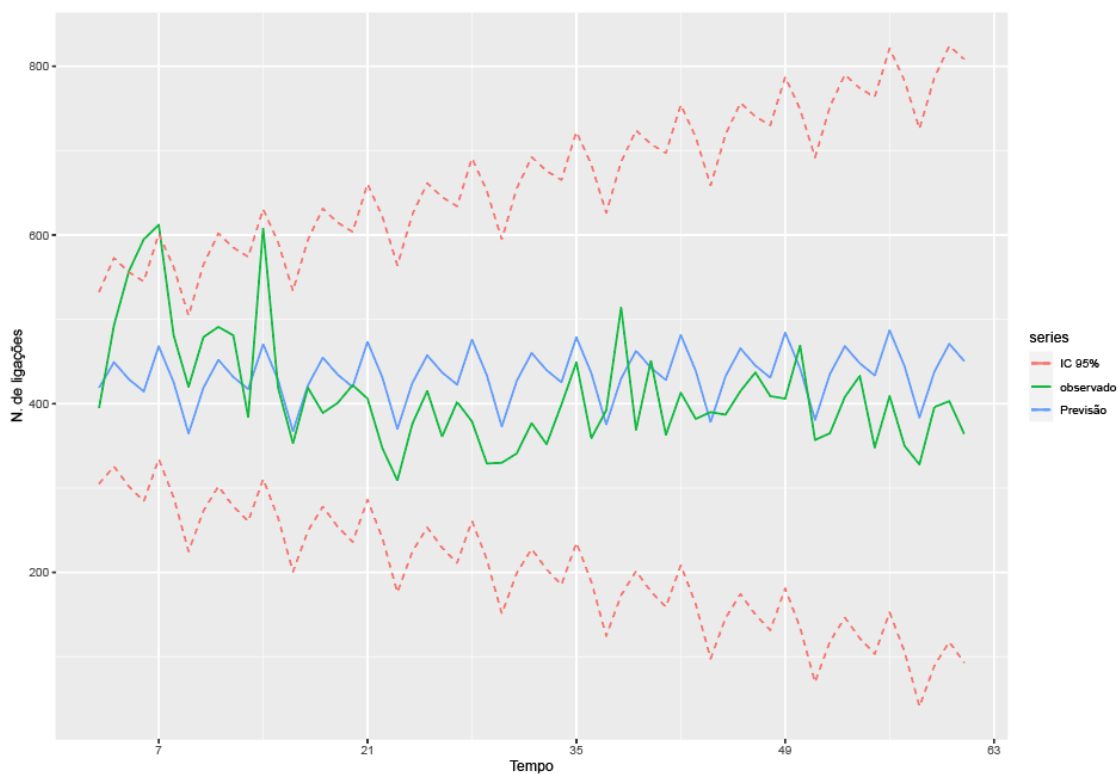
**Figura 33 - Previsão para o período de validação dos Modelos 1 - *SARIMA(1,0,0)(0,1,1)[7]***



Fonte: Elaboração própria

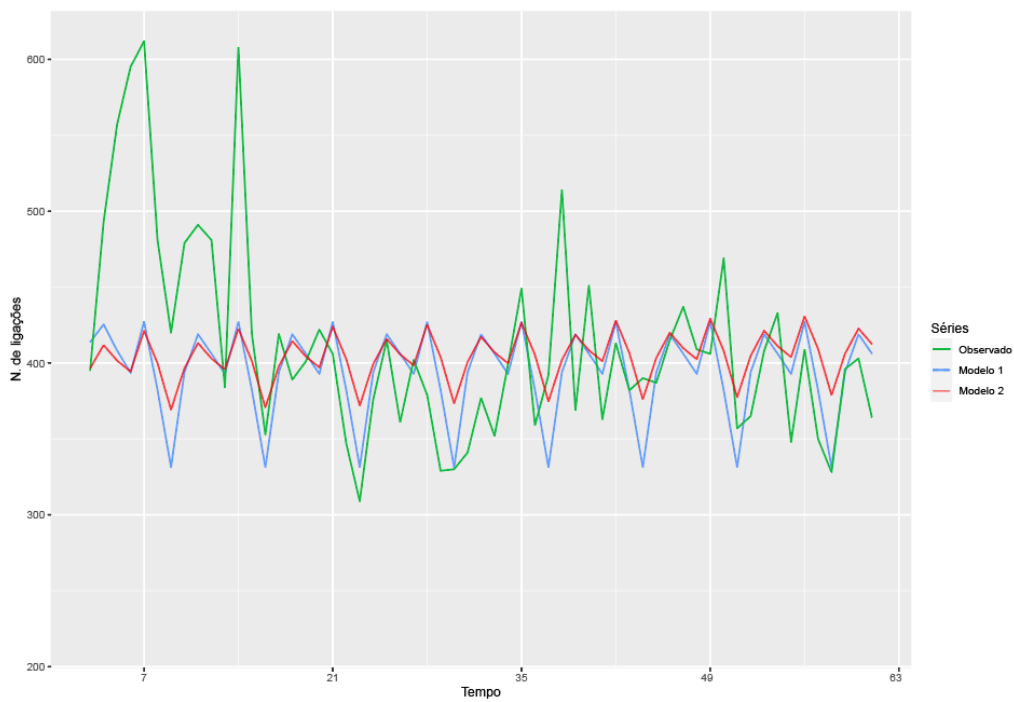


**Figura 34 - Previsão para o período de validação do Modelo 2 - SARIMA(0,1,2)(0,1,1)[7]**



**Fonte: Elaboração própria**

**Figura 35 - Comparação de previsão dos Modelos 1 e 2**



A escolha entre o Modelo 1 e o Modelo 2 para a modelagem de séries temporais de ligações para centrais de emergência deve ser baseada em uma análise criteriosa das métricas de avaliação de desempenho.

Ao tomar essa decisão, é essencial ter em mente que o principal objetivo é encontrar um modelo que seja capaz de fazer previsões mais precisas. Nesse contexto, optou-se por escolher o modelo apresenta menor erro na maioria das medidas, com foco especial no *MAPE*, dadas sua capacidade de interpretação direta e importância da precisão relativa.

O menor *MAPE* do Modelo 1 (9,98%) ante o Modelo 2 (14,20%) tem, em si, vantagens implícitas. Afinal, o ideal seria o modelo que produza resultados mais próximos da realidade. Assim, do ponto de vista estatístico, o Modelo 1 seria o eleito.

Contudo, em um contexto de política pública de saúde, o Modelo 2 pode apresentar maior utilidade. Previsões mais precisas são críticas, afinal, são importantes para garantir que os recursos adequados estejam disponíveis quando necessários: a central de emergência pode melhorar o tempo de resposta aos incidentes – e a alocação rápida de recursos (socorristas, policiais, veículos etc.) pode salvar vidas e reduzir o impacto de desastres.

Assim, em que pese a possível alocação excessiva em determinadas datas, é necessário notar que se trata de um setor crítico de prestação de serviço à comunidade.

A tabela a seguir auxilia na visualização do raciocínio:

**Tabela 11 - Comparação das previsões dos modelos ante os valores observados**

	Previsões abaixo do observado	Previsões acima do observado
<b>Modelo 1</b>	27	32
<b>Modelo 2</b>	16	43

Note-se que, a despeito das métricas sistematicamente piores, o Modelo 2, nas respectivas datas, previu acima do observado mais vezes do que o Modelo 1 e, ao mesmo tempo, previu abaixo do que o observado menos do que o Modelo 1.

Ao cabo, a conclusão sobre qual seria o melhor modelo é relativa: do ponto de vista meramente estatístico, tem-se o Modelo 1 - *SARIMA* (1,0,0)(0,1,1)[7]; em termos de políticas públicas, um gestor atento provavelmente se apropriaria do Modelo 2 - *SARIMA* (0,1,2)(0,1,1)[7], visto que, em uma situação prática, é dizer que, com o

Modelo 2, as chances de faltarem recursos para a prestação de serviço à comunidade é menor.

### 3 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo prever o número de ligações diárias para o serviço de emergência em Baltimore, utilizando a metodologia de Box-Jenkins para modelagem e previsão de séries temporais. Foram utilizados dados de 2015 a 2021, com um período de teste de 2016 a 2017 e um período de previsão de 59 dias em 2018. O primeiro passo foi aglutinar o total de ligações por dia e apenas pelo seu gênero.

A metodologia de Box-Jenkins é composta por três fases principais: identificação, estimação e diagnóstico.

A análise exploratória dos dados revelou a presença de um componente sazonal de ordem 7, sugerindo a necessidade de ao menos uma diferenciação. Somando-se a isso o comportamento dos gráficos FAC e FACP, foram propostas duas propostas de atuação: aplicar apenas uma diferenciação sazonal (cuja análise foi denominada de Modelo 1) e, em adição a esta diferenciação sazonal, também submeter a série recém-diferenciada sazonalmente a uma diferenciação não-sazonal (denominada Modelo 2).

Após à diferenciação sazonal, e face ao gráficos de FAC e FACP, optou-se que o Modelo 1 obedecesse aos hiperparâmetros  $(1,0,0)(0,1,1)[7]$ . Adicionando a diferenciação não-sazonal, o Modelo 2 foi estabelecido como  $(1,0,0)(0,1,2)[7]$  pelas mesmas razões.

Ambos os modelos cumpriram os requisitos de significância dos coeficientes e, embora os resíduos gerados não fossem normais, seguiam a apresentação de um ruído branco, com a devida independência.

No âmbito de previsões, é importante ressaltar ambos os modelos não foram capazes de capturar a variação dos dados reais adequadamente (haja vista a disparidade entre os valores previstos e os reais). Esse diagnóstico se torna evidente ao se observar as diferenças nos valores de desvio padrão entre os conjuntos de dados utilizados para o treinamento e para a previsão. Essa disparidade pode ser atribuída a eventos externos que ocorreram e não foram documentados, como mencionado anteriormente.

Optou-se por analisar todas as métricas, selecionando aquele modelo que apresentasse menor erro na maioria das medidas, com especial foco na métrica

*MAPE*. Neste cenário, foi escolhido o Modelo 1 (*SARIMA* (1,0,0)(0,1,1)[7]) por possuir o menor *MAPE*.

Contudo, é necessário ponderar que, em um cenário real, em que a série fosse efetivamente utilizada em produção pelo setor público para prever, por exemplo, a disponibilidade de operadores e ou ativos para resposta a incidentes, o Modelo 2 (*SARIMA* (0,1,2)(0,1,1)[7]) poderia ser mais adequado, visto que, a despeito da pior performance, previu acima do observado mais vezes do que o Modelo 1 e, ao mesmo tempo, previu abaixo do que o observado menos do que o Modelo 1.

No limite, é dizer que, ao melhor superestimar as demandas (sem renunciar à parcimônia), as chances de faltarem recursos para a prestação de serviço à comunidade se torna menor.

É necessário pontuar que há um território não explorado no âmbito deste trabalho, qual seja, os métodos modernos de previsão de séries temporais - os quais têm se valido dos avanços em técnicas de aprendizado de máquina e inteligência artificial. Isto porque essas abordagens têm se mostrado promissoras para melhorar a precisão das previsões e lidar com a complexidade dos dados de séries temporais

Uma das principais técnicas modernas é o uso de modelos de aprendizado de máquina, como redes neurais artificiais. Esses modelos são capazes de capturar padrões complexos nos dados de séries temporais, permitindo a incorporação de dependências de longo prazo e relações não lineares. As redes neurais recorrentes (*RNNs*), em particular, são adequadas para modelar a dependência temporal em sequências de dados e têm sido aplicadas com sucesso em previsão de séries temporais. (LIPTON, KALE, *et al.*, 2015) (CHEN, LIU e ZHANG, 2018).

Além disso, os métodos modernos de previsão de séries temporais também incluem técnicas de agregação e combinação de modelos, como a média ponderada de previsões de vários modelos, o uso de métodos de ensemble e a combinação de modelos hierárquicos. Essas abordagens visam aproveitar a diversidade dos modelos para obter previsões mais precisas e robustas. (MONTERO-MANSO, BANDYOPADHYAY e ALONSO-JIMÉNEZ, 2019)

Outra tendência recente é a aplicação de técnicas de aprendizado de máquina baseadas em séries temporais irregulares e desiguais, onde os dados de séries temporais não estão uniformemente espaçados no tempo. Esses métodos permitem lidar com séries temporais que apresentam lacunas, valores ausentes ou amostragem

desigual, sendo especialmente relevantes em aplicações de saúde, finanças e Internet das Coisas. (CHEN, CAO e LU, 2021) (ZHU, SONG e CHEN, 2021).

## REFERÊNCIAS

- ANTHONY, T. et al. The Feasibility of Using Machine Learning to Classify Calls to South African Emergency Dispatch Centres According to Prehospital Diagnosis, by Utilising Caller Descriptions of the Incident. **Healthcare**, 9, n. 9, aug 2021. 1107. Disponivel em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/34574881/>>.
- BOX, G. E.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. [S.l.]: Holden-Day, 1970.
- CHEN, C.; CAO, J.; LU, X. Deep learning models for irregular and asynchronous time series forecasting: A comprehensive review. **Information Fusion**, 70, 2021. 16-31.
- CHEN, C.; LIU, L.; ZHANG, Y. **Deep learning based on long short-term memory network for financial time series forecasting**. 2018 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). [S.l.]: IEEE. 2018. p. 2733-2740.
- CRYER, J.; CHAN, K.-S. **Time series analysis: with applications in**
- FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. **Manual de análise de dados**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.
- GREENE, W. H. **Econometric Analysis**. [S.l.]: Pearson, 2012.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria básica**. 5. ed. Porto Alegre: Grupo A - AMGH, 2011. OCLC: 880434695.
- HYNDMAN, R. J. Plotting the characteristic roots for ARIMA models. **Rob J Hyndman Blog**, jul 2014. Disponivel em: <<https://robjhyndman.com/hyndsight/arma-roots/>>. Acesso em: 12 maio 2023.
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. **Forecasting: Principles and Practice**. 3. ed. [S.l.]: OTexts, 2023. Disponivel em: <<https://otexts.com/fpp3/>>.
- HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. **International Journal of Forecasting**, 22, n. 4, oct 2006. 679-688.
- LAZUKO, A. et al. **Reduce Emergency Response time using Machine learning Technique**. 2023 International Conference on Communication Technologies ComTech. [S.l.]: [s.n.]. 2023. p. 48-52.
- LIPTON, Z. C. et al. Learning to diagnose with LSTM recurrent neural networks. **arXiv preprint arXiv:1511.03677**, 2015.
- MONTERO-MANSO, P.; BANDYOPADHYAY, S.; ALONSO-JIMÉNEZ, J. A. Hierarchical time series forecasting with composite models. **International Journal of Forecasting**, 35, n. 2, 2019. 587-601.
- MONTGOMERY, D. C.; JENNINGS, C. L.; KULAHCI, M. **Introduction to time series analysis and forecasting**. Second edition. ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2015.

MORETTIN, P. A. **Análise de séries temporais**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006. OCLC: 1101028122.

MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2011. OCLC: 1129583552.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Edgard Blucher, 2004.

NIELSEN, A. **Practical time series analysis: prediction with statistics and machine learning**. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc, 2019.

PEIXEIRO, M. **Time series forecasting in Python**. Shelter Island, NY: Manning Publications Co, 2022.

RINK, K. Time Series Forecast Error Metrics you should know, nov 2021. Disponível em: <<https://towardsdatascience.com/time-series-forecast-error-metrics-you-should-know-cc88b8c67f27>>. An overview and introduction to the most common error metrics.

WOOLDRIDGE, J. M. **Introductory Econometrics: A Modern Approach**. [S.l.]: Cengage Learning, 2015.

ZHU, Y.; SONG, H.; CHEN, Y. Deep learning with irregularly sampled time series in health applications: A review. **Information Fusion**, 70, 2021. 133-147.