

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**

MARCELO PENNA DE OLIVEIRA

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM MÉDIAS MÓVEIS POR MEIO
DO USO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

BELO HORIZONTE

2023

MARCELO PENNA DE OLIVEIRA

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM MÉDIAS MÓVEIS POR MEIO
DO USO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

Monografia de Especialização apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

BELO HORIZONTE

2023

2023, Marcelo Penna de Oliveira.

Todos os direitos reservados

Oliveira, Marcelo Penna de.

O48a Avaliação do desempenho da carta \bar{X} com médias móveis por meio do uso de simulação de Monte Carlo [recurso eletrônico] / Marcelo Penna de Oliveira – 2023.
1 recurso online (35 f. il., color.): pdf.

Orientador: Roberto da Costa Quinino
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f. 29

1. Estatística. 2. Controle de processo. 3. Monte Carlo, Método de. 4. Quinino, Roberto da Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

ATA DO 328ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE MARCELO PENNA DE OLIVEIRA.

Aos vinte e dois dias do mês de dezembro de 2023, às 16:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Marcelo Penna de Oliveira**, intitulado: “Avaliação do Desempenho da Carta \bar{X} com Médias Móveis por meio do uso de Simulação de Monte Carlo”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado **Aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade.** O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 22 de dezembro de 2023.

Roberto da Costa
Quinino:80871291720

Assinado de forma digital por
Roberto da Costa
Quinino:80871291720
Dados: 2023.12.22 18:46:13 -03'00'

Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)
Departamento de Estatística – UFMG

Victor Brito
Quinino:12675892645

Digitally signed by Victor
Brito Quinino:12675892645
Date: 2023.12.23 11:43:40
-03'00'

Prof. Víctor Brito Quinino
Departamento de Engenharia de Produção – UFMG

Dedico este trabalho à minha esposa e
filhos pelo apoio incondicional.

RESUMO

A carta de controle \bar{X} é uma ferramenta utilizada para monitorar a variação na média de um processo ao longo do tempo, e, devido a facilidade de análise e implementação, é de grande valia na gestão da qualidade e no controle estatístico de processos (CEP). Este trabalho pretende confrontar três métodos: método padrão de Shewhart, regra suplementar 2-2 de Klein e Médias Móveis, quanto a capacidade de identificação de pequenos deslocamentos da média na carta de controle \bar{X} . Tendo como critério de análise o Comprimento Médio de Corrida (CMC), o presente trabalho apresenta evidências significativas que o uso da média móvel é mais eficiente na identificação de pequenos deslocamentos da média em detrimento dos demais métodos abordados.

PALAVRAS-CHAVE: carta de controle \bar{X} ; simulação de Monte Carlo; controle estatístico de processo; comprimento médio de corrida; média móvel.

ABSTRACT

The \bar{X} control chart is a tool used to monitor the variation in the average of a process over time, and due to its ease of analysis and implementation, it is of great value in quality management and statistical process control (SPC). This study aims to compare three methods: Shewhart's standard method, Klein's 2-2 supplementary rule, and Moving Averages, regarding their ability to identify small shifts in the average on the \bar{X} control chart. Using the Average Run Length (ARL) as the analysis criterion, this study provides significant evidence that the use of moving averages is more efficient in identifying small shifts in the mean compared to the other methods discussed.

KEYWORDS: \bar{X} control chart; Monte Carlo simulation; statistical process control; average run length; moving averages.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Exemplo de Gráfico de Controle	10
Figura 2: Distribuição amostral sob e fora de controle	12
Figura 3: Processo fora de controle segundo primeira regra de Klein.....	13
Figura 4: Processo fora de controle, conforme segunda regra de Klein.....	13
Figura 5: Comparativo LSC Carta de Controle \bar{X} , MA e Klein	19
Figura 6: Gráfico ARL versus deslocamento da média	21
Figura 7: Gráfico ARL versus deslocamento da média para Klein	22
Figura 8: Gráfico ARL versus deslocamento da média para Média Móvel.....	24

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Limites de controle para a Carta de Controle \bar{X}	17
Tabela 2: Limites de controle para o método de Klein	18
Tabela 3: Limites de controle para o método MA	18
Tabela 4: LSC para dos três métodos com variações de n.....	19
Tabela 5: Comparativo de ARL para os três métodos abordados.....	25
Tabela 6: Comparativo entre ARL Tradicional e ARL MA	26
Tabela 7: Comparativo entre ARL Klein e ARL MA.....	27

SUMÁRIO

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	INTRODUÇÃO AO GRÁFICO DE CONTROLE.....	10
1.2	INTRODUÇÃO A REGRA SUPLEMENTAR 2-2 E 2-3 DE KLEIN	12
1.3	INTRODUÇÃO AO GRÁFICO DE CONTROLE POR MÉDIA MÓVEL	14
1.4	COMPRIMENTO MÉDIO DE CORRIDA (CMC).....	15
1.5	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	16
2	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	17
2.1	ESTRUTURA PARA COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	17
2.2	DEFINIÇÃO DOS LIMITES DE CONTROLE	17
2.2.1	Limites de controle para a Carta de Controle \bar{X}	17
2.2.2	Limites de controle para o método Klein.....	18
2.2.3	Limites de controle para o método Médias Móveis	18
2.2.4	Comparação entre os limites de controle (LSC)	19
2.3	CÁLCULO DO ARL.....	20
2.3.1	Cálculo do ARL para a Carta de Controle \bar{X}	20
2.3.2	Cálculo do ARL para o método de Klein.....	22
2.3.3	Cálculo do ARL para o método de médias móveis.....	23
2.3.4	Comparação entre os três métodos	25
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	28
	REFERÊNCIAS.....	29
	APÊNDICE A – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO ARL DA CARTA DE	
	CONTROLE \bar{X}	30
	APÊNDICE B – TABELA ARL - CARTA DE CONTROLE \bar{X}	31
	APÊNDICE C – TABELA ARL – MÉTODO DE KLEIN	32
	APÊNDICE D – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO ARL PARA MÉDIAS MÓVEIS	
	33	
	APÊNDICE E – TABELA ARL - MÉTODO MA	34
	APÊNDICE F – TABELA ARL – COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS.....	35

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO AO GRÁFICO DE CONTROLE

A estatística desempenha um papel crucial na análise da competitividade entre as empresas, permitindo que os profissionais avaliem o desempenho, identifiquem áreas de melhoria e tomem decisões utilizando para tanto métodos, técnicas e ferramentas que auxiliam na análise de dados, controle de qualidade, análise de riscos e tomada de decisão. Dentre estas técnicas desenvolvidas, destaca-se o Controle Estatístico do Processo (CEP) que, segundo Peihua Qiu (2014), o SPC é um importante conjunto de ferramentas de controle e gerenciamento da qualidade que visam monitorar processos sequenciais para que funcionem de forma estável e satisfatória.

Montgomery e Runger (2021) cita várias ferramentas do CEP, dentre elas, histograma, gráfico de Pareto e diagrama de causa e efeito, destacando que a mais poderosa de todas as ferramentas de CEP é o gráfico de controle. Segundo o mesmo autor, um gráfico de controle é uma técnica gráfica de monitoramento em tempo real que visa identificar se um processo está sob ou fora de controle devido a causas atribuídas. O autor observa que o gráfico de controle monitora uma característica da qualidade medida a partir de uma amostra em função do tempo.

Abaixo, na Figura 1, temos um exemplo de gráfico de controle:

Figura 1: Exemplo de Gráfico de Controle



Fonte: Montgomery e Runger (2021)

Principais componentes de um gráfico de controle:

Número da Amostra ou tempo (Eixo X): Representa o tempo ou a ordem em que as observações do processo foram coletadas.

Característica da qualidade da amostra (Eixo Y): Representada as medidas do processo que estão sendo monitoradas.

A linha central (LC) em um gráfico de controle é uma referência que representa a média dos dados coletados em um processo ao longo do tempo (μ_0).

O Limite Superior de Controle (LSC) é a linha que representa o valor máximo aceitável para as médias do processo. Se a média dos dados ultrapassar esse limite, pode indicar uma variação fora do esperado no processo.

O Limite Inferior de Controle (LIC) é a linha que representa o valor mínimo aceitável para as médias do processo. Se a média dos dados cair abaixo desse limite, também pode indicar uma variação fora do esperado no processo.

Podemos calcular os valores de LC, LSC e LIC utilizando as equações 1.1, 1.2, 1.3 demonstradas por Montgomery e Runger (2021):

$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

$$LC = \mu_0 \quad (1.2)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.3)$$

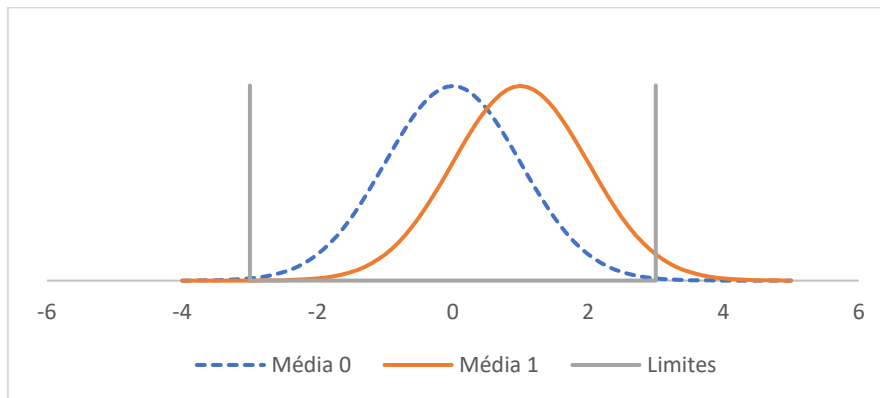
Para nosso estudo consideraremos amostras independentes com uma distribuição normal padrão, média (μ_0) igual a 0, desvio padrão (σ) igual a 1. Neste trabalho consideraremos, sem perda de generalização, que os dados estão padronizados.

Conforme descrito em por Montgomery e Runger (2021), a abordagem tradicional do cálculo dos limites de controle, definida por Shewhart, considera o processo sob controle quando os pontos observados no gráfico estão dentro de uma faixa de 3 desvios-padrão, portanto o k, para o gráfico de controle tradicional, conhecido como

gráfico de Shewhart, ou como chamaremos neste trabalho: Carta de Controle \bar{X} , tem seu valor igual a 3.

A Figura 2 abaixo ilustra o que seria um processo sob controle que segue uma distribuição normal padrão (linha azul tracejada) e como seria sua distribuição caso o processo variasse 1 (um) desvio-padrão (linha vermelha).

Figura 2: Distribuição amostral sob e fora de controle



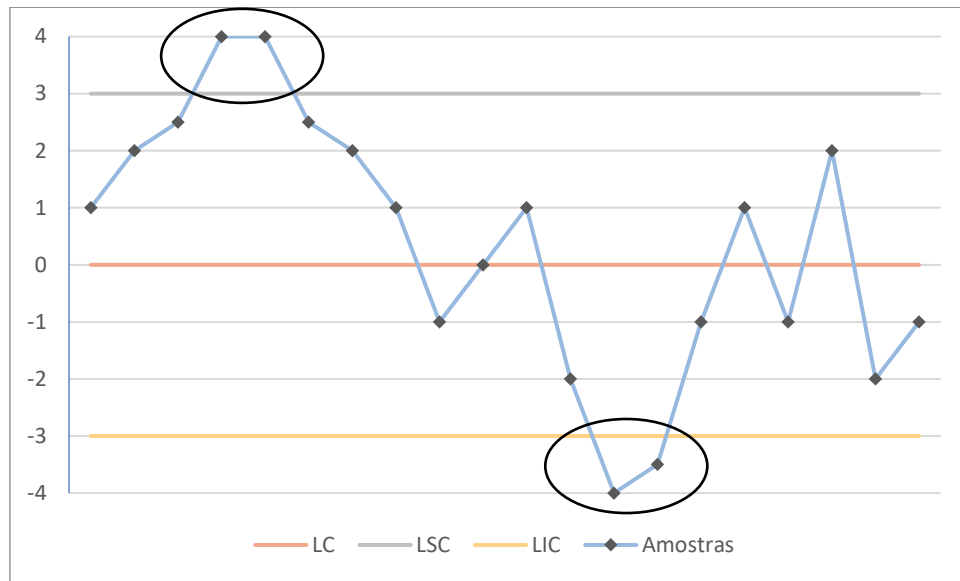
Conforme relatado por Montgomery e Runger (2021), a Carta de Controle \bar{X} apresenta boa sensibilidade a grandes mudanças na média dos atributos medidos, porém não é sensível para detectar pequenas mudanças na média.

1.2 INTRODUÇÃO A REGRA SUPLEMENTAR 2-2 E 2-3 DE KLEIN

Conforme explorado por Fernandes João Lucas Ribeiro e. (2020), algumas regras foram estudadas por autores para tentar melhorar a sensibilidade dos gráficos de controle a pequenas mudanças nas médias. Um destes autores foi Klein (2000) que sugeriu as duas regras, conforme descrito abaixo:

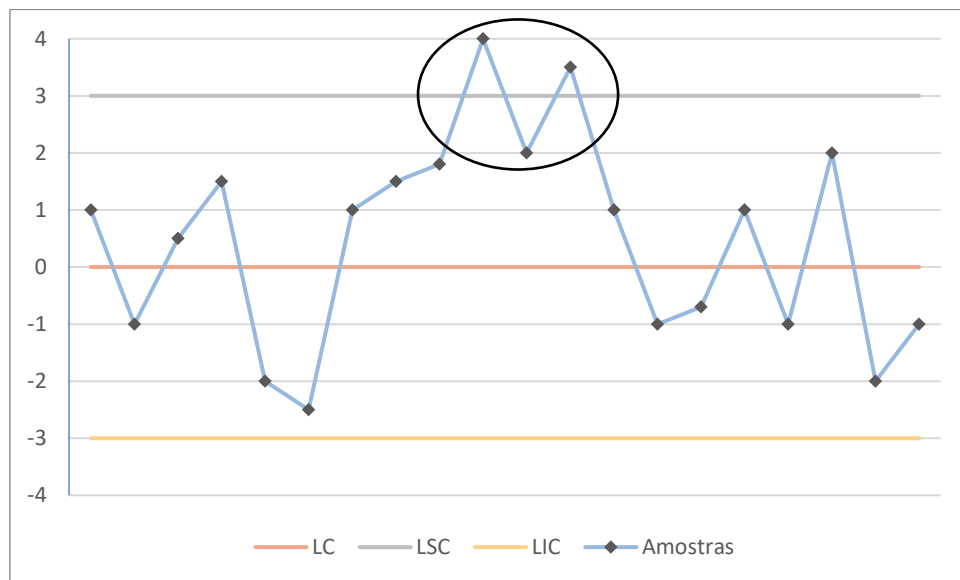
- (i) A primeira regra de Klein, considera que um processo está fora de controle quando dois pontos sucessivos caem fora dos limites de controle superior ou inferior, conforme ilustrado na Figura 3 abaixo:

Figura 3: Processo fora de controle segundo primeira regra de Klein



- (ii) A segunda regra considera fora de controle um processo que dois pontos dentre três caiem fora dos limites de controle, conforme ilustrado na Figura 4 abaixo:

Figura 4: Processo fora de controle, conforme segunda regra de Klein



Neste trabalho discutiremos a regra 2-3 de Klein uma vez que a julgamos mais simples e operacional em uma linha de produção.

1.3 INTRODUÇÃO AO GRÁFICO DE CONTROLE POR MÉDIA MÓVEL

Este trabalho sugere a utilização do Gráfico de Controle por Média Móvel como sendo uma alternativa à Carta de Controle \bar{X} e à regra suplementar 2-2 de Klein para detecção de pequenas mudanças na média de um processo.

Montgomery e Runger (2012) define a média móvel de ordem w para amostras independentes x_1, x_2, \dots coletadas no intervalo w no tempo i como:

$$Mi = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-w+1}}{w} \quad (1.4)$$

Neste trabalho utilizaremos $w=2$, isto é, usaremos para controle a média da amostra atual e a última coletada.

Os limites superior e inferior de controle são definidos por Vasileios Alevizakos et al. (2020) utilizando as equações (1.5) e (1.6) abaixo:

$$LSC = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} \quad (1.5)$$

e

$$LIC = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{nw}} \quad (1.6)$$

Para montarmos o gráfico de controle por médias móveis calculamos uma nova média móvel Mi para cada amostra x_i obtida. Estes valores são, então, plotados no Gráfico. O valor L será escolhido em função do CMC sob controle, assunto que será discutido na próxima seção.

O processo é considerado sobre controle enquanto as médias móveis plotadas estiverem dentro dos limites de controle estabelecidos pelas equações (1.5) e (1.6).

Montgomery e Runger (2012) salienta que a magnitude da mudança na média do processo e o tamanho de w são inversamente proporcionais, sendo que médias

móveis de maior extensão detectariam melhor pequenas mudanças da média. No entanto, isto aumentaria a complexidade operacional do uso da carta.

1.4 COMPRIMENTO MÉDIO DE CORRIDA (CMC)

Quando um processo está sob controle estatístico, espera-se que os pontos no gráfico de controle variem aleatoriamente ao redor da média do processo. No entanto, podem ocorrer sequências de pontos consecutivos acima ou abaixo da média devido à variabilidade natural do processo.

O comprimento médio de corrida (CMC), ou do inglês Average Run Length (ARL), é a métrica que quantifica essa tendência. Segundo Jensen et al. (2006), ele indica, em média, quantas observações consecutivas podemos esperar que permaneçam acima do LSC ou abaixo da LIC antes de ocorrer uma mudança significativa no processo.

Conforme apontado por Montgomery e Runger (2012), em geral, um comprimento médio de corrida curto sugere que o processo é mais sensível a pequenas mudanças, enquanto um comprimento médio de corrida longo indica uma maior estabilidade do processo.

Para este trabalho calculamos o ARL para os três métodos abordados, sendo que este será o nosso indicador de qual método é mais sensível a pequenas mudanças nas médias do processo estudado.

1.5 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A Simulação de Monte Carlo fundamenta-se na geração de múltiplos cenários aleatórios para estimar, analisar e otimizar soluções para problemas matemáticos e estatísticos.

A simulação envolve a geração de números aleatórios de acordo com distribuições específicas que modelam a incerteza presente em um sistema. Esses números aleatórios são então utilizados como entrada em um modelo matemático para simular o comportamento do sistema ao longo do tempo. Repetindo esse processo milhares de vezes, obtemos uma distribuição empírica dos resultados, permitindo análises detalhadas e a tomada de decisões.

Utilizaremos em nosso trabalho desta grande capacidade de geração de cenários para calcularmos e compararmos a eficiência dos valores de ARL para os três métodos abordados.

2 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

2.1 ESTRUTURA PARA COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Para promover a comparabilidade dos resultados para este trabalho, os três métodos abordados irão compartilhar as seguintes premissas:

- Amostras independentes com distribuição normal, desvio padrão igual a 1 ($\sigma=1$) e média sob controle igual a 0 ($\mu_0=0$).
- ARL calculado para mudanças na média variando de 0 a 5, com incremento de 0,2, ou seja, 0, 0,2, 0,4, 5.
- Tamanho da amostra (n) variando de uma a cinco observações.

2.2 DEFINIÇÃO DOS LIMITES DE CONTROLE

2.2.1 Limites de controle para a Carta de Controle \bar{X}

Os Limites Superiores de Controle (LSC), Linhas Centrais (LC) e Limites Inferiores de Controle (LIC) utilizados para montagem da Carta de Controle \bar{X} e cálculo das ARL foram definidos respectivamente pelas equações 1.1, 1.2 e 1.3, presentes no item 1.1 deste trabalho, considerando $k=3$, e $\sigma =1$ e número de observações (n) variando de 1 a 5. O resultado é apresentado na Tabela 1 abaixo:

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
LSC	3,00	2,12	1,73	1,50	1,34
LC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LIC	-3,00	-2,12	-1,73	-1,50	-1,34

Tabela 1: Limites de controle para a Carta de Controle \bar{X}

2.2.2 Limites de controle para o método Klein

Os limites de controle LSC e LIC gerados segundo as regras 2-2 de Klein foram calculados por Fernandes João Lucas Ribeiro e. (2020) por meio do uso de simulação de Monte Carlo e estão presentes na Tabela 2 abaixo:

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
LSC	1,78	1,26	1,03	0,89	0,80
LC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LIC	-1,78	-1,26	-1,03	-0,89	-0,80

Tabela 2: Limites de controle para o método de Klein

2.2.3 Limites de controle para o método Médias Móveis

Os Limites Superiores de Controle (LSC) e Limites Inferiores de Controle (LIC) utilizados para montagem dos gráficos de controle utilizando Médias Móveis (MA) foram definidos respectivamente pelas equações 1.5, 1.6, presentes no item 1.1 deste trabalho.

A premissas consideradas para o cálculo dos limites foram:

- $w = 2$
- $\sigma = 1$
- $L = 2.981$ (usando os resultados presentes da tabela 2 de Vasileios Alevizakos et al. (2020))
- n variando de 1 a 5.

O resultado é apresentado na tabela 3 abaixo:

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
LSC	2,11	1,49	1,22	1,05	0,94
LC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LIC	-2,11	-1,49	-1,22	-1,05	-0,94

Tabela 3: Limites de controle para o método MA

2.2.4 Comparação entre os limites de controle (LSC)

A tabela 4 compara os Limites Superiores de Controle (LSC) para os três métodos. Importa notar que LIC e LSC tem o mesmo módulo, porém com sinal invertido considerando a simetria da distribuição Normal:

LSC	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
Carta de Controle \bar{X}	3,00	2,12	1,73	1,50	1,34
Klein	1,78	1,26	1,03	0,89	0,80
Média Móvel	2,11	1,49	1,22	1,05	0,94

Tabela 4: LSC para dos três métodos com variações de n

A Figura 5 apresenta um comparativo visual entre os LSC para os três métodos, onde podemos constatar que o método de Klein possui limites mais estreitos e a Carta de Controle \bar{X} limites mais largos.

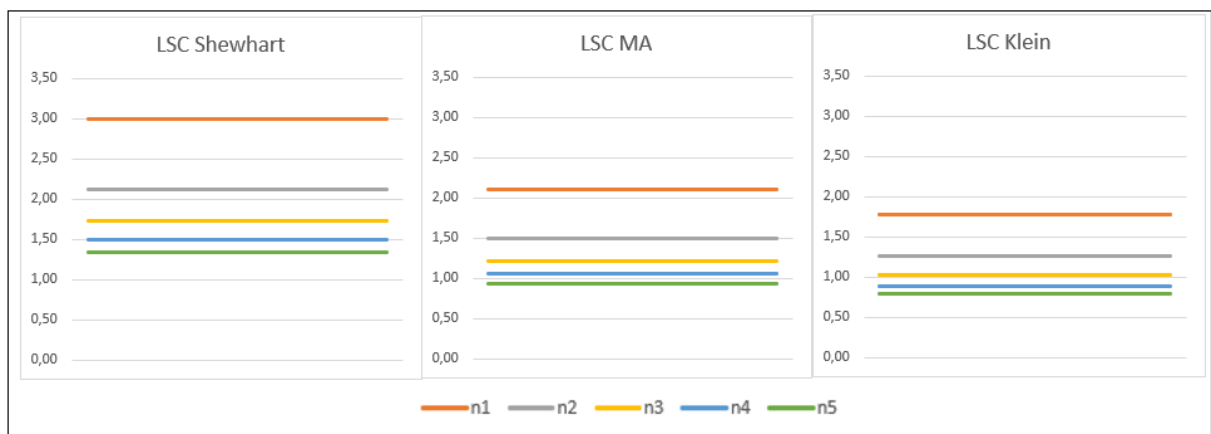


Figura 5: Comparativo LSC Carta de Controle \bar{X} , MA e Klein

2.3 CÁLCULO DO ARL

2.3.1 Cálculo do ARL para a Carta de Controle \bar{X}

Conforme Montgomery e Runger (2021), para um processo sob controle com limites 3-sigma, a probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle (p), considerando uma distribuição normal padrão, será de aproximadamente 0,26998%, sendo o cálculo do ARL conforme descrito na equação 1.7 abaixo:

$$ARL = \frac{1}{p} \cong \frac{1}{0,0026998} \cong 370,40 \quad (1.7)$$

Segundo o mesmo autor, para calcular o ARL de um processo com desvio em sua média padrão temos que recalcular a probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle (p) através da equação 1.8 :

$$P[LIC \leq \bar{X} \leq LSC \mid \mu = \mu_1] \quad (1.8)$$

Sendo:

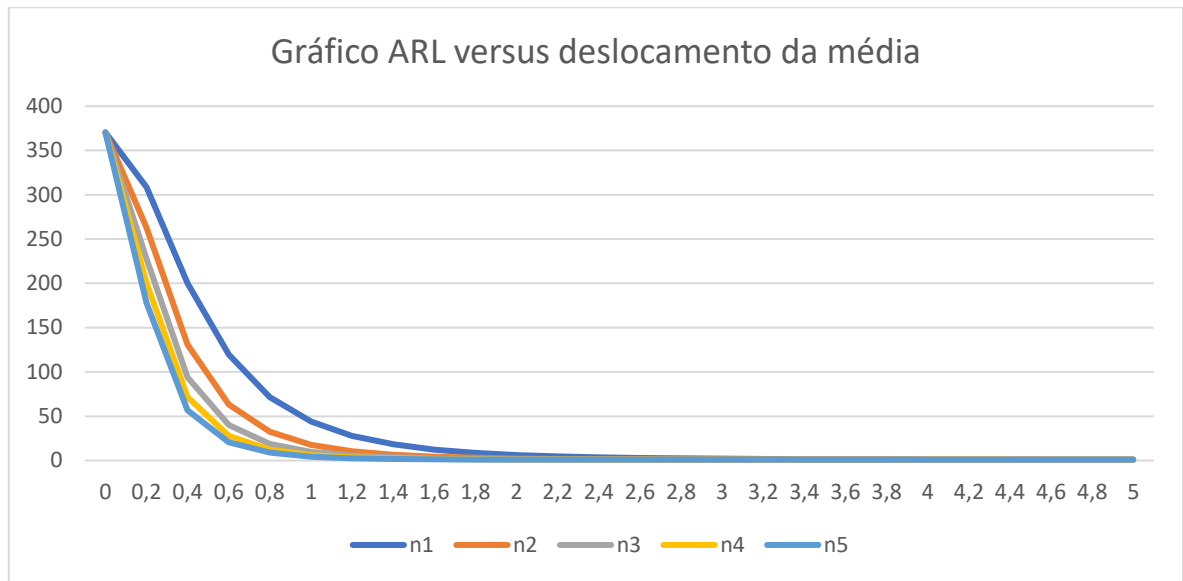
μ_1 = nova média do processo (média para situação fora de controle)

Para calcular todos os valores de ARL para médias que variam de 0 a 5 com incremento de 0,2, e n variando de 0 a 5, foi utilizado o software R. O script encontra-se no Apêndice A e a tabela com todos os ARL resultantes encontra-se no Apêndice B.

A Figura 6 abaixo apresenta um gráfico com 5 curvas, uma para cada valor de n , representando ARL calculados para todos os deslocamentos de média.

As curvas mais suaves apresentadas para tamanho de amostras menores indicam menor sensibilidade a pequenas alterações nas médias.

Figura 6: Gráfico ARL versus deslocamento da média

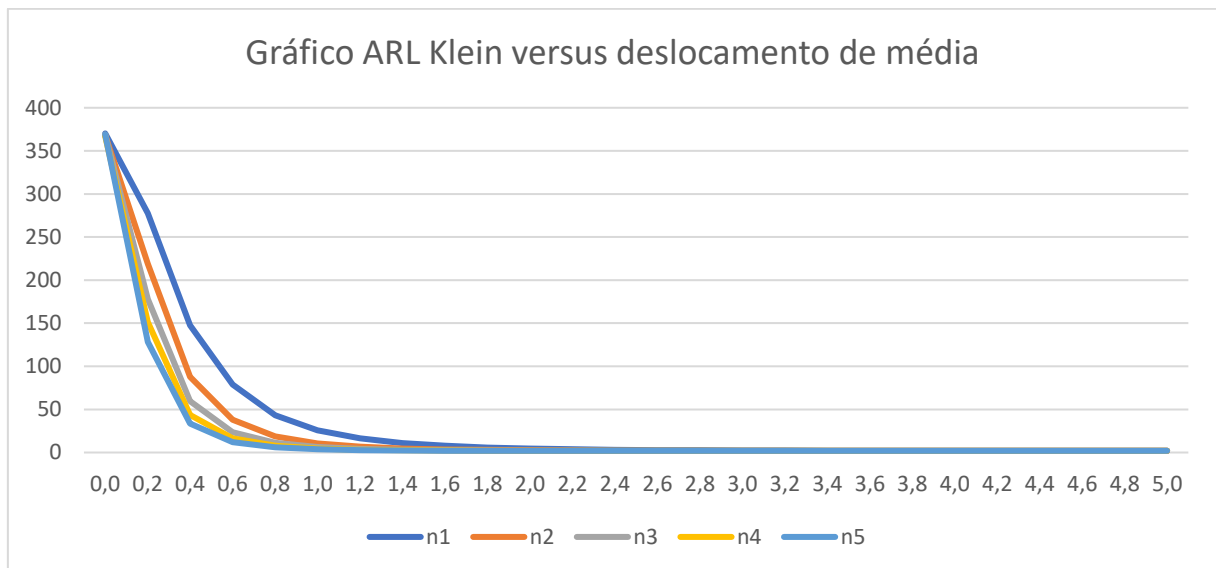


2.3.2 Cálculo do ARL para o método de Klein

O cálculo do ARL pelo método de Klein foi realizado por Fernandes João Lucas Ribeiro e. (2020) por meio do uso de 75.000 Simulações de Monte Carlo, utilizando os limites citados no item 2.2.2. A tabela resultante encontra-se no Apêndice C.

A figura 7, apresentada abaixo, retrata as curvas ARL calculados utilizando o método de Klein. Seu comportamento é semelhante ao gráfico 2.2 que retrata as curvas ARL da Carta de Controle \bar{X} .

Figura 7: Gráfico ARL versus deslocamento da média para Klein



2.3.3 Cálculo do ARL para o método de médias móveis

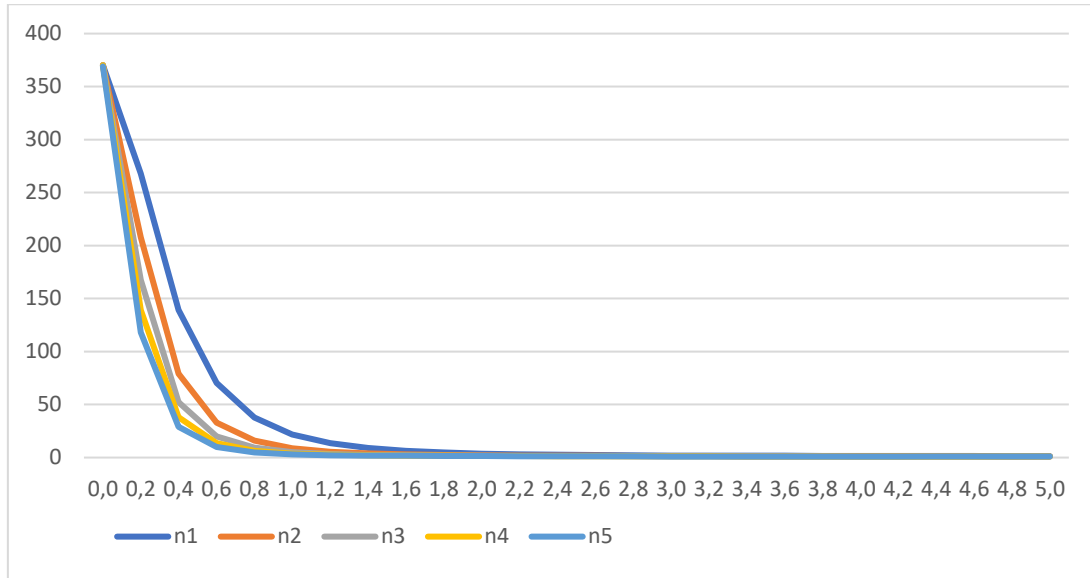
Para calcular o ARL do método de médias móveis foram executados 500.000 (quinhentos mil) ciclos de Simulação de Monte Carlo para cada deslocamento de média e amostras de tamanho n . Os valores de ARL obtidos podem ser visualizados na tabela constante do Apêndice D.

O algoritmo utilizado para cálculo foi desenvolvido no software R e está presente no anexo B. Abaixo um resumo dos passos de seu funcionamento:

- (i) Início do Loop para cálculo de $n = 1$ a $n = 5$
- (ii) Cálculo dos limites de controle superior e inferior
- (iii) Início do Loop para cálculo dos deslocamentos de média (u_1) de 0 a 5, com intervalo 0,2.
- (iv) Início do ciclo de 500000 simulações
- (v) Definido o primeiro subgrupo de amostra de n elementos
- (vi) Início do ciclo de cálculo de ARL Parcial
- (vii) Definido segundo subgrupo de amostra de n elementos
- (viii) Cálculo da MA através da média das médias dos subgrupos de amostras
- (ix) Substituição da primeira amostra pela segunda amostra
- (x) Cálculo de ARL Parcial através da soma de ciclos efetuados
- (xi) Reinício do ciclo de cálculo de ARL Parcial até que MA seja maior que LSC ou menor que LIC
- (xii) Cálculo do ARL: média dos 500000 ARL Parciais
- (xiii) Incremento de u_1
- (xiv) Volta ao início do Loop u_1
- (xv) Incremento de n
- (xvi) Volta ao início do Loop n

A figura 8 apresenta um gráfico com as curvas ARL calculadas utilizando o método de médias móveis (MA). Observamos que o comportamento das curvas é semelhante às curvas geradas para o método tradicional e Klein.

Figura 8: Gráfico ARL versus deslocamento da média para Média Móvel



2.3.4 Comparação entre os três métodos

Buscando comparar os resultados de ARL apresentados pelos três métodos abordados, foi construída a tabela 5 abaixo, reproduzida no Apêndice F, mesclando os resultados constantes dos Apêndices B, C e E.

média	n = 1			n = 2			n = 3			n = 4			n = 5		
	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA
0,0	370,40	370,25	370,23	370,40	368,30	370,26	370,40	368,95	370,23	370,40	366,88	370,18	370,40	368,90	369,07
0,2	308,43	277,46	267,83	262,74	218,86	207,85	227,72	178,15	167,58	200,08	151,29	139,08	177,73	128,33	118,05
0,4	200,08	147,77	139,14	130,86	87,86	79,15	94,04	59,61	52,30	71,55	43,73	37,92	56,59	33,55	28,97
0,6	119,67	78,79	70,42	63,38	37,91	32,89	40,03	23,38	19,79	27,82	16,33	13,57	20,56	12,16	10,06
0,8	71,55	43,39	37,80	32,41	18,84	15,90	18,79	11,30	9,24	12,38	7,78	6,34	8,86	5,96	4,79
1,0	43,89	25,69	21,89	17,73	10,64	8,74	9,76	6,39	5,19	6,30	4,62	3,70	4,50	3,69	2,94
1,2	27,82	16,31	13,55	10,38	6,73	5,46	5,61	4,26	3,41	3,65	3,23	2,60	2,66	2,72	2,21
1,4	18,25	10,96	8,98	6,50	4,73	3,79	3,54	3,17	2,55	2,38	2,58	2,09	1,81	2,30	1,88
1,6	12,38	7,82	6,34	4,34	3,60	2,88	2,44	2,61	2,12	1,73	2,26	1,84	1,39	2,11	1,70
1,8	8,69	5,82	4,72	3,08	2,94	2,37	1,83	2,31	1,88	1,38	2,11	1,69	1,18	2,04	1,56
2,0	6,30	4,61	3,70	2,32	2,55	2,07	1,47	2,15	1,74	1,19	2,04	1,57	1,08	2,01	1,43
2,2	4,72	3,81	3,04	1,84	2,31	1,89	1,26	2,06	1,62	1,09	2,01	1,45	1,03	2,00	1,31
2,4	3,65	3,24	2,59	1,53	2,17	1,76	1,14	2,03	1,52	1,04	2,00	1,34	1,01	2,00	1,21
2,6	2,90	2,85	2,30	1,33	2,09	1,66	1,07	2,01	1,42	1,01	2,00	1,24	1,00	2,00	1,13
2,8	2,38	2,58	2,09	1,20	2,04	1,58	1,03	2,00	1,33	1,00	2,00	1,16	1,00	2,00	1,07
3,0	2,00	2,39	1,95	1,12	2,02	1,49	1,01	2,00	1,24	1,00	2,00	1,10	1,00	2,00	1,04
3,2	1,73	2,26	1,84	1,07	2,01	1,41	1,01	2,00	1,17	1,00	2,00	1,06	1,00	2,00	1,02
3,4	1,53	2,17	1,76	1,04	2,00	1,34	1,00	2,00	1,12	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,01
3,6	1,38	2,10	1,69	1,02	2,00	1,27	1,00	2,00	1,08	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00
3,8	1,27	2,07	1,62	1,01	2,00	1,21	1,00	2,00	1,05	1,00	2,00	1,01	1,00	2,00	1,00
4,0	1,19	2,04	1,57	1,00	2,00	1,15	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,2	1,13	2,02	1,51	1,00	2,00	1,11	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,4	1,09	2,01	1,45	1,00	2,00	1,08	1,00	2,00	1,01	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,6	1,06	2,01	1,39	1,00	2,00	1,05	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,8	1,04	2,00	1,34	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
5,0	1,02	2,00	1,29	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00

Tabela 5: Comparativo de ARL para os três métodos abordados

A primeira constatação que podemos tirar da tabela acima é que para um processo sob controle, que em nosso trabalho caracterizamos como tendo média 0, o ARL calculado é de aproximadamente 370, independentemente do método escolhido ou do tamanho da amostra (n).

Para facilitar o comparativo entre os métodos desenvolvemos abaixo a tabela 6 que compara o método tradicional com o método de médias móveis (MA):

Média	n = 1			n = 2			n = 3			n = 4			n = 5		
	Tradic.	MA	Dif.	Tradic.	MA	Dif.	Tradic.	MA	Dif.	Tradic.	MA	Dif.	Tradic.	MA	Dif.
0,0	370,40	370,23	0,05%	370,40	370,26	0,04%	370,40	370,23	0,05%	370,40	370,18	0,06%	370,40	369,07	0,36%
0,2	308,43	267,83	13,16%	262,74	207,85	20,89%	227,72	167,58	26,41%	200,08	139,08	30,49%	177,73	118,05	33,58%
0,4	200,08	139,14	30,46%	130,86	79,15	39,52%	94,04	52,30	44,38%	71,55	37,92	47,01%	56,59	28,97	48,81%
0,6	119,67	70,42	41,15%	63,38	32,89	48,10%	40,03	19,79	50,57%	27,82	13,57	51,22%	20,56	10,06	51,05%
0,8	71,55	37,80	47,16%	32,41	15,90	50,94%	18,79	9,24	50,85%	12,38	6,34	48,82%	8,86	4,79	45,94%
1,0	43,89	21,89	50,13%	17,73	8,74	50,70%	9,76	5,19	46,84%	6,30	3,70	41,27%	4,50	2,94	34,59%
1,2	27,82	13,55	51,28%	10,38	5,46	47,45%	5,61	3,41	39,21%	3,65	2,60	28,77%	2,66	2,21	17,08%
1,4	18,25	8,98	50,78%	6,50	3,79	41,75%	3,54	2,55	27,90%	2,38	2,09	12,07%	1,81	1,88	-3,61%
1,6	12,38	6,34	48,82%	4,34	2,88	33,63%	2,44	2,12	13,16%	1,73	1,84	-6,55%	1,39	1,70	-21,97%
1,8	8,69	4,72	45,72%	3,08	2,37	23,01%	1,83	1,88	-2,94%	1,38	1,69	-22,33%	1,18	1,56	-31,89%
2,0	6,30	3,70	41,33%	2,32	2,07	10,73%	1,47	1,74	-18,10%	1,19	1,57	-31,60%	1,08	1,43	-32,17%
2,2	4,72	3,04	35,63%	1,84	1,89	-2,47%	1,26	1,62	-28,68%	1,09	1,45	-32,97%	1,03	1,31	-27,09%
2,4	3,65	2,59	28,92%	1,53	1,76	-15,06%	1,14	1,52	-33,10%	1,04	1,34	-28,78%	1,01	1,21	-19,66%
2,6	2,90	2,30	20,70%	1,33	1,66	-25,08%	1,07	1,42	-32,67%	1,01	1,24	-23,10%	1,00	1,13	-12,93%
2,8	2,38	2,09	12,02%	1,20	1,58	-31,45%	1,03	1,33	-28,89%	1,00	1,16	-16,32%	1,00	1,07	-7,37%
3,0	2,00	1,95	2,65%	1,12	1,49	-33,39%	1,01	1,24	-23,20%	1,00	1,10	-10,31%	1,00	1,04	-3,97%
3,2	1,73	1,84	-6,40%	1,07	1,41	-32,06%	1,01	1,17	-16,29%	1,00	1,06	-6,20%	1,00	1,02	-1,87%
3,4	1,53	1,76	-14,85%	1,04	1,34	-28,66%	1,00	1,12	-11,87%	1,00	1,03	-3,37%	1,00	1,01	-0,83%
3,6	1,38	1,69	-22,30%	1,02	1,27	-24,22%	1,00	1,08	-7,66%	1,00	1,02	-1,73%	1,00	1,00	-0,35%
3,8	1,27	1,62	-27,89%	1,01	1,21	-19,45%	1,00	1,05	-4,71%	1,00	1,01	-0,85%	1,00	1,00	-0,12%
4,0	1,19	1,57	-31,52%	1,00	1,15	-15,38%	1,00	1,03	-2,75%	1,00	1,00	-0,38%	1,00	1,00	-0,04%
4,2	1,13	1,51	-33,25%	1,00	1,11	-11,14%	1,00	1,02	-1,55%	1,00	1,00	-0,16%	1,00	1,00	-0,01%
4,4	1,09	1,45	-32,96%	1,00	1,08	-7,81%	1,00	1,01	-0,81%	1,00	1,00	-0,06%	1,00	1,00	0,00%
4,6	1,06	1,39	-31,41%	1,00	1,05	-5,21%	1,00	1,00	-0,38%	1,00	1,00	-0,02%	1,00	1,00	0,00%
4,8	1,04	1,34	-28,69%	1,00	1,03	-3,42%	1,00	1,00	-0,19%	1,00	1,00	-0,01%	1,00	1,00	0,00%
5,0	1,02	1,29	-26,41%	1,00	1,02	-2,16%	1,00	1,00	-0,08%	1,00	1,00	0,00%	1,00	1,00	0,00%

Tabela 6: Comparativo entre ARL Tradicional e ARL MA

Inicialmente observamos que os métodos tendem a estabilizar com valores de ARL próximos a 1 (um).

A análise das colunas “Dif.”, que calculam a diferença percentual entre ARL Tradicional e ARL MA, traz evidências que o método MA é mais sensível a pequenas mudanças nas médias do processo em comparação à Carta de Controle \bar{X} , nas seguintes condições:

- Média $\leq 3,0$, $n=1$
- Média $\leq 2,0$, $n=2$
- Média $\leq 1,6$, $n=3$
- Média $\leq 1,4$, $n=4$
- Média $\leq 1,2$, $n=5$

Também podemos notar que a Carta de Controle \bar{X} aumenta sua capacidade de reconhecer pequenos deslocamentos na média à medida que aumentamos o tamanho da amostra (n).

A comparação entre o método de médias móveis (MA) e a regra 2-2 de Klein é feita na tabela 7 abaixo:

Média	n = 1			n = 2			n = 3			n = 4			n = 5		
	Klein	MA	Dif.	Klein	MA	Dif.	Klein	MA	Dif.	Klein	MA	Dif.	Klein	MA	Dif.
0,0	370,25	370,23	0,01%	368,30	370,26	-0,53%	368,95	370,23	-0,35%	366,88	370,18	-0,90%	368,90	369,07	-0,05%
0,2	277,46	267,83	3,47%	218,86	207,85	5,03%	178,15	167,58	5,93%	151,29	139,08	8,07%	128,33	118,05	8,01%
0,4	147,77	139,14	5,84%	87,86	79,15	9,91%	59,61	52,30	12,26%	43,73	37,92	13,29%	33,55	28,97	13,66%
0,6	78,79	70,42	10,62%	37,91	32,89	13,23%	23,38	19,79	15,37%	16,33	13,57	16,91%	12,16	10,06	17,23%
0,8	43,39	37,80	12,87%	18,84	15,90	15,60%	11,30	9,24	18,27%	7,78	6,34	18,55%	5,96	4,79	19,64%
1,0	25,69	21,89	14,81%	10,64	8,74	17,86%	6,39	5,19	18,81%	4,62	3,70	19,91%	3,69	2,94	20,23%
1,2	16,31	13,55	16,90%	6,73	5,46	18,94%	4,26	3,41	19,95%	3,23	2,60	19,51%	2,72	2,21	18,91%
1,4	10,96	8,98	18,05%	4,73	3,79	19,95%	3,17	2,55	19,48%	2,58	2,09	18,89%	2,30	1,88	18,47%
1,6	7,82	6,34	18,98%	3,60	2,88	19,99%	2,61	2,12	18,82%	2,26	1,84	18,44%	2,11	1,70	19,65%
1,8	5,82	4,72	18,96%	2,94	2,37	19,34%	2,31	1,88	18,45%	2,11	1,69	19,99%	2,04	1,56	23,71%
2,0	4,61	3,70	19,82%	2,55	2,07	18,78%	2,15	1,74	19,25%	2,04	1,57	23,23%	2,01	1,43	28,98%
2,2	3,81	3,04	20,25%	2,31	1,89	18,38%	2,06	1,62	21,29%	2,01	1,45	27,89%	2,00	1,31	34,55%
2,4	3,24	2,59	19,93%	2,17	1,76	18,87%	2,03	1,52	25,26%	2,00	1,34	33,04%	2,00	1,21	39,57%
2,6	2,85	2,30	19,31%	2,09	1,66	20,40%	2,01	1,42	29,38%	2,00	1,24	37,83%	2,00	1,13	43,54%
2,8	2,58	2,09	18,84%	2,04	1,58	22,67%	2,00	1,33	33,62%	2,00	1,16	41,84%	2,00	1,07	46,31%
3,0	2,39	1,95	18,54%	2,02	1,49	26,04%	2,00	1,24	37,78%	2,00	1,10	44,85%	2,00	1,04	48,02%
3,2	2,26	1,84	18,55%	2,01	1,41	29,70%	2,00	1,17	41,27%	2,00	1,06	46,90%	2,00	1,02	49,07%
3,4	2,17	1,76	19,03%	2,00	1,34	33,10%	2,00	1,12	44,07%	2,00	1,03	48,31%	2,00	1,01	49,58%
3,6	2,10	1,69	19,63%	2,00	1,27	36,65%	2,00	1,08	46,17%	2,00	1,02	49,13%	2,00	1,00	49,82%
3,8	2,07	1,62	21,54%	2,00	1,21	39,68%	2,00	1,05	47,64%	2,00	1,01	49,58%	2,00	1,00	49,94%
4,0	2,04	1,57	23,28%	2,00	1,15	42,31%	2,00	1,03	48,63%	2,00	1,00	49,81%	2,00	1,00	49,98%
4,2	2,02	1,51	25,46%	2,00	1,11	44,43%	2,00	1,02	49,23%	2,00	1,00	49,92%	2,00	1,00	49,99%
4,4	2,01	1,45	27,90%	2,00	1,08	46,10%	2,00	1,01	49,60%	2,00	1,00	49,97%	2,00	1,00	50,00%
4,6	2,01	1,39	30,70%	2,00	1,05	47,40%	2,00	1,00	49,81%	2,00	1,00	49,99%	2,00	1,00	50,00%
4,8	2,00	1,34	33,08%	2,00	1,03	48,29%	2,00	1,00	49,91%	2,00	1,00	50,00%	2,00	1,00	50,00%
5,0	2,00	1,29	35,53%	2,00	1,02	48,92%	2,00	1,00	49,96%	2,00	1,00	50,00%	2,00	1,00	50,00%

Tabela 7: Comparativo entre ARL Klein e ARL MA

Verificamos inicialmente que o método MA é mais eficiente que o método de Klein visto tender a estabilizar em valores de ARL próximos a 1, em detrimento do método de Klein que tende a estabilizar em valores próximos a 2.

A análise das colunas “Dif.”, que calculam a diferença percentual entre ARL Klein e ARL MA, traz evidências que para todo o espectro de médias estudado, o método MA é mais sensível que o método de Klein, conseguindo detectar mais rapidamente as mudanças nas médias do processo.

Também podemos notar que à medida que aumentamos o deslocamento da média, aumentamos a diferença percentual entre ARL MA e ARL Klein.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da carta de controle \bar{X} com o método das médias móveis (MA) mostrou-se mais eficiente que a regra 2-2 de Klein para detecção na mudança da média do processo para todos os deslocamentos estudados.

A utilização da carta de controle \bar{X} com o método das médias móveis (MA) mostrou-se mais eficiente que o método tradicional para detecção na mudança das médias nas seguintes condições: Média $\leq 3,0$, $n = 1$; Média $\leq 2,0$, $n = 2$; Média $\leq 1,6$, $n = 3$; Média $\leq 1,4$, $n = 4$; Média $\leq 1,2$, $n = 5$.

Para processos que não são esperados grandes deslocamentos na média, torna-se evidente a superioridade da Carta de Controle utilizando Médias Móveis em detrimento dos demais métodos abordados neste trabalho.

Como trabalho futuro sugiro a avaliação de médias móveis de maior extensão, ou seja, valores de w maiores que dois.

REFERÊNCIAS

Montgomery, D. C.;Runger, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7^a. ed.Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.2021. p.513-554.

Montgomery, D. C.;Runger, G. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 7^a. ed. Wiley. 2012. p.442-444.

Vasileios Alevizakos , Kashinath Chatterjee , Christos Koukouvinos & Angeliki Lappa (2020): **A double moving average control chart: Discussion, Communications in Statistics - Simulation and Computation**, DOI: 10.1080/03610918.2020.1788591

Fernandes João Lucas Ribeiro e. (2020): **Avaliação do desempenho da carta x com uso da regra suplementar 2-2 de Klein por meio de simulação de Monte Carlo**. Especialização em Estatística, UFMG. 2021.

Willis A. Jensen, L. Allison Jones-Farmer, Charles W. Champ & William H. Woodall (2006) **Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review**, Journal of Quality Technology, v. 38, n. 4, p. 349-364. 2006.

Peihua Qiu. **Introduction to Statistical Process Control**. Texts in Statistical Science. CRC Press. p. 1-7. 2014.

APÊNDICE A – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO ARL DA CARTA DE CONTROLE \bar{X}

```

tb.arl<- data.frame("Media"=seq(0,5,0.2),
                  "Ar1 n1"=0, "Ar1 n2"=0, "Ar1 n3"=0,
                  "Ar1 n4"=0, "Ar1 n5"=0)

mu <- 0 # média normal padrão
dp <- 1 # desvio-padrão normal
k <- 3 # distância dos limites de controle a partir da linha central

n <- 1 # tamanho inicial da amostra

for(j in 2:6) { # calcula CMC para n= 1 até 5

  LIC <- -k * dp/sqrt(n)
  LSC <- k * dp/sqrt(n)
  dpa <- dp / sqrt(n) # desvio-padrão amostral
  u1 <- 0 # deslocamento em relação ao centro da média

  for(i in 1:26) { #Loop para diferentes médias

    p <- 1 - (pnorm(LSC, mu + u1, dpa) - pnorm(LIC, mu + u1, dpa))
    # p = probabilidade de ter um ponto fora de controle
    ARL <- round(1 / p, digits = 3) # Comprimento médio da corrida
    tb.arl[i,j] <- ARL # grava ARL coordenadas i=n e j=u1
    u1 <- u1 + 0.2 # incrementa o deslocamento
  }

  n <- n + 1 # incrementa n
}

write.csv2(tb.arl, file = "tb_arl.csv")

```

APÊNDICE B – TABELA ARL - CARTA DE CONTROLE \bar{X}

	n1	n2	n3	n4	n5
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,2	308,43	262,74	227,72	200,08	177,73
0,4	200,08	130,86	94,04	71,55	56,59
0,6	119,67	63,38	40,03	27,82	20,56
0,8	71,55	32,41	18,79	12,38	8,86
1,0	43,89	17,73	9,76	6,30	4,50
1,2	27,82	10,38	5,61	3,65	2,66
1,4	18,25	6,50	3,54	2,38	1,81
1,6	12,38	4,34	2,44	1,73	1,39
1,8	8,69	3,08	1,83	1,38	1,18
2,0	6,30	2,32	1,47	1,19	1,08
2,2	4,72	1,84	1,26	1,09	1,03
2,4	3,65	1,53	1,14	1,04	1,01
2,6	2,90	1,33	1,07	1,01	1,00
2,8	2,38	1,20	1,03	1,00	1,00
3,0	2,00	1,12	1,01	1,00	1,00
3,2	1,73	1,07	1,01	1,00	1,00
3,4	1,53	1,04	1,00	1,00	1,00
3,6	1,38	1,02	1,00	1,00	1,00
3,8	1,27	1,01	1,00	1,00	1,00
4,0	1,19	1,00	1,00	1,00	1,00
4,2	1,13	1,00	1,00	1,00	1,00
4,4	1,09	1,00	1,00	1,00	1,00
4,6	1,06	1,00	1,00	1,00	1,00
4,8	1,04	1,00	1,00	1,00	1,00
5,0	1,02	1,00	1,00	1,00	1,00

APÊNDICE C – TABELA ARL – MÉTODO DE KLEIN

	n1	n2	n3	n4	n5
0,0	370,25	368,30	368,95	366,88	368,90
0,2	277,46	218,86	178,15	151,29	128,33
0,4	147,77	87,86	59,61	43,73	33,55
0,6	78,79	37,91	23,38	16,33	12,16
0,8	43,39	18,84	11,30	7,78	5,96
1,0	25,69	10,64	6,39	4,62	3,69
1,2	16,31	6,73	4,26	3,23	2,72
1,4	10,96	4,73	3,17	2,58	2,30
1,6	7,82	3,60	2,61	2,26	2,11
1,8	5,82	2,94	2,31	2,11	2,04
2,0	4,61	2,55	2,15	2,04	2,01
2,2	3,81	2,31	2,06	2,01	2,00
2,4	3,24	2,17	2,03	2,00	2,00
2,6	2,85	2,09	2,01	2,00	2,00
2,8	2,58	2,04	2,00	2,00	2,00
3,0	2,39	2,02	2,00	2,00	2,00
3,2	2,26	2,01	2,00	2,00	2,00
3,4	2,17	2,00	2,00	2,00	2,00
3,6	2,10	2,00	2,00	2,00	2,00
3,8	2,07	2,00	2,00	2,00	2,00
4,0	2,04	2,00	2,00	2,00	2,00
4,2	2,02	2,00	2,00	2,00	2,00
4,4	2,01	2,00	2,00	2,00	2,00
4,6	2,01	2,00	2,00	2,00	2,00
4,8	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
5,0	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00

APÊNDICE D – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO ARL PARA MÉDIAS MÓVEIS

```

rm(list = ls())

t0 <- Sys.time()

tabela <- data.frame("u1"=seq(0,5,0.2),
                    "Arln1"=0,"Arln2"=0,"Arln3"=0,"Arln4"=0,"Arln5"=0)

simulacoes <- 500000

Result <- numeric(simulacoes)

for (n in 1:5) { #Loop para tamanho da amostra

  u1 <- 0 #Média fora de controle
  UCL <- 2.981 * (1/(sqrt(2*n)))
  LCL <- -UCL

  for (j in 1:26) { #Loop para diferentes médias

    for (i in 1:simulacoes){ #Loop para simulações

      Amostra1 <- rnorm(n,0,1)
      sob.controle <- TRUE
      ARLi <- 0

      while (sob.controle){
        Amostra2 <- rnorm(n,u1,1)
        MA <- (mean(Amostra1) + mean(Amostra2))/2 #Média móvel

        if (MA >= UCL || MA <= LCL){
          sob.controle <- FALSE
        }
        ARLi <- ARLi + 1
        Amostra1 <- Amostra2
      }
      Result[i] <- ARLi #Guardando o valor do ARL
    }

    ARL <- mean(Result) #ARL Estimado

    tabela[j,n+1] <- ARL
    u1 = u1 + 0.2
  }

}

write.csv2(tabela, file = "tabela.csv")

(tempo.execucao <- Sys.time() - t0)

```

APÊNDICE E – TABELA ARL - MÉTODO MA

	n1	n2	n3	n4	n5
0,0	370,23	370,26	370,23	370,18	369,07
0,2	267,83	207,85	167,58	139,08	118,05
0,4	139,14	79,15	52,30	37,92	28,97
0,6	70,42	32,89	19,79	13,57	10,06
0,8	37,80	15,90	9,24	6,34	4,79
1,0	21,89	8,74	5,19	3,70	2,94
1,2	13,55	5,46	3,41	2,60	2,21
1,4	8,98	3,79	2,55	2,09	1,88
1,6	6,34	2,88	2,12	1,84	1,70
1,8	4,72	2,37	1,88	1,69	1,56
2,0	3,70	2,07	1,74	1,57	1,43
2,2	3,04	1,89	1,62	1,45	1,31
2,4	2,59	1,76	1,52	1,34	1,21
2,6	2,30	1,66	1,42	1,24	1,13
2,8	2,09	1,58	1,33	1,16	1,07
3,0	1,95	1,49	1,24	1,10	1,04
3,2	1,84	1,41	1,17	1,06	1,02
3,4	1,76	1,34	1,12	1,03	1,01
3,6	1,69	1,27	1,08	1,02	1,00
3,8	1,62	1,21	1,05	1,01	1,00
4,0	1,57	1,15	1,03	1,00	1,00
4,2	1,51	1,11	1,02	1,00	1,00
4,4	1,45	1,08	1,01	1,00	1,00
4,6	1,39	1,05	1,00	1,00	1,00
4,8	1,34	1,03	1,00	1,00	1,00
5,0	1,29	1,02	1,00	1,00	1,00

APÊNDICE F – TABELA ARL – COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS

média	n = 1			n = 2			n = 3			n = 4			n = 5		
	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA	Tradic.	Klein	MA
0,0	370,40	370,25	370,23	370,40	368,30	370,26	370,40	368,95	370,23	370,40	366,88	370,18	370,40	368,90	369,07
0,2	308,43	277,46	267,83	262,74	218,86	207,85	227,72	178,15	167,58	200,08	151,29	139,08	177,73	128,33	118,05
0,4	200,08	147,77	139,14	130,86	87,86	79,15	94,04	59,61	52,30	71,55	43,73	37,92	56,59	33,55	28,97
0,6	119,67	78,79	70,42	63,38	37,91	32,89	40,03	23,38	19,79	27,82	16,33	13,57	20,56	12,16	10,06
0,8	71,55	43,39	37,80	32,41	18,84	15,90	18,79	11,30	9,24	12,38	7,78	6,34	8,86	5,96	4,79
1,0	43,89	25,69	21,89	17,73	10,64	8,74	9,76	6,39	5,19	6,30	4,62	3,70	4,50	3,69	2,94
1,2	27,82	16,31	13,55	10,38	6,73	5,46	5,61	4,26	3,41	3,65	3,23	2,60	2,66	2,72	2,21
1,4	18,25	10,96	8,98	6,50	4,73	3,79	3,54	3,17	2,55	2,38	2,58	2,09	1,81	2,30	1,88
1,6	12,38	7,82	6,34	4,34	3,60	2,88	2,44	2,61	2,12	1,73	2,26	1,84	1,39	2,11	1,70
1,8	8,69	5,82	4,72	3,08	2,94	2,37	1,83	2,31	1,88	1,38	2,11	1,69	1,18	2,04	1,56
2,0	6,30	4,61	3,70	2,32	2,55	2,07	1,47	2,15	1,74	1,19	2,04	1,57	1,08	2,01	1,43
2,2	4,72	3,81	3,04	1,84	2,31	1,89	1,26	2,06	1,62	1,09	2,01	1,45	1,03	2,00	1,31
2,4	3,65	3,24	2,59	1,53	2,17	1,76	1,14	2,03	1,52	1,04	2,00	1,34	1,01	2,00	1,21
2,6	2,90	2,85	2,30	1,33	2,09	1,66	1,07	2,01	1,42	1,01	2,00	1,24	1,00	2,00	1,13
2,8	2,38	2,58	2,09	1,20	2,04	1,58	1,03	2,00	1,33	1,00	2,00	1,16	1,00	2,00	1,07
3,0	2,00	2,39	1,95	1,12	2,02	1,49	1,01	2,00	1,24	1,00	2,00	1,10	1,00	2,00	1,04
3,2	1,73	2,26	1,84	1,07	2,01	1,41	1,01	2,00	1,17	1,00	2,00	1,06	1,00	2,00	1,02
3,4	1,53	2,17	1,76	1,04	2,00	1,34	1,00	2,00	1,12	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,01
3,6	1,38	2,10	1,69	1,02	2,00	1,27	1,00	2,00	1,08	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00
3,8	1,27	2,07	1,62	1,01	2,00	1,21	1,00	2,00	1,05	1,00	2,00	1,01	1,00	2,00	1,00
4,0	1,19	2,04	1,57	1,00	2,00	1,15	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,2	1,13	2,02	1,51	1,00	2,00	1,11	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,4	1,09	2,01	1,45	1,00	2,00	1,08	1,00	2,00	1,01	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,6	1,06	2,01	1,39	1,00	2,00	1,05	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
4,8	1,04	2,00	1,34	1,00	2,00	1,03	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00
5,0	1,02	2,00	1,29	1,00	2,00	1,02	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	2,00	1,00