

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

Rafael da Costa Pereira

**DINÂMICA GENÉRICA DE BILHARES OVAIS EM SUPERFÍCIES DE  
CURVATURA CONSTANTE: Estendendo alguns resultados do plano**

Belo Horizonte  
2021

Rafael da Costa Pereira

**DINÂMICA GENÉRICA DE BILHARES OVAIS EM SUPERFÍCIES DE  
CURVATURA CONSTANTE: estendendo alguns resultados do plano**

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Belo Horizonte  
2021

Pereira, Rafael da Costa

P436d      Dinâmica genérica de bilhares ovais em superfícies de curvatura constante [recurso eletrônico] / Rafael da Costa Pereira. – 2021.

1 recurso online (77 f. il, color.): pdf.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 75-77

1. Matemática – Teses. 2. Bilhares Convexos – Teses . 3. Superfícies (Matemática) – Teses.I. Carvalho, Sônia Pinto de. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Bilhares estritamente convexos em superfícies de curvatura constante estendendo alguns resultados do plano*

**RAFAEL DA COSTA PEREIRA**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

*Sônia Pinto de Carvalho*

Prof. Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG

*José Pedro Gaivão*

Prof. José Pedro Gaivão  
Universidade de Lisboa

*Luciano Coutinho dos Santos*

Prof. Luciano Coutinho dos Santos  
CEFET-MG

*Mário Jorge Dias Carneiro*

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro  
UFMG

*Ronaldo Alves Garcia*

Prof. Ronaldo Garcia  
UFGO

*Sylvie O. Kamphorst*

Prof. Sylvie Marie Kamphorst  
UFMG

Belo Horizonte, 10 de setembro de 2021.

# Agradecimentos

À CAPES por ter financiado esse trabalho e a todas as agências de financiamento que apoiaram esse trabalho de alguma forma. Ao programa de Pós Graduação da UFMG que me permitiu proporcionar este trabalho. A professora Sylvie cuja contribuição para o trabalho foi essencial. A Sônia por todas as lições ensinadas. Aos meus pais.

# Resumo

Nós utilizamos a topologia  $C^2$  para investigar propriedades genéricas dos bilhares ovais no plano, na esfera e no plano hiperbólico. Em conjunto com o trabalho de dos Santos e Pinto de Carvalho [11], estendemos os resultados de Dias Carneiro et al. [7, 8] sobre bilhares ovais no plano para bilhares ovais na esfera e no plano hiperbólico. Vamos demonstrar que, sob certas condições genéricas, os bilhares ovais nessas superfícies possuem apenas um número finito de órbitas periódicas, para cada período  $N$ , todas não degeneradas. Além disso, as variedades estáveis e instáveis de dois pontos hiperbólicos ou não se intersectam ou possuem pelo menos uma interseção transversal. Também mostramos que qualquer bilhar oval com uma órbita elíptica 2-periódica pode ser aproximado por um bilhar com ilhas elípticas, calculando o Primeiro Coeficiente de Birkhoff.

*Palavras-chave:* Bilhares Convexos; Pontos Elípticos; Superfícies.

# Abstract

We use the  $C^2$  topology to investigate generic proprieties for oval billiards on the plane, sphere and hyperbolic plane. Together with the work by dos Santos e Pinto de Carvalho [11], we extend the results of Dias Carneiro et al. [7, 8] about plane oval billiards to oval billiards on the sphere and the hyperbolic plane. We are going to show that, under certain generic conditions, oval billiards on these surfaces have only a finite number of periodic orbits, for each period  $N$ , all nondegenerate. Moreover, the stable and unstable manifolds of two hyperbolic points either do not intersect or have at least one transversal intersection. We also show that any oval billiard with a 2-periodic elliptic orbit can be approximated by a billiard with elliptic islands, by calculating the First Birkhoff Coefficient.

*Keywords:* Convex Billiards; Elliptic Points; Surfaces.

# Lista de Figuras

1.1	O problema do bilhar . . . . .	10
2.1	Fluxo de bilhar . . . . .	13
2.2	Exemplo de uma aplicação $T_\alpha$ . . . . .	13
2.3	Exemplo de órbita 6-periódica(esquerda) e sua trajetória associada(direita). . . . .	14
2.4	Exemplo de uma frente focalizadora(esquerda) e conjunto de retas dadas por $\phi^t(\alpha(s(u), v_{\theta(u)})(direita)$ . . . . .	14
2.5	Exemplo da definição do ângulos $\psi_i$ e $\phi_i$ . . . . .	17
2.6	Exemplo de uma órbita periódica elíptica(vermelha) e uma trajetória na vizinhança. . . . .	19
2.7	Exemplo de uma ilha elíptica para um diâmetro elíptico. . . . .	20
3.1	Folha superior do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . . . . .	23
3.2	Semiesfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . . . . .	25
5.1	Frentes definidas a partir das variedades estável e instável . . . . .	43



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Bilhares Convexos no Plano</b>	<b>12</b>
2.1	Topologia . . . . .	16
2.2	Órbitas Periódicas . . . . .	16
2.3	Órbitas Hiperbólicas . . . . .	18
2.4	Órbitas Elípticas . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Bilhares Convexos em Superfícies de curvatura constante</b>	<b>22</b>
3.1	Curvatura Geodésica . . . . .	22
3.2	Modelos Geométricos para Superfície de Curvatura Constante . . . . .	23
3.2.1	Plano Hiperbólico . . . . .	23
3.2.2	Semiesfera . . . . .	24
3.3	Bilhares Ovais em Superfícies . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Uma Topologia para o Espaço das Ovais</b>	<b>28</b>
4.1	Espaços de Baire . . . . .	28
4.2	Topologia $C^r$ das Curvas fechadas em Superfícies . . . . .	29
4.3	Topologia $C^r$ de curvas ovais . . . . .	30
4.3.1	Perturbações Locais para Superfícies de Curvatura Constante . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Genericidade das Órbitas Periódicas</b>	<b>34</b>
5.1	Órbitas periódicas não degeneradas . . . . .	35
5.1.1	Órbitas $n$ -periódicas não degeneradas . . . . .	35
5.1.2	Frentes Focalizadoras e Transversalidade . . . . .	39
5.2	Diâmetros Elípticos . . . . .	43
5.2.1	Diâmetro Elíptico e Não Ressonância . . . . .	44
5.2.2	O Primeiro Coeficiente de Birkhoff . . . . .	45
5.3	Propriedades Genéricas para Bilhares Convexos no Plano Euclidiano, PLano Hiperbólico e Semiesfera. . . . .	46

<b>A</b>	<b>Computação algébrica</b>	<b>47</b>
A.0.1	Derivada . . . . .	47

# Capítulo 1

## Introdução

O problema dos bilhares convexos no plano euclidiano foi originalmente proposto por Birkhoff em 1927 [4] como uma aplicação do Teorema Geométrico de Poincaré, também conhecido como o Teorema de Poincaré-Birkhoff. O problema consiste no movimento livre de uma partícula dentro de uma região fechada e convexa, assumindo que a partícula se move a uma velocidade constante e que colide elasticamente nos impactos com a fronteira (ver figura 1.1). Considerando apenas o ponto de impacto na fronteira e direção do

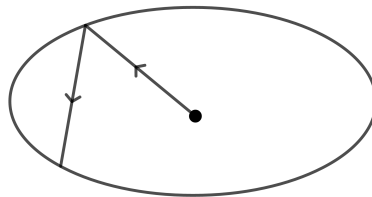


Figura 1.1: O problema do bilhar

movimento, podemos definir um difeomorfismo Twist<sup>1</sup>  $T$  no cilindro  $\mathcal{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ , considerando o parâmetro comprimento de arco  $s$  e a componente tangencial do momento  $p = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção do movimento e a tangente na fronteira no ponto de impacto.

Uma maneira de generalizar o problema de bilhares convexos no plano é considerar o movimento geodésico de uma partícula em uma superfície dentro de uma região limitada por uma curva convexa. Com isso naturalmente nos perguntamos quais propriedades do problema dos bilhares convexos no plano euclidiano se mantêm e quais propriedades surgem ao considerarmos superfícies de curvaturas não nulas. Embora o problema dos bilhares convexos em superfícies tenha sido significativamente menos explorados que o caso planar, alguns avanços já foram obtidos. Na década de 90, Veselov [23] estudou a

<sup>1</sup>Um difeomorfismo Twist  $f$  é um difeomorfismo conservativo, que preserva os fins do cilindro e tal que  $|\partial_2 \pi_x \circ f| > c > 0$ . Onde  $\pi_x$  é a projeção na primeira coordenada.

integrabilidade de bilhares elípticos na semiesfera e no plano hiperbólico, Blumen et al. [5]. Provam que o conjunto das órbitas 3-periódicas tem medida nula em 2012, Bialy [3] em 2013 prova que o único bilhar convexo sem órbitas com pontos conjugados<sup>2</sup> na semiesfera e no plano hiperbólico é o bilhar circular, dos Santos e Pinto de Carvalho [11] obtêm a derivada da aplicação de bilhar para bilhares convexos na semiesfera e no plano hiperbólico além de provar a não degenericidade de órbitas periódicas e mais recentemente Zhang [25] e Almeida [1] provam que genericamente as órbitas têm defeito zero na semiesfera e no plano hiperbólico respectivamente.

No primeiro capítulo desse trabalho, apresentamos os resultados para bilhares planos de Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7, 8] que iremos estender para bilhares convexos na semiesfera e no plano hiperbólico além de alguns resultados clássico de bilhares no plano. No segundo capítulo apresentamos resultados preliminares de bilhares em superfície sobretudo o trabalho feito por dos Santos e Pinto de Carvalho [11]. No terceiro capítulo construímos a topologia para o espaço de bilhares convexos e no quarto apresentamos os principais resultados obtidos nesse trabalho:

**Teorema A.** *Genericamente os bilhares ovais em superfícies de curvatura constante possuem um número finito de órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas.*

**Teorema B.** *Genericamente as variedades estáveis e instáveis de dois pontos periódicos hiperbólicos, não necessariamente distintos, para bilhares ovais em superfícies de curvatura constante ou não possuem interseção ou possuem pelo menos uma interseção transversa.*

**Teorema C.** *Possuir uma órbita 2-periódica elíptica é uma propriedade aberta e genericamente essas órbitas são não degeneradas e não ressonantes para bilhares ovais. Além disso qualquer bilhar oval com uma 2-periódica elíptica pode ser aproximado por um bilhar oval com uma órbita 2-periódica elíptica com ilhas elípticas.*

---

<sup>2</sup>Uma órbita tem pontos conjugados se existe um campo de Jacobi Discreto que se anula não trivial em  $\{x_N, x_{N+1}, \dots, x_M\}$ .

## Capítulo 2

# Bilhares Convexos no Plano

Neste capítulo estamos interessados em determinar como a maioria dos bilhares convexos no plano devem se comportar, isto é, um bilhar convexo genérico possui as mesmas propriedades de difeomorfismos conservativos  $C^1$ ? Será possível provar um teorema de Kupka-Smale para os bilhares convexos? Se existirem, como são as órbitas elípticas? Essas perguntas se tornam interessantes no momento em que não podemos apenas perturbar o difeomorfismo twist  $T$ , uma vez que após uma perturbação local não podemos garantir que manteremos uma aplicação de bilhar. De fato, esperamos que o oposto deva acontecer. Uma maneira de evitar esse problema é perturbar a curva de fronteira. Embora seja possível fazer isso, alguns cuidados devem ser tomados, para garantir que o difeomorfismo gerado pela curva perturbada esteja próxima do difeomorfismo da curva original. Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [8] definem uma topologia e respondem a essas perguntas. Vamos começar por uma introdução sobre bilhares convexos com intuito também de definir uma notação para o resto do trabalho.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  uma região simples, limitada e convexa. Se uma partícula tem posição  $q$  e velocidade  $v$ , o fluxo de bilhar é definido através das equações

$$\dot{q} = v \quad \dot{v} = 0 \tag{2.1}$$

para  $q \in \text{int } D$ . Temos o movimento em linha reta dentro da região  $D$ , ou seja, o fluxo é  $\phi^t(q, v) = (q + tv, v)$ . Precisamos definir o que acontece nas colisões com a fronteira. Assumindo uma reflexão elástica teremos que o ângulo de incidência será igual ao ângulo de reflexão, ou seja, se  $q \in \partial D$  tem vetor velocidade  $v^-$  então o vetor velocidade  $v^+$  após colisão é

$$v^+ = v^- - 2 \langle v^-, n \rangle n$$

onde  $n$  é um vetor normal unitário de  $\partial D$  e portanto precisamos que  $\partial D$  seja diferenciável<sup>1</sup>. Sem perda de generalidade vamos assumir que  $\|v\| = 1$ .

---

<sup>1</sup>É possível definir o fluxo de bilhar no caso em que  $\partial D$  é diferenciável por partes [6].

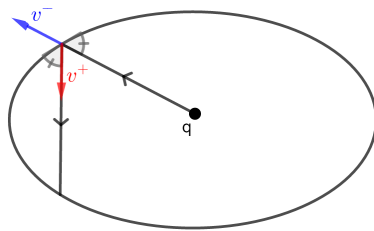


Figura 2.1: Fluxo de bilhar

**Definição 1.** Uma curva é dita uma oval se for fechada, simples, positivamente orientada, de classe  $C^r$ , com  $r \geq 2$ , e com curvatura estritamente positiva.

Embora o estudo dos bilhares convexos não se resuma ao caso de curvas ovais, nós nos restringiremos a esse caso.

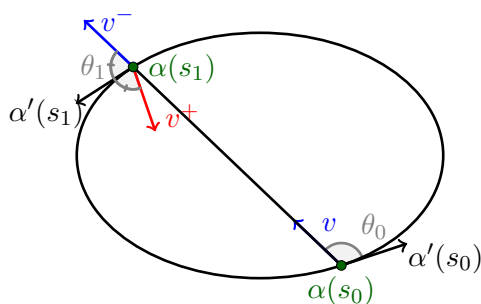
A partir do fluxo do bilhar podemos definir a aplicação de bilhar.

**Definição 2.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^2$  uma região tal que  $\partial D$  é uma oval e  $\alpha$  uma parametrização de  $\partial D$ , então

$$T_\alpha : [0, L) \times (0, \pi) \rightarrow [0, L) \times (0, \pi)$$

$$(s, \theta) \mapsto (S(s, \theta), \Theta(s, \theta))$$

tal que  $\alpha(S(s, \theta)) = \pi_1(\phi^{L(s_0, \theta_0)}(\alpha(s), v_\theta))$ ,  $\phi^t$  é o fluxo de bilhar,  $v_\theta$  é o vetor unitário que faz um ângulo  $\theta$  com  $\alpha'(s)$ ,  $L(s_0, \theta_0)$  é tempo entre colisões e  $\Theta(s, \theta)$  é o ângulo de  $\pi_2(\phi^{L(s_0, \theta_0)}(\alpha(s), v_\theta))$  com  $\alpha'(S(s, \theta))$ .

Figura 2.2: Exemplo de uma aplicação  $T_\alpha$ .

Dada uma órbita,  $\mathcal{O}(s_0, \theta_0) = \{(s_i, \theta_i) | (s_i, \theta_i) = T_\alpha^i(s_0, \theta_0)\}$ , podemos associar a trajetória de bilhar dada por  $\{\phi^t(\alpha(s_0), v_{\theta_0}) | t \in \mathbb{R}\}$  e vice-versa. Um ponto  $(s_0, \theta_0)$  é dito  $n$ -periódico, se  $n$  é o menor número natural tal que  $T_\alpha^n(s_0, \theta_0) = (s_0, \theta_0)$ . A trajetória de uma órbita 2-periódica é um segmento de reta. Para  $n > 2$  a trajetória de um ponto  $n$ -periódico é uma poligonal fechada com  $n$  arestas.

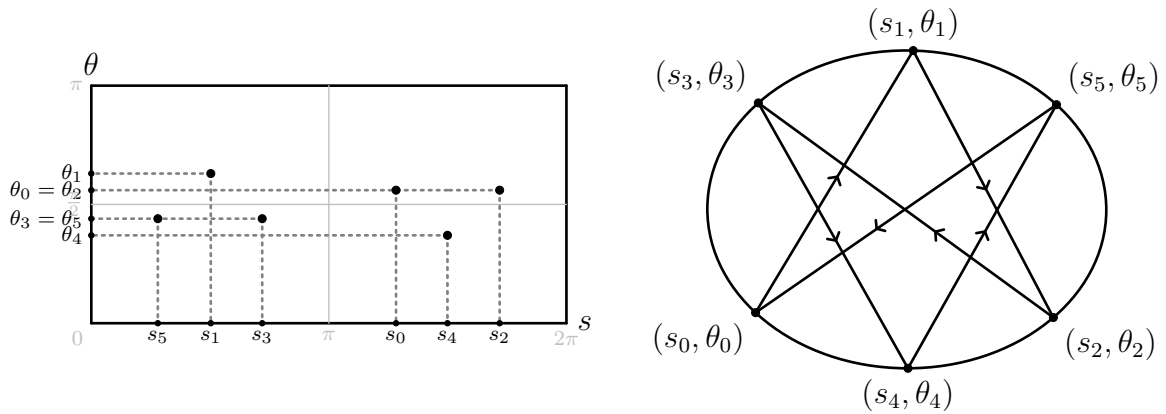


Figura 2.3: Exemplo de órbita 6-periódica(esquerda) e sua trajetória associada(direita).

Essa dualidade entre a dinâmica de  $T_\alpha$  e o fluxo nos permite traduzir algumas propriedades dinâmicas em propriedades geométricas e vice-versa. Uma dessas propriedades é a noção de frentes focalizadoras. Uma curva  $\zeta(u) = (s(u), \theta(u))$  em  $[0, L] \times (0, \pi)$ , define um conjunto de retas dadas por  $\phi^t(\alpha(s(u), v_{\theta(u)}))$ , como mostra a figura 2.4. Seja

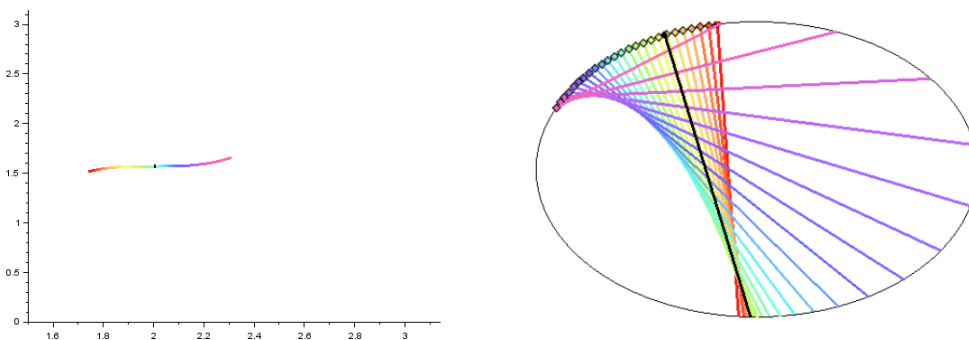


Figura 2.4: Exemplo de uma frente focalizadora(esquerda) e conjunto de retas dadas por  $\phi^t(\alpha(s(u), v_{\theta(u)}))$ (direita).

$P(\epsilon)$  o ponto de interseção entre as retas dadas por  $\zeta(\epsilon)$  e  $\zeta(0)$ . Se o limite de  $P(\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  existe, dizemos que essa é uma frente focalizadora e  $P(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(\epsilon)$  é o ponto de focalização para frente. O ponto de focalização para trás é definido como o ponto limite de  $P(\epsilon)$  dado pela interseção entre as retas dadas por  $(s(\epsilon), \pi - \theta(\epsilon))$  e  $(s(0), \pi - \theta(0))$ . No caso de  $\alpha$  estar parametrizada pelo comprimento de arco temos que a distância de

focalização é

$$\frac{\sin \theta_0}{\kappa(s_0) - \frac{b}{a}}$$

onde  $\zeta'(0) = (a, b)$ .

Outra propriedade notória é fato de que se  $\zeta(u)$  for um gráfico sobre  $\mathbb{S}^1$  invariante por  $T_\alpha$  então a envoltória dada por  $\zeta$  é uma curva convexa<sup>2</sup>.

Se  $\alpha$  é de classe  $C^2$  então é possível mostrar que  $T_\alpha$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ . A derivada da aplicação  $T_\alpha$  é dada por

$$DT_\alpha(s_0, \theta_0) = \frac{1}{\sin \theta_1} \begin{bmatrix} g(s_0, s_1)\kappa_0 - \sin \theta_0 & g(s_0, s_1) \\ \kappa_1(g(s_0, s_1)\kappa_0 - \sin \theta_0) - \kappa_0 \sin \theta_1 & g(s_0, s_1)\kappa_1 - \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Onde  $g(s_0, s_1)$  é a distância entre  $\alpha(s_0)$  e  $\alpha(s_1)$  e  $\kappa_i$  é a curvatura geodésica em  $\alpha(s_i)$ . Como

$$\det(DT_\alpha(s_0, \theta_0)) = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_1}$$

temos que  $T_\alpha$  preserva a medida  $\sin \theta d\theta \wedge ds$ . Considerando a mudança de coordenadas  $p = -\cos \theta$ , temos que  $T_\alpha$  é um sistema conservativo, isto é, preserva  $dp \wedge ds$ . Se  $(s_0, \theta_0)$  é uma órbita  $n$ -periódica, então

$$\det(DT_\alpha^n(s_0, \theta_0)) = 1.$$

Nesse caso os autovalores de  $DT_\alpha^n(s_0, \theta_0)$  são igual a

$$\frac{\text{Tr}(DT_\alpha^n(s_0, \theta_0)) \pm \sqrt{(\text{Tr} DT_\alpha^n(s_0, \theta_0))^2 - 2}}{2}.$$

Outra consequência de (2.2) é a existencia de um  $c > 0$  tal que para todo  $(s, \theta)$  temos

$$\frac{1}{c} < \frac{\partial S}{\partial \theta}(s, \theta) < c.$$

Essa propriedade é chamada de Propriedade Twist Uniforme. Isso torna o bilhar oval uma aplicação Twist. Uma das principais propriedades de aplicações Twist é a existência de um princípio variacional dado por uma função chamada de função geradora. No caso do bilhar oval uma função geradora é  $-g(s_0, s_1)$ .

Nas próximas seções vamos apresentar um esboço do teorema de Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [8] que afirma:

**Teorema.** *Genericamente os bilhares ovais possuem apenas um número finito órbitas periódicas para cada período, todas elas não degeneradas.*

<sup>2</sup>Isso envolve a noção de cáustica.



## 2.1 Topologia

Dado  $\epsilon > 0$  a vizinhança tubular de uma oval  $\alpha$  é dada por

$$N_\epsilon(\alpha) = \{\alpha(t) + \lambda\eta(t); \forall t, |\lambda| < \epsilon\}$$

onde  $\eta$  é o normal unitário de  $\alpha$ . Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de curvas ovais  $C^2$  com a topologia acima se torna um espaço de Baire<sup>3</sup>, pelo fato das imersões  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{R}^2$  é um espaço de Baire. Se  $\beta$  está contida em  $N_\epsilon(\alpha)$  temos que

$$\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\eta(t)$$

com  $\lambda$  de classe  $C^2$  tal que  $\|\lambda\|_2 < \epsilon$ .

Dizemos que  $\alpha \sim \beta$  se existe uma composição de isometrias e homotetias  $A$ , tais que  $A(\alpha) = \beta$ . Seja  $\mathcal{C} = \mathcal{C}/\sim$  com a topologia induzida temos que

**Definição 3.**  $[\beta] \in \mathcal{C}$  é dita  $\epsilon$ - $C^2$  próxima de  $[\alpha] \in \mathcal{C}$  se existirem  $\alpha \in [\alpha]$  e  $\beta \in [\beta]$  tal que  $\beta \in N_\epsilon(\alpha)$ .

$\mathcal{C}$  é um espaço de Baire e dizemos que uma propriedade é genérica se for satisfeita em um residual<sup>4</sup>. A motivação para a definição de  $\mathcal{C}$ , vem do fato de que todas as aplicações  $T_{\bar{\alpha}}$ , com  $\bar{\alpha} \in [\alpha]$ , são conjugadas à aplicação  $T_\alpha$ , i e., existe um difeomorfismo  $h$  tal que  $h^{-1} \circ T_{\bar{\alpha}} \circ h = T_\alpha$ .

## 2.2 Órbitas Periódicas

O Teorema de Poincaré-Birkhoff garante a existência de um tipo particular de órbitas periódicas ( $(m, n)$ -órbitas). Quando aplicado para bilhares podemos garantir a existência de pelo menos duas órbitas  $n$ -periódicas para todo  $n \geq 2$ . Dizemos que uma órbita  $\mathcal{O}(s_0, \theta_0)$  é não degenerada se  $DT_\alpha^n(s_0, \theta_0)$  não possui autovalores iguais a  $\pm 1$ . É possível mostrar que uma órbita é não degenerada se, e somente se, a hessiana de  $g_n(s_0, \dots, s_{n-1}) = g(s_0, s_1) + \dots + g(s_{n-1}, s_0)$  for não nula<sup>5</sup>.

O objetivo agora é mostrar que conjunto  $U_N$  das curvas ovais tais que para todo  $n \neq 1$  divisor de  $N$ , todas as órbitas  $n$ -periódicas de  $T_\alpha$  são não degeneradas é aberto e denso.

Para garantir que  $U_N$  é aberto, vamos mostrar que se  $\alpha \in U_N$  então para todo  $n \neq 1$  divisor de  $N$  toda órbita  $n$ -periódica  $\mathcal{O}(s_0, \theta_0)$  possui pelo menos um ponto no compacto  $\mathbb{S}^1 \times [\pi/N, (N-1)\pi/N]$ . Seja  $\psi_i$  o ângulo interno da trajetória dada por  $(s_0, \theta_0)$  e  $\phi_i = \inf\{\theta_i, \pi - \theta_i\}$ .

---

<sup>3</sup>Seção [4.1].

<sup>4</sup>Seção [4.1].

<sup>5</sup>Esse resultado pode ser encontrado no capítulo 2 de Kozlov e Treschëv [15] e no capítulo 4 da tese de dos Santos [10].

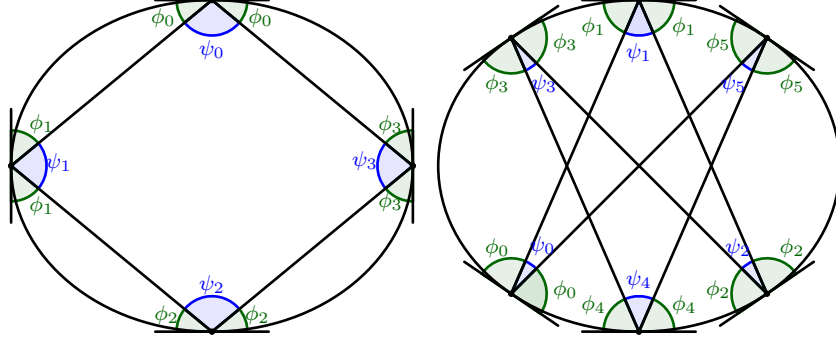


Figura 2.5: Exemplo da definição do ângulos  $\psi_i$  e  $\phi_i$ .

Temos que  $\sum \psi_i + 2\phi_i = n\pi$ , por outro lado a soma dos ângulos internos é menor ou igual a  $(n - 2)\pi$  e portanto  $\sum \phi_i > \pi$ , o que nos garante o resultado. Como todas as órbitas são não degeneradas (e portanto isoladas) temos que a quantidade de órbitas  $n$ -periódicas é finita. Difeomorfismos de  $\mathbb{S}^1 \times (0, \pi)$  terem apenas um número finito de pontos fixos não degenerados em um subconjunto compacto é uma propriedade  $C^1$  aberta<sup>6</sup>, o que vai nos garantir a seguinte proposição.

**Proposição 4.**  $U_N$  é aberto.

Para garantir a densidade de  $U_N$  começamos por parametrizar uma curva  $\alpha$  pelo parâmetro  $\varphi$  que é o ângulo que a reta tangente faz com uma direção fixada. Seja  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$  é uma órbita  $n$ -periódica para  $\alpha$  e

$$\beta(\varphi) = \alpha(\varphi) + \lambda(\varphi)\eta(\varphi) \quad (2.3)$$

tal que  $\lambda(\varphi_i) = \lambda'(\varphi_i) = 0$ . Então  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$  é uma órbita  $n$ -periódica para  $\beta$ . Assim com a escolha correta de  $\lambda(\varphi)$  vamos conseguir provar o seguinte lema.

**Lema 5.** Se  $\mathcal{O}(s_0, \theta_0)$  é uma órbita  $n$ -periódica degenerada para  $\alpha$ , então existe uma curva  $\beta$ ,  $C^2$ -próxima de  $\alpha$ , tal que  $\mathcal{O}(s_0, \theta_0)$  é uma órbita  $n$ -periódica não degenerada.

A prova do lema acima consiste em observar que o determinante de  $DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)$  é igual 1 e com isso uma órbita é degenerado se tiver traço igual a  $\pm 2$ . Analisando o traço de  $DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)$  obtemos que

$$\text{Tr}(DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)) = \kappa(\varphi_0)B + C,$$

onde  $B$  e  $C$  não dependem da curvatura  $\kappa(\varphi_0)$ . Assim considerando  $\beta$  como em (2.3) com  $\lambda(\varphi_i) = \lambda'(\varphi_i) = 0$  para  $i = 0, \dots, n - 1$ ,  $\lambda''(\varphi_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ ,  $\lambda''(\varphi_0) \neq 0$  e  $\|\lambda\|_2 < \epsilon$  e  $B \neq 0$  temos

$$\text{Tr}(DT_\beta^n(\varphi_0, \theta_0)) = \text{Tr}(DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)) - \epsilon.$$

<sup>6</sup>A topologia  $C^1$  é definida na Seção [4.2].

Se  $B = 0$ , basta realizar o mesmo argumento para  $(\varphi_i, \theta_i)$ , tendo em vista que em algum momento devemos ter  $B_i \neq 0$ , pois caso contrário o

$$\text{Tr}(DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)) = \pm 2 \left( \frac{\kappa_0 L}{\sin \theta_0} \right) \neq \pm 2$$

onde  $L$  é o comprimento da trajetória.

Realizando a interseção dos  $U_N$  e cortando pela relação de equivalência temos o teorema.

**Teorema.** *Genericamente os bilhares em  $\mathcal{C}$  possuem apenas um número finito órbitas periódicas para cada período, todas elas não degeneradas.*

## 2.3 Órbitas Hiperbólicas

Uma órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$ ,  $n$ -periódica é dita *hiperbólica* se  $DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)$  não tiver autovalores de norma 1. Pelo fato do bilhar ser uma aplicação Twist temos que as órbitas  $n$ -periódicas são pontos críticos do funcional  $W_n(s_0, \dots, s_{n-1}) = g(s_0, s_1) + \dots + g(s_{n-2}, s_{n-1})$ . Pela prova do Teorema de Poincaré-Birkhoff é possível garantir a existência de pelo menos dois pontos críticos, e conseqüentemente dois pontos  $n$ -periódicos, sendo um deles um ponto de máximo global. Utilizando o critério de Mackay-Meiss [16] garantimos que o máximo global, se isolado, é uma órbita  $n$ -periódica hiperbólica.

Dada um oval  $\alpha$ , de classe  $C^r$  e uma órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$ ,  $n$ -periódica hiperbólica. Associada a cada ponto  $(\varphi_i, \theta_i)$  temos duas variedade invariantes  $C^{r-1}$ , a variedade instável de  $(\varphi_i, \theta_i)$

$$W^u(\varphi_i, \theta_i) = \{(\varphi, \theta) \mid \lim_{i \rightarrow -\infty} T_\alpha^{in}(s, \theta) = (\varphi_i, \theta_i)\}$$

e a a variedade estável de  $(s_i, \theta_i)$

$$W^s(\varphi_i, \theta_i) = \{(\varphi, \theta) \mid \lim_{i \rightarrow \infty} T_\alpha^{in}(\varphi, \theta) = (\varphi_i, \theta_i)\}$$

Um ponto  $(\varphi, \theta)$  é dito heteroclínico(homoclínico) se  $(\varphi, \theta)$  pertence à  $W^u(\varphi_i, \theta_i) \cap W^s(\varphi_j, \theta_j)$  para  $i \neq j$  ( $i = j$ ). Dizemos ainda que  $(\varphi, \theta)$  é transversal (tangencial) se a interseção das variedades é transversa (tangente) em  $(\varphi, \theta)$ .

Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [8] provam que genericamente as órbitas hiperbólicas de bilhares em  $\mathcal{C}$  ou não possuem interseção ou possuem pelo menos uma interserção heteroclínica (ou homoclínica) transversa. A prova desse resultado é consequência do seguinte lema.

**Lema 6.** *Seja  $\alpha \in U_N$  e  $\mathcal{O}(\overline{\varphi_0}, \overline{\theta_0})$  uma órbita  $n$ -periódica hiperbólica tal que  $W^s(\overline{\varphi_0}, \overline{\theta_0})$  e  $W^u(\overline{\varphi_i}, \overline{\theta_i})$  se intersectam tangencialmente em  $(\varphi_0, \theta_0)$ . Então  $\alpha$  pode ser aproximado por curvas em  $U_N$  tais que  $(\varphi_0, \theta_0)$  é heteroclínica (ou homoclínica) transversa.*

Seja  $(\varphi_0, \theta_0)$  um ponto de interseção tangencial de  $W^s(\overline{\varphi_0}, \overline{\theta_0})$  e  $W^u(\overline{\varphi_i}, \overline{\theta_i})$ . O fato do bilhar oval ser uma aplicação Twist nos garante que a imagem de uma vetor tangente vertical pela derivada é um vetor tangente não vertical, com isso podemos assumir que a interseção entre  $W^s(\overline{\varphi_0}, \overline{\theta_0})$  e  $W^u(\overline{\varphi_i}, \overline{\theta_i})$  são gráficos locais  $\theta_+(\varphi)$  e  $\theta_-(\varphi)$  com  $\theta'_+(\varphi_0) = \theta'_-(\varphi_0) = \overline{\theta}$ . As variedades vão definir uma frente focalizadora em  $(\varphi_0, \theta_0)$  cuja a distância de focalização<sup>7</sup> para frente é

$$d_+ = \frac{\sin \theta_0}{\kappa(\varphi_0)(1 + \overline{\theta})}.$$

e para trás

$$d_- = \frac{\sin \theta_0}{\kappa(\varphi_0)(1 - \overline{\theta})}.$$

É possível obter uma curva  $\beta$ ,  $\epsilon$ - $C^2$  próxima de  $\alpha$  que mantém essa órbita hiperbólica e a órbita de  $(\varphi_0, \theta_0)$ , porém cujas as distâncias de focalização dadas por  $W^s_\beta(\overline{\varphi_0}, \overline{\theta_0})$  e  $W^u_\beta(\overline{\varphi_i}, \overline{\theta_i})$  são diferentes. De fato  $\beta$  será da forma:

$$\beta(\varphi) = \alpha(\varphi) + \lambda(\varphi)\eta_1(\varphi)$$

tal que  $\lambda(\varphi_0) = \lambda'(\varphi_0) = 0$ ,  $\lambda''(\varphi_0) \neq 0$  e  $\lambda(\varphi) = 0$  fora de uma vizinhança suficientemente pequena em torno de  $\varphi_0$ .

## 2.4 Órbitas Elípticas

Uma órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$   $n$ -periódica é dita *elíptica* se os autovalores de  $DT^n_\alpha$  são da forma  $e^{i2\pi\gamma}$ . Uma ilha elíptica é um subconjunto  $T^n$ -invariante, homeomórfico a um disco contendo  $(\varphi_0, \theta_0)$ , nesse caso a órbita é dita Moser-estável. Um diâmetro elíptico é um órbita 2-periódica elíptica e portanto temos obrigatoriamente que  $\theta_0 = \theta_1 = \pi/2$ .

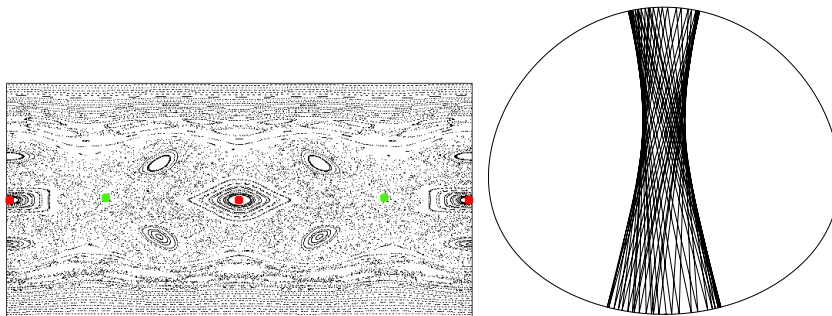


Figura 2.6: Exemplo de uma órbita periódica elíptica(vermelha) e uma trajetória na vizinhança.

<sup>7</sup>Esse resultado pode ser encontrado em [17].

Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7] provam que o conjunto de bilhares ovais que possuem diâmetro elíptico é um aberto e o conjunto dos bilhares ovais que possuem ilhas elípticas de medida positiva é denso. As principais ferramentas para provar esse resultado são a Forma Normal de Birkhoff e o Teorema Twist de Moser que veremos com mais detalhes na seção 5.2.

Seja  $(\varphi_0, \pi/2)$  um diâmetro elíptico em uma curva  $C^5$  com um autovalor igual a  $e^{i2\pi\gamma}$ , tal que  $e^{i2\pi\gamma n} \neq 1$  para  $n = 1, \dots, 4$ . Para poder utilizar a Forma Normal de Birkhoff primeiramente fazemos a mudança de coordenadas  $p = -\cos \theta$  e  $s = s - s_0$  para que  $T_\alpha$  preserve  $dp \wedge ds$  e que o ponto periódico seja o ponto  $(0, 0)$ . Expandindo  $T_\alpha^2$  no seu polinômio de Taylor de grau 4, a Forma Normal de Birkhoff nos diz como obter uma mudança de coordenadas  $(r, \theta)$  tal que  $T_\alpha^2$  pode ser escrita na forma

$$T_\alpha^2(\theta, r) = (\theta + \gamma + \tau_1 r^2 + O(|r|^2)^4, r + O(|r|^2)^4)$$

O Teorema Twist de Moser diz que se  $\tau_1 \neq 0$  então o diâmetro possui ilhas elípticas, ou seja, é Moser estável.

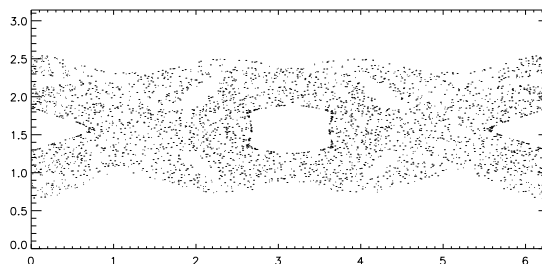


Figura 2.7: Exemplo de uma ilha elíptica para um diâmetro elíptico.

Utilizando computação algébrica Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7] obtêm uma expressão para  $\tau_1$  e mostram que

**Teorema.** *Um bilhar oval com um diâmetro elíptico pode ser aproximado por um bilhar oval com um diâmetro elíptico Moser estável.*

A prova desse resultado consiste em primeiro obter uma curva de classe  $C^6$ ,  $\epsilon$ - $C^2$  próxima que satisfaz a condição de não ressonância, se a curva obtida tiver  $\tau_1 = 0$ , obtemos uma nova curva de classe  $C^6$ ,  $\epsilon$ - $C^2$  próxima tal que  $\tau_1 \neq 0$ .

Se  $\alpha$  de classe  $C^6$  tem um diâmetro elíptico em  $\varphi_0$  primeiro consideramos uma curva  $\beta$  como em (2.3) com  $\lambda(\varphi_i) = \lambda'(\varphi_i) = 0$  para  $i = 0, 1$  e  $\lambda''(\varphi_0) \neq 0$  e com isso é possível garantir que  $\beta_1$  satisfaz a condição de não ressonância. Se  $\tau_1$  de  $\beta_1$  for nulo, consideramos

$$\beta_2(\varphi) = \beta_1(\varphi) + \lambda_1(\varphi)\eta_1(\varphi)$$

tal que  $\lambda_1(\varphi_i) = \lambda_1'(\varphi_i) = \lambda_1''(\varphi_i) = \lambda_1'''(\varphi_i) = 0$  para  $i = 0, 1$  e  $\lambda_1^{(4)}(\varphi_0) \neq 0$  isso, juntamente com a expressão obtida para  $\tau_1$  é suficiente para conseguirmos que  $\tau_1$  de  $\beta_2$  seja não nulo. Caso  $\alpha$  não seja classe  $C^6$ , basta aproximar por uma curva  $\alpha_1$  de classe  $C^6$ .

## Capítulo 3

# Bilhares Convexos em Superfícies de curvatura constante

O problema dos bilhares convexos no plano pode ser estendido naturalmente. Basta observar que o fluxo dado por (2.1) é o fluxo geodésico. Gostaríamos de tentar preservar a propriedade Twist da aplicação de bilhar, todavia não é evidente quais seriam as condições necessárias e suficientes a se colocar na superfície para podermos garantir que tal propriedade é preservada. Uma condição necessária é que  $S$  seja uma superfície completa. Portanto o estudo dos bilhares convexos em superfícies de curvatura constante se reduz a estudar bilhares convexos no plano euclidiano, na esfera e no plano hiperbólico<sup>1</sup>.

### 3.1 Curvatura Geodésica

Seja  $(S, g)$  uma superfície riemanniana simplesmente conexa onde  $S$  e  $g$  são ambas de classe  $C^2$ . Dada uma curva  $\alpha$  parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco  $s$ , definimos a curvatura geodésica como

$$\kappa_g(s_0) = \left\| \left. \frac{D\alpha'}{ds} \right|_{s_0} \right\|_g,$$

onde  $\frac{D}{ds}$  é a derivada covariante. Observamos que

$$\frac{D\alpha'}{ds} = \nabla_{\alpha'(s)}\alpha'(s)$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita. Se  $\alpha$  não estiver parametrizada por comprimento de arco temos  $\alpha'(s) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|_g$ , utilizando as propriedades da conexão temos que

$$\nabla_{\alpha'(s)}\alpha'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_g} \left( \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_g} \nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_g} \right) \alpha'(t) \right)$$

---

<sup>1</sup>Esse fato vem de diversos resultados obtido no final do século XIX e início do XX, uma discussão sobre o assunto pode ser encontrada em do Carmo [9].

e com isso

$$\kappa_g^2(t_0) = \frac{1}{\|\alpha'(t_0)\|_g^4} \left\| \frac{D\alpha'}{dt}(t_0) \right\|_g^2 - \frac{1}{\|\alpha'(t_0)\|_g^6} \left\langle \frac{D\alpha'}{dt}(t_0), \alpha'(t_0) \right\rangle_g^2. \quad (3.1)$$

## 3.2 Modelos Geométricos para Superfície de Curvatura Constante

### 3.2.1 Plano Hiperbólico

Existem diversos modelos para o plano hiperbólico. Aqui construímos o mesmo modelo utilizado nos trabalhos [1, 11, 21] conhecido como o modelo do hiperboloide. Dado  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  consideramos a forma bilinear quadrática

$$q(v) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Ela define um pseudo produto interno real<sup>2</sup> dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}(q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

O espaço  $\mathbb{R}^3$  com  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$  é chamado de 3-espaço de Minkowski e foi proposto como uma interpretação geométrica para relatividade no início do século 20<sup>3</sup>. Seja  $\mathbb{H}^2$  a folha superior da hiperboloide dado por  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ , i.e.,  $\{v \in \mathbb{R}^3 | z > 0, q(v) = -1\}$ . Embora o 3-espaço de Minkowski não seja uma variedade riemanianna, temos que  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$

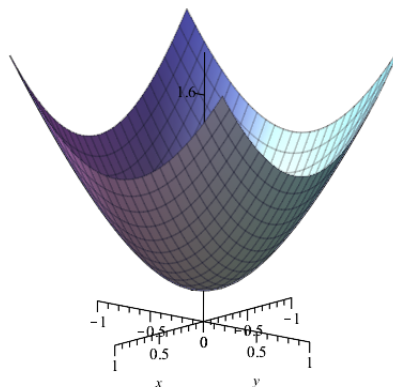


Figura 3.1: Folha superior do hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

induz uma métrica riemanianna no hiperboloide, de fato temos que a aplicação

$$\phi(\rho, \theta) = (\sinh \rho \cos \theta, \sinh \rho \sin \theta, \cosh \rho)$$

<sup>2</sup>Um pseudo produto interno real é linear, comutativo, mas ao invés de ser positivo definido pedimos apenas que seja não degenerado.

<sup>3</sup>Para mais detalhes sobre o assunto veja [12].



é uma parametrização para  $\mathbb{H}^2$ , e a métrica riemanianna nestas coordenadas é

$$g(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \rho \end{pmatrix}$$

A vantagem desse modelo são boas expressões para a distância e as geodésicas dada pelo lema abaixo.

**Lema 7.** *Seja  $A \in \mathbb{H}^2$  e  $\vec{T}$  um vetor tangente unitário nas coordenadas  $(\rho, \theta)$  em  $A$  então*

$$\gamma(t) = A \cosh t + \vec{T} \sinh t$$

*é a geodésica que passa por  $A$  na direção  $\vec{T}$ . Seja  $B \in \mathbb{H}^2$  e  $L$  a distância entre  $A$  e  $B$  então*

$$\cosh(L) = - \langle A, B \rangle_{\mathbb{H}}$$

*Demonstração.* Esse lema decorre do fato que

$$\langle \phi_\rho(\rho, \theta), \phi_\rho(\rho, \theta) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \phi_\theta(\rho, \theta), \phi_\theta(\rho, \theta) \rangle_{\mathbb{H}} = 0$$

e se  $\gamma$  é como no enunciado então

$$\gamma'(t) = A \sinh t + \vec{T} \cosh t$$

e

$$\gamma''(t) = A \cosh t + \vec{T} \sinh t.$$

□

### 3.2.2 Semiesfera

Existem diversos modelos para a semiesfera. Aqui construiremos o mesmo modelo utilizado nos trabalhos [1, 11, 21]. Definimos  $\mathbb{S}_+^2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0, \langle v, v \rangle = 1\}$ .

$$\phi(\rho, \theta) = (\sin \rho \cos \theta, \sin \rho \sin \theta, \cos \rho)$$

é uma parametrização para  $\mathbb{S}_+^2$ , e a métrica riemanianna em coordenadas é

$$g(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \rho \end{pmatrix}.$$

**Lema 8.** *Seja  $A \in \mathbb{S}_+^2$  e  $\vec{T}$  um vetor tangente unitário na coordenadas  $(\rho, \theta)$  em  $A$  então*

$$\gamma(t) = A \cos t + \vec{T} \sin t$$

*é a geodésica que passa por  $A$  na direção  $\vec{T}$ . Seja  $B \in \mathbb{S}_+^2$  e  $L$  a distância entre  $A$  e  $B$  então*

$$\cos(L) = \langle A, B \rangle$$

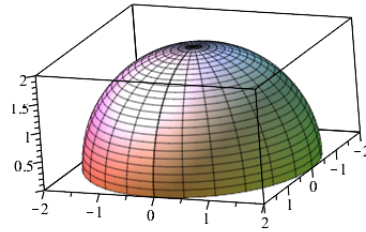


Figura 3.2: Semiesfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

*Demonstração.* Esse lema decorre do fato que

$$\langle \phi_\rho(\rho, \theta), \phi(\rho, \theta) \rangle = \langle \phi_\theta(\rho, \theta), \phi(\rho, \theta) \rangle = 0$$

e se  $\gamma$  é como no enunciado então

$$\gamma'(t) = -A \sin t + \vec{T} \cos t$$

e

$$\gamma''(t) = -A \cos t - \vec{T} \sin t$$

□

### 3.3 Bilhares Ovais em Superfícies

Nessa seção vamos apresentar os resultados de [11] que afirma que bilhares ovais com uma fronteira de classe  $C^q$  é uma aplicação Twist de classe  $C^{q-1}$  tendo a distância como função geradora. Além de obter uma expressão para derivada análoga ao caso do plano eucliano.

**Definição 9.** *Uma curva fechada  $\alpha$  em uma superfície é dita geodésicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente à  $\alpha$  intercepta  $\alpha$  em no máximo um ponto.*

**Lema 10.** *Se  $\alpha$  for uma curva regular simples, fechada com curvatura geodésica estritamente positiva em uma superfície de curvatura constante então  $\alpha$  é geodésicamente estritamente convexa.*<sup>4</sup>

Observamos que mesmo no plano euclidiano existem curvas que são geodésicamente estritamente convexas, mas possuem pontos de curvatura nula<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Esse lema pode ser encontrado em Araújo [2].

<sup>5</sup>Tais pontos devem ser necessariamente isolados.

**Definição 11.** *Uma curva regular simples, fechada em uma superfície é dita oval se a curvatura geodésica for estritamente positiva.*

Observamos que o fluxo 2.1 no caso de uma superfície é o fluxo geodésico, portanto podemos definir o fluxo de bilhar de maneira análoga como na definição (2) de aplicação de bilhar.

**Teorema 12.** [11] *Seja  $\alpha$  uma oval em  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ,  $T_\alpha(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  a Aplicação de Bilhar,  $g = g(s_1, s_2)$  a distância geodésica e  $\kappa_i$  a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ . A derivada da aplicação do bilhar  $DT_\alpha|_{(s_1, \psi_1)}$  em  $\mathbb{H}^2$  é dada por*

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 & \sinh g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa_1 \cosh g \sin \psi_1 & \kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2 \end{pmatrix}.$$

e em  $\mathbb{S}_+^2$  por

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1 & \sin g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1) - \sin g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa_1 \cos g \sin \psi_1 & \kappa_2 \sin g - \cos g \sin \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a aplicação do bilhar  $T$  preserva a medida  $\sin \psi d\psi \wedge ds$ .

A prova desse Teorema consiste em utilizar as expressões do lema (7) e (8) para provar que a órbita do bilhar minimiza a ação dada pela distância e calcular a derivada do bilhar a partir das derivadas segunda da ação dada pela distância. Observamos que podemos pedir que  $\alpha$  seja apenas geodésicamente estritamente convexa. Refazemos aqui algumas das contas.

**Lema 13.** *Seja  $g(s_1, s_2)$  a distância geodésica entre  $s_1$  e  $s_2$  em  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  e  $T_\alpha(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  então*

$$\partial_1 g = -\cos \psi_1 \quad , \quad \partial_1 g = \cos \psi_2$$

*Demonstração.* Supondo  $\alpha$  parametrizado por comprimento de arco. Em  $\mathbb{H}^2$  pelo lema 7 temos

$$\alpha(s_2) = \alpha(s_1) \cosh(g(s_1, s_2)) + \vec{V} \sinh(g(s_1, s_2))$$

onde  $\vec{V}$  é o vetor tangente unitário em  $\alpha(s_1)$  a geodésica que passa por  $\alpha(s_1)$  à  $\alpha(s_2)$  e que

$$\cosh g(s_1, s_2) = -\langle \alpha(s_1), \alpha(s_2) \rangle_{\mathbb{H}}.$$

Aplicando a regra da cadeia na expressão acima obtemos

$$\sinh(g(s_1, s_2)) \partial_1 g = -\langle \alpha'(s_1), \alpha(s_2) \rangle_{\mathbb{H}}.$$

como  $\langle \alpha'(s_1), \alpha(s_1) \rangle_{\mathbb{H}} = 0$  e  $\langle \alpha'(s_1), \vec{V} \rangle_{\mathbb{H}} = \cos \psi_1$ , temos

$$\partial_1 g = -\cos \psi_1.$$

Além disso

$$\alpha(s_1) = \alpha(s_2) \cosh(g(s_1, s_2)) + \vec{U} \sinh(g(s_1, s_2))$$

onde  $\vec{U}$  é o vetor tangente unitário em  $\alpha(s_2)$  da geodésica que passa por  $\alpha(s_1)$  à  $\alpha(s_2)$ , logo por definição temos  $\langle \alpha'(s_2), \vec{U} \rangle = \cos \psi_2$ , novamente utilizando a regra da cadeia temos

$$\partial_2 g = \cos \psi_2.$$

O caso  $\mathbb{S}_+^2$  é análogo.

□

## Capítulo 4

# Uma Topologia para o Espaço das Ovais

O primeiro problema que encontramos ao tentar definir uma topologia para as aplicações de bilhares é o fato das curvas fechadas possuírem domínios de parametrização diferentes, pois dadas curvas  $\alpha : I_\alpha \rightarrow S$  e  $\beta : I_\beta \rightarrow S$ , se  $I_\alpha \neq I_\beta$  as aplicações Twist  $T_\alpha$  e  $T_\beta$  associadas vão estar em domínios diferentes de tal maneira a não ficar claro o que significaria dizer que  $T_\alpha$  está próxima de  $T_\beta$ . Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7, 8] resolvem esse problema no plano euclidiano parametrizando todas as curvas por um parâmetro angular  $\varphi$  que é o ângulo que o vetor tangente faz com uma direção fixada. Essa abordagem apresenta algumas vantagens entre elas temos que o parâmetro  $\varphi$  sempre varia de zero a  $2\pi$  e que normal unitário  $\eta(\varphi)$  é de classe  $C^\infty$ . Tal abordagem não se traduz muito bem para as outras superfícies. De fato utilizando o transporte paralelo é possível obter uma parametrização angular análoga, porém o intervalo de variação do parâmetro angular não é mais sempre igual, pois depende da área da região. Optamos então por considerar curvas fechadas como imersões de  $\mathbb{S}^1$  em  $S$ . Dessa forma podemos definir uma topologia de maneira mais intuitiva, porém perdemos algumas parametrizações interessantes, como por exemplo, o parâmetro comprimento de arco.

### 4.1 Espaços de Baire

Dado um espaço topológico  $X$  e  $A \subset X$ , então o interior de  $A$  é o conjunto formado pela união de todos os abertos contidos em  $A$ . Um espaço topológico é um *espaço de Baire* se a união enumerável de fechados com interior vazio, possui interior vazio. Um conjunto que está contido em união enumerável de fechados com interior vazio é dito um conjunto *magro*. Observamos que um conjunto fechado tem interior vazio se, e somente se, seu complementar é aberto e denso, com isso podemos definir, equivalentemente, que um espaço topológico é um *espaço de Baire* se a interseção enumerável de abertos e densos é densa.

Um conjunto que contém uma interseção enumerável de abertos e densos é chamado de *residual*.

O teorema de Categoria de Baire nos diz que *todo espaço topológico métrico completo é um espaço de Baire*. Além disso é possível mostrar que um subespaço aberto de um espaço de Baire é Baire. Estes resultados podem ser encontrados em Munkres [19].

**Definição 14.** *Uma propriedade é dita **genérica** em um espaço de Baire se for satisfeita em um conjunto residual.*

Observamos que a interseção de dois conjuntos residuais em um espaço de Baire é um residual.

## 4.2 Topologia $C^r$ das Curvas fechadas em Superfícies

Nessa seção vamos definir a topologia para as imersões  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$  em  $S$  de tal maneira a tornar esse espaço topológico em um espaço de Baire. Com intuito de simplificar e deixar mais inteligível, vamos definir a topologia em  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$ , embora toda a discussão feita nessa seção possa ser feita para  $C^r(M, N)$  onde  $M$  e  $N$  são variedades diferenciáveis e  $M$  é compacta. Os resultados dessa seção podem ser encontrados em Hirsch [14].

Seja  $f \in C^r(\mathbb{S}^1, S)$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\varphi$  uma parametrização do aberto  $U \subset \mathbb{S}^1$ ,  $\phi$  uma parametrização do aberto  $V \subset S$  e um compacto  $K \subset U$  e  $f(K) \subset V$ . Definimos  $N^r(f, \varphi, U, \phi, V, K, \epsilon)$  como o conjunto das funções  $g$  que satisfazem:

- $g(K) \subset V$ .
- $\sup_{x \in \varphi^{-1}(K)} \|D^k(\phi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) - D^k(\phi^{-1} \circ g \circ \varphi)(x)\| < \epsilon$  para todo  $0 \leq k \leq r$ .

A união de interseções finitas desses conjuntos formam uma topologia em  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$ . Essa é conhecida como topologia fraca em  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$ . Se considerássemos um coleção de compactos  $\{K_i\}$  cobrindo  $\mathbb{S}^1$  ao invés de  $K$ , teríamos a topologia forte em  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$ , mas ambas topologias são equivalentes, pois  $\mathbb{S}^1$  é compacto.

Embora  $C^r(\mathbb{S}, S)$  seja um espaço métrico, a métrica não é definida explicitamente tornando-a difícil de se trabalhar. Vamos usufruir do fato de que no plano hiperbólico e na semiesfera existe uma parametrização  $\phi$ , como em 3.2, para definir

**Definição 15.** *Sejam  $f, g \in C^r(\mathbb{S}^1, S)$ , onde  $S$  é o plano hiperbólico ou a semiesfera, dizemos que  $f$  e  $g$  estão  $C^r$   $\epsilon$ -próximas se*

$$\sup_{t \in [0,1]} \|D^k(\phi^{-1} \circ f \circ \varphi)(t) - D^k(\phi^{-1} \circ g \circ \varphi)(t)\| < \epsilon$$

para todo  $k \leq r$ , onde  $\phi$  é dada como em 3.2 e  $\varphi$  como

$$\varphi(t) = e^{2\pi it}.$$

Observamos que  $\|\cdot\|$  utilizado na definição para a topologia  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  é a norma usual em  $\mathbb{R}^2$ .

Um teorema clássico afirma que  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  é um espaço de Baire. Podemos dizer ainda mais e afirmar que  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  é um espaço métrico completo, além disso o conjunto das imersões é um aberto de  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  e com isso eles formam um espaço de Baire.

### 4.3 Topologia $C^r$ de curvas ovais

Relembramos que uma curva regular simples, fechada em uma superfície é dita oval se a curvatura geodésica for estritamente positiva. Como a derivada do bilhar depende da distância e da curvatura geodésica, vamos mostrar que a topologia definida na seção anterior se comporta bem com essas propriedades.

Seja  $(S, g)$  uma superfície com uma métrica Riemanniana de classe  $C^2$  e de curvatura limitada. Embora  $\alpha$  seja uma imersão de  $\mathbb{S}^1$ , vamos muitas vezes considerar  $\alpha$  em coordenadas locais, isto é,  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \phi^{-1}(\alpha(\varphi(t)))$ , nesse caso temos que a derivada covariante de  $\alpha'(t)$  nas coordenadas locais  $\phi$  é

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \left( \frac{d^2x_1}{dt^2} + \sum \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^1 \right) \partial_1 + \left( \frac{d^2x_2}{dt^2} + \sum \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^2 \right) \partial_2 \quad (4.1)$$

Nosso objetivo é comparar a curvatura geodésica de duas curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , embora  $\alpha'(t)$  e  $\beta'(t)$  pertençam, em geral, a planos tangentes diferentes podemos comparar sua norma, conforme o lema abaixo.

**Lema 16.** *Sejam  $\alpha_n$  imersões tais que  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  em  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  então para todo  $p \in \mathbb{S}^1$  temos  $d(\alpha_n(p), \alpha(p)) \rightarrow 0$  e  $\kappa_n(p) \rightarrow \kappa(p)$ , onde  $\kappa_n(p)$  e  $\kappa(p)$  são as curvaturas geodésicas em  $\alpha_n(p)$  e  $\alpha(p)$ .*

*Demonstração.* Dado  $p$ , seja  $t$  tal que  $\varphi(t) = p$ . Seja  $V$  a bola geodésica de raio  $\epsilon$  em  $\alpha(p)$ ,  $U = \alpha^{-1}(V \cap \alpha(\mathbb{S}^1))$  e um compacto  $K \subset U$ . Seja  $\phi = \exp_{\alpha(p)}$  e considere  $N^r(\alpha, \varphi, U, \phi, V, K, \epsilon)$ , em particular temos para  $n \gg 0$  que

$$\|\phi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi(t) - \phi^{-1} \circ \alpha_n \circ \varphi(t)\| < \epsilon$$

o que nos garante que  $d(\alpha_n(p), \alpha(p)) < \epsilon$ . Precisamos agora garantir que

$$\left| \left\| \frac{D\alpha'(t)}{dt} \right\|_g - \left\| \frac{D\alpha'_n(t)}{dt} \right\|_g \right| < \epsilon$$

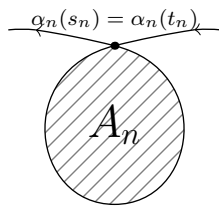
Observamos que por (4.1) temos que a norma da derivada covariante de  $\alpha'$  em  $t$  depende apenas das derivadas das coordenadas da curva, dos símbolos de Christoffel e coeficientes da métrica  $g$ . Como  $S$  e  $g$  são ambas de classe  $C^2$ , temos que esses termos variam todos pelo menos continuamente e juntamente com (3.1) garantimos o resultado.  $\square$

**Proposição 17.** *Seja  $C$  o conjunto das curvas ovais de uma superfície simplesmente conexa e completa  $S$  de curvatura limitada. O conjunto  $C$  é aberto na topologia  $C^r(\mathbb{S}^1, S)$  com  $r \geq 2$ .*

*Demonstração.* Como ter curvatura positiva e ser uma imersão são propriedades abertas, basta mostrar que se  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  com  $\alpha_n$  imersões com curvatura positiva tal que  $\alpha_n \notin C$  então  $\alpha \notin C$ . Suponhamos por absurdo que  $\alpha \in C$ , então existem sequências  $\{t_n\}, \{s_n\}$  tais que  $t_n < s_n$ ,  $\alpha(t_n) = \alpha(s_n)$ . A menos de tomarmos subsequências convergentes seja  $t$  e  $s$  os limites de  $t_n$  e  $s_n$ , respectivamente. Temos que  $\alpha(t) = \alpha(s)$  e portanto  $t = s$ , logo  $\alpha'(t) = \alpha'(s)$ . Observamos que pelo Teorema de Gauss Bonnet

$$\int_{t_n}^{s_n} \kappa_g(\alpha_n(t)) dt \geq 2\pi - \theta_n - K_{inf} \cdot A_n$$

onde  $K_{min}$  é o mínimo da curvatura de  $S$ ,  $\theta_n$  é o ângulo entre  $\alpha'_n(t_n)$  e  $\alpha'_n(s_n)$  e  $A_n$  é a área conforme a figura abaixo



temos  $\theta_n$  e  $A_n$  tendem a zero, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{s_n} \kappa_g(\alpha_n(t)) dt \geq 2\pi$$

gerando um absurdo, pois  $s_n - t_n$  tende a zero e  $\kappa_g(\alpha_n)$  é limitada e portanto o limite deveria ser igual a zero.  $\square$

**Corolário 18.**  *$C$  é um espaço de Baire.*

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  pertencentes a  $C$ , dizemos que  $\alpha \sim \beta$  se existem  $h$  difeomorfismo  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$  e uma isometria  $F$  de  $S$  tal que  $F \circ \alpha \circ h = \beta$ .

**Proposição 19.** *A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $C$ .*

*Demonstração.*  $\alpha \sim \alpha$  é trivial, basta considerar a identidade em  $C^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$  e a identidade em  $S$ .

Se  $\alpha \sim \beta$ , temos  $F \circ \alpha \circ h = \beta$  então  $\alpha = F^{-1} \circ \beta \circ h^{-1}$ , como  $F^{-1}$  é também um isomorfismo de  $S$  e  $h^{-1}$  é também um difeomorfismo  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$  temos  $\beta \sim \alpha$ .

Se  $F_\alpha \circ \alpha \circ h_\alpha = \beta$  e  $F_\beta \circ \beta \circ h_\beta = \gamma$  então temos que  $F_\beta \circ F_\alpha \circ \alpha \circ h_\alpha \circ h_\beta = F_\beta \circ \beta \circ h_\beta = \gamma$ , como  $F_\beta \circ F_\alpha$  é uma isometria de  $S$  e  $h_\alpha \circ h_\beta$  é um difeomorfismo  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$ , logo temos  $\alpha \sim \gamma$ .  $\square$



**Definição 20.** *Seja  $C$  conforme a proposição 17, chamamos o conjunto  $\mathcal{C} = C/\sim$  o conjunto de **mesas** ovais de  $S$  e denotamos a classe de  $\alpha$  por  $[\alpha]$ .*

A ideia aqui é que qualquer aplicação twist  $T$  de uma curva na classe de  $\alpha$  é conjugada a aplicação twist  $T_\alpha$ . Como a função geradora é a distância temos que as órbitas são preservadas pela isometria, além disso uma reparametrização de  $\alpha$  gera apenas uma mudança de coordenadas para  $T$ .

**Proposição 21.** *O conjunto das mesas ovais é Baire.*

*Demonstração.* Seja  $\pi : C \rightarrow \mathcal{C}$  a projeção canônica. Temos que se  $A \subset C$  é denso então  $\pi(A)$  é denso, de fato, seja  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$  aberto, então  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  é aberto e portanto existe  $\alpha \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap A$ , logo  $\pi(\alpha) \in \mathcal{U} \cap \pi(A)$ . Por outro lado afirmamos que se  $\mathcal{A}$  é denso, então  $\pi^{-1}(\mathcal{A})$  é denso. Dado  $\alpha$ , seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $[\alpha]$  então existe  $\beta$  tal que  $\beta \in N(F \circ \alpha \circ h, \epsilon)$ , para algum  $F, h$  e  $\epsilon$  com  $\pi(\beta) \in \mathcal{A}$ , pois caso contrário  $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ . Agora observamos que se  $\beta \in N(F \circ \alpha \circ h, \epsilon)$  então  $F^{-1} \circ \beta \circ h^{-1} \in N(\alpha, \epsilon)$ , mas como  $F^{-1} \circ \beta \circ h^{-1} \in [\beta]$  temos  $\pi^{-1}(\mathcal{A})$  é denso.

Finalmente para provar a proposição basta observar que

$$\bigcap \mathcal{A}_\omega = \pi \left( \bigcap \pi^{-1}(\mathcal{A}_\omega) \right)$$

e portanto se  $\mathcal{A}_\omega$  é aberto e denso, temos que  $\pi^{-1}(\mathcal{A}_\omega)$  é aberto e denso, como  $C$  é Baire temos que  $\bigcap \pi^{-1}(\mathcal{A}_\omega)$  é denso e logo temos que  $\bigcap \mathcal{A}_\omega$  é denso.  $\square$

### 4.3.1 Perturbações Locais para Superfícies de Curvatura Constante

O próximo lema nos permite fazer perturbações locais.

**Lema 22.** *Seja  $\alpha$  uma curva  $C^2$  de uma superfície  $S$  de curvatura constante. Fixado um  $s_0$ , existe uma vizinhança  $I$  suficientemente pequena de  $s_0$  e uma curva  $\beta$  tal que  $\beta(t) = \alpha(t)$  para todo  $t \notin I$ ,  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ ,  $\alpha'(s_0) = \beta'(s_0)$  e  $\alpha''(s_0) \neq \beta''(s_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $V$  um campo unitário de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança  $U$  de  $\alpha(s_0)$  com  $V(s_0)$  igual ao vetor normal unitário em  $\alpha(s_0)$  e  $I$  tal que  $\alpha(t) \in U$  para todo  $t \in I$ . Basta tomar agora uma função  $\lambda$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\lambda(t) = 0$  para  $t \notin I$ ,  $\lambda(s_0) = \lambda'(s_0) = 0$  e  $\lambda''(s_0) \neq 0$  e definir

$$\beta(t) := \exp_{\alpha(t)} \lambda(t)V(t) \tag{4.2}$$

por construção  $\alpha(t) = \beta(t)$  para  $t \notin I$  e  $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ , pela definição da exponencial em  $S$ , temos

$$\beta(t) = \alpha(t)C(\lambda(t)) + V(t)S(\lambda(t)),$$

onde

$$S(g) = \begin{cases} g & \text{para o Plano Euclidiano.} \\ \sin g & \text{para a Semi-Esfera.} \\ \sinh g & \text{para o Plano Hiperbólico.} \end{cases}, \quad (4.3)$$

$$C(g) = \begin{cases} 1 & \text{para o Plano Euclidiano.} \\ \cos g & \text{para a Semi-Esfera.} \\ \cosh g & \text{para o Plano Hiperbólico.} \end{cases}$$

Lembramos que  $S'(t) = C(t)$ ,  $C'(t) = -KS(t)$ , onde  $K = 0, \pm 1$  é a curvatura da superfície  $S$ . Com isso obtemos

$$\beta'(t) = C(\lambda(t))(\alpha'(t) + \lambda'(t)V(t)) + S(\lambda(t))(V'(t) - K\lambda(t)\alpha(t)).$$

Como  $S(\lambda(s_0)) = 0$  e  $C(\lambda(s_0)) = 1$ , temos  $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$ , além disso

$$\begin{aligned} \beta''(t) &= C(\lambda(t))(\alpha''(t) + \lambda''(t)V(t) + \lambda'(t)V'(t)) - K\lambda'(t)S(\lambda(t))(\alpha'(t) + \lambda'(t)V(t)) \\ &\quad + S(\lambda(t))(V''(t) + \lambda''(t)\alpha'(t) + \lambda'(t)\alpha'(t)) + \lambda'(t)C(\lambda(t))(\alpha'(t) + \lambda'(t)V(t)) \end{aligned}$$

finalmente obtemos  $\beta''(s_0) = \alpha''(s_0) + \lambda''(s_0)V(s_0)$   $\square$

**Corolário 23.** *Dado  $\alpha$  e  $\{s_0, \dots, s_n\}$ , então existe uma curva  $\beta$ ,  $C^2$  próxima de  $\alpha$  tal que  $\alpha(s_i) = \beta(s_i)$ ,  $\alpha'(s_i) = \beta'(s_i)$  e  $\kappa_\beta(s_i) = \kappa_\alpha(s_i) + \epsilon_i$ .*

Do fato de que a distância e a curvatura vão estar próximas decorre que se duas mesas estão  $C^2$  próximas então as aplicações twist associadas estão  $C^1$  próximas.

**Lema 24.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas curvas  $C^2$  próximas. Então as aplicações twist associadas  $T_\alpha$  e  $T_\beta$  estão  $C^1$  próximas.*

Esse resultado foi provado inicialmente por dos Santos e Pinto de Carvalho [11] e consiste em provar que as funções geradoras, i.e., a distância estão  $C^2$  próximas e com isso  $T_\alpha$  e  $T_\beta$  vão estar  $C^1$  próximas.

*Demonstração.* Observamos que de acordo com as fórmulas 7 e 8, temos que

$$g_\alpha(s_0) = \cosh^{-1} \langle \alpha(s_0), \alpha(s_1) \rangle_{\mathbb{H}} \quad \text{para a Plano Hiperbólico.}$$

$$g_\alpha(s_0) = \arccos \langle \alpha(s_0), \alpha(s_1) \rangle \quad \text{para a Esfera.}$$

Logo como  $\alpha$  e  $\beta$  estão  $C^2$  próximas temos que  $g_\alpha, g_\beta$  estão  $C^2$  próxima se portanto temos que  $T_\alpha$  e  $T_\beta$  estão  $C^1$  próximas.  $\square$

Observamos que qualquer círculo geodésico é integrável e são conjugados entre si, porém a curvatura geodésica de dois círculos distintos não estão necessariamente próximos na topologia acima.

## Capítulo 5

# Genericidade das Órbitas Periódicas

O objetivo desse capítulo é provar os teoremas A, B e C.

**Teorema A.** *Genericamente os bilhares ovais em superfícies de curvatura constante possuem um número finito de órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas.*

**Teorema B.** *Genericamente as variedades estáveis e instáveis de dois pontos periódicos hiperbólicos, não necessariamente distintos, para bilhares ovais em superfícies de curvatura constante ou não possuem interseção ou possuem pelo menos uma interseção transversa.*

**Teorema C.** *Possuir uma órbita 2-periódica elíptica é uma propriedade aberta e genericamente essas órbitas são não degeneradas e não ressonantes para bilhares ovais. Além disso qualquer bilhar oval com uma 2-periódica elíptica pode ser aproximado por um bilhar oval com uma órbita 2-periódica elíptica com ilhas elípticas.*

Relembramos que um ponto  $(s_0, \theta_0)$  é dito  $n$ -periódico, se  $n$  é o menor número natural tal que  $T_\alpha^n(s_0, \theta_0) = (s_0, \theta_0)$ . A trajetória de uma órbita  $n$ -periódica é um segmento de geodésica se  $n = 2$  e é um polígono com  $n$  arestas se  $n > 2$ . Além disso utilizando o Teorema de Poincaré-Birkhoff e o critério de Mackay-Meiss garantimos que o funcional comprimento possui um máximo global e, se isolado, temos uma órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$   $n$ -periódica hiperbólica, isto é,  $DT_\alpha^n(\varphi_0, \theta_0)$  não tem autovalores de norma igual a 1. Uma órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \theta_0)$   $n$ -periódica é dita elíptica se os autovalores de  $DT_\alpha^n$  são da forma  $e^{i2\pi\gamma}$ . O teorema C, não garante que possuir uma órbita 2-periódica elíptica é uma propriedade genérica, mas caso um bilhar tenha tal órbita então genericamente tal órbita deve ter um autovalor igual a  $e^{i2\pi\gamma}$ , tal que  $e^{i2\pi\gamma k} \neq 1$  para  $k = 1, \dots, 4$  (chamada de condição de não-ressonância). Temos ainda que é possível garantir que possuir um subconjunto  $T^n$ -invariante, homeomórfico a um disco contendo  $(\varphi_0, \theta_0)$ , isto é, ilha elíptica é uma propriedade densa, entretando não conseguimos garantir que é uma propriedade  $C^2$  aberta.

No trabalho de dos Santos e Pinto de Carvalho [11] é provado o Teorema A para o plano hiperbólico e para a semiesfera é provado apenas que é uma propriedade aberta

utilizando o conjunto das curvas  $C^\infty$  com a topologia  $C^2$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Uma das principais diferenças é a maneira de se realizar uma perturbação que no nosso trabalho não depende do espaço em que a superfície está mergulhada. Na próxima seção refazemos sua prova salientando as diferenças com a topologia e perturbação propostas no presente trabalho.

Para o Teorema B usamos o conceito de campos de Jacobi inspirados nos trabalhos de Wojtkowski [24] e Blumen et al. [5] e as técnicas desenvolvidas por Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [8].

A prova do Teorema C segue as ideias de Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7] para perturbar uma 2-periódica elíptica e obter um bilhar com o primeiro coeficiente de Birkhoff diferente de zero.

## 5.1 Órbitas periódicas não degeneradas

**Teorema 25** (dos Santos & Pinto de Carvalho). *O conjunto dos bilhares ovais  $C^\infty$  em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  que possuem um número finito de órbitas periódicas para um período  $n$  e todas são não degeneradas é aberto e denso para  $\mathbb{H}^2$  e aberto para  $\mathbb{S}_+^2$ .*

Observamos que muitos dos resultados obtidos no teorema acima podem ser mostrados, com algumas alterações, para a topologia proposta no capítulo 3 no conjunto das ovais  $C^2$  ao invés de se considerar apenas as ovais  $C^\infty$ . Refazemos aqui a prova do teorema acima salientando alterações necessárias. Completamos aqui a prova da densidade para  $\mathbb{S}_+^2$  utilizando as ideias desse mesmo trabalho.

### 5.1.1 Órbitas $n$ -periódicas não degeneradas

**Lema 26** (dos Santos). *Seja  $\alpha$  uma oval então existe  $\delta_n > 0$ , tal que toda órbita  $n$ -periódica de  $T_\alpha$  contém pelo menos um ponto em  $\mathbb{S}^1 \times [\delta_n, \pi - \delta_n]$ .*

*Demonstração.* Dada uma órbita  $n$ -periódica  $\{s_i, \theta_i\}_{i=0}^{n-1}$ , caso  $n = 2$  temos necessariamente  $\theta_0 = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ . Se  $n > 2$  a órbita define um  $n$ -polígono geodésico com ângulos internos iguais a  $\psi_i = \pi - 2\phi_i$ , onde  $\phi_i = \inf\{\theta_i, \pi - \theta_i\}$ . Em  $\mathbb{H}^2$  como consequência do Teorema de Gauss-Bonnet obtemos

$$(n-2)\pi > \sum_i \psi_i = n\pi - 2 \sum_i \phi_i$$

e portanto temos

$$\sum_i \phi_i > \pi$$

logo existe algum  $i_0$  tal que  $\phi_{i_0} > \frac{\pi}{n}$  e portanto  $\frac{\pi}{n} \leq \theta_{i_0} \leq \pi - \frac{\pi}{n}$ .

O argumento acima não se traduz em  $\mathbb{S}_+^2$ , porém a área delimitada por  $\alpha$  vai nos permitir limitar a soma dos ângulos internos como obtivemos acima. Suponhamos, primeiramente, que a trajetória da órbita seja um polígono convexo e seja  $A_P$  a área delimitado por esse polígono convexo. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos

$$A_P = 2\pi - 2 \sum_i \phi_i.$$

Como a área  $A$  delimitada por  $\alpha$  é estritamente menor que  $2\pi$ , temos  $A = 2\pi - \epsilon$ , com  $\epsilon > 0$ , e portanto

$$2\pi - 2 \sum_i \phi_i < 2\pi - \epsilon$$

obtemos então que

$$\sum_i \phi_i > \frac{\epsilon}{2}$$

então existe pelo menos um  $i_0$  tal que  $\phi_{i_0} \geq \frac{\epsilon}{2n}$  e portanto  $\frac{\epsilon}{2n} \leq \theta_{i_0} \leq \pi - \frac{\epsilon}{2n}$ . Caso a trajetória formada pela órbita não seja um polígono convexo basta observar que o polígono convexo com vértices em  $\{s_i\}$  possui a soma dos ângulos internos maior que soma dos ângulos internos do polígono não convexo.  $\square$

**Definição 27.** *Seja  $\mathcal{U}_n$  o conjunto dos bilhares ovais  $C^2$  tais que o conjunto de órbitas  $n$ -periódicas é finito e todas são não degeneradas.*

**Proposição 28** (dos Santos & Pinto de Carvalho).  *$\mathcal{U}_n$  é aberto utilizando a topologia  $C^2$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 26, temos que  $T_\alpha^n$  possui um número finito de pontos fixos não degenerados no compacto  $\mathbb{S}^1 \times [\delta_n, \pi - \delta_n]$ . Como órbitas  $n$ -periódicas e não degeneradas em um compacto é uma propriedade aberta na topologia  $C^1$ , o lema 24 nos garante a proposição.  $\square$

Observamos que para provar o resultado foi necessário apenas que curvas próximas tenham aplicações de bilhares associadas  $C^1$  próximas, o que é esperado de qualquer topologia definida no espaço das curvas para o estudo de bilhar. Portanto o mesmo resultado vale para topologia proposta no capítulo 3 no conjunto de ovais  $C^2$ .

Para provar a densidade é necessário realizar perturbações. Dos Santos e Pinto de Carvalho optam por realizar perturbações do tipo :

$$\beta(s) = \begin{cases} \frac{\alpha(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 + \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{S}_+^1 \\ \frac{\alpha(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

onde  $\eta$  é o vetor em  $\mathbb{R}^3$  normal a curva. Essa perturbação define a topologia. Uma vizinhança de  $\alpha$  é um conjunto de todas as curvas  $\beta$  como acima onde  $\lambda$  é uma função

real periódica  $C^2$  com  $\|\lambda\| < \epsilon$ . Essa perturbação traz consigo duas grandes desvantagens em nossa opinião. A primeira é que a perturbação (e conseqüentemente a topologia) dependem do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Isso pode ser resolvido realizando uma perturbação do tipo:

$$\beta(s) := \exp_{\alpha(s)} \lambda(s)\eta(s).$$

A outra desvantagem é que, em geral,  $\eta(s)$  não é de classe  $C^2$ , e portanto não podemos garantir que  $\beta$  seja de classe  $C^2$ , isso força dos Santos a trabalhar apenas com curvas  $C^\infty$ . Nós observamos que as perturbações necessárias para provar os Teoremas A, B e C, são feitas sempre em um número finito de pontos e preservando o perímetro da órbita, por isso utilizamos perturbações do tipo 4.2, tendo em vista que a nossa topologia não está definida através das perturbações. A redefinição da topologia, da perturbação e o aprimoramento do lema abaixo, é onde reside a nossa maior contribuição para prova do Teorema A.

**Lema.** *Dado um bilhar  $C^\infty$  em uma superfície  $S$  com uma órbita  $n$ -periódica degenerada temos duas possibilidades. Se  $S = \mathbb{H}^2$  então existe um bilhar  $C^2$  próximo tal que possui a mesma órbita  $n$ -periódica porém não degenerada. Se  $S = \mathbb{S}_+^2$  e o comprimento da órbita  $n$ -periódica degenerada não for um múltiplo de  $\pi$  então existe um bilhar  $C^2$  próximo tal que possui a mesma órbita  $n$ -periódica porém não degenerada.*

A prova desse lema consiste em considerar o traço de  $DT_{(s_0, \theta_0)}^n$  como uma função das curvaturas, essa função será um polinômio de múltiplas variáveis, caso ele dependa de alguma curvatura basta realizar uma perturbação que altere apenas a curvatura. Para garantir a densidade em  $\mathbb{S}_+^2$ , mostramos que:

**Lema 29.** *Seja  $O = \{(s_0, \theta_0), \dots, (s_{n-1}, \theta_{n-1})\}$  um órbita  $n$ -periódica de uma curva  $C^2$  então o traço de  $DT_{(s_0, \theta_0)}^n$  como função das curvaturas em  $s_0, \dots, s_{n-1}$  não é constante.*

*Demonstração.* Observamos que

$$DT_{(s_i, \theta_i)} = \frac{1}{\sin \theta_{i+1}} \begin{pmatrix} \kappa_i S(g_i) - C(g_i) \sin \theta_i & S(g_i) \\ \kappa_{i+1}(\kappa_i S(g_i) - C(g_i) \sin \theta_i) - KS(g_i) \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} - \kappa_i C(g_i) \sin \theta_i & \kappa_{i+1} S(g_i) - C(g_i) \sin \theta_{i+1} \end{pmatrix}.$$

onde  $S(g)$  e  $C(g)$  são como em (4.3) e  $K$  é a curvatura. Observamos que

$$DT_{(s_i, \theta_i)} = \frac{1}{\sin \theta_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa_{i+1} & -\sin \theta_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(g_i) & S(g_i) \\ -KS(g_i) & C(g_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & 0 \\ \kappa_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$B_i^+ := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa_i & -\sin \theta_i \end{pmatrix}, R(g) := \begin{pmatrix} C(g) & S(g) \\ -KS(g) & C(g) \end{pmatrix} \text{ e } B_i^- := \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & 0 \\ \kappa_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Pela regra da cadeia temos que  $DT_{(s_0, \theta_0)}^n = DT_{(s_{n-1}, \theta_{n-1})} DT_{(s_{n-2}, \theta_{n-2})} \cdots DT_{(s_0, \theta_0)}$  e portanto

$$DT_{(s_0, \theta_0)}^n = \frac{1}{\sin \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_0} B_0^+ R(g_{n-1}) B_{n-1}^- B_{n-1}^+ R(g_{n-2}) B_{n-2}^- \cdots B_1^+ R(g_0) B_0^-$$

Seja  $\Theta = \sin \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_0$ , como  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  temos

$$\text{tr}(DT_{(s_0, \theta_0)}^n) = \frac{1}{\Theta} \text{tr}(R(g_{n-1}) B_{n-1}^- B_{n-1}^+ R(g_{n-2}) B_{n-2}^- \cdots B_1^+ R(g_0) B_0^- B_0^+)$$

e como

$$B_i^- B_i^+ = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & 0 \\ \kappa_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa_i & -\sin \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i & 0 \\ 2\kappa_i & -\sin \theta_i \end{pmatrix} = -\sin \theta_i I + K_i$$

onde  $I$  é a identidade e

$$K_i := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\kappa_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Por fim

$$\text{tr}(DT_{(s_0, \theta_0)}^n) = \frac{1}{\Theta} \text{tr}(R(g_{n-1})(-\sin \theta_{n-1} I + K_{n-1}) \cdots R(g_0)(-\sin \theta_0 I + K_0)) \quad (5.1)$$

Se  $\alpha(s_{i_0}), \dots, \alpha(s_{i_m})$  são todos os pontos de colisão distintos então o  $\text{tr}(DT_{(s_0, \theta_0)}^n)$  é um polinômio em  $\kappa_{i_0}, \dots, \kappa_{i_m}$ , onde  $j_i$  é a quantidade de batidas em  $s_i$ . Seja  $\bar{\kappa} := \kappa_{i_0}^{j_{i_0}}, \dots, \kappa_{i_m}^{j_{i_m}}$  o termo de maior grau e  $a_{\bar{\kappa}}$  seu coeficiente, pela linearidade do traço temos

$$a_{\bar{\kappa}} \bar{\kappa} = \frac{1}{\Theta} \text{tr}(R(g_{n-1}) K_{n-1} R(g_{n-2}) K_{n-2} \cdots R(g_0) K_0).$$

Observamos ainda que

$$R(g_i) K_i = \begin{pmatrix} 2\kappa_i S(g_i) & 0 \\ 2\kappa_i C(g_i) & 0 \end{pmatrix}$$

e finalmente temos

$$a_{\bar{\kappa}} \bar{\kappa} = \frac{1}{\Theta} \text{tr} \begin{pmatrix} 2^n S(g_0) \cdots S(g_{n-1}) \bar{\kappa} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} = \frac{2^n}{\Theta} S(g_{i_0})^{j_{i_0}} \cdots S(g_{i_m})^{j_{i_m}}$$

□

**Corolário 30.** *Dado um bilhar em uma superfície de curvatura constante com uma órbita  $n$ -periódica degenerada então existe um bilhar  $C^2$  próximo que possui a mesma órbita  $n$ -periódica, porém não degenerada.*

*Demonstração.* Se  $\alpha$  tem uma órbita  $n$ -periódica degenerada então  $\text{tr}(DT_{(s_0, \theta_0)}^n) = \pm 2$ , pois  $\det(DT_{(s_0, \theta_0)}^n) = 1$ . Logo realizando uma perturbação do tipo 4.2, obtemos uma curva  $\beta$  próxima tal que  $\text{tr}(DT_{(s_0, \theta_0)}^n) \neq \pm 2$ . □

Uma consequência de 5.1 é em caso de não haver batidas múltiplas o coeficiente de  $\kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_m}$  é igual a

$$\frac{(-1)^{n-m} 2^m (S(g_{i_1}) \cdots S(g_{i_{m-1}}))}{\sin(\theta_{i_1}) \cdots \sin(\theta_{i_m})}$$

onde  $g_{i_j}$  é a distância percorrida pela órbita de  $\alpha(s_{i_j})$  até  $\alpha(s_{i_{j+1}})$ . Isso decorre, pois

$$R(g_i)R(g_{i+1}) = R(g_i + g_{i+1}).$$

Além disso temos que o termo constante é  $(-1)^n 2C(L)$ , Dos Santos e Pinto de Carvalho calculam apenas esse termo e observam que em  $\mathbb{H}^2$  esse termo não pode ser igual a  $\pm 2$  e portanto o polinômio não é constante. Todavia em  $\mathbb{S}_+^2$  é possível ter o termo constante igual a  $\pm 2$ , por isso se fez necessário obter uma maneira de determinar os outros coeficientes.

Como consequência dos resultados acima temos:

**Teorema A.** *Genericamente os bilhares ovais em superfícies de curvatura constante possuem um número finito de órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas.*

### 5.1.2 Frentes Focalizadoras e Transversalidade

No caso planar o Teorema de Poincaré-Birkhoff e o critério Mackay-Meiss nos garantem a existência de pelo menos uma órbita  $n$ -periódica hiperbólica, com  $n \geq 2$ . No intuito de provar o teorema B, queremos estudar a transversalidade de tais órbitas. Para isso usamos o conceito de frentes focalizadoras e campos de Jacobi.

**Definição 31.** *Seja  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$  uma oval e  $T_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega$  a aplicação Twist associada. Um feixe de raios com ponto base  $(s_0, \theta_0) \in \Omega$  é uma curva  $C^1$*

$$\zeta : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \Omega \quad , \quad \zeta(0) = (s_0, \theta_0).$$

Com  $\epsilon_0 > 0$ .  $\zeta'(0)$  é chamado de span do feixe.

Seja  $\gamma$  uma geodésica de  $S$ . Um campo de Jacobi em  $\gamma$  é um campo vetorial  $J(t)$  definido em  $\gamma$  tal que

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + K \gamma' = 0.$$

Onde  $K$  é a curvatura de  $S$ . Observamos que uma frente de raios induz um campo de Jacobi. Dado um feixe  $\zeta(\epsilon) = s(\epsilon), \theta(\epsilon)$ ,  $|\epsilon| < \epsilon_0$  considere a variação geodésica

$$F(\epsilon, t) = \exp_{p(\epsilon)} t \cdot n(\epsilon)$$

onde

$$p(\epsilon) = \alpha \left( s \left( \frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|} \right) \right)$$



e  $n(\epsilon)$  é o vetor unitário na direção da geodésica no ponto  $p(\epsilon)$  e na direção  $\theta(\epsilon)$ . A princípio poderíamos definir sem o termo  $\|\alpha'(s_0)\|$ , porém isso faria a frente depender da parametrização. A variação geodésica  $F$  vai definir o campo de Jacobi  $J(t)$  na geodésica  $\gamma$  definida por  $(s_0, \theta_0)$  dado pelas condições iniciais

$$J(0) = s'(0)\tau(0) \quad \text{e} \quad J'(0) = n'(0)$$

$\tau(\epsilon)$  é o tangente unitário em  $\alpha(s(\epsilon))$ . De fato temos que

$$\begin{aligned} F(\epsilon, t) &= \alpha\left(s\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right)\right) \cosh(t) + n(\epsilon) \sinh(t) && \text{em } \mathbb{H}^2, \\ F(\epsilon, t) &= \alpha\left(s\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right)\right) \cos(t) + n(\epsilon) \sin(t) && \text{em } \mathbb{S}_+^2, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} &= \alpha'\left(s\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right)\right) s'\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right) \frac{\cosh(t)}{\|\alpha'(s_0)\|} + n'(\epsilon) \sinh(t) && \text{em } \mathbb{H}^2, \\ \frac{\partial F(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} &= \alpha'\left(s\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right)\right) s'\left(\frac{\epsilon}{\|\alpha'(s_0)\|}\right) \frac{\cos(t)}{\|\alpha'(s_0)\|} + n'(\epsilon) \sin(t) && \text{em } \mathbb{S}_+^2. \end{aligned}$$

Em ambos os casos temos

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial \epsilon} = s'(0)\tau(0).$$

Além disso temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial F(0, t)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{t=0} &= (s'(0)\tau(0) \sinh(t) + n'(0) \cosh(t)) \Big|_{t=0} = n'(0) \\ &\text{para o plano hiperbólico.} \\ \bullet \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial F(0, t)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{t=0} &= (-s'(0)\tau(0) \sin(t) + n'(0) \cos(t)) \Big|_{t=0} = n'(0) \\ &\text{para a semiesfera.} \end{aligned}$$

Como mostra a proposição seguinte o campo de Jacobi induzido depende apenas da parte linear do feixe de raios.

**Proposição 32.** *Dado um feixe de raios  $\zeta(\epsilon) = (s(\epsilon), \theta(\epsilon))$ . Se  $\theta'(0) = b$  e  $s'(0) = a$  então  $\|n'(0)\| = |b - a\kappa_g(s_0)|$ .*

*Demonstração.* Seja  $\tau(\epsilon)$  o tangente unitário em  $\alpha(\epsilon)$ . Note que

$$n(\epsilon) = \sin(\theta(\epsilon))\tau(s(\epsilon)) + \cos(\theta(\epsilon))\tau(s(\epsilon))^\perp$$

logo temos que

$$\begin{aligned} n'(\epsilon) &= \theta'(\epsilon) \cos(\theta(\epsilon))\tau(s(\epsilon)) + \cos(\theta(\epsilon))(\tau(s(\epsilon))^\perp)' \\ &\quad + \sin(\theta(\epsilon))(\tau(s(\epsilon)))' - \theta'(\epsilon) \sin(\theta(\epsilon))\tau(s(\epsilon))^\perp \end{aligned}$$

lembramos que  $\tau'(s(\epsilon)) = s'(\epsilon)\kappa_g(s(\epsilon))\tau(s(\epsilon))^\perp$  e que  $(\tau(\epsilon)^\perp)' = -\kappa_g(\epsilon)\gamma'(\epsilon)$ . Com isso temos

$$\begin{aligned} n'(0) &= (b - ak_g(s_0) \cos \theta_0 \tau(s_0) + (ak_g(s_0) - b) \sin \theta_0 \tau(s_0))^\perp \\ &= (b - ak_g(s_0))(\cos \theta_0 \tau(s_0) - \sin \theta_0 \tau(s_0)^\perp) = (b - ak_g(s_0))n^\perp(s_0) \end{aligned}$$

□

Tal campo não é necessariamente normal a trajetória. O campo será normal se, e somente se,  $J(0)$  e  $J'(0)$  são ortogonais a trajetória. Logo o campo de Jacobi ortogonal dado pelo feixe é dado pelas condições iniciais  $J^\perp(0) = s'(0) \sin(\theta_0)n^\perp(0)$  e  $J^\perp = n'(0)$ , pois  $n'(0)$  já é ortogonal à trajetória.

**Definição 33.** *Dado um feixe de raios como na proposição 32 e seja  $J^\perp$  o campo de Jacobi ortogonal associado. Quando existir  $t_0$  tal que  $J^\perp(t_0) = 0$ , chamamos  $t_0$  de distância de focalização e  $\gamma(t_0)$  o ponto de focalização.*

Dado um feixe de raios como na proposição 32. Como os campos de Jacobi em  $\mathbb{H}^2$  são dados por

$$J(t) = J(0) \cosh t + J'(0) \sinh t$$

e logo  $J(t) = 0$  se, e somente se,

$$\tanh t = -\frac{J(0)}{J'(0)} = -\frac{a \sin \theta_0}{b - ak_g} = \frac{\sin \theta_0}{k_g - \frac{b}{a}}$$

Observamos que nem sempre haverá um ponto de focalização. Isso ocorre pois a curvatura de  $\mathbb{H}^2$  faz com que as geodésicas se afastem. Neste caso existe mais de uma frente paralela.

Para  $\mathbb{S}_+^2$  temos contas análogas, porém lembramos que os campos de Jacobi em  $\mathbb{S}_+^2$  são dados por

$$J(t) = J(0) \cos t + J'(0) \sin t$$

e logo  $J(t) = 0$  se, e somente se,

$$\tan t = -\frac{J(0)}{J'(0)} = -\frac{a \sin \theta_0}{b - ak_g} = \frac{\sin \theta_0}{k_g - \frac{b}{a}}$$

Nesse caso as frentes sempre focalizarão, novamente isso ocorre devido a curvatura de  $\mathbb{S}_+^2$ , de fato sempre vão existir dois pontos de focalização, devem ser antípodais.

Dado um feixe de raios em  $(s_0, \theta_0)$  queremos definir um campo de Jacobi ortogonal em toda a órbita de  $(s_0, \theta_0)$ . Para isso vamos precisar definir a evolução ao colidir com a fronteira da mesa. Suponhamos que temos um campo de Jacobi ortogonal definido em uma trajetória chegando em  $\alpha(s_0)$  com ângulo  $\theta_0$  definindo uma variação geodésica  $F(\epsilon, t) = \exp_{\alpha(s_0+\epsilon)} t \cdot n(\epsilon)$ , então campo refletido vai ser definido por

$$F(\epsilon, t) = \exp_{\alpha(s_0-\epsilon)} t \cdot \tilde{n}(-\epsilon), \text{ onde } \tilde{n}(\epsilon) = n(\epsilon) + 2 \sin \theta(\epsilon) \tau^\perp$$

O campo de Jacobi  $\tilde{J}$  após a reflexão é dado por  $\tilde{J}(0) = -a \sin(\theta_0)$  e  $\tilde{J}' = -\tilde{n}'(0)$ .

Logo temos que

$$\tilde{n}'(0) = n'(0) + 2b \cos \theta_0 \tau^\perp - 2ak_g \sin \theta_0 \tau.$$

Além disso  $\tilde{n}^\perp = n^\perp - 2 \cos(\theta_0) \tau^\perp$  e pela proposição 32 temos  $n'(0) = (b - ak_g)n^\perp$  e portanto

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}'(0), \tilde{n}^\perp \rangle &= (b - ak_g) + 2b \cos^2 \theta_0 - 2ak_g \sin^2 \theta_0 \\ &\quad + 2(b - ak_g) \cos^2 \theta_0 - 4b \cos^2 \theta_0 \\ &= (b - ak_g) - 2ak_g = J(0) - \frac{2k_g}{\sin \theta_0} J'(0). \end{aligned}$$

Finalmente o seguinte lema conclui a prova do Teorema B.

**Lema 34.** *Seja  $\alpha$  de classe  $C^2$  possuindo apenas órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas, para cada  $n$  natural. E seja  $(s_1, \theta_1), (s_2, \theta_2)$  pontos periódicos hiperbólicos de  $\alpha$  tais que  $W^s(s_1, \theta_1)$  e  $W^u(s_2, \theta_2)$  possuem uma interseção tangente em  $(s_0, \theta_0)$ . Então existe  $\beta$  próxima de  $\alpha$  tal que  $(s_0, \phi_0)$  é uma órbita de  $\text{homo} \setminus \text{heteroclínica transversa}$ .*

*Demonstração.* Seja  $I \subset \mathbb{S}^1$  tal que  $I$  contenha apenas o ponto em  $s_0$  e mais nenhum ponto de sua órbita e das órbitas de  $O(s_1, \theta_1), O(s_2, \theta_2)$ , i.e.,  $I \cap \pi_s(O(s_0, \theta_0)) = \{s_0\}$ ,  $I \cap \pi_s(O(s_1, \theta_1)) = \emptyset = I \cap \pi_s(O(s_2, \theta_2))$ , onde  $\pi_s$  é a projeção na primeira coordenada. Tal conjunto existe pois  $T^{in+j}(s_0, \phi_0) \rightarrow_i T^j((s_1, \phi_1))$  e  $T^{-in+j}(s_0, \phi_0) \rightarrow_i T^j((s_2, \phi_2))$ . Seja  $v^{tan}$  o vetor de tangência em  $(s_0, \phi_0)$  e  $v^s = DT_{(s_0, \phi_0)} v$ ,  $v^u = DT_{(s_0, \phi_0)}^{-1} v$ , como mostra a figura abaixo. Seja  $J_\alpha^u, J_\alpha^s$  o campo de Jacobi Ortogonal definido, respectivamente, por  $v^u$  na trajetória  $(S^{-1}(s_0, \theta_0), s_0)$  e  $v^s$  na trajetória  $(s_0, S(s_0, \theta_0))$ . Observamos que

$$J_\alpha^s = R_\alpha J_\alpha^u,$$

de fato  $J^u$  é igual ao campo  $J_\alpha^-$  definido por  $v$  na trajetória  $(s_0, S^{-1}(s_0, \theta_0))$  e  $J_\alpha^s$  é igual ao campo  $J^+$  definido por  $v$  na trajetória  $(s_0, S(s_0, \theta_0))$ . Agora seja  $\beta(t) = \exp_{(\alpha(t))} \lambda(t) n(t)$ , tal que  $\lambda(t) = 0$  para todo  $t \notin I$  e  $\lambda(s_0) = \lambda'(s_0) = 0$  e  $|\lambda''(s_0)| = \epsilon$  para algum  $\epsilon$  positivo. Temos que as órbitas de  $(s_i, \theta_i)$ , mais ainda, os vetores  $v^u$  e  $v^s$  não mudaram, de fato a aplicação  $T_\alpha = T_\beta$  para todo ponto que permanesse fora de  $I \times (0, \pi)$ . Portanto  $J_\alpha^u = J_\beta^u$  e  $J_\alpha^s = J_\beta^s$ , além disso temos  $J_\beta^+ = J_\beta^s$ , onde  $J^+$  definido por  $DT_\beta^{-1} v^s$  na trajetória  $(s_0, S(s_0, \theta_0))$  e

$$J_\beta^- = R_\beta J_\beta^u$$

$J^-$  definido por  $DT_\beta v^u$  na trajetória  $(s_0, S(s_0, \theta_0))$  e logo  $J^+ \neq J^-$  e com isso  $DT_\beta v^u \neq DT_\beta^{-1} v^s$ .  $\square$

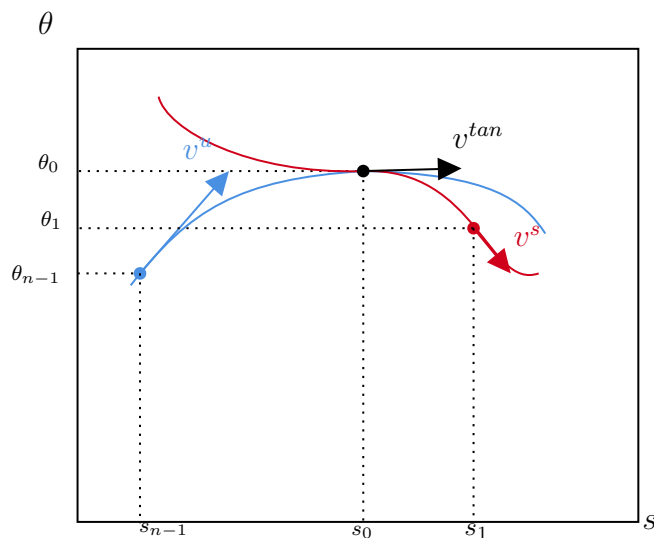


Figura 5.1: Frentes definidas a partir das variedades estável e instável

## 5.2 Diâmetros Elípticos

O Teorema de Poincaré-Birkhoff nos garante a existência de pelo menos duas órbitas 2-periódicas, que chamaremos de diâmetro. A maior, quando isolada, será sempre hiperbólica, porém a outra pode ser tanto uma órbita hiperbólica quanto elíptica. Para garantir a existência de ilhas elíticas a ideia principal é colocar a Aplicação de Biliar na Forma Normal de Birkhoff e mostrar que genericamente o primeiro coeficiente de Birkhoff é não nulo e utilizar o Teorema Twist de Moser para garantir a existência de ilhas elíticas. Enunciamos abaixo uma versão simplificada desses teoremas.

**Teorema 35.** *Se  $f$  é um difeomorfismo  $C^4$  que preserva área em uma vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $0$  é um ponto fixo elíptico não degenerado, e seja  $\lambda = e^{i\gamma}$  um dos autovalores de  $Df(0)$ , ainda se  $\lambda^n \neq 1$  para  $n = 1, 2, 3, 4$  (chamada de condição de não-ressonância). Então existe um difeomorfismo  $h$  em uma vizinhança do  $0$ , que preserva área tal que em coordenadas complexas temos*

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = (\lambda z e^{i\gamma P(z\bar{z})} + O(|z|^3))$$

Com  $P(x) = \tau_1 x$ ,  $\tau_1$  é o primeiro coeficiente de Birkhoff da função  $f$ . Além disso se  $\tau_1 \neq 0$  então suficientemente próximo da origem,  $f$  tem um conjunto de curvas fechadas e invariantes com medida de Lebesgue positiva. Temos ainda medida do complementar deste conjunto tende a zero quando o medida da vizinhança se aproxima do zero, nesse caso dizemos que o ponto fixo elíptico é Moser estável.

Observamos que o Teorema C não afirma que genericamente um bilhar possui diâmetro elíptico, mas sim que se possuir um diâmetro elíptico genericamente ele é Moser

estável. Para provar o Teorema C, primeiramente provamos que ter diâmetro elíptico é uma propriedade aberta e portanto o conjunto de bilhares com diâmetro elíptico é Baire, observamos que  $\gamma$  pode ser obtida através do traço de  $Df(0)$  e com isso conseguimos perturbar um diâmetro elíptico para garantir a condição de não ressonância e por fim perturbamos para garantir que o primeiro Coeficiente de Birkhoff,  $\tau_1$  é não nulo, para isso usamos computação algébrica para obter uma expressão algébrica da forma

$$\tau_1 = f(L, \kappa_0, \kappa_1, \kappa'_0, \kappa'_1) + g(L, \kappa_0, \kappa_1)\kappa''_0 + g(L, \kappa_1, \kappa_0)\kappa''_1. \quad (5.2)$$

O caso de curvatura nula já tinha sido obtido em Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst, e Pinto de Carvalho [7]. Obtemos

$$g(L, \kappa_0, \kappa_1) = -\frac{1}{8} \frac{S(L)(S(L) - C(L)/\kappa_1)}{(S(L) - C(L)/\kappa_0)(S(L) - C(L)/\kappa_0 - C(L)/\kappa_1 - KS(L)/(\kappa_0\kappa_1))}. \quad (5.3)$$

Onde  $S(L)$  e  $G(L)$  são como (4.3) e  $K$  é a curvatura.

### 5.2.1 Diâmetro Elíptico e Não Ressonância

Dada  $\alpha$  uma oval de classe  $C^2$ , se  $s_0$  e  $s_1$  é um diâmetro para  $\alpha$ , temos que

$$\{(s_0, \pi/2), (s_1, \pi/2)\}$$

formam uma órbita 2-periódica. Utilizando 5.1 obtemos:

$$\text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right) = 2(C(2g) - S(2g)((\kappa_0 + \kappa_1) + 2S(g)\kappa_0\kappa_1))$$

onde  $g$  é a distância entre  $\alpha(s_0)$  e  $\alpha(s_1)$ . Se  $\alpha$  é tal que  $\text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right) < 2$ . Como o diâmetro elíptico quando isolado é um mínimo local para  $g$  então para qualquer curva  $\beta$  suficientemente próxima de  $\alpha$ , temos que tal órbita é elíptica e com isso temos:

**Lema 36.** *O conjunto dos bilhares ovais com diâmetro elíptico é aberto e consequentemente Baire.*

Além disso temos que os autovalores de  $DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2$  são

$$e^{\pm i\gamma} = \frac{\text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right)}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{\left( \text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right) \right)^2}{4}}$$

Com isso temos que

$$\cos \gamma = \frac{\text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right)}{2}$$

então a condição de não ressonância do Teorema 35 pode reescrita como

$$\text{tr} \left( DT_{\alpha(s_0, \pi/2)}^2 \right) \notin \{0, -1\}$$

realizando uma perturbação como 4.2 que pelo Corolário 23 concluímos

**Proposição 37.** *Um bilhar oval com diâmetro elíptico ressonante pode ser aproximado por um bilhar oval com diâmetro elíptico não ressonante.*

## 5.2.2 O Primeiro Coeficiente de Birkhoff

Para calcularmos o primeiro coeficiente de Birkhoff, precisamos primeiramente considerar a Aplicação de Bilhar em coordenadas que preserve a medida de Lesbesgue, ou seja, tomamos  $p = \cos \theta$ , além disso a menos de realizar uma reparametrização, podemos supor que  $s_0 = 0$ . Após precisamos expandir  $T^2$  no polinômio de Taylor de grau 3 em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , i.e.

$$T^2(s, p) = \left( \sum_{i+j=1}^3 a_{ij} s^i p^j, \sum_{i+j=1}^3 b_{ij} s^i p^j \right) + \mathcal{O}(|(s, p)|^4).$$

Utilizando uma mudança de coordenadas complexa, obtemos que  $T^2$  pode ser representado como

$$z \mapsto e^{i\gamma} \left( \sum_{i+j=1}^3 c_{ij} z^i \bar{z}^j \right) + \mathcal{O}(|z|^4)$$

e pode ser mostrado que o primeiro coeficiente de Birkhoff  $\tau_1$ , pode ser obtido através de  $\gamma$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{20}$  e  $c_{02}$  ([13, 18, 20]). Com o auxílio do software *MAPLE*, podemos realizar uma computação algébrica e obter a expressão (5.3). No apêndice A se encontra a transcrição do código.

**Lema 38.** *Um bilhar oval  $C^5$  com diâmetro elíptico não ressonante pode ser aproximado por um bilhar oval cujo o primeiro coeficiente de Birkhoff é não nulo.*

*Demonstração.* Dado  $\alpha$  uma curva oval  $C^5$  com diâmetro elíptico não ressonante, como  $g(L, \kappa_0, \kappa_1)$  é sempre diferente de zero, tomamos

$$\beta(t) := \exp_{\alpha(t)} \lambda(t)V(t)$$

com  $V$  um campo unitário de classe  $C^\infty$  igual ao vetor normal unitário em  $\alpha(s_0)$  e  $\lambda$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\lambda^{(n)}(s_0) = 0$  para  $n = 0, 1, 2, 3$  e  $\lambda^{(4)}(s_0) \neq 0$ , com isso vamos obter uma curva  $\beta$  tal que a órbita 2-periódica se mantém igual, assim como  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa'_0, \kappa'_1$ , mas  $\kappa''_{\beta_0} = \kappa''_{\alpha_0} + \epsilon$  e portanto

$$\tau_1(\beta) = \tau_1(\alpha) + g(L, \kappa_0, \kappa_1)\epsilon$$

□

Como consequência de (5.2) temos que ter o primeiro Coeficiente de Birkhoff diferente de zero é uma propriedade aberta na topologia  $C^5$ . Por último observamos que o conjunto ovais  $C^5$  é denso e portanto obtemos

**Teorema C.** *Possuir uma órbita 2-periódica elíptica é uma propriedade aberta e genericamente essas órbitas são não degeneradas e não ressonantes para bilhares ovais. Além disso qualquer bilhar oval com uma 2-periódica elíptica pode ser aproximado por um bilhar oval com uma órbita 2-periódica elíptica com ilhas elípticas.*

**Corolário 39.** *Bilhares ovais com ilhas elípticas é uma propriedade genérica se considerarmos a topologia  $C^5$ .*

### 5.3 Propriedades Genéricas para Bilhares Convexos no Plano Euclidiano, Plano Hiperbólico e Semiesfera.

Na década de 80, Stojanov e Pekovt estudam propriedades genéricas para bilhares em  $\mathbb{R}^n$ , em particular [22] prova que genericamente uma órbita  $n$ -periódica não colide múltiplas vezes em um mesmo ponto com ângulos distintos, isto é, não há batida múltipla. Al'ém disso duas órbitas  $n$ -periódicas distintas não possuem pontos de colisão em comum. Em 2015 [25] estende esse resultado para a esfera e em 2017 [1] para o plano hiperbólico. A topologia usada nesses trabalhos é a topologia de Whitney  $C^\infty$ , utilizando essa topologia juntamente com os resultados de [7, 8], [11] e o presente trabalho é possível enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 40.** *Genericamente para bilhares ovais no plano euclidiano, plano hiperbólico e semiesfera podemos garantir as seguintes propriedades:*

1. *Possuem um número finito de órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas e pelo menos uma delas é hiperbólica;*
2. *nenhuma trajetória periódica colide múltiplas vezes em um mesmo ponto com ângulos distintos. Ainda mais, duas órbitas distintas de mesmo período não têm pontos em comum;*
3. *as variedades estáveis e instáveis de dois pontos periódicos hiperbólicos ou não possuem interseção ou possuem pelo menos uma interseção transversa;*
4. *se possuir uma órbita 2-periódica elíptica ela deve possuir ilhas elípticas.*

# Apêndice A

## Computação algébrica

Indicamos aqui o código criado no Maple 2015.

### A.0.1 Derivada

Nesse primeiro código obtemos a derivada em termos do diâmetro e de  $R_i = 1/\kappa_i$ . No código seguinte utilizamos o código anterior para obter 3-jato e o termo que depende da derivada segunda da curvatura.



T: billiard map on a surface of constant curvature  
 canonical variables:

s: arclength

p= sin(theta) tangencial momentum - theta angle with inward normal

Calculus of the billiard map derivatives up to order 3 and the 3-jet of ToT for a 2-periodic orbit  $T(0,0) = (s[1],0)$ ,  $ToT(0,0) = (0,0)$

```
> restart:readlib(mtaylor):
```

R2: Plane

```
> #G:=x->x:DG:=x->1:C:=0:
plano:=G(L)=L,D(G)(L)=1,(D@D)(G)(L)=0,`@@`(D,2)(G)(L)=0, C=0:
```

H2: Hiperbolic Plane

```
> #G:=x->sinh(x):DG:=x->cosh(x):
hip:=G(L)=sinh(L),D(G)(L)=cosh(L),(D@D)(G)(L)=sinh(L),`@@`(D,2)
(G)(L)=sinh(L),C=-1:
```

S2: Semi sphere

```
> #G:=x->sin(x):DG:=x->cos(x):
esf:=G(L)=sin(L),D(G)(L)=cos(L),(D@D)(G)(L)=-sin(L),`@@`(D,2)(G)
(L)=-sin(L),C=1:
> superficie:=plano:
```

$T(s,p) = (S(s,p),P(s,p))$

l: geodesic distance,

k: geodesic curvature of the boundary and define  $r = 1/k$

Initial conditions

```
> CI := l(0,0) = L, S(0,0) = s[1], P(0,0) = 0, l(s[1],0) = L, S(s
[1],0) = 0, P(s[1],0) = 0, R(s[1]) = r[1], Theta(0) = 0,
R(0) = r[0]:
```

derivatives of the geodesic distance  $l(s[0],s[1])$  (uses that  $P(0,0)=0$ )

```
> CD1 := D[1](1)(0,0) = 0, D[2](1)(0,0) = 0, D[1](1)(s[1],0) = 0, D
[2](1)(s[1],0) = 0, D(Theta)(0) = 1:
```

```
> CD2 :=
D[1,1](1)(0,0) = D[1](P)(0,0)*D[1](S)(0,0),
D[2,2](1)(0,0) = D[2](P)(0,0)*D[2](S)(0,0),
D[1,2](1)(0,0) = D[1](P)(0,0)*D[2](S)(0,0),
D[1,1](1)(s[1],0) = D[1](P)(s[1],0)*D[1](S)(s[1],0),
D[2,2](1)(s[1],0) = D[2](P)(s[1],0)*D[2](S)(s[1],0),
D[2,1](1)(s[1],0) = D[1](P)(s[1],0)*D[2](S)(s[1],0):
```

General form of DT for a surface of constant curvature

```
> aa:=(x,y)->(G(l(x,y))-D(G)(l(x,y))*R(x)*cos(Theta(y)))/(R(x)*cos
(Theta(P(x,y))));
dd:=(x,y)->(G(l(x,y))-D(G)(l(x,y))*R(S(x,y))*cos(Theta(P(x,y))))/
```

```

(R(S(x,y))*cos(Theta(y)));
bb:=(x,y)->-G(l(x,y))/(cos(Theta(P(x,y)))*cos(Theta(y)));
cc:=(x,y)->
  -1/(R(S(x,y))*R(x))*(G(l(x,y))
-R(x)*D(G)(l(x,y))*cos(Theta(y))
-R(S(x,y))*D(G)(l(x,y))*cos(Theta(P(x,y)))
-C*G(l(x,y))*(R(S(x,y))*R(x))*cos(Theta(P(x,y)))*cos(Theta(y)));

```

```

> eq1:=D[1](S)(0,0)=eval(subs(CI,aa(0,0))):
> eq2:=D[2](S)(0,0)=eval(subs(CI,bb(0,0))):
> eq3:=D[1](P)(0,0)=eval(subs(CI,cc(0,0))):
> eq4:=D[2](P)(0,0)=eval(subs(CI,dd(0,0))):
> eqns10:=eq1,eq2,eq3,eq4;

```

First derivatives at (s1,0)

```

> eq5:=D[1](S)(s[1],0)=eval(subs(CI,aa(s[1],0))):
> eq6:=D[2](S)(s[1],0)=eval(subs(CI,bb(s[1],0))):
> eq7:=D[1](P)(s[1],0)=eval(subs(CI,cc(s[1],0))):
> eq8:=D[2](P)(s[1],0)=eval(subs(CI,dd(s[1],0))):
> eqns11:=eq5,eq6,eq7,eq8;

```

Second order derivatives (first order derivatives of a,b,c,e)

```

> eq10:=D[1,1](S)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[1](aa)(0,0))):
> eq11:=D[2,1](S)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[2](aa)(0,0))):
> eq12:=D[2,2](S)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[2](bb)(0,0))):
> eq13:=D[1,1](P)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[1](cc)(0,0))):
> eq15:=D[2,1](P)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[2](cc)(0,0))):
> eq16:=D[2,2](P)(0,0)=eval(subs(eqns10,CD1,CI,D[2](dd)(0,0))):
> eqns20:=eq10,eq11,eq12,eq13,eq15,eq16;

```

```

> eq17:=D[1,1](S)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[1](aa)(s[1],0))):
> eq18:=D[2,1](S)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[2](aa)(s[1],0))):
> eq19:=D[2,2](S)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[2](bb)(s[1],0))):
> eq20:=D[1,1](P)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[1](cc)(s[1],0))):
> eq21:=D[2,1](P)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[2](cc)(s[1],0))):
> eq22:=D[2,2](P)(s[1],0)=eval(subs(eqns11,CI,CD1,D[2](dd)(s[1],0))):

```

```

)):
> eqns21:=eq17,eq18,eq19,eq20,eq21,eq22:
Third order derivatives (second order derivatives of a,b,c,e)
> eq23:=D[1,1,1](S)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CI,CD1,CD2,D
[1,1](aa)(0,0))))):
eq24:=D[2,1,1](S)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,1](aa)(0,0))))):
> eq25:=D[2,2,1](S)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,2](aa)(0,0))))):
> eq26:=D[2,2,2](S)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,2](bb)(0,0))))):
> eq27:=D[1,1,1](P)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[1,1](cc)(0,0))))):
> eq28:=D[2,1,1](P)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,1](cc)(0,0))))):
> eq29:=D[2,2,1](P)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,2](cc)(0,0))))):
> eq30:=D[2,2,2](P)(0,0)=subs(eqns20,eqns10,eval(subs(CD2,CD1,subs
(CI,D[2,2](dd)(0,0))))):
> eqns30:=eq23,eq24,eq25,eq26,eq27,eq28,eq29,eq30:
> eq31:=D[1,1,1](S)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[1,1](aa)(s[1],0))))):
> eq32:=D[2,1,1](S)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,1](aa)(s[1],0))))):
> eq33:=D[2,2,1](S)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,2](aa)(s[1],0))))):
> eq34:=D[2,2,2](S)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,2](bb)(s[1],0))))):
> eq35:=D[1,1,1](P)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[1,1](cc)(s[1],0))))):
> eq36:=D[2,1,1](P)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,1](cc)(s[1],0))))):
> eq37:=D[2,2,1](P)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,2](cc)(s[1],0))))):
> eq38:=D[2,2,2](P)(s[1],0)=subs(eqns11,eqns21,eval(subs(CD1,CD2,
subs(CI,D[2,2](dd)(s[1],0))))):
> eqns31:=eq31,eq32,eq33,eq34,eq35,eq36,eq37,eq38:
The 3-jet of ToT at (0,0)
> alias(s[2] = S(S(s[0],p[0]),P(s[0],p[0])),p[2] = P(S(s[0],p[0]),P
(s[0],p[0]))):
> S2:=convert(subs(eqns31,eqns30,eqns21,eqns20,eqns11,eqns10,subs
(CI,mtaylor(s[2],[s[0],p[0]],4))),polynom):

```

```
> P2:=convert(subs(eqns31,eqns30,subs(eqns21,eqns20,subs(eqns11,
  eqns10,subs(CI,
  mtaylor(p[2],[s[0],p[0]],4)
  ))),polynom):
```

```
> A[1,0]:=coeff(coeff(S2,s[0],1),p[0],0);
> A[0,1]:=coeff(coeff(S2,s[0],0),p[0],1);
> B[1,0]:=coeff(coeff(P2,s[0],1),p[0],0);
> B[0,1]:=coeff(coeff(P2,s[0],0),p[0],1);
```

Check area preserving - order 1

```
> simplify(subs(superficie,A[1,0]*B[0,1]-A[0,1]*B[1,0]));
```

Second order terms

```
> A[2,0]:=coeff(coeff(S2,s[0],2),p[0],0);
> A[1,1]:=coeff(coeff(S2,s[0],1),p[0],1);
> A[0,2]:=coeff(coeff(S2,s[0],0),p[0],2);
> B[2,0]:=coeff(coeff(P2,s[0],2),p[0],0);
> B[1,1]:=coeff(coeff(P2,s[0],1),p[0],1);
> B[0,2]:=coeff(coeff(P2,s[0],0),p[0],2);
```

Check order preserving - order 2

```
> simplify(subs(superficie,
  A[1,0]*B[1,1]+2*A[2,0]*B[0,1]-2*A[0,1]*B[2,0]-A[1,1]*B[1,0]));
```

order 3 - terms

```
> A[3,0]:=coeff(coeff(S2,s[0],3),p[0],0);
> A[2,1]:=coeff(coeff(S2,s[0],2),p[0],1);
> A[1,2]:=coeff(coeff(S2,s[0],1),p[0],2);
> A[0,3]:=coeff(coeff(S2,s[0],0),p[0],3);
```

```
> B[3,0]:=coeff(coeff(P2,s[0],3),p[0],0);
> B[2,1]:=coeff(coeff(P2,s[0],2),p[0],1);
> B[1,2]:=coeff(coeff(P2,s[0],1),p[0],2);
> B[0,3]:=coeff(coeff(P2,s[0],0),p[0],3);
```

coefficients of  $R''$  in the 3 order terms

$R''(0)$

```
> k2a[3,0,0]:=coeff(A[3,0],(D@D)(R)(0));
> k2a[2,1,0]:=coeff(A[2,1],(D@D)(R)(0));
> k2a[1,2,0]:=coeff(A[1,2],(D@D)(R)(0));
> k2a[0,3,0]:=coeff(A[0,3],(D@D)(R)(0));
```

```
> k2b[3,0,0]:=coeff(B[3,0],(D@D)(R)(0));
```

```
> k2b[2,1,0]:=coeff(B[2,1],(D@D)(R)(0));  
> k2b[1,2,0]:=coeff(B[1,2],(D@D)(R)(0));  
> k2b[0,3,0]:=coeff(B[0,3],(D@D)(R)(0));
```

$R''(1)$

```
> k2a[3,0,1]:=coeff(A[3,0],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2a[2,1,1]:=coeff(A[2,1],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2a[1,2,1]:=coeff(A[1,2],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2a[0,3,1]:=coeff(A[0,3],(D@D)(R)(s[1])):
```

```
> k2b[3,0,1]:=coeff(B[3,0],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2b[2,1,1]:=coeff(B[2,1],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2b[1,2,1]:=coeff(B[1,2],(D@D)(R)(s[1])):  
> k2b[0,3,1]:=coeff(B[0,3],(D@D)(R)(s[1])):
```

simplify the 3-jet of ToT from the file 0-derivatives (only terms in R") to obtain tau

We have  $(s_2, p_2) = T^2 (s_0, p_0)$  and the Taylor coefficients of  $s_2$  and  $p_2$  with respect to  $s_0$  and  $p_0$  at  $(0,0)$  up to third order are defined by

$$s_2(s_0, p_0) = a_{1,0}s_0 + a_{0,1}p_0 + a_{2,0}s_0^2 + a_{1,1}s_0p_0 + a_{0,2}p_0^2 + a_{3,0}s_0^3 + a_{2,1}s_0^2p_0 + a_{1,2}s_0p_0^2 + a_{0,3}p_0^3$$

$$p_2(s_0, p_0) = b_{1,0}s_0 + b_{0,1}p_0 + b_{2,0}s_0^2 + b_{1,1}s_0p_0 + b_{0,2}p_0^2 + b_{3,0}s_0^3 + b_{2,1}s_0^2p_0 + b_{1,2}s_0p_0^2 + b_{0,3}p_0^3$$

```
> restart:
plano:=G(L)=L,D(G)(L)=1,C=0:
hip:=G(L)=sinh(L),D(G)(L)=cosh(L),C=-1:
esf:=G(L)=sin(L),D(G)(L)=cos(L),C=1:
superficie:=plano:
```

### Linear Terms (s and p)

```
> sa[1,0]:= (G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])+
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]*r
[0]):
> sa[0,1]:=-2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]:
> sb[1,0]:=-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*
(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0]^2):
sb[0,1]:= (G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])+
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]*r
[0]):
```

diagonal terms are equal

```
> simplify(sa[1,0]-sb[0,1]):
determinant = 1
> DET:=factor(simplify(sa[1,0]*sb[0,1]-sa[0,1]*sb[1,0])):
> simplify(subs(plano,D(G)(L)^2+C*G(L)^2)):
simplify(subs(esf,D(G)(L)^2+C*G(L)^2)):
simplify(subs(hip,D(G)(L)^2+C*G(L)^2)):
> define_det:=D(G)(L)^2=1-C*G(L)^2:
```

trace is 4A-2 with A=B+1

```
> A:=((G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1]))/(r[1]*r[0]):
det:=(D(G)(L)^2+C*G(L)^2): # = 1!!!!
simplify(4*A-2*det-2*sa[1,0]):
```

```
> B:=factor(subs(define_det,(expand(A))-1)):
```

this term appears a lot

```

> XX:=(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])+G(L)*(G(L)-D(G)(L)*
r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]):
> a[1,0]:=sa[1,0]:a[0,1]:=sa[0,1]:b[1,0]:=sb[1,0]:b[0,1]:=sb[0,1]
:

```

## Quadratic Terms

S\_2

ss

```

> sa[2,0]:=1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r
[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))/(r[0]^2)+1/2*
(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r
[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))/r[1]-1/2*G(L)*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r
[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D
(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s
[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0]))
:
> a[2,0] := 1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r
[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))/(r[0]^2)+1/2*
(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r
[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))/r[1]-1/2*G(L)*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r
[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D
(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s
[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0]))
:
simplify(sa[2,0]-a[2,0]):

```

sp

```

> sa[1,1]:= subs(superficie,-G(L)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])-
(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])/(r[1]*r

```

```
[0]))-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-
D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1]/(r[1]^2))*G(L)/r[0]):
```

```
> pa[1,1] := L*(-D(R)(s[1])*L/(r[0]*r[1])-(L-r[0]-r[1])*D(R)
(s[1])*L/(r[0]*r[1]^2))+(L-r[0])*(-D(R)(s[1])/r[1]-(L-r[1]
)*D(R)(s[1]/(r[1]^2))*L/r[0]:
simplify(sa[1,1]+pa[1,1]):
```

pp

```
> sa[0,2]:= subs(superficie,-1/2*(G(L)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*G
(L)/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2))
+1/2*(G(L)^2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*
D(R)(s[1]/(r[1]^2)))):
```

```
> pa[0,2] := 1/2*L*(-D(R)(s[1])*L/r[1]-(L-r[1])*D(R)(s[1])*
L/(r[1]^2))+1/2*L^2*(-D(R)(s[1])/r[1]-(L-r[1])*D(R)(s[1])/
(r[1]^2)):
simplify(sa[0,2]-pa[0,2]):
```

P\_2

ss

```
> sb[2,0] := subs(superficie,-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-(G(L)-D
(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r
[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/
(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])/(r[0]^2*r[1])+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2*((G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)
(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-
C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*D(R)
(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D
(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0])*D(R)(s[1]))/(r[0]*r
[1]))/(r[0]^2)-1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*
r[1]*r[0])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)
(0)/(r[0]^2))/(r[1]*r[0])+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r
[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D
(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))/(r[1]^2*r[0]^2)+1/2*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*
r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+
(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/
(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D
```



```

(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*
G(L)*r[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0])/r[0] ):
> pb[2,0] := 1/2*(L-r[0]-r[1])*(-D(R)(0)/r[0]-(L-r[0])*D(R)
(0)/(r[0]^2))/(r[0]*r[1])+1/2*(L-r[0])*((-D(R)(0)-D(R)(s
[1])*(L-r[0])/r[0])/(r[0]*r[1])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(0)/(r
[0]^2*r[1])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(s[1])*(L-r[0])/(r[0]^2*r[1]
^2))/r[0]+1/2*(L-r[0])^2*((-D(R)(s[1])-D(R)(0)*(L-r[1])/r
[1])/(r[1]*r[0])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2*r[0])-(
L-r[0]-r[1])*D(R)(0)*(L-r[1])/(r[1]^2*r[0]^2))/(r[0]^2
+1/2*(L-r[0]-r[1])^2*(-D(R)(0)*L/r[0]-(L-r[0])*D(R)(0)*L/
(r[0]^2))/(r[0]^2*r[1]^2)+(L-r[0])*(-D(R)(0)*L/(r[1]*r[0])
-(L-r[0]-r[1])*D(R)(0)*L/(r[1]*r[0]^2))*(L-r[0]-r[1])/(r
[0]^2*r[1]):
simplify(sb[2,0]+pb[2,0]):

sp
> sb[1,1] := subs(superficie,(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-(G(L)-D
(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r
[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/
(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]*r[1])+G(L)*(-(G(L)-
D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/
(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])
/(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*
r[0])/(r[1]*r[0])+G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]
-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r
[0])-(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])/(r
[1]*r[0]))/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/
(r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D
(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1]))/(r[0]*r[1]))*G
(L)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])
*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G
(L)/(r[0]^2))*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2*r[0]) ):
> pb[1,1] := (L-r[0])*(-D(R)(s[1])*L/(r[0]*r[1])-(L-r[0]-r
[1])*D(R)(s[1])*L/(r[0]*r[1]^2))/r[0]+(L-r[0])*((-D(R)(s
[1])-D(R)(0)*(L-r[1])/r[1])/(r[1]*r[0])-(L-r[0]-r[1])*D(R)
(s[1])/(r[1]^2*r[0])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(0)*(L-r[1])/(r[1]
^2*r[0]^2))*L/r[0]+(L-r[0])*(-D(R)(0)*L/(r[1]*r[0])-(L-r
[0]-r[1])*D(R)(0)*L/(r[1]*r[0]^2))*(L-r[1])/(r[0]*r[1])+L*
(-D(R)(0)*L/(r[1]*r[0])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(0)*L/(r[1]*r[0]

```

```

^2))*(L-r[0]-r[1])/(r[0]*r[1])+(L-r[0]-r[1])*(-D(R)(0)*L/r
[0]-(L-r[0])*D(R)(0)*L/(r[0]^2))*(L-r[1])/(r[0]*r[1]^2):
simplify(pb[1,1]-sb[1,1]):

```

pp

```

> sb[0,2] := subs(superficie,-G(L)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D
(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2*(D(G)(L)*
D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]
^2))/(r[1]^2)+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(G)(L)*D(R)(s[1])*
G(L)/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2))/r
[0]+1/2*G(L)^2*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])
/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-
D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[0]*D(R)(s[1]))/(r[0]*r[1])) ):

```

```

> pb[0,2] := 1/2*(L-r[0])*(-D(R)(s[1])*L/r[1]-(L-r[1])*D(R)
(s[1])*L/(r[1]^2))/r[0]+L*(-D(R)(0)*L/(r[1]*r[0])-(L-r[0]-
r[1])*D(R)(0)*L/(r[1]*r[0]^2))*(L-r[1])/r[1]+1/2*L^2*((-D
(R)(s[1])-D(R)(0)*(L-r[1])/r[1])/(r[1]*r[0])-(L-r[0]-r[1])
*D(R)(s[1])/(r[1]^2*r[0])-(L-r[0]-r[1])*D(R)(0)*(L-r[1])/
(r[1]^2*r[0]^2))+1/2*(L-r[1])^2*(-D(R)(0)*L/r[0]-(L-r[0])*
D(R)(0)*L/(r[0]^2))/(r[1]^2):
simplify(pb[0,2]+sb[0,2]):

```

## ▼ Cubic Terms

S\_2

sss

```

> sa[3,0] := 1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]
)/(r[1]*r[0]^2)+`@` (D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)
*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])-D
(G)(L)*`@` (D,2)(R)(0))/r[0]+2*D(G)(L)*D(R)(0)^2/(r[0]^2)
+2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r
[0])*`@` (D,2)(R)(0)/(r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D

```

$$\begin{aligned}
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[0]^3*r[1] \\
& ^2))/r[1]+1/6*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])^3*((-D(G)(L)*(G)(L)-D(G) \\
& (L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G)(L)-D(G)(L)*r[1] \\
& )/(r[1]^2*r[0])+\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L) \\
& *r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G)(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]*r[0])-D \\
& (G)(L)*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(s[1]))/r[1]+2*D(G)(L)*D(R)(s[1])^2/(r \\
& [1]^2)+2*(G)(L)-D(G)(L)*r[1]*D(R)(s[1])^2/(r[1]^3)-(G)(L)-D \\
& (G)(L)*r[1])*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(s[1])/(r[1]^2)+(G)(L)-D(G)(L)*r \\
& [1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/ \\
& (r[1]^3*r[0]^2))/(r[0]^3)+1/2*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*(G)(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2*((-D(G)(L)*(G) \\
& (L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G)(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])/r[1]+(G)(L)-D(G)(L)*r[1] \\
& )*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]^2))/(r[0]^3*r[1]^2) \\
& -1/6*G(L)*(-2*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]* \\
& r[0])*D(R)(s[1])^2*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]^3*r[0]^3) \\
& -2*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R) \\
& (s[1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^3)+2*(-D \\
& (G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0] \\
& -C*G(L)*D(R)(s[1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0) \\
& )*D(R)(s[1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(G)(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(s \\
& [1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]^2*r[0]^3)+(G)(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(-D(G)(L)*D \\
& (R)(0)/r[0]-(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))/(r[1]^2* \\
& r[0])-2*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])* \\
& D(R)(0)^2/(r[1]*r[0]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s \\
& [1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G)(L)-D(G) \\
& (L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)+(G)(L) \\
& -D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R) \\
& (0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)-D(G)(L)*(G)(L)- \\
& D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G)(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])/(r[1]*r[0]^2)-C*G(L)*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(s[1])*(G)(L)-D(G) \\
& (L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]- \\
& (G)(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))*r[0]+C*G(L)*(G)(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[1]*r[0])+D \\
& (G)(L)*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]) \\
& ^2/(r[1]*r[0]^2)-C*G(L)*r[1]*\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)-2*C*G(L)*D(R) \\
& (s[1])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/r[0]+C*D(G)(L)*(G)(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G)(L)-D(G)(L)*r \\
& [0])/r[0]+\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G)(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]- \\
& C*G(L)*r[1]*r[0])*(G)(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[0]^2)+\text{\textasciitilde}@\text{\textasciitilde}(D,2)
\end{aligned}$$

```
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*
(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0]-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(-D(G)
(L)*D(R)(0)/r[0]-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))-D
(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[0]^2))/
(r[1]*r[0])-1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])^3*(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]-G(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[0]^2)-G(L))/(r[1]^3*r[0]^3)-1/2*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])^2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)
*r[1]*r[0])*((D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0])/r[1]-D
(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2))/(r[0]^3*r
[1]+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-D
(G)(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r
[0]-D(G)(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))/r[0]:
```

Termo em  $R''(0)$

```
> R0sa30:=coeff(sa[3,0],(D@D)(R)(0)):
a0[3,0] := simplify(R0sa30):
```

Termo em  $R''(s1)$

```
> R1sa30:=coeff(sa[3,0],(D@D)(R)(s[1])):
a1[3,0] := simplify(R1sa30):
```

ssp

```
> sa[2,1] := (G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*
r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*((D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)(G)
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)
/r[0])/r[1]-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)
*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]
^2))*G(L)/(r[0]^2*r[1])-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*
r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0])*G(L)/r[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G
(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)
-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]^2))*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]
^2*r[1]^2)-1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]
*r[0])^2*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+`@@`(D,
2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])
/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]
```

$$\begin{aligned}
&^2)) * G(L) / (r[1]^2 * r[0]^2) + 1/2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r \\
&[1] - C * G(L) * r[1] * r[0])^2 * (D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) * G(L) \\
&/ r[0] - G(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0])^2 / (r[0]^2 - G(L)) * (G(L) - D(G) \\
&(L) * r[1]) / (r[1]^3 * r[0]^2) + 1/2 * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * ((D(G) \\
&(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * G(L) \\
&/ (r[1] * r[0]) - \text{\textcircled{D}}(D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r \\
&[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * G(L) / r[1]) / r[0] - (G(L) - D(G)(L) * r[0]) * \\
&(G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D \\
&(G)(L) * r[1]) / (r[0]^2 * r[1]^2) / r[1] - 1/2 * (-D(G)(L) * D(R)(0) / r \\
&[0] - (G(L) - D(G)(L) * r[0]) * D(R)(0) / (r[0]^2)) * (-D(G)(L) * D(R)(s \\
&[1]) / r[1] - (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D(R)(s[1]) / (r[1]^2)) * G(L) \\
&- 1/2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0])^2 * G(L) * ((-D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r \\
&[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r \\
&[1]^2 * r[0]) + \text{\textcircled{D}}(D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r \\
&[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r[1] * r[0]) - D(G) \\
&(L) * \text{\textcircled{D}}(D, 2)(R)(s[1]) / r[1] + 2 * D(G)(L) * D(R)(s[1])^2 / (r[1] \\
&^2) + 2 * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D(R)(s[1])^2 / (r[1]^3) - (G(L) - D(G) \\
&(L) * r[1]) * \text{\textcircled{D}}(D, 2)(R)(s[1]) / (r[1]^2) + (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * \\
&(G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0])^2 / (r[1] \\
&^3 * r[0]^2) / (r[0]^2) - 1/2 * G(L) * (2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G) \\
&(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * D(R)(s[1])^2 * G(L) * (G(L) - D(G)(L) \\
&* r[0]) / (r[1]^3 * r[0]^2) + (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G \\
&(L) * r[1] * r[0]) * D(R)(s[1]) * G(L) * D(R)(0) / (r[1]^2 * r[0]^2) - (-D \\
&(G)(L) * D(R)(0) - D(G)(L) * D(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) / r[0] \\
&- C * G(L) * D(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) - C * G(L) * r[1] * D(R)(0) \\
&) * D(R)(s[1]) * G(L) / (r[1]^2 * r[0]) - (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) \\
&* r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * \text{\textcircled{D}}(D, 2)(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r \\
&[0]) * G(L) / (r[1]^2 * r[0]^2) + (D(G)(L) * D(R)(s[1]) * G(L) + C * G(L) \\
&^2 * D(R)(s[1]) * r[0]) * D(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) / (r[1] \\
&^2 * r[0]^2) + (D(G)(L) * D(R)(s[1]) * G(L) + C * G(L)^2 * D(R)(s[1]) * r \\
&[0]) * D(R)(0) / (r[1] * r[0]^2) - (-C * G(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D \\
&(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / r[1] + C * G \\
&(L)^2 * \text{\textcircled{D}}(D, 2)(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) + C * G(L)^2 * D(R) \\
&(s[1]) * D(R)(0) + D(G)(L) * \text{\textcircled{D}}(D, 2)(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r \\
&[0]) * G(L) / r[0] - D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G \\
&(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r[0] * r[1]) - \text{\textcircled{D}}(D, 2) \\
&(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * G \\
&(L) / r[0] - C * D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * \\
&r[1] * r[0]) * G(L) - \text{\textcircled{D}}(D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) \\
&* r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * G(L) / r[1] + D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r \\
&[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * G(L) / (r[1] * r[0]) / (r[1] \\
&* r[0]) + 1/2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0])^2 * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * (D
\end{aligned}$$

```
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G
(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)
*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0])/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[0]
)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)-
D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2))/(r[0]^2*r[1]):
```

coeficientes de  $R''(0)$  e  $R''(s_1)$

```
> R0sa21:=coeff(sa[2,1],(D@D)(R)(0)):
a0[2,1]:=R0sa21:
```

```
> R1sa21:=coeff(sa[2,1],(D@D)(R)(s[1])):
a1[2,1]:=simplify(R1sa21):
```

*spp*

```
> sa[1,2] := -1/2*G(L)*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-
C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])^2*G(L)^2/(r[1]^3*r[0])-2*(D
(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])*D(R)(s[1]
)*G(L)/(r[1]^2*r[0])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])`@@`(D,2)(R)(s[1])*G(L)^2/(r[1]^2*r[0])-(-D
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[1])*G(L)*r[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G
(L)+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)*r[0]/r[1]+C*G
(L)*r[1]*r[0]+C*G(L)*r[0]*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1]-C*G
(L)^3*`@@`(D,2)(R)(s[1])*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]
)^2/r[1]-D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(s[1])*G(L)^2+D(G)(L)*r[0])/(r
[1]*r[0]))+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[1])*G(L)/r[1]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G
(L)*r[0]/r[1]+D(G)(L)*r[0])/r[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)
-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]*r[1]^2))/r[1]+1/2*G(L)^2*((-D(G)(L)
*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D
(G)(L)*r[1])/(r[1]^2*r[0])`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r
[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r
[1]*r[0])-D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(s[1]))/r[1]+2*D(G)(L)*D(R)
(s[1])^2/(r[1]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])^2/(r[1]
^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*`@@`(D,2)(R)(s[1])/(r[1]^2)+(G(L)-
D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*
r[0])^2/(r[1]^3*r[0]^2))*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-G(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])*((D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r
[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0]
)/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-
C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2))*(G
```

```

(L)-D(G)(L)*r[0]/(r[1]*r[0])+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2*(
(-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])/r[1]+(G(L)-
D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]^2))*(G(L)-D
(G)(L)*r[0]/(r[1]^2*r[0])+G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((-D
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)
-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])/r[1]+(G(L)-D
(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]^2))*(G(L)-D
(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]^2*r[0])
-1/2*G(L)^2*((D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0])/r[1]-
(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2))*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]*r[0])-1/2*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])^2*(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]
-G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[0]^2)-G(L))*(G(L)-D(G)(L)*r
[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]^3*r[0]):

```

termos em  $R''(0)$  e  $R''(s1)$

```

> R0sa12:=coeff(sa[1,2],(D@D)(R)(0)):
a0[1,2]:=R0sa12:

```

```

> R1sa12:=coeff(sa[1,2],(D@D)(R)(s[1])):
a1[1,2]:=simplify(R1sa12):

```

ppp

```

> sa[0,3] := -1/6*G(L)*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r
[1]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)-D(G)(L)*`@@`
(D,2)(R)(s[1])*G(L)^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1])
/r[1]+2*D(G)(L)*D(R)(s[1])^2*G(L)^2/(r[1]^2)+2*(G(L)-D(G)
(L)*r[1])*D(R)(s[1])^2*G(L)^2/(r[1]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[1])
*`@@`(D,2)(R)(s[1])*G(L)^2/(r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r
[1])-1/6*G(L)^3*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]
-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2*r[0])+`@@`
(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]*r[0])-D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)
(s[1])/r[1]+2*D(G)(L)*D(R)(s[1])^2/(r[1]^2)+2*(G(L)-D(G)
(L)*r[1])*D(R)(s[1])^2/(r[1]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*`@@`
(D,2)(R)(s[1])/(r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*
r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[1]^3*r[0]^2))
+1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)
/r[1]-G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^2)-G(L))/r[1]+1/2*G

```

```

(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-`@@`(D,2)
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G
(L)/r[0])/r[1]-D(G)(L)*r[0]*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r
[1]^2))/r[1]+1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^3*(D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0])*G(L)/r[0]-G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[0]^2)-G
(L))/(r[1]^3)-1/2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2*((-D(G)(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*
r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L)*r[1])/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1]
)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]*r[0]^2))/(r[1]^2):
> R0sa03:=coeff(sa[0,3],(D@D)(R)(0)):
a0[0,3]:=R0sa03:

> R1sa03:=coeff(sa[0,3],(D@D)(R)(s[1])):
a1[0,3]:=simplify(R1sa03):

```

▼ P\_2

▼ SSS

```

> sb[3,0] := 1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-
D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])^2*(G(L)-D(G)(L)*
r[0])^2/(r[1]^3*r[0]^3)-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-
C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/
(r[1]^2*r[0]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r
[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/
(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*`@@`(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/(r[1]
^2*r[0]^3)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])*D(R)(s[1])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-D(G)(L)*r[0])
*D(R)(0)/(r[0]^2))/(r[1]^2*r[0])-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2/(r[1]*r[0]^3)+2*(-D
(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]
-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0)
)*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*
G(L)*r[1]*r[0])*`@@`(D,2)(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*
`@@`(D,2)(R)(0)-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*
G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[1]*r[0]^2-C*G(L)*
`@@`(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)*D(R)

```



$$\begin{aligned}
& (s[1]) * (-D(G)(L) * D(R)(0) / r[0] - (G(L) - D(G)(L) * r[0]) * D(R)(0) / \\
& (r[0]^2)) * r[0] + C * G(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G \\
& (L) * r[1] * r[0])^2 / (r[1] * r[0]) + D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D \\
& (G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0])^2 / (r[1] * r[0]^2) - C * G(L) * r[1] * \\
& \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(0) - 2 * C * G(L) * D(R)(s[1]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) * D \\
& (R)(0) / r[0] + C * D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G \\
& (L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) / r[0] + \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(G)(L) * (G \\
& (L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G) \\
& (L) * r[0]) / (r[0]^2) + \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G) \\
& (L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[0]) / (r[1] * r[0]) \\
& - D(G)(L) * D(R)(s[1]) * (-D(G)(L) * D(R)(0) / r[0] - (G(L) - D(G)(L) * r \\
& [0]) * D(R)(0) / (r[0]^2)) - D(G)(L) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(s[1]) * (G(L) - D \\
& (G)(L) * r[0])^2 / (r[0]^2) / (r[1] * r[0]) / r[0] + 1 / 6 * (G(L) - D(G) \\
& (L) * r[0])^3 * (-2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r \\
& [1] * r[0]) * D(R)(0)^2 * (G(L) - D(G)(L) * r[1])^2 / (r[0]^3 * r[1]^3) \\
& - 2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * D(R) \\
& (0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D(R)(s[1]) / (r[0]^2 * r[1]^3) + 2 * (-D \\
& (G)(L) * D(R)(s[1]) - D(G)(L) * D(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / r[1] \\
& - C * G(L) * D(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) - C * G(L) * r[0] * D(R)(s[1]) \\
& ) * D(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r[0]^2 * r[1]^2) + (G(L) - D(G) \\
& (L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(0) * (G \\
& (L) - D(G)(L) * r[1])^2 / (r[0]^2 * r[1]^3) + (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D \\
& (G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * D(R)(0) * (-D(G)(L) * D(R)(s[1]) \\
& / r[1] - (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D(R)(s[1]) / (r[1]^2)) / (r[0]^2 * r \\
& [1]) - 2 * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * D \\
& (R)(s[1])^2 / (r[0] * r[1]^3) + 2 * (-D(G)(L) * D(R)(s[1]) - D(G)(L) * D \\
& (R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / r[1] - C * G(L) * D(R)(0) * (G(L) - D(G) \\
& (L) * r[1]) - C * G(L) * r[0] * D(R)(s[1])) * D(R)(s[1]) / (r[0] * r[1]^2) \\
& + (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, \\
& 2)(R)(s[1]) / (r[0] * r[1]^2) - (\text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r \\
& [0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r \\
& [1]^2) - 2 * C * G(L) * D(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D(R)(s[1]) / r \\
& [1] - C * G(L) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1])^2 / r[1] - C * G \\
& (L) * D(R)(0) * (-D(G)(L) * D(R)(s[1]) / r[1] - (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * \\
& D(R)(s[1]) / (r[1]^2)) * r[1] - D(G)(L) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(s[1]) - D(G) \\
& (L) * \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(R)(0) * (G(L) - D(G)(L) * r[1])^2 / (r[1]^2) - D(G)(L) \\
& * D(R)(0) * (-D(G)(L) * D(R)(s[1]) / r[1] - (G(L) - D(G)(L) * r[1]) * D \\
& (R)(s[1]) / (r[1]^2)) + \text{\textasciitilde} @ \text{\textasciitilde} (D, 2)(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D \\
& (G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / (r[1] * r \\
& [0]) + C * D(G)(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] \\
& * r[0]) * (G(L) - D(G)(L) * r[1]) / r[1] + C * G(L) * (G(L) - D(G)(L) * r[0] - \\
& D(G)(L) * r[1] - C * G(L) * r[1] * r[0])^2 / (r[1] * r[0]) + D(G)(L) * (G(L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[0]*r[1] \\
& ^2)-C*G(L)*r[0]*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(s[1])-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r \\
& [1]^2*r[0]))/(r[0]*r[1]))/(r[0]^3)+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]- \\
& D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D \\
& (G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3*r \\
& [1])-2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R) \\
& (0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2*r[1])-(-D(G) \\
& (L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])*G(L)*r[1]+C*G(L)*r[1]*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0])^2/r[0]-C*G(L)^3*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)*r[1]+C*G(L)*r[1]*(G \\
& (L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]-D(G)(L)*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)*G(L)^2+ \\
& \text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]+D(G)(L) \\
& *r[1]+\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L))/(r[0]*r[1] \\
& ))*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^3)-1/6*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0] \\
& ))/(r[1]*r[0]^2)+\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L) \\
& *r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])-D \\
& (G)(L)*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0))/r[0]+2*D(G)(L)*D(R)(0)^2/(r[0]^2) \\
& +2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0])*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)/(r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[0]^3*r[1] \\
& ^2))/(r[1]*r[0])+1/2*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]- \\
& C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1] \\
& ^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R) \\
& (s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1] \\
& )-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1]))/(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[0] \\
& /r[0]-1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0] \\
& )^3*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(G) \\
& (L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)-D(G)(L)*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)*G(L) \\
& ^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0])/r[0]+2*D(G)(L)*D(R) \\
& (0)^2*G(L)^2/(r[0]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)^2*G(L) \\
& ^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}\text{\textasciitilde}(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r \\
& [0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0])/(r[1]^3*r[0]^3)+1/2*((G \\
& (L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1]) \\
& *(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D \\
& (G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G) \\
& (L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*
\end{aligned}$$

```

G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))/
(r[1]*r[0]))*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]
*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*
G(L)^2*D(R)(0)*r[1]/(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]
-1/2*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D
(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]
^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r
[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r
[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0]))*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)
-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))*G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]/(r[1]*r[0])-1/2*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]^2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0]))*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*
D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^3*r[1]^2)+(G(L)-D
(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)
*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)
(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*
r[1])-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-
(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*`@@`(D,
2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)
*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)
*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)
(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)
-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[1]+C*G
(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)(0)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)
*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]+C*G(L)^2*
`@@`(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])+D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)
(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D
(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0]-D(G)
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]
-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)
*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0]))/(r
[0]*r[1]))/(r[0]^3*r[1])-1/2*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-D(G)-
D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D
(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])/(r[1]*r[0]
):
> R0sb30:=coeff(sb[3,0],(D@D)(R)(0)):
xx1:=1/6*XX/(r[1]*r[0]^3):

```

```

xx2:=1/6*XX^3/(r[1]^3*r[0]^5):
b0[3,0]:= 1/6*((G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])+G
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]))/(r
[1]*r[0]^3)+1/6*((G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])+G
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]))^3/
(r[1]^3*r[0]^5):simplify(b0[3,0]-R0sb30):
> R1sb30:=coeff(sb[3,0],(D@D)(R)(s[1])):
b1[3,0]:=simplify(R1sb30):

```

ssp

```

> sb[2,1]:=(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*
r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)
*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*(-(G(L)-
D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G
(L)/(r[1]^2*r[0])-(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s
[1])*r[0])/(r[1]*r[0]))/r[0]+1/2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r
[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))*G(L)-D(G)
(L)*r[1]*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-
D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*
r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)
*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-C*G(L)*r
[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0]))/r[1]+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2*
(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^3*
r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*
D(R)(s[1])*G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s
[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)
(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1]))*D(R)(0)*G
(L)/(r[0]^2*r[1])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/(r[0]
^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D
(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)
(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-
(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])
*G(L)/(r[1]*r[0])+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)(0)+D(G)(L)*D(R)
(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+C*G(L)^2*D(R)
(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)
*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0]-D(R)
(D,2)
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G

```

$$\begin{aligned}
& (L)/r[1]-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)* \\
& r[1]*r[0])*G(L)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-D(G)(L)*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0] \\
& )/(r[1]*r[0]))/(r[0]*r[1]))/(r[0]^2*r[1])-1/2*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*((D(G)(L)*(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0] \\
& )-`@` (D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r \\
& [1]*r[0])*G(L)/r[1])/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1] \\
& )/(r[0]^2*r[1]^2))/(r[1]*r[0])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)* \\
& r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D \\
& (G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0] \\
& )-(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])/(r[1] \\
& *r[0]))/(r[1]*r[0])+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0] \\
& -D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G) \\
& (L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [1])/(r[0]^3*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D \\
& (G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1] \\
& -C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0])*D(R)(s[1]) \\
& )*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r \\
& [1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*`@` (D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])* \\
& G(L)/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R) \\
& (0)*r[1])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D \\
& (G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r \\
& [0]*r[1]^2)-(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R) \\
& (0)+D(G)(L)*`@` (D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+ \\
& C*G(L)^2*`@` (D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-`@` (D,2)(G) \\
& (L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L) \\
& /r[0]-`@` (D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[1]-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G) \\
& (L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]- \\
& D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-D \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0]))/(r[0]*r[1])*G(L)/(r[0] \\
& ^2*r[1])-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r \\
& [1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]- \\
& C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3*r[1])-2*(D(G) \\
& (L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&^2r[1])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]) \\
&*^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2*r[1])-(^{\textcircled{D,2}}(G)(L)*(G \\
&(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]-D(G)(L)*^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*G \\
&(L)^2+D(G)(L)*r[1]-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+ \\
&C*G(L)*r[1]*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]+C*D(G)(L)*(G(L)-D \\
&(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]+C*G(L)*r[1]*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G) \\
&(L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)^3*^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*r[1]+^{\textcircled{D,2}} \\
&(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L))/(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G) \\
&(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)-1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2*G(L)* \\
&(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R) \\
&(0)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]^3*r[1]^3)-2*(G(L)-D(G) \\
&(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G) \\
&(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]^2*r[1]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1] \\
&)-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)* \\
&(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0])*D(R)(s[1]))*D(R)(0)*(G(L)- \\
&D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r \\
&[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]) \\
&^2/(r[0]^2*r[1]^3)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)* \\
&r[1]*r[0])*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L) \\
&)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))/(r[0]^2*r[1])-2*(G(L)-D(G)(L)* \\
&r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])^2/(r[0]*r \\
&[1]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G) \\
&(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r \\
&[0])*D(R)(s[1]))*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r \\
&[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*^{\textcircled{D,2}}(R)(s[1])/(r \\
&[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
&(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2*r[0])-C*G(L)*D \\
&(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R) \\
&(s[1])/(r[1]^2))*r[1]-D(G)(L)*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1]) \\
&/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))-D(G)(L)* \\
&^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^2)+^{\textcircled{D,2}} \\
&(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])* \\
&(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]*r[0])-C*G(L)*^{\textcircled{D,2}}(R)(0)*(G \\
&(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1]-2*C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
&[1])*D(R)(s[1])/r[1]+^{\textcircled{D,2}}(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D \\
&(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2) \\
&-D(G)(L)*^{\textcircled{D,2}}(R)(s[1])+C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G) \\
&(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[1]*r[0])-C*G(L)*r[0]*^{\textcircled{D,2}} \\
&(D,2)(R)(s[1])+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
&(L)*r[1]*r[0])^2/(r[0]*r[1]^2)+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
&[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r \\
&[1])/(r[0]*r[1])/(r[0]^2)+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0]^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+@@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)-D(G)(L)*@@(D,2)(R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0])/r[0]+2*D(G)(L)*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*@@(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0])/(r[1]^3*r[0]^2)-1/2*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1]))/(r[0]*r[1]))*G(L)*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^3*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*D(R)(s[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*G(L)-D(G)(L)*r[0]-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*@@(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/(r[1]^2*r[0]^2)+(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]^2*r[0]^2)+(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]+C*G(L)^2*@@(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[0]*r[1]+D(G)(L)*@@(D,2)(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)(0)+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)-@@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[1]-@@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0])/(r[1]*r[0]))/r[0]-1/2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3*r[1])-2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*@@(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2*r[1])-(@@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]-D(G)(L)*@@(D,2)(R)(0)*G
\end{aligned}$$

```

(L)^2+D(G)(L)*r[1]-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+
C*G(L)*r[1]*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]+C*D(G)(L)*(G(L)-D
(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]+C*G(L)*r[1]*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)^3*@@(D,2)(R)(0)*r[1]+@@(D,2)
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L))/(r[0]*r[1])/(r[1]^2*r[0]
^2)-1/2*G(L)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]
*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*
G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/
(r[1]^2*r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*D(R)(0)/(r[1]*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(0)-D(G)(L)*
D(R)(s[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-C*G(L)*D(R)(s[1])*(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-C*G(L)*r[1]*D(R)(0))/(r[1]*r[0]))+1/2*(-
(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*
G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*
r[1])/(r[0]*r[1]))*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(-D(G)(L)*D(R)(0)/r
[0]-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)/(r[0]^2))/r[1]:
> R0sb21:=coeff(sb[2,1],(D@D)(R)(0)):
> b0[2,1]:=-G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*((G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])+G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0]))^2/(r[0]^4*r[1]^3):
simplify(b0[2,1]-R0sb21):
> R1sb21:=coeff(sb[2,1],(D@D)(R)(s[1])):
b1[2,1]:=simplify(R1sb21):

```

▼ spp

```

> sb[1,2]:=-G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)
*r[1])/(r[0]^3*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D
(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]
-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0])*D(R)(s[1])
)*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r
[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*@@(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*
G(L)/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)
(0)*r[1])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D
(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r
[0]*r[1]^2)-(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]*r[0])+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)
(0)+D(G)(L)*@@(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+
C*G(L)^2*@@(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-@@(D,2)(G)
(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)

```



$$\begin{aligned}
& /r[0]-\text{\textcircled{D}}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[1]-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G) \\
& (L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]- \\
& D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-D \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r[0])/(r[0]*r[1])*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[1])/(r[0]*r[1])+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)^2*(-2* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0) \\
& ^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]^3*r[1]^3)-2*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [1])*D(R)(s[1])/(r[0]^2*r[1]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D \\
& (G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G \\
& (L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0])*D(R)(s[1]))*D(R)(0)*(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r \\
& [1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*\text{\textcircled{D}}(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]) \\
& ^2/(r[0]^2*r[1]^3)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)* \\
& r[1]*r[0])*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L) \\
& *r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))/(r[0]^2*r[1])-2*(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s[1])^2/(r[0]*r \\
& [1]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G) \\
& (L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r \\
& [0])*D(R)(s[1]))*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*\text{\textcircled{D}}(D,2)(R)(s[1])/(r \\
& [0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2*r[0])-C*G(L)*D \\
& (R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R) \\
& (s[1])/(r[1]^2))*r[1]-D(G)(L)*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1]) \\
& /r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))-D(G)(L)* \\
& \text{\textcircled{D}}(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^2)+\text{\textcircled{D}}(D,2) \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]*r[0])-C*G(L)*\text{\textcircled{D}}(D,2)(R)(0)*(G \\
& (L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1]-2*C*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [1])*D(R)(s[1])/r[1]+\text{\textcircled{D}}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D \\
& (G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[1]^2) \\
& -D(G)(L)*\text{\textcircled{D}}(D,2)(R)(s[1])+C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G) \\
& (L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])^2/(r[1]*r[0])-C*G(L)*r[0]*\text{\textcircled{D}} \\
& (D,2)(R)(s[1])+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])^2/(r[0]*r[1]^2)+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r \\
& [0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r \\
& [1])/(r[0]*r[1])/r[0]-1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1] \\
& -C*G(L)*r[1]*r[0])*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r \\
& [1]+\text{\textcircled{D}}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)*r[0]/r[1]+D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (G(L)*r[0])/r[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1]) \\
& ^2/(r[0]*r[1]^2))/(r[1]*r[0])+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-2* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(s \\
& [1])^2*G(L)^2/(r[1]^3*r[0])-2*(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G \\
& (L)^2*D(R)(s[1])*r[0])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])+(G(L) \\
& -D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*@@(D,2)(R) \\
& (s[1])*G(L)^2/(r[1]^2*r[0])-(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])* \\
& G(L)/r[1]+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)*r[0]+@@(D, \\
& 2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)*r[0]/r[1]+@@(D,2)(G) \\
& (L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)-C*G(L)^3*@@(D,2)(R)(s[1])*r \\
& [0]+C*G(L)*r[0]*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1]+D(G)(L)*r[0]+D \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1]+C*G(L)*r[1]*r[0]-D(G)(L) \\
& *@@(D,2)(R)(s[1])*G(L)^2/(r[1]*r[0]))/r[0]+1/2*(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]- \\
& D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3*r \\
& [1])-2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R) \\
& (0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*@@(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2*r[1])-(@@( \\
& D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r[0]-D(G)(L)* \\
& @@(D,2)(R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)*r[1]-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])*G(L)/r[0]+C*G(L)*r[1]*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]+C*D \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]+C*G(L)*r[1]*r[0]+D(G) \\
& (L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)^3*@@(D,2)(R)(0)*r \\
& [1]+@@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L))/(r[0]*r[1])) \\
& /((r[0]*r[1]^2)-1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)* \\
& r[1]*r[0])*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])* \\
& D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))*D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)/r[1]+(G(L) \\
& -D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2))/(r[1]*r[0])-1/2* \\
& (G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D \\
& (G)(L)*r[1])^2*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+ \\
& @@(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)-D(G)(L)*@@(D,2) \\
& (R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0])/r[0]+2*D \\
& (G)(L)*D(R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D \\
& (R)(0)^2*G(L)^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*@@(D,2)(R) \\
& (0)*G(L)^2/(r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0])/(r[1]^3*r[0] \\
& )+1/2*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r \\
& [1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)* \\
& D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*(D(G)(L)* \\
& D(R)(s[1])*G(L)/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/ \\
& (r[1]^2))/r[0]-1/2*G(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]- \\
& C*G(L)*r[1]*r[0])*(2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G \\
& (L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[0]^3*
\end{aligned}$$

```

r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*
D(R)(s[1])*G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s
[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*G(L)*D(R)
(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-C*G(L)*r[0]*D(R)(s[1]))*D(R)(0)*G
(L)/(r[0]^2*r[1])-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r
[1]*r[0])*`@@`(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/(r[0]
^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D
(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)
(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-
(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])
*G(L)/(r[1]*r[0])+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)(0)+D(G)(L)*`@@`
(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+C*G(L)^2*`@@`(D,
2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)
*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0]-`@@`(D,2)
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G
(L)/r[1]-C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*
r[1]*r[0])*G(L)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G
(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-D(G)(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0]
)/(r[1]*r[0]))/(r[0]*r[1])/(r[1]*r[0])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]
-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*(-2*(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*
G(L)^2/(r[0]^3*r[1])-2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)
(0)*r[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*`@@`(D,2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]
^2*r[1])-(`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]/r
[0]-D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)*r[1]-D(G)(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r[0]+C*G(L)*r[1]*(G(L)-D(G)(L)*r[0]
)^2/r[0]+C*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*r[1]+C*G(L)*r
[1]*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0]-C*G(L)^3*`@@`
(D,2)(R)(0)*r[1]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L))
/(r[0]*r[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])-G(L)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]
-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])
-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1])
)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*D(R)
(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])-(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)+C*G(L)
^2*D(R)(s[1])*r[0])/(r[1]*r[0]))+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r
[0]+(G(L)-D(G)(L)*r[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2))*G(L)-D(G)
(L)*r[1])*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2*r[0])-(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G
(L)+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*r[0])/(r[1]*r[0]))/r[1]:

```

```

L> R0sb12:=coeff(sb[1,2],(D@D)(R)(0)):

```

```

> b0[1,2]:= 2*(G(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2*((G(L)-D(G)(L)*r
[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])+G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r
[1]-C*(G(L)*r[1]*r[0]))/(r[1]^3*r[0]^3):
simplify(b0[1,2]-R0sb12):
> R1sb12:=coeff(sb[1,2],(D@D)(R)(s[1])):
b1[1,2]:=simplify(R1sb12):

```

ppp

```

> sb[0,3]:= -1/6*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]
*r[0])*(D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]-G(L)*(G(L)-D
(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^2-G(L))/(r[1]*r[0])+1/6*(G(L)-D(G)
(L)*r[0])*(-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+`@@`(D,
2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)-D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(s
[1])*G(L)^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/r[1])/r[1]+2*D
(G)(L)*D(R)(s[1])^2*(G(L)^2/(r[1]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*
D(R)(s[1])^2*(G(L)^2/(r[1]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*`@@`(D,2)
(R)(s[1])*G(L)^2/(r[1]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1])/r[0]
-1/2*(G(L)*(-(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]*r
[0])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])-(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*(G
(L)^2*(D(R)(0)*r[1])/(r[0]*r[1]))*(D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)
/r[1]+(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2))+1/6*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])^3*((-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)/r
[0]+`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)-D(G)(L)*`@@`
(D,2)(R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0])^2/r[0])/r
[0]+2*(D(G)(L)*D(R)(0)^2*(G(L)^2/(r[0]^2)+2*(G(L)-D(G)(L)*r
[0])*D(R)(0)^2*(G(L)^2/(r[0]^3)-(G(L)-D(G)(L)*r[0])*`@@`(D,
2)(R)(0)*G(L)^2/(r[0]^2)+(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0])/r[1]
^3)-1/6*(G(L)^3*(-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*
r[1]*r[0])*D(R)(0)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]^3*r[1]^3)
-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]*r[0])*D(R)
(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]^2*r[1]^3)+2*(-D
(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]
-C*(G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])-C*(G(L)*r[0])*D(R)(s[1]
))*D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]*r[0])*`@@`(D,2)(R)(0)*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]^2*r[1]^3)+(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]*r[0])*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1]
)/r[1]-(G(L)-D(G)(L)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))/(r[0]^2*r
[1])-2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*(G(L)*r[1]*r[0])*D
(R)(s[1])^2/(r[0]*r[1]^3)+2*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L)*D
(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)*r[1])/r[1]-C*(G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D(G)

```

$$\begin{aligned}
& (L)r[1]-C^*G(L)r[0]*D(R)(s[1])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2) \\
& +(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])^{@@}(D, \\
& 2)(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0]-D \\
& (G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)r[1])/(r[1]^2* \\
& r[0])-C^*G(L)*D(R)(0)*(-D(G)(L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G) \\
& (L)r[1])*D(R)(s[1])/(r[1]^2))*r[1]-D(G)(L)*D(R)(0)*(-D(G) \\
& (L)*D(R)(s[1])/r[1]-(G(L)-D(G)(L)r[1])*D(R)(s[1])/(r[1] \\
& ^2))-D(G)(L)^{@@}(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)r[1])^2/(r[1] \\
& ^2)+^{@@}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L) \\
& *r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)r[1])/(r[1]*r[0])-C^*G(L)^{@@}(D, \\
& 2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)r[1])^2/r[1]-2*C^*G(L)*D(R)(0)*(G(L) \\
& -D(G)(L)r[1])*D(R)(s[1])/r[1]+^{@@}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G) \\
& (L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)r[1] \\
& )/(r[1]^2)-D(G)(L)^{@@}(D,2)(R)(s[1])+C^*G(L)*(G(L)-D(G)(L) \\
& *r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])^2/(r[1]*r[0])-C^*G(L)* \\
& r[0]*^{@@}(D,2)(R)(s[1])+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L) \\
& *r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])^2/(r[0]*r[1]^2)+C^*D(G)(L)*(G(L)-D \\
& (G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)r \\
& [1])/r[1]/(r[0]*r[1])-1/2^*G(L)*(G(L)-D(G)(L)r[1])^2* \\
& (-2*(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])*D(R) \\
& (0)^2*G(L)^2/(r[0]^3*r[1])-2*(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C^*G(L) \\
& ^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2*r[1])+(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])^{@@}(D,2)(R)(0)*G(L) \\
& ^2/(r[0]^2*r[1])-(^{@@}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0])*G(L) \\
& *r[1]/r[0]-D(G)(L)^{@@}(D,2)(R)(0)*G(L)^2+D(G)(L)r[1]-D \\
& (G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0])*G(L)/r[0]+C^*G(L)r[1]*(G(L)-D \\
& (G)(L)r[0])^2/r[0]+C^*D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0])*G(L)*r \\
& [1]+C^*G(L)r[1]*r[0]+D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)r[0])^2/r[0]-C^* \\
& G(L)^3*^{@@}(D,2)(R)(0)*r[1]+^{@@}(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[0])*G(L))/(r[0]*r[1])/(r[1]^2)+1/2*(G(L)-D(G)(L)r[1])* \\
& (D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)/r[0]+(G(L)-D(G)(L)r[0])*D(R)(0)*G \\
& (L)/(r[0]^2))*D(G)(L)*D(R)(s[1])*G(L)/r[1]+(G(L)-D(G)(L)* \\
& r[1])*D(R)(s[1])*G(L)/(r[1]^2))/r[1]+1/2^*G(L)^2*(G(L)-D(G) \\
& (L)r[1])*(2*(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r \\
& [0])*D(R)(0)^2*G(L)*(G(L)-D(G)(L)r[1])/(r[0]^3*r[1]^2)+(G \\
& (L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])*D(R)(s[1]) \\
& *G(L)*D(R)(0)/(r[1]^2*r[0]^2)-(-D(G)(L)*D(R)(s[1])-D(G)(L) \\
& *D(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)r[1])/r[1]-C^*G(L)*D(R)(0)*(G(L)-D \\
& (G)(L)r[1]-C^*G(L)r[0])*D(R)(s[1])*D(R)(0)*G(L)/(r[0]^2* \\
& r[1])-(G(L)-D(G)(L)r[0]-D(G)(L)r[1]-C^*G(L)r[1]*r[0])* \\
& ^{@@}(D,2)(R)(0)*(G(L)-D(G)(L)r[1])*G(L)/(r[0]^2*r[1]^2)+ \\
& (D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C^*G(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(0)*(G(L)
\end{aligned}$$

```

-D(G)(L)*r[1])/(r[0]^2*r[1]^2)+(D(G)(L)*D(R)(0)*G(L)+C*G
(L)^2*D(R)(0)*r[1])*D(R)(s[1])/(r[0]*r[1]^2)-(D(G)(L)*(G
(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/(r[1]
*r[0])+C*G(L)^2*D(R)(s[1])*D(R)(0)+D(G)(L)*`@@`(D,2)(R)(0)
*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)/r[1]+C*G(L)^2*`@@`(D,2)(R)(0)*(G
(L)-D(G)(L)*r[1])-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[0]-`@@`(D,2)(G)(L)*(G(L)
-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G(L)/r[1]-C*D
(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*G
(L)-C*G(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r
[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/r[0]-D(G)(L)*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D
(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])/(r[1]*r
[0]))/(r[0]*r[1])/r[1]:
> R0sb03:=coeff(sb[0,3],(D@D)(R)(0)):
> b0[0,3] := -4/3*G(L)^3*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^3/(r[1]^3*r[0]
^2):
simplify(b0[0,3]-R0sb03):
> R1sb03:=coeff(sb[0,3],(D@D)(R)(s[1])):
b1[0,3]:=simplify(R1sb03):

```

## ▼ Tau - (terms in R'') Im(C[2,1])

```

> #XX:=((G(L)-D(G)(L)*r[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])+G(L)*(G(L)-D(G)
(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0]*r[1])):

```

### ▼ R''(s[1])

```

> a[3,0]:=a[3,0]:a[2,1]:=a[2,1]:a[1,2]:=a[1,2]:a[0,3]:=a[0,
3]:
b[3,0]:=b[3,0]:b[2,1]:=b[2,1]:b[1,2]:=b[1,2]:b[0,3]:=b[0,
3]:
> tau := -1/8*a[1,0]*(3*b[3,0]*a[0,1]/b[1,0]-3*b[1,0]*a[0,3]/a
[0,1]+a[2,1]-b[1,2])+1/8*b[1,0]*(-a[1,2]+3*a[3,0]*a[0,1]/b[1,
0]+b[2,1]*a[0,1]/b[1,0]-3*b[0,3]):
> t:=simplify(tau):
> tt:=-1/8*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*G(L)*1/((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])):
ft:=factor((D(G)(L)^6+3*D(G)(L)^2*G(L)^4*C^2+C^3*G(L)^6+3*C*G

```

```
(L)^2*D(G)(L)^4):
simplify(tt*ft-t):
```

### R''(0)

```
> a[3,0]:=a0[3,0]:a[2,1]:=a0[2,1]:a[1,2]:=a0[1,2]:a[0,3]:=a0[0,
3]:
b[3,0]:=b0[3,0]:b[2,1]:=b0[2,1]:b[1,2]:=b0[1,2]:b[0,3]:=b0[0,
3]:
> tau := -1/8*a[1,0]*(3*b[3,0]*a[0,1]/b[1,0]-3*b[1,0]*a[0,3]/a
[0,1]+a[2,1]-b[1,2])+1/8*b[1,0]*(-a[1,2]+3*a[3,0]*a[0,1]/b[1,
0]+b[2,1]*a[0,1]/b[1,0]-3*b[0,3]):
> t1:= -1/16*XX^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)
/(r[1]^2*r[0]^2*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0]*r
[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])):
t4:= -1/16*XX^4*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)
/(r[1]^4*r[0]^4*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0]*r
[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])):
t3:= 1/4*XX^2*G(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[0]^4*r[1]^4):
t2 := 1/4*G(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^2*r[0]^2):
t5 := 1/4*XX^2*G(L)^2*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^2/(r[1]^4*r[0]^4):
t6 := -G(L)^3*(G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)(L)*r[1]-C*G(L)*r[0]*r
[1])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[1])^3
/(r[1]^4*r[0]^4):
t:=simplify(t1+t2+t3+t4+t5+t6):
#simplify(t-tau):
> tt:=-1/8*(G(L)-D(G)(L)*r[1])*G(L)*1/((G(L)-D(G)(L)*r[0]-D(G)
(L)*r[1]-C*G(L)*r[1]*r[0])*(G(L)-D(G)(L)*r[0])):
ft:=1/2*( (4*D(G)(L)^6*C*G(L)^2+6*D(G)(L)^4*C^2*G(L)^4+4*C^3*
G(L)^6*D(G)(L)^2+C^4*G(L)^8+D(G)(L)^4+D(G)(L)^8+C^2*G(L)^4+2*
D(G)(L)^2*C*G(L)^2)
:
simplify(ft*tt-t):
> ft :=1/2*(DET^2+DET):
simplify(ft*tt-tau):
> fator:=subs(DET^2=1,DET=1,ft):
> tau:=fator*tt:
```





## Referências Bibliográficas

- [1] V. L. d. Almeida. *Defeito zero para bilhares convexos em  $\mathbb{H}^2$* . PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2017. Sob orientação de Pinto de Carvalho, Sônia.
- [2] P. V. Araújo. *Geometria Diferencial*. IMPA, 3 edition, 2016. ISBN 9978-85-244-0421-4.
- [3] M. Bialy. Hopf rigidity for convex billiards on the hemisphere and hyperbolic plane. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 33, 09 2013. doi: 10.3934/dcds.2013.33.3903.
- [4] G. D. Birkhoff. *Dynamical systems*. Amer Mathematical Soc. American Mathematical Society, 1966. ISBN 082181009X,9780821810095.
- [5] V. Blumen, K. Y. Kim, J. Nance, e V. Zharnitsky. Three-period orbits in billiards on the surfaces of constant curvature. *International Mathematics Research Notices*, 2012(21):5014–5024, 2012. doi: 10.1093/imrn/rnr228.
- [6] N. Chernov e R. Markarian. *Chaotic billiards*. Mathematical Surveys and Monographs 127. American Mathematical Society, 2006. ISBN 9780821840962.
- [7] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, e S. Pinto de Carvalho. Elliptic islands in strictly convex billiards. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 23, 2003.
- [8] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, e S. Pinto de Carvalho. Periodic orbits of generic oval billiards. *Nonlinearity (Bristol)*, 20, 2007.
- [9] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Springer International Publishing, 2016.
- [10] L. C. dos Santos. *Bilhares convexos em superfícies de curvatura constante*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014. Sob orientação de Pinto de Carvalho, Sônia.

- [11] L. C. dos Santos e S. Pinto de Carvalho. Periodic orbits of oval billiards on surfaces of constant curvature. *Dynamical Systems*, 32(2):283–294, 2017. doi: 10.1080/14689367.2016.1216088. URL <https://doi.org/10.1080/14689367.2016.1216088>.
- [12] P. L. Galison. Minkowski’s space-time: From visual thinking to the absolute world. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 10:85–121, 1979. ISSN 00732672. URL <http://www.jstor.org/stable/27757388>.
- [13] A. Hayli, T. Dumont, J. Moulin-Ollagnier, e J.-M. Strelcyn. Some new results on robnik billiards. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20:3237, 01 1999. doi: 10.1088/0305-4470/20/11/027.
- [14] M. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33. Springer, 01 1994. doi: 10.1007/978-1-4684-9449-5.
- [15] V. V. Kozlov e D. V. Treschëv. *Billiards : a genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*. Translations of mathematical monographs, v. 89. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1991. ISBN 0821845500.
- [16] R. Mackay e J. Meiss. Linear stability of periodic orbits in lagrangian systems. *Physics Letters A*, 98(3):92–94, 1983. ISSN 0375-9601. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90735-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90735-1).
- [17] R. Markarian, S. Oliffson Kamphorst, e S. Pinto de Carvalho. Chaotic properties of the elliptical stadium. *Communications in Mathematical Physics*, 174(3):661 – 679, 1996. doi: [cmp/1104275489](https://doi.org/cmp/1104275489). URL <https://doi.org/>.
- [18] R. Moeckel. Generic bifurcations of the twist coefficient. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10:185 – 195, 03 1990. doi: 10.1017/S0143385700005472.
- [19] J. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000. ISBN 9780131816299.
- [20] S. Oliffson Kamphorst e S. Pinto de Carvalho. The first birkhoff coefficient and the stability of 2-periodic orbits on billiards. *Experimental Mathematics*, 14, 01 2005. doi: 10.1080/10586458.2005.10128923.
- [21] C. Pires. *Dois resultados em bilhares em superfícies com curvatura constante*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2020. Sob orientação de Pinto de Carvalho, Sônia.

- [22] L. Stojanov. Generic properties of periodic reflecting rays. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7(4):597–609, 1987. doi: 10.1017/S0143385700004223.
- [23] A. P. Veselov. Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the lobachevsky space. *Journal of Geometry and Physics*, 7(1):81 – 107, 1990. ISSN 0393-0440. doi: [https://doi.org/10.1016/0393-0440\(90\)90021-T](https://doi.org/10.1016/0393-0440(90)90021-T).
- [24] M. P. Wojtkowski. Two applications of jacobi fields to the billiard ball problem. *J. Differential Geom.*, 40(1):155–164, 1994. doi: 10.4310/jdg/1214455290. URL <https://doi.org/10.4310/jdg/1214455290>.
- [25] P. Zhang. Convex billiards on convex spheres. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 34, 05 2015. doi: 10.1016/j.anihpc.2016.07.001.