

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

**Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas**

**Programa de Pós-graduação em Filosofia**

MAYRA MOREIRA DA COSTA

**MODELOS CAUSAIS E FENÔMENOS QUÂNTICOS**

Belo Horizonte

2023

MAYRA MOREIRA DA COSTA

## **MODELOS CAUSAIS E FENÔMENOS QUÂNTICOS**

Texto apresentado como requisito para obtenção do título de Doutora junto ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Minas Gerais.

Linha de pesquisa: Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Maria Kauark Leite

Belo Horizonte

2023

100	Costa, Mayra Moreira da.
C837m	Modelos causais e fenômenos quânticos [manuscrito] /
2023	Mayra Moreira da Costa. - 2023.
	150 f. : il.
	Orientadora: Patrícia Maria Kauark Leite.
	Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.
	Inclui bibliografia.
	1. Filosofia – Teses. 2. Tempo - Teses. 3. Física – Filosofia - Teses. I. Leite, Patrícia Maria Kauark. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por Vilma Carvalho de Souza - Bibliotecária - CRB-6/1390



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

## FOLHA DE APROVAÇÃO

### Modelos Causais e Fenômenos Quânticos

**MAYRA MOREIRA DA COSTA**

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Aprovada em 30 de maio de 2023, pela banca constituída pelos membros:

Profa. Patrícia Maria Kauark Leite - Orientadora (UFMG)

Prof. Osvaldo Frota Pessoa Júnior (USP)

Prof. Romeu Rossi Júnior (UFV)

Prof. Guilherme Araújo Cardoso (UFOP)

Prof. Emiliano Boccardi (UFOP)

Belo Horizonte, 30 de maio de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **Patricia Maria Kauark Leite, Professora do Magistério Superior**, em 02/06/2023, às 09:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Araújo Cardoso, Usuário Externo**, em 02/06/2023, às 15:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Emiliano Boccardi, Usuário Externo**, em 02/06/2023, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Osvaldo Frota Pessoa Junior, Usuário Externo**, em 02/06/2023, às 23:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Romeu Rossi Junior, Usuário Externo**, em 03/06/2023, às 09:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2341761** e o código CRC **E6BA9368**.

*Ao povo de Ouro Preto e todos os Orixás.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Patrícia Kauark Leite, pelo excelente acompanhamento do meu trabalho durante esses anos. Além de agradecer o fato de ter proporcionado um grande avanço e garantido um melhor direcionamento da minha pesquisa, agradeço principalmente pelo belo exemplo de conduta como acadêmica e por ter sido uma luz no meu caminho.

Agradeço à minha mãe, Cida Moreira, por ter auxiliado a mim e a tantas outras pessoas durante os seus momentos mais difíceis. Independente do que me ocorra, sempre poderei me considerar como uma pessoa de sorte, por ser filha de um tipo de pessoa tão raro como o dela.

Aos meus amigos Marília, Fernanda e Jackson, pela companhia, parceria e compreensão durante todos esses anos.

Agradeço ao Prof. Dr. Osvaldo Pessoa Junior por ter aceitado participar desta banca de defesa e pelo acompanhamento do meu trabalho desde sua fase inicial, pelos diversos ensinamentos, revisões e questionamentos. Agradeço também pela revisão da versão anterior desta tese apresentada para o exame de qualificação. Ela contribuiu muito para a escrita da versão final, sobretudo no que se refere ao acréscimo de uma introdução à estatística.

Agradeço ao Prof. Dr. Emiliano Boccardi por ter aceitado participar desta banca de defesa, pelo cordial interesse no meu trabalho e pela agradável interação acadêmica, tornando minha atual trajetória um tanto mais leve.

Agradeço ao Prof. Dr. Romeu Rossi por ter aceitado participar desta banca de defesa e pela excelente troca durante as reuniões do Grupo de Estudos em Filosofia da Mecânica Quântica da UFMG. Agradeço especialmente por ter me atualizado sobre temas diretamente relacionados à minha pesquisa do ponto de vista do que vinha sendo estudado nos departamentos de física. Isto foi certamente responsável por grande parte da reestruturação da minha pesquisa.

Agradeço ao Prof. Dr. Guilherme por ter aceitado participar desta banca de defesa e pelo exemplo de exatidão acadêmica, seja como colega, seja como professor ou como pesquisador. Agradeço ainda pelo empenho, entusiasmo e incentivo ao desenvolvimento de pesquisas de ponta realizadas por filósofas e filósofos brasileiros nas áreas de lógica e filosofia analítica.

Agradeço a pessoa que revisou anonimamente o projeto definitivo desta tese, sobretudo pela sugestão de acréscimo das obras russellianas.

Agradeço ao Prof. Dr. Olival Freire por ter gentilmente aceitado participar do exame de qualificação desta tese, pela ótima revisão e pelos importantes comentários feitos na ocasião. Agradeço especialmente pelo incentivo a uma defesa mais ousada das minhas ideias.

Agradeço à Dra. Katja Ried pela revisão cuidadosa do manuscrito prévio à versão atual do terceiro capítulo desta tese e pela entusiasmada e acolhedora recepção do meu trabalho.

Agradeço ao professor Dr. Giuliano Torrenço por ter-me recebido com gentil hospitalidade durante minha visita ao *Centre for Philosophy of Time* da Universidade de Milão, onde tive a oportunidade de conhecer excelentes pesquisas atuais relacionadas ao meu trabalho e à metafísica do tempo em geral. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo fomento que possibilitou tal estágio.

Agradeço ao professor Dr. Claudio Calosi pelo caloroso acolhimento durante minha estadia na Universidade de Genebra e participação no projeto *The Metaphysics of Quantum Objects*, durante a qual eu pude conhecer e interagir com grandes pesquisadores na área de filosofia da física e metafísica formal, diretamente relacionadas ao tema desta pesquisa. Agradeço à Fundação Blaumann pelo fomento que possibilitou a visita.

Agradeço aos meus colegas do departamento de filosofia da UFMG, especialmente àqueles que lutaram pelos direitos dos alunos e por ações efetivas de inclusão. Agradeço aos professores que também estiveram ao nosso lado. Agradeço também aos alunos do departamento de física da UFMG e UFOP com os quais tive a oportunidade de dialogar durante todos esses anos, principalmente através dos encontros promovidos pelo Grupo de Estudos em Filosofia da Física Quântica na UFMG, e também através do saudoso Grupo de Estudos Online em Filosofia da Física (GEOFF) da UFOP. Agradeço especialmente ao Dr. Davi Barros, que além de ter-se tornado um amigo, contribuiu sobremaneira para o desenvolvimento deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer e dedicar esta tese à memória do Dr. Flávio Cassino, pelo grande exemplo de vida e docência, e, particularmente, por ter acreditado na minha capacidade, ter-me ajudado durante meus estudos iniciais de teorias físicas e, acima de tudo, por ter-me aconselhado a sonhar com o melhor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Para estufar esse filó  
Como eu sonhei  
Só se eu fosse o Rei  
Para tirar efeito igual ao jogador  
Qual compositor  
Para aplicar uma firula exata  
Que pintor  
Para emplacar em que pinacoteca, nega  
Pintura mais fundamental  
Que um chute a gol  
Com precisão  
De flecha e folha seca

Parafusar algum João  
Na lateral  
Não  
Quando é fatal  
Para avisar a finta enfim  
Quando não é  
Sim  
No contrapé

Para avançar na vaga geometria, o corredor  
Na paralela do impossível, minha nega  
No sentimento diagonal  
Do homem-gol  
Rasgando o chão  
E costurando a linha

Parábola do homem comum  
Roçando o céu  
Um senhor chapéu  
Para delírio das gerais no coliseu  
Mas que rei sou  
Para anular a natural catimba do cantor  
Paralisando esta canção capenga, nega  
Para captar o visual  
De um chute a gol  
E a emoção  
Da ideia quando ginga

Para Mané  
Para Didi, para Mané  
Para Didi, para Mané  
Para Didi, para Pagão  
Para Pelé e Canhoteiro

(*O futebol*, Chico Buarque)

## RESUMO

Nesta tese, a partir de uma análise da famosa crítica de Bertrand Russell à noção de causalidade, defendo o esboço de um modelo causal aplicável ao domínio indeterminístico da física quântica. Para fundamentar esse modelo, proponho uma generalização do Princípio de Causa Comum (*PCC*) de Hans Reichenbach e uma reformulação do seu Critério de Transmissão de Marca (*CTM*), conjuntamente com uma reformulação da Bifurcação Causal Interativa (*BCI*) de Wesley Salmon e da sua teoria dos processos causais. A Bifurcação Causal Conjuntiva (*BCC*) de Reichenbach será mantida para a explicação dos fenômenos clássicos, residindo na diferença entre os dois tipos de bifurcação causal uma das chaves para compreendermos a distinção entre probabilidade e causalidade na física clássica e na física quântica. Ofereço também uma introdução à estatística e modelos causais clássicos, e defendo a importância de uma definição mais precisa do conceito de determinismo, bem como sua não equivalência com a noção de causalidade.

**Palavras-chave:** inferência causal estatística; modelos causais quânticos; princípio de causa comum; critério de transmissão de marca; bifurcações causais; teorias causais do tempo.

## ABSTRACT

In this doctoral thesis, starting from an analysis of Bertrand Russell's famous critique of the notion of causality, I argue for the outline of a causal model applicable to the indeterministic domain of quantum physics. To support this model, I propose a generalization of Hans Reichenbach's Principle of Common Cause (PCC) and a reformulation of his Mark Transmission Criterion (CTM), along with a reformulation of Wesley Salmon's Interactive Causal Fork (ICF) and his theory of causal processes. Reichenbach's Conjunctive Causal Fork (CCF) will be maintained to explain classical phenomena. The difference between the two kinds of causal fork will be considered one of the keys to understanding the distinction between probability and causality in classical and quantum physics. I also provide an introduction to classical statistical and classical causal modeling, and argue for the importance of a more precise definition of the concept of determinism, as well as its non-equivalence with the notion of causality.

**Keywords:** statistical causal inference; quantum causal models; common cause principle; mark transmission criteria; causal forks; causal theories of time.

## SUMÁRIO

Introdução.....	13
Capítulo 1: O lugar da causalidade nas ciências.....	15
1.1. Observações preliminares.....	15
1.2. A crítica de Russell à noção de causalidade.....	16
1.2.1. Determinismo causal.....	17
1.2.2. A redução probabilística de Suppes.....	27
1.3. A demonstração de Cartwright.....	31
1.3.1. O paradoxo de Simpson.....	31
1.4. Considerações finais.....	39
Capítulo 2: Modelos causais.....	40
2.1. Observações preliminares.....	40
2.2. Modelagem causal clássica.....	41
2.2.1. Conceitos básicos de estatística clássica.....	42
2.2.2. Diagramas causais.....	89
2.3. Considerações finais.....	102
Capítulo 3: Sobre a natureza dos processos causais quânticos.....	104
3.1. Observações preliminares.....	104
3.2. O problema da aplicação da causalidade no domínio quântico.....	105
3.3. A herança humeana.....	106
3.4. A teoria da causalidade de Reichenbach e a indeterminação quântica.....	107
3.4.1. Leis causais e predições estatísticas.....	108
3.4.2. Leis de correlação inversa de distribuições probabilísticas.....	110
3.4.3. A violação do princípio de causa comum.....	112
3.4.4. A redução causal do tempo.....	114
3.5. A teoria da causalidade de Salmon e a não localidade quântica.....	117
3.5.1. Bifurcações causais interativas.....	118

3.5.2. Processos causais e transmissão de marca.....	119
3.5.3. A violação do princípio de continuidade.....	120
3.6. A teoria da causalidade de Dowe e a bidirecionalidade temporal quântica .....	123
3.6.1. A interpretação transacional da regra de Born .....	125
3.6.2. A bifurcação retrocedente de Dowe .....	126
3.6.3. Retrocausalidade, superdeterminismo e realidade do tempo .....	127
3.7. Causalidade indeterminística.....	129
3.7.1. Generalizando o princípio de causa comum.....	130
3.7.2. Uma interpretação relativística discreta do critério de transmissão de marca.....	132
3.7.3. Uma nova concepção de processo causal .....	134
3.7.4. O equívoco da contiguidade espaçotemporal .....	136
3.8. Considerações finais .....	138
Conclusões.....	140
Referências bibliográficas .....	143
Apêndice: forma canônica do argumento de <i>EPR</i> .....	148

## Introdução

O problema da aplicação da causalidade no domínio da mecânica quântica é caracterizado pela dificuldade em explicarmos causalmente determinados fenômenos preditos pelo formalismo da mecânica quântica *standard*<sup>1</sup>. Como alternativa frente ao problema, defenderei a hipótese de que o domínio da causalidade não é restrito a fenômenos clássicos e que um modelo causal indeterminístico, discreto e relacional, é uma alternativa frutífera para aplicação da causalidade a esse tipo de fenômeno quântico.

Esta tese é dividida em três capítulos. Busquei escrever cada capítulo de forma integrada aos outros, mas com a possibilidade de serem facilmente transformados em artigos independentes em uma fase posterior, sendo eles distintos, inclusive, em termos de estilo e finalidade individual.

No primeiro capítulo, apresentarei o desafio de Bertrand Russell à noção clássica de causalidade (1913), tanto no âmbito de sua utilização nas ciências quanto no âmbito filosófico, buscando evidenciar o problema do vínculo entre tal noção e a noção de determinismo. Depois disso, apresentarei a demonstração de Nancy Cartwright (1979) em defesa da noção de causalidade e contrária a redução de leis causais a leis probabilísticas, defesa essa apoiada na resolução do paradoxo estatístico de Simpson. Além disso, apresentarei alguns argumentos adicionais de Judea Pearl (2000, 2018) a favor do que ele chamou de “revolução causal” nas ciências (PEARL, 2018).

No segundo capítulo, apresentarei uma introdução aos elementos básicos de um modelo causal cientificamente relevante – desde as noções básicas de estatística clássica (como a definição clássica de probabilidade, os axiomas de Kolmogorov, a derivação do teorema de Bayes, as noções de dependência e independência condicionais, entre outras), até grafos causais, princípios fundamentais e algoritmos centrais (como a condição causal de Markov e o algoritmo de inferência causal). Meu principal objetivo nesse capítulo é fornecer uma introdução à inferência causal estatística para aqueles que não tiveram contato com estatística ou métodos formais de modelagem causal. Os tópicos introduzidos nesse capítulo também serão importantes, particularmente nesta tese, para a compreensão do problema da aplicação da causalidade no domínio quântico, tema do capítulo posterior.

---

<sup>1</sup> Considero especificamente a mecânica quântica não relativística, estabelecida a partir do início do século XX, devido principalmente aos trabalhos de Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger, Max Born, Pascual Jordan, Paul Dirac, John von Neumann, entre outras pessoas.

No terceiro capítulo, defenderei um modelo causal indeterminístico, radicalmente relacional e discreto, como solução para o problema da aplicação de modelos causais no domínio da mecânica quântica. Buscarei demonstrar como esse problema está conectado ao *Princípio de Causa Comum (PCC)*, ao contexto experimental EPR-Bohm, às violações das desigualdades de Bell e à noção clássica de processo causal. Primeiramente, apresentarei os modelos causais probabilísticos que podem ser obtidos a partir das teorias da causalidade de Hans Reichenbach (1944, 1956), Wesley Salmon (1984, 1997, 1998) e Phil Dowe (1996, 2000), buscando explicar as razões pelas quais eles não poderiam ser aplicados ao domínio da mecânica quântica. Depois disso, oferecerei uma generalização do *PCC* de Reichenbach, além de uma reformulação do seu *Critério de Transmissão de Marca (CTM)*, somada a uma reformulação da chamada *Bifurcação Causal Interativa (BCI)* de Salmon e de sua teoria dos processos causais (1984, 1997, 1998). A *Bifurcação Causal Conjuntiva (BCC)* de Reichenbach será mantida para a explicação dos fenômenos clássicos. De acordo com essa alternativa, a diferença entre os dois tipos de bifurcação causal será uma das chaves para compreendermos o problema da distinção entre probabilidade e causalidade na física clássica e na física quântica, problema esse que desde o advento da teoria quântica tem tirado o sono tanto de físicos quanto de filósofos. Essa alternativa também fornece uma solução para os paradoxos do tempo de Zenão e o equívoco da contiguidade espaço-temporal, também apresentado por Russell em seu artigo crítico à causalidade.

Devido sobretudo ao tratamento da inferência causal estatística iniciada por Hans Reichenbach e desenvolvida por filósofos e cientistas da computação contemporâneos desde a década de 80, pesquisas acerca do problema da aplicação da causalidade no domínio quântico têm recebido uma renovada atenção e modelos causais quânticos vêm sendo cogitados afim de acomodar os casos que violam as previsões dos modelos clássicos. As contribuições desta tese residem principalmente na reflexão sobre questões filosóficas fundamentais vinculadas a tais modelos, na adição de um algoritmo de redução causal do tempo e na utilização de bifurcações interativas quânticas.

## Capítulo 1: O lugar da causalidade nas ciências

The law of causality, I believe, like much that passes muster among philosophers, is a relic of a bygone age, surviving, like the monarchy, only because it is erroneously supposed to do no harm.

(Bertrand Russell, “On the notion of cause”)

### 1.1. Observações preliminares

Em seu artigo “On the notion of cause” (2003 [1913]), Bertrand Russell defendeu que a noção de causalidade não passava de uma relíquia de tempos antigos, ainda sustentada pelos filósofos da sua época pelo fato de não perceberem qual seria o problema nela envolvido. O problema, de acordo com ele, estaria em associações incorretas inextricavelmente vinculadas à noção de causalidade, de tal forma que seria desejável excluí-la *completamente* do vocabulário filosófico (2003 [1913], p. 164). Russell argumenta também nesse artigo que a noção que seria usada de fato nas ciências consistiria antes em funções probabilísticas de associação que nos permitem fazer previsões, mostrando ser ela distinta da noção de causalidade concebida pelos filósofos.

A influente filósofa contemporânea Nancy Cartwright e o premiado filósofo e cientista da computação Judea Pearl pensam, no entanto, diferente. Nancy Cartwright, em seu artigo “Causal laws and effective strategies” (1979), argumenta que não há somente leis estatísticas de associação, como defendeu Russell, mas também leis causais, ainda que estas não possam ser derivadas daquelas, concordando nesse ponto com ele. Para defender sua posição, ela recorre ao famoso paradoxo de Simpson - onde uma associação estatística verificada em uma população é reversa quando consideramos suas subpopulações - e demonstra como necessitamos de um pano de fundo causal para o solucionarmos e para traçarmos estratégias efetivas de ação no mundo. Pearl (2000, 2016, 2018) também recorre ao paradoxo de Simpson para fortalecer sua defesa da necessidade de uma estatística causal e das vantagens na utilização da noção de causalidade em diversas áreas do conhecimento, como as ciências médicas, sociais, econômicas e computacionais.

Neste capítulo, abordarei a questão sobre o lugar da noção da causalidade nas ciências a partir do desafio colocado por Russell e apresentarei o contra-argumento de Cartwright fundamentado na resolução do paradoxo de Simpson, bem como as razões adicionais indicadas por Pearl. Defenderei ainda uma saída conceitual ao desafio de Russell através da dissociação

entre a noção de causalidade e as noções de determinismo e necessidade. Desse modo, pretendo delinear um breve panorama geral do problema do uso da noção de causalidade nas ciências, pontuando alguns tópicos de importância central para o problema mais específico da aplicação da noção de causalidade a fenômenos quânticos, que será tratado mais diretamente a partir dos capítulos seguintes.

## 1.2. A crítica de Russell à noção de causalidade

Bertrand Russell é certamente um dos pensadores mais influentes da nossa época. Muitos dos tópicos de discussões filosóficas atuais de grande relevância, sobretudo os da chamada tradição analítica, foram gerados a partir do seu trabalho ou receberam dele alguma contribuição. Um desses tópicos diz respeito à sua famosa crítica ao uso da noção de causalidade, apresentada no artigo “*On the notion of cause*”, de 1913<sup>2</sup>, em ocasião do seu discurso presidencial na *Aristotelian Society* de Londres. Nesse artigo, Russell defende que a noção de causa deve ser condenada ao ostracismo filosófico por andar sempre na má companhia de associações equivocadas. Tal ostracismo, segundo o filósofo, já teria ocorrido há um bom tempo no domínio do discurso científico das ciências avançadas, onde se pode verificar que a palavra ‘causa’ deixou de ser utilizada pelo simples fato de não existirem causas: “a razão para os físicos terem parado de procurar por causas é porque de fato não há tais coisas” (RUSSELL, 2003 [1913], p. 165, tradução nossa).

A noção clássica de causalidade considerada por Russell, vinculada às noções equivocadas apresentadas por ele, parece de fato não ser usada nas ciências, e há razões para questionarmos seu uso de modo geral. Neste ponto concordo integralmente com ele: a noção clássica de causalidade é bastante questionável. Ainda assim, podemos defender que esse vínculo entre causalidade e tais noções equivocadas não é inextricável como ele defendeu e que o problema reside somente com a *noção clássica de causalidade* ao se conectar com as noções de determinismo, necessidade e contiguidade. Desse modo, se defendermos uma noção de causalidade não vinculada a essas outras noções, não teremos problemas com a crítica de Russell.

---

<sup>2</sup> Vale notar que em *Human Knowledge: Its Scope and Limits* (1948), Russell oferece ideias que originam as chamadas teorias processuais da causalidade, apresentando uma visão distinta da de 1913 em relação ao lugar da causalidade na ciência: “O poder da ciência é a sua descoberta de leis causais” (tradução livre, p. 308).

Os principais equívocos atados à noção clássica de causalidade<sup>3</sup>, apontados por Russell, e que foram cometidos pelos filósofos clássicos (e também por grande parte dos filósofos e físicos contemporâneos que ainda adotam ou pressupõem a noção clássica de causalidade), conectar-se-ão diretamente à minha defesa de um modelo causal alternativo e, por isso, virão a ser abordados várias vezes ao longo desta tese. De acordo com a minha interpretação, esses equívocos mostram que há algo de errado com a noção *clássica* de causalidade, e, por isso, abrem espaço para uma necessária revisão dessa noção. É preciso a meu ver oferecer uma definição de causalidade que seja imune à crítica russelliana, isto é, uma definição que não recaia nos equívocos apontados por ele.

Os equívocos da noção clássica de causalidade, apontados por Russell, que serão trabalhados nesta tese, são os seguintes:

- (1º) o equívoco relativo à noção modal da causalidade;
- (2º) o equívoco da assimetria do determinismo; e
- (3º) o equívoco da contiguidade espaço-temporal entre a causa e efeito.

Neste texto, abordarei mais especificamente o problema colocado pelo primeiro equívoco, o equívoco relativo à noção modal da causalidade, que nomearei simplesmente como equívoco modal da causalidade. O equívoco da assimetria do determinismo será apresentado aqui, mas uma tentativa de resposta mais completa a ele e aos seus problemas correlatos será desenvolvida no terceiro capítulo. Já o equívoco da contiguidade espaço-temporal entre causa e efeito será abordado somente no terceiro capítulo.

### *1.2.1. Determinismo causal*

Para compreender tais equívocos, precisaremos antes nos debruçar sobre a noção de *determinismo causal*. A usual conexão entre a noção de causalidade e as noções de *determinismo*, *predição* e *necessidade* é o que comumente concebemos como *determinismo causal*. Essa noção está diretamente conectada à concepção de causalidade como essencialmente determinística. De acordo com o verbete de Carl Hoefer, da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, o determinismo causal é assim definido:

---

<sup>3</sup> Além das definições do dicionário de Baldwin, Russell considera também as noções de causalidade de Stuart Mill (1882) e Henri Bergson (1889). Os escritores dos verbetes do dicionário, por sua vez, recorreram a diversos filósofos.

Determinismo causal: “é, *grosso modo*, a ideia de que todo evento é *necessitado* por eventos e condições *anteriores* em conjunto com as *leis da natureza*.” (HOEFER, 2016, tradução nossa, grifo nosso).

Para elucidarmos a noção de determinismo causal e explicarmos o problema a ela associado, será interessante focarmos antes em cada uma dessas noções: determinismo, predição e necessidade. Iniciarei com a noção de determinismo que me levará diretamente à elucidação das noções de necessidade e de predição que costumam ser conectadas à causalidade.

A noção de determinismo difere entre filósofos e também entre cientistas e, muitas vezes, é apenas pressuposta ou utilizada propositalmente de forma vaga. Ainda que em alguns trabalhos tal vagueza ou omissão sejam perfeitamente aceitáveis, o foco sobre a questão de saber o que concebemos como determinismo parece indispensável para analisarmos de forma cuidadosa os problemas filosóficos relacionados a essa noção e para evitarmos um debate em que um conceito em comum é considerado sob diferentes acepções pelos seus interlocutores e essa distinção não é claramente elucidada. Esse tipo de problema é muito comum em discussões onde o conceito de determinismo está presente. Apresentarei aqui as principais acepções de determinismo relacionadas ao problema central desta tese, tendo como pano de fundo a crítica de Russell à causalidade.

Para iniciar, recorrerei novamente ao verbete sobre a noção de determinismo causal de Hoefler, onde determinismo é propositalmente definido de forma aberta e abrangente do seguinte modo:

Determinismo: “O mundo é governado pelo (ou está sob a influência do) determinismo se e somente se, dado um modo específico em que as coisas são em um tempo *t*, o modo que as coisas se darão *depois* é *fixado* como uma matéria de *lei natural*.” (HOEFER, 2016, tradução nossa, grifo nosso).

Essa definição será bastante útil para o esclarecimento da noção de determinismo que oferecerei, pois traz consigo elementos básicos para a distinção entre três formas concebíveis de determinismo que serão relevantes neste trabalho:

- a) o determinismo modal,
- b) o determinismo temporalmente direcionado e
- c) o determinismo nomológico.

O determinismo modal conecta-se à noção de *necessidade*, o determinismo temporalmente direcionado à noção de que *eventos posteriores são dados a partir de eventos anteriores* e o determinismo nomológico à noção de *evolução funcional probabilística regida por leis de associação*<sup>4</sup>. Para Russell, somente o último tipo é verificável e utilizado de fato nas ciências, enquanto os outros dois não estão conectados intimamente à noção de causalidade.

Pode-se tanto defender, como Hofer, uma noção de determinismo conectada a cada uma dessas noções – a de necessidade, a de evolução temporal direcionada e a de função nomológica probabilística –, como também conceber um determinismo que se conecte a apenas uma ou duas delas. Na minha elucidação focarei em cada uma dessas conexões, mas não buscarei exaurir todas as suas possíveis combinações.

#### a) *Determinismo modal e o equívoco modal da causalidade*

O *determinismo modal* consiste na ligação entre a noção de *determinismo* e a noção modal alética de *necessidade*. Na definição acima de Hofer, tal ligação está pressuposta no termo “fixado”, que embora se trate de um termo vago, pode ser claramente elucidado em sua relação com a noção de necessidade. A abrangência e abertura presentes em tal definição nos dá margem para fazermos essa associação entre o termo “fixado” e a noção de necessidade.

O *equívoco modal da causalidade* emerge quando conectamos causalidade às noções de *determinismo* e de *necessidade*. Para Russell, a noção de causalidade é inextricavelmente conectada à noção de necessidade, mas o determinismo, em uma acepção cientificamente verificável, não é. Como as predições fornecidas por essa noção aceitável e verificável de determinismo são meramente probabilísticas, não havendo lugar para a noção de necessidade, segue-se que a noção de causalidade também não é verificada, já que seria atada de forma inextricável à noção de necessidade. Isto é, para Russell, se há algum tipo de determinismo verificável no mundo, ele é probabilístico e, sendo probabilístico, não é causal.

Vejam, então, qual é o sentido da noção de necessidade, que tão comumente é conectada às noções de determinismo e de causalidade.

---

<sup>4</sup> Essas distinções não foram oferecidas e nomeadas por Russell do exato modo que apresento aqui, pois pretendo, a partir dessas distinções, dialogar com trabalhos distintos e contemporâneos e nortear algumas questões que ultrapassam, de algum modo, o argumento russelliano. No entanto, a distinção apresentada parte da minha interpretação do seu argumento e consiste em grande medida numa elucidação dele. Russell faz também, no seu artigo de 1913, uma distinção mais explícita entre determinismo mecânico, teleológico e volitivo. Dado o problema central desta tese, considerarei mais especificamente o determinismo mecânico e, como tipos dele, o determinismo modal, o determinismo de predição e o determinismo de evolução funcional.

Russell oferece a seguinte definição da noção de necessidade a partir da correção da definição do *Dictionary of Philosophy and Psychology*, editado por James Baldwin no início do século XX (RUSSELL, 2003 [1913], p. 165-166):

Necessidade: “Uma proposição é *necessária* com respeito a certo constituinte, se permanece verdadeira quando tal constituinte é alterado de qualquer forma compatível com a permanência da significância da proposição.” (RUSSELL, 2003 [1913], p. 166, tradução nossa, grifo do autor).

Considere, por exemplo, a proposição expressa pela frase “se *Russell* é humano, *Russell* é mortal”. Nessa frase, o constituinte que pode ser alterado, de forma que a nova proposição se mantenha verdadeira, é o nome “Russell”. Poderíamos mudar para Sócrates, Platão, ou qualquer outro nome ou descrição com sentido na nossa língua, que a proposição se manteria verdadeira. Diferentemente do que ocorreria se alterássemos o constituinte “mortal” para “brasileiro”, por exemplo. Desse modo, a função proposicional “se  $x$  é humano,  $x$  é mortal” é necessária no sentido em que é verdadeira para qualquer proposição em que a variável  $x$  é substituída por um elemento que mantenha a proposição significativa, isto é, com sentido em uma determinada linguagem<sup>5</sup>.

O determinismo modal para Russell, de acordo com a minha interpretação, está conectado à noção de causalidade e consiste na determinação necessária de ocorrência de um evento dada a ocorrência de um evento anterior, de forma que “se um evento  $e1$ , ocorre no tempo  $t1$ , ele será seguido pelo evento  $e2$ ” e a proposição será verdadeira para qualquer variação de  $t$  (RUSSELL, 2003 [1913], p. 167).

Como Russell associou a noção de necessidade e determinismo à noção de causalidade, há essa condição de antecedência temporal de um evento  $e1$ , determinante, sobre um evento  $e2$ , determinado. No entanto, podemos oferecer uma definição que não pressuponha qualquer assimetria temporal ou uma aceção causal de determinismo, do seguinte modo:

Determinismo modal: Um evento  $e1$  determina outro evento  $e2$ , se, e somente se, necessariamente, se  $e1$  ocorre em um tempo  $t$ ,  $e2$  ocorre em um tempo  $t'$ .

---

<sup>5</sup> Dado o problema em causa nesta tese, usando a terminologia modal alética atual, consideramos aqui somente a necessidade do tipo *de dicto*, que diz respeito à necessidade de proposições ou funções proposicionais e não a necessidade do tipo *de re*, que diz respeito a propriedades essenciais das coisas, pois isso implicaria em uma discussão em torno de problemas essencialistas que nos distanciariam do nosso problema central.

Mesmo a noção de determinismo modal não associada à causalidade e direção do tempo, como definimos acima, seria equivocada de acordo com a argumentação de Russell, pois não verificamos necessidade de ocorrência de um evento dado outro evento em qualquer direção temporal, embora possamos verificar um aumento da probabilidade de ocorrência de um, dado a ocorrência do outro. O problema do equívoco modal está na noção necessária de determinismo, seja ele pressuposto como causal ou não.

De acordo com a definição acima,  $t'$  pode ser anterior a  $t$  e a palavra “determina” não precisa ser interpretada como equivalente a “causa”, com um evento  $e_1$  determinante e um  $e_2$  como determinado nesse sentido, a palavra “determina” poderia ser substituída por “é determinado por” e a definição continuaria tendo o mesmo sentido. De acordo com essa definição, a minha morte, por exemplo, é tão determinante do meu nascimento quanto o inverso, pois podemos determinar a ocorrência necessária de um evento dado outro em qualquer direção: podemos concluir que houve necessariamente o evento do meu nascimento, dada a minha morte, como também podemos concluir que necessariamente o evento da minha morte ocorrerá, dado o evento do meu nascimento. Minha intenção em isolar a noção de determinismo modal aqui é mostrar que ela não precisa estar conectada à noção de causalidade, embora possa e, muitas vezes, o seja.

Um dos fundamentos da crítica de Russell à noção de causalidade, que estou chamando de equívoco modal da causalidade, consiste antes de qualquer coisa em uma crítica à noção de necessidade, que, de uma forma mais rigorosa, pode ser direcionada à noção de determinismo modal, mesmo sem qualquer associação à noção de causalidade ou de direção temporal. No entanto, a crítica de Russell à causalidade continua de pé quando a noção de causalidade é associada à noção de determinismo modal, isto é, continua valendo quando defendemos o determinismo causal, tal como definimos acima, como associado à noção de necessidade.

Mas em que sentido o determinismo modal não seria verificável?

O determinismo modal não é verificável pelo fato de não sermos oniscientes, ainda que estejamos munidos da informação das diversas condições iniciais e das leis funcionais imprescindíveis para a predição de determinado evento. Há um limite epistemológico que não nos permite prever com certeza, mas apenas probabilisticamente, se um evento se seguirá de outro, por mais preciso que sejamos na descrição desse outro evento e por mais apoiados que estejamos em leis de associação. Um defensor do laplaceanismo ingênuo poderia defender que uma entidade epistemológica não humana dotada de tal onisciência, o famoso demônio de Laplace, poderia prever eventos futuros com certeza absoluta, sendo a predição probabilística somente uma limitação cognitiva humana diante de uma estrutura subjacente metafisicamente

determinística. Desse modo, deveríamos acrescentar a necessidade aos nossos cálculos preditivos, sendo eles causais ou não. Podemos concordar com esse defensor laplaceano que poderia ser o caso que uma suposta entidade ficcional ou mesmo nós, dotados, em um mundo imaginário, do conhecimento de todas as informações e leis relevantes, prediríamos com certeza absoluta um evento a partir de outro. No entanto, isso é uma mera idealização, dado nosso limite cognitivo epistemológico, podemos verificar apenas que alguns eventos se correlacionam probabilisticamente a outros eventos, nunca poderemos verificar se de fato, teríamos certeza, mesmo munidos de todas as informações possíveis, como o demônio de Laplace, pois isso nunca poderá ser experimentalmente testado.

Fazer previsões do ponto de vista de uma suposta epistemologia onisciente, parece consistir em uma espécie de epistemologia psicótica, usando linguagem psicanalítica, por partir da pressuposição de um ponto de vista sem correspondência com a realidade não meramente mental, ou, usando a linguagem kantiana, parece consistir em um entendimento vazio, por não se conectar à realidade empírica. Assim, o equívoco modal apontado por Russell não mostra que é impossível que nosso mundo seja determinístico de forma necessária, mas que isso não é verificável<sup>6</sup>. De modo que um defensor de uma noção necessária de determinismo deve apresentar argumentos adicionais para fundamentar esse tipo de noção ou pressupô-la como hipótese e não como fato comprovado pela experiência, tampouco deve excluir nosso limite epistemológico de previsão, sob o risco de uma identificação epistemológica totalmente fantasiosa.

Como a noção de causalidade para Russell está inextricavelmente conectada a essa noção necessária de determinismo, segue-se, para ele, que a relação de causalidade também não é verificável:

Muitas considerações, no entanto, tornam essas sequências especiais muito diferentes da tradicional relação de causa e efeito. Em primeiro lugar, a sequência, em qualquer instância até então não observada, não é mais do que provável, enquanto a relação de causa e efeito foi suposta como necessária. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 173, tradução nossa).

---

<sup>6</sup> De acordo com a minha orientadora, “através da terceira via transcendental entre o realismo metafísico e empirismo verificável? É possível manter a ideia de necessidade como ligada à ideia *a priori* de lei de evolução temporal. É a resposta de Kant a Hume, sem cair no determinismo metafísico. O determinismo modal em termos kantianos é indissociável do determinismo nomológico, e por isso é verificável”. Infelizmente, eu não poderei desenvolver esse ponto aqui. Posso, por hora, fazer a ressalva de que estamos considerando uma posição não kantiana de determinismo modal (ou metafísico).

Diante disso, podemos argumentar, em defesa da noção de causalidade, que ela não é inextricavelmente conectada à noção de necessidade e que o equívoco modal reside justamente nessa associação inconveniente entre a noção de causalidade e a de necessidade, revelando a conveniência de conectarmos-la à noção de probabilidade.

Todavia, fica a questão de saber o que seriam essas sequências probabilísticas verificáveis que Russell está acusando de serem erroneamente consideradas como causais, em outras palavras, qual seria essa noção verificável de determinismo? Além disso, fica também a questão de saber se ela pode ser conectada ou equivalente à noção de causalidade. Mas, antes de tratar dessas questões, tendo em vista a crítica de Russell à noção de necessidade, vejamos em que consiste o *determinismo de evolução direcionada* e por que ele também é uma noção equivocada de determinismo, mesmo se apresentarmos uma versão probabilística dele.

b) *Determinismo direcionado e o equívoco da assimetria do determinismo*

Para definir o *determinismo direcionado*, voltaremos à definição russelliana de determinismo modal, e, desta vez, desassociaremos a noção de evolução temporal direcionada da noção de necessidade. As definições de determinismo direcionado, respectivamente, a neutra e a probabilística, podem ser apresentadas como se segue:

**Determinismo direcionado:** Um evento  $e_1$  determina outro evento  $e_2$ , se, e somente se, dada a ocorrência de um evento  $e_1$  em um tempo  $t$ , um evento  $e_2$  ocorre em um tempo posterior  $t'$ .

**Determinismo direcionado probabilístico (determinismo de predição):** Um evento  $e_1$  determina outro evento  $e_2$ , se, e somente se, dada a ocorrência de  $e_1$  em um tempo  $t$ , a ocorrência de  $e_2$  em um tempo posterior  $t'$  é provável.

Na definição de determinismo de Hofer, que abrange os três tipos de aceção de determinismo, a direção temporal está explícita em “o modo que as coisas se darão *depois*”. Podemos, portanto, associar a evolução temporal direcionada à necessidade e também às leis de associação. Meu objetivo ao oferecer a definição acima é isolar a noção de direção temporal para compreendermos o equívoco específico que surge em conectar a noção de determinismo essencialmente à de direção temporal. Tal equívoco, apontado por Russell e cometido por defensores ou por aqueles que pressupõem uma noção clássica de causalidade, estou nomeando como *equívoco da assimetria do determinismo*.

Na linguagem da lógica das relações, as leis da natureza podem ser temporalmente simétricas ou assimétricas, ou em uma linguagem mais usada pelos cientistas, algumas são reversíveis outras irreversíveis. Dizer que uma lei é temporalmente assimétrica ou irreversível, como a segunda lei da termodinâmica ou o princípio de aumento de entropia (que, mais precisamente, dada sua interpretação probabilística, pode ser chamado de *quase irreversível*), significa dizer que faz diferença a escolha da direção da seta do tempo no resultado obtido. No caso do princípio de aumento de entropia, a probabilidade da entropia  $S$  de um sistema isolado ser maior na direção futura do tempo é maior do que na direção do passado do sistema. As leis reversíveis da mecânica clássica, por outro lado, não se alteram de forma alguma se trocarmos a direção do tempo: se  $f(t)$  é uma solução de equações da mecânica clássica, então  $f(-t)$  é também uma solução admissível. Recorrendo às palavras de Boltzmann:

As leis da mecânica não se alteram sequer minimamente se trocarmos, sem mais nem menos, o sinal do tempo. Assim, processos puramente mecânicos podem ocorrer num sentido como no seu oposto, *i. e.* no sentido de tempo crescente como no de tempo decrescente. (BOLTZMANN, 2006 [1905], p. 264).

O determinismo direcionado de predição, portanto, é um caso especial do determinismo bidirecionado de predição - o determinismo nomológico - que permite fazer predições de um evento dado outro evento, independentemente da direção temporal de evolução escolhida:

A lei não faz diferença entre passado e futuro: o futuro “determina” o passado no exato mesmo sentido em que o passado “determina” o futuro. A palavra “determina”, aqui, tem um significado puramente lógico: um certo número de variáveis “determina” outra variável se essa outra variável é uma função delas. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 174, tradução nossa).

Assim, embora a predição direcionada de eventos futuros a partir de eventos passados possa estar relacionada ao determinismo, não podemos reduzir o determinismo a ela. Além disso, alguém que defenda a redução da noção de causalidade à noção de predição temporalmente direcionada terá de fornecer uma explicação adicional para a direção do tempo, como o faz Reichenbach (1956), ao recorrer à direção do princípio de aumento de entropia, ou, diferentemente, já a pressupor como hipótese, como o faz Suppes (1970) e Hume (1739, 1748).

Resta agora definirmos de forma mais precisa essa última acepção de determinismo, o *determinismo nomológico*, a única acepção verificável de determinismo, de acordo com Russell.

c) *Determinismo nomológico*

Para Russell, a função que é suposta como realizada pela causalidade nas ciências é a que possibilita a inferência de eventos futuros a partir de eventos passados. Em sua formulação geral, ela também permite a inferência de eventos em qualquer tempo  $t$  a partir de eventos em tempos específicos  $tn$ , independente da direção temporal, uma vez que, como vimos, certas leis científicas nos permitem fazer inferências sobre a evolução de um dado sistema em ambas as direções do tempo. Nas palavras de Russell: “qualquer sistema em que tal inferência é possível, pode ser chamado de sistema ‘determinístico’” (RUSSELL, 2003 [1913], p. 176, tradução nossa). Assim ele define tal sistema:

Sistema determinístico: Um sistema é determinístico quando, dado  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , nos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  respectivamente, com respeito ao sistema, se  $Et$  é o estado do sistema em um tempo qualquer  $t$ , há uma relação funcional da forma  $Et = f(e_1, t_1, e_2, t_2, \dots, e_n, t_n, t)$ . (RUSSELL, 2003 [1913], p. 176-177, tradução nossa).

Vimos também anteriormente, ao tratar do equívoco modal, que não verificamos necessidade de ocorrência de um evento dado outro evento em qualquer direção temporal, embora possamos verificar um aumento da probabilidade de ocorrência de um, dada a ocorrência do outro:

Nós então consideramos a natureza das leis científicas e descobrimos que ao invés de estabelecerem que um evento  $A$  é sempre seguido por outro evento  $B$ , elas estabelecem relações funcionais entre certos eventos em certos tempos, que nós chamamos de determinantes, e outros eventos, anteriores, posteriores ou simultâneos a eles. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 182, tradução nossa).

Assim, podemos definir mais explicitamente o caráter probabilístico de um sistema determinístico do seguinte modo:

Determinismo nomológico: Um sistema é determinístico quando, dado  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , nos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  respectivamente, com respeito ao sistema, se  $Et$  é o estado do sistema em um tempo qualquer  $t$ , há uma relação funcional probabilística da forma  $Et = fp(e_1, t_1, e_2, t_2, \dots, e_n, t_n, t)$ .

Veremos, no segundo capítulo, que essas equações funcionais, que para Russell estão dissociadas da noção de causalidade (embora não da noção de predição), serão cruciais na estruturação de modelos causais. Mas, por hora, voltemos à crítica de Russell. Na definição de Hofer, o determinismo nomológico está pressuposto nos termos “matéria de lei natural”. Na

definição de Russell, todos os eventos,  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , que nos permitem calcular a ocorrência de um estado  $Et$  do sistema (que também pode ser considerado como um evento), através de uma função nomológica probabilística  $fp$ , são determinantes do estado do sistema.

Para Russell, o determinismo nomológico nada tem a ver com a relação de causalidade, a não ser o fato de nos permitir fazer previsões de eventos futuros a partir de eventos passados, mas essa seria antes uma característica das leis funcionais determinísticas que nos permitem associar probabilisticamente a ocorrência de eventos a partir de outros e não de uma estrutura causal subjacente:

Podem ser encontradas certas equações diferenciais que se sustentam para cada instante para cada partícula do sistema, e que, dada a configuração e velocidade em um instante, ou a configuração em dois instantes, temos a configuração em qualquer outro instante anterior ou posterior teoricamente calculável. Isto é, a configuração em qualquer instante é uma função desse instante e as configurações em dois dados instantes. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 174, tradução nossa).

Para Russell, a razão da noção de causalidade ser mantida na filosofia, ainda que tenha sido excluída da linguagem científica, é o fato de os filósofos serem pouco acostumados com a noção de “função”, enquanto sempre estiveram bastante familiarizados com a de “causalidade”:

Não há dúvida de que a razão da velha “lei da causalidade” ter continuado por tanto tempo impregnando os livros dos filósofos é simplesmente que a ideia de uma função não é familiar à maioria deles. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 174, tradução nossa).

Até aqui, podemos concluir que os argumentos de Russell ao menos apresentam um desafio àqueles que defendem o uso da noção de causalidade nas ciências ou mesmo somente a existência de leis ou relações causais. A noção de causalidade não pode se apoiar em um determinismo modal, porque ele não é verificável, também não pode se reduzir ao determinismo direcionado de previsão, porque o determinismo na sua formulação nomológica e verificável não é temporalmente assimétrico. Restam apenas as seguintes alternativas: ou se apoiar especificamente em uma função probabilística de previsão temporalmente direcionada, como o princípio de aumento de entropia (que é a proposta de Reichenbach (1956)); ou tentar reduzir a noção de causalidade a correlações probabilísticas de previsão, acrescentando um critério independente e pressuposto de direção temporal; ou, ainda, não reduzir a noção de causalidade à noção de determinismo nomológico.

Essa última opção é o que defenderei aqui, apoiada nos argumentos de Nancy Cartwright (1979) e Judea Pearl (2000, 2018). Mas antes, vejamos a segunda opção, a de reduzir a noção de causalidade a funções probabilísticas com a pressuposição de direção temporal. Essa é a base da teoria defendida por Patrick Suppes (1970). Voltarei a falar da redução probabilística de Reichenbach, que não pressupõe a direção do tempo, no próximo capítulo. Minha intenção agora é mostrar por que a redução probabilística da causalidade não responde ao desafio de Russell.

### 1.2.2. A redução probabilística de Suppes

Antes de introduzirmos a teoria de Suppes, vejamos alguns elementos básicos de estatística que serão indispensáveis para compreendermos sua teoria e demais problemas abordados nesta tese. Esses elementos são as distinções entre a) probabilidade marginal e probabilidade condicional, b) correlações positivas, neutras e negativas, e c) dependência e independência estatísticas. No segundo capítulo desta tese, ofereço uma introdução mais detalhada desses e outros elementos da teoria clássica da probabilidade. Caso a leitora (ou leitor) venha a ter alguma dúvida mais técnica nesta seção, poderá recorrer à introdução presente no segundo capítulo (seção 2.2.1). No entanto, creio que uma breve explicação será agora suficiente para compreendermos os fundamentos da teoria de Suppes.

a) Chamamos de *probabilidade marginal* de um evento a probabilidade bruta de ocorrência de um evento em uma certa amostragem ou população, independentemente da ocorrência de outros eventos ou condições como, por exemplo, a probabilidade geral de ocorrência de incêndio em uma floresta do nosso planeta independentemente da umidade do ar, presença de grileiros, presença de material inflamável, entre outros. Representamos simbolicamente a probabilidade marginal de ocorrência de um evento por  $P(e_n)$  ou simplesmente  $P(A)$ .

A *probabilidade condicional* de um evento, por outro lado, simbolicamente  $P(e_n | e_m)$  ou simplesmente  $P(A | B)$ , é a probabilidade de ocorrência de um evento dada a ocorrência de outros eventos ou condições, como, por exemplo a ocorrência de incêndio em uma floresta dada a presença de material inflamável.

b) Dizemos que a correlação probabilística entre eventos é *positiva*, como, por exemplo, a correlação entre a ocorrência de um incêndio e a explosão de material inflamável, quando a probabilidade condicional de ocorrência de um evento dado outro evento é maior que a probabilidade marginal de ocorrência de cada um. Simbolicamente quando  $P(A | B) > P(A)$  e

(por simetria)  $P(B | A) > P(B)$ . Podemos representar a positividade de uma correlação usando apenas probabilidades condicionais através das desigualdades equivalentes  $P(A | B) > P(A | \neg B)$  ou (por simetria)  $P(B | A) > P(B | \neg A)$  que significam que a probabilidade condicional de ocorrência de um evento dada a ocorrência de outro é maior que a probabilidade condicional de ocorrência de um, dada a não ocorrência do outro. Podemos ainda representar a positividade de uma correlação sem o uso do termo “probabilidade condicional” através da desigualdade equivalente  $P(A, B) > P(A) \cdot P(B)$ , que significa que a probabilidade marginal conjunta da ocorrência dos dois eventos é maior que o produto da probabilidade marginal de ocorrência de cada um deles.

Uma correlação probabilística entre eventos, por outro lado, é *negativa*, quando a probabilidade condicional de ocorrência de um evento dado o outro é menor do que a probabilidade marginal de ocorrência de cada um deles, como, por exemplo, a probabilidade de ocorrência de doenças cardiovasculares dada a prática de exercícios. Analogamente à correlação positiva, podemos representar simbolicamente uma correlação probabilística negativa entre eventos através de diversas fórmulas equivalentes, como:  $P(A | B) < P(A)$ , ou  $P(B | A) < P(B)$ , ou  $P(A | B) < P(A | \neg B)$ , ou  $P(B | A) < P(B | \neg A)$ , ou ainda  $P(A, B) < P(A) \cdot P(B)$ .

Já uma correlação *neutra* será representada pelas seguintes equações:  $P(A | B) = P(A)$ , ou  $P(B | A) = P(B)$ , ou  $P(A | B) = P(A | \neg B)$ , ou  $P(B | A) = P(B | \neg A)$ , ou  $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$ . Dizer que há uma correlação probabilística neutra entre eventos é o mesmo que dizer que não há uma correlação probabilística entre eles, como, por exemplo, a probabilidade de ocorrência de incêndio em uma casa, dado alguém estar escutando Mozart. Não há uma correlação probabilística entre esses eventos, nem negativa, nem positiva.

c) Quando há uma correlação probabilística positiva ou negativa entre eventos, dizemos que eles são *estatisticamente dependentes*. Quando há uma correlação probabilística neutra entre os eventos, ou, em outras palavras, quando não há uma correlação probabilística entre eles, dizemos que são *estatisticamente independentes*.

Considerando, portanto, essas distinções básicas, vejamos então em que consiste a teoria probabilística da causalidade de Suppes (1970). Seus critérios para definirmos um evento  $e_1$  em  $t$  como causa de um evento  $e_2$  em  $t'$  são os seguintes (1970, p.12):

- (i)  $t' > t$ ,
- (ii)  $P(e_1) > 0$ ,
- (iii)  $P(e_2 | e_1) > P(e_2)$ .

De acordo com essa definição, um evento  $e_1$  é causa de outro evento  $e_2$ , se e somente se: (i)  $e_1$  for anterior à  $e_2$ , (ii)  $e_1$  tiver a probabilidade não nula de ocorrência e (iii) a probabilidade condicional de  $e_2$  dado  $e_1$  é maior que a probabilidade marginal de  $e_2$ , isto é, há uma dependência probabilística positiva entre  $e_1$  e  $e_2$ .

O critério (iii) corresponde às funções probabilísticas de predição russelliana e, por si só, poderia levar à conclusões causais equivocadas, já que correlações não implicam em causalidade. Poderíamos considerar, munidos somente dos critérios (ii) e (iii), que pessoas saírem às ruas de guarda-chuva é a causa das chuvas, já que há uma correlação probabilística positiva temporalmente não direcionada entre os dois eventos. Como vimos, correlações probabilísticas são simétricas. Assim, o critério (i) evitaria esse tipo de problema, ao definir que um desses eventos precisa ser anterior ao outro para o considerarmos como causa do outro e não como efeito dele.

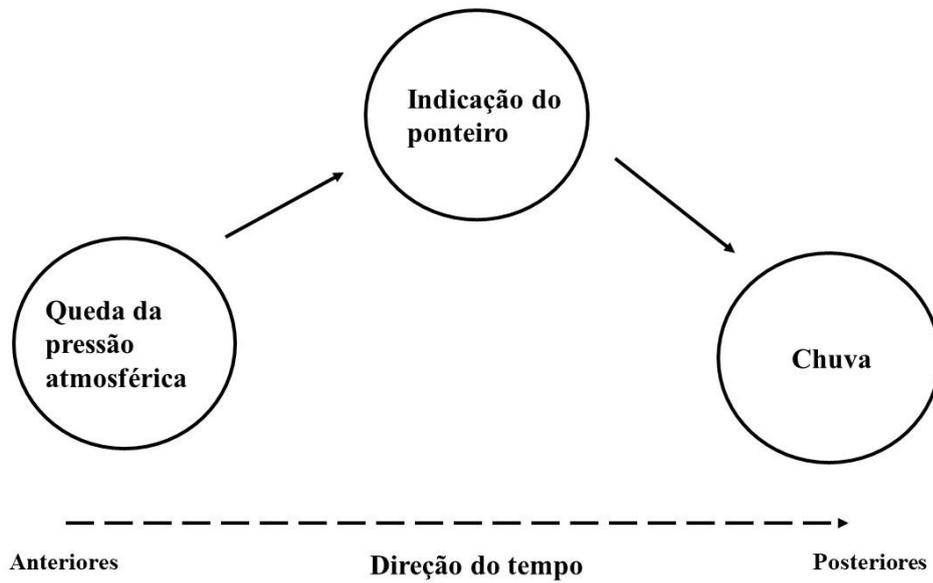
Um problema que vem à tona, mesmo quando acrescentamos o critério de antecedência temporal da definição causal de Suppes, é conhecido como *problema dos coefeitos*, que também é dirigido a outras definições que estabelecem o critério de antecedência causal, como a definição humeana de causalidade. Ambas as definições seriam equivocadas por serem demasiadamente amplas. Isso porque considerariamos eventos que evidentemente não o são como causa de outros eventos, nomeadamente, em todos os casos em que um coefeito de uma mesma causa antecede regularmente a ocorrência de outro coefeito dessa mesma causa.

Um dos exemplos clássicos envolvendo esse tipo de arranjo causal é o conhecido “exemplo do barômetro”, dado por Russell em sua obra já citada aqui, *Human Knowledge: Its Scope and Limits* (1948):

Muitos filósofos têm sustentado que “causa” significa algo diferente de “antecedente invariável”. A diferença pode ser ilustrada por dois relógios de Geulincx, onde ambos mantêm o tempo perfeito; quando um pontua a hora, o outro toca, mas não pensamos que um “causa” o toque do outro. Um colega não científico da minha faculdade recentemente anunciou em desespero: “O barômetro parou de ter qualquer efeito no clima.” Isso foi feito para ser uma piada, mas se “causa” significasse “antecedente invariável”, não seria. (RUSSELL, 2009 [1948], pp. 275-276, tradução nossa).

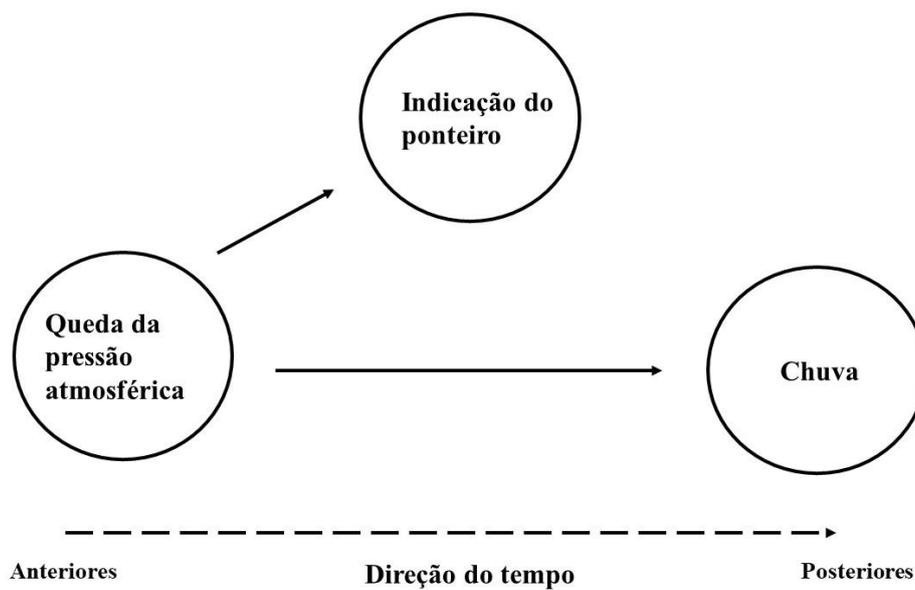
Imagine um barômetro situado numa certa localidade. Quando a pressão atmosférica cai, o ponteiro do barômetro indica um número abaixo de uma determinada posição, e quando o ponteiro indica um número abaixo dessa determinada posição, é muito provável que ocorra uma tempestade. De acordo com a definição de Suppes, deveremos considerar que a queda da pressão atmosférica é causa da diminuição da indicação do ponteiro, e que a diminuição da

indicação do ponteiro é causa da chuva, como pode ser representado através da seguinte ilustração, onde as setas apontam para os respectivos efeitos das supostas causas:



**Fig. 1:** Representação incorreta da relação causal entre os eventos.

É evidente que a indicação do ponteiro do barômetro não é causa da chuva, sendo antes um efeito da queda da pressão atmosférica, assim como a chuva. A representação correta da relação causal entre esses eventos, onde temos uma causa comum (a queda da pressão atmosférica) para dois eventos distintos (a indicação do ponteiro e a chuva), seria esta:



**Fig. 2:** Representação correta da relação causal entre os eventos.

As correlações probabilísticas do *Princípio de Causa Comum (PCC)* de Reichenbach (que apresentarei mais detalhadamente no próximo capítulo) tornam sua redução probabilística imune frente a esse tipo de contraexemplo, permitindo que distingamos uma relação em que um evento seria a causa do outro daquelas em que os eventos em consideração seriam somente co-efeitos de uma mesma causa, como no exemplo acima. A redução mais simplificada de Suppes, no entanto, não é capaz de resolver esse tipo de problema conectado à tentativa de redução da causalidade a correlações probabilísticas positivas, mesmo quando pressupomos um critério de antecedência temporal. Outro problema vinculado a essa redução relaciona-se ao paradoxo de Simpson, que será o tema da próxima seção.

### 1.3. A demonstração de Cartwright

Para a filósofa Nancy Cartwright (1979, p. 421) leis causais estão intimamente conectadas a leis estatísticas, mas não podem ser reduzidas a elas. Apoiada na resolução causal do famoso paradoxo estatístico de Simpson, Cartwright (1979) oferece um argumento cabal tanto contra o probabilista reducionista quanto contra o eliminativista causal:

Bertrand Russell argumentou que há somente leis de associação, e que princípios causais não podem ser derivados das leis causalmente simétricas de associação. Argumentarei aqui em defesa da segunda alegação de Russell, mas contra a primeira. Princípios causais não podem ser reduzidos a leis de associação; mas leis de associação também não podem ser eliminadas. (CARTWRIGHT, 1979, p. 419, tradução nossa).

A demonstração de Cartwright, portanto, atinge tanto a redução suppesiana, quando a eliminativismo causal russelliano de 1913. Vejamos como o paradoxo de Simpson se conecta a essa demonstração.

#### 1.3.1. O paradoxo de Simpson

As origens do paradoxo de Simpson são obscuras e diversos pesquisadores já o citaram em seus trabalhos. Porém, parte de sua fama se deve à sua aparição em um artigo do estatístico Edward Simpson (1951), que acabou por popularizá-lo, tornando-o conhecido pelo seu nome.

Um exemplo de caso bastante ilustrativo para a explicação do paradoxo relaciona-se à negação de que fumar causa câncer. É interessante notarmos que há uma forma falaciosa de

defesa de proposições causais falsas relacionadas ao surgimento desse paradoxo e, infelizmente, parece-me que o uso desse tipo de falácia vem sendo atualmente reforçado a fim de manipular as crenças sociais com objetivo de lucro ou ascensão política. O caso envolvendo cigarros e câncer será interessante para conhecermos um exemplo de caso particular dessa falácia causal mais geral.

Ainda que algumas pessoas insistam em defender que fumar não causa câncer ou outras doenças, podemos dizer que desde a década de 1990, mesmo popularmente, a falácia da indústria de cigarros foi derrubada, pela própria experiência das pessoas, ao verem seus amigos ou familiares fumantes morrendo de câncer ou desenvolvendo diversas doenças. Muitas pessoas, hoje, ao menos no Brasil, não seriam convencidas pela propaganda da figura abaixo:



Fonte: Diário de Noite, 3 de março de 1948. Hemeroteca Digital da Biblioteca Nacional.

**Fig.3:** Propaganda de indústria de cigarro onde um atleta, o Ademar do Vasco, recomenda seu uso.

Apesar dessa desconfiança popular brasileira atual em relação à indústria dos cigarros, você pode conceber ou estar lembrando de uma pessoa que diria algo do tipo: “mas Fulano fumou a vida inteira e nunca teve câncer” e agora talvez você esteja lembrando de outros casos semelhantes envolvendo o mesmo tipo de argumentação. É exatamente esse tipo de argumentação falaciosa que estou afirmando ser relacionada diretamente ao paradoxo de Simpson. Vejamos, então, como ele se origina considerando o exemplo da relação entre o hábito de fumar e o desenvolvimento de câncer.

Suponha que uma empresa fictícia de cigarros, a Amon Sanctus, resolva fazer um teste com intuito de mostrar que o hábito de fumar não causa câncer. Depois de ter patrocinado

diversos jogadores de futebol renomados e ter conseguido angariar vários jogadores para o reino dos fumantes, a Amon Sanctus decide fazer uma experiência para provar de uma vez por todas que fumar não prejudica a saúde e, para esse teste, chama os jogadores famosos de futebol e seus parentes para comporem a população amostral testada, com metade dessa população sendo composta pelos jogadores e metade pelos seus familiares. Depois de alguns anos, a Amon Sanctus anuncia orgulhosamente que cigarro não causa câncer, muito pelo contrário, já que houve um maior número de pessoas que contraíram câncer entre os não fumantes do que entre os fumantes. O leitor atento já deve ter percebido qual o engodo que subjaz ao teste feito pela Amon Sanctus: havia mais pessoas sedentárias entre os não fumantes do que entre os fumantes, de forma que os resultados podem parecer indicar que fumar não causa câncer, quando, na verdade, se dividirmos a população amostral entre sedentários e não sedentários, veremos que em ambas as subpopulações, os que não fumaram tiveram uma maior probabilidade de não desenvolver câncer. A seguinte tabela simula esses resultados:

	<b>Fumantes</b>	<b>Não fumantes</b>
<b>Não sedentários</b>	16 de 40 = 40 %	1 de 10 = 10 %
<b>Sedentários</b>	8 de 10 = 80 %	24 de 40 = 60 %
<b>Total</b>	24 de 50 = 48 %	25 de 50 = 50 %

**Tabela 1:** Probabilidade do desenvolvimento de câncer em uma população seccionada entre fumantes e não fumantes, e sedentários e não sedentários.

Assim, considerando que o hábito de fumar ou de não fumar é anterior ao desenvolvimento de câncer, de acordo com o resultado da população total testada, a probabilidade de um fumante desenvolver câncer é menor de que a de um não fumante, de modo que, tomando  $C$  como o “desenvolvimento de câncer” e  $F$  como o “hábito de fumar”,  $P(C | \neg F) > P(C | F)$  e  $P(C | \neg F) > P(C)$ , preenchendo os critérios de causalidade de Suppes, de tal forma que teríamos de concluir que o hábito de fumar não causa câncer.

Com isso, além do problema já citado dos coefeitos de uma mesma causa exibirem entre si uma correlação probabilística positiva, não sendo, porém, um a causa do outro, o paradoxo

de Simpson mostra um outro problema adicional do risco de uma teoria, como a de Suppes, que pretende reduzir causalidade a correlações probabilísticas positivas, de se tomar causas *espúrias* como legítimas.

Alguém poderia dizer, então, que esses problemas estariam envolvidos com a noção de causalidade. No entanto, também não é esse o caso. O paradoxo de Simpson nos mostra, ao contrário, que ele não pode ser solucionado se considerarmos apenas as correlações probabilísticas entre eventos, sem um fundo causal independente delas, e, portanto, não redutível a elas. Como podemos ver na tabela 1, ainda que na sua totalidade o número daqueles que desenvolveram câncer foi maior entre os que não fumam, quando dividimos essa população entre os sedentários e não sedentários, vemos que o número de não sedentários fumantes que desenvolveram câncer é maior que o número de não sedentários não fumantes, assim como o número de sedentários fumantes que desenvolveram câncer é maior que o número de sedentários não fumantes que desenvolveram câncer. Essa tabela fictícia mostra como os dados podem gerar o paradoxo de Simpson se não considerarmos as subpopulações de sedentários e não sedentários entre a população geral. Se temos de fato o objetivo de saber se fumar aumenta a probabilidade de desenvolver câncer, então devemos considerar o tipo de subpopulações causalmente relevantes da população total em teste, isto é, devemos considerar as subpopulações que podem influenciar significativamente o resultado, como, por exemplo, no caso do desenvolvimento de câncer, as subpopulações que podem ser seccionadas por idade, hábito alimentar, sedentarismo ou não sedentarismo, herança genética, etc.

No exemplo clássico de Simpson (1951), em que uma droga é considerada prejudicial quando, na verdade, ajudaria na cura de uma determinada doença, a subpopulação relevante no resultado é a que secciona a população total por gênero, dividindo-a entre homens e mulheres. No seu teste fictício, os homens eram mais propensos a se recuperar do que as mulheres, mas como não fizeram essa distinção, mais mulheres tomaram o medicamento do que os homens, que na sua maioria tomaram placebo. Assim, a droga no geral foi considerada prejudicial, pois a recuperação entre os que não tomaram, na sua maioria homens, foi maior do que entre aqueles que tomaram, na sua grande maioria mulheres. No entanto, quando fazemos a partição por gênero, obtemos tanto o resultado de que houve uma maior recuperação entre os homens que tomaram a droga do que entre os que não tomaram, quanto o resultado de que houve uma maior recuperação entre as mulheres que tomaram do que entre as que não tomaram.

Outro exemplo que podemos usar para ilustrar as correlações do paradoxo de Simpson é o seguinte. Imagine a situação hipotética de dois jogadores de futebol que disputaram um prêmio de melhor jogador baseado na porcentagem de gols por tentativa. Ronaldo foi

considerado o melhor jogador da atualidade, ficando na frente de Ademir. Muitos fãs do jogador Ademir, no entanto, defenderam ser isso uma injustiça, pois o “ponta de lança” evidentemente teve mais chances de acertar um chute a gol do que Ronaldo e contestaram o resultado do prêmio diante do júri. Mas o júri alegou que o prêmio era justo, pois de 100 tentativas de chute a gol de Ronaldo, 80 tiveram sucesso, enquanto que das 100 tentativas de Ademir somente 70 tiveram sucesso. Ainda assim os fãs de Ademir alegaram que as chances dele acertar um chute foram maiores que a de Ronaldo, tanto nos pênaltis quanto no meio de uma jogada. Poderiam, o júri e os fãs de Ademir, estarem falando a verdade ao mesmo tempo? A resposta, paradoxalmente, é sim. Se a maioria dos chutes de Ronaldo for de pênalti, por exemplo, que são em geral mais fáceis de acertar do que no meio de uma jogada, então ele poderá exibir uma proporção maior de acertos na totalidade dos chutes. No entanto, Ademir apresentaria uma proporção maior de acerto tanto em os chutes de pênalti isoladamente, quanto em chutes de jogada livre, e, ainda assim, apresentar uma proporção de acerto menor no total de chutes, se seu número de chutes por pênalti for significativamente menor do que o número de chutes por pênalti de Ronaldo. Assim, os fãs de Ademir poderiam argumentar que o próprio critério do júri é injusto, pois ao não fazer uma distinção importante que pode afetar as chances de acerto, jogadores menos eficazes podem ser considerados melhores do que os mais eficazes. Vejamos uma tabela exibindo a possível situação fictícia que poderia ter levado nosso jogador ao sofrimento de tal injustiça:

	<b>Ronaldo</b>	<b>Ademir</b>
<b>Chute de pênalti</b>	66 acertos em 80 = 82,5 %	45 acertos em 50 = 90 %
<b>Chute livre</b>	5 de 20 = 25 %	25 acertos em 50 = 50 %
<b>Total</b>	71 acertos em 100 = 71 %	70 acertos em 100 = 70 %

**Tabela 2:** Tipos de chute por jogador com porcentagem de acerto total e seccionado por subpopulação.

O paradoxo de Simpson, portanto, vem à tona em casos em que correlações estatísticas que se sustentam em populações são reversas quando consideramos suas subpopulações. Devemos ter um pano de fundo causal para saber qual subpopulação iremos considerar. No

caso clássico de Simpson, o gênero define a partição relevante; no do cigarro, a divisão em subpopulações de sedentários e não sedentários; e no de Ademar, o tipo de tentativa de chute ao gol e por assim vai. O único modo de não fazermos isso às cegas é tendo em conta os aspectos causais relevantes em cada caso:

Qual partição é empregada é, portanto, essencial para uma estratégia ser efetiva ou não. A partição correta – que nos permite julgar estratégias como efetivas ou não efetivas de acordo com o que é objetivamente verdadeiro – é determinada pelo o que são leis causais. Partições dadas por outros fatores darão outros resultados; e, se você não admitir leis causais não há procedimento geral para selecionar os fatores corretos. (CARTWRIGHT, 1979, p. 436, tradução nossa).

Desse modo, o paradoxo de Simpson é gerado se não considerarmos um pano de fundo causal. Ele surge do equívoco da redução da causalidade a correlações probabilísticas e, no mundo da estatística mais purista, surge do equívoco de somente considerarmos as correlações estatísticas em nossas previsões, excluindo qualquer tratamento mais elaborado da previsão causal estatística. E o resultado desse equívoco é prático em um sentido social bastante realista e pragmático, por envolver a efetividade de estratégias de ação humana. Se as relações causais forem guiadas apenas por correlações probabilísticas de previsão, elas serão cegas e originarão esse tipo de paradoxo. As correlações exibidas no paradoxo, que não são paradoxais se considerarmos esse pano de fundo, mostram apenas ou que nossa noção de causa pode estar equivocada ou que a exclusão do pano de fundo causal pode levar a problemas de decisão insolúveis se expressarem apenas uma estatística acausal.

Assim, o argumento de Cartwright em defesa da existência de leis causais e não apenas de regularidades probabilísticas de associação “repousa em fatos sobre estratégias” (CARTWRIGHT, 1979, p. 419, tradução nossa), sendo que “a objetividade das estratégias requer a objetividade das leis causais” (CARTWRIGHT, 1979, p. 436, tradução nossa):

Há uma conexão natural entre causas e estratégias que deveria ser mantida: se alguém deseja obter um objetivo, é uma boa estratégia (no sentido pré-utilidade de ser uma boa estratégia) introduzir uma causa para esse objetivo. (CARTWRIGHT, 1979, p. 431, tradução nossa).

Um dos principais e mais implacáveis defensores atuais da noção de causalidade, Judea Pearl<sup>7</sup>, vencedor do Prêmio Turing de 2011, em resposta aos questionamentos de estatísticos sobre a necessidade do uso da noção de causalidade em inferências estatísticas disse que ainda que esses pesquisadores tenham sido treinados a observar o paradoxo de Simpson há décadas, isso não os torna “capazes de resolvê-lo, isto é, capazes de decidir o que fazer quanto o paradoxo surge em meio aos dados” (tradução nossa). Quando o fazem, pressupõem um pano de fundo causal, mas de uma forma descuidada ou até mesmo intuitiva (no sentido não kantiano do termo), já que a noção de causalidade não é cientificamente considerada e tratada. Em suas palavras:

Eu não vejo maior impedimento para o progresso científico do que a prevalente prática de focar todos nossos recursos matemáticos em inferências probabilísticas e estatísticas, enquanto considerações causais são deixadas a mercê da intuição e bom julgamento. (PEARL, 2000, p. xiv, tradução nossa).

Tendo desenvolvido um sofisticado aparato estatístico de inferência causal, com relevância empírica e aplicação prática em diversos ramos da ciência, Pearl, como Cartwright, também não identifica associações estatísticas com relações causais, vendo-as antes como resultantes da estrutura causal do universo.

De acordo com Pearl (2018), a relevância empírica da cientificação da causalidade não consiste apenas em uma “transformação” das ciências atuais, mas sim uma “revolução”, por ele nomeada de “revolução causal”, cujos impactos já podem ser sentidos hodiernamente em diversos ramos da ciência. Essa nova ciência da causalidade tem ainda um escopo aberto e amplo de aplicação a ser explorado. Segundo ele:

As consequências dessa nova ciência já impactam facetas cruciais de nossas vidas e têm o potencial de afetar mais, do desenvolvimento de novas drogas ao controle de políticas econômicas, da educação e robótica ao controle de armas e do aquecimento global. (PEARL, 2018, p. 9, tradução nossa).

Pearl argumenta que a partir das últimas décadas do século XX, graças à cuidadosa elaboração dos chamados *modelos causais*, os cientistas contemporâneos puderam, finalmente, lidar com problemas que eram até então considerados insolúveis, entre eles, o paradoxo de Simpson. Como ele afirma:

---

<sup>7</sup> Na postagem “A Statistician’s Re-Reaction to The Book of Why” de 15 de junho de 2018, do blog *Causal Analysis in Theory and Pratique*, disponível em: < <http://causality.cs.ucla.edu/blog/>>.

Por exemplo, somente há cem anos, a questão de saber se fumar cigarro causa risco à saúde teria sido considerada não científica. A mera menção das palavras “causa” ou “efeito” criariam uma tempestade de objeções em qualquer revista estatística de reputação. (PEARL, 2018, p. 13, tradução nossa).

Podemos concluir, portanto, que a necessidade de um pano de fundo causal para a resolução do paradoxo de Simpson, como demonstrou Cartwright, prova que embora possa haver uma relação íntima entre causalidade e correlações probabilísticas de predição, não podemos reduzir uma à outra. Mas como seria, então, essa relação íntima, mas não redutiva, entre causalidade e probabilidade? É o que veremos com maiores detalhes no próximo capítulo, ao sermos introduzidos aos chamados *modelos causais*, cujo principal desenvolvedor foi Pearl.

Mas, antes de terminar, gostaria de salientar que, mesmo que houvesse uma forma puramente estatística de solução para o paradoxo de Simpson<sup>8</sup>, a utilização de ferramentas de análise causal, não limitadas ao uso puramente estatístico, certamente enriquece muitas áreas e pesquisas científicas. Como afirma Pearl:

Quando abordada rigorosamente, causalidade não é meramente um aspecto da estatística; é uma adição à estatística, um enriquecimento que permite à estatística descobrir funcionamentos do mundo que os métodos tradicionais sozinhos não podem descobrir. (PEARL, J. et al (2016), p. 1, tradução nossa).

De qualquer modo, não podemos reduzir causalidade a correlações probabilísticas e, sem dúvida, muitas pesquisas, aplicações e motivações de estudos e trabalhos científicos têm a relação de causalidade como guia central. Buscamos saber se uma droga ou tratamento causa a cura de uma doença ou não, se determinadas ações podem causar danos a outros seres ou meio ambiente, o que devemos fazer para evitar o contágio de um vírus ou o aumento da violência, se a mistura de algumas substâncias pode causar algum acidente, o que pode ter causado a morte de uma determinada pessoa, se um determinado elemento em um planeta distante causa determinados registros luminosos, entre outras questões causais de grande relevância. Se recorrermos somente a correlações probabilísticas para respondermos essas questões, por mais refinado que seja nosso cálculo, podemos facilmente incorrer em erro ou oferecer uma resposta

---

<sup>8</sup> Como tentam provar, por exemplo, Spanos (2016) e Bandyopadhyay, et al (2015), ainda que sem grande sucesso, como podemos constatar na resposta de Pearl em seu blog “Causal Analysis in Theory and Practice”: <http://causality.cs.ucla.edu/blog/index.php/category/simpsons-paradox/>. No entanto, podemos cogitar a possibilidade de uma defesa com sucesso. Nesta tese, não poderei apresentar um exame detalhado dessas e outras críticas à resposta causal. Muitas dessas críticas estão sendo inclusive desenvolvidas neste exato momento, desde que a resposta causal de Pearl foi apresentada recentemente e, portanto, também é bastante recente as reações a ela. Muitos dos trabalhos que encontrei na minha pesquisa bibliográfica são ainda manuscritos não oficialmente publicados. Desse modo, um trabalho abordando essas respostas parece situar-se melhor em uma pesquisa futura.

sem rigor causal, quando fazemos essa análise intuitivamente. Por que não enriquecer nossa análise estatística com a análise causal, principalmente quando nossos questionamentos são causais?

Além disso, o uso de modelos causais em estatística tem consequências éticas importantes, já que ajuda a diminuir a reprodução de preconceitos dos agentes de medição. Se utilizarmos apenas correlações probabilísticas em nossas inferências, excluindo as relações causais e fatores dinâmicos de fato envolvidos nos fenômenos, acabamos por reproduzir padrões de preconceitos sociais históricos e por desconsiderar a possibilidade de mudanças sociais, como, infelizmente, podemos constatar em alguns mecanismos de inteligência artificial puramente estatísticos<sup>9</sup>.

#### 1.4. Considerações finais

Além das definições do dicionário de Baldwin, Russell considera também, ao longo do seu texto de 1913, as noções de causalidade de Stuart Mill (1882) e Henri Bergson (1889). Os escritores dos verbetes do dicionário, por sua vez, recorreram às teorias de filósofos diversos. De acordo com Russell, o grande problema de alguns desses filósofos, como Bergson, é que eles “são muito aptos a tomar suas visões sobre a ciência uns dos outros, e não da ciência” (RUSSELL, 2003 [1913], p. 168, tradução nossa). Vimos que, de fato, grande parte dos cientistas da época de Russell, e mesmo os cientistas atuais, não utilizavam ou utilizam a noção clássica de causalidade. No entanto, podemos afirmar que a noção de causalidade tem hoje em dia um papel e utilidade bastante relevante nas ciências.

Como vimos, Russell argumentou que devemos abandonar a noção de causalidade por sua conexão intrínseca com noções equivocadas, nomeadamente, a de determinismo assimétrico e a de determinismo modal. Essas associações equivocadas, no entanto, não precisam ser inextricavelmente atadas à noção de causalidade. Ainda que sejam de fato atadas à grande parte do discurso filosófico e científico atual e da época de Russell, como as noções de Bergson e Mill, podemos defender uma teoria da causalidade que não cometa tais associações equivocadas e que, desse modo, seja perfeitamente imune à crítica russelliana.

Creio, portanto, que o termo “lei da causalidade”, presente na famosa citação de Russell a favor do ostracismo da noção de causa, seria proveitosamente substituída pelo termo “determinismo causal”: o *determinismo causal*, “como muito do que se passa entre os filósofos,

---

<sup>9</sup> Uma ótima explicação do problema pode ser encontrada em Barabas et al, 2018. Essa obra foi uma indicação da nossa brilhante colega e pesquisadora na área de modelagem causal, Yasmim Haddad.

é uma relíquia de um tempo antigo, sobrevivendo, como a monarquia britânica, somente porque é erroneamente suposto não causar danos”.

## Capítulo 2: Modelos causais

The possibility of learning causal relationships from raw data has been on philosophers' dream lists since the time of Hume (1711-1776). That possibility entered the realm of formal treatment and feasible computation in the mid-1980s, when the mathematical relationships between graphs and probabilistic dependencies came into light.

(Judea Pearl, *Causality: Models, Reasoning and Inference*)

### 2.1. Observações preliminares

Contando principalmente com os trabalhos desenvolvidos em meados da década de 80 por filósofos intervencionistas como Judea Pearl, Peter Spirtes, Clark Glymour, Richard Scheines, James Woodward, entre outros, a teoria da inferência causal estatística, cujo início remonta a Hans Reichenbach (1956), recebeu um tratamento matemático sofisticado, permitindo uma rápida utilização de modelos causais em pesquisas científicas. Pesquisas essas que vão desde a identificação da composição mineral de astros distantes, até a epidemiologia, genética, psicologia, aeronáutica, e diversos outros exemplos, com um escopo de aplicação aberto e com potencial de expansão em diversas áreas. Modelos causais, no entanto, são restritos a fenômenos clássicos, e a razão disso se deve aos primórdios de seu desenvolvimento.

Neste capítulo, apresentarei os componentes básicos de um modelo causal e uma introdução ao tratamento matemático da inferência causal desenvolvido pelos autores citados acima. Este capítulo será de importância crucial para compreendermos o problema da aplicação da causalidade a fenômenos quânticos e, além disso, elucidará o funcionamento de ferramentas básicas para a construção de um modelo cientificamente relevante. Não obstante, focarei no esclarecimento dos pontos mais diretamente conectados ao problema, sem me preocupar em

oferecer uma introdução completa. Ainda assim, creio que este trabalho poderá servir como uma introdução prévia ao estudo de inferência causal estatística, sobretudo para filósofos ou pessoas com pouca familiaridade com o arcabouço mais técnico da modelagem causal contemporânea.

## 2.2. Modelagem causal clássica

Um modelo causal pode ser entendido como uma linguagem abstrata para a representação de sistemas causais<sup>10</sup>. Podemos entender um sistema causal, *grosso modo*, como um conjunto de fenômenos causalmente relacionados entre si. Quando é cientificamente relevante, essa linguagem abstrata que representa sistemas causais inclui:

1. Dados: distribuições probabilísticas, correlações probabilísticas entre eventos, probabilidades marginais e condicionais, dependências e independências estatísticas.

2. Grafos causais: grafos direcionados acíclicos que retratam simbolicamente as relações causais entre os eventos do sistema causal.

3. Equações estruturais: equivalentes (sob uma interpretação causal) às funções probabilísticas determinísticas russellianas, essas equações carregam as mesmas informações que os grafos causais e as correlações probabilísticas. Formam, juntamente com os dados, os parâmetros do modelo.

4. Algoritmos lógicos e inferenciais: base lógica e relações matemáticas que permitem a computação de dados e inferências entre componentes do modelo.

5. Teoria causal de fundo: definições conceituais e hipóteses filosóficas sobre a estrutura causal do mundo.

6. Teoria científica de fundo: leis da natureza, postulados, teoremas e hipóteses científicas. Estabelecem as funções a serem consideradas como parâmetros no modelo.

Veremos inicialmente com mais detalhes os primeiros quatro componentes: dados estatísticos, grafos, equações estruturais e algoritmos. Os dois últimos, filosofia e ciência de fundo, estão conectados ao problema central da tese e são trabalhados ao longo dela, do primeiro ao último capítulo.

---

<sup>10</sup> Como definido em Sloman (2005).

O quinto item diz respeito à teoria da causalidade que fundamenta o modelo, ainda que quem o utilize possa não estar completamente ciente dos seus comprometimentos filosóficos. Como o foco desta tese está exatamente nos problemas filosóficos, podemos dizer que o foco do nosso trabalho incide principalmente sobre esse quinto elemento dos modelos causais.

Com respeito ao sexto item, referente à teoria científica de fundo, cabe alertar que teorias científicas de fundo de um modelo causal não precisam se resumir a teorias, hipóteses e resultados experimentais da física, como as abordadas nesta tese. O arcabouço científico de fundo de um modelo causal dependerá do problema analisado e da área a que se aplica o modelo. O arcabouço científico de um modelo causal utilizado em economia, por exemplo, será diferente do arcabouço científico de um modelo causal utilizado em neurociência, medicina ou aeronáutica. Embora, é claro, possa haver muito em comum. A escolha em tratar de certas leis da física está antes conectada à abordagem de problemas metafísicos e epistemológicos ligados a elas (como a natureza do tempo e as implicações da mecânica quântica para a noção de causalidade) do que a uma tentativa de oferecer um modelo causal específico para as ciências físicas.

Veremos aqui como correlações probabilísticas, componentes do primeiro item, são conectadas a representações causais gráficas, segundo item, através de algoritmos inferenciais, componentes do quarto item. Iniciaremos por uma introdução a noções básicas de estatística clássica.

### 2.2.1. *Conceitos básicos de estatística clássica*

É notável que uma ciência que começou com jogos de azar tenha se tornado o mais importante objeto do conhecimento humano.

(Pierre de Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, tradução livre)

Para compreendermos o papel das correlações probabilísticas na modelagem causal, apresentarei com mais detalhes distinções e conceitos básicos de probabilidade e estatística já introduzidos no capítulo anterior (seção 1.2.2), além de outros elementos essenciais da teoria clássica da probabilidade que serão de crucial importância para o tema desta pesquisa.

O que estou chamando aqui de teoria clássica da probabilidade, sobre a qual sustentam-se os modelos causais clássicos, inclui, basicamente, a definição clássica de probabilidade, os axiomas de Kolmogorov e o teorema de Bayes<sup>11</sup>.

Há diversas discussões envolvendo a teoria clássica da probabilidade, como aquelas referentes a diferentes interpretações, definições alternativas, entre outros problemas mais específicos. Ainda que esses problemas sejam muito relevantes, não poderei tratar deles aqui, mas recomendo a leitura do Capítulo VIII do clássico “A lógica da pesquisa científica” (1975 [1934]) de Karl Popper, além do Capítulo 3 do “Philosophy of Physics” (1992) de Lawrence Sklar. Nesta introdução, peço aos interessados nesses problemas que guardem algumas questões filosóficas que venham a surgir para uma pesquisa paralela. Minha intenção aqui é tornar claros alguns princípios básicos da estatística clássica, antes de questioná-los. Não obstante, gostaria de salientar que vários questionamentos foram deixados de lado.

Os primórdios do estudo rigoroso e sistemático das probabilidades, também chamado de teoria da probabilidade, remonta à análise das chances de sucesso ou fracasso em obtermos a vitória em jogos de azar. Um dos primeiros estudos sobre probabilidades de que temos notícia é o trabalho de Gerolamo Cardano (1501-1576), cuja obra *Liber de Ludo Aleae*, publicada postumamente no séc. XVII, é considerada o primeiro tratado sobre o tema. Cardano era um exímio jogador, além de teórico musical e médico, e foi usando de seu talento com jogos de azar que ele custeou sua formação acadêmica, cuja escolha foi rejeitada pelo pai. Deve-se ao seu trabalho as origens da definição clássica de probabilidade, bem como as bases de grande parte dos axiomas de Kolmogorov.

#### a) *A definição clássica de probabilidade*

De acordo com a definição clássica de probabilidade, o valor numérico da probabilidade de ocorrência de um determinado tipo de evento é definido como o resultado da divisão do número de casos favoráveis de ocorrência desse evento pelo número total de casos igualmente prováveis:

$$\text{Probabilidade de um evento} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número total de casos prováveis}}$$

---

<sup>11</sup> Não confundir aqui “teorema de Bayes”, um dos elementos da teoria clássica da probabilidade, com a chamada “interpretação bayesiana”, que, por sua vez, trata-se de um tipo de interpretação da teoria clássica.

Desse modo, a probabilidade de obtermos um número par no lançamento de um dado de seis faces não viciado (isto é, num lançamento de dado em que sair qualquer uma das seis faces é idealmente equiprovável) será 0.5, pois será igual à 3 (número de casos favoráveis) dividido por 6 (número total de casos igualmente prováveis). Já a probabilidade de sair um número qualquer no lançamento de um dado não viciado será de 1/6. E por aí vai.

Foi Pierre-Simon Laplace (1749-1827), na segunda edição (1814) de seu tratado *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), que enunciou claramente a definição clássica de probabilidade como o primeiro princípio que deveria guiar o cálculo de probabilidades. Ainda assim, devemos notar, que o que consideramos como teoria clássica da probabilidade, também chamada de teoria laplaceana, inclui o trabalho de diversos autores anteriores a ele, como o já citado Gerolamo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre De Fermat (1601-1665), Christiaan Huygens (1629-1695), James Bernoulli (1654-1705), Gottfried Leibniz (1646-1716), Abraham De Moivre (1667-1754) e Thomas Bayes (1702-1761).

Como bem já apontou Popper (1975 [1934], p. 162), a definição clássica de probabilidade, embora tenha ficado conhecida como ‘laplaceana’, “é pelo menos tão antiga como a “Doutrina do acaso” de De Moivre, que data de 1718”. De fato, nessa obra encontramos um enunciado da definição clássica de probabilidade logo no primeiro parágrafo da sua introdução:

A Probabilidade de um Evento é maior ou menor de acordo com o número de Chances pelas quais ele pode ocorrer comparado com o número total de Chances pelas quais ele pode ocorrer ou falhar em ocorrer. (DE MOIVRE, 1934 [1776], p. 1, tradução nossa).

Podemos representar a definição de De Moivre do seguinte modo:

$$\textit{Probabilidade de um evento} = \frac{\textit{Número de chances de ocorrência do evento}}{\textit{Número total de chances}}$$

E ainda antes disso, no tratado *Liber de Ludo Aleae* (1663) de Cardano, já a encontramos vinculada ao conceito de *circuito*, que corresponde ao que chamamos modernamente de *espaço amostral*. O circuito ou espaço amostral  $\Omega$  (não confundir com amostra, que é um subconjunto de  $\Omega$ ) é o total de casos prováveis de um dado experimento ou arranjo. O nome “circuito” vem de como chamavam o conjunto de números arranjados em série circular em uma roleta. Assim, se essa roleta tem uma série de 38 números, seu circuito é igual a 38. Um dado de seis faces, por sua vez, tem um circuito igual a 6. Desse modo, Cardano definiu a probabilidade de um

evento (no caso, a probabilidade de ocorrer um determinado resultado em um jogo aleatório), como a razão entre o número de casos favoráveis a esse evento e o circuito:

$$\textit{Probabilidade de um evento} = \frac{\textit{Número de casos favoráveis}}{\textit{Circuito}}$$

Por exemplo, a probabilidade de sair um número par em um jogo de roleta será igual ao número de casas pares dividido pelo número total do circuito. Em uma roleta com 36 números (e sem as casas 0 ou 00, comuns em roletas de cassinos), essa probabilidade será de 18/36, que equivale a 1/2, cuja razão é 0.5. A probabilidade de sair o número 5 em um lançamento de dados será igual a 1 (número de casos favoráveis) dividido por 6 (número total de eventos igualmente prováveis), o que resulta em 1,6666666666666667.

Considerando  $n(\Omega)$  como o número total de casos dentro do espaço amostral (o circuito),  $n(A)$  como o número de casos correspondentes ao evento de tipo  $A$  no espaço amostral  $\Omega$ , e  $P(A)$  como a probabilidade de ocorrência de um evento do tipo  $A$  no espaço amostral  $\Omega$ , podemos apresentar simbolicamente a definição clássica de probabilidade através da seguinte equação:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Podemos fornecer ainda uma formulação frequentista da definição clássica de probabilidade, de modo que o valor numérico do espaço amostral será o número total de resultados em um experimento e o número de eventos de tipo  $A$  será a frequência relativa de ocorrência de um tipo determinado de evento nesse espaço amostral. No entanto, creio que para essa introdução basta o leitor ter em mente a definição clássica de probabilidade em exemplos simplificados ideais, como os apresentados aqui envolvendo jogos de azar. Não obstante, creio que vale alertar a existência de discussão e tentativas de acomodação do cálculo de probabilidades em outros tipos de exemplo. Mas, como já aleguei anteriormente, essas discussões e tentativas envolvem interpretações e problemas relacionados a conceitos básicos, como aleatoriedade, frequência, equiprobabilidade, entre outros, que não poderiam ser tratados nesta tese sem desvio de foco.

b) *Os axiomas de Kolmogorov*

Os chamados *axiomas de Kolmogorov* foram originalmente apresentados pelo matemático russo Andrey Kolmogorov, em 1933, como solução para o problema da axiomatização da teoria da probabilidade colocado por David Hilbert em 1900. Hilbert apresentou no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris do ano de 1900, os chamados “Problemas de Hilbert”, consistindo em uma lista de 23 problemas da matemática sem solução até aquele momento. A axiomatização da teoria das probabilidades seria uma parte da solução para o sexto problema, o *Tratamento Matemático dos Axiomas da Física*:

Tratar da mesma maneira, por meio de axiomas, as ciências físicas em que a parte matemática desempenha um papel importante; em primeiro lugar estão a teoria das probabilidades e a mecânica. (HILBERT, 1900 [1902], p. 454, tradução nossa).

Ainda que os axiomas de Kolmogorov não ofereçam uma solução completa para o sexto problema de Hilbert, e talvez nem mesmo uma solução parcial, certamente eles compõem os fundamentos da teoria clássica da probabilidade e fornecem elementos básicos para compreendermos os alicerces estatísticos dos modelos causais clássicos.

Considerando  $P(A)$  como a probabilidade  $P$  de ocorrência de um evento qualquer  $A$ ,  $P(B)$  como a probabilidade  $P$  de ocorrência de um outro evento qualquer  $B$ , e  $\underline{\vee}$  como simbolizando a disjunção exclusiva entre a ocorrência desses dois eventos distintos. Os três axiomas<sup>12</sup> de Kolmogorov podem ser apresentados como se segue:

(A1) Para qualquer evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

(A2) Se  $A$  for o caso,  $P(A) = 1$ .

(A3) Se  $A$  e  $B$  forem incompatíveis,  $P(A \underline{\vee} B) = P(A) + P(B)$

O primeiro axioma, já utilizado por teóricos da probabilidade desde Cardano, nos diz que a probabilidade de ocorrência de um evento qualquer deve residir entre 0 e 1.

O segundo axioma, tão antigo quanto o primeiro, nos diz que quando a ocorrência de um evento é certa ou é o caso, a sua probabilidade de ocorrência é igual a 1. Em contrapartida, quando a probabilidade de ocorrência de um evento é nula, isto é, quando o evento não faz parte do espaço amostral, sua probabilidade de ocorrência é igual a 0.

---

<sup>12</sup> No artigo em que Kolmogorov apresenta os axiomas, “Foundations of the Theory of Probability” (1956 [1933]), encontramos de fato cinco axiomas. No entanto, como não estou fornecendo uma explicação a partir de teoria dos conjuntos, preferi ocultar alguns axiomas e optar pela linguagem de eventos aleatórios, que é apresentada por ele neste mesmo artigo como intercambiável com a linguagem de teoria dos conjuntos.

Já o terceiro axioma nos diz que a probabilidade de ocorrência disjuntiva exclusiva de quaisquer dois eventos incompatíveis será igual a soma da probabilidade de cada um deles. Dizer que dois eventos são incompatíveis ou mutuamente exclusivos significa afirmar que não podem ocorrer conjuntamente. Por exemplo, sair duas faces integralmente voltadas para cima em um mesmo lançamento de um dado de seis faces, ou cara e coroa em um mesmo lançamento de uma moeda. Pode sair cara *ou* sair coroa ( $A \vee B$ ), mas não pode sair cara *e* coroa ( $A \wedge B$ ). Do mesmo modo, pode sair 3 *ou* 6 no lançamento de um único dado, mas não 3 *e* 6.

Dessa forma, de acordo com o terceiro axioma, o cálculo da probabilidade de ocorrência de dois eventos incompatíveis será a soma das probabilidades de cada um deles. Por exemplo, a probabilidade de sair 3 ou 6 em um lançamento de dados de seis faces será  $1/3$  (aproximadamente 0.33), que corresponde à soma de  $1/6$  mais  $1/6$  (aproximadamente 0.166 mais 0.166). A probabilidade de sair cara ou coroa no lançamento de uma moeda será igual a 1, correspondendo à soma de 0.5, a probabilidade de sair cara, mais 0.5, a probabilidade de sair coroa.

### c) Variáveis e eventos

Quando fazemos um cálculo de caso ou experimento, usamos as notações  $P(X)$ ,  $P(Y)$ ,  $P(Z)$ , para nos referirmos a probabilidade de *variáveis de eventos*, como, por exemplo, “a umidade do ar”, “o hábito ou não de fumar”, “a prática de exercícios regulares”, etc. Usamos  $P(X=x)$ ,  $P(Y=y)$ ,  $P(Z=z)$ ,  $P(a < X < b)$ , ou simplesmente  $P(x)$ ,  $P(y)$ ,  $P(z)$ , para nos referirmos a valores específicos dessas variáveis, isto é, para nos referirmos a *eventos específicos*, como “17,3 g/m<sup>3</sup>”, “fumante”, “não fumante”, “sedentário”, “não sedentário”, etc; ou para nos referirmos a um *intervalo de valores*, isto é, à probabilidade de um evento estar entre os valores  $x$  e  $y$ . Geralmente, usamos também as notações  $P(e_1)$ ,  $P(e_2)$ , ...  $P(e_n)$  ou  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$  em definições, hipóteses, fórmulas ou regras. Por questões de maior simplicidade, adotarei a notação alfabética, salvo quando a numeração eventual for necessária ou quando for interessante adaptar a notação usada por algum autor.

### d) Conjuntos numéricos

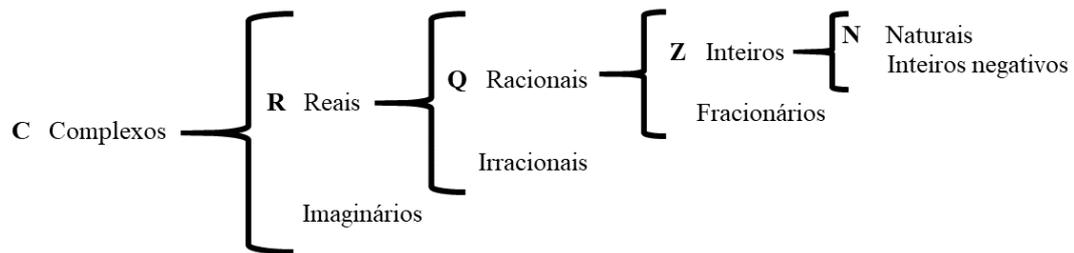
O conhecimento sobre tipos de conjuntos numéricos que podemos obter ou usar em uma atribuição de valores a eventos de um espaço amostral, será útil para entendermos as distinções

entre variáveis contínuas e variáveis discretas, e também para entendermos o significado das funções imaginárias, quando tratarmos dos fundamentos da mecânica quântica, no próximo capítulo.

Vou apresentá-los de forma bastante sucinta aqui, mas, eventualmente, voltarei a me referir e a tratar com mais detalhes de alguns pontos referentes a eles.

O conjunto dos números Naturais,  $N$ , inclui todos os números inteiros positivos:  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$ . O conjunto dos números Inteiros,  $Z$ , consiste na união de  $N$  com os números inteiros negativos:  $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ , de modo que  $N$  está contido em  $Z$ ,  $N \subset Z$ . O conjunto dos números Racionais,  $Q$ , é formado pela união de  $Z$  com os números fracionários não inteiros. Todos os números racionais correspondem a uma fração em que o divisor é um número natural e o dividendo um número inteiro, de forma que  $Q = \{x \in Q: x = a/b, a \in Z, b \in N, b \neq 0\}$ . Todo número inteiro é um número racional, já que equivale a uma fração com o número inteiro como dividendo e o número 1 como divisor, de modo que  $Z$  está contido em  $Q$ ,  $Z \subset Q$ . Nem todo número fracionário, por sua vez, é um número inteiro, como, por exemplo, os números equivalentes às frações  $3/9$ ,  $2/10$ ,  $4/3$ . O conjunto dos números Irracionais,  $I$ , é definido pelo não pertencimento ao conjunto dos números racionais,  $Q$ :  $I = \{x \in I: x \notin Q\}$ . Desse modo, os números irracionais não podem ser escritos em forma de fração, como no caso de raízes não exatas, por exemplo:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , decimais infinitos como  $\pi$  (3.14159265359...) ou o número áureo  $\Phi$  (1,6180339887...). O conjunto dos números Reais,  $R$ , é composto pela união de  $Q$  com o conjunto dos números irracionais,  $I$ . Desse modo, o conjunto dos números Irracionais,  $I$ , é definido pelo não pertencimento ao conjunto dos números racionais,  $Q$ :  $I = \{x \in I: x \notin Q\}$ . O conjunto dos números Complexos,  $C$ , consiste em números que possuem um componente real,  $a$ , e um componente imaginário,  $bi$ , produto de um número real multiplicado pelo chamado número  $i$ , que é igual a  $\sqrt{-1}$ , de modo que  $C = \{x \in C: x = a + bi, a \in R, b \in R, i = \sqrt{-1}\}$ . De acordo com o chamado teorema fundamental da álgebra, o conjunto dos números complexos é algebricamente fechado, o que significa que todas as equações polinomiais com coeficientes reais ou complexos tem uma solução em números complexos, de modo que  $R$  está contido em  $C$ ,  $R \subset C$ .

Há ainda outros tipos de números, mas são esses os conjuntos numéricos importantes para nós. Podemos apresentar a hierarquia de escopo dos conjuntos,  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ , através da seguinte figura:



**Fig. 4:** Conjuntos numéricos hierarquizados por escopo, a partir de C.

#### e) Variáveis contínuas e variáveis discretas

Variáveis podem ser consideradas *discretas* ou *contínuas*. Variáveis discretas têm valores finitos, como “fumante” e “não fumante”, “a luz está acesa” e “a luz não está acesa”, números das faces em um dado, números de casas num circuito de roleta. Esses valores, quando numerados, devem ser inteiros e não irracionais, com funções que podem ser racionais, incluindo números fracionários, mas ainda não irracionais. Uma variável contínua, por outro lado, é uma variável que pode assumir qualquer valor de um grupo infinito de valores numa série numérica real, isto é, “para quaisquer dois valores, há um terceiro valor entre eles” (Pearl et al., p. 8, (2016)) e esse valor é dado em números reais, como por exemplo o peso de alguém ou a quantidade de água por metro cúbico de ar.

No entanto, veremos no último capítulo que, estritamente falando, não há variáveis causais contínuas que possam ser interpretadas como uma medida reduzível em termos infinitesimais de números reais. Temos, antes, variáveis discretas binárias e variáveis com múltiplos valores, mas em ambos os casos valores finitos. Acontece que na prática, em grande parte dos casos, não há problemas no uso de cálculo contínuo como uma aproximação, pois muitas vezes um cálculo discreto tornaria tudo mais difícil ou impraticável. Ainda assim, uma reforma neste ponto parece crucial para a solução de paradoxos, ampliação do escopo de aplicação de modelos causais, além dos benefícios próprios do refinamento. Por hora, no entanto, não há problemas em seguirmos com a distinção clássica, já que o objetivo é mostrar as bases na estatística clássica dos modelos causais clássicos.

f) *Distribuições probabilísticas*

Tanto para variáveis discretas quanto para variáveis contínuas, a *distribuição probabilística* de uma dada variável  $X$  é o conjunto das probabilidades assinaladas para cada valor possível de  $X$  (Pearl et al. (2016), p. 11). A diferença é que esses valores para variáveis discretas serão iguais a um valor discreto pertencente ao conjunto dos números racionais, já os valores de variáveis contínuas serão valores de limites contínuos pertencentes ao conjunto dos números reais.

g) *Distribuição probabilística discreta*

Vejam os primeiramente como se dá a distribuição probabilística para variáveis discretas. De acordo com a nossa definição, a distribuição probabilística de uma dada variável  $X$  é o conjunto das probabilidades assinaladas para cada valor possível de  $X$ , sejam elas discretas ou contínuas. No lançamento de um dado de 6 faces, por exemplo, onde a variável discreta  $X$  é o número da face, temos 6 valores possíveis para  $X$ . A probabilidade de cada um desses valores, de acordo com a definição clássica de probabilidade, será  $1/6 = 0,1666666666666667 \cong 0,167$ . Desse modo, a distribuição probabilística de  $X$  seria  $P(X = 1) \cong 0,167$ ,  $P(X = 2) \cong 0,167$ ,  $P(X = 3) \cong 0,167$ ,  $P(X = 4) \cong 0,167$ ,  $P(X = 5) \cong 0,167$  e  $P(X = 6) \cong 0,167$ . Podemos imaginar ainda um jogo onde utilizamos um dado de 4 lados (como usado em jogos de *RPG*<sup>13</sup>) e que as pessoas ganham um prêmio em dinheiro dependendo do número que sair. Duas faces desse dado teriam o número 10 escrito nelas, uma face o número 50 e a outra face o número 100. Neste caso, a variável  $X$  poderia ter três valores possíveis:  $X = 10$ ,  $X = 50$  ou  $X = 100$ . Mas como há mais faces com o valor 10, as probabilidades desses três valores não seriam iguais e a distribuição probabilística da variável  $X$  seria  $P(X = 10) = 0,5$ ,  $P(X = 50) = 0,25$  e  $P(X = 100) = 0,25$ .

De acordo com o primeiro axioma de Kolmogorov, para qualquer evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ , de modo que cada uma das probabilidades dos valores em uma distribuição probabilística deverá estar entre 0 e 1. De acordo com o segundo axioma de Kolmogorov, se  $A$  for o caso,  $P(A) = 1$ , de forma que um evento com probabilidade 0 será um evento impossível de ocorrer, e, inversamente, um evento com probabilidade 1 será certo. A soma de cada uma das probabilidades em uma distribuição probabilística completa para uma dada variável  $X$  será igual

---

<sup>13</sup> *Role-playing games.*

a 1. Como podemos constatar facilmente somando os valores do nosso segundo exemplo:  $0,5 + 0,25 + 0,25 = 1$ .

A função que atribui a probabilidade a cada valor possível de uma variável aleatória discreta  $X$  é denominada função de probabilidade,  $f(x)$ , e será igual a probabilidade de  $X$  ter o valor  $x$ ,  $P(X = x)$ . De forma que  $f(x) = P(X = x)$ . Considerando as propriedades citadas no parágrafo anterior, o resultado da função de  $x$  deve estar entre 0 e 1, de modo que:

$$f(x) \geq 0$$

e

$$f(x) \leq 1$$

Com a introdução da conjunção:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

Além disso, vimos também que a soma das probabilidades de cada valor de  $x$  para  $X$ , isto é, de cada função de probabilidade de  $x$  para todos os valores possíveis de  $X$ , deve ser igual a 1, de forma que:

$$\sum_x f(x) = 1$$

No caso do lançamento do dado de 6 faces, por exemplo, a soma de cada uma das funções de probabilidade de  $x$  deverá resultar em 1:

$$\sum_x f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1$$

O que significa dizer:

$$\begin{aligned} \sum_x f(x) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &\quad + P(X = 6) = 1 \end{aligned}$$

De modo que:

$$\sum_x f(x) \cong 0,167 + 0,167 + 0,167 + 0,167 + 0,167 + 0,167 \cong 1$$

Já no caso do exemplo do jogo com o dado de 4 faces com 3 valores possíveis para a variável  $X$ , com diferentes funções para esses valores, o cálculo da soma de todas as funções de probabilidade de  $x$  para a variável  $X$  será:

$$\sum_x f(x) = 0,25 + 0,50 + 0,25 = 1$$

Para entender melhor o caráter discreto na distribuição de uma variável, podemos pensar na população de um povoado, cuja variável  $X$  do nosso espaço amostral  $\Omega$  seja o sexo biológico<sup>14</sup>. Digamos que nesse povoado moram 100 pessoas,  $n(\Omega)$ , sendo 56 do sexo feminino e 44 do sexo masculino. Vamos supor que em um sorteio aleatório de uma pessoa desse povoado queremos saber quais as chances de uma mulher ser sorteada. Chamemos este evento de  $e_1$ , e as de um homem ser sorteado, de evento  $e_2$ . Isto é, queremos saber qual é a distribuição probabilística para essa variável  $X$  em  $\Omega$ , que nesse caso seria  $P(e_1) = 0,56$ ,  $P(e_2) = 0,44$ . Também podemos constatar facilmente nesse exemplo a propriedade das funções somadas ser igual a 1. Diante disso, não faria sentido para distribuição probabilística da variável considerarmos graus intermediários numericamente infinitos, como faria se considerássemos a variável contínua de peso, por exemplo.

#### *h) Expectativa média*

Quando tratamos de variáveis discretas, em diversos casos, a concepção de uma média parece não fazer qualquer sentido, como nesse exemplo de secção binária por sexo biológico. Podemos ter uma expectativa de que a pessoa sorteada seja mulher, dado que a probabilidade do evento  $e_1$  (0,56), uma mulher ser sorteada, é maior que a probabilidade do evento  $e_2$  (0,44), um homem ser sorteado, de forma que  $P(e_1) > P(e_2)$ . Mas não podemos estabelecer um valor

---

<sup>14</sup> Desconsidero aqui por simplicidade e não por um pensamento reacionário a possibilidade de diferentes sexos e gêneros. No caso de gênero, parece bastante adequado tratarmos como uma variável de espectro contínuo ou ao menos como discretamente complexa, e mesmo no que se refere a sexo biológico, creio que há casos em biologia em que a divisão comum entre sexo masculino e feminino pode ser violada.

numérico médio para essa expectativa. No entanto, em muitos casos envolvendo variáveis discretas, podemos por aproximação estabelecer uma média numérica. Essa aproximação é muito útil na prática quando lidamos com distribuições probabilísticas muito extensas, já que ao invés de termos de lidar com cada uma das funções, o que pode ser impraticável ou desnecessário, podemos calcular uma expectativa média de resultado. Desse modo, há sempre alguma perda de informação, é claro. Porém, conseguimos representar a distribuição probabilística de forma sucinta, o que para muitos fins é mais do que suficiente.

Não obstante, no caso de variáveis discretas, o valor da expectativa média será sempre uma aproximação, já que para muitas variáveis sequer faz sentido atribuir um número aos eventos, ou quando faz, esse número será um número inteiro e não um número irracional, de forma que  $\forall x (x) \in \mathbb{Z} \wedge \notin \mathbb{I}$ . O valor da probabilidade de um evento será um número racional, permitindo frações que expressam a razão entre números inteiros, mas ainda não incluindo números irracionais, de forma que  $\forall x f(x) \in \mathbb{Q} \wedge \notin \mathbb{I}$ .

O valor da expectativa média, valor esperado, ou da também chamada esperança matemática,  $E(X)$ , de uma variável discreta  $X$  será a soma dos produtos do valor de cada evento  $x$  pelo valor da função de probabilidade de  $x$ . Isto é, multiplicamos cada valor de  $x$  pela sua probabilidade correspondente  $P(X = x)$  e somamos cada um desses resultados:

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Usando  $P(X = x)$  no lugar de  $f(x)$ :

$$E(X) = \sum_x x P(X = x)$$

No lançamento de um dado de seis faces, por exemplo, o valor esperado seria dado por:

$$E(X) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right)$$

O que resultaria em aproximadamente 3,5, já que a razão de  $1/6$  é  $0.1666666666666667$ :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (0.1666666666666667) + (0.3333333333333334) + \\
 &(0.5000000000000001) + (0.6666666666666668) + (0.8333333333333335) + (1) \\
 &= 3,5000000000000007
 \end{aligned}$$

Já no exemplo do dado de 4 faces, cuja distribuição é  $P(X=10) = 0,5$ ,  $P(X=50) = 0,25$  e  $P(X=100) = 0,25$ , o valor esperado  $E(X)$  seria:

$$E(X) = (10 \times 0,5) + (50 \times 0,25) + (100 \times 0,25) = 42,5$$

Quando temos poucos eventos possíveis compondo o espaço amostral de uma variável discreta, o estabelecimento de uma média pode parecer não muito útil, principalmente quando os eventos são equiprováveis, como em um dado de 6 faces. No entanto, é fácil imaginar casos em que temos incontáveis eventos possíveis ou há uma diferença considerável entre o valor das funções probabilísticas dos eventos do espaço amostral. Considere, por exemplo, um jogo de pesca ao peixe (jogo da pescaria) muito comum em quermesses, onde o espaço amostral  $\Omega$  é composto por 200 peixes de brinquedo,  $n(\Omega)$ , sendo que embaixo de cada peixe de brinquedo há um valor, que pode ser igual a 10, 50 ou 100, de forma que a pessoa ganha o valor que estiver no peixe em dinheiro. Para participar do jogo você deve pagar 20 reais. Digamos que a distribuição probabilística da variável  $X$ , que corresponde ao valor do prêmio em dinheiro, seja a seguinte:  $P(X=10) = 0,9$ ,  $P(X=50) = 0,05$ ,  $P(X=100) = 0,05$ . Nesse caso, o valor esperado  $E(X)$  seria de 16,5:

$$E(X) = (10 \times 0,9) + (50 \times 0,05) + (100 \times 0,05) = 16,5$$

$$E(X) = 9 + 2,5 + 5 = 16,5$$

Isso nos diz muito sobre o resultado que devemos esperar desse jogo: é muito mais provável que você pesque um peixe que valha 10 reais (menos do que você pagou para jogar) do que um que valha 50 ou 100 reais. E você poderia concluir isso tendo somente conhecimento do valor esperado  $E(X)$ , mesmo sem saber exatamente quantos peixes compõe o espaço amostral e qual a distribuição probabilística completa da variável.

Podemos ainda calcular o valor esperado de funções da variável  $X$ , além de somente a função probabilística de  $X$ , através da soma de todos os produtos das funções de  $x$  pelas funções probabilísticas de  $x$ ,  $g(x)P(X=x)$ , sobre todos os valores possíveis de  $X$ , de forma que:

$$E |g(X)| = \sum_x g(x) P(X = x)$$

Usando  $f(x)$  no lugar de  $P(X = x)$ :

$$E |g(X)| = \sum_x g(x) f(x)$$

Por exemplo, digamos que no jogo de dados de 4 faces, com distribuição igual  $P(10) = 0,5$ ,  $P(50) = 0,25$  e  $P(100) = 0,25$ , ganhamos um prêmio em dinheiro igual ao quadrado do número exibido na face obtida em um lançamento do dado, de forma que  $g(X) = X^2$ . Desse modo, o valor esperado do prêmio será:

$$E |g(X)| = (10^2 \times 0,5) + (50^2 \times 0,25) + (100^2 \times 0,25) = 3.175$$

O *valor esperado*,  $E(X)$ , é equivalente à chamada *média*, que é simbolizada pela letra grega  $\mu$ . Assim, podemos representar a expectativa média de forma ainda mais sucinta:

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

#### i) *Variância e desvio padrão*

A *variância* de uma variável  $X$ , que pode ser simbolizada por  $Var(X)$  ou  $\sigma_X^2$ , é a medida do quanto os valores das funções probabilísticas de  $X$  desviam da média de  $X$ ,  $\mu$ . Quanto mais os valores dessas funções são próximos à média, menor será a variância da variável. Inversamente, se os eventos possíveis de uma variável podem assumir um leque maior de valores menos próximos da média, maior será a variância.

A variância é equivalente ao chamado *desvio padrão*,  $\sigma$ , ao quadrado. Chegamos ao valor de  $\sigma$  através do valor de  $\sigma^2$ . Calculamos a variância de uma variável  $X$  através da soma dos produtos de todas as funções probabilística de  $X$ ,  $f(x)$ , pelas diferenças ao quadrado de cada valor de evento  $x$  menos a média  $\mu$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

Consideremos, por exemplo, o lançamento de um dado simples de 6 faces. Neste caso, a partir do valor da média  $\mu$ , podemos chegar ao valor da variância  $\sigma^2$  de  $X$  (valor da face do dado):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left( (1 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (2 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (3 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (4 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) \\ &\quad + \left( (5 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (6 - 3,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) \\ &= \left( (-2,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (-1,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (-0,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (0,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) \\ &\quad + \left( (1,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) + \left( (2,5)^2 \times \frac{1}{6} \right) \\ &= \left( 6,25 \times \frac{1}{6} \right) + \left( 2,25 \times \frac{1}{6} \right) + \left( 0,25 \times \frac{1}{6} \right) + \left( 0,25 \times \frac{1}{6} \right) + \left( 2,25 \times \frac{1}{6} \right) \\ &\quad + \left( 6,25 \times \frac{1}{6} \right) = 1,04 + 0,37 + 0,42 + 0,42 + 0,37 + 1,04 = 3,66 \end{aligned}$$

Desse modo, portanto, dizemos que o valor da *variância*,  $\text{Var}(X)$  é igual a 3,66 ou que  $\sigma^2$  é igual a 3,66. Para chegar ao desvio padrão, basta calcularmos a raiz quadrada de 3,66, voltando assim à escala original (não elevada ao quadrado):

$$\sigma_X = \sqrt{3,66} = 1,9$$

Isso quer dizer que num lançamento de dado de 6 faces, é provável que o resultado esteja cerca de dois números de desvio da média 3,5. Isso cobriria desde 1,5 até 5,5. No caso de um dado de 6 faces em que todos os números seriam igualmente prováveis, há um desvio padrão e variância amplos.

Para esclarecer melhor esse ponto, consideremos um caso com menor desvio padrão e variância.

Imagine que em uma escola de uma cidade pequena com pouca desigualdade social, queremos saber a variância e o desvio padrão sob a variável “valor em dinheiro que os alunos têm em seus bolsos”. Digamos que o espaço amostral é de 100 alunos e que a maioria tinha 10 reais em seus bolsos, com poucos alunos tendo um pouco menos ou um pouco mais, exibindo

uma distribuição igual a  $P(X = 5) = 0,05$ ,  $P(X = 8) = 0,1$ ,  $P(X = 10) = 0,7$ ,  $P(X = 12) = 0,1$ ,  $P(X = 15) = 0,05$ . Assim, obtemos uma média igual a:

$$\mu = (5 \times 0,05) + (8 \times 0,1) + (10 \times 0,7) + (12 \times 0,1) + (15 \times 0,05) = 10$$

Isso significa que escolhendo um aluno ao acaso, é mais provável que ele tenha um valor igual ou próximo a 10 reais em seu bolso. Podemos calcular a variância a partir dessa média:

$$\begin{aligned} Var(X) &= ((5 - 10)^2 \times 0,05) + ((8 - 10)^2 \times 0,1) + ((10 - 10)^2 \times 0,7) \\ &\quad + ((12 - 10)^2 \times 0,1) + ((15 - 10)^2 \times 0,05) = 3,3 \text{ reais}^2 \end{aligned}$$

O que é equivalente a  $\sigma^2 = 3,3$ , de onde podemos obter o valor do desvio padrão  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{3,3} = 1,8$$

Isso significa que temos uma variância e um desvio padrão relativamente pequenos se compararmos ao lançamento de um dado de 6 faces. Enquanto num lançamento de um dado de 6 faces o desvio padrão de 1,9 abrange todos os casos possíveis, neste caso um desvio padrão de 1,8 abarcaria poucos resultados distantes da média. É mais provável que um aluno escolhido ao acaso tenha de 8 a 12 reais no bolso, e não 5 ou 15, que são valores mais distantes da média de 10 reais.

Um ponto importante relacionado à variância é que predições de eventos sob uma dada variável em um dado espaço amostral serão mais precisas quanto menor for a variância. Uma variância grande indica que diversos eventos têm probabilidade aproximada de ocorrência e uma variância pequena indica que determinados eventos têm maior probabilidade de ocorrência que outros.

#### j) *Distribuição probabilística contínua*

A distribuição probabilística de uma variável contínua também será o conjunto das probabilidades assinaladas para os valores possíveis da variável no espaço amostral em consideração. No entanto, diferentemente do que é o caso com as variáveis discretas, os valores das variáveis contínuas podem assumir valores numéricos decimalmente infinitos entre dois

valores, não se restringindo a valores do conjunto dos números racionais, mas também incluindo os números irracionais. Isso significa que é impossível enumerar todos os possíveis valores pontuais de uma variável contínua, como podemos fazer com variáveis discretas. Variáveis contínuas seriam, nesse sentido, infinitamente divisíveis.

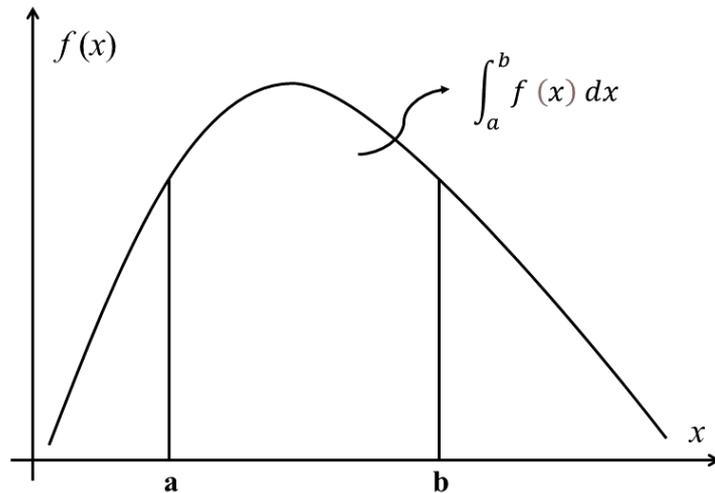
Considere os valores possíveis materiais de uma determinada moeda, por exemplo, o Real Brasileiro. Podemos enumerar cada um dos valores e, por mais que uns sejam divisíveis por outros, chegamos a um valor indivisível: um centavo. Considerando apenas as notas, os valores possíveis que cada uma pode ter são todos inteiros e facilmente enumeráveis: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 e 200. Não achamos notas no valor de 2 reais e meio, ou 2,656789097... Já a variável “peso de uma pessoa” é considerada uma variável contínua, havendo infinitos valores possíveis entre dois valores, de forma que não podemos enumerar cada um deles. Entre 60 e 70 quilogramas, por exemplo, admitimos a possibilidade de infinitos valores, incluindo os valores do conjunto dos números reais e não somente dos racionais.

Ainda que em um determinado espaço amostral, uma variável considerada contínua, como o peso, possa apresentar poucos valores e todos racionais, sendo a sua distribuição, neste caso, facilmente enumerável, o que está em causa é que *cada um dos valores possíveis* não pode ser enumerado, como o podem no caso de todos os valores possíveis de uma nota de Real, ou no caso das faces de um dado simples ou de um circuito de roleta. Entre 60 e 70 quilogramas, haveria infinitos valores possíveis que essa variável poderia assumir, como, por exemplo: 60,5; 64,636363; 65; 67,786906736...; 69,999. É interessante notar que variáveis discretas com muitos valores possíveis, ainda que todos racionais, podem também não ser enumeráveis na prática e tratá-las como se fossem contínuas acaba sendo um recurso necessário, mesmo se estivermos usando um computador ou inteligência artificial para isso.

Por conta dessas características, a distribuição probabilística de uma variável contínua não pode ser o conjunto de funções probabilísticas equivalentes a um valor específico discreto do tipo  $P(X = x)$ , mas sim de funções integradas entre limites:  $P(a < X < b)$ . Ambos os tipos de funções (discretas ou contínuas) poderão ser abreviados como  $P(x)$  ou  $P(A)$ . Essas funções integradas são chamadas de *funções densidade de probabilidade* (comumente abreviadas por *fdp*):

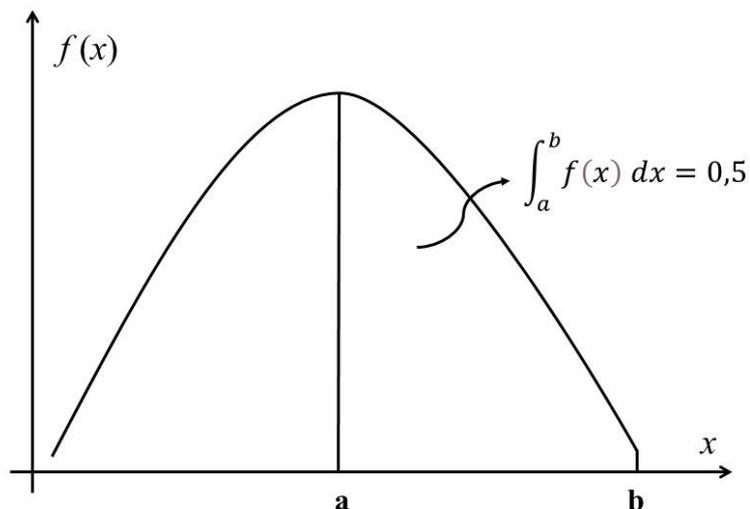
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Desse modo, o valor das funções integradas entre limites  $a$  e  $b$  (onde  $a < b$ ) será o valor probabilístico de  $a < X < b$ . Em uma representação em plano coordenado da função contínua  $f(x)$  pelos valores de  $x$ , a área sob a curva  $f(x)$ , no intervalo entre  $a$  e  $b$ , será o valor da função integral no intervalo  $[a, b]$ :



**Fig. 5:** Representação coordenada de uma função densidade de probabilidade.

No seguinte plano coordenado, por exemplo, o valor da função no intervalo de  $a < X < b$  é igual a 0,5:



**Fig. 6:** Representação de uma função densidade de probabilidade com área igual a 0,5.

Calculamos o valor de áreas mais difíceis de definir através de computação simples, usando softwares populares como o *excel* da *microsoft* ou também através de tabelas funcionais

analógicas. Para definir esses valores, precisamos determinar a área total da curva através da distribuição contínua total da variável  $X$  em  $\Omega$ , sua média  $\mu$  e sua variância  $\sigma^2$ , obtendo, desse modo, a topologia da curva. Existem diversos tipos de distribuições que podemos obter para variáveis em espaços amostrais, tanto discretas, quanto contínuas. Mais à frente, apresentarei a distribuição contínua normal. Mas antes precisarei fazer ainda algumas observações adicionais sobre as propriedades das *fdp* e distribuições contínuas.

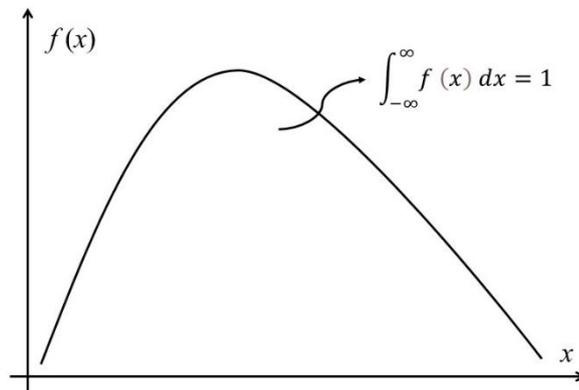
Os valores dessas funções devem ser iguais ou maiores que 0 e menores ou iguais a 1, onde todo  $x$  pertence ao conjunto dos números reais, de modo que  $1 \geq f(x) \geq 0, \forall x(x) \in \mathbb{R}$ . Podemos também representar essa propriedade das *fdp* em consonância com o primeiro axioma de Kolmogorov do seguinte modo:

$$0 \leq P(a < X < b) \leq 1$$

A distribuição contínua total de uma variável  $X$  será a função integral infinitesimal total das *fdp* dessa variável, cujo resultado deve ser igual a 1. Isso quer dizer que para uma variável aleatória contínua o conjunto dos seus possíveis valores será um intervalo ou um conjunto de intervalos com valor total 1. Por conta dos valores das *fdp* pertencerem ao conjunto dos números reais, a função integral total correspondente à distribuição probabilística completa de uma variável contínua será uma função integral entre limites infinitos  $[-\infty, \infty]$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

A função integral total de uma variável também é uma *fdp* como as *fdp* parciais, mas com a propriedade de ser igual a 1, tendo como sua área a totalidade da área sob a curva em um plano coordenado (enquanto as parciais podem se aproximar de 1, mas sempre têm um valor menor e correspondem a uma parcela da área e não a sua totalidade):



**Fig. 7:** Representação coordenada de uma função densidade de probabilidade com área igual a 1.

*k) Média, variância e desvio padrão de variáveis contínuas*

A determinação da expectativa média  $\mu$ , da variância  $\sigma^2$  e do desvio padrão  $\sigma$  de uma variável contínua  $X$ , será análoga à determinação discreta, com a diferença que as *fdp* são consideradas como funções de  $x$  e as somas são substituídas por integrais, de forma que:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) d(x)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) d(x)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

*l) Distribuição normal*

Quando temos muitos dados discretos para calcular ou quando tratamos de uma variável considerada contínua, podemos usar a chamada *distribuição normal*, que nos permite uma estimativa do valor médio de expectativa de ocorrência desses eventos e do desvio padrão dessa média, além de cálculos a partir deles. Para casos ou que não se adequam a uma distribuição normal na escala da variável ou que uma aproximação contínua não seria interessante ou possível, podemos aplicar outros tipos de distribuição coordenada, como a distribuição discreta de Poisson, por exemplo. Podemos ainda usar o recurso de transformação de variáveis, como o fazemos na distribuição log-normal, na distribuição recíproca, na de raiz quadrada ou na de raiz

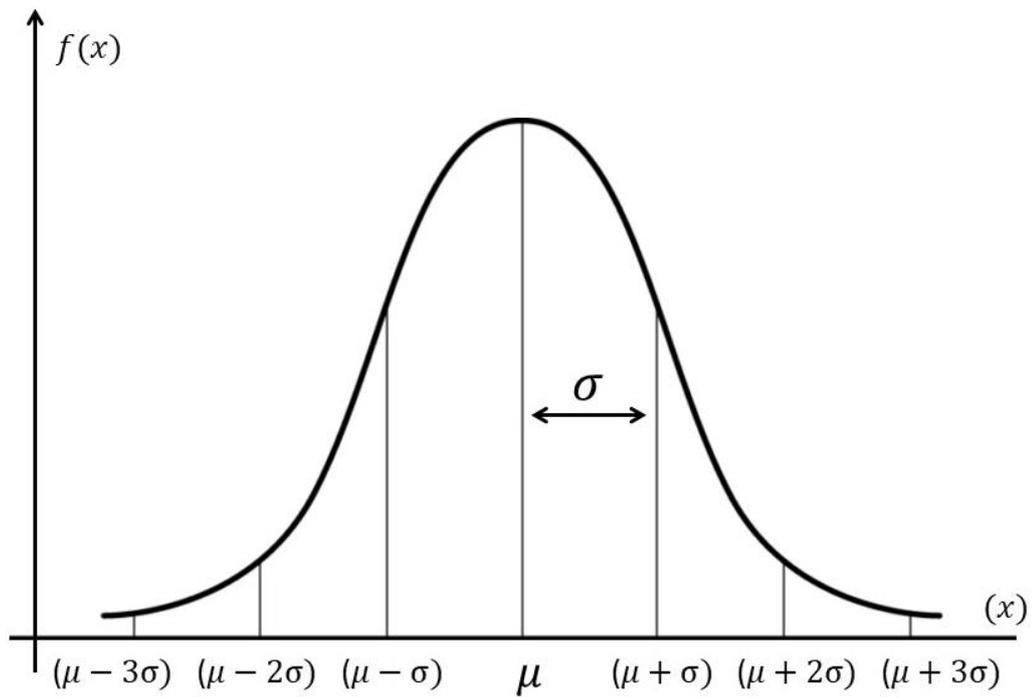
cúbica. De qualquer forma, a distribuição normal acaba sendo um dos recursos mais importantes usados em cálculos de distribuições estatísticas, tendo aplicação prática em diversas áreas.

A distribuição normal é representada por uma função matemática que envolve os parâmetros de *média*, *variância* e *desvio padrão*, e é descrita através de uma curva em formato de sino, por isso também é chamada de “curva de bell” ou “curva de sino”. Em sua formulação tradicional, essa curva tem a propriedade da simetria em torno da média, embora atualmente haja a formulação generalizada da distribuição normal para abrigar curvas normais assimétricas que ainda mantêm o formato de sino. Nessa distribuição, o coeficiente de assimetria pode ser parametrizado. Distribuições normais simétricas também são chamadas e conhecidas como “curvas de Gauss”, pois foram amplamente popularizadas por Carl Gauss, o chamado “príncipe da matemática”, através de demonstrações de suas aplicações práticas.

Uma distribuição é considerada normal se sua função segue a seguinte forma:

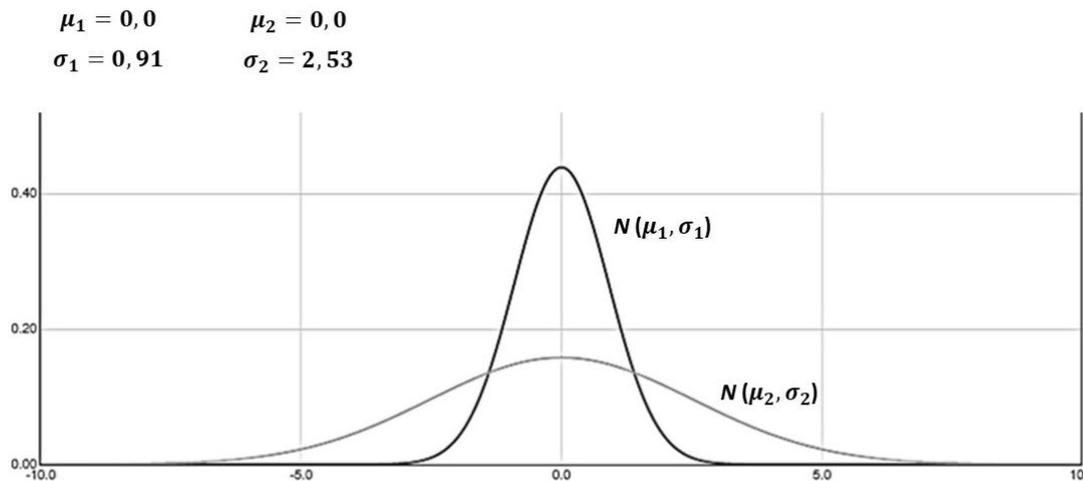
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Em que  $\sigma$  é o desvio padrão,  $\sigma^2$  é a variância,  $\mu$  é a média,  $\pi$  e  $e$  números irracionais transcendentais. O número  $\pi$  nos é bem familiar em cálculos envolvendo curvas. Já o número  $e$ , conhecido como número Neper ou número de Euler, é menos popular, mas é uma constante exponencial fundamental da matemática utilizada pelo menos desde o século XVII. A simetria horizontal da curva normal padrão em relação a reta vertical  $x = \mu$  é garantida pela elevação dos termos expoentes ao quadrado. Quando representada graficamente fica bem mais fácil entender o sentido e propriedades de uma função normal, como podemos verificar na seguinte figura:



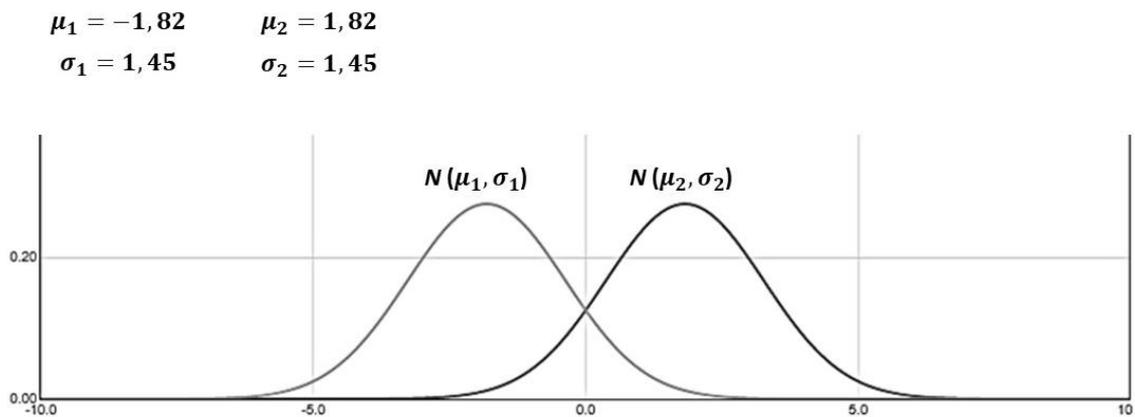
**Fig. 8:** Exemplo grafo de uma distribuição normal.

Quanto maior for o seu desvio padrão e sua variância, mais espalhada será a curva da função normal, resultando em uma forma mais achatada. Inversamente, uma variância menor apresentará uma curva mais estreita em relação a um desvio e variância maiores. Uma curva mais estreita, portanto, corresponderá a um valor menos variável e uma possibilidade de predição mais precisa, enquanto que uma curva mais achatada corresponderá a uma gama mais ampla de valores com probabilidade próxima de ocorrência. Veja, por exemplo, um plano coordenado onde podemos comparar as curvas das funções  $N(\mu_1, \sigma_1)$  e  $N(\mu_2, \sigma_2)$ , com  $\mu_1 = \mu_2$  e  $\sigma_1 < \sigma_2$ :



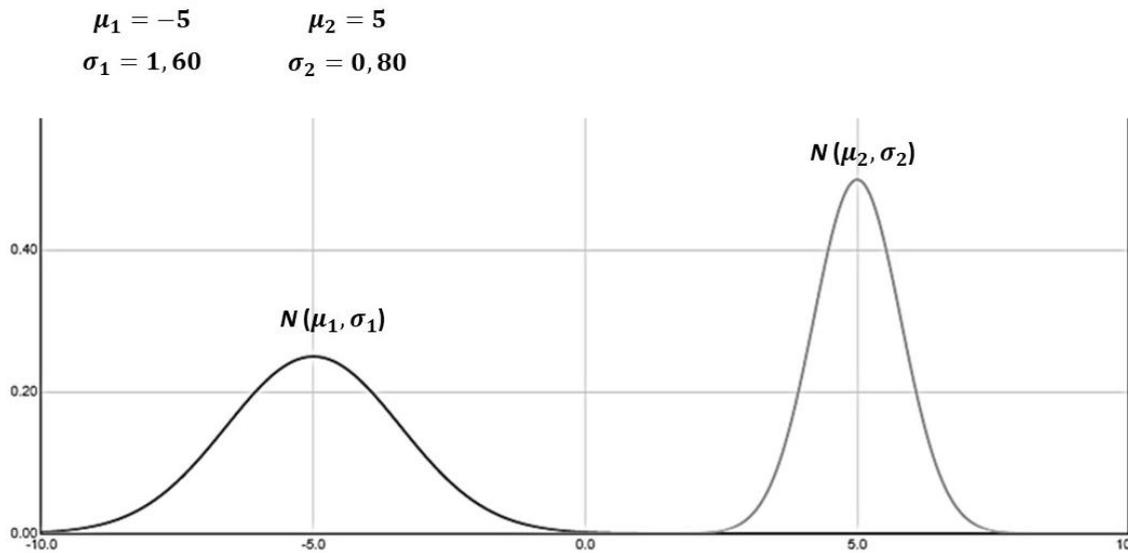
**Fig. 9:** Distribuições normais com média igual e diferentes variâncias.

Já nesta figura, podemos comparar duas curvas  $N$  com mesmo valor de desvio padrão, de forma que  $\sigma_1 = \sigma_2$ , mas com médias diferentes, de forma que  $\mu_1 < \mu_2$ :



**Fig. 10:** Distribuições normais com igual variância e médias distintas.

Aqui, podemos comparar curvas com diferentes médias e desvios padrão:

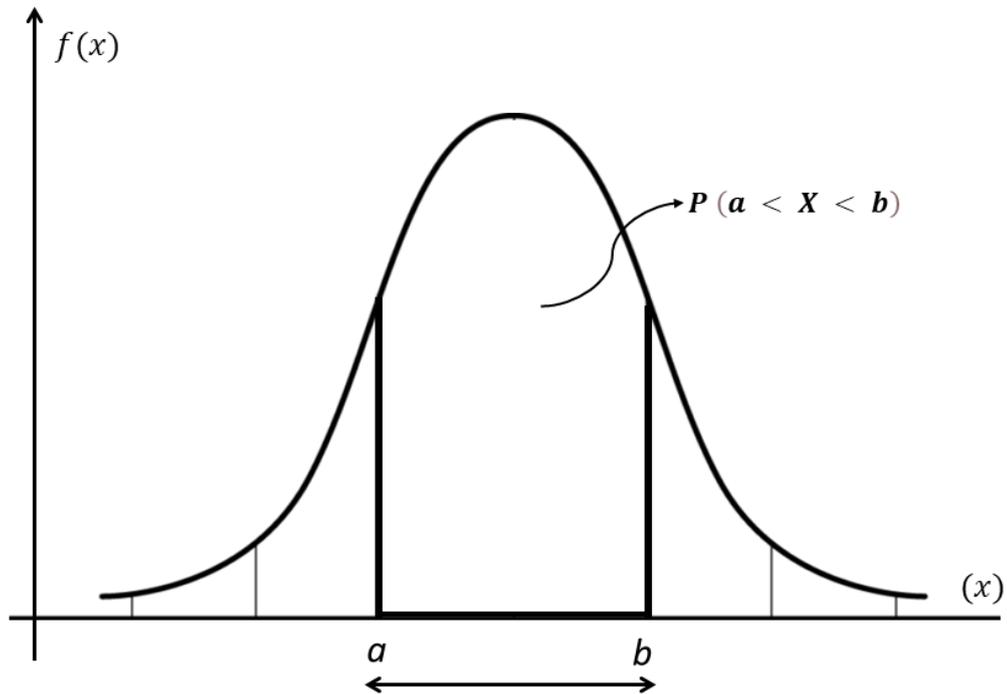


**Fig. 11:** Distribuições normais com médias e variâncias distintas.

Assim como é o caso para qualquer variável contínua, o cálculo do valor da probabilidade de ocorrência de eventos será igual à área sob a curva  $f(x)$  no intervalo entre  $a$  e  $b$ , correspondendo assim a uma função integral no intervalo  $[a, b]$  com as propriedades topológicas de uma distribuição normal, de modo que:

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x)$$

Em um exemplo grafo:



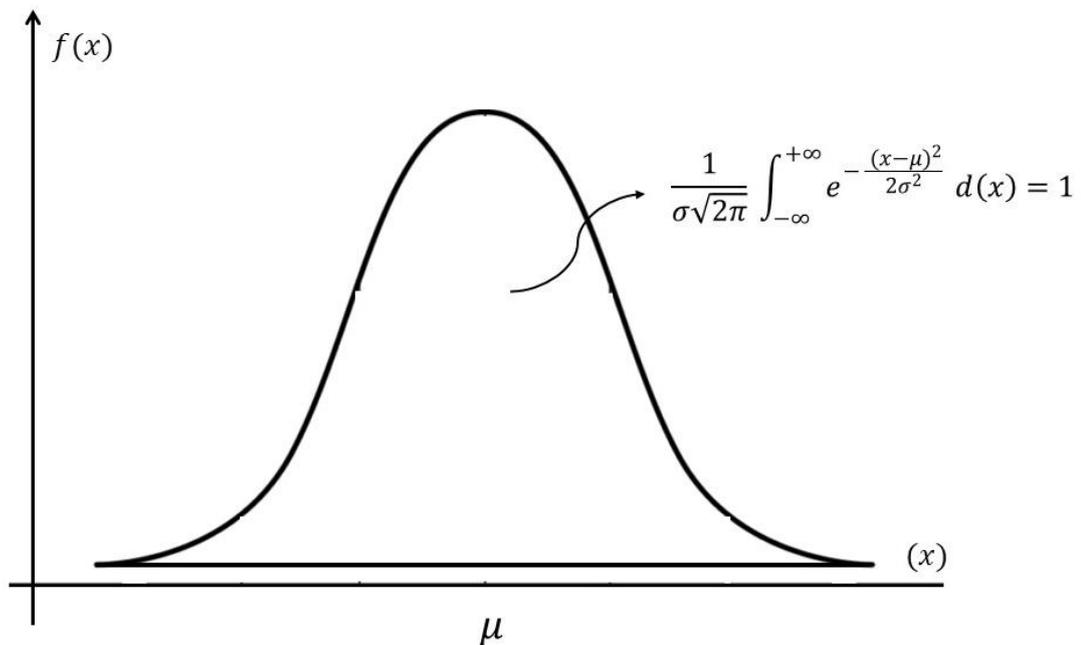
**Fig. 12:** Representação gráfica da função integral de um intervalo  $[a, b]$  em uma distribuição normal.

Embora o cálculo possa parecer complicado, a distribuição normal completa e as *fdp* para uma dada variável num espaço amostral são facilmente obtidas com o uso de *softwares* populares já citados aqui ou tabelas analógicas.

Outra propriedade da distribuição normal partilhada com qualquer distribuição contínua é que a área total sob a curva de  $f(x)$  deve ser igual a 1, de modo que:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x) = 1$$

Graficamente:



**Fig. 13:** Representação da área total da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal.

*m) Probabilidade marginal*

Como já mencionei no capítulo anterior, a *probabilidade marginal* de um evento é a probabilidade bruta de ocorrência deste evento em um espaço amostral. Podemos citar como exemplo a probabilidade total de escolhermos uma Rainha em um *deck* de cartas, independentemente do seu naipe, ou a probabilidade de sair um número par em um lançamento de dado, incluindo todas as faces pares.

*n) Lei da probabilidade total*

Tecnicamente, o cálculo da probabilidade marginal de um evento será feito através da *lei da probabilidade total*. Para compreendermos do que se trata e como chegamos à lei da probabilidade total, voltemos aos axiomas de Kolmogorov. De acordo com o terceiro axioma de Kolmogorov, também conhecido como “postulado da aditividade”, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1.1)$$

Se assumirmos também a lei do terceiro excluído,  $(B \vee \neg B)$ , e a lei da não contradição,  $\neg (B \wedge \neg B)$ <sup>15</sup>, assumiremos que a probabilidade de ocorrência dos eventos “A e B” e “A e não B” são mutuamente exclusivos. Disso e do postulado da adição (1.1) segue-se que:

$$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B) \quad (1.2)$$

Para facilitar a compreensão desse passo, imaginemos um *deck* de cartas de baralho. Se tirarmos os coringas do *deck*, haverá metade das cartas do naipe vermelho e metade do naipe preto (não vermelhas), o que facilitará as nossas contas. Também para facilitar, vamos manter no nosso baralho somente os Ases, Valetes, Rainhas e Reis, havendo quatro de cada. Abaixo, há uma tabela exaurindo todos os casos possíveis neste exemplo, o que nos auxiliará a visualizar melhor o espaço amostral:

	Q	Q	Q	Q	K	K	K	K	J	J	J	J	A	A	A	A
	♠	♣	♥	♦	♠	♣	♥	♦	♠	♣	♥	♦	♠	♣	♥	♦
Vermelhos			X	X			X	X			X	X			X	X
Pretos	X	X			X	X			X	X			X	X		

**Tabela 3:** Tabela exaurindo os casos possíveis de sorteio aleatório em um baralho de 16 cartas seccionadas por figura, naipe e cor de naipe.

Considere “escolher a carta Rainha de um baralho” como o evento  $A$  e “escolher uma carta de naipe vermelho” como evento  $B$ . A probabilidade de alguém escolher uma carta de baralho ao acaso e “sair uma Rainha”,  $A$ , será a soma das probabilidades de “sair uma Rainha e a carta ser de um naipe vermelho”,  $A \wedge B$ , e a probabilidade de “sair uma Rainha e a carta não ser de um naipe vermelho”,  $A \wedge \neg B$ . Assim, há duas Rainhas de naipe vermelho e duas de naipe preto. Escolhendo uma carta ao acaso, a probabilidade de ser uma Rainha,  $A$ , será igual a soma da probabilidade dela ser uma Rainha e ser do naipe vermelho,  $A \wedge B$ , que de acordo com o nosso espaço amostral é  $1/8$  (0.125), mais a probabilidade dela ser uma Rainha e não ser do naipe vermelho,  $A \wedge \neg B$ , no nosso exemplo  $1/8$  (0.125), resultando em  $1/4$  (0.25):

<sup>15</sup> E podemos não assumir, se escolhermos como base uma lógica não clássica, como uma lógica de tipo paraconsistente, que aceita casos que violem a lei clássica de não contradição, ou a lógica intuicionista, que, por sua vez aceita casos que violem a lei clássica do terceiro excluído. Havendo ainda a possibilidade de adoção de uma lógica híbrida, que não assumam ambas as regras como postuladas.

$$P(A) = 1/8 + 1/8$$

$$P(A) = 0,125 + 0,125$$

$$P(A) = 0,25$$

Se soubermos que tiramos uma Rainha, de forma que a probabilidade de a carta ser Rainha seja igual a 1, o que podemos obter diminuindo o espaço amostral total somente para as 4 rainhas ou quando temos informação indireta só do valor da variável  $A$ , mas não da variável  $B$  da carta escolhida, a probabilidade dela ser vermelha seria 0.5 e a probabilidade dela não ser vermelha seria também 0.5:

$$P(A) = 1/2 + 1/2$$

$$P(A) = 0,5 + 0,5$$

$$P(A) = 1$$

Com a expressão generalizada dessa regra, chegamos à lei da probabilidade total:

$$P(A) = P(A \wedge B_1) + P(A \wedge B_2) + \dots + P(A \wedge B_n) \quad (1.3)$$

Para melhor exemplificar a expressão generalizada da regra, vamos considerar como evento  $A$ , a escolha de uma rainha nesse mesmo *deck* de figuras, e os eventos  $B_1, B_2 \dots B_n$  como possíveis resultados de uma escolha aleatória sob a variável de naipe (espadas, paus, copas, ouros) e não só cor do naipe (vermelho ou preto) usado nos exemplos anteriores, de modo que  $B_1$  será o evento da carta escolhida ser do naipe de espadas,  $B_2$  será o evento da carta ser do naipe de paus,  $B_3$  será o evento da carta ser do naipe de copas, e  $B_4$  será o evento da carta sorteada ser do naipe de ouros. Assim, é fácil perceber que a probabilidade de tirarmos uma rainha numa escolha aleatória será igual a soma da probabilidade dessa carta ser uma rainha de espadas, mais a probabilidade de ela ser uma rainha de paus, mais a probabilidade dela ser uma rainha de copas, mais a probabilidade dela ser uma rainha de ouros:

$$1/4 = 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16$$

O que é equivalente a:

$$0.25 = 0.0625 + 0.0625 + 0.0625 + 0.0625$$

Desse modo, calculamos a probabilidade marginal de um evento através da regra da probabilidade total: o valor da probabilidade marginal de um evento  $A$  para uma variável  $X$  é a soma de todas as conjunções possíveis do evento  $A$  e  $B_i$  (conjunto total dos eventos  $B_1, B_2 \dots B_n$ ) para uma variável  $Y$ . Esse procedimento é chamado de "marginalização do evento  $A$  sob  $B$ ".

*o) Probabilidade condicional*

Já a *probabilidade condicional* de ocorrência de um evento é a probabilidade de um evento ocorrer dada a ocorrência de outro evento ou eventos. Ela é representada simbolicamente por  $P(e_n | e_m)$ ,  $P(A | B)$ ,  $P(X = x | Y = y)$  ou ainda  $P(x | y)$ .

O cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento  $A$ , dada a ocorrência de um outro evento  $B$ ,  $P(A | B)$ , é feito através da *regra da divisão*, que é considerada como a definição formal de probabilidade condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} \quad (1.4)$$

Como exemplo, chamaremos de evento  $A$  a probabilidade de ter saído um número 2 num lançamento de dois dados, e de evento  $B$  a soma dos dois resultados igual a 8. Todos os 36 possíveis resultados do lançamento de dois dados de 6 faces são os seguintes:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

Já o número de casos em que o resultado da soma dos dois dados é igual a 8 são os 5 seguintes casos:

(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2).

Desse modo, de acordo com a definição clássica da probabilidade,  $P(B)$  é igual a  $5/36$ , que equivale a aproximadamente 0,14, ou 14 por cento das chances. Já  $P(A \wedge B)$ , a probabilidade de  $A$  e  $B$ , isto é, a probabilidade de ter saído o número dois em algum dos dados e o resultado da soma com o outro resultado ser 8, será igual a  $2/36$  ( $1/18$ ) que equivale a aproximadamente 0,055. Assim, aplicando a regra da definição da probabilidade condicional (1.4) ao caso, podemos concluir que a probabilidade de  $A$  dado  $B$  é igual a aproximadamente 0,4 :

$$P(A | B) = \frac{2/36}{5/36}$$

$$0.4 \cong \frac{0.056}{0.14}$$

O valor da probabilidade marginal de um evento comparado a um valor de probabilidade condicional pode mudar drasticamente ou não apresentar diferença. Isso quer dizer que a probabilidade marginal pode ser igual à probabilidade condicional, mas também pode ser maior ou menor.

*p) Regra da multiplicação*

A partir da regra da divisão, chegamos facilmente a outra importante regra do cálculo de probabilidade, a *regra da multiplicação*:

$$P(A \wedge B) = P(A | B) \cdot P(B) \tag{1.5}$$

Considere o mesmo espaço amostral do exemplo anterior, com “sair um número 2” em um lançamento de dois dados sendo o evento  $A$ , e a soma dos dois resultados “ser igual a 8” como evento  $B$ . Assim, a probabilidade de ter saído um número 2 e a soma do resultado dos dois dados ser igual a 8 será igual à probabilidade de ter saído o número 2 dado que a soma dos

resultados é igual a 8 multiplicada pela probabilidade marginal do resultado ser igual a 8. De forma que:

$$P(A \wedge B) = 0.4 \cdot 0.14 \\ 0.056 = 0.4 \cdot 0.14$$

É mais comum em estatística encontramos uma vírgula, no lugar do símbolo  $\wedge$ , como operador verofuncional de conjunção. Usarei novamente a vírgula nos próximos parágrafos, considerando que os leitores já estão familiarizados com seu significado no cálculo de probabilidades.

*q) Lei das alternativas*

Também conhecida como “extensão de conversão”, ou como “condicionalização sob  $B$ ”, a lei das alternativas é uma expressão condicional da lei da probabilidade total (1.3), sendo derivada dela e da regra da multiplicação (1.5):

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A | B_k) \cdot P(B_k) \quad (1.6)$$

Essa lei é bastante útil em estatística, pois muitas vezes não temos informação sobre a probabilidade marginal de um evento, mas temos acesso a suas probabilidades condicionais, de forma que podemos obter o valor da probabilidade marginal através de decomposição. Considere, por exemplo, duas fábricas de picolé que fazem uma promoção do palito premiado. Se você tirar o palito premiado ganha um prêmio em dinheiro. Digamos que você vai até a venda de sua cidade e compra 100 picolés, 30 da fábrica  $B_1$  e 70 da fábrica  $B_2$ . Você não sabe imediatamente qual é a probabilidade total de ganhar um prêmio, que chamaremos de evento  $A$ , dentro do seu espaço amostral (os 100 picolés), mas vê na televisão uma representante da fábrica  $A$  dizendo que há um palito premiado para cada 500 palitos,  $1/500$ , enquanto um representante da fábrica  $B_2$  diz que há um palito premiado em cada 1.000,  $1/1.000$ . Podemos, desse modo, descobrir qual é a probabilidade marginal de você tirar um palito premiado:

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) \\ P(A) = 1/500 \cdot 0.30 + 1/1000 \cdot 0.70 \\ P(A) = 1/500 \cdot 0.30 + 1/1000 \cdot 0.70$$

$$P(A) = 0.6 + 0.7/1000$$

$$P(A) = 0.0013$$

Assim, a probabilidade de você encontrar um palito premiado é 0.0013. Como você acabou escolhendo mais picolés da marca cuja proporção de palito premiado e palito não premiado é maior, você diminuiu drasticamente suas chances, que seriam de 0.002 se tivesse escolhido somente picolés da fábrica  $B_1$ . Se você tivesse escolhido somente picolés da fábrica  $B_2$  suas chances seriam iguais a 0.001.

*r) Correlações neutras*

Vimos no capítulo anterior que quando há uma correlação probabilística *neutra* (CNT) entre os eventos  $A$  e  $B$ , as seguintes equações são válidas (considere  $P(A, B)$  como equivalente a  $P(A \wedge B)$ ):

$$\text{CNT (1)} \quad P(A | B) = P(A)$$

$$\text{CNT (2)} \quad P(B | A) = P(B)$$

$$\text{CNT (3)} \quad P(A | B) = P(A | \neg B)$$

$$\text{CNT (4)} \quad P(B | A) = P(B | \neg A)$$

$$\text{CNT (5)} \quad P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Considere a seguinte tabela:

01  01 02 03 04 AVESTRUZ	02  05 06 07 08 ÁGUIA	03  09 10 11 12 BURRO	04  13 14 15 16 BORBOLETA	05  17 18 19 20 CACHORRO
06  21 22 23 24 CABRA	07  25 26 27 28 CARNEIRO	08  29 30 31 32 CAMELO	09  33 34 35 36 COBRA	10  37 38 39 40 COELHO
11  41 42 43 44 CAVALO	12  45 46 47 48 ELEFANTE	13  49 50 51 52 GALO	14  53 54 55 56 GATO	15  57 58 59 60 JACARÉ
16  61 62 63 64 LEÃO	17  65 66 67 68 MACACO	18  69 70 71 72 PORCO	19  73 74 75 76 PAVÃO	20  77 78 79 80 PERU
21  81 82 83 84 TOURO	22  85 86 87 88 TIGRE	23  89 90 91 92 URSO	24  93 94 95 96 VEADO	25  97 98 99 00 VACA

**Tabela 4:** Tabela do jogo do bicho, obtida em <https://portalbrasil.net/jogodobicho/tabela-do-jogo-do-bicho/>, acesso em 29/07/2022.

A primeira equação, CNT (1), nos diz que a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$  é igual a probabilidade marginal de  $A$ . Por exemplo, a probabilidade do resultado de uma roleta em Nova York ser 13 ( $1/38$ ) dado o resultado do jogo do bicho em Divinópolis ter sido gato, será igual à probabilidade independente (desse ou qualquer outro dado) do resultado de uma roleta em Nova York ser 13 ( $1/38$ ). Isto é, não muda em nada. A segunda equação, CNT (2), é obtida por simetria, e é igualmente fácil de entender. Do mesmo modo, a probabilidade de dar gato em um jogo do bicho em Divinópolis ( $1/25$ ), dado que o resultado de uma roleta em Nova York deu 13, será igual a probabilidade marginal do resultado do jogo do bicho em Divinópolis dar gato ( $1/25$ ). Já a terceira equação, CNT (3), consiste em uma definição condicional por comparação com a negação. A probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , será igual à probabilidade condicional de  $A$  dado não  $B$ . A probabilidade do resultado de uma roleta em Nova York ser 13 ( $1/38$ ) dado o resultado do jogo do bicho em Divinópolis ter sido gato, será igual à probabilidade do resultado da roleta em Nova York ser 13 dado o resultado do jogo do bicho em Divinópolis não ter sido gato, continuará sendo  $1/38$ . Também por simetria, chegamos

à equação CNT (4). A equação CNT (5), por sua vez, corresponde à definição de neutralidade pela multiplicação. Quando uma correlação é neutra, isto é, quando não há correlação, a probabilidade de ocorrência conjunta de  $A$  e  $B$  será igual ao produto da multiplicação de cada uma das probabilidades ( $1/38 \times 1/25 = 0.0010526315789474$ ). Aqui, será mais lúdico usarmos o exemplo de dois dados lançados independentemente. A probabilidade de sair 1 no lançamento do primeiro dado e 3 no lançamento do segundo dado, por exemplo, será igual à  $1/6$  multiplicado por  $1/6$ , o que resulta em  $2/6$  (0,333...).

Podemos ainda falar de correlações entre variáveis. Por exemplo, a correlação entre a variável “resultado do jogo do bicho de Divinópolis” é neutra em relação à variável “resultado de uma roleta em Nova York”. Quando duas variáveis  $X$  e  $Y$  têm correlação neutra, então as probabilidades para cada evento  $x$  e  $y$  que essas variáveis podem assumir respectivamente obedecerão às equações acima. O mesmo valerá para as demais correlações abaixo, mudando apenas as equações ou desigualdades às quais estarão sujeitas as probabilidades dos eventos, incluindo dependência ou independência probabilística.

*s) Correlações positivas*

Se uma correlação probabilística entre eventos  $A$  e  $B$  é *positiva*, as seguintes desigualdades equivalentes são válidas:

$$\text{CP (1)} \quad P(A | B) > P(A)$$

$$\text{CP (2)} \quad P(B | A) > P(B)$$

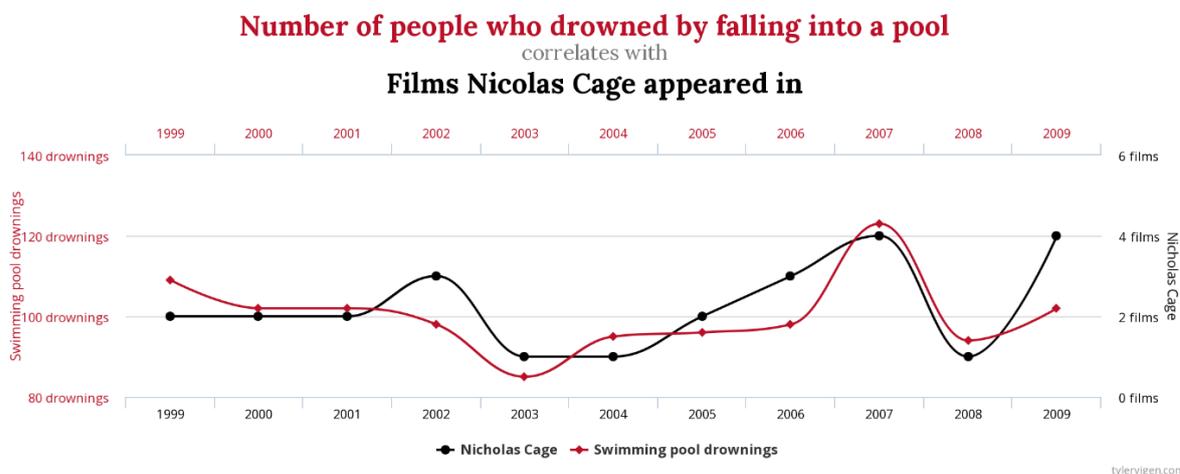
$$\text{CP (3)} \quad P(A | B) > P(A | \neg B)$$

$$\text{CP (4)} \quad P(B | A) > P(B | \neg A)$$

$$\text{CP (5)} \quad P(A, B) > P(A) \cdot P(B)$$

A desigualdade CP (1) nos diz que a probabilidade de  $A$  dado  $B$  é maior que a probabilidade marginal de  $A$ . Por exemplo, a probabilidade de uma pessoa desenvolver transtorno de personalidade antissocial, dado que ela sofreu abusos na infância, é maior que a probabilidade marginal de uma pessoa desenvolver o transtorno de personalidade antissocial. Ou ainda, para usarmos um exemplo de correlação positiva sem causalidade, a probabilidade de afogamento de pessoas que caíram em piscinas, dado que o ator Nicolas Cage está participando de um filme, é maior que a probabilidade marginal de uma pessoa se afogar após

cair em uma piscina, como podemos visualizar no seguinte grafo, obtido a partir de dados reais<sup>16</sup>:



**Fig. 14:** Grafo mostrando a correlação entre números de afogamentos em piscina e filmes com Nicolas Cage (de <https://www.tylervigen.com/spurious-correlations>).

Obtemos a equação CP (2) por simetria: a probabilidade do Nicolas Cage aparecer em um filme dado que houve mais afogamentos é maior que a probabilidade marginal dele aparecer em um filme. A desigualdade CP (3) significa que a probabilidade de  $A$  dado  $B$  é maior que a probabilidade de  $A$  dado não  $B$ . Voltando ao exemplo de transtorno antissocial, a probabilidade de uma pessoa ter transtorno antissocial dado que ela cresceu em um ambiente familiar violento é maior que a probabilidade de ela desenvolver esse transtorno dado que foi criada em um ambiente livre de violência. Simetricamente, usando o mesmo exemplo, CP (4) nos diz que a probabilidade de uma pessoa ter sido criada em uma família violenta dado que ela tem transtorno antissocial é maior que a probabilidade de ela ter sido criada em um ambiente violento dado que ela não tem transtorno antissocial. Já a desigualdade CP (5) significa que a probabilidade de ocorrência de  $A$  em conjunção com  $B$  é maior que a o produto da multiplicação de suas probabilidades marginais. Considere uma cidade com uma população de 100.000 habitantes, digamos que a probabilidade marginal de alguém escolhido ao acaso ser um psicopata seja de 5 por cento. Nesta cidade existem 1.000 *CEOs* (diretores executivos de indústrias ou organizações), isso quer dizer que a probabilidade de escolhermos um *CEO* ao acaso no nosso banco de dados fictício será de 1 por cento. A probabilidade de um *CEO* ser psicopata, por sua vez, seria de 15 por cento. Assim, a probabilidade (0.15) de  $A$  (ser um psicopata) em conjunção com  $B$  (ser um *CEO*) é maior que a probabilidade de  $A$  (0.05)

<sup>16</sup> No site criado por Tyler Vinge (tylervigen.com), você encontrará este e outros exemplos engraçados de correlações positivas espúrias.

multiplicada pela probabilidade de  $B$  (0.01). Falando em *CEOs* e correlações espúrias, não poderia deixar de compartilhar aqui duas de minhas tirinhas preferidas do Scott Adams sobre o tema:

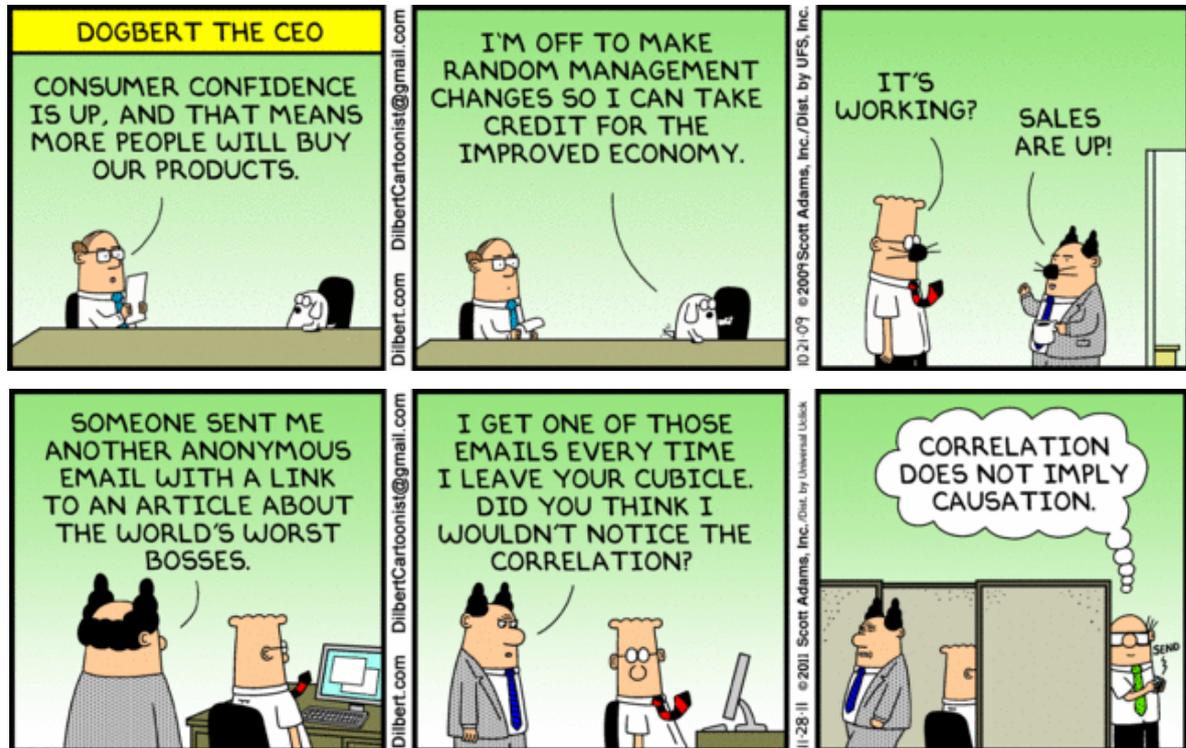


Fig. 15: Duas tirinhas de Scott Adams sobre correlações espúrias (de <https://www.dilbert.com>).

#### t) Correlações negativas

Vimos ainda, no primeiro capítulo, que quando uma correlação probabilística entre dois eventos  $A$  e  $B$  é *negativa*, então as seguintes desigualdades são válidas:

- CN (1)  $P(A | B) < P(A)$
- CN (2)  $P(B | A) < P(B)$
- CN (3)  $P(A | B) < P(A | \neg B)$
- CN (4)  $P(B | A) < P(B | \neg A)$
- CN (5)  $P(A, B) < P(A) \cdot P(B)$

A desigualdade CN (1) nos diz que a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  dada a ocorrência de um evento  $B$  é menor que a probabilidade marginal de ocorrência do evento  $A$ . Por exemplo, a probabilidade de encontrarmos pessoas andando de bicicleta em Ouro Preto em

um dia chuvoso é menor que a probabilidade marginal de encontrarmos pessoas andando de bicicleta em Ouro Preto, isto é, a probabilidade total considerando qualquer dia, chuvoso e não chuvoso. CN (2) é a versão simétrica de CN (1), a probabilidade de ser um dia chuvoso em Ouro Preto, dado que há várias pessoas andando de bicicleta, é menor que a probabilidade marginal de chover em Ouro Preto. CN (3) significa que a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  dada a ocorrência de um evento  $B$  é menor que a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  dada a não ocorrência de um evento  $B$ . Por exemplo, a probabilidade de estar chovendo dado que há pessoas andando de bicicleta em Ouro Preto é menor que a probabilidade de estar chovendo dado que não há pessoas andando de bicicleta em Ouro Preto. O mesmo se aplicará para a probabilidade de  $B$  dado  $A$ , como assevera CN (4) por simetria. Já CN (5) nos diz que a probabilidade de ocorrência de  $A$  e  $B$  em conjunção é menor que o produto da multiplicação de cada uma das probabilidades marginais de ocorrência dos eventos. Digamos, por exemplo, que a probabilidade de ser um dia chuvoso em Ouro Preto seja de 30 por cento, enquanto a probabilidade de ter mais de 10 pessoas andando de bicicleta na cidade seja de 80 por cento, a probabilidade de ter mais de 10 pessoas andando de bicicleta, por sua vez, seria de 10 por cento. Assim,  $0.1 < 0.3 \times 0.8$ .

*u) Dependência probabilística*

Além disso, vimos também no primeiro capítulo, que quando há uma correlação probabilística positiva ou negativa entre eventos, eles são *estatisticamente dependentes*. Podemos representar essa relação de dependência, que inclui ou as desigualdades negativas ou as desigualdades positivas, através das seguintes fórmulas:

$$\text{DP (1)} \quad P(A | B) \neq P(A)$$

$$\text{DP (2)} \quad P(B | A) \neq P(B)$$

$$\text{DP (3)} \quad P(A | B) \neq P(A | \neg B)$$

$$\text{DP (4)} \quad P(B | A) \neq P(B | \neg A)$$

$$\text{DP (5)} \quad P(A, B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

*v) Independência probabilística*

Quando há uma correlação probabilística neutra entre os eventos dizemos que são *estatisticamente independentes* e as mesmas fórmulas CNT são válidas:

$$\text{IP (1)} \quad P(A | B) = P(A)$$

$$\text{IP (2)} \quad P(B | A) = P(B)$$

$$\text{IP (3)} \quad P(A | B) = P(A | \neg B)$$

$$\text{IP (4)} \quad P(B | A) = P(B | \neg A)$$

$$\text{IP (5)} \quad P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Uma maneira talvez mais clara de entender formalmente a independência, para algumas pessoas, é através da conjunção de IP (1) com IP (3):  $P(A) = P(A | B) = P(A | \neg B)$ . A probabilidade de  $A$  é igual a probabilidade de  $A$  dado  $B$  e a probabilidade de  $A$  dado não  $B$ . A probabilidade de ocorrer um incêndio em uma casa, por exemplo, é independente de estar ou não tocando uma música do Chico Buarque, por isso, será igual a probabilidade de ocorrer um incêndio dado que está tocando Chico Buarque, como também será igual à probabilidade de ocorrer um incêndio dado que não está tocando Chico Buarque.

w) *O teorema de Bayes*

Através da relação de simetria da independência,  $P(A, B) = P(B, A)$ , aplicada à regra da multiplicação (1.5), de modo que  $P(A, B) = P(B | A) \cdot P(A)$ , juntamente com a regra da divisão (1.4), obtemos a regra de Bayes, também conhecida como teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{1.7}$$

Essa fórmula ficou conhecida como *fórmula da inversão*. Em exemplos práticos e em aplicações científicas, a cada um dos elementos dessa fórmula são atribuídas características comuns. Usamos o teorema de Bayes, geralmente, na determinação do grau de certeza de uma hipótese dado um evento ocorrido ou estabelecido como ocorrido e, deste modo, certo. A base da regra de Bayes é o raciocínio condicional, e, por isso, chegamos a ela através da regra da

divisão (1.4), que nada mais é do que a definição de probabilidade condicional. Muitas vezes, sua fórmula é apresentada do seguinte modo:

$$P(H|e) = \frac{P(e|H) \cdot P(H)}{P(e)} \quad (1.8)$$

Considere  $H$  como “hipótese” e  $e$  como “evento”.  $P(H|e)$  é chamada de probabilidade posterior, isto é, a probabilidade da hipótese  $H$  após o evento  $e$  ser considerado.  $P(H)$  é chamada de probabilidade primária (*prior*), a probabilidade antes do evento  $e$  ser considerado, enquanto  $P(e|H)$  é chamada de esperança ou estimativa (*likelihood*), onde consideramos a estimativa da ocorrência de  $e$  dada a ocorrência certa de  $H$ , isto é, a probabilidade da evidência  $e$ , dado que a hipótese  $H$  é verdadeira. Já  $P(e)$  é a probabilidade marginal de ocorrência do evento  $e$ . Muitas vezes o evento  $e$  é chamado de “observação” ou “evidência”, pois consideramos sua ocorrência como dada na nossa computação de  $P(H|e)$ , para, assim, calcularmos a plausibilidade de uma determinada hipótese. Essa hipótese é ela mesma um evento no sentido já explicado no item  $c$  desta subseção (“Variáveis e eventos”). A equação 1.8 e as denominações para cada elemento dela (estimativa, probabilidade primária, probabilidade posterior, probabilidade marginal) consistem em uma interpretação prática do teorema 1.7. Este não necessariamente implica de modo formal estrito nessa interpretação. Mas, na prática, esse é o modo que teorema é usado em grande parte das vezes. Vejamos alguns exemplos.

### Exemplo 1

Imaginemos um grande hospital com capacidade de internação de milhares de pacientes. Considere que nossa população, ou espaço amostral  $\Omega$ , é igual a 100.000 indivíduos, consistindo em todos os pacientes que foram internados no hospital nos últimos cinco anos. Digamos que queremos calcular, utilizando o teorema de Bayes, qual é a probabilidade de pacientes terem câncer no pulmão ( $H$ ) dado que são fumantes ( $e$ ), isto é,  $P(H|e)$ . Para isso, considere que o número de pacientes com câncer que já foram internados nesse hospital durante o intervalo estudado é 10.000, o que equivale a 10 por cento de  $\Omega$ . Já a probabilidade marginal de  $e$  é igual a 5 por cento de  $\Omega$ , isto é, sabemos que 5.000 pacientes são fumantes. Além disso, sabemos que a estimativa de  $e$  dado  $H$  é igual a 40 por cento, o que significa que dos 10.000 pacientes com câncer, 4.000 são ou eram fumantes.

Desse modo, podemos ordenar os parâmetros do arranjo do seguinte modo.

População: 100.000.

$P(H)$ : 0.1 (10.000).

$P(e)$ : 0.05 (5.000).

$P(e|H)$ : 0.4 (4.000).

Assim, utilizando o teorema de Bayes, o cálculo da  $P(H|e)$  será:

$$P(H|e) = \frac{P(e|H) \cdot P(H)}{P(e)}$$

$$P(H|e) = \frac{0.4 \cdot 0.1}{0.05}$$

$$0.8 = \frac{0.04}{0.05}$$

Podemos concluir que  $P(H|e) > P(H)$ , isto é, que a probabilidade condicional de um paciente ter câncer no pulmão dado que ele é fumante é maior que a probabilidade marginal de um paciente ter câncer no pulmão. Nesse caso, a diferença é bastante alta, já que  $P(H|e)$  seria igual a 80 por cento, enquanto  $P(H)$  seria igual a 10 por cento.

Vejamos um caso em que a diferença entre a probabilidade posterior e a probabilidade marginal não seria assim tão grande, mas ainda haveria uma correlação positiva, de forma que  $P(H|e) > P(H)$ . Substituamos nossa evidência  $e$  que consistia no hábito de fumar pelo evento “ser alcoólatra”. Digamos que 6.000 pacientes do nosso espaço amostral são alcoólatras, o que equivale a 6 por cento, e que 900 dos pacientes com câncer no pulmão são alcoólatras. Obtemos, então, estes parâmetros:

$P(H)$ : 0.1 (10.000).

$P(e)$ : 0.06 (6.000).

$P(e|H)$ : 0.09 (900).

O que nos leva ao seguinte valor para  $P(H|e)$ :

$$P(H|e) = \frac{P(e|H) \cdot P(H)}{P(e)}$$

$$P(H|e) = \frac{0.09 \cdot 0.1}{0.06}$$

$$0.15 = \frac{0.009}{0.06}$$

Neste caso,  $P(H|e)$ , 15 por cento, ainda é maior que  $P(H)$ , 10 por cento, mas a diferença não é tão grande como no caso do hábito de fumar. De acordo com este exemplo, uma pessoa alcoólatra teria uma maior chance de ter câncer no pulmão, mas não tão grande quanto um fumante.

### Exemplo 2

Considere agora um prédio hipotético, onde residem estudantes de uma universidade. A hipótese  $H$  será o evento “estar tocando Chico Buarque no dia” e a evidência  $e$  será o “alarme de incêndio ser acionado no dia”. Digamos que a probabilidade marginal do alarme de incêndio tocar por dia nesse prédio é de 25 por cento (0.25) e que a probabilidade primária de estar tocando Chico Buarque é de 0.5, isto é, dia sim, dia não, toca Chico Buarque no prédio. Já a  $P(e|H)$ , isto é, a estimativa do alarme de incêndio tocar, dado que está tocando Chico Buarque, será também de 0.25. Para fins de simplificação e visualização do arranjo, suponhamos que esses eventos são regulares, de modo que podemos representá-los através da seguinte tabela:

Dia	Variável “tocar Chico Buarque ou não”	Variável “tocar o alarme ou não”	Dia	Variável “tocar Chico Buarque ou não”	Variável “tocar o alarme ou não”
01	Chico Buarque	Alarme	16		Alarme
02			17	Chico Buarque	

03	Chico Buarque		18		
04		Alarme	19	Chico Buarque	Alarme
05	Chico Buarque		20		
06			21	Chico Buarque	
07	Chico Buarque	Alarme	22		Alarme
08			23	Chico Buarque	
09	Chico Buarque		24		
10		Alarme	25	Chico Buarque	Alarme
11	Chico Buarque		26		
12			27	Chico Buarque	
13	Chico Buarque	Alarme	28		Alarme
14			29	Chico Buarque	
15	Chico Buarque		30		

**Tabela 5:** Tabela considerando os dias do mês de junho e as variáveis “tocar Chico Buarque” e “tocar o alarme de incêndio”.

Calculando  $P(H|e)$  através do teorema de Bayes, obtemos o seguinte:

$$P(H|e) = \frac{P(e|H) \cdot P(H)}{P(e)}$$

$$P(H|e) = \frac{0.25 \cdot 0.5}{0.25}$$

$$0.5 = \frac{0.125}{0.25}$$

Nesse caso, podemos concluir que a hipótese de estar tocando Chico Buarque dada a evidência de que o alarme de incêndio foi acionado não é plausível, já que  $P(H|e) = P(H)$ .  $P(H|e)$  é maior que  $P(e)$ , o que significa que é mais provável estar tocando Chico Buarque e o alarme tocar, do que não estar tocando Chico Buarque e o alarme tocar (verifique na tabela fixando os casos em que o alarme toca), mas somente por que se toca muito Chico Buarque

nesse prédio. Assim, em 50 por cento dos casos em que o alarme toca, está tocando Chico Buarque, mas a probabilidade marginal do alarme tocar é de apenas 25 por cento, e, por isso, menor que  $P(H|e)$ . É por essa razão que fazemos a comparação entre a probabilidade primária da hipótese  $P(H)$  com a probabilidade posterior  $P(H|e)$ . Já a estimativa do alarme tocar dado que está tocando Chico Buarque,  $P(e|H)$ , será de 25 por cento. Isso pode ser facilmente verificado na tabela, bastando considerar apenas as linhas amarelas em que ocorre a variável “estar tocando Chico Buarque”.

Note que, neste exemplo, se a probabilidade de o alarme tocar fosse também de 50 por cento, a correlação seria positiva, se coincidissem com os dias que está tocando Chico Buarque, ou negativa, se coincidissem de tocar o alarme exatamente nos dias em que não está tocando Chico Buarque. Em ambos os casos, a dependência probabilística seria espúria. Isso não ocorre com outras probabilidades, ou quando não há uma regularidade específica (a probabilidade de estar tocando Chico Buarque ou de tocar o alarme de incêndio pode ser de 50 por cento, mas não necessariamente precisaria ocorrer um dia sim e um dia não).

### Exemplo 3

Nara estuda na FAFICH em Belo Horizonte. Logo no seu primeiro mês de aulas, ela reparou que os colegas, Pedro e João, constantemente apareciam comendo “pães da alegria” (um pão artesanal generosamente recheado com chocolate) nos mesmos dias. Ela cogitou que um deles fazia os pães, ou que talvez era uma coincidência, ou que ambos compravam no mesmo lugar em dias específicos. O caso é que havia uma correlação entre as variáveis.

Considere a seguinte tabela com uma amostra dos dados observacionais obtidos por Nara durante um período amostral de 20 dias:

Dia	Variável “João comendo pão ou não”	Variável “Pedro comendo pão ou não”	Dia	Variável “João comendo pão ou não”	Variável “Pedro comendo pão ou não”
01	João comendo pão	Pedro comendo pão	11		
02			12	João comendo pão	Pedro comendo pão
03	João comendo pão	Pedro comendo pão	13		

04			14		
05			15	João comendo pão	Pedro comendo pão
06			16		Pedro comendo pão
07	João comendo pão	Pedro comendo pão	17	João comendo pão	Pedro comendo pão
08			18	João comendo pão	
09	João comendo pão	Pedro comendo pão	19		
10	João comendo pão	Pedro comendo pão	20	João comendo pão	Pedro comendo pão

**Tabela 6:** Tabela considerando os dias em que João ou Pedro aparecem na sala de aula comendo pão em um período amostral de 20 dias.

Considerando  $H$  como o evento de João estar comendo pão e  $e$  como o evento de Pedro estar comendo pão, de acordo com a tabela, temos que  $P(e|H) = 0.9$ ,  $P(H) = 0.5$  e  $P(e) = 0.5$ .

Aplicando o teorema de Bayes para determinar  $P(H|e)$ , obtemos o seguinte:

$$P(H|e) = \frac{P(e|H) \cdot P(H)}{P(e)}$$

$$P(H|e) = \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.5}$$

$$0.9 = \frac{0.45}{0.5}$$

Aqui também podemos concluir que  $P(H|e) > P(H)$ , havendo, portanto, uma correlação positiva entre os eventos.

O teorema de Bayes nos permite lidar com sistemas complexos e atualizar nossas previsões de eventos ao obtermos novas informações. Por isso o teorema de Bayes e as chamadas redes bayesianas (que veremos abaixo ao tratarmos do elemento grafo dos modelos causais) têm muita importância hoje em dia para o aprendizado de máquinas (*machine learning*), aprendizado profundo (*deep learning*) e tomada de decisão (*decision making*), por permitirem

que computadores e inteligências artificiais diversas aprendam através da experiência e tomem decisões de acordo com modelos baseados em estatística Bayesiana.

Para facilitar a visualização dos passos que nos levaram até aqui, segue a derivação formal sucinta do teorema de Bayes:

DP	$P(A) = n(A) / n(\Omega)$	[Definição de probabilidade]
DPC	$P(A   B) = P(A \wedge B) / P(B)$	[Definição de probabilidade condicional]
DI	$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$	[Definição de independência]
A 1	$0 \leq P(A) \leq 1$	[1° Axioma de Kolmogorov]
A 2	$A \rightarrow (P(A) = 1)$	[2° Axioma de Kolmogorov]
A 3	$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$	[3° Axioma de Kolmogorov]
NC	$\neg(A \wedge \neg A)$	[Regra lógica da não contradição]
TE	$(A \vee \neg A)$	[Regra lógica do terceiro excluído]
1.	$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B)$	[DP, A 3, NC, TE]
2.	$P(A) = P(A \wedge B_1) + P(A \wedge B_2) + \dots + P(A \wedge B_n)$	[1, Lei da probabilidade total]
3.	$P(A \wedge B) = P(A   B) \cdot P(B)$	[DPC, Regra da multiplicação]
4.	$P(A) = P(A   B_1) \cdot P(B_1) + P(A   B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A   B_k) \cdot P(B_k)$	[2, 3, Lei das alternativas]
5.	$P(A, B) = P(B, A)$	[DI, simetria da independência]
6.	$P(A   B) = (P(B   A) \cdot P(A)) / P(B)$	[DPC, 4, 5, Teorema de Bayes]

**Tabela 7:** Derivação do Teorema de Bayes.

### *x) Independência condicional*

Antes de adentrarmos nas redes bayesianas e à modelagem causal propriamente dita, precisamos de uma breve introdução ao conceito de independência condicional. Isso também será crucial para o entendimento do problema da aplicação de modelos causais aos fenômenos quânticos.

Quando  $A$  é estatisticamente independente de  $B$ , dado  $C$  (formalmente:  $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$ ), então as seguintes relações são válidas:

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C) \quad (\text{IC 1})$$

$$P(A \mid B, C) = P(A \mid C) \quad (\text{IC 2})$$

$$P(B \mid A, C) = P(B \mid C) \quad (\text{IC 3})$$

Considere, por exemplo, a população de uma cidade onde verificamos uma correlação positiva entre os eventos de Maria, uma moradora da cidade, vestir uma roupa de cor roxa (evento  $A$ ) e de Neide, outra moradora, vestir também uma roupa de cor roxa (evento  $B$ ), de forma que  $P(A \mid B) > P(A)$  e a  $P(B \mid A) > P(B)$ . Ou seja, é mais provável a gente ver a Maria de roxo, dado que a Neide está de roxo, e *vice-versa*, do que ver cada uma de roxo independentemente da cor da roupa da outra. Digamos que a gente resolva considerar também a variável dos eventos de compra de roupas na cidade e descobrimos que há uma loja que vende apenas roupas roxas e que realiza promoções de tempos em tempos. Chamemos esse evento de  $C$ . Quando consideramos as compras de roupas de Neide e Maria durante a promoção da loja que fica no meio do caminho de ambas até seus trabalhos, podemos descobrir que o evento de Maria comprar uma roupa durante a promoção é probabilisticamente independente do evento de Neide comprar uma roupa na promoção, de forma que  $P(A \mid B \wedge C) = P(A \mid C)$  e  $P(B \mid A \wedge C) = P(B \mid C)$ .

Veremos no terceiro capítulo, que um dos aspectos centrais de uma *Bifurcação Causal Interativa* é que a causa comum falha em compartimentalizar os seus efeitos, de modo que  $P(A \wedge B \mid C) > P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$ , e  $P(A \mid B \wedge C) = 1 > P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$ . Esse ponto será essencial para a compreensão do problema da aplicação da causalidade no domínio quântico em termos estatísticos. Conectado a isso, está o fato da independência condicional ser um elemento fundamental das redes causais bayesianas, como veremos.

#### y) *Dependência condicional*

A dependência condicional também é um dos pilares das redes Bayesianas e da modelagem causal estatística, e relaciona-se ao problema filosófico que será abordado no próximo capítulo.

Quando  $A$  é estatisticamente dependente de  $B$ , dado  $C$  (formalmente:  $A \not\perp\!\!\!\perp B \mid C$ ), então as seguintes relações são válidas:

$$P(A, B | C) \neq P(A | C) \cdot P(B | C) \quad (\text{DC 1})$$

$$P(A | B, C) \neq P(A | C) \quad (\text{DC 2})$$

$$P(B | A, C) \neq P(B | C) \quad (\text{DC 3})$$

Vejam os um exemplo que elucidado como duas variáveis ou eventos probabilisticamente independentes podem se mostrar dependentes dado uma terceira variável ou evento. Suponha que Carlos Marcos é um garçom que recebe boas gorjetas de duas clientes em especial, Olga e Rita. Carlos Marcos adora jantar fora, mas o faz somente quando recebe um valor mais alto de gorjeta, o que na maioria das vezes, ocorre quando as suas duas clientes especiais dão gorjeta no mesmo dia. Considere a seguinte tabela ilustrando um mês de fevereiro de Carlos Marcos:

Dia	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
01	Olga dá gorjeta		
02		Rita dá gorjeta	
03	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
04		Rita dá gorjeta	
05			
06			
07	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
08		Rita dá gorjeta	
09	Olga dá gorjeta		
10	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
11			
12			
13	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
14	Olga dá gorjeta		
15		Rita dá gorjeta	
16	Olga dá gorjeta		
17	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
18		Rita dá gorjeta	

19		Rita dá gorjeta	
20	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	
21	Olga dá gorjeta	Rita dá gorjeta	Carlos Marcos janta fora
22			
23		Rita dá gorjeta	
24			Carlos Marcos janta fora
25	Olga dá gorjeta		
26	Olga dá gorjeta		
27			Carlos Marcos janta fora
28	Olga dá gorjeta		

**Tabela 8:** Tabela considerando os dias do mês de fevereiro de um determinado ano e as variáveis “Olga dar ou não gorjeta para Carlos Marcos”, “Rita dar ou não gorjeta para Carlos Marcos” e “Carlos Marcos jantar ou não jantar fora”.

Considere  $A$  como o evento de Olga dar gorjeta, o evento  $B$  como Rita dar gorjeta e o evento  $C$  como Carlos Marcos jantar fora. De acordo com a tabela, obtemos as seguintes probabilidades marginais e condicionais:

$$P(A): 0,5$$

$$P(B): 0,5.$$

$$P(C): 0,28.$$

$$P(A | B): 0,5.$$

$$P(B | A): 0,5.$$

$$P(A | C): 0,75.$$

$$P(B | C): 0,75.$$

$$P(A | B, C): 0,83.$$

$$P(B | A, C): 0,83.$$

$$P(A, B | C): 0,75.$$

Podemos concluir, portanto, que há uma independência probabilística marginal entre os eventos  $A$  e  $B$ ,  $P(A | B) = P(A)$  e  $P(B | A) = P(B)$ , não verificada quando condicionamos sob  $C$ , já que  $P(B | A, C) = P(A | B, C) \neq P(A | C)$ .

### 2.2.2. Diagramas causais

In the last decade, owing partly to advances in graphical models, causality has undergone a major transformation: from a concept shrouded in mystery into a mathematical object with well-defined semantics and well-founded logic. Paradoxes and controversies have been resolved, slippery concepts have been explicated, and practical problems relying on causal information that long were regarded as either metaphysical or unmanageable can now be solved using elementary mathematics. Put simply, causality has been mathematized. (PEARL, 2000, p. xiii)

Os modelos causais atualmente aplicados em diversas inteligências artificiais são constituídos pelas chamadas *redes Bayesianas*. Dependências e independências probabilísticas condicionais somadas ao constituinte gráfico são o cerne das redes Bayesianas. Através do modelo gráfico obtido com elas, conseguimos representar as relações de causalidade entre variáveis de um sistema de forma simples e matematizada.

#### a) *Grafos acíclicos direcionados*

Redes Bayesianas são representadas através dos chamados *Grafos Acíclicos Direcionados (GADs)*. Um *GAD* consiste em um grupo de vértices ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ), os nós, e um grupo de arestas direcionadas, as setas, que conectam pares desses vértices (SCHEINES, 1997, p. 1). Podemos, por exemplo, ter um grupo de dois vértices ( $X_1, X_2$ ) e uma seta entre esses vértices (como em  $X_1 \rightarrow X_2$ ), ou um grupo de três vértices ( $X_1, X_2, X_3$ ) e duas setas entre eles (como em  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ ). Os nós representam as variáveis e as arestas as dependências probabilísticas entre elas. As probabilidades condicionais exprimem a força da dependência e serão associadas a cada grupo de nós conectados. Eventos ou variáveis probabilisticamente independentes são desconectados. Cada nó da rede tem também uma distribuição probabilística associada a ele.

Na teoria da inferência causal estatística, um *GAD* tem duas funções: representar grupos de distribuições probabilísticas e representar estruturas causais (SCHEINES, 1997, pp. 1-2). Se pensarmos em termos puramente estatísticos, a dependência probabilística entre eventos é simétrica e, por isso, bidirecionada. No entanto, como a causalidade é assimétrica, adotamos grafos direcionadas com o objetivo de captar a direção das relações causais entre eventos. Ainda assim, podemos considerar um *GAD* de forma puramente abstrata. Um gráfico causal, por outro lado, sempre pressupõe uma interpretação causal desse *GAD* e um modelo com uma determinada estrutura causal.

*b) Grafos causais*

Um diagrama causal é tecnicamente representado por um *GAD*. Obtemos um digrama causal quando adicionamos uma interpretação causal a um *GAD*, que antes de qualquer interpretação “é um objeto matemático completamente abstrato” (SCHEINES, 1997, p. 1, tradução nossa).

Podemos usar ainda as seguintes notações para a representação de um gráfico causal:

Nós (●): vértices (eventos).

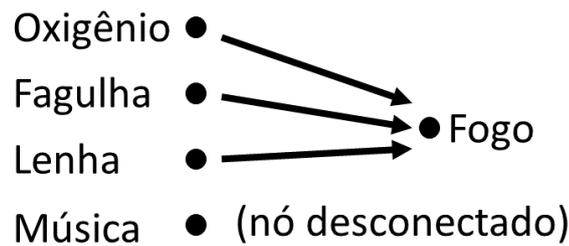
Setas (→): arestas direcionadas (relações causais).

Exemplo: ●<sub>A</sub> → ●<sub>B</sub> (*A* é causa de *B*).

Em um gráfico ou diagrama causal, cada nó representa o efeito conjunto de todas os nós com setas apontando na direção dele. A cada nó é associada uma distribuição probabilística. Uma seta direcionada indica conexão causal e dependência probabilística entre os eventos ou variáveis de eventos. Nós desconectados indicam ausência de relação causal e independência probabilística.

Considere que você deseja acender a chama de um fogão à lenha. Algo que aprendi aqui, em Minas Gerais, é que para isso precisamos garantir a ocorrência dos seguintes eventos: circulação adequada de ar, arranjo adequado das lenhas, uso de um fator de ignição, uso de bola de papel com óleo para iniciar a combustão das lenhas, início da chama pelas lenhas de combustão mais rápida. Para simplificar, vamos considerar os seguintes eventos que conjuntamente causam o acendimento do fogão à lenha (fogo): presença de oxigênio, de fagulha e de lenha.

Consideremos também o evento de estar tocando música. Podemos ainda considerar variáveis de eventos em nossa representação. No caso, estar ou não estar tocando música seria uma variável desconectada da variável do fogão ser ou não ser acesso. Para cada caso, usamos notações específicas, como as descritas na subseção 2.2.1 (*Variáveis e eventos*). A representação gráfica do nosso exemplo seria o seguinte:



**Fig. 16:** Gráfico causal modificado de Sloman (2005, p. 40).

Do gráfico, podemos concluir que  $P(\text{fogo}) = P(\text{fogo} \mid \text{música}) = P(\text{fogo} \mid \text{não música})$ , já que a variável “fogo” é desconectada da variável “música” e, portanto, probabilisticamente independente dela. Podemos dizer o mesmo sobre cada um dos nós causais (presença de oxigênio, de fagulha e de lenha) em relação uns aos outros. A variável de presença ou não de fogo, por outro lado, é probabilisticamente dependente de cada um dos nós causais, presença ou ausência de oxigênio, fagulha e lenha, de modo que:  $P(\text{fogo} \mid \text{oxigênio}) > P(\text{fogo} \mid \text{não oxigênio})$ ;  $P(\text{fogo} \mid \text{fagulha}) > P(\text{fogo} \mid \text{não fagulha})$ ; e  $P(\text{fogo} \mid \text{lenha}) > P(\text{fogo} \mid \text{não lenha})$ .

Na literatura, os nós causais são chamados de pais (*parents*) e os nós que são efeitos desses nós causais são chamados de filhos (*children*). Adaptando ao português e às nossas preferências, usarei os termos femininos: avós, mães, filhas e netas.

Claro que haverá variáveis relevantes não computadas em nossas análises causais, essas variáveis ocultas, também chamadas de variáveis randômicas ou de erro, são representadas conjuntamente ou individualmente por um nó e pela letra grega  $\lambda$ , tendo também sua distribuição probabilística definida. Poderemos muitas vezes considerá-las implicitamente. No entanto, é muito importante computarmos essas variáveis na aplicação de modelos causais no mundo real e ao lidarmos com certas abordagens de problemas ligados a eles.

Grafos causais, além da vantagem já apresentada no primeiro capítulo, sobre o lugar da causalidade nas ciências, têm também uma vantagem estatística de economia em relação a predições somente probabilísticas. Para a predição de um determinado evento, o uso de redes causais nos poupará da necessidade de usarmos um número grande de parâmetros em comparação com o número deles sem a utilização de grafos causais<sup>17</sup>.

### c) Equações estruturais

<sup>17</sup> Sloman (2005, pp. 49-51) nos apresenta um exemplo em que utilizando grafos causais precisamos de 18 parâmetros, enquanto sem a utilização do grafo precisaríamos de 255.

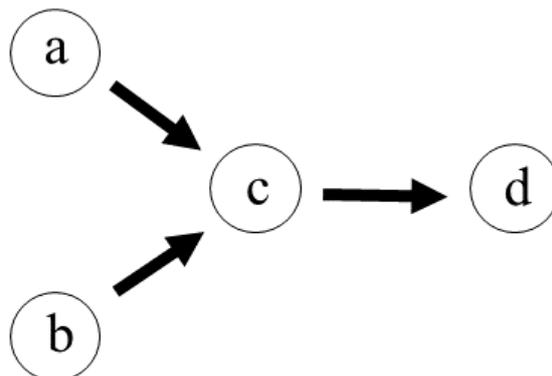
As chamadas equações estruturais guardam as mesmas informações que os grafos causais, mas sob uma representação distinta. Elas também especificam como as causas se combinam para produzir efeitos. Essas funções são equivalentes às funções russellianas já apresentadas no capítulo anterior, mas sob uma interpretação causal e não somente estatística. Cada efeito é associado a uma função matemática probabilística que expressa exatamente como ele é produzido por suas causas (SLOMAN, 2005, p. 41). Todas as causas são requeridas, incluindo a variável adicional de ruído. Considere, novamente, nosso exemplo do acendimento do fogão à lenha. A equação estrutural correspondente seria a seguinte:

$$\text{Fogo} = f(\text{fagulha}, \text{oxigênio}, \text{lenha}, \lambda)$$

Em aprendizado de máquinas, essa função estatística poderia ser representada do seguinte modo:

$$\{\text{"Fogo"}: [\text{fagulha}, \text{oxigênio}, \text{lenha}, \lambda]\}$$

Todo gráfico causal tem suas equações estruturais correspondentes. Vejamos um exemplo:



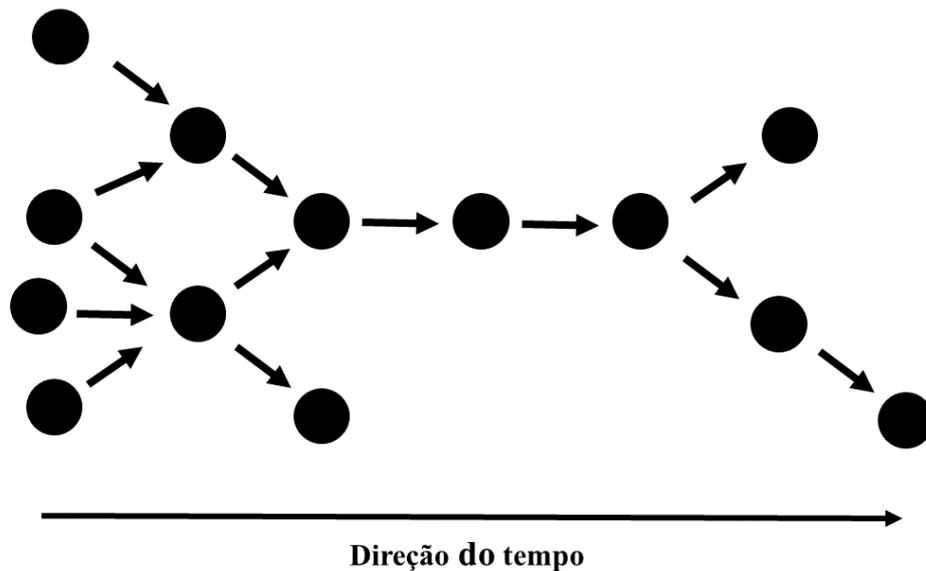
$$\begin{aligned} \text{Gráfico} = \\ \{ \text{"c"}: [\text{"a"}, \text{"b"}] \\ \text{"d"}: [\text{"c"}] \} \end{aligned}$$

**Fig. 17:** Um gráfico causal e correspondentes equações estruturais tal como são representadas em aprendizado de máquinas.

A cada efeito será então associada uma função probabilística, que poderá ser contínua ou discreta, a depender do tipo de variável e distribuição utilizadas. Enquanto grafos causais são bons para a representação de um sistema complexo de relações causais em uma dada rede causal, as equações estruturais são boas para expressarmos as funções específicas que relacionam um grupo de causas e seus efeitos (SLOMAN, 2005, p. 42).

*d) Redes causais*

Modelos causais repousam em uma base metafísica estrutural composta pelas chamadas redes causais, também antes já apresentadas por Reichenbach (1971 [1956]). Aqui, me ocuparei com uma apresentação mais técnica dessas redes, sem me preocupar muito com as diversas interpretações ou bases estruturais metafísicas ou mais gerais que estaríamos supondo com elas.



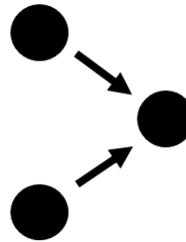
**Fig. 18:** Gráfico representando uma rede causal.

Quando na prática analisamos uma determinada rede causal, fazemos um recorte de uma rede causal mais ampla. Esse recorte será determinado de acordo com nossas finalidades. Uma rede causal é composta pelas seguintes estruturas: colisores causais, linhas causais e bifurcações causais. Estas estruturas, por sua vez, são constituídas de nós e vértices direcionados. Podemos também chamar um recorte de uma rede causal de sistema causal. Um sistema causal, precisa ter no mínimo três elementos (eventos ou variáveis de eventos) conectados na forma de um

colisor, linha ou bifurcação causal. Podemos ter várias combinações de tais estruturas constituindo diversos sistemas ou redes causais.

*e) Colisores causais*

Um colisor causal, algumas vezes também chamado de bifurcação invertida, é composto por pelo menos dois eventos causais (mães) que conjuntamente produzem um efeito comum (filha). O nosso exemplo do fogão à lenha, no qual precisamos de oxigênio e lenha para acendê-lo, consiste em um colisor causal.



**Fig. 19:** Colisor causal.

Dois nós, ou grupo de nós (causas), serão condicionalmente dependentes dado qualquer uma de suas filhas comuns (efeitos). Estatisticamente isso ocorrerá de acordo com o que foi apresentado na subseção y da seção 2.2.1. Uma causa  $A$  será independente de uma outra causa  $B$  dado o efeito comum  $E$  ( $A \not\perp B | E$ ), de forma que as seguintes relações se sustentarão:

$$P(A, B | E) \neq P(A | E) \cdot P(B | E) \quad (\text{DC 1})$$

$$P(A | B, E) \neq P(A | E) \quad (\text{DC 2})$$

$$P(B | A, E) \neq P(B | E) \quad (\text{DC 3})$$

*f) Linhas causais*

Uma linha causal é composta por pelo menos três eventos conectados de modo que pelo menos um dos eventos (mãe) é causa de um evento (filha), enquanto é também efeito de um outro evento (avó). Considere um rato, um gato e um cachorro morando em uma mesma casa. Quando o gato rosna, o rato se assusta e foge de seu esconderijo com pressa, derrubando um vaso leve que fica na frente de sua “casa”. Quando o cachorro escuta o barulho do vaso caindo, ele late. Chamemos o evento do gato rosnar de  $A$ , o evento do vaso cair de  $B$ , e o evento do

cachorro latir de  $C$ . Utilizando a linguagem de modelos causais, podemos representar a linha causal do seguinte modo:  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .



**Fig. 20:** Linha causal.

Neste caso, a neta ( $C$ ) será independente da avó ( $A$ ) dado o sua mãe ( $B$ ). Da mesma forma que, por simetria, a avó tornar-se-á ( $A$ ) independente da neta ( $C$ ) dada a sua filha ( $B$ ), isto é, sua descendente mais direta. Estatisticamente isso ocorrerá de acordo com o que foi apresentado na subseção  $x$  da seção 2.2.1. *Independência condicional*, **II** de modo que ( $A \perp C \mid B$ ), e as seguintes relações sustentam-se:

$$P(A, C \mid B) = P(A \mid B) \cdot P(C \mid B) \quad (\text{IC 1})$$

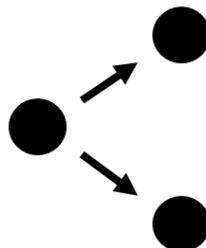
$$P(A \mid C, B) = P(A \mid B) \quad (\text{IC 2})$$

$$P(C \mid A, B) = P(C \mid B) \quad (\text{IC 3})$$

Dada esta propriedade de independência condicional, linhas causais exibem *separação-d* e obedecem à chamada *condição causal de Markov*. Em modelos causais, esta condição funcionará como um algoritmo. Tratarei de ambas com mais detalhes em subseções próximas.

### g) *Bifurcações causais*

Uma bifurcação causal é composta por pelo menos dois eventos (filhos) partilhando uma causa comum (pai). Podemos considerar aqui o exemplo do barômetro oferecido no capítulo anterior (ver figura 2, p. 26), em que a queda da pressão atmosférica ( $C$ ) é causa tanto da chuva ( $A$ ), quanto da indicação do ponteiro do barômetro ( $B$ ). Utilizando a linguagem de modelos causais:  $A \leftarrow C \rightarrow B$ .



**Fig. 21:** Bifurcação causal.

Em modelos causais clássicos, as bifurcações causais são sempre *bifurcações conjuntivas*, isto é, bifurcações em que os coefeitos são independentes dada a causa comum<sup>18</sup>. Estatisticamente isso também ocorrerá de acordo com o que foi apresentado na subseção *x* da seção 2.2.1. *Independência condicional*, de modo que  $(A \perp\!\!\!\perp B | C)$ , e as seguintes relações são válidas:

$$P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C) \quad (\text{IC 1})$$

$$P(A | B, C) = P(A | C) \quad (\text{IC 2})$$

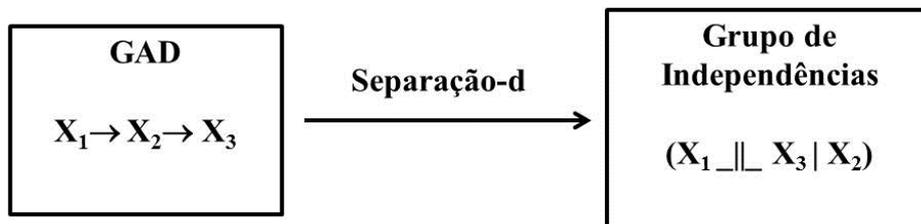
$$P(B | A, C) = P(B | C) \quad (\text{IC 3})$$

Uma bifurcação causal também exhibe *separação-d* e obedece à *condição causal de Markov*.

#### *h) Separação-d*

A separação-d conecta grafos e distribuições probabilísticas. Se um grupo de vértices  $X$  e  $Y$  são d-separados por  $Z$  em um *GAD*  $G$ , então  $X$  e  $Y$  são condicionalmente independentes dado  $Z$  em  $G$  (simbolicamente:  $X \perp\!\!\!\perp Y | Z$ ).

Desse modo,  $X$  e  $Y$  são d-separados por  $Z$  em  $G$ , se um grupo de vértices  $Z$  bloqueia todas as conexões diretas entre  $X$  e  $Y$  em um gráfico  $G$ . Considere, por exemplo, três vértices:  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ . No *GAD* exemplificado da figura abaixo (fig. 22),  $X_2$  bloqueia as conexões diretas entre  $X_1$  e  $X_3$ . Assim, dizemos que  $X_1$  e  $X_3$  são d-separados por  $X_2$  nesse *GAD* (SCHEINES, 1997, p.2):

**Fig. 22:** Um grupo de independências probabilísticas obtidas de um *GAD* através de separação-d (figura modificada de SCHEINES, 1997, p.2).

<sup>18</sup> No próximo capítulo apresentarei a bifurcação causal interativa, um tipo de bifurcação causal que não obedece a condição causal de Markov.

Em algumas literaturas, a independência condicional será chamada de compartimentalização (*screening off*). Assim, podemos dizer também que se  $X$  e  $Y$  são d-separados por  $Z$  em  $G$ , então  $Z$  compartimentaliza  $X$  de  $Y$ .

*i) A condição causal de Markov*

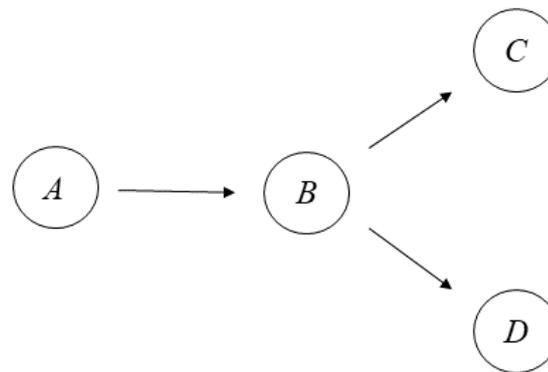
Assim como o gráfico causal é o correspondente causal de um *GAD*, a Condição Causal de Markov é o correspondente causal da separação-d.

As relações de independência implicadas pela aplicação da Condição Causal de Markov para um gráfico causal são as mesmas obtidas pela aplicação da separação-d, mas é mais simples justificar a conexão entre grafos causais e probabilidade quando colocamos isso de uma forma markoviana. (SCHEINES, 1997, p. 6, tradução nossa).

Assim como a separação-d, a condição causal de Markov também se aplicará a linhas e bifurcações causais. Tanto a separação-d quanto a condição causal de Markov funcionam como algoritmos em aprendizado de máquinas. Podemos formular a condição do seguinte modo:

Condição Causal de Markov: as causas diretas de uma variável – seus genitores – a tornam probabilisticamente independentes de qualquer outro grupo de variáveis exceto seus efeitos. (SLOMAN, 2005, p.47).

Considere o seguinte gráfico causal:



$$\begin{aligned}
 B &= f(A) \\
 C &= f(B) \\
 D &= f(B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &\perp\!\!\!\perp D \mid B \\
 C &\perp\!\!\!\perp A \mid B \\
 D &\perp\!\!\!\perp A \mid B
 \end{aligned}$$

**Fig. 23:** Um gráfico causal, suas respectivas funções estruturais e independências condicionais.

Podemos concluir do gráfico apresentado acima que  $C$  é independente de  $D$  dado  $B$  ( $C \perp\!\!\!\perp D \mid B$ ),  $C$  é independente de  $A$  dado  $B$  ( $C \perp\!\!\!\perp A \mid B$ ) e  $D$  é independente de  $A$  dado  $B$  ( $D \perp\!\!\!\perp A \mid B$ ). É importante ressaltar a simetria da independência probabilística: eventos avôs também serão independentes dos eventos netos, dado o evento filho. O mesmo vale, é claro, para variáveis avôs e netas. No caso da bifurcação causal ambos coefeitos serão mutuamente independentes.

Outro princípio causal formulado por Reichenbach diretamente relacionado com o problema em causa nesta tese é o *Princípio de Causa Comum*, um caso particular da *Condição Causal de Markov*.

j) *O princípio de causa comum*

O *princípio de causa comum* é equivalente à condição causal de Markov quando aplicada apenas a bifurcações causais. Em outras palavras, a condição causal de Markov é uma generalização do princípio de causa comum, incluindo as linhas causais entre as bifurcações causais. Tal princípio foi formulado por Reichenbach (1956 [1971], p. 163):

**Princípio de Causa Comum:** se coincidências entre dois eventos  $A$  e  $B$  ocorrem mais frequentemente do que corresponderia às suas ocorrências independentes, isto é, se os eventos satisfazem a relação  $P(A, B) > P(A) \cdot P(B)$ , então há uma causa comum  $C$  para esses eventos, tal que a bifurcação  $ACB$  é conjuntiva, isto é, satisfaz as relações de independência condicional.

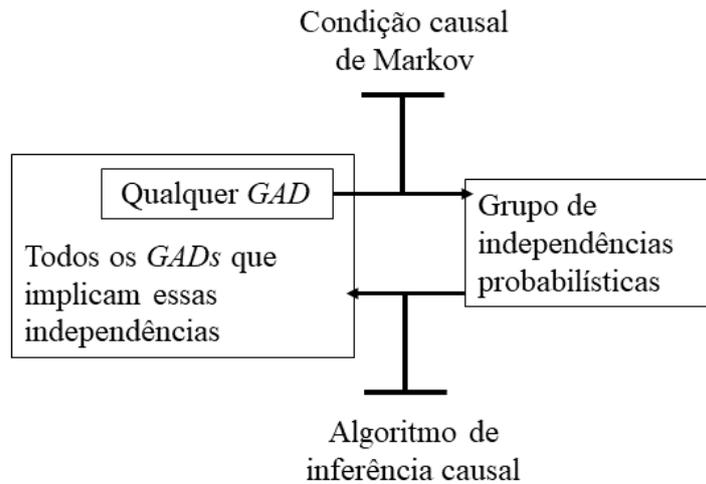
De forma mais sucinta: se uma improvável coincidência ocorre, então deve haver uma causa comum (REICHENBACH, 1956 [1971], p.157), e essa causa comum compartimentaliza cada um de seus efeitos. Uma bifurcação causal que exhibe compartimentalização entre seus efeitos, isto é, em que seus efeitos são condicionalmente independentes dada a causa comum, é chamada de *bifurcação conjuntiva*.

Considere, por exemplo, duas lâmpadas de uma mesma sala que costumam queimar simultaneamente de forma muito mais frequente do que seria esperado de duas lâmpadas quaisquer por mera coincidência. De acordo com o princípio de Reichenbach, muito provavelmente, há uma causa comum que explica essa dependência probabilística, que seria improvável na sua ausência, como, no caso, uma mesma fiação conectando ambas as lâmpadas. Um excesso de energia nessa fiação causa muitas vezes o apagamento simultâneo de ambas as lâmpadas, embora algumas vezes cause somente o apagamento de uma das lâmpadas. Uma vez dotados da informação da causa, verificaremos os efeitos como probabilisticamente independentes entre si. Isto é, a causa comum compartimentaliza os seus efeitos.

O princípio de causa comum, para Reichenbach (1956 [1971]), é uma evidência da assimetria da explicação causal, pois coincidências improváveis são explicadas por suas causas e não pelos seus efeitos comuns. Se considerarmos, por exemplo, a sala ficando às escuras como um efeito comum das duas lâmpadas, não explicaríamos a improvável coincidência através desse efeito. Conectado a isso, como já vimos, em um colisor causal, que também é uma bifurcação invertida, temos uma dependência condicional no lugar de uma independência condicional, de forma que podemos distingui-las através dessa assimetria probabilística. No entanto, não podemos recorrer à assimetria probabilística em todos os casos. Em uma linha causal, como vimos, a independência condicional vai tanto no sentido das variáveis avós para as variáveis netas, quanto na direção contrária. E, na ausência de informação adicional, não podemos distinguir uma bifurcação causal conjuntiva de uma linha causal usando apenas informações de independência condicional. Veremos esse ponto com mais detalhes a seguir. O próprio Reichenbach utiliza de princípios adicionais, que inspirarão tanto a posição defendida nesta tese, quanto as teorias intervencionistas clássicas. Recomendo fortemente a leitura do capítulo 23, “*The Mark Principle and Causal Relevance*”, da obra *The Direction of Time* (1956 [1971]), no qual Reichenbach apresenta os fundamentos estatísticos e algorítmicos que servirão de base para o intervencionismo e modelagens causais atuais.

k) *O algoritmo de inferência causal*

A partir de um grupo de relações de independência de um grupo de variáveis, o *algoritmo de inferência causal*, ou apenas algoritmo *IF*, fornece os *GADs* que são d-separados, ou markovianamente equivalentes, sob tais variáveis. Juntamente com a condição causal de Markov, entre outros algoritmos, o algoritmo *IF* compõe a base algorítmica fundamental da modelagem causal clássica. Ele também é chamado de algoritmo *PC* em alguns programas de inferência causal, como o TETRAD, um *software* livre desenvolvido por alguns dos criadores da modelagem causal contemporânea.



**Fig. 24:** Algorítmia básica da modelagem causal (figura modificada de SCHEINES, 1997, p.3).

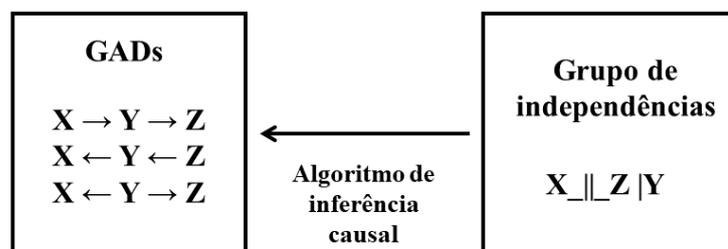
Por exemplo, se  $X$  e  $Y$  são dependentes e  $X$  e  $Z$  também o são, mas são independentes dado  $Y$ , isto é,  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$ , então os seguintes *GADs* markovianamente equivalentes são obtidos com a aplicação do algoritmo da inferência causal:

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

$$X \leftarrow Y \leftarrow Z$$

$$X \leftarrow Y \rightarrow Z$$

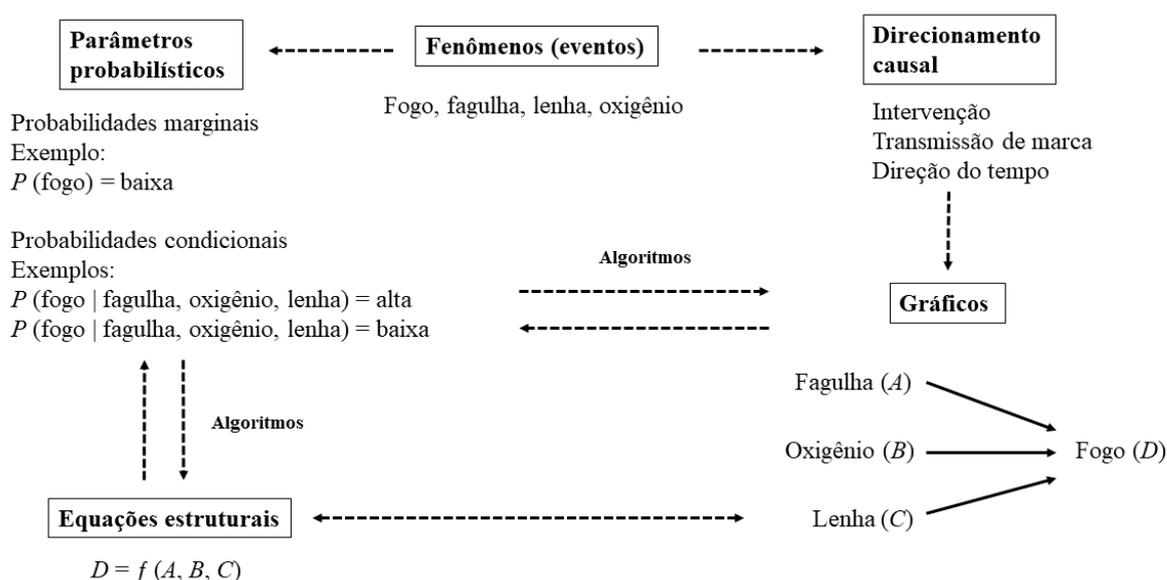
A seguinte figura pode contribuir no esclarecimento desta estrutura:



**Fig. 25:** *GADs* obtidos de uma independência condicional através do algoritmo de inferência causal (figura modificada de SCHEINES, 1997, p.3).

Esses *GADs* não podem ser distinguidos somente através de relações de dependências ou independências probabilísticas. Alguma informação adicional é requerida. O modelo intervencionista recorrerá a intervenções ou a uma direção temporal pré-estabelecida para a definição ou diminuição do número de *GADs*. O modelo que proponho nesta tese recorrerá a uma reformulação do *Critério de Transmissão de Marca*, também originalmente formulado por Reichenbach (1927 [1958]), sob uma interpretação mais focada na teoria da relatividade do que no princípio de aumento de entropia ou em uma interpretação probabilística do critério, como a interpretação apresentada no *The Direction of Time* (1956 [1971]). Esse critério será apresentado e explorado no próximo capítulo.

Podemos representar a estrutura básica da modelagem causal contemporânea através da seguinte imagem, considerando o exemplo do acendimento do fogão à lenha:



**Fig. 26:** Elementos básicos da modelagem causal.

### 2.3. Considerações finais

Neste capítulo, ofereci uma breve explicação dos princípios básicos dos modelos causais clássicos e da teoria da inferência causal estatística. Para isso, recorri principalmente a Sloman (2005), Scheines (1997) e Pearl et al. (2016). Consulte também muitas vezes e recomendo a leitura dos clássicos Pearl (2000), Spirtes, Glymour, e Scheines R. (2000), além de textos mais recentes, como Pearl (2018).

Não abordei aqui nem o caráter intervencionista e nem o arcabouço contrafactual dos modelos causais estruturais clássicos. Meu objetivo foi apenas fornecer os elementos básicos

para o entendimento do problema da aplicação de modelos causais no domínio quântico, a ser tratado no próximo capítulo, apresentando uma base que permite diversas abordagens no que diz respeito à determinação da direção causal e temporal dos eventos em análise. No entanto, quem tiver interesse nesses pontos, pode encontrá-los nos textos recomendados acima. O modelo indeterminístico que apresentarei como alternativa ao modelo clássico será um tipo de modelo processual, em que ferramentas intervencionistas e contrafactuais podem ser compatibilizadas, mas sua base geral é factual e sustentada na transmissão de marca, o que inclui o intervencionismo, mas não se resume a ele, especialmente no que diz respeito à fundamentação metafísica. Não se pressupõe, por exemplo, uma base determinística laplaceana, como é pressuposta na modelagem desenvolvida por Pearl e outras modelagens clássicas.

Ademais, espero que este capítulo possa servir como texto de apoio ou pré-leitura para o estudo de textos mais técnicos sobre modelos causais em geral ou modelos causais quânticos, e que facilite o entendimento do significado do formalismo e dos componentes centrais dos modelos causais clássicos, especialmente para filósofos, mas também para estatísticos, cientistas da computação, físicos, ou quem mais se interessar por esses aspectos fundamentais. Espero também que ele contribua para a compreensão mais plena da essência conceitual, inferencial e matemática dos modelos causais e os problemas filosóficos ligados a ela. O meu propósito quando escrevi este capítulo foi o de auxiliar nos estudos que exigem o conhecimento de estatística básica, incluindo outros temas além da modelagem causal. Nem todo o seu conteúdo é necessário, mas certamente contribuirá, para a compreensão do próximo capítulo.

### Capítulo 3: Sobre a natureza dos processos causais quânticos

Quantum mechanics has therefore not contradicted the law of causality at all, but has clarified it and has removed from it other principles which are not necessarily connected to it.

(Grete Hermann, *The Foundations of Quantum Mechanics in the Philosophy of Nature*)

#### 3.1. Observações preliminares

A discussão filosófica contemporânea em torno de *processos causais* remonta à noção russelliana de *linha causal*. Segundo sua definição: “uma linha causal pode sempre ser considerada como a persistência de algo – uma pessoa, uma mesa, um fóton, ou o que seja.” (RUSSELL, 2009 [1948], p. 404, tradução nossa). Munidos dessa noção, podemos abandonar o obscuro conceito de ‘substância’ para explicar a identidade de uma coisa em diferentes instantes do tempo. Uma linha causal será equivalente a uma linha do universo de um objeto em um diagrama de Minkowski (RUSSELL, 2009 [1948]). Poderíamos, talvez, dar um passo semelhante no que diz respeito à natureza dos processos quânticos. No entanto, como nos adverte Russell, deve haver constância de qualidade e estrutura através de uma linha causal. Mudanças graduais são permitidas, mas não mudanças repentinas (RUSSELL, 2009 [1948], p. 404). Devido à natureza discreta e não local dos fenômenos quânticos, o princípio de continuidade implicará em não podermos aplicar a noção clássica de processo causal no domínio quântico. Relacionado a isso e à chamada *não separabilidade quântica*, o *princípio de causa comum* é também violado. Portanto, parece que não podemos, em princípio, utilizar causalidade para explicar a natureza de um processo quântico através do tempo, bem como não podemos aplicar modelos causais clássicos a fenômenos quânticos.

Neste capítulo, defenderei uma concepção não clássica de processos causais. Sustentarei que esta alternativa nos permite não somente aplicar a modelagem causal ao domínio quântico, como também oferecer uma solução para outros problemas conectados à noção clássica de causalidade, especialmente aqueles relacionados aos paradoxos do tempo de Zenão e à pressuposição de contiguidade espaçotemporal entre eventos causais. Isso nos levará à abordagem do terceiro equívoco da causalidade apontado por Russell (2003 [1913]).

Para sustentar essa alternativa não clássica, proponho uma generalização do princípio de causa comum de Hans Reichenbach, além de uma reformulação do seu critério de

transmissão de marca. Adicionalmente, proponho uma reformulação da noção de bifurcação causal interativa de Wesley Salmon e de sua teoria dos processos causais. As bifurcações causais conjuntivas serão mantidas para a cobertura de fenômenos clássicos. Porém, a diferença entre os dois tipos de bifurcações é uma das chaves para compreendermos a distinção entre probabilidade e causalidade na física clássica e na física quântica.

Primeiramente, apresentarei os modelos causais probabilísticos que podem ser obtidos a partir das teorias da causalidade de Hans Reichenbach (1944, 1971 [1956]) e Wesley Salmon (1984, 1997, 1998) e explicarei por quais razões eles não podem ser aplicados ao domínio da mecânica quântica. Num segundo momento, apresentarei o modelo causal de Phil Dowe (1996, 2000) fundamentado na interpretação transacional da mecânica quântica de John Cramer (1986, 1988) e os motivos pelos quais penso que ele não é adequado. Depois disso, apresentarei minha proposta de solução para o problema da aplicação da causalidade a fenômenos quânticos.

### **3.2. O problema da aplicação da causalidade no domínio quântico**

O problema da aplicação da causalidade no domínio da mecânica quântica é caracterizado pela dificuldade em explicarmos causalmente determinados fenômenos preditos pelo formalismo da mecânica quântica de acordo com os modelos causais clássicos disponíveis. Neste trabalho, referir-me-ei especificamente ao contexto experimental do tipo EPR-Bohm, onde medições de propriedades de duas entidades quânticas espacialmente separadas exibem uma anticorrelação perfeita entre si e a dependência estatística entre elas não é compartimentalizada por uma causa comum, como ocorre no domínio clássico. Tal problema encontra-se no limiar entre a física e a filosofia e tem sido abordado desde o advento da física quântica tanto por filósofos da ciência quanto por físicos, inclusive por aqueles que contribuíram na construção de tal teoria<sup>19</sup>.

O problema da aplicação da causalidade no domínio quântico está relacionado a outro mais geral da interpretação da mecânica quântica. Além da falta de uma explicação causal para determinados fenômenos, nos deparamos ainda com a falta de uma explicação física apropriada para o formalismo quântico e para a natureza da distinção entre as correlações probabilísticas

---

<sup>19</sup> Restrinjo-me, neste trabalho, à análise das posições de Reichenbach, Salmon e Dowe. Para uma introdução ao debate envolvendo as posições de fundadores da teoria quântica, além das posições de outros filósofos como Hermann, Schlick e Cassirer, recomendo a leitura do artigo “Causalidade e teoria quântica” de Patrícia Kauark-Leite publicado na revista *Scientiae Studia*, Y67 vol.10, no.1, São Paulo, 2012.

quânticas e clássicas, bem como com a dificuldade em conciliar uma interpretação desse formalismo com interpretações usuais da teoria da relatividade. Creio que o relacionismo radical pode indicar um caminho teórico na construção de uma solução plausível para grande parte desses problemas.

As pesquisas sobre modelos causais quânticos foram amplamente favorecidas pelo tratamento matemático da inferência causal iniciado na década de 1980, e a busca pela aplicação de modelos causais ao domínio quântico tem ganhado recentemente uma atenção renovada (como em Costa & Shrapnel (2015), Oreshnov, Costa & Brukner (2012), e Ried et al. (2015), entre outros). A distinção do modelo causal apresentado nesta tese reside principalmente no tratamento voltado às questões filosóficas, na utilização de bifurcações interativas, e no acréscimo do algoritmo de redução causal do tempo, com o qual geramos grafos temporais a partir de grafos causais.

### 3.3. A herança humeana

O pensamento de David Hume sobre a relação de causalidade (1739, 1748) teve grande influência tanto na formulação da teoria probabilística de Reichenbach, quanto nas teorias processuais de Salmon e Dowe. Um aspecto característico compartilhado por essas teorias é o empirismo. Todas sustentam a ideia de que a relação de causalidade não pode ser concebida *a priori*, e sim *a posteriori* tal como sustentou Hume:

Numa palavra, pois: todo efeito é uma ocorrência distinta de sua causa. Não pode por isso, ser descoberto na causa, e sua primeira invenção ou concepção *a priori* deve ser inteiramente arbitrária. E mesmo depois que ele foi sugerido sua conjunção com a causa não parecerá menos arbitrária, visto existirem sempre muitos outros efeitos que devem parecer, à razão, tão coerentes e naturais quanto esse. Seria em vão, pois, que pretenderíamos determinar qualquer ocorrência particular ou inferir qualquer causa ou efeito sem o auxílio da observação e da experiência (HUME, 1973 [1748], p. 139).

De acordo com essa posição, não podemos simplesmente deduzir aprioristicamente a natureza da ocorrência de um efeito a partir da descrição da sua suposta causa ou vice-versa. A relação de causalidade não poderia advir de uma necessidade lógica, e, segundo Hume, não verificaríamos empiricamente nenhuma necessidade natural que conecte a causa ao efeito. Os objetos exibiriam uma *conjunção constante* entre si, mas não uma *conexão necessária*. É exatamente a busca dessa conexão (talvez não necessária, mas natural) que motivou as teorias realistas da causalidade de Salmon e Dowe. Reichenbach, por outro lado, manteve o ceticismo

de Hume sobre a existência de uma conexão causal, mas explicou a nossa capacidade de predição de determinados efeitos a partir de determinadas causas, não pelo hábito, como Hume, mas pela consideração de que as leis causais são essencialmente probabilísticas e fundamentadas no *princípio de aumento de entropia*, permitindo-nos uma capacidade de predição de eventos futuros a partir de eventos passados de forma objetiva, ainda que estatística. Essa predição, não obstante, jamais seria inequívoca. Poderíamos nos aproximar da certeza, mas nunca a atingiríamos plenamente. Na próxima seção, ocupar-me-ei em esclarecer esse ponto da teoria de Reichenbach e em expor sua posição em relação à aplicação da causalidade ao domínio indeterminístico.

### 3.4. A teoria da causalidade de Reichenbach e a indeterminação quântica



*Oxóssi*, por Gil Abelha

*Olóde ofi òfà kan soso*<sup>20</sup>

Saudação Iorubá.

A teoria causal de Reichenbach (1944, 1956) é constituída por uma dupla redução: a redução da direção do tempo à direção da causalidade e a redução das relações causais a relações probabilísticas. A alternativa que defenderei nesta tese mantém a primeira redução,

<sup>20</sup> “O senhor das matas usa somente uma flecha.”

caracterizada também como uma teoria causal do tempo, mas não a segunda. Embora as correlações probabilísticas verificadas em distintos tipos de fenômeno ocupem um papel central tanto na estruturação da minha defesa, quanto na teoria de Salmon, as relações causais não serão entendidas como uma mera idealização de relações probabilísticas, como defendeu Reichenbach, em ambos os casos.

### 3.4.1. *Leis causais e predições estatísticas*

Reichenbach (1944), assim como Russell (2003 [1913]), considerou que o conceito de causalidade é atado à nossa capacidade de prever probabilisticamente eventos futuros:

[A] afirmação de que a natureza é governada por leis causais estritas significa que podemos prever o futuro com uma determinada probabilidade e que podemos impulsionar essa probabilidade próxima da certeza como desejarmos, usando uma análise suficientemente elaborada do fenômeno sob consideração. (REICHENBACH, 1944, p. 43, tradução nossa).

Nossa capacidade de predição, no entanto, não é inequívoca. Como já discutimos no primeiro capítulo, podemos nos aproximar da certeza preditiva, mas nunca podemos atingi-la plenamente, dado o nosso limite cognitivo. Por isso, de acordo com Reichenbach, nunca verificaríamos de fato qualquer relação causal no mundo, apenas implicações probabilísticas.

E também como argumentou Russell (1913), segundo Reichenbach (1944, p. 3), não podemos verificar qualquer lei física que não seja probabilística, mesmo entre as da física clássica. As leis causais estritas somente teriam significado por poderem ser interpretáveis sob a forma de uma lei probabilística equivalente e empiricamente verificável.

Com essa formulação, o princípio da causalidade é despido de seu disfarce como um princípio *a priori*. Se a causalidade é estabelecida como um limite de implicações probabilísticas, é claro que esse princípio só pode ser sustentado no sentido de uma hipótese empírica. A possibilidade de um limite preditivo foi reconhecida mesmo antes de a mecânica quântica nos conduzir a afirmação de tal limite (REICHENBACH, 1944, pp. 2-3, tradução nossa).

Para ilustrar como se dá a interpretação de leis causais em termos de leis probabilísticas, considere o seguinte exemplo adaptado de Reichenbach (1944, p. 2).

Imagine uma tentativa de gol do nosso ponta de lança do Vasco da Gama, Ademir. Aceitemos inicialmente que o chute causa o impacto da bola em um determinado ponto da baliza, no caso, uma região limitada no canto superior direito do travessão. Considere *A* como

sendo o conjunto das condições iniciais envolvidas no chute da bola, tal como o peso da bola, a posição do pé de Ademir e a distância em que ele toma antes do chute. Tais parâmetros poderiam ser medidos independentemente e de forma simultânea, ou por uma inteligência artificial ou por Ademir de modo mais prático e intuitivo. Considere que  $B$  representa a descrição do ponto de impacto da bola. Após vasto treinamento e experimentação de vários casos de chutes ao gol segundo aqueles parâmetros, Ademir pode medi-los em um dado chute e prever um ponto de impacto com certa probabilidade, obtendo uma implicação probabilística da forma “se  $A$  então  $B$  dada certa probabilidade” (REICHENBACH, 1944, p. 2):

$$(1) A \ni p B$$

Dessa relação, considerando os fenômenos ideais  $A'$  e  $B'$ , Ademir também poderia sustentar uma relação ideal sob a forma de uma implicação estrita do tipo “se  $A'$  então  $B'$ ”, por meio de uma extrapolação nada segura (REICHENBACH, 1944, p. 2):

$$(2) A' \supset B'$$

Por isso, de acordo com Reichenbach, a implicação ideal não verificável “se  $A'$  então  $B'$ ” (2) só é provida de significado porque podemos substituí-la pela implicação probabilística verificável “se  $A$  então probabilisticamente  $B$ ” (1).

Assegurado pela sua grande habilidade, Ademir poderia adicionar novos parâmetros ao chute, como, por exemplo, a força empregada, a velocidade do chute, entre outras coisas. Uma inteligência artificial poderia acrescentar ainda mais parâmetros, como a influência da rotação da terra, a resistência do ar e, até mesmo, a direção em que o goleiro se move, aumentando com isso a probabilidade da implicação. No entanto, não verificaríamos na prática Ademir, nem qualquer outra pessoa, grupo de pessoas, ou inteligência artificial, ainda que munidos de todo um aparato avançado de medição, conseguindo atingir a certeza absoluta. Assim, mesmo com um aumento da proximidade entre a implicação estatística e a implicação estrita com a inclusão de parâmetros relevantes adicionais e medições mais precisas das condições iniciais dos fenômenos, não há qualquer garantia que a implicação estrita ideal se verifica na prática.

Podemos defender, não obstante, ao contrário de Reichenbach, que não há razões para pensarmos que a causalidade seja redutível à nossa capacidade de predição e que o caráter indeterminístico da mecânica quântica, antes de revelar uma ausência de causalidade em tal domínio, é perfeitamente compatível com a hipótese de que a causalidade opera também sob

mecanismos indeterminísticos. Como vimos anteriormente, no primeiro capítulo, a redução da causalidade à nossa capacidade probabilística de predição é, no mínimo, questionável. De qualquer modo, penso que o trabalho de Reichenbach é bastante importante na identificação das distinções fundamentais entre mecânica quântica e mecânica clássica.

### 3.4.2. *Leis de correlação inversa de distribuições probabilísticas*

De acordo com Reichenbach (1944, p.1), um dos principais problemas filosóficos da mecânica quântica concerne exatamente a essa transição de leis probabilísticas a leis causais estritas. O diferencial no caso da física quântica em relação à física clássica seria o fato de não podermos atingir no primeiro domínio uma idealização semelhante a que podemos atingir no segundo. No caso da quântica, não podemos formular leis causais que sejam interpretáveis nos termos de suas respectivas leis probabilísticas.

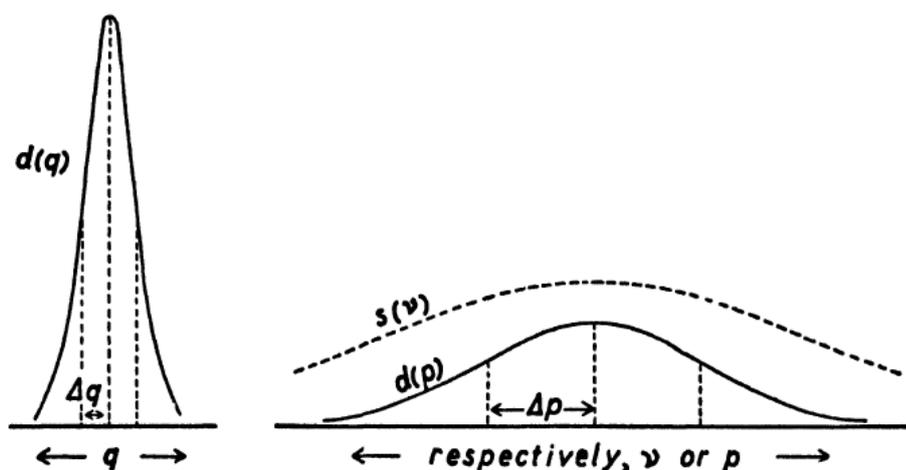
A origem dessa diferença, de acordo com ele, reside na lei de correlação inversa de distribuições probabilísticas da mecânica quântica expressas pelo *princípio da indeterminação* de Heisenberg (1925, 1927). Tal princípio representa um limite de mensurabilidade. Não podemos obter medidas precisas de dois parâmetros que definem o estado de um sistema físico de forma independente e simultânea, mas somente a medida precisa de um deles. Uma medição próxima da certeza para um parâmetro, acarreta em uma medição com grau de incerteza maior para o outro.

Consideremos, para ilustrar, a relação de incerteza entre posição ( $q$ ) e momento ( $p$ ) de um elétron. De acordo com esta relação, se obtivermos uma medida com acurácia da distribuição probabilística de  $q$ , a posição do elétron, não podemos obter com a mesma precisão a distribuição probabilística de  $p$ , seu momento. Isso é o que expressa a chamada relação de indeterminação entre momento e posição, em que  $h$  é a constante de Planck,  $\Delta q$  o desvio padrão da distribuição probabilística (função densidade) da posição  $d(q)$ , e  $\Delta p$  é o desvio padrão da distribuição probabilística do momento  $d(p)$ :

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Como vimos no capítulo anterior (subseção 2.2.1., “Distribuição normal”), quanto maior for o desvio padrão e a variância de uma distribuição probabilística em uma função densidade de Gauss, mais espalhada será a curva dessa função, resultando em uma forma mais

achatada. Inversamente, uma variância e desvio padrão menores apresentam uma curva mais estreita. Uma curva mais estreita, corresponde a uma predição mais precisa, enquanto que uma curva mais achatada corresponde a uma predição menos precisa. Desse modo, de acordo com o princípio da indeterminação de Heisenberg, se obtemos uma função densidade com uma curva estreita e, portanto, uma determinação precisa de um parâmetro, obtemos uma curva achatada e, portanto, uma determinação menos precisa do outro parâmetro. Considere, por exemplo, a seguinte imagem:



**Fig. 26:** Distribuições probabilísticas de posição e momentum nas formas de curvas de Gauss (REICHENBACH, 1944, p. 9).

Reichenbach (1944) nos explica em detalhes que o cerne da lei de correlação inversa de distribuições probabilísticas da mecânica quântica é matematicamente caracterizado pela chamada expansão de Fourier aplicada à função de onda  $\psi$ , que é uma função complexa (isto é, uma função determinada por números complexos, os quais já mencionamos no capítulo anterior, seção 2.2.1.), através das regras da decomposição espectral e do quadrado da função  $\psi$ . De forma menos detalhada, o que ocorre na mecânica quântica, no caso do exemplo da medição da posição e do momento de um elétron, é que tanto a curva  $d(p)$ , quanto a curva  $d(q)$  são derivadas da mesma função  $\psi(q)$ , de modo que há uma conexão algébrica entre a forma das curvas de ambas distribuições.

Na figura da esquerda temos a representação gráfica da distribuição probabilística da posição  $q$ . Na figura da direita, a linha pontilhada indica a expansão de Fourier obtida diretamente da curva  $d(q)$ . Já a linha sólida da mesma figura é construída através da expansão de Fourier da função- $\psi$  da qual a curva  $d(q)$  é derivável, representando a distribuição  $d(p)$  do momentum  $p$  coordenada à distribuição  $d(q)$  da posição  $q$  (REICHENBACH, 1944, p. 9).

Desse modo, não podemos medir tais propriedades independentemente e não podemos fazer predições que se aproximem da certeza em tal domínio, como podemos fazer no domínio da física clássica, já que não há como medir valores simultâneos dos parâmetros envolvidos com exatidão arbitrária. Nas palavras de Reichenbach (1944, p. 6): “enquanto, na física clássica, consideramos as duas curvas  $d(q)$  e  $d(p)$  como independentes uma da outra, a mecânica quântica introduz a regra de que não são”. Não poderíamos aqui, portanto, dar o passo que damos no exemplo do chute ao gol de Ademir. Para Reichenbach, isso demonstra que temos apenas leis estatísticas no domínio da física quântica e que elas, de modo algum, podem ser convertidas em leis causais, mesmo que por meio de idealização, como ocorreria no caso da física clássica.

### 3.4.3. A violação do princípio de causa comum

No domínio quântico, as correlações probabilísticas do *princípio de causa comum*, um dos casos especiais da *condição causal de Markov*, são violadas. De acordo com o princípio de causa comum de Reichenbach, já apresentado na subseção 2.2.2., se há uma correlação positiva entre dois eventos espacialmente separados (isto é, não conectados causalmente)  $A$  e  $B$ , de modo que  $P(A, B) > P(A) \cdot P(B)$ , então deve haver uma causa comum  $C$ , sendo que  $C$  compartimentaliza a relação estatística entre eles. Assim, os efeitos, quando consideramos a causa comum, exibem uma independência probabilística entre si. Como vimos na subseção 2.2.1, quando  $A$  é probabilisticamente independente de  $B$ , dado  $C$  (formalmente:  $A \perp\!\!\!\perp B | C$ ), então as seguintes relações são válidas:

$$P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C) \quad (\text{IC 1})$$

$$P(A | B, C) = P(A | C) \quad (\text{IC 2})$$

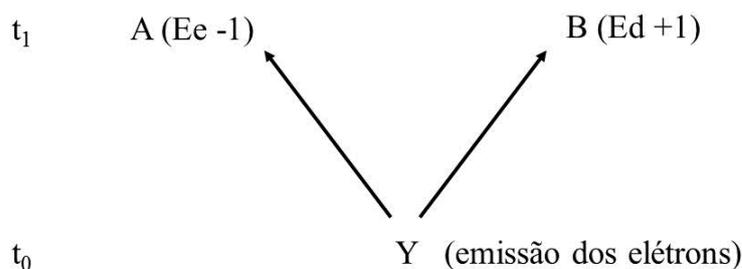
$$P(B | A, C) = P(B | C) \quad (\text{IC 3})$$

Também como já vimos no capítulo anterior, um conjunto de eventos que exiba tal tipo de arranjo causal e obedeça tais relações probabilísticas figura uma *bifurcação causal conjuntiva*.

Fenômenos quânticos do tipo *EPR-Bohm*, por sua vez, não exibem correlações probabilísticas que constituiriam uma bifurcação causal conjuntiva. Eles exibem, no lugar, as correlações probabilísticas do que Salmon denominou como *bifurcação causal interativa*.

Numa bifurcação causal interativa a causa comum falha em compartimentalizar os seus efeitos, de modo que  $P(A, B | C) > P(A | C) \cdot P(B | C)$ .

Para compreendermos melhor esse ponto, vejamos uma representação gráfica bastante simplificada, mas que servirá aqui para os nossos propósitos, de um arranjo experimental do tipo EPR-Bohm:



**Fig. 27:** Dois elétrons em estado de singleto sendo emitidos de uma fonte comum.

No instante  $t_0$  temos dois elétrons em estado de *singleto* sendo emitidos de uma fonte comum ( $Y$ ). Suponhamos que um deles,  $Ee$ , se direcione para esquerda e o outro,  $Ed$ , para a direita. Em cada um dos pontos há um medidor do *spin* dos elétrons, seus momentos angulares intrínsecos. Essa medição poderá ter um de dois valores rotacionais: *spin* “para cima” (+1) ou *spin* “para baixo” (-1). No estado de singleto, os elétrons estão correlacionados de tal forma que se o *spin* de um é para cima em uma dada direção, o *spin* do outro será para baixo na mesma direção, eles exibem uma anticorrelação perfeita. De acordo com uma interpretação indeterminística, dada a emissão dos dois elétrons a partir de uma fonte comum, a probabilidade de ocorrer  $A$  e  $B$  será aleatória, de modo que podemos estipular que a probabilidade de  $Ed$  apresentar a propriedade +1 seria igual a 0,5 assim como a probabilidade do  $Ee$  apresentar a propriedade -1. Igualmente, a probabilidade de  $Ed$  apresentar a propriedade -1 e de  $Ee$  apresentar a propriedade +1 será igual a 0,5. Já a probabilidade de  $Ed$  apresentar a propriedade +1 dado que  $Ee$  apresenta a propriedade -1 será igual a 1, isto é, certa. O mesmo vale para a probabilidade de  $Ed$  apresentar a propriedade -1 dado que  $Ee$  apresenta a propriedade +1. Assim,  $P(A | Y) = P(B | Y) = 0,5$  e a causa comum não torna seus efeitos estatisticamente independentes, de modo que  $P(A | B, Y) = 1 > P(A | Y)$  e  $P(B | A, Y) = 1 > P(B | Y)$ , violando o princípio de causa comum, bem como sua generalização, a condição causal de Markov, um dos pilares fundamentais dos modelos causais clássicos<sup>21</sup>.

<sup>21</sup> Esse tipo de contraexemplo, embora em outros contextos, mas sob a mesma forma, foi apresentado por van Fraassen (1980), tendo gerado diversas tentativas de respostas após a apresentação da versão de Cartwright (1993). Entre elas, tentativas de incluir a condição causal de Markov a fenômenos indeterminísticos, como em Hausman

Antes de qualquer interpretação filosófica, a não separabilidade quântica consiste em termos formais a este aspecto estatístico envolvendo eventos espacialmente separados, mas probabilisticamente dependentes: a dependência estatística entre eles não é compartimentalizada por um terceiro evento equivalente à causa comum do domínio clássico.

#### 3.4.4. A redução causal do tempo

Ele estava convencido de ter alcançado uma solução para o problema da direção do tempo que responderia todas as questões razoáveis feitas sobre isso. Todavia, muitas questões que outros filósofos gostariam de desconsiderar por se tratarem de pseudoproblemas – por exemplo, a questão de saber porque não podemos influenciar o passado ou a questão da liberdade do arbítrio – foram consideradas por ele como genuínas.

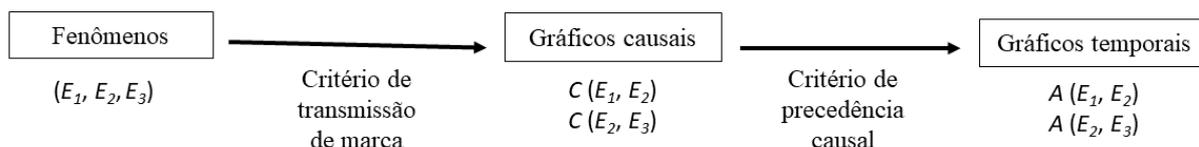
(Maria Reichenbach, prefácio de “The Direction of Time”, tradução nossa)

Trataremos agora da redução da direção do tempo à direção da causalidade. O empenho de Reichenbach na axiomatização da teoria da relatividade de Einstein (1958 [1927], 2006 [1921], 1969 [1924]) rendeu grandes frutos ainda negligenciados pela comunidade filosófica se considerarmos a proporção de sua importância. Os principais resultados desse trabalho foram: o *critério de precedência causal* e o *critério de transmissão de marca*. O critério de precedência causal será mantido por mim na minha proposta de modelagem causal sob a função algorítmica de geração de grafos temporais a partir de grafos causais. Modelos causais clássicos não utilizam ainda tal critério algoritmo. Creio que uma representação temporal realmente relativística deve utilizar a redução causal do tempo como função algorítmica. Essa redução envolverá o critério de precedência causal além de um critério independente, cuja função deve ser fornecer a direção da causalidade. No caso da minha proposta, o critério de transmissão de marca, sob uma interpretação de envio de sinal, cumprirá esse papel.

Segue abaixo uma imagem representando a composição algorítmica de uma modelo causal do tempo fundamentado nos critérios de transmissão de marca e de precedência causal:

---

& Woodward (1999) e Steel (2005). Não encontrei nas obras de Reichenbach contraexemplos desse mesmo tipo, mas ele também caracteriza as leis de correlação inversa como “leis transversais” (*cross-section laws*): leis que conectam diretamente valores simultâneos de entidades sem reduzi-los a coefeitos de causas comuns. Uma explicação mais detalhada e voltada ao problema da aplicação de modelos causais contemporâneos no domínio quântico pode ser encontrada em C. Wood et al. (2014).



**Fig. 28:** Algoritmia parcial de uma modelagem causal relacional.

a) *O critério de precedência causal*

Considere  $C$  como representando a relação causal,  $E_1$  e  $E_2$  como dois eventos distintos,  $A$  como a relação de “ser anterior a” (ou ser situado antes de), e  $\supset$  como a relação condicional (se ..., então...). Podemos, assim, formalmente representar o que chamarei de *Critério de Precedência Causal (CPC) de Reichenbach*:

$$\mathbf{CPC: } C (E_1, E_2) \supset A (E_1, E_2)$$

O *CPC* é presente também, por exemplo, na teoria de Hume, ou qualquer outra teoria em que a direção da causalidade coincida com a direção do tempo. Com ele, podemos estabelecer a direção do tempo a partir da direção da causalidade: se  $E_1$  é a causa de  $E_2$ , então  $E_1$  ocorre antes de  $E_2$ .

b) *O critério de transmissão de marca*

O *Critério de Transmissão de Marca (CTM)* pode ser formulado do seguinte modo:

**CTM:** se  $E_1$  é a causa de  $E_2$ , então uma pequena variação (uma marca) em  $E_1$  é associada com uma pequena variação em  $E_2$ , enquanto pequenas variações em  $E_2$  não são associadas com pequenas variações em  $E_1$ . (Reichenbach, 1958 [1928], p. 136, tradução nossa).

Segundo o *CTM* de Reichenbach, o que distinguiria um evento como causa de outro seria a possibilidade de uma pequena variação no primeiro ser associada a uma pequena variação no segundo e não *vice-versa*. O primeiro evento chamaremos de causa e o segundo de efeito, e, aplicando a redução causal da direção do tempo, chamaremos de anterior a causa e de posterior o efeito. O *CTM* não pressupõe uma direção temporal, fornecendo um critério

independente para a determinação da direção da causalidade. Por isso, um modelo causal sustentado em tal critério, somado à hipótese de que a direção do tempo é determinada pela direção da causalidade, caracteriza-se como um tipo de teoria causal do tempo.

Considere dois relógios sincrônicos estacionários em relação a um sistema de coordenadas, como, por exemplo, um trem que, por simplicidade, encontra-se parado na estação. Agora, imagine que um feixe de luz é enviado de uma extremidade  $A$  do trem em direção a outra extremidade  $B$ . Chamemos esse evento de envio de  $E_1$ . O feixe é refletido em  $B$  e reenviado em direção a  $A$ . Chamaremos esse evento de reflexão de  $E_2$  e de  $E_3$  ao evento em que o feixe atinge novamente  $A$ . Alguém pode colocar um filtro vermelho no espelho localizado em  $B$  no instante do evento  $E_2$ . Essa marca poderá ser encontrada em  $E_3$ , mas não em  $E_1$ . Alguém pode também colocar um filtro azul em  $A$  no momento de  $E_3$ . Essa marca, diferentemente da marca anterior, não será encontrada em  $E_3$ . Assim, aplicando o *CTM*, podemos concluir que  $E_1$  é a causa de  $E_2$ , e, aplicando adicionalmente o *CPC*, podemos concluir que  $E_2$  ocorre antes de  $E_3$  e depois de  $E_1$ .

É por conta da assimetria da transmissão de marca que não esperamos que sinais viagem no tempo em direção ao passado, mas só em direção ao futuro. Isto é, qualquer sinal que chegue até nós, viaja em uma direção temporal determinada, do passado em direção ao futuro, de eventos anteriores em direção a eventos posteriores. A radiação com a qual entramos em contato hoje proveniente de galáxias distantes, por exemplo, viajou de um momento do passado de tais galáxias até o nosso presente. Não entramos em contato com radiações futuras ou simultâneas delas. De fato, não interagimos com qualquer sinal proveniente do futuro ou do momento presente de objetos distantes, sem que um intervalo de tempo tenha decorrido.

Outra vantagem dessa formulação é que ela também é válida no domínio quântico, já que não podemos, mesmo nesse domínio, enviar sinais em uma direção determinada do tempo correspondente ao que chamamos de passado. Somente podemos enviar sinais em direção ao futuro, do mesmo modo que no domínio clássico. Mais à frente, apresentarei uma reformulação do *CTM* focada no conceito de sinal. Por hora, podemos entender uma marca de forma mais genérica, abrangendo vários tipos de mudanças em objetos ocorrendo em um instante (evento anterior) e sendo transmitida para outro instante (evento posterior), sempre unidirecionalmente. Interpretações fundamentadas no princípio de aumento de entropia, como a interpretação de Reichenbach, podem ser ditas *quase* unidirecionais, já que são estatísticas e, assim como o próprio princípio, permitem evoluções no sentido inverso da seta temporal entrópica, isto é, processos que evoluam de um estado de maior entropia para um estado de menor entropia. A

interpretação de envio de sinal, por outro lado, não permite exceções, mesmo que estatísticas: sinais são enviados sempre unidirecionalmente.

### 3.5. A teoria da causalidade de Salmon e a não localidade quântica



Oxumaré, por Gil Abelha

*Ìgbà kan n ló ìgbà kan mbò, ẹ̀nikan ò lo ilé ayé gbó.*<sup>22</sup>

Ditado Iorubá.

A teoria processual da causalidade de Salmon (1984, 1997, 1998), apesar de centrar-se em alegados mecanismos causais que, segundo ele, fornecem a conexão empiricamente observável que Hume negou existir, é também constituída por descrições probabilísticas nos termos das relações estatísticas de bifurcações causais interativas e conjuntivas. Apesar disso, ele não pretendeu reduzir a relação de causalidade a correlações probabilísticas. Diferentemente de Reichenbach, Salmon não relacionava de forma intrínseca o conceito de causalidade à nossa capacidade de predição, ele defendia que a relação de causalidade não poderia ser adequadamente explicada somente por meios de relações estatísticas de relevância, mas também por conexões físicas. Assim como a teoria de Reichenbach, a teoria de Salmon consiste em um tipo de teoria causal do tempo, isto é, uma teoria de redução da direção do tempo à direção da causalidade. Salmon também manteve grande parte da teoria de Reichenbach em sua

<sup>22</sup> “Uma estação vai, outra vem, uma pessoa não pode usar a terra para sempre.”

própria formulação, como a utilização do princípio de transmissão de marca e as bifurcações conjuntivas, mantendo com elas a função essencial na determinação da assimetria temporal. Além da base realista metafísica, as principais diferenças entre a teoria de Salmon e a de Reichenbach estão focadas em processos e interações causais e na adição das bifurcações causais interativas.

Na alternativa que defenderei no final deste capítulo, mantereí elementos de sua teoria, bem como a posição metafísica realista em relação à noção de causalidade. Oferecereí, no entanto, interpretações distintas das de Salmon no que diz respeito às bifurcações interativas, à transmissão de marca e aos processos causais.

### 3.5.1. Bifurcações causais interativas

De acordo com a teoria processual de Salmon, há dois tipos de causa comum e, portanto, de bifurcações causais: as bifurcações conjuntivas e as bifurcações interativas. A diferença essencial entre bifurcações interativas e conjuntivas está nas correlações probabilísticas associadas a cada uma delas. Enquanto em uma bifurcação conjuntiva a causa comum compartimentaliza a dependência estatísticas entre seus efeitos, em uma bifurcação interativa a causa comum não torna seus efeitos probabilisticamente independentes. Muito pelo contrário, bifurcações interativas, assim como colisores causais, exibem dependência condicional. Eventos marginalmente independentes exibem dependência quando consideramos um terceiro evento, no caso, uma causa comum. A diferença entre colisores e bifurcações interativas é que em um colisor esse terceiro evento é um efeito comum e não uma causa comum. Como vimos no capítulo anterior, quando  $A$  é estatisticamente dependente de  $B$ , dado  $C$  (formalmente:

$A \not\perp B | C$ ), então as seguintes relações se mantêm:

$$P(A, B | C) \neq P(A | C) \cdot P(B | C) \quad (\text{DC 1})$$

$$P(A | B, C) \neq P(A | C) \quad (\text{DC 2})$$

$$P(B | A, C) \neq P(B | C) \quad (\text{DC 3})$$

$$P(A | B, C) \neq P(A | C) \cdot P(B | C) \quad (\text{DC 4})$$

$$P(B | A, C) \neq P(B | C) \cdot P(A | C) \quad (\text{DC 5})$$

No caso de uma bifurcação interativa, a desigualdade que substituí a equação da bifurcação conjuntiva é, na maioria das vezes, apresentada como positiva, de forma que  $P(A, B | C) > P(A | C) \cdot P(B | C)$ . No entanto, uma desigualdade negativa também se aplica do

mesmo modo que uma correlação negativa pode indicar uma relação causal, como, por exemplo, na relação da prática de exercícios com o índice de doenças cardíacas. Existe alguns problemas conectados a isso, especialmente para defensores de teorias físicas não contrafactuais. No entanto, podemos apenas chamar a atenção aqui sobre a possibilidade de inclusão de correlações negativas.

Salmon formulou as bifurcações interativas como distintas das bifurcações conjuntivas em três aspectos. Em uma bifurcação interativa, a causa comum não compartimentaliza seus efeitos. Bifurcações interativas envolvem dois processos que interagem diretamente, enquanto em uma bifurcação conjuntiva, a causa comum não consiste em uma interação entre dois processos. Bifurcações conjuntivas são fundamentais no estabelecimento da direção do tempo, enquanto bifurcações interativas não fornecem assimetria temporal. Mantereí apenas a primeira distinção de Salmon em minha reformulação, mas não as duas últimas. A segunda distinção é restrita a casos em que dois processos interagem no domínio clássico e também exibem correlações de uma bifurcação conjuntiva, como, por exemplo, a colisão de duas bolas de bilhar, assim como em casos em que a causa comum não consiste em uma interação causal direta entre dois processos, como, por exemplo, quando duas pessoas passam mal depois de terem comido em um mesmo restaurante. O próprio Reichenbach ofereceu exemplos dos dois tipos em suas obras. Modelos causais clássicos, que utilizam apenas bifurcações conjuntivas, se aplicam nos dois casos. Voltarei nesse ponto quando da minha reformulação, mas, por hora, é interessante pontuarmos isso. Quanto à última distinção, mantereí ela parcialmente: em uma bifurcação interativa podemos falar em intervalos direcionalmente indefinidos, tanto causalmente quanto temporalmente. No entanto, ainda assim, a direção do tempo emergirá quando consideramos a bifurcação completa. Já uma bifurcação conjuntiva também será considerada como totalmente direcionada, de acordo com o que foi estabelecido por Salmon e Reichenbach.

### 3.5.2. *Processos causais e transmissão de marca*

Na teoria processual de Salmon, além da introdução das bifurcações interativas, podemos encontrar uma distinção proveitosa entre *eventos* e *processos* causais. Os dois conceitos centrais da sua teoria são o de *interação causal* e o de *processo causal*. A interação causal é um *evento* onde há produção de *marcas* em *processos* causais, sendo representada pontualmente em diagramas espaço-temporais. Os processos causais, por sua vez, são responsáveis pela transmissão desta marca num intervalo espaço-temporal, sendo representados

por linhas do universo em diagramas espaço-temporais. Pseudo-processos, chamados de sequências irreais por Reichenbach (1971 [1956]), não são capazes de transmitir uma marca.

A interação causal entre processos é, desse modo, responsável pela produção de marcas em cada um deles. Uma marca pode ser entendida aqui como sinônima de sinal, informação ou registro. Um processo causal é algo que exhibe consistência de estrutura sobre o tempo e transmite marcas num intervalo espaço-temporal sob o limite máximo da velocidade da luz. Uma marca é produzida instantaneamente no momento da interação e se mantém inalterada durante o intervalo de sua propagação na ausência de uma interação local adicional.

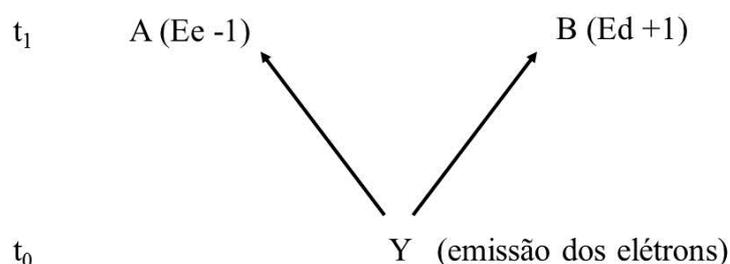
### 3.5.3. A violação do princípio de continuidade

Ainda que tenha considerado que as correlações probabilísticas se adequariam ao domínio quântico, através das bifurcações interativas, Salmon não vislumbrava que a causalidade poderia ser aplicável a tal domínio, reservando as *bifurcações causais interativas* apenas ao domínio clássico juntamente com as *bifurcações causais conjuntivas* de Reichenbach. Suas razões para sustentar isso, todavia, não estavam diretamente conectadas ao caráter indeterminístico da mecânica quântica, mas antes ao fenômeno da *não-localidade* que entra em conflito com a sua teoria processual de transmissão de marca. Sua teoria somente se adequaria a fenômenos quânticos, se interpretarmos tais casos sob a pressuposição da existência de variáveis ocultas locais que explicariam nossa incerteza, apenas epistemológica, sobre todas as variáveis envolvidas no sistema causal<sup>23</sup>. No entanto, desde a apresentação do teorema de Bell (1964, 1966) somada à demonstração empírica de que as previsões da mecânica quântica estão corretas – primeiramente através do experimento de Freedman e Clauser na década de setenta e do trabalho do grupo de Alain Aspect na década de oitenta - esse tipo de suposição se mostrou insustentável e em desacordo com os resultados experimentais.

Para compreendermos melhor esse ponto, voltemos à representação gráfica simplificada do arranjo experimental EPR-Bohm:

---

<sup>23</sup> Estou considerando aqui a versão mais simples e ingênua da suposição de variáveis ocultas e não interpretações mais elaboradas.



**Fig. 27:** Dois elétrons em estado de singleto sendo emitidos de uma fonte comum.

Salmon mantém o princípio de continuidade de Russell em sua definição de processo causal: *uma marca que tem sido introduzida em um processo por meios de uma intervenção em um ponto A é transmitida até o ponto B se, e somente se, ela ocorre em B e em todos os estágios entre A e B sem intervenções adicionais.* (Salmon, 1998, p. 197, tradução nossa). Segundo sua teoria, em uma bifurcação interativa os efeitos ocorrem simultaneamente à causa comum, pois uma alteração de uma característica, no caso A e B, ocorreria em uma única intersecção local Y em  $t_0$  e seria transmitida no intervalo  $t_1 - t_0$  ao longo de todo o intervalo. Isso poderia, em princípio, ser admissível no arranjo EPR-Bohm se interpretássemos o experimento sob a suposição de que as propriedades A e B já estariam definidas em  $t_0$  e não somente em um instante posterior. No entanto, neste arranjo experimental, A e B somente são determinadas num instante posterior  $t_1$ . A exibição da propriedade -1 em Ee (A) ou da propriedade +1 em Ed (B) só estaria definida no momento da medição de algum dos dois em  $t_1$ . Durante o intervalo  $t_1 - t_0$  os estados das entidades quânticas são indefinidos. Desse modo, Salmon não pode dizer que a interação Y em  $t_0$  produziu uma marca em cada um dos processos causais que se manteve inalterada até  $t_1$ .

O modelo causal de bifurcação interativa de Salmon não pode, portanto, ser usado na explicação do experimento EPR-Bohm. Apresentarei uma interpretação distinta das *bifurcações causais interativas* sob uma nova formulação do conceito de processo causal aplicável a esse tipo de fenômeno. Antes disso, buscarei explicar por que as correlações da *bifurcação causal interativa* não se adequam ao domínio clássico como pretendeu Salmon.

Considere que Zé Ninho é o campeão da barraca da quermesse de tiro ao alvo duplo com estilingue. Nesta barraca o desafio consiste em acertar dois alvos simultaneamente com a mesma goiaba. O jogo é arranjado de forma que os alvos estão posicionados no fundo da barraca, um do lado direito e um do lado esquerdo, e no centro mais à frente há um facão verticalmente colocado de modo que a intersecção da goiaba no ponto  $x$  com o facão (evento C) a corta ao meio e faz com que a metade da direita acerte o alvo da direita (evento A) e a metade da esquerda atinja o alvo da esquerda (evento B). Desse modo, a probabilidade de

acertar o alvo da direita, *A*, seria dependente da probabilidade de acertar o alvo da esquerda, *B*, e a causa comum *C* não os tornaria independentes, pois poderíamos estar certos de *A* dado *B* e *C*. Essa situação, no entanto, não é verificada na prática no domínio clássico, pelo contrário, o que verificamos corresponde às correlações de uma bifurcação causal conjuntiva de Reichenbach.

Em uma bifurcação conjuntiva, a causa comum torna os efeitos probabilisticamente independentes exatamente por que nada garante, após uma interação, que um dos efeitos seja predito com certeza, dado o resultado observado de outro. No nosso exemplo, isso significaria que alguém que tivesse informação do aparato do jogo e de que Zé acertou somente o alvo da direita, não poderia afirmar com certeza se a outra metade da goiaba atingiu o alvo da esquerda. Somente um exame da trajetória da metade da esquerda forneceria um resultado acurado. Não é difícil imaginarmos várias coisas que poderiam ter interferido no meio da trajetória, impedindo a goiaba de atingir o alvo da esquerda, por mais que tivéssemos a informação de que a outra metade atingiu o alvo da direita. Podemos, por caridade argumentativa, considerar o efeito como imediatamente posterior à interação, e, por isso, como consistindo na mudança de direção do movimento dos processos que se manteria até uma nova interação. Mas não observamos na prática qualquer processo causal transmitindo uma marca inalterada além do local de intersecção, já que interações adicionais entre os objetos ocorrem mesmo simultaneamente à intersecção. Observamos, por isso, as correlações da bifurcação causal conjuntiva de Reichenbach. Nada garante, após uma interação causal, que cada uma das marcas provocadas em cada um dos processos se mantenham correlacionadas e inalteradas ao longo de suas trajetórias. Somente para objetos clássicos idealmente isolados ou para fenômenos quânticos é que podemos atribuir as correlações das bifurcações causais interativas, de forma que só as verificamos no segundo caso.

De acordo com a formulação de transmissão de marca e processo causal de Salmon, uma marca seria definida por uma única interação e se manteria intacta no decorrer do tempo na ausência de qualquer intervenção. Isso pressupõe, ao menos em alguma medida, uma concepção substancialista do tempo. Em uma visão relacional do tempo, ao menos em uma acepção radical, não há qualquer fluxo do tempo, ou qualquer coisa correspondente a uma concepção de tempo que passe independentemente da ocorrência de mudança nas coisas, no caso, nos processos em análise. Para um absolutista ou substancialista clássico, por outro lado, há passagem do tempo ainda que nenhuma mudança ocorra nos objetos ou processos considerados. Por isso, podemos dizer que a posição de Salmon mantém algum resíduo substancialista, por mais que tenha sido proposta como um tipo de teoria relacional.

### 3.6. A teoria da causalidade de Dowe e a bidirecionalidade temporal quântica



*Exu*, por Gil Abelha.

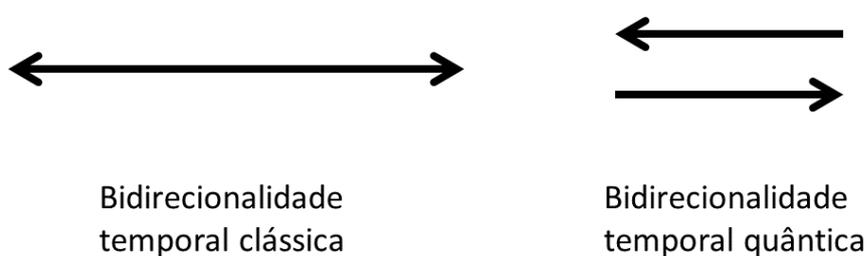
“Exu acertou um alvo hoje com uma pedra  
que jogou amanhã.”

Ditado Iorubá.

A teoria retrocausal de Dowe (1996, 2000) foi construída para também incluir fenômenos quânticos e pode ser caracterizada como um tipo de teoria *não local* da causalidade. Dowe apoia seu modelo causal na interpretação transacional da mecânica quântica de Cramer (1986, 1988), que explica o estado de superposição de processos quânticos através de funções de onda com contrapartes temporalmente retrocedentes. Essa posição é um tipo de interpretação realista da função de onda. O problema ontológico da função de onda consiste em saber o que é a função de onda, a que ela corresponde ou se corresponde a algo no mundo. A interpretação transacional não entra em conflito com os postulados da relatividade e é consistente com o formalismo da mecânica quântica padrão. Ela permite a construção de um modelo causal explanatório dos fenômenos quânticos e oferece uma explicação para o significado físico da função de onda complexa ou do *vetor de estado* do sistema quântico. Além disso ela traz uma resposta para diversos paradoxos.

No entanto, assim como o realismo modal lewisiano, a interpretação transacional carrega um peso metafísico considerável, de forma que uma teoria que resolvesse os mesmos problemas com um custo metafísico mais baixo, seria preferível. Além disso, embora tenha havido tentativas<sup>24</sup>, não verificamos experimentalmente onda avançadas retrocedentes. No entanto, creio que, assim como a semântica dos mundos possíveis de Lewis pôde ser usada como heurística e, desse modo, permitiu grandes avanços em diversas lógicas modais, o uso da teoria transacional como heurística pode ser bastante proveitosa em avanços em modelagem causal<sup>25</sup>, além de dar sentido à regra de Born e à reversibilidade temporal quântica como distinta da reversibilidade temporal clássica. Neste trabalho, não obstante, buscarei apenas mostrar como a interpretação de Dowe não é adequada, e que temos uma opção metafisicamente menos pesada se comparada a teoria transacional de Cramer, sem defender seu uso heurístico.

Uma diferença essencial entre a bidirecionalidade temporal clássica e a bidirecionalidade temporal quântica é que enquanto no domínio clássico podemos escolher uma direção temporal, de  $t_1$  na direção de  $t_2$  ou (exclusivamente) de  $t_2$  na direção de  $t_1$ , no domínio quântico consideramos as duas direções simultaneamente, de  $t_1$  na direção de  $t_2$  e de  $t_2$  na direção de  $t_1$ . Esta característica está conectada ao aspecto complexo da chamada *regra de Born*. A teoria transacional oferece uma interpretação realista desta simetria.



**Fig. 29:** Representação das bidirecionalidades temporais clássica e quântica.

<sup>24</sup> O próprio Cramer fez algumas tentativas independentes, mas fracassadas: “In the context of the standard quantum formalism, Nature appears to be well protected from the possibility of nonlocal signaling.” (Cramer & Herbert, 2015). Há afirmações recentes (Bajlo, 2017), mas ainda não confirmadas, de identificação de sinais retrocedentes com instrumentos apontados na direção de buracos negros, como o existente no centro da galáxia. Há, no entanto, muitos questionamentos na comunidade, tanto de físicos quanto de filósofos da física, quanto ao resultado do experimento realmente provar a existência de ondas avançadas.

<sup>25</sup> Um exemplo atual é o trabalho de Strömberg et al (2022). Eles mostram como o uso de uma interpretação que considere a seta inversa do tempo em união com a seta usual nos permite uma otimização preditiva de modelos causais quânticos que não é atingida pelos seus pares, dando sentido não só a indefinibilidade da direção causal como da direção temporal, o que faz pleno sentido se quisermos estar de acordo com a teoria da relatividade e não pressupor um tempo absoluto. Do meu ponto de vista, chega a ser surpreendente que modelos causais quânticos pressuponham um tempo definido com apenas a direção da causalidade indefinida no estado de superposição. Se adotarmos uma teoria causal do tempo, causalidade indefinida implica em direção do tempo indefinida e isso é plenamente compatível com os resultados obtidos pelo grupo de Strömberg e com um uso heurístico da interpretação transacional. Por esse motivo, também penso que o uso de um algoritmo de redução causal do tempo é mais do que uma melhoria no campo de modelagem causal, mas a correção de uma desatualização.

A derivação da regra de Born é ainda controversa e tentativas têm sido apresentadas há alguns anos, algumas delas já descartadas por se mostrarem circulares ou incorretas. Em todo o caso, creio que essas divergências se devem talvez ao fato dessas tentativas de derivação acabarem por envolver problemas filosóficos de interpretação, ainda que me pareça que possamos apresentar uma derivação que seja a menos comprometida possível com alguma interpretação. A derivação através da reversibilidade temporal das equações de Schrödinger parece-me a mais adequada, se a compreendermos sob uma interpretação probabilística. Isso não significaria impedir qualquer outra interpretação da mecânica quântica, mas antes defender uma derivação das regras de Born sem a necessidade de interpretações adicionais. Podemos defender, sob essa mesma derivação, uma interpretação causal retrocedente que atribui à função de onda correspondência com ondas reais retrocedentes do tempo, como faz a interpretação de Cramer. No entanto, não precisamos nos comprometer com essa interpretação, mas apenas com sua heurística.

### 3.6.1. A interpretação transacional da regra de Born

O vetor de estado descreve os possíveis estados de um sistema quântico e consiste em uma função usualmente complexa<sup>26</sup>. A lei da probabilidade de Born (1926) assevera que  $P = \Psi \Psi^*$ . De acordo com a derivação de reversibilidade temporal, o componente imaginário dessa função complexa é temporalmente reverso em relação ao componente real:

(...) a lei da probabilidade de Born nos diz implicitamente que a probabilidade de uma observação particular é obtida tomando o produto de um componente do vetor de estado com seu tempo reverso. (CRAMER, 1986, p. 653, tradução nossa).

A interpretação transacional de Cramer consiste em considerar o componente real do vetor de estado, que é complexo, como correspondente a uma onda real retardada enviando um sinal no sentido usual do tempo e o componente imaginário como correspondente a uma onda real avançada enviando um sinal no sentido reverso do tempo. Segundo ele:

A interpretação fornece uma descrição do vetor de estado como uma onda atual fisicamente presente no espaço real e fornece um mecanismo para a

---

<sup>26</sup> Ver o tópico *Conjunto numéricos* da subseção 2.2.1. *Conceitos básicos de estatística clássica*, capítulo 2.

ocorrência de correlações não-locais entre efeitos através do uso de ondas avançadas. (CRAMER, 1986, p. 659, tradução nossa).

A interpretação transacional da mecânica quântica é não-local, mas ainda assim compatível com a relatividade especial e com uma explicação causal que, diferentemente da explicação pressuposta pela interpretação das variáveis ocultas locais, não entra em desacordo com os resultados experimentais. No esquema EPR representado na figura 27, a medição de  $E_e$  em  $t_1$  não enviaria um sinal “fantasmagórico” numa velocidade arbitrária diretamente na direção de  $E_d$ . Uma medição em  $t_1$  enviaria uma onda avançada no intervalo  $t_0 - t_1$  em direção a fonte de emissão dos elétrons, enquanto uma onda retardada teria sido enviada no momento de emissão no intervalo  $t_1 - t_0$ . Durante este intervalo de tempo, a transação causal não é completa, mas sim parcial, uma mudança causal só é completa quando consideramos o sistema todo normalizado em  $t_0$  ou  $t_1$ . Isso explicaria por que durante o estado de superposição a propriedade dos *quanta* é indefinida e por que fenômenos quânticos violam o princípio probabilístico de compartimentalização e exibem no lugar a dependência probabilística de uma bifurcação interativa, que nada mais seria do que uma expressão da lei da probabilidade de Born.

### 3.6.2. A bifurcação retrocedente de Dowe

De modo diferente, mas sob a mesma interpretação, Dowe defendeu que a causalidade retroativa transacional envolveria bifurcações conjuntivas abertas em direção ao passado. Deste modo, no contexto do arranjo experimental EPR-Bohm, o processo causal retrocedente na direção do intervalo  $t_0 - t_1$  seria acompanhado de outro processo retrocedente, de forma que um fator desconhecido  $X$  (um coefeito) estaria correlacionado à propriedade dos elétrons  $Y$  (outro coefeito) no momento de sua emissão em  $t_0$ , formando com a medição de  $E_e$  em  $t_1$  (a causa comum), uma bifurcação causal conjuntiva aberta para o passado.

Um problema com essa formulação é que esse fator  $X$  é de fato um fator misterioso. Se houvesse tal fator, poderíamos comprová-lo empiricamente. O caso é que não verificamos qualquer evento  $X$  que obedeça tais exigências nos arranjos experimentais do tipo EPR. Além disso, as correlações probabilísticas exibidas por tais fenômenos figuram uma bifurcação interativa e não conjuntiva. Na verdade, como vimos, uma crítica que podemos fazer ao modelo causal de Salmon é que fenômenos clássicos não exibem bifurcações interativas, pois não são sistemas isolados. A partir do momento que há uma interação causal entre dois objetos, a probabilidade entre eles é compartimentalizada, de forma que eles não mantêm uma

dependência probabilística como no caso da anticorrelação perfeita. Assim que ocorre uma interação, os objetos estão sujeitos a mudanças que não afetam o resultado das propriedades do outro objeto. Por isso, exibem as correlações probabilísticas da bifurcação causal conjuntiva. Não podemos observar uma propriedade se mantendo inalterada num intervalo de tempo. O único estado que chegaria perto do isolamento idealizado por Salmon é o estado de superposição, no entanto, os objetos não estariam mantendo uma propriedade inalterada, mas sim estados parciais viajando em direções temporalmente opostas e, por isso, indefinidos. Podemos, portanto, manter como Dowe a fundamentação de um modelo causal na interpretação transacional de Cramer, mas com a suposição de que ele exhibe as correlações probabilísticas de uma bifurcação interativa.

Outra vantagem desse modelo interativo em relação ao modelo conjuntivo de Dowe é que podemos ainda sustentar uma teoria causal do tempo nos moldes de Reichenbach e determinar a direção temporal através das assimetrias das bifurcações causais, mantendo a suposição de que as bifurcações causais são sempre abertas na direção futura do tempo. Ainda que a causalidade transacional opere parcialmente em direções opostas durante o estado de superposição, quando consideramos o sistema normalizado, encontramos uma bifurcação interativa aberta no mesmo sentido temporal que uma bifurcação conjuntiva. Portanto, assim como as bifurcações conjuntivas, as bifurcações interativas são assimétricas numa determinada direção e essa direção, dada pelo critério de transmissão de marca, pode ser usada para definirmos a direção do tempo.

### *3.6.3. Retrocausalidade, superdeterminismo e realidade do tempo*

No caso do realismo retrocedente estar correto, é ainda controversa a questão de saber se realmente seria possível isolar uma onda avançada. Porém, como já comentei em nota, há tentativas e talvez a possibilidade de elaboração de experiências que corroborariam o realismo transacional e permitiriam o isolamento e identificação de ondas avançadas. Uma consequência dessa possibilidade, em comparação com a minha interpretação de impossibilidade de identificação devido à interferência destrutiva entre as ondas, é que sinais poderiam ser enviados em direção ao passado. Uma consequência disso seria o *superdeterminismo* e, desse modo, uma prova de que não teríamos livre arbítrio nessas circunstâncias. Para explicar esse ponto, recorrerei a uma obra contemporânea de ficção científica, também caracterizada como terror filosófico.

No conto de *Ted Chiang* (2005), “What's expected of us”, encontramos um *insight* muito frutífero sobre o tempo, determinismo e livre arbítrio: a direção da causalidade revela ter importância crucial no estabelecimento de escolhas livres. Em um mundo distópico, onde a retrocausalidade é permitida, o resultado seria o superdeterminismo, e, conseqüentemente, a crença de que nossas escolhas são livres seria um mito. Isso nos diz muito sobre esses conceitos filosóficos no mundo atual. Chiang representa esse resultado filosófico através de um cenário ficcional em que pequenos aparelhos superdeterminísticos, os *Predictors*, são amplamente distribuídos entre a população. Através de um mecanismo de envio retrocedente de sinal, uma luz verde do aparelho pisca um segundo antes que a pessoa clique no botão que o ativa. Desse modo, uma vez que você tenha visto a luz verde piscando, você não terá escolha a não ser apertar o botão, já que essa é a causa do efeito da luz verde piscar, algo que já ocorreu e mostra que você necessariamente apertará o botão no futuro.

O aparelho de Chiang nos ajuda a explicar o porquê e quais as conseqüências da unidirecionalidade causal no nosso mundo. Outra vantagem do conto de Chiang é que ele fornece uma clara distinção entre envio retrocausal direto de sinal e sinal cíclico cosmológico, como acontece, por exemplo, em um universo de Gödel. Este, muitas vezes, é confundido com um universo que permite o envio de sinais do primeiro tipo por falta de exemplos de envio retrocausal direto. Porém, em um universo de Gödel, alguns tipos de sinais são enviados de um momento a um outro momento que, por sua vez, é anterior ao primeiro (se considerarmos objetos de Gödel, estrelas massivas e galáxias, como sinais eles mesmos). Todavia, esse envio de sinal deve ser distinguido do envio de sinal em curtas distâncias sob processos retrocausais. Enviar um sinal de agora para um segundo atrás na direção inversa do tempo é diferente de um processo cíclico envolvendo uma galáxia, que após atravessar um raio crítico, volta a um estágio temporal anterior. Em uma série temporal que permitisse retrocausalidade direta, a direção do tempo colapsaria. Nossa concepção usual de tempo também seria posta em cheque em um universo de Gödel, já que um evento que é considerado como ocorrendo anteriormente a outro evento também é considerado com um evento posterior a esse mesmo evento. Ainda assim, podemos imaginar uma completa e sólida estrutura temporal para esse tipo de universo, mesmo considerando aquele resultado, com o envio de sinal sendo ainda unidirecional. Não podemos fazer o mesmo no caso de envio retrocausal de sinais. Desse modo, uma teoria retrocausal nos exige também uma explicação para o desafio ontológico da realidade do tempo: como fazer sentido de uma série temporal direcionada e do tempo ele mesmo em um cenário retrocausal?

Não somente pelo problema do superdeterminismo, que implica a perda do livre arbítrio (no caso de uma interpretação que considere a possibilidade de identificação de ondas

retrocedentes), mas também pelo desafio de uma resposta para o problema ontológico da realidade do tempo quando não dispomos da direção da causalidade para isso, creio que um dos principais pontos contra uma interpretação transacional radical da mecânica quântica é o grande peso metafísico que ela carrega. No entanto, caso realmente sejam identificadas ondas avançadas, isso seria uma corroboração da interpretação transacional. Mas até então, ao contrário, detectamos sinais sendo enviados somente em uma direção do tempo. Por isso, creio que uma interpretação não local do critério de transmissão de marca seja a melhor saída, mantendo tanto a indefinição causal e temporal durante o estado de superposição, quanto a unidirecionalidade observada do envio de sinal. É interessante notarmos que nessa disputa entre interpretações filosóficas, resultados experimentais contam para ambas. A identificação de ondas avançadas, por exemplo, corroboraria a interpretação transacional e refutaria a minha proposta unidirecional. Penso, não obstante que uma interpretação heurística da teoria transacional, que mantenha a direcionalidade normalizada de envio de sinal, pode ser interessante e até mesmo útil. Este é um ponto que pretendo desenvolver melhor em estudos posteriores.

### **3.7. Causalidade indeterminística**



Iroko, por Gil Abelha.

“O tempo dá, o tempo tira, o tempo passa, a  
folha vira.”

Ditado Iorubá.

Nesta seção apresentarei, além do equívoco da contiguidade espaçotemporal conectado à noção clássica de causalidade, também apontado por Russell, uma sugestão de teoria causal do tempo, a partir de reformulações de ideias de Salmon e Reichenbach. Meu propósito com essa sugestão é de que ela abranja também o tipo de fenômeno quântico correspondente às correlações probabilísticas das *Bifurcações Causais Interativas (BCI)*. Essa reformulação repousará, sobretudo, numa concepção distinta da concepção salmoniana de processo causal e em generalizações do *Princípio de Causa Comum (PCC)* e do *Critério de Transmissão de Marca (CTM)* de Reichenbach. A alternativa que apresento aqui é um esboço que pretendo desenvolver e complementar em estudos posteriores.

### 3.7.1. Generalizando o princípio de causa comum

A minha estratégia visa a elaboração de um modelo causal em que figure as correlações das *BCIs* para sua aplicação a fenômenos quânticos e as correlações das *Bifurcações Causais Conjuntivas (BCCs)* para fenômenos clássicos. Podemos sugerir uma generalização disjuntiva do *PCC* de Reichenbach do seguinte modo:

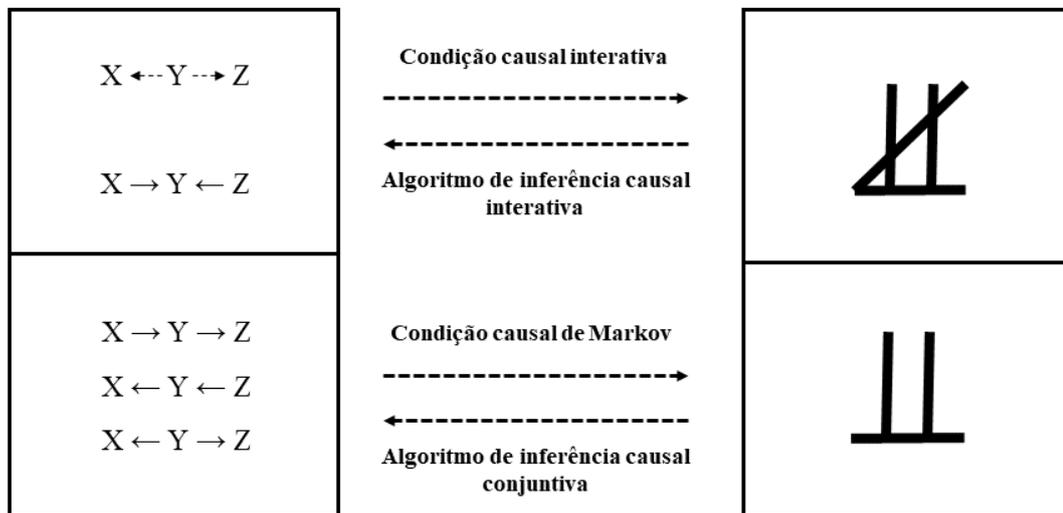
PCC\*: Se há uma correlação positiva entre dois eventos  $A$  e  $B$ , de modo que  $P(A \wedge B) > P(A) \cdot P(B)$  e um não é causa do outro ou causas comuns de um terceiro evento  $Y$ , então deve haver uma causa comum, um evento  $C$ , sendo que ou  $C$  compartimentaliza a relação estatística entre eles, de modo que  $P(A \& B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$ , constituindo uma *BCC* ou  $C$  não compartimentaliza a relação estatística entre eles, de modo que  $P(A \& B|C) > P(A|C) \cdot P(B|C)$ , constituindo uma *BCI*.

Uma forma mais interessante de formulação do ponto de vista da modelagem causal, não tão centralizada no princípio de causa comum, mas nas relações de dependências e independências condicionais e diferentes estruturas causais, seria a seguinte: se  $A$  e  $B$  são causalmente separados, mas há uma dependência probabilística entre eles, então ou essa dependência é condicionada a uma causa comum (bifurcação interativa), ou essa dependência é condicionada por um efeito comum (colisor causal) ou essa dependência é compartimentalizada por uma causa comum (bifurcação conjuntiva).

Da mesma forma que em uma bifurcação conjuntiva a causa comum explica a dependência improvável através da independência condicional, a causa comum em uma bifurcação interativa também explica a dependência improvável entre os efeitos, mas através da dependência condicional. Com isso, perdemos a direção, ou simetria do princípio de causa comum de Reichenbach no que diz respeito a base probabilística, já que em colisores causais, o efeito torna suas causas dependentes da mesma forma que ocorrerá em uma bifurcação interativa. No entanto, a assimetria da explicação não precisa corresponder exatamente à assimetria probabilística entre colisores e bifurcações causais conjuntivas. Mesmo na teoria Reichenbachiana, essa coincidência não é suficiente para determinar a direção do tempo por si só, como vimos no capítulo anterior no tópico sobre o *algoritmo de inferência causal*, sendo antes considerada mais como um indício ou vantagem. Em última instância precisamos do critério de transmissão de marca para determinar a direção da causalidade e distinguirmos diferentes tipos de arranjos causais (como representado na figura 25 do segundo capítulo).

Considerando a questão de geração de algoritmos que incluam bifurcações interativas na modelagem causal, sugiro o acréscimo de um *algoritmo de inferência causal interativa*, no qual *GADs* (colisores e bifurcações interativas) são gerados a partir de dependências condicionais em oposição, em complemento ao algoritmo clássico de inferência causal, que podemos chamar de *algoritmo de inferência causal conjuntiva*, que gera seus correspondentes *GADs* a partir de independências condicionais. O equivalente à condição causal de Markov para dependências condicionais chamarei de condição causal interativa. A partir dessa condição chegamos às dependências estatísticas condicionais dadas por colisores e bifurcações interativas. Do mesmo modo que os *GADs* gerados através do *algoritmo de inferência causal*

*conjuntiva* podem ser somente plenamente distinguidos por meio do critério de transmissão de marca, o mesmo valerá para a distinção entre arranjos gerados a partir do *algoritmo de inferência causal interativa*.



**Fig. 30:** Representação dos algoritmos interativos e conjuntivos em uma modelagem causal indeterminística.

Além desses algoritmos podemos acrescentar um *princípio de limite de domínio* para bifurcações causais interativas. Bifurcações interativas são restritas ao domínio quântico.

### 3.7.2. Uma interpretação relativística discreta do critério de transmissão de marca

A exigência prévia condicional de que *um evento não seja causa do outro* será dada pelo Critério de Transmissão de Marca (CTM). Como já vimos, considerando  $E_1$  e  $E_2$  como dois eventos distintos, de acordo com o CTM:

*Se  $E_1$  é causa de  $E_2$ , então uma pequena variação (uma marca) em  $E_1$  é associada a uma pequena variação em  $E_2$ , ao passo que pequenas variações em  $E_2$  não são associadas a variações em  $E_1$  (REICHENBACH, 1958 [1927], p. 136, tradução nossa, grifo do autor).*

O termo “ser associado” tem o problema de deixar muito vago qual tipo de associação unidirecionada entre eventos seria essa a qual recorre Reichenbach. Um indício de resposta advém do fato do envio de sinal ser na experiência temporalmente direcionado, no sentido em que sinais não podem ser enviados na direção de eventos posteriores para anteriores. É fácil perceber uma consequência disso no fato de não podemos manipular o passado. Somado a isso, devemos considerar também os postulados da relatividade e, devido ao segundo, que sinais são

enviados sob o limite de velocidade da luz. Podemos, assim, reformular o *CTM* do seguinte modo:

*CTM\**: Se  $E_1$  é causa de  $E_2$ , então um sinal de  $E_1$  pode ser transmitido sob o limite da velocidade da luz para  $E_2$ , ao passo que sinais de  $E_2$  não podem ser transmitidos para  $E_1$ .

Com essa formulação do *CTM*, podemos voltar ao problema da interpretação causal das *bifurcações causais interativas* para o domínio quântico e explicitar qual a diferença na concepção de processo causal entre o modelo sugerido e a teoria salmoniana.

Como vimos, os mecanismos causais da teoria de Salmon estão centrados, sobretudo, no *CTM* introduzido por Reichenbach, mas sob uma interpretação essencialmente processualista:

*Uma marca, que foi introduzida em um processo por meio de uma única intervenção no ponto A, é transmitida para o ponto B se, e somente se, ela ocorre no ponto B e em todos os estágios do processo entre A e B na ausência de intervenções adicionais* (SALMON, 1998, p. 197, tradução nossa).

Se não há a exigência de que os processos causais sejam responsáveis pela transmissão de uma marca que se mantém inalterada durante um intervalo espaçotemporal, como é o caso do *CTM\**, então podemos aplicar tal critério tanto aos fenômenos do tipo EPR-Bohm quanto aos clássicos. A exigência de Salmon de que uma marca se mantenha inalterada após uma interação sequer pode ser verificada no domínio clássico, já que, no mundo real, objetos clássicos não são isolados a esse ponto. Semelhante ao que ocorre com interpretação transacional de interferência destrutiva, que implica na impossibilidade de identificação de ondas avançadas, mesmo se Salmon estivesse correto, é impossível detectar na prática esses intervalos espaçotemporais de marca inalterada. Isso emerge estatisticamente com as distintas correlações probabilísticas de bifurcações interativas quânticas e bifurcação conjuntivas clássicas.

Voltando ao nosso exemplo simplificado do arranjo experimental EPR-Bohm, aplicando o *CTM\**, podemos concluir que o evento  $Y$  é causa comum de  $A$  e  $B$ . Isso porque nenhum sinal pode ser enviado na direção dos eventos de medição para o evento de interação em  $Y$ , nem qualquer sinal pode ser enviado simultaneamente na direção do evento de medição de  $E_e$  (evento  $A$ ) para o evento de medição em  $E_d$  (evento  $B$ ) ou vice-versa. A direção da

causalidade só é definida no instante de medição, pois um processo causal só é completo quando há transmissão de marca entre dois eventos.

### 3.7.3. *Uma nova concepção de processo causal*

Uma concepção de processo causal menos comprometida e mais generalizada da transmissão de marca acarreta também, por isso, uma concepção distinta de *processo causal*. Salmon (1984, p. 144) define um processo como qualquer coisa que exiba consistência de estrutura sobre o tempo. Em sua versão mais recente envolvendo quantidades conservadas, Salmon (1997, p. 462 e 468) define um processo causal como uma linha do universo de um objeto que transmite uma quantidade conservada em cada ponto espaçotemporal de sua trajetória. Se não vincularmos os processos causais a tal condição salmoniana de transmissão localizada, então um processo causal poderá ser definido como *uma linha do universo de um objeto que transmite sinais (marcas) sob o limite da velocidade da luz entre eventos, conectando-os causalmente*. Podemos ainda definir *pseudoprocessos* como processos que não transmitem marcas entre eventos no limite da velocidade da luz, assim como as *sequências irreais* de Reichenbach.

A noção de evento e o *CTM\** serão mais fundamentais nessa reformulação do que o conceito de processo causal, que é estabelecido a partir deles. Temos, por isso, de definir um evento sem pressupor previamente uma direção temporal, já que isso deve ser dado de forma independente pelo *CTM\**. Podemos recorrer aqui à definição de mudança de Russell (1903, p. 469), que nos servirá como guia para estabelecer a ocorrência de um evento. Segundo ela, um evento ocorre quando há diferença entre os valores de verdade de proposições referentes a uma propriedade  $y$  de uma entidade  $x$ , sendo que a única diferença entre as proposições se refere ao instante no tempo. Por exemplo, se a proposição expressa pela frase “A goiaba caiu da árvore” é falsa em um momento  $t$ , mas é verdadeira em um outro momento  $t'$ , então podemos concluir que uma mudança ocorreu com a goiaba e, portanto, um evento.

Definir um evento como a ocorrência de uma mudança de uma propriedade de uma entidade (que pode ser entendida como um objeto ou, mais rigorosamente, como um processo) que, por sua vez, é definida pela diferença de valores de verdade entre proposições referentes a diferentes instantes do tempo, pode levar alguém a objetar que o *CTM\** fundamentado em tal definição é circular por recorrer ao conceito de instantes do tempo com o objetivo de fornecer sua direção. No entanto, a definição de mudança de Russell não pressupõe nenhuma direção temporal, afinal, ela não define  $t$  como anterior a  $t'$ , nem vice-versa. Ela apenas afirma que

houve uma mudança com uma entidade, mas sem qualquer direcionamento. Somente ao aplicarmos o *CTM\** é que podemos definir eventos como anteriores ou posteriores entre si, dada a direção do envio de sinal (marca).

Além disso, como já comentei anteriormente neste mesmo capítulo, temos uma motivação adicional para desconsiderar a formulação salmoniana de transmissão de marca por pressupor o absolutismo temporal, ainda que ela fosse intencionada a alicerçar de forma relacional a natureza do tempo. De acordo com a posição relacional sobre a natureza do tempo, não há fluxo do tempo, ou qualquer coisa correspondente a uma forma substancial do tempo, que transcorra independente da ocorrência de mudanças nos objetos ou de mudanças nos processos. Para um absolutista do tipo substancialista, ao contrário, há passagem do tempo ainda que nenhuma mudança ocorra com objetos. Isso significa que se o universo todo parasse de mudar a partir de agora, o relacional, por exemplo, interpretaria esse fato como se o tempo de todo o universo tivesse parado. Porém, para o absolutista, somente as coisas parariam de mudar, mas o tempo continuaria passando. De acordo com a formulação de Salmon, haveria passagem de tempo na ausência de qualquer intervenção, pois sendo a marca definida por uma interação, ela se manteria intacta, desde que não sofresse outra interação que provocasse alguma alteração adicional no processo. Como já argumentei, isso significa afirmar que o tempo passaria ainda que o processo não sofra qualquer mudança, o que pressupõe uma concepção substancialista do tempo.

Se aplicarmos a visão relacional do tempo aos resultados da teoria da relatividade, relacional para cada sistema de referência, teremos de concluir, após a ocorrência de uma mudança (uma marca) em um determinado objeto, que não há passagem de tempo até que ocorra um novo evento de mudança. Desse modo, até a ocorrência de outro evento com uma partícula quântica em um contexto EPR-Bohm, por exemplo, não há um intervalo espaçotemporal definido até então. Isso é totalmente compatível com a formulação *CTM\**, já que para determinarmos a direção da causalidade e, portanto, a direção do tempo, é necessário que pelo menos dois eventos de mudança estejam conectados por um sinal. Um processo causal só é completo quando um sinal é completamente enviado entre um evento e outro. Não há processos causais definidos na ausência de interação adicional.

Outro ponto relacionado ao resquício substancialista das teorias processuais clássicas é que, além de expandir o escopo da causalidade ao domínio quântico, uma teoria radicalmente relacional oferece uma solução para os conhecidos paradoxos de Zenão. Os paradoxos de Zenão serão implicados por algumas noções absolutas do tempo, de acordo com as quais as séries temporais seriam divisíveis como séries de números reais, contínuas e infinitamente divisíveis.

Nós evitamos esses paradoxos se entendermos os processos temporais como discretos, isto é, como totalmente dependentes da ocorrência de ao menos dois eventos conectados. Embora Salmon (1984, p. 151–153) tenha alegado que sua teoria fornece uma solução apropriada para os paradoxos de Zenão, o absolutismo residual da sua teoria traz dificuldades a uma tal solução. Somente uma teoria radicalmente relacional e discreta pode oferecer uma solução adequada. Adicionalmente, uma teoria relacional discreta oferece uma solução para o equívoco da contiguidade, também apontado por Russell em 1913.

#### 3.7.4. *O equívoco da contiguidade espaçotemporal*

Entre os equívocos atados à noção clássica de causalidade apontados por Russell está o *equívoco da contiguidade espaçotemporal*. Este equívoco ainda que bastante conhecido, por ter sido tratado no seu famoso discurso de 1913, tem passado desde então um tanto despercebido pela comunidade filosófica em geral, sendo em grande medida negligenciado, se compararmos ao impacto gerado pelos outros equívocos nas discussões filosóficas atuais. Para entendê-lo, vejamos, primeiramente, qual a noção que Russell tinha em mente ao falar sobre contiguidade espaço-temporal entre causa e efeito:

Causa e efeito (...) são termos correlativos denotando quaisquer duas distinguíveis coisas, fases, ou aspectos da realidade, que são de tal modo relacionados a cada outra, que sempre que a primeira deixa de existir, a segunda vem à existência imediatamente depois, e sempre que a segunda vem à existência, a primeira cessou de existir imediatamente antes. (RUSSELL, 2003 [1913], p. 165, tradução nossa).

Russell também retirou essa definição do dicionário de Baldwin. A noção de contiguidade espaçotemporal é um equívoco para Russell por nos levar a um dilema entre duas conclusões absurdas, dependendo da premissa que supomos conjuntamente com a premissa da contiguidade espaçotemporal. De acordo com a definição acima, a causa e o seu efeito duram um tempo finito. O tempo de existência da causa termina assim que o tempo de existência do efeito se inicia. Podemos sustentar, a partir daí, ou que a causa é um processo sujeito ele mesmo a mudanças ou que é um processo estático.

Russell argumenta que se a causa fosse um processo mutável, então este envolveria relações causais entre suas partes anteriores e posteriores. No entanto, somente as partes posteriores seriam relevantes para o efeito. Como as partes anteriores não são contíguas aos efeitos, elas não poderiam, por definição, influenciar causalmente o efeito. Por mais que

reduzíssemos a duração da causa, sempre restaria ao menos uma parte anterior dela que poderia ser alterada sem alterar o efeito (RUSSELL, 2003 [1913], p. 167).

Em contrapartida, se a causa fosse um processo estático, então, estaríamos diante de duas possibilidades. Em primeiro lugar, não encontramos processos desse tipo na natureza. Em segundo lugar, é muito estranho supormos que a causa, existindo por um tempo, “exploda” em seu efeito, já que o efeito poderia ter ocorrido em qualquer tempo anterior da existência da causa, ou a causa poderia ter permanecido imutável e existente por um tempo indeterminado sem produzir seu efeito (RUSSELL, 2003 [1913], p. 167-168).

Desse modo, Russell conclui que se há causas e efeitos, eles devem ser separados por um intervalo finito de tempo:

O dilema, portanto, é fatal à visão de que causa e efeito podem ser contíguos no tempo: se há causas e efeitos, eles devem ser separados por um intervalo finito de tempo  $\tau$ . (RUSSELL, 2003 [1913], p. 168, tradução nossa).

Poderíamos, então, sugerir aqui uma noção de causalidade em que há um intervalo espaçotemporal entre a causa e seu efeito. No entanto, essa simples sugestão não resolveria ainda o desafio colocado por Russell, pois traz consigo outra dificuldade: “não importa o quão curto nós considerarmos o intervalo  $\tau$ , algo que previne o resultado esperado pode ocorrer durante esse intervalo” (RUSSELL, 2003 [1913], p. 169, tradução nossa). Não é difícil pensarmos em exemplos de diversos casos cotidianos, como já argumentamos na seção anterior sobre o domínio clássico ser composto por bifurcações causais conjuntivas. Em um jogo de sinuca, por exemplo, uma tacada que encaçaparia a bola oito poderia ter esse efeito evitado se ocorresse repentinamente um terremoto, por exemplo, ou mesmo qualquer outra interferência menos extraordinária, como um bêbado esbarrando na mesa, etc. Assim, para defendermos uma noção de causalidade que não pressuponha a contiguidade espaçotemporal entre a causa e o seu efeito, fica o desafio de responder a essa dificuldade apontada por Russell, além de oferecer uma explicação de como limitar e definir a duração desse intervalo entre a causa e seu efeito, isto é, precisamos oferecer uma forma de especificar quanto tempo depois da causa que ocorre o efeito. Bifurcações interativas quânticas resolvem ambos os problemas.

Assim, este desafio de Russell à noção de causa, mostra-nos que se assumirmos a contiguidade espaçotemporal entre causa e efeito, então somos levados a um dilema entre duas consequências metafisicamente absurdas, ou, ao menos, contra intuitivas: ou um evento se transforma em outro arbitrariamente ou a determinação do limite entre um evento e outro seria regressivamente infinito. Uma solução parcial, dada pelo próprio Russell, seria a postulação da

existência de um intervalo espaçotemporal entre causa e efeito. A parte do problema que permaneceria não resolvida seria a de especificar esse intervalo quantitativamente. Isso pode ser resolvido estabelecendo o limite à escala de Planck através de bifurcações interativas quânticas. Bifurcações interativas quânticas são não Markovianas discretas e definem um intervalo espaçotemporal mínimo entre eventos causalmente relacionados. Isso dá sentido à dependência estatística entre coefeitos que não é anulada por uma causa comum. Essa solução também explica por que podemos usar o formalismo contínuo no domínio clássico, enquanto que no domínio quântico usamos um formalismo discreto corroborado por experimentos.

### 3.8. Considerações finais

*Eu não amava que botassem data na minha existência. A gente usava mais era encher o tempo. Nossa data maior era o quando. O quando mandava em nós. A gente era o que quisesse ser só usando esse advérbio. Assim, por exemplo, tem hora que eu sou quando uma árvore e podia apreciar melhor os passarinhos.*

Manoel de Barros

O objetivo central deste capítulo foi a apresentação do problema da aplicação da causalidade no domínio quântico e o oferecimento de um esboço de um modelo causal aplicável a tal domínio. Além da análise de modelos causais de grande relevância para a discussão, ofereci uma breve introdução ao problema da aplicação da causalidade no domínio quântico, relacionando-o a importantes teorias contemporâneas da causalidade. Tal alternativa busca fornecer também uma explicação para a distinção entre os mecanismos causais e as correlações probabilísticas inerentes aos domínios quântico e clássico. Minha intenção foi a de oferecer uma resposta relacional radical para o problema da aplicação de modelos causais a fenômenos quânticos, demonstrando a plena compatibilidade entre mecânica quântica e teoria da relatividade. Este trabalho oferece também uma reforma na noção clássica de processo causal e soluções para paradoxos e problemas clássicos do tempo, como os paradoxos de Zenão, além do desafio colocado pelo equívoco da contiguidade espaçotemporal apontado por Russell.

Vimos, neste capítulo, que Reichenbach parte da nossa incerteza epistemológica para uma conclusão metafísica: não há causalidade, ou algo que o valha, no domínio quântico. Aqui, fizemos o caminho inverso. Explicamos o caráter indeterminístico epistemológico da mecânica

quântica a partir de uma base ontológica robusta. O indeterminismo não somente é consistente com essa base, como também é esperado.

## Conclusões

*O tempo anda só de ida.*

Manoel de Barros

No primeiro capítulo desta tese, explorei o desafio de Russel (2003 [1913]) à noção de causalidade, focando nos equívocos da assimetria do determinismo e no equívoco modal da causalidade, especialmente neste último. Busquei mostrar que ainda que os desafios de Russell sejam de extrema relevância para o problema da definição do que é causalidade, evidenciando equívocos da noção clássica, podemos defender uma noção que não incorra nos mesmos erros da noção clássica. Através da defesa de Cartwright (1979) da relevância do uso da noção de causalidade nas ciências, procurei mostrar como teorias de predições meramente estatísticas nos levam ao paradoxo de Simpson, que, por sua vez, é solucionado adicionando a noção de causalidade a essas predições

No segundo capítulo, apresento conceitos básicos de estatística clássica e inferência causal estatística. Meus objetivos foram tanto a redação de uma introdução que preencha parte da lacuna no ensino de estatística e métodos formais de inferência causal para filósofos e leigos, quanto uma introdução ao formalismo básico para compreensão do problema da aplicação da causalidade no domínio quântico, tal como explicado nesta tese.

No terceiro capítulo, apresentei elementos centrais da teoria da causalidade de Reichenbach (1944, 1971 [1956]), buscando explicar por que razão não podemos aplicar modelos causais reichenbachianos a fenômenos quânticos. Depois disso, apresentei os principais elementos da teoria processual da causalidade de Salmon (1984, 1997, 1998), considerando a possibilidade de suas bifurcações interativas serem aplicáveis ao domínio indeterminístico, e concluindo que somente seriam aplicáveis sob uma interpretação distinta. Em seguida, apresentei o modelo causal de Dowe (1996, 2000), baseado na interpretação transacional de Cramer (1986, 1988), e as razões pelas quais acredito que devemos abandoná-lo, mantendo a formulação original de Cramer como possível heurística, mas não como teoria ontológica da realidade. Finalmente, proponho um esboço de uma modelagem causal através de uma generalização do princípio de causa comum - incluindo bifurcações causais interativas quânticas, além das bifurcações conjuntivas clássicas - em conjunção com uma reformulação do modelo de bifurcação causal interativa de Salmon.

Sobretudo no que diz respeito ao último capítulo desta tese, há muitos desenvolvimentos necessários e desafios que não pude ainda enfrentar aqui. A única forma que consegui para finalizar esta escrita, foi a aceitação de que não se trata de um trabalho completo, perfeito e acabado, mas antes o início de uma proposta modesta a ser melhor elaborada futuramente.

Embora ainda em desenvolvimento, esta pesquisa tem relevância em diversas áreas, especialmente filosofia da física, estatística, metafísica do tempo e da causalidade, lógica temporal, computação quântica, filosofia da gravidade quântica e representações tempo-causais para inteligências artificiais.

Este projeto teve como objetivo desenvolver uma nova proposta para entender a natureza da causalidade, espaço, tempo, emergência e persistência dentro do contexto da mecânica quântica e da teoria da relatividade. Tal proposta, pode trazer luz sobre problemas centrais relacionados à unificação da teoria da relatividade geral e física quântica, particularmente sobre o chamado problema difícil (*hard problem*) da gravitação quântica (Le Bihan (2018a,b), Le Bihan (2021), and Le Bihan and Linnemann (2019)), como também sobre o problema ontológico, já que nossa formulação explica a direcionalidade do tempo e da causalidade em um mundo fundamentalmente não-espaço-temporal.

Além de oferecer uma resposta relacional ao problema de aplicar modelos causais a fenômenos quânticos e demonstrar a total compatibilidade entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade, este trabalho também fornece uma reformulação do conceito clássico de processo causal e uma explicação para a distinção entre probabilidade e causalidade em domínios quânticos e clássicos. Isso permite o desenvolvimento de uma nova abordagem da modelagem causal com conteúdo científico e tecnológico inovador tanto no que diz respeito à modelagem clássica quanto à quântica.

Existe um novo interesse na ontologia de eventos e processos nos fundamentos da mecânica quântica, e o projeto apresentado aqui tem um impacto no problema da natureza da persistência quântica, relacionado a questões sobre mereologia e localização de sistemas quânticos, algo que pretendo me aprofundar melhor em estudos futuros.

Esta abordagem também oferece uma trajetória alternativa para discussões fundamentais sobre lógica temporal e metafísica do tempo, exibindo compatibilidade com a lógica temporal de intervalo de James Allen (1983, 1984) e desenvolvimentos contemporâneos de sua álgebra. A lógica temporal de intervalo tem relevância significativa para a pesquisa em representação temporal para inteligência artificial e oferece uma opção robusta para a base lógica de uma teoria  $B$  do tempo, resolvendo muitas questões metafísicas relacionados ao tempo

e sua direcionalidade. Embora a lógica temporal filosófica e a lógica temporal computacional tenham alcançado grandes desenvolvimentos separadamente, ainda há pouca interação entre elas. Acredito que pesquisas que proporcionem essa interação podem ser muito importantes para ambos os campos. De acordo com especialistas na área de ciência da computação (Della Monica et al., 2013), as lógicas temporais de intervalo têm a vantagem de exibir alta expressividade e complexidade computacional em comparação com as lógicas baseadas em pontos, permitindo um escopo mais amplo de execução de tarefas para inteligência artificial. A partir do trabalho apresentado aqui, podemos oferecer um complemento gráfico e causal à álgebra de Allen, algo que também pretendo desenvolver em pesquisas futuras.

Esta perspectiva alternativa vai além da noção clássica de espaço-tempo e explica como o tempo difere do espaço, já que a direção do tempo surge da direção da causalidade. Isso resulta em uma ordenação temporal assimétrica unidirecional, em contraste com a ordenação espacial, que é bidirecional e simétrica. Esse problema está diretamente relacionado a problemas ontológicos sobre a natureza do espaço-tempo, resolvendo importantes argumentos contra a realidade do tempo, como os argumentos de McTaggart (1908, 1927) e Gödel (1970 [1949]), sustentados na falta de um critério independente para determinar a ordem do tempo. Um dos resultados mais importantes de McTaggart em defesa da necessidade da chamada série *A* reside na alegação de ser ela o que garante e sustenta a direção do tempo, uma vez que a série *B* por si só seria bidirecional, como uma série espacial e não temporal. A contraditória série *A*, de acordo com McTaggart, que seria responsável pelo movimento e fluxo do tempo, e, desse modo, pela sua distinção em relação ao espaço. Portanto, se quisermos negar essa premissa, precisamos oferecer uma explicação alternativa para a direção do tempo, independente do fluxo do tempo. A direção da causalidade pode desempenhar adequadamente esse papel. O critério de transmissão de marca e a redução da direção do tempo à direção da causalidade oferecem respostas adequadas a ambos os desafios.

## Referências bibliográficas

ALLEN, J. “Maintaining knowledge about temporal intervals”, *Communications of the ACM*, v. 26, n. 11, p. 832–843, 1983.

ALLEN, J. “Towards a general theory of action and time”, *Artificial Intelligence*, v. 23, p. 123–154, 1984.

BAJLO, D. “Measurement of Advanced Electromagnetic radiation”. *Zenodo*, doi: 10,5281/zenodo. 247283, 2017.

BANDYOPADHYAY, P., RAGHAVAN, R., DERUZ, D., AND BRITTAN, G. “Truths about Simpson’s Paradox Saving the Paradox from Falsity,” in Mohua Banerjee and Shankara Narayanan Krishna (Eds.), *Logic and Its Applications, Proceedings of the 6th Indian Conference ICLA 2015*, LNCS 8923, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 58-73, 2015. ]

BARABAS, C. et al. “Interventions over Predictions: Reframing the Ethical Debate for Actuarial Risk Assessment”, *Proceedings of Machine Learning Research*, 81:1–15, 2018.

BELL, J. On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physics*, v. 1, p. 195-200, 1964.

BELL, J. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 38, p. 447-75, 1966.

BERGSON, H. *Time and Free Will: An Essay on the Immediate Data of Consciousness* (1889). Translation: F. L. Pogson. Edinburgh: The Riverside Press, 1950.

BOLTZMANN, L. (1905). “Acerca da mecânica estatística”. Trad. Sílvio Dahmen. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n.3, p. 259-266, 2006.

BORN, M. “Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge”. *Zeitschrift für Physik*, 37, p. 863-7, 1926.

BRUKNER, C. “Quantum causality”, in *Nature Physics*, n. 10, 259-263, 2014.

CARDANO, G. (1633). *The Book on Games of Chance*. Translated by S.H. Gould. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1953.

CARTWRIGHT, N. “Causal Laws and Effective Strategies”, Special Issue on Counterfactuals and Laws. *Noûs*, v. 13, n. 4, p. 419-437, nov., 1979.

CARTWRIGHT, N. “Marks and Probabilities: Two Ways to Find Causal Structure”, in F. Stlader (ed.), *Scientific Philosophy: Origins and Development*, Dordrecht: Kluwer, 1993.

CHIANG, T. “What’s expected of us”, in *Nature* 436, 150, 2005.

COSTA, F., SHRAPNEL, S. "Quantum causal modelling", *arXiv Quantum Physics*, arXiv:1512.07106, 2015.

CRAMER, J. "The Transactional Interpretation of Quantum Mechanics", in *Review of Modern Physics*, 58: 647-687, 1986.

CRAMER, J. "An Overview of the Transactional Interpretation of Quantum Mechanics", *International Journal of Theoretical Physics*, 27: 227-236, 1988.

CRAMER, J., HERBERT, N. "An Inquiry into the Possibility of Nonlocal Quantum Communication", in arXiv:1409.5098, 2015.

DELLA MONICA, D., GORANKO, V., MONTANARI, A. e SCIAVICCO, G. "Interval temporal logics: a journey." *Bulletin of EATCS* 3, no. 105, 2013.

DOWE, P. "Backwards Causation and the Direction of Causal Processes", *Mind*, 105, pp. 227 – 248, 1996.

DOWE, P. *Physical Causation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

DE MOIVRE, A. *The Doctrine of Chances: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* (1718), London: A. Miller, 1776.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; e ROSEN, N. "Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?". *Physical Review*, v. 47, p. 777-80, 1935.

FINE, A., RYCKMAN, T. "The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/qt-epr/>>.

GÖDEL, K. (1949). "A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy", in *Albert Einstein: Scientist-Philosopher*, (P. Schilpp, Ed.). New York: MJF Books, 1970.

HAUSMAN, D., J. WOODWARD. "Independence, invariance, and the causal Markov condition", *British Journal for the Philosophy of Science*, 50: 521–583, 1999.

HEISENBERG, W. "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und "mechanischer Beziehungen". *Z. Phys.*, v. 33, p. 879-893, 1925.

HEISENBERG, W. The physical content of quantum kinematics and mechanics (1927). In: WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. (Ed.). *Quantum theory and measurement*. Princeton: Princeton University Press, p. 62-84, 1983.

HERBRANSON, W., SCHROEDER, J. "Are birds smarter than mathematicians? Pigeons (*Columba livia*) perform optimally on a version of the Monty Hall Dilemma". *Journal of Comparative Psychology*, 124(1), 1–13, 2010.

HOEFER, C. “Causal Determinism”. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2016. Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/determinism-causal/>>.

HUME, D. *A Treatise of Human Nature* (1739). Edited by David Fate Norton and Mary J. Norton, Oxford: Oxford University Press, 2000.

HUME, D. *An Enquiry Concerning Human Understanding* (1748). L. A. Selby-Bigge (ed.), 3rd edn revised by P. H. Nidditch, Oxford: Clarendon Press, 1975.

KAUARK, P. “Causalidade e teoria quântica”. *scientiæ studia*. São Paulo, v. 10, n. 1, p. 165-77, 2012

LE BIHAN, B. “Priority monism beyond spacetime”. *Metaphysica*, 19 (1), 95-111, 2018a.

LE BIHAN, B. “Space emergence in contemporary physics: Why we do not need fundamentality, layers of reality and emergence”. *Disputatio*, 10 (49), 71-95, 2018b.

LE BIHAN, B. “Spacetime Emergence in Quantum Gravity: Functionalism and the Hard Problem”. *Synthese*, 199 (2):371–393, 2021.

LE BIHAN, B. LINNEMANN, N. “Have we lost spacetime on the way? Narrowing the gap between general relativity and quantum gravity”. *Studies in History and Philosophy of Science, Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 65, 112-121, 2019.

MCTAGGART, J. “The Unreality of Time”, *Mind: A Quarterly Review of Psychology and Philosophy*, v. 17, pp. 456-473, 1908.

MCTAGGART, J. *The Nature of Existence: Volume II*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

MILL, S. *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, being a connected view of the principles of evidence, and methods of scientific investigation* (1882). London: Forgotten Books, 2010.

ORESHKOV, O., COSTA, F., BRUKNER, C. “Quantum correlations with no causal order”. *Nat. Commun.* 3-1092, 2012.

PEARL, J. *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, Cambridge University Press, 2000.

PEARL, J. et al. *Causal Inference in Statistics: A Primer*, Chichester: Wiley, 2016.

PEARL, J. *The Book of Why: The New Science of Cause and Effect*. New York: New York Basic Books, 2018.

POPPER, K. R. *A Lógica da pesquisa científica*. Tradução de Leonidas Hegenberg e Ocatnny Silveira da Mota. São Paulo: Editora Cultrix, 1975.

REICHENBACH, H. (1944) *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications, 1998.

REICHENBACH, H. (1924). *Axiomatization of the theory of relativity*. (trad. M. Reichenbach). Berkeley, Los Angeles: University of California Press, 1969.

REICHENBACH, H. (1928). *The Philosophy of Space and Time*. (trad. M. Reichenbach & J. Freund). New York: Dover, 1958.

REICHENBACH, H. (1956). *The Direction of Time*. (M. Reichenbach, Trans.). Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press., 1971.]

RIED, K. et al. “A quantum advantage for inferring causal structure”, *Nature Physics*, v. 11, n. 5, p. 414-420, 2015.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*. New York: W. W. Norton and Company, 1903.

RUSSELL, B. On the notion of cause (1913). *Russell on Metaphysics: selections from the writings of Bertrand Russell*. Ed. Stephen Mumford. London: Routledge, 2003.

RUSSELL, B. *Human Knowledge*. New York: Simon and Schuster, 1948.

SALMON, W. *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*. Princeton: Princeton University Press, 1984.

SALMON, W. “Causality and Explanation: A Reply to Two Critiques”. *Philosophy of Science*, v. 64, p. 461-77, 1997.

SALMON, W. *Causality and Explanation*. Oxford: Oxford University Press, 1998.

SCHEINES, R. “An Introduction to Causal Inference”, *Research Showcase @ CMU*, 1997. Disponível em: <http://repository.cmu.edu/philosophy/430/>, 1997. Acesso em: 3 de maio de 2018.

SIMPSON, E. The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 13, p. 238-241, 1951.

SKLAR, L. *Philosophy of Physics*. Boca Raton: CRC Press, 1992.

SLOMAN, S. *Causal Models: How People Think about the World and Its Alternatives*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

SPANOS, A. “Revisiting Simpson's Paradox: a statistical misspecification perspective”. *Research Gate Article*, <<https://www.researchgate.net/publication/302569325>>, online em Maio de 2016.

SPIRITES, P., GLYMOUR, C., SCHEINES, R. *Causation, Prediction, and Search*, New York: Springer-Verlaag, 1993.

STEEL, D. “Indeterminism and the causal Markov condition.” *British Journal for the Philosophy of Science*, 56(1), 3–26, 2005.

STRÖMBERG, T., SCHIANSKY, P., QUINTINO, M. T., ANTESBERGER, M., ROZEMA, L., AGRESTI, I., BRUKNER, Č., & WALTHER, P. “Experimental superposition of time directions.” *ArXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.01283>, 2022. Acessado em fevereiro de 2023.

SUPPES, P. *A Probabilistic Theory of Causality*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970.

VAN FRAASSEN, B. *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press, 1980.

WOOD, C.; SPEKKENS, R. “The lesson of causal discovery algorithms for quantum correlations: Causal explanations of Bell-inequality violations require fine-tuning”. *New Journal of Physics*, v. 17, n. 3, p. 033002, 2014.

## Apêndice: forma canônica do argumento de *EPR*

Segue abaixo uma interpretação e apresentação formal do argumento de *EPR*. Para tanto, utilizei como fontes de consulta o artigo original “*Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?*” (1935), escrito por Einstein, Podolski e Rosen e o verbete da *SEP* intitulado “*The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory*” (2020), escrito por Arthur Fine e Thomas A. Ryckman.

a) Forma canônica:

Parte 1: Se uma teoria é completa, então há um elemento correspondente a cada elemento da realidade.

Se podemos prever com certeza uma quantidade física sem perturbar o sistema, então ela é real. (Critério *EPR* da realidade)

Não podemos conhecer duas quantidades descritas por operadores não comutativos na mecânica quântica.

Logo, ou (1) a descrição da realidade dada pela função de onda é incompleta ou (2) essas duas quantidades não podem ter realidade simultânea.

Parte 2: Considerações sobre o problema de fazer previsões sobre um sistema com base na medição feita em outro com qual ele interagiu previamente leva ao resultado de que se (1) é falsa, então (2) também é falsa.

Logo, da parte 1 e da parte 2, segue-se que a descrição da realidade dada pela função de onda é incompleta.

b) Formalização:

Interpretação (lógica clássica proposicional):

P: A MQ é completa.

Q: Quantidades incompatíveis (cujos operadores não comutam) têm realidade simultânea.

Premissa 1: Ou a mecânica quântica não é completa ou quantidades cujos operadores não comutam não têm realidade simultânea ( $\neg P \vee \neg Q$ ).

Premissa 2: Se a mecânica quântica é completa, então quantidades incompatíveis (cujos operadores não comutam) têm realidade simultânea ( $P \rightarrow Q$ ).

Conclusão: A mecânica quântica não é completa ( $\neg P$ ).

c) Dedução:

Prem. 1.  $\neg P \vee \neg Q$

Prem. 2.  $P \rightarrow Q$

Sup.	3. P	
1, 3.	4. $\neg Q$	1, 3. De Morgan
2, 3.	5. Q	2, 3. <i>Modus Ponens</i>
1, 2, 3.	6. $Q \wedge \neg Q$	4, 5. I $\wedge$
1	7. $\neg P$	3-6. <i>Reductio ad absurdum</i>

d) Defesa das premissas 1 e 2:

P: A descrição fornecida pela  $\psi$  é completa.

Q: A posição e o momentum de um elétron têm realidade simultânea.

Premissa 1: Ou a descrição fornecida pela  $\psi$  não é completa ou a posição e o momentum de um elétron não têm realidade simultânea ( $\neg P \vee \neg Q$ ).

Premissa 2: Se a descrição fornecida pela  $\psi$  é completa, então a posição e o momentum de um elétron têm realidade simultânea ( $P \rightarrow Q$ ).

Em linguagem clássica predicativa:

Ox: x é um objeto, Rx: x é real, Cx: x é completa,

Px: x é certamente e imperturbavelmente predizível,

Qxy: x é uma quantidade de y, Dxy: x é uma descrição de y,

Txy: x tem uma contraparte em y.

$\psi$ : Função de onda, e: elétron, p: momentum, q: posição

Premissa 1:  $\neg C\psi \vee \neg ((Qpe \wedge Qqe) \wedge (Rp \wedge Rq))$

Premissa 2:  $C\psi \rightarrow ((Qpe \wedge Qqe) \wedge (Rp \wedge Rq))$

- Defesa da premissa 1:

Premissa 3 (Condição de completeza): Se uma teoria é completa, então todo elemento da realidade tem uma contraparte na teoria (descrição).

$$\forall x \forall y \forall z ((Ox \wedge Dyx) \wedge (Qzx \wedge Rz) \wedge Cy) \rightarrow Tzy$$

Premissa 4 (Critério EPR da realidade): Se podemos prever com certeza o valor de uma quantidade física (sem perturbar o sistema), então existe um elemento na realidade que corresponde a essa quantidade.

$$\forall x \forall y (((Ox \wedge Qyx) \wedge Py) \rightarrow Ry)$$

Premissa 5: Se os valores de posição e momentum forem simultaneamente elementos da realidade, então se a descrição da função de onda for completa, então contem contrapartes para valores simultâneos de posição e momentum.

$$((Qpe \wedge Qqe) \wedge (Rp \wedge Rq)) \rightarrow ((D\psi e \wedge C\psi) \rightarrow (Tq\psi \wedge Tp\psi))$$

Premissa 6: A descrição da função de onda não contém contrapartes para valores simultâneos de posição e momentum.

$$D\psi e \wedge \neg (Tq\psi \wedge Tp\psi)$$

Premissa 7: Se os valores de posição e momentum forem simultaneamente elementos da realidade, então a descrição da função de onda é incompleta.

$$((Qpe \wedge Qqe) \wedge (Rp \wedge Rq) \wedge D\psi e) \rightarrow \neg C\psi$$

Conclusão (Premissa 1): Ou a mecânica quântica não é completa ou quantidades incompatíveis (cujos operadores não comutam) não têm realidade simultânea (Condicional, 7).

$$\neg C\psi \vee \neg ((Qpe \wedge Qqe) \wedge (Rp \wedge Rq))$$

- Defesa da premissa 2:

De forma mais controversa, eles buscam mostrar que em certas circunstâncias um sistema quântico pode ter valores simultâneos para quantidades incompatíveis (posição e momentum), quando esses valores passam no critério EPR de elemento da realidade. Eles recorrem a um experimento mental em que dois sistemas quânticos interagem de tal modo que duas leis de conservação de energia sustentam-se após a interação: a lei de conservação de posição relativa e a de momentum linear total. Imaginamos que os sistemas estão localizados ao longo de um eixo  $x$ , então se um dos sistemas (A) for encontrado na posição  $q$  ao longo do eixo em um certo tempo, o outro sistema (B) seria encontrado sempre a uma distância fixa  $d$ , de modo que  $q' = q - d$ . De acordo com a lei de conservação de momentum linear o total é sempre 0. Assim, quando o momentum linear de A no eixo  $x$  é  $p$ , então o de B é  $-p$ . (Há questões sobre a legitimidade da função de onda combinada de A e B, mas há versões legítimas que mantêm a mesma situação conceitual (versão do Bohm)).

e) Duas suposições envolvidas na defesa:

1. Separabilidade: no momento em que as medições são feitas no sistema A, há alguma realidade que pertence somente ao sistema B. B mantém sua identidade distinta de A, anda que correlacionado.

2. Localidade: nenhuma mudança real se dá no sistema B como uma consequência da medição no sistema A. No momento da medição os dois sistemas não interagem mais.

Com base nas duas suposições, eles concluem que o sistema B pode ter valores reais para sua posição e momentum simultaneamente. Mostram que alguém poderia assinalar tanto o autoestado de posição quanto o de momentum para o sistema B, do qual a atribuição simultânea de elementos da realidade é suposta se seguir. (Fine e Ryckman acham estranho, mas eles precisam apenas provar a consequente da condicional da premissa 2).