

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Alisson Pinto Chaves

**ANÁLISE DE SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS PARCIALMENTE
FRÁGEIS UTILIZANDO MODELO DE DANO E CÉLULAS COM
DESCONTINUIDADE INCORPORADA, POR MEIO DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

BELO HORIZONTE

2023

Alisson Pinto Chaves

**ANÁLISE DE SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS PARCIALMENTE
FRÁGEIS UTILIZANDO MODELO DE DANO E CÉLULAS COM
DESCONTINUIDADE INCORPORADA, POR MEIO DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutor em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto

Coorientador: Prof. Dr. Ramon Pereira da Silva

Belo Horizonte

2023

C512a	<p>Chaves, Alisson Pinto. Análise de sólidos tridimensionais parcialmente frágeis utilizando modelo de dano e células com descontinuidade incorporada, por meio do método dos elementos de contorno [recurso eletrônico] / Alisson Pinto Chaves. - 2023. 1 recurso online (207 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Rodrigo Guerra Peixoto. Coorientador: Ramon Pereira da Silva.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Anexos: f. 202 - 207.</p> <p>Bibliografia: f. 186-201. Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Métodos de elementos de contorno - Teses. 3. Análise funcional não-linear - Teses. 4. Análise numérica - Teses. I. Peixoto, Rodrigo Guerra. II. Silva, Ramon Pereira da. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p>
	CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 95 DO ALUNO ALISSON PINTO CHAVES

Às **13:00** horas do dia **06** do mês de **outubro** de **2023**, reuniu-se em ambiente virtual, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **07 de julho de 2023**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Análise de Sólidos Tridimensionais Parcialmente Frágeis Utilizando Modelo de Dano e Células com Descontinuidade Incorporada, por meio do Método dos Elementos de Contorno**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final.

Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto - DEES - UFMG (Orientador)
Prof. Dr. Ramon Pereira da Silva - DEES - UFMG (coorientador)
Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG
Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG
Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli - UNESP
Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque - UNB

Após reunião, a Comissão considerou o candidato **APROVADO**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 06 de outubro de 2023.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;

2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitangueira, Professor do Magistério Superior**, em 06/10/2023, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ramon Pereira da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 06/10/2023, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 06/10/2023, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Professor do Magistério Superior**, em 06/10/2023, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Éder Lima de Albuquerque, Usuário Externo**, em 06/10/2023, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Oswaldo Luis Manzoli, Usuário Externo**, em 10/10/2023, às 16:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 05/12/2023, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2660413** e o código CRC **004BF3BE**.

Agradecimentos

Aos meus familiares, pela compreensão, paciência, e todo o apoio, tanto em casa como nas viagens à Belo Horizonte;

Aos professores Rodrigo Guerra Peixoto e Ramon Pereira da Silva, pela orientação dedicada e atenciosa ao longo de todo o desenvolvimento desse trabalho;

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas (PROPEEs) que compartilharam os conhecimentos que embasaram minha formação, em especial ao professor Gabriel de Oliveira Ribeiro, que muitos anos após me orientar no mestrado, me recepcionou e incentivou no retorno ao programa;

Aos idealizadores, mantenedores e desenvolvedores do INSANE, que consolidaram com sucesso essa plataforma colaborativa, e permitiram minha contribuição em seu desenvolvimento;

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas e PROPEEs, pela atenção e prestatividade;

Aos colegas do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) que, por longo tempo, colaboraram para viabilizar minha frequência em disciplinas do programa em paralelo com as atividades laborais;

Ao CEFET-MG, pela concessão do afastamento para participação em programa de Pós-graduação *stricto sensu*, conforme Política Institucional de Desenvolvimento de Pessoas;

A todos, não citados explicitamente, que colaboraram para realização desse trabalho;

Meus sinceros agradecimentos.

Resumo

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), associado com a abordagem contínua para descontinuidades fortes, tem se mostrado uma alternativa bem sucedida na análise de falhas materiais em meios sólidos, com representação não-geométrica, em problemas de estado plano. A metodologia tem sua aplicação estendida para a análise de sólidos tridimensionais nesse trabalho. Células hexaédricas que tem a formulação com descontinuidade incorporada são usadas para discretização da região do domínio onde efeitos de dissipação de energia ocorrem. As células podem ser posicionadas ao longo de toda a trajetória de falha desde o início da análise, ou podem ser introduzidas no sistema progressivamente durante a análise, de modo a acompanhar o desenvolvimento da trajetória de uma trinca. O uso das células com descontinuidade incorporada possibilita a compatibilização de modelos constitutivos contínuos, equipados com uma lei de amolecimento, com a cinemática contendo descontinuidade nos campos de deformação ou deslocamento. Partindo do regime elástico, a evolução da falha material é contemplada através da transição para regime inelástico com modelo de dano contínuo, com possível bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes. Essa evolução, não necessariamente passando por todos os regimes, é tipicamente o comportamento observado em materiais parcialmente frágeis. A condição de bifurcação, definida pela singularidade do tensor de localização, é avaliada numericamente. As implementações computacionais do trabalho foram desenvolvidas utilizando a plataforma colaborativa *INSANE*. A análise numérica de modelos tridimensionais, muitos deles apresentados em diferentes referências, possibilitou a avaliação do uso da metodologia no que tange ao potencial, limitações e desafios para seu emprego em problemas práticos de análise de falha de sólidos parcialmente frágeis.

Palavras-Chave: método dos elementos de contorno; modelo de dano isotrópico; células com descontinuidade incorporada; análise não-linear de sólidos tridimensionais; formulação com descontinuidade fraca e forte.

Abstract

The Boundary Element Method (BEM), associated with the Continuous Strong Discontinuity Approach (CSDA), has been shown to be a successful alternative in the analysis of material failures of solids in plane state problems, with non-geometric representation. In this work, the use of the methodology is extended to the analysis of three-dimensional solids. Hexahedral cells with embedded strong discontinuity are used to discretize the region of the domain where energy dissipation effects occur. Cells can be placed along the entire failure trajectory from the beginning of the analysis, or they can be introduced into the system progressively during the analysis, in order to describe the development of a crack trajectory. The use of cells with embedded discontinuity enables the compatibility of continuous constitutive models, equipped with a softening law, with kinematics with discontinuity in the strain field or in the displacement field. Starting from the elastic regime, the evolution of material failure is contemplated through the transition to the inelastic regime with a continuous damage model, with possible bifurcation and transition between weak and strong discontinuities. This evolution, not necessarily passing through all regimes, is typically the behavior observed in quasi-brittle materials. The bifurcation condition, defined by the singularity of the localization tensor, is evaluated numerically. The computational implementations were developed using the collaborative platform *INSANE*. The numerical analysis of three-dimensional models allowed the evaluation of the use of the methodology regarding the potential, limitations, and challenges in practical problems of failure analysis of quasi-brittle solids.

Keywords: boundary element method; isotropic damage model; cells with embedded discontinuity; non-linear analysis of tridimensional solids; weak and strong discontinuities.

Lista de Figuras

1.1	Comportamento típico sob carga: trecho AB- região de não linearidade anterior à carga de pico; BC- início da região em amolecimento (AC- microfissuração); CD- trecho complementar da região em amolecimento, resultado de intertravamento de agregados (BCD- zona de processo de fratura). Adaptada de Karihaloo (1995)	25
1.2	Classificação dos métodos numéricos baseados no MEF e no MEC para representação da propagação de fissuras.	27
1.3	Fases observáveis na relação tensão-deformação durante o processo de carregamento.	37
1.4	Transição entre Fases na relação tensão-deformação.	39
1.5	Regiões da zona de processo de fraturas.	39
2.1	Domínio do sólido, contorno e ações.	45
2.2	(a) Projeção do domínio elástico para o modelo de Oliver et al. (2006), (b) Representação de trajetória em espaço tensão-deformação unidimensional.	48
2.3	Trajectoria do comportamento inelástico - endurecimento/amolecimento.	50
3.1	Trajectoria de equilíbrio unidimensional - combinação de duas partes lineares – fonte: Peixoto et al. (2016).	54
3.2	Domínio sólido e grandezas.	56
3.3	Domínios sólidos do Teorema de Betti - Identidade de Somigliana.	58
3.4	Expansão do domínio para ponto fonte no contorno.	60
3.5	Termos de $c_{ij}(\xi)$ para pontos em contorno suave, em vértices e em arestas.	61
3.6	Esfera de exclusão do domínio Ω	63
4.1	Elementos de contorno em coordenadas paramétricas.	68
4.2	Células em coordenadas paramétrica.	70
4.3	Divisão do elemento em sub-regiões, para manter precisão da integração.	77

4.4	Divisão em subelementos para integração.	79
5.1	Domínio do sólido, contornos e superfície/banda de localização.	88
5.2	Parametrização cartesiana, espaço de parametrização e forma da função.	93
5.3	Cinemática com descontinuidades, baseado em Manzoli et al. (1998) – pg.4-4.	97
5.4	Subdomínio arbitrário Ω_φ em torno da superfície de descontinuidade.	100
5.5	Funções $\mathcal{H}(\mathbf{X})$, $\varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S(\mathbf{X})$	100
5.6	Modelo idealizado de transição – evolução da espessura da banda de localização em relação ao tempo t , do instante da bifurcação até o início do regime de descontinuidade forte.	105
5.7	Evolução da espessura da banda de localização, e módulo de amolecimento.	107
6.1	Parametrização cartesiana, espaço de parametrização e forma da função.	116
6.2	Célula com descontinuidade incorporada: normal n_i à superfície de descontinuidade \mathcal{S} , e gradiente de φ	121
6.3	Continuidade na propagação da superfície de descontinuidade em uma célula vizinha.	125
6.4	Expansões de matrizes e vetores dos sistemas de equações da análise não-linear do MEC implícito.	127
6.5	Complemento das expansões de matrizes e vetores dos sistemas de equações da análise não-linear do MEC implícito.	128
7.1	Cubo unitário sujeito a tração simples: dimensões, parâmetros do material, carregamento, restrições e superfície de descontinuidade.	135
7.2	Cubo unitário sujeito a tração simples: malhas com células hexaédricas cúbicas.	136
7.3	Cubo unitário sujeito a tração simples: resultados para malhas com células cúbicas (a) trajetória de equilíbrio para deslocamento no ponto B; (b) deslocamento longitudinal na aresta A-B, para fator de carga 0,2 em regime inelástico.	137
7.4	Cubo unitário sujeito a tração simples: células hexaédricas – proporções não-cúbicas.	138
7.5	Cubo unitário sujeito a tração simples: trajetórias de equilíbrio usando células com dimensões muito desproporcionais.	138
7.6	Placa com entalhe: dimensões, forças aplicadas, apoio e parâmetros do material.	139
7.7	Placa com entalhe: Trajetória de equilíbrio do ponto de aplicação da carga.	140

7.8	Placa com entalhe: (a) “malha 2”, gerada no INSANE; (b) modelo deformado em instante com deslocamento 0,1 mm (ampliado em 200 vezes), e destaque para região em que as células tiveram a descontinuidade ativada.	141
7.9	Barra com entalhe de canto: dimensões do modelo, plano do entalhe, condições de contorno e parâmetros do material.	142
7.10	Barra com entalhe de canto: discretização final do domínio em células hexaédricas para diferentes níveis de refinamento.	142
7.11	Barra com entalhe de canto: trajetória de equilíbrio de deslocamento para o ponto A, para o ponto B, e resultado teórico.	143
7.12	Barra com entalhe de canto: ativação gradual das células formando o plano de descontinuidade a partir do entalhe (malha 2).	144
7.13	Flexão em três pontos: dimensões, parâmetros e condições de contorno.	145
7.14	Flexão em três pontos: elementos de contorno e células.	146
7.15	Trajetoária de equilíbrio: carga relativa P^* versus deslocamento vertical relativo.	147
7.16	Teste de Arrancamento: aparato, dimensões e condições de contorno.	148
7.17	Referências: resultados para carga P versus deslocamento vertical.	150
7.18	Teste de Arrancamento: malha menos refinada – elementos de contorno e células.	151
7.19	Resultados obtidos: carga P versus deslocamento vertical.	152
7.20	Teste de Arrancamento: (a) sólido deformado para deslocamento δ de 0,4 mm; (b) células com descontinuidade ativada em 3 etapas da trajetória: com deslocamento $\delta = 0,1$ mm; na carga de pico antes da trajetória descendente ($\delta = 0,24$ mm); e para deslocamento $\delta = 0,4$ mm.	153
7.21	Flexão em três pontos de Petersson (1981): dimensões, parâmetros e condições de contorno.	154
7.22	Flexão em três pontos de Petersson (1981): elementos de contorno e células.	155
7.23	Flexão em três pontos de Petersson (1981): relação entre carga P e deslocamento vertical do ponto de controle.	156
7.24	Flexão em três pontos de Petersson (1981): Malha 1 (linear) – critério para determinação de q_{SD}	157
7.25	Flexão em três pontos de Petersson (1981): Malha 2 (quadrática) – critério para determinação de q_{SD}	158

7.26	Flexão em três pontos de Petersson (1981): Malha 2 – evolução da análise considerando valores de $\bar{\beta} = 0,01$ (acima), $\bar{\beta} = 0,90$ (centro) e $\bar{\beta} = 0,99$ (abaixo).	159
7.27	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): dimensões em mm, parâmetros, condições de contorno e medida CMSD.	161
7.28	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): elementos de contorno e células; (a) malha 1; (b) malha 2.	163
7.29	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): trajetória de equilíbrio relacionando carga P com medidas $CMSD$	164
7.30	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): transição de regime nas células, em diferentes passos intermediários, indicados na figura 7.29 pela letra correspondente.	166
7.31	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): trajetória de equilíbrio de ponto de aplicação da carga central.	167
7.32	Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): configurações deformadas do modelo (ampliado em 200 vezes), e progressão da descontinuidade.	168
7.33	Torção em viga com entalhe: aparato de ensaio e corpo de prova. Fonte: Jefferson et al. (2004), pg. 280.	170
7.34	Torção em viga com entalhe: dimensões, parâmetros do material, condições de contorno e região do domínio de provável desenvolvimento da falha. . .	171
7.35	Torção em viga com entalhe: vistas esquemáticas das superfícies de falha apresentada por diferentes autores.	172
7.36	Torção em viga com entalhe: discretização do domínio em células hexaédricas.	173
7.37	Torção em viga com entalhe: trajetória de equilíbrio – carga P versus abertura da boca da trinca (CMOD).	174
7.38	Torção em viga com entalhe: células com descontinuidades ativadas em diferentes passos da análise, e configuração deformada ampliada em 20 vezes.	175
7.39	Torção em viga com entalhe: Malha 1 – transição de regime nas células, em diferentes passos intermediários.	176
7.40	Torção em viga com entalhe: trajetória de equilíbrio – carga P versus medida CMSD.	178
8.1	Desenvolvimento da linha de pesquisa	179

Lista de Tabelas

5.1	Correspondência entre parâmetros dos modelos contínuo e coesivo.	103
6.1	Correspondência entre termos de equações.	113

Lista de Abreviaturas e Siglas

CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
CMSD	Crack Mouth Sliding Displacement
CSDA	Continuum Strong Discontinuity Approach
INSANE	Interactive Structural Analysis Environment
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
EFGM	Método Element-free Galerkin
POO	Programação Orientada a Objetos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
XFEM	Método dos Elementos Finitos Estendido

Lista de Símbolos

A, A^*	Constantes escalares.
b_i	Forças de corpo.
$c_{ij}(\xi)$	Termo livre para equações integrais de deslocamentos no contorno.
D	Variável de dano escalar para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\mathbf{e}}_k$	Direções principais de deformação.
E_{ijkl}	Tensor constitutivo secante: $(1 - D)E_{ijkl}^o$.
E_{ijkl}^o	Tensor constitutivo elástico linear para materiais isotrópicos.
E_{ijkl}^t	Tensor constitutivo tangente.
E_{ijkl}^{t,Ω_b}	Tensor constitutivo tangente dentro da banda de localização Ω_b .
$E_{ijkl}^{t,\Omega \setminus \Omega_b}$	Tensor constitutivo tangente fora da banda de localização Ω_b .
f_i	Vetor referente à equação de equilíbrio na interface descontínua.
f_t	Resistência à tração.
$F(\sigma_{ij}, q)$	Função de dano no espaço das tensões.
$\bar{F}(\epsilon_{ij}, r)$	Função de dano no espaço das deformações.
$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon}$	Termo livre das equações integrais de deformações em pontos internos com campos de deformação inicial.
$\bar{G}(\Delta[[u_i]], \Delta\alpha)$	Função de dano discreta.

G_f	Energia de fratura.
G_{SD}	Energia liberada em \mathcal{S} , por unidade de área, durante o regime de descontinuidade forte.
h	Espessura de banda de localização.
h_B	Espessura de banda de localização no instante de bifurcação.
H	Módulo de endurecimento-amolecimento para modelos constitutivos contínuos.
H^*	Módulo de amolecimento discreto ou intrínseco.
H^{crit}	Módulo de amolecimento crítico para modelos constitutivos contínuos (condição de bifurcação).
$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$	Função de Heaviside com salto sobre \mathcal{S} .
\mathcal{H}_{Ω_b}	Função de rampa linear em Ω_b .
$\mathcal{J}(\eta_i)$	Jacobiano da transformação de coordenadas nos elementos de contorno.
k	Fator escalar (≈ 0) de regularização numérica da função $\delta_{\mathcal{S}}$ no regime de descontinuidade forte.
l^*	Comprimento característico para lei de evolução da variável de dano.
\hat{m}_i	Vetor unitário referente à direção do salto no campo de velocidades.
$M^\alpha(\eta)$	Funções de interpolação da geometria nas células internas (α é um índice relativo aos vértices da célula).
$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^\varphi(\mathbf{X})$	Função com valores não nulos apenas se $\mathbf{X} \in \Omega_\varphi$.
n_{dim}	Número de dimensões do problema.
n_i	Vetor unitário normal a uma determinada superfície.
n_i^{crit}	Direção normal à banda de localização correspondente à condição de bifurcação (H^{crit}).

$N^\gamma(\eta)$	Funções de interpolação da geometria e das variáveis nos elementos de contorno (γ é um índice relativo aos pontos de interpolação).
\mathcal{P}_S	Potência consumida no desenvolvimento do campo de deslocamentos.
q	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos.
q_B	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
q_{SD}	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
q_S	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre \mathcal{S} .
Q_{ij}	Tensor de localização.
$\{Q\}$	Vetor de equilíbrio: diferença entre as deformações regulares e as residuais (iniciais).
r	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos.
r_o	Valor da variável interna do tipo deformação correspondente ao limite de proporcionalidade elástica.
r_B	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
r_{SD}	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
r_S	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre \mathcal{S} .
\mathcal{S}	Superfície (ou linha, para problemas bidimensionais) de descontinuidade.
t	Tempo.
t_B	Instante de tempo referente à bifurcação.

t_{SD}	Instante de tempo referente ao início do regime de descontinuidade forte.
t_i	Vetor força de superfície ($t_i = \sigma_{ij}n_j$).
\bar{t}_i	Vetor força de superfície efetiva ($\bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ij}n_j$).
\mathfrak{t}_i	Forças de superfície prescritas (condições de contorno naturais).
$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: força de superfície na direção j , no ponto \mathbf{X} , em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
u_i	Campo de deslocamentos.
\bar{u}_i	Parte regular de um campo de deslocamentos.
\hat{u}_i	Parte regular de um campo de deslocamentos após reformulação da cinemática com descontinuidades.
\mathfrak{u}_i	Deslocamentos prescritos (condições de contorno essenciais).
$[[u_i]]$	Componentes do salto no campo de deslocamentos.
$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: deslocamento na direção j , no ponto \mathbf{X} , em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
\mathcal{W}_S	Energia total consumida desde o início do regime de descontinuidade forte até o alívio total das tensões.
\mathbf{X}	Coordenadas de pontos materiais. Pontos campo, nas equações integrais.
$\dot{\alpha}$	Escalar correspondente à magnitude do salto no campo de velocidades (capítulo 5). Evolução da variável interna do modelo constitutivo discreto (apêndice A).
$\boldsymbol{\alpha}^k$	Variáveis internas genéricas para modelos constitutivos contínuos.

β	Parâmetro escalar que define a taxa de crescimento do tamanho das células no algoritmo de geração automática.
$\bar{\beta}$	Parâmetro entre 0 e 1 que define a lei linear de evolução da espessura da banda de localização.
δ_{ij}	Delta de Kronecker (1 para $i = j$; 0 para $i \neq j$).
$\delta_{\mathcal{S}}$	Delta de Dirac sobre \mathcal{S} .
$\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$	Delta de Dirac sobre o ponto $\boldsymbol{\xi}$.
$\Delta[[u_i]]$	Evolução das componentes do salto no campo de deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte.
$\Delta\alpha$	Variável interna do modelo constitutivo discreto.
ϵ_k	Componentes de deformações lineares principais.
ϵ_{ij}	Tensor de deformações lineares.
$\bar{\epsilon}_{ij}$	Parte regular (finita) do campo de deformações.
$\hat{\epsilon}_{ij}$	Parte regular do campo de deformações após reformulação da cinemática com descontinuidades.
ϵ_{ij}^+	$\sum_{k=1}^{n_{dim}} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k$.
ϵ_{ij}^{ef}	Tensor de deformações de efetivas ($E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl}$).
ϵ_{ij}^o	Deformações iniciais.
ϵ_{ij}^{φ}	Campo de deformações associado aos efeitos dissipativos em \mathcal{S} e restrito ao subdomínio Ω_{φ} .
$\epsilon_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos sobre \mathcal{S} .
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos fora de \mathcal{S} .
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \Omega_b}$	Tensor de deformações em pontos externos à banda Ω_b .
η	coordenada paramétrica para elementos de contorno.

γ	E , para estado plano de tensões; $E/(1-\nu^2)$, para estado plano de deformações.
Γ	Contorno de um corpo sólido.
$\dot{\lambda}$	Multiplicador de dano contínuo ($\dot{\lambda} = \dot{r}$).
$\dot{\lambda}^*$	Multiplicador de dano discreto ($\dot{\lambda}^* = \dot{\alpha}$).
$\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$; 0, se $\mathbf{X} \notin \mathcal{S}$.
$\mu_{\Omega_b}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \Omega_b$; 0, se $\mathbf{X} \notin \Omega_b$.
ν	Coefficiente de Poisson.
ω	Variável de dano discreta.
Ω	Domínio de um corpo sólido.
Ω^-	Subdomínio de Ω , referente à parte oposta à normal sobre \mathcal{S} .
Ω^+	Subdomínio de Ω , referente à parte apontada pela normal sobre \mathcal{S} .
Ω_b	Domínio de uma banda de localização de deformações.
Ω_{φ}	Domínio de influência da descontinuidade \mathcal{S} para regularização cinemática.
$\varphi(\mathbf{X})$	Função de regularização da cinemática com descontinuidades. Distribui os efeitos da descontinuidade no subdomínio Ω_{φ} .
ψ	Energia livre de Helmholtz para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\psi}$	Energia livre para modelos constitutivos discretos.
σ_{ij}	Tensor de tensões de Cauchy.
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Função constitutiva convencional ou regularizada: tensões obtidas de um estado de deformações.
$\bar{\sigma}_{ij}$	Tensor de tensões de efetivas ($E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}$).
σ_{ij}^-	Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^-$.
σ_{ij}^+	$E_{ijkl} \epsilon_{kl}^+$ (capítulo 2). Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^+$ (capítulo 6).

$\bar{\sigma}_{ij}^+$	$E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^+$.
σ_{ij}^o	Tensões iniciais.
$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos sobre \mathcal{S} .
$\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos fora de \mathcal{S} .
$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: componentes jk de tensão, no ponto \mathbf{X} , em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
τ_ϵ	Deformação equivalente.
τ_σ	Tensão equivalente.
$\tau_{\bar{t}}$	Norma das forças de superfície efetivas com base no tensor de localização elástico ($\tau_{\bar{t}} = \sqrt{\bar{t}_i Q_{ij}^{e,-1} \bar{t}_j^+}$).
$\tau_{\Delta[[u]]}$	Norma da evolução das componentes de salto nos deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte com base no tensor de localização elástico ($\tau_{\Delta[[u]]} = \sqrt{\Delta[[u]] Q_{ij}^e \Delta[[u]]}$).
$\boldsymbol{\xi}$	Pontos fonte nas equações integrais.
$a \setminus b$	Exclusão: $a - (a \cap b)$.
$\partial_{\mathbf{q}}(\cdot), \partial_{\mathbf{p}}(\cdot)$	Derivadas direcionais em relação aos vetores unitários \mathbf{q} e \mathbf{p} .
$\det(\cdot)$	Determinante de (\cdot) .
$\langle \cdot \rangle$	Operador de Mac Auley ($= [\cdot + (\cdot)]/2$).
\otimes	Operador do produto tensorial ($a_i \otimes b_j = a_i b_j$).
$\mathcal{f}(\cdot)$	Integrais com núcleos fortemente singulares.

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Análise de Falha Material	23
1.2	Modelos Numéricos	26
1.2.1	Métodos de Representação Geométrica	27
1.2.2	Métodos de Representação Não-Geométrica	30
1.3	Abordagem de Descontinuidades no MEC	37
1.4	Objetivos do Trabalho e Delimitações	41
1.5	Organização do Texto	43
2	Modelo de Dano Isotrópico Contínuo	44
2.1	Carregamento em Regime Elástico	44
2.2	Modelo de Dano Isotrópico Contínuo	46
2.3	Tensor Constitutivo Tangente	51
3	Equações Integrais para Problemas Fisicamente Não-Lineares	53
3.1	Formulação não-linear	53
3.2	Soluções Fundamentais de Kelvin	55
3.3	Equação para deslocamentos de pontos internos - Identidade de Somigliana	57
3.4	Equação Integral de Contorno	59
3.5	Deformações Internas	62
4	Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno Não-linear	66
4.1	Elementos de Contorno	67
4.2	Células Convencionais	69
4.3	Equações Matriciais	70
4.3.1	Equações Matriciais para Deslocamentos de Pontos Internos	71
4.3.2	Equações Matriciais para Deslocamentos de Pontos do Contorno	73
4.3.3	Equações Matriciais para Deformações Internas	74
4.4	Integração Numérica de Elementos de Contorno e Células	76
4.5	Estratégia de Solução – Formulação Não-Linear Implícita	80
5	Localização de Deformações e Modelo de Banda Variável	87
5.1	Análise de Bifurcação em Modelo de Dano Isotrópico	88
5.1.1	Condição para Localização de Deformação	89
5.1.2	Estabelecimento da Localização de Deformação	90

5.2	Cinemática com Descontinuidades	95
5.3	Análise de Descontinuidade Forte	101
5.3.1	Equações dos Modelos de Dano Coesivo	102
5.3.2	Condição para Descontinuidade Forte	103
5.4	Descontinuidade Fraca e Forte – O Modelo de Banda Variável	104
5.4.1	Regime de Descontinuidade Fraca	105
5.4.2	Regime de Descontinuidade Forte	108
6	Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades	110
6.1	Equações Integrais com Descontinuidades	111
6.2	Formulação Implícita no MEC com Descontinuidades	114
6.3	Células com Descontinuidade Incorporada	115
6.3.1	Cálculo das Componentes do Salto de Deslocamentos	116
6.3.2	Equação Constitutiva Regularizada – Operador Tangente	119
6.3.3	Consistência Estática e Cinemática	119
6.4	Propagação de Fissuras	122
6.5	Particularidades das Implementações	128
7	Exemplos Numéricos	132
7.1	Cubo Sujeito a Tração Simples	135
7.2	Placa com Entalhe e Forças de Abertura	139
7.3	Barra Prismática com Entalhe Circular de Canto	141
7.4	Flexão em Três Pontos - Carpinteri (1989)	144
7.5	Teste de Arrancamento	148
7.6	Flexão em Três Pontos - Petersson (1981)	153
7.7	Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingrassia (1982)	160
7.8	Torção em Viga com Entalhe Diagonal - Brokenshire (1996)	168
8	Considerações Finais	179
8.1	Desenvolvimento do Presente Trabalho	180
8.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	184
	Referências Bibliográficas	186
A	Equações do Modelo de Dano Coesivo	202
A.1	Equação Constitutiva Coesiva	202
A.2	Lei de Amolecimento Coesiva	204
A.3	Variável de Dano Coesiva	205
A.4	Energia Livre Coesiva	205
A.5	Critério de Dano Coesivo	206
A.6	Módulo de Amolecimento Coesivo	206

Capítulo 1

Introdução

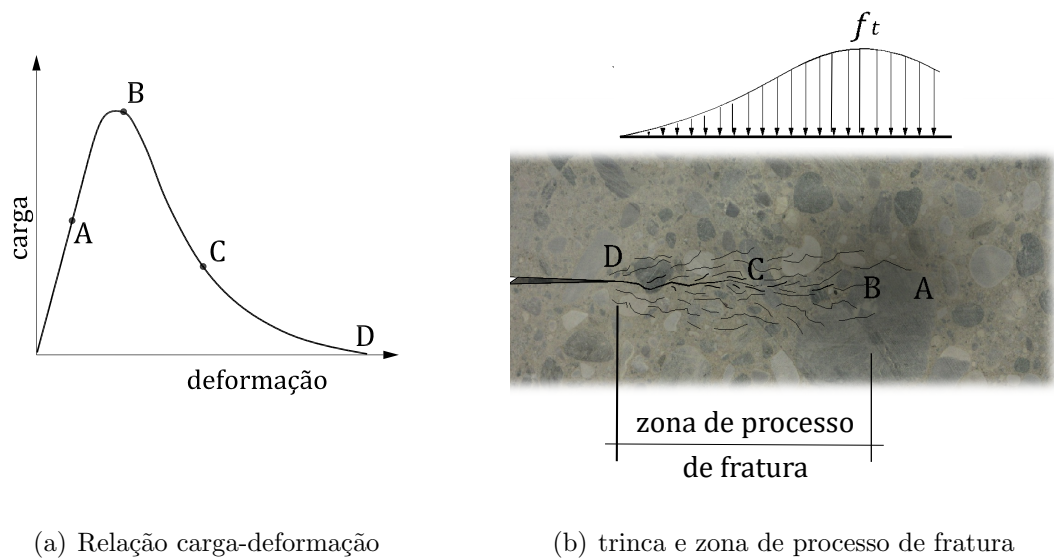
Para uma representação realística do comportamento em processo de falha de um sólido formado por material parcialmente frágil, deve-se dispor de modelos constitutivos adequados, capazes de captar a redução da capacidade de carga do sólido ocorrida por sua deterioração. A falha é entendida como uma sequência de eventos, que se inicia em nível de micromecânica material, que evolui em uma deterioração progressiva de um meio idealizadamente contínuo a um meio com descontinuidades. Dito de outro modo, o processo de falha se inicia de maneira difusa, com dissipação de energia e perda de rigidez; essa degradação material tende a se concentrar em regiões reduzidas do sólido, dando origem a localização de deformações, delimitada por superfícies com descontinuidade no campo de deformações; segue então um estreitamento da zona de localização até colapsar em descontinuidades no campo de deslocamentos, caracterizados pelo surgimento de trincas macroscópicas.

1.1 Análise de Falha Material

Mecanismos que causam falhas materiais têm diferentes origens, muitas vezes associadas à natureza do próprio material ou às suas condições de utilização. Microdefeitos e concentração de tensões, por exemplo, tendem a gerar quebras de ligações atômicas ou moleculares, que dão origem a danos elementares manifestados como nucleação de uma microfissura – mecanismo inicial de uma ruptura. As rupturas podem ser classificadas principalmente em rupturas frágeis, rupturas dúcteis, ou uma mistura entre esses mecanismos.

A ruptura frágil ocorre usualmente por clivagem, caracterizando-se pelo desenvolvimento de deformações plásticas desprezíveis (Broek, 2002). Assim, sob condições normais de solitação ao fraturamento, a dissipação energética envolvida com deformações ou plastificação do material (na região de fraturamento) é nula ou desprezível, e o crescimento da fissura usualmente é instável. A ruptura dúctil ocorre pela reunião de vazios ou das microfissuras, em um processo denominado coalescência. Observa-se nesse processo de ruptura e avanço da fissura, uma zona de processos inelásticos cuja extensão não é desprezível, e envolve quantidades substanciais de deformações irrecuperáveis, com consequente dissipação de energia. O crescimento da fissura é usualmente estável.

Na ruptura em materiais parcialmente frágeis, como materiais cimentícios, *e.g.*, cerâmicas e rochas, observa-se a formação de uma zona de processo de fratura (ZPF) extensa à frente da fissura, e dissipação de energia nos estágios de carregamento que antecedem a carga máxima, e também dissipação de energia após essa carga máxima, com ocorrência de amolecimento. O material nessa zona tem amolecimento devido à microfissuração. A figura 1.1 ilustra o processo em amostra de concreto, onde pode-se ver a representação da distribuição de tensões em relação às cargas aplicadas e deformações uniaxiais, bem como sua relação com a região de desenvolvimento da fratura.



(a) Relação carga-deformação

(b) trinca e zona de processo de fratura

Figura 1.1: Comportamento típico sob carga: trecho AB- região de não linearidade anterior à carga de pico; BC- início da região em amolecimento (AC-microfissuração); CD- trecho complementar da região em amolecimento, resultado de intertravamento de agregados (BCD- zona de processo de fratura). Adaptada de Karihaloo (1995)

De acordo com Broek (2002), no estudo dos processos de falha, os conceitos da mecânica da fratura elástica linear (MFEL) se aplicam bem a problemas em que a zona de processos inelásticos (à frente da ponta da fissura) seja desprezível em relação a outras dimensões significativas da estrutura ou à extensão da própria fissura. Assim, em muitos casos, mesmo materiais com comportamento parcialmente frágil (como o concreto) podem ter seu processo de falha bem descrito por essa teoria, fenômeno bem conhecido da literatura como “efeito de tamanho”.

No caso de fraturamento elastoplástico, no qual a zona de plastificação é acentuada, diferentes modelos podem ser utilizados, como os pioneiros de Irwin (1960), Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), além dos critérios do CTOD – abertura da ponta da trinca (Wells, 1961, 1963) e das integrais J (Rice, 1968; Hutchinson, 1968; Rice e Rosengren, 1968). Já no caso de materiais de comportamento parcialmente frágil, a zona de acumulação de danos (região microfissurada) onde ocorre a localização das deformações, é usualmente contemplada através de duas abordagens principais: um modelo que considera que as

localizações ocorrem em uma faixa, ou banda com determinada espessura; e um modelo que considera a localização de deformações condensada em uma superfície de fissuração, ou fissura fictícia.

O modelo de fissura fictícia, ou modelo de fissura coesiva, proposto por Hillerborg et al. (1976), adota interface simples, dita coesiva, que tem a propriedade de transmitir tensões entre as faces da fissura, tornando-se um modelo adequado para representação da ZPF. Nesse modelo são simplificadas as irregularidades e tortuosidades naturais do caminho da fissura, bem como variações geométricas da zona de processo de fratura. Na região não fissurada considera-se em geral regime elástico linear, sem dissipação de energia. Já o outro modelo, de fissuras em banda, ou modelo de fissuras distribuídas, desenvolvido em Bažant e Oh (1983), assume que as microfissuras na zona de processo de fratura se distribuem em uma banda de espessura constante (h_c) e comprimento prescrito. A deformação inelástica na ZPF é representada por uma relação de amolecimento em que se verifica decréscimo de tensões com o incremento das deformações inelásticas, e a energia consumida no avanço da fissura por unidade de área fissurada (G_f) é obtida da área sob a curva completa da relação tensão-deformação – trecho elástico e inelástico.

1.2 Modelos Numéricos

Para trabalhar com esses modelos de fratura em estruturas de geometrias complexas, é indispensável o uso de métodos numéricos. Os principais modelos numéricos usados em análises da Mecânica da Fratura são classificados por Ingraffea e Wawrzynek (2004), em relação à representação da fratura feita por cada um deles. Uma forma simplificada, considerando apenas técnicas baseadas no método dos elementos finitos (MEF) e acrescentando técnicas baseadas no método dos elementos de contorno (MEC), resulta no esquema mostrado na figura 1.2.

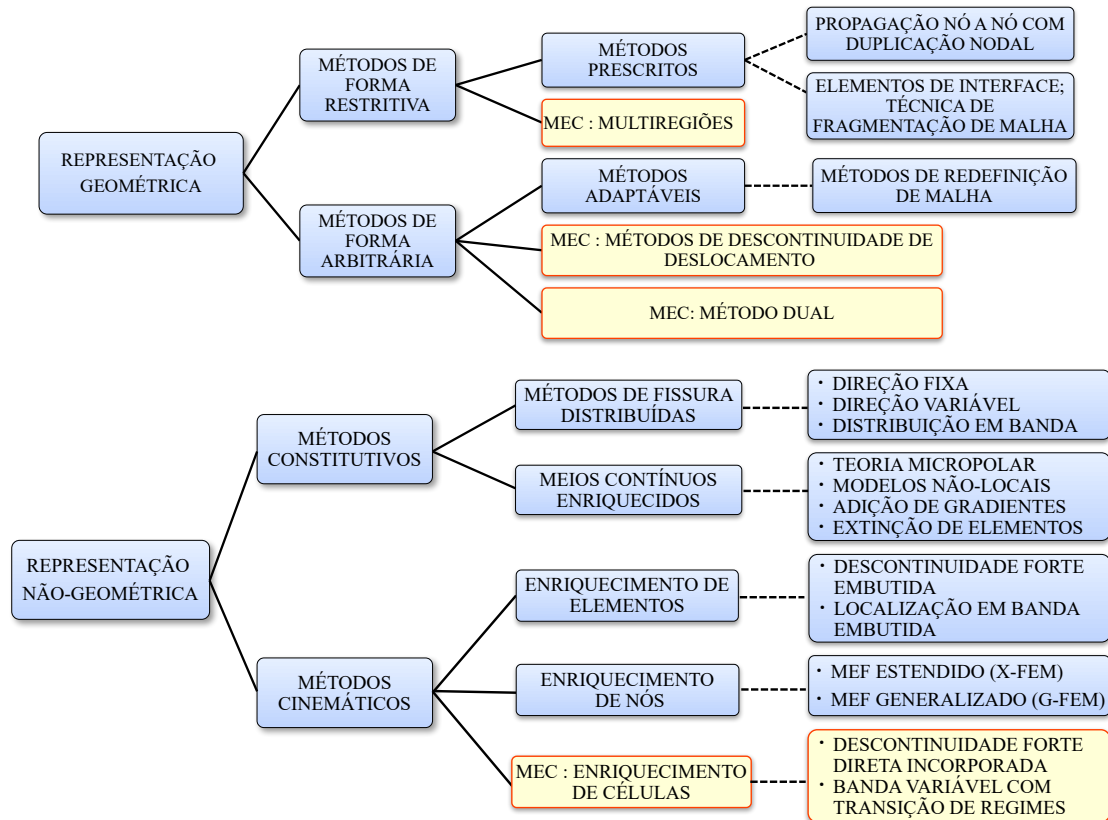


Figura 1.2: Classificação dos métodos numéricos baseados no MEF e no MEC para representação da propagação de fissuras.

Observam-se dois grandes grupos de representação, um em que a fissura é uma entidade geométrica e o modelo geométrico e sua discretização são atualizados com o desenvolvimento da fissura, e outro em que a fissura não é uma parte da geometria e nem do modelo discretizado, não revelando explicitamente a descontinuidade física no sólido.

1.2.1 Métodos de Representação Geométrica

São duas as categorias nas quais foram divididas esse método: as que tratam a fissuração de forma geométrica restritiva e as que tratam a fissuração de forma geométrica arbitrária.

i. Métodos de forma restritiva:

Nessa categoria os Métodos Prescritos são os principais, sendo provavelmente os primeiros utilizados em estudos de problemas de fissuração pelo MEF. Nesses métodos, a geometria da fissura depende da distribuição da malha de elementos finitos, tornando

necessário o conhecimento do caminho da fissura. À medida que a fissura se propaga entre os elementos, os nós são duplicados, e a malha alterada, como pode ser visto em aplicação no trabalho de Ngo e Scordelis (1967). Alternativamente à propagação nó a nó do MEF, deriva-se uma versão em que são inseridos elementos de interface entre os elementos padrão da malha, ao longo de potenciais caminhos de fissuração, como utilizado por Gens et al. (1989). Carol et al. (2001) utilizam esses elementos de espessura nula, em toda a malha, não havendo necessidade de conhecimento prévio do caminho de fissuração. A técnica, quando aplicada ao concreto, possibilita sua representação como material heterogêneo de três fases (matriz, agregado e interface). Rodrigues et al. (2016) e Manzoli et al. (2016) apresentam uma variação dessa ideia, utilizando elementos de interface com alta razão de aspecto inseridos em toda a malha. Esses elementos inseridos, apresentados por Manzoli et al. (2012), apresentam comportamento mais frágil que os elementos regulares da malha, e uma cinemática de descontinuidades fortes é capaz de representar as grandes deformações que representam a descontinuidade decorrente da fissura. Rodrigues et al. (2020) usaram com sucesso esta técnica de fragmentação de malha, em região de provável ocorrência de fraturamento, para análise multi-escala de problemas tridimensionais de propagação de fratura.

Relativamente ao MEC, as primeiras tentativas de análise de peças fissuradas mostraram certa deficiência na formulação padrão para tratar esse tipo de problema, em que duas superfícies físicas idealmente ocupam um mesmo plano matemático, levando a uma singularidade no sistema de equações (Cruse, 1972). A simples discretização da fissura em dois planos unidos por entalhe elíptico levou a resultados pouco satisfatórios, o que explicitou a necessidade de formulações modificadas para tratar problemas de mecânica da fratura, que começaram a ser estudadas a partir daí. Uma metodologia do MEC que pode se enquadrar como método de forma restritiva é a técnica de multiregiões, de Blandford et al. (1981). Nela o domínio é dividido em duas ou mais regiões, cada uma contendo uma superfície da fissura, sendo ligadas pelas condições de equilíbrio de forças de superfície e compatibilidade de deslocamentos. Algumas

limitações que se apresentam são a necessidade de conhecimento prévio do caminho da fissura, como cita Andrade (2006), a produção de grandes sistemas de equações e a necessidade de se refazer a malha a cada incremento da fissura.

ii. Métodos de forma arbitrária:

Nessa categoria, ou não há restrição à fissura imposta pela discretização, ou a discretização precisa ser modificada (ou criada) para se adaptar à geometria da fissura. No MEF, os Métodos Adaptativos são os principais, onde a discretização se altera dinamicamente em função da geometria da fissura, como por exemplo em Xie et al. (1995). Algoritmos de redefinição de malha avançados, permitem a geração automática das malhas, com armazenamento de informações em banco de dados, que conterão a descrição do modelo sólido e da fissura.

No MEC, pode-se enquadrar nessa categoria uma formulação modificada denominada método da descontinuidade de deslocamento proposta por Crouch (1976), usada principalmente para determinação do fator de intensidade de tensões em problemas de fratura elástica linear. Nessa formulação indireta a fissura é tratada como uma superfície única através da qual os deslocamentos são descontínuos, sendo necessário apenas a discretização de uma das faces. A superfície da fissura é discretizada, podendo ser observada geometricamente, e Li et al. (2019) usou o método para avaliar com sucesso a evolução de fissura em problema tridimensional.

A formulação do método dos elementos de contorno dual (MECD) também pode ser enquadrada nessa categoria, sendo uma formulação do MEC bastante difundida para análise de problemas da mecânica da fratura. Baseada em procedimentos apresentados inicialmente por Watson (1986) e Hong e Chen (1988), e efetivamente aplicados nos trabalhos de Portela et al. (1992) e Mi e Aliabadi (1992), baseia-se na utilização das equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície para nós definidos nas superfícies opostas de uma fissura. Com esse procedimento, o número de incógnitas e equações independentes para os pontos da fissura é igual, garantindo, portanto,

solução do sistema final de equações algébricas. Com a evolução do problema a geometria da fissura vai sendo definida pela inclusão de novos elementos de contorno à malha delimitando sua superfície, com a contrapartida do crescimento do sistema de equações. Um procedimento eficiente de otimização de malha e determinação de trajetória de crescimento apresentado por Leonel (2006) pode ajudar a reduzir o tamanho do sistema. A extensão da formulação, para contemplar o comportamento não linear observado no concreto, foi apresentada por Saleh e Aliabadi (1995).

1.2.2 Métodos de Representação Não-Geométrica

Nos métodos de representação não-geométrica, a fissuração é simulada sem a necessidade de modificação da malha inicial do sólido, porém, não há uma representação física da separação das superfícies de uma trinca estabelecida. Aqui também se divide esses métodos em duas grandes categorias: as que representam a fissuração no modelo constitutivo (representação em fissuras distribuídas), e as que representam a propagação da fissura através de campos cinemáticos.

i. Métodos constitutivos:

Essa categoria é conhecida também como Modelos com Fissuras Distribuídas, foi proposto inicialmente por Rashid (1968), no âmbito do MEF. Uma região fissurada é representada por um conjunto de elementos finitos ortotrópicos, em que o sistema local do tensor constitutivo desses elementos é considerado em direções correspondentes ao plano da fissuração. A perda da rigidez dos elementos da região fissurada em direção perpendicular ao plano da fissura, por deterioração gradual, simula numericamente o efeito da fissuração. A direção de ortotropia, relacionado com direção de propagação de fissura, pode ser fixa, ou pode ser variável (Cope et al., 1980), permitindo rotação das micro-fissuras durante o carregamento. Pitangueira (1998) apresenta detalhadamente os modelos, enfatizando o cuidado de se utilizar elementos em tamanho (e espaçamento entre pontos de integração) compatível com a granulometria do material, a fim de evitar problemas de convergência numérica por localização de deformações e incompatibilidade entre o modelo e o sólido em análise. Uma dificuldade nestes

modelos, em relação à simulação de propagação de fissuras, está relacionada à interdependência entre o modelo constitutivo e a malha. Outras dificuldades citadas por Ingraffea e Wawrzynek (2004) são a tendência direcional de encaminhamento da fissura em relação à forma da malha, resultados com rigidez do sistema maior que o esperado (“stress-locking”), e possível instabilidade numérica resultante de amolecimento artificial dos elementos resultando em autovalores negativos. Para evitar instabilidades devidas à localização de deformações, Bažant e Oh (1983) propuseram modelo com distribuição em banda. Posteriormente, Rots et al. (1985) estenderam sua aplicação para modo misto de fratura. Nesse modelo, a energia dissipada no processo de degradação é confinada a uma banda de localização de espessura finita. A espessura dessa banda é considerada uma propriedade do material, que junto com a energia de fratura, definem a lei de amolecimento do meio contínuo. Usualmente adota-se espessura proporcional ao tamanho de elemento utilizado, sendo essa determinação uma questão abordada em diferentes trabalhos subsequentes. Červenka et al. (2018) destacam, no entanto, que as limitações do método são raramente descritas, quando se trata de usar pequenos elementos finitos, o que dificulta a avaliação de convergência dos resultados com o refinamento do modelo.

Outra abordagem na classe de métodos constitutivos é o enriquecimento de meios contínuos. Nas principais variações, é introduzido um fator de escala interno que caracteriza o tamanho da banda de localização, evitando problemas que resultam na perda de positividade do operador tangente e mau condicionamento do problema de valor de contorno. Destacam-se nessa categoria o uso da teoria micropolar (também conhecida como teoria de Cosserat), particularmente aplicável a materiais granulares, pois é capaz de levar em consideração a microestrutura do material por meio de uma microrrotação, representando o giro médio das partículas, como um grau de liberdade adicional, complementando assim, os graus de liberdade de translação existentes nos meios contínuos clássicos. É uma das abordagens de regularização mais importantes, que tem um significado mais físico do que uma técnica totalmente matemática quando comparada com outras abordagens de regularização (Liu et al., 2022), sendo capaz de

resolver problemas de dependência de malha, preservando a elipticidade de equações diferenciais parciais governantes para problemas de valor de contorno.

Outra variação que se pode citar como enriquecimento, é o uso de modelos constitutivos não-locais, onde o tensor de tensões num dado ponto material depende não apenas do estado de deformações naquele ponto, mas leva em conta os valores das deformações em pontos vizinhos, de forma ponderada. Bažant et al. (1984) usaram um tipo de contínuo não-local para todo o material, conseguindo contemplar o fenômeno de amolecimento, mas incluindo a parte elástica das deformações. Posteriormente, Pijaudier-Cabot e Bažant (1987) propuseram uma variação, baseada num modelo de dano, aplicando a formulação não-local apenas às variáveis relacionadas ao amolecimento. Aplicações no MEC também podem ser vistas nos trabalhos de Lin et al. (2002), Sládek et al. (2003), Botta et al. (2005) e Benallal et al. (2006), que usaram modelos não-locais de plasticidade para análise do comportamento de materiais parcialmente frágeis.

Outra técnica de enriquecimento é a adição de gradientes das variáveis do modelo constitutivo convencional. Pioneiramente, de Borst e Muhlhaus (1992) propõem considerar a dependência da função de escoamento em relação à deformação plástica e também ao seu Laplaciano. Aplicação dessa abordagem no MEC foi tratada no trabalho de Benallal et al. (2006).

Por fim, uma versão drástica de método constitutivo, é a técnica de extinção do elemento, onde, um elemento finito é simplesmente removido do modelo quando o critério para o avanço da trinca é alcançado. Uma primeira aplicação pode ser vista em Mahishi e Adams (1982). A largura e o padrão da trinca resultante ficam diretamente dependentes da malha, e as regras de balanço de energia devem ser seguidas após a remoção, para manter a objetividade da malha. Mais recentemente Yun et al. (2019) utilizaram a ideia de extinção de elemento, junto com o MEF estendido.

ii. Métodos cinemáticos:

Esses métodos baseiam-se nas mudanças nos campos de deformação e de deslocamento na região de fissuração durante desenvolvimento do fraturamento. Como será detalhado mais adiante, essas mudanças são descritas através de: descontinuidades fortes – saltos no campo dos deslocamentos, que fisicamente deve corresponder ao comportamento de uma região com macrofissura; descontinuidades fracas – salto em componentes do campo de deformação (com campo de deslocamento contínuo), que fisicamente deve corresponder ao comportamento de região com microfissuras desenvolvidas; e finalmente, continuidade nos campos de deformações e de deslocamento.

Os modelos baseados no MEF são, então, capazes de representar o comportamento cinemático da fissuração através dessas descontinuidades, sem necessidade de modificação na malha original. A metodologia inicialmente utilizada promovia um enriquecimento dos elementos finitos padrão, introduzindo funções descontínuas nas equações de interpolação dos campos de deslocamento e de deformação. Esses Métodos de Enriquecimento de Elementos permitem a captura de saltos no campo de deformações ou no campo de deslocamentos, conforme usado por Belytschko et al. (1988) no modelo de fissuras distribuídas em bandas, para o caso de elementos menores que a espessura da banda. Simo et al. (1993) mostraram que, sob determinadas condições, o modelo teórico discreto pode ser entendido como um caso limite do modelo teórico contínuo, quando a espessura da banda de localização tende a zero, tendo-se a superfície de descontinuidade forte. Como um atrativo na modelagem com descontinuidade forte, Oliver (1996) mostra que as relações constitutivas (tensão-deformação) de meios contínuos padrão podem ser usadas, não havendo a necessidade de grandes adaptações nos modelos tradicionais. Numa extensão dessa abordagem, Manzoli et al. (1998) propuseram um modelo de banda variável que considera o processo de localização de deformações, desencadeado pela singularidade do tensor de localização, e seguido por uma etapa de transição em regime de descontinuidades fracas que delimitam uma banda de localização no interior do elemento. À medida que crescem as deformações inelásticas no interior da banda, sua espessura se reduz gradualmente, até colapsar

em uma superfície de descontinuidade forte. Essa abordagem é uma das bases fundamentais desta tese, e será tratada com mais detalhes adiante.

Ambos os modelos de descontinuidade (descontinuidade forte direta, e localização em banda) têm compatibilização apenas parcial no campo de deformações (interpolação não-conforme) entre um lado e outro da descontinuidade. Isso adiciona graus de liberdade internos (no nível dos elementos) que não alteram o número de equações de equilíbrio ou a matriz de rigidez global. Isso gera, entretanto, algumas restrições quanto ao tamanho e forma dos elementos, além do inconveniente de se ter, em muitos casos, elemento com uma matriz constitutiva tangente assimétrica (Jirásek, 2000).

No âmbito do MEF, estudos posteriores baseados no conceito de partição de unidade, adaptados para mecânica da fratura elástica linear, adicionaram à função de interpolação base, funções descontínuas e funções da solução assintótica da ponta da fissura, que levaram ao desenvolvimento dos métodos de elementos finitos estendido ou generalizado (X-FEM ou G-FEM). Diferencia-se da abordagem de enriquecimento dos elementos basicamente por não considerar, nas funções de interpolação do elemento enriquecido, a influência das funções dos elementos vizinhos que estiverem associados aos nós separados pela descontinuidade. Assim, esse enriquecimento fica associado apenas aos nós do elemento enriquecido (Métodos de Enriquecimento de Nós), equiparando completamente as deformações em ambos os lados da descontinuidade. Ingraffea (2007) cita que os maiores esforços na implementação do método, estão relacionados com a identificação dos elementos a enriquecer, promover a subdivisão do elemento enriquecido e aplicação de técnicas de quadratura não convencionais em cada subdivisão.

Em relação ao MEC, os métodos cinemáticos são aplicados através da discretização do domínio em células. Essas células são geometricamente similares aos elementos de domínio do MEF, porém existem fundamentalmente com a finalidade de se desenvolver integração em regiões do domínio, de modo a contemplar efeitos localizados de dissipação de energia, como em modelos de plastificação ou de dano. Diferentemente dos

elementos finitos, onde deslocamentos são aproximados por funções interpoladoras, nas células do MEC o próprio campo inelástico (tensões ou deformações inelásticas) é aproximado. Manzoli e Venturini (2004, 2007) propuseram o uso de células enriquecidas com a formulação de Descontinuidade Forte Incorporadas. Posteriormente, Peixoto et al. (2018) propuseram uma abordagem que considera modelo de degradação material e bifurcação em banda com transição entre descontinuidades fraca e forte.

As classificações apresentadas são apenas uma tentativa de organizar as diferentes abordagens numéricas. Certamente, dependendo das principais características consideradas, caberia a algumas delas, o enquadramento em mais de uma das diferentes classes consideradas. A própria abordagem desse trabalho, classificada como representação não-geométrica, poderia ser entendida de maneira diferente, caso se considere que a própria disposição das células, caracteriza a uma representação geométrica da superfície de falha. Embora não considerados nessa classificação geral, feita apenas para métodos numéricos baseados no MEF e no MEC, há outros métodos numéricos que tratam com competência esse tipo de problema. Ingraffea (2007) cita por exemplo os métodos sem malha, com destaque para o método element-free Galerkin (EFGM).

Os métodos sem malha não requerem uma conectividade explícita entre os nós para a definição das funções de forma. Em vez disso, cada nó tem um domínio de influência que não depende de sua posição, que representa a parte do domínio sobre a qual a função de forma desse nó é diferente de zero. Numa das formas do EFGM as funções de forma são geradas por diferentes aproximações, como por exemplo a de mínimos quadrados móveis. Funções de forma descontínuas podem ser obtidas pelo truncamento apropriado das funções de peso, o que pode ser feito de diferentes maneiras. de Borst (2022) considera o uso de métodos sem malha uma técnica menos robusta em relação ao MEF. Segundo o autor, são computacionalmente mais exigentes, tem implementação menos simples, a maneira como o suporte de um nó é alterado na presença de uma trinca é muito específico, além de requerem em geral, o emprego de uma malha de fundo das células de integração.

Outros métodos menos gerais também são citados por Ingraffea (2007), como o método de elementos discretos, métodos em partículas, treliçados e atômicos. Embora não citado, uma grande quantidade de pesquisas têm sido direcionadas, nos últimos anos, ao uso do método variacional do campo de fases (“phase-field”) na análise de falha de sólidos. Trata-se de uma abordagem baseada em energia regularizada com formulações variacionais para lidar com problemas descontínuos em sólidos pela minimização das energias elásticas e de fratura. Muito simplificada, a metodologia do campo de fases consiste em incorporar uma equação adicional no modelo para controlar uma variável de campo contínua (variando de zero a um), que representa uma transição suave entre o material completamente danificado e o material íntegro. Uma outra variável do modelo é o parâmetro de escala de comprimento, que relaciona a aproximação difusiva da trinca aguda. Quando o parâmetro de comprimento tende a zero, o modelo tende para a teoria de Griffith. À medida que o parâmetro se torna maior, a região danificada também se torna maior. Tem-se assim, uma transição suave entre os estados danificado e íntegro (Leão, 2021). A metodologia possui características específicas vantajosas, em lidar com problemas de detecção de nucleação e propagação de descontinuidades. Essa propagação é avaliada sem exigência e técnicas de rastreamento ou critérios arbitrários. De acordo com Liu et al. (2023), as estratégias computacionais para falha de interface em materiais parcialmente frágeis e frágeis podem ser classificadas em duas categorias. Uma delas é uma abordagem híbrida acoplada ao modelo de zona coesiva, que trata a variável de campo de fase como uma variável auxiliar, que permite a incorporação da força de superfície coesiva durante a abertura da trinca. Na outra abordagem, algumas estratégias de regularização para energia de superfície interfacial são usadas para representar as interfaces difusas na estrutura do campo de fase. Muitas variações têm sido desenvolvidas, e os resultados têm comprovado a eficiência do “phase-field” para lidar com problemas de descontinuidades em sólidos, incluindo fratura de materiais parcialmente frágeis. Uma preocupação constante, entretanto, é a demanda pelo uso de malhas muito refinadas, que torna elevado o custo computacional, até mesmo para análises em estado plano.

1.3 Abordagem de Descontinuidades no MEC

Considerando uma aplicação gradual de carga em um sólido parcialmente frágil, pode-se verificar na relação tensão-deformação, diferentes fases que definem a trajetória de equilíbrio de um determinado ponto material do sólido em análise. A adoção de um modelo constitutivo elásto-degradante implica em uma correção constante da rigidez do material com a evolução da carga inelástica, seja em regime contínuo ou descontínuo. Idealmente, pode-se identificar quatro fases distintas, que são delimitadas por pontos específicos dessa relação tensão-deformação. Esses pontos podem estar mais próximos ou distantes, dependendo de características intrínsecas do material. A figura 1.3 ilustra essa relação, em uma dimensão, com as fases e delimitações, descritas na sequência.

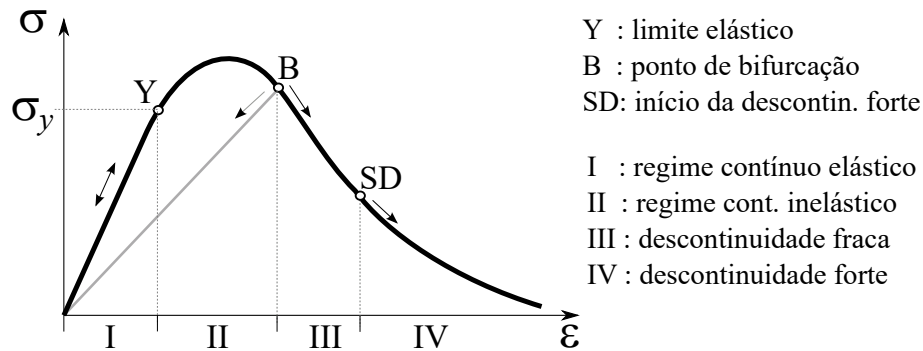


Figura 1.3: Fases observáveis na relação tensão-deformação durante o processo de carregamento.

- Fase I - Regime Contínuo Elástico : as cargas aplicadas em um sólido inicialmente descarregado geram uma fase inicial com comportamento elástico até que a tensão atinja um determinado limite σ_y , correspondente ao ponto limite **Y** da curva. Nessa fase são aplicáveis as formulações da elasticidade e mecânica do contínuo, e a rigidez é dada pelo tensor constitutivo elástico linear E_{ijkl}^o ;
- Fase II - Regime Contínuo Inelástico : superado o limite elástico do material parcialmente frágil, uma relação inelástica que descreve o amolecimento passa a reger seu comportamento (nesse trabalho foi adotado o modelo de dano isotrópico). A redução na rigidez a partir deste ponto é observada no, agora vigente, tensor constitutivo secante $E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^o$, função da variável de dano D . Superada a fase elástica, e ao

longo de toda a fase inelástica, deve ser feita constantemente a análise de bifurcação. Verificada a condição de bifurcação, correspondente ao ponto **B** da curva, tem fim o regime contínuo. Fora da zona de localização, ocorre o descarregamento em regime contínuo, de acordo com o tensor secante do modelo elasto-degradante.

- Fase III - Regime de Descontinuidade Fraca : superado o ponto de bifurcação, observam-se descontinuidades no campo das deformações, permanecendo o campo de deslocamentos contínuo. Considera-se que as descontinuidades estão limitadas em uma banda de localização de espessura finita h . Com o avanço da análise, e das deformações, a espessura dessa banda se reduz gradualmente (conforme lei de variação escolhida), concentrando as descontinuidades em uma região cada vez mais estreita, até que colapse em uma região de espessura mínima (uma superfície). Esse instante, marca o fim do regime de descontinuidades fracas, assinalado como ponto **SD** na curva.
- Fase IV - Regime de Descontinuidade Forte : neste regime a descontinuidade ocorre no campo de deslocamentos, e as deformações vão, teoricamente, a infinito.

No instante da bifurcação, pode ocorrer de se ter também a condição de descontinuidade forte satisfeita, isto é, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$. Nesse caso particular, não se tem o regime de descontinuidade fraca, e a transição é direta do regime contínuo para a descontinuidade forte. Tal situação está associada a uma zona de processo de fratura diminuta e, conseqüentemente, a um processo de fraturamento mais frágil.

Em um caso mais extremo, pode-se ter a condição de regime de descontinuidade forte estabelecido logo após atingido o limite elástico, isto é, $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{SD}$. Esta configuração simplifica bastante a análise (e implementações), sendo adotada nos exemplos iniciais deste trabalho. Na prática, retrata o comportamento de materiais perfeitamente frágeis.

Estes dois últimos casos particulares, são mostrados graficamente nas figuras 1.4.

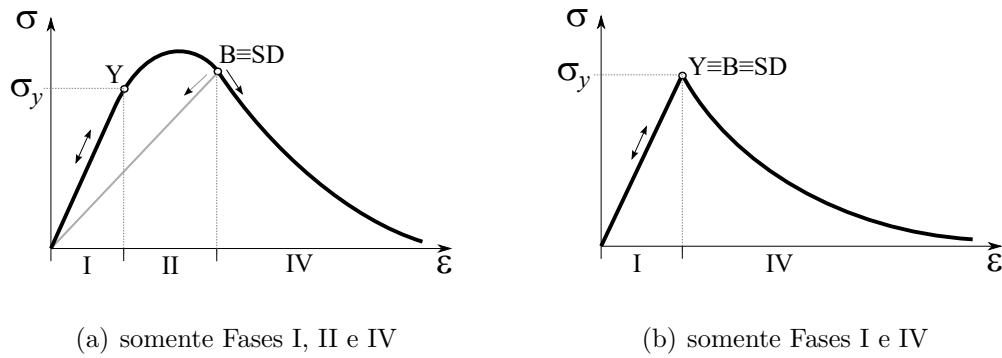


Figura 1.4: Transição entre Fases na relação tensão-deformação.

Nos casos mais gerais, onde todas as Fases (I a IV) estão presentes, zonas de processo de fratura de tamanhos relevantes ficam bem representados. Assim, como ilustra a figura 1.5, há uma associação do modelo teórico com o comportamento físico do material.

Tomando a direção do avanço da trinca, o regime elástico é observado em pontos materiais localizados à frente da ZPF. A região de regime contínuo inelástico (Fase II) correspondente à deterioração de propriedades mecânicas do material, com amolecimento e sem discontinuidades, caracterizando início de processos dissipativos. Em pontos materiais dentro da ZPF, na região em regime de descontinuidade fraca (Fase III), associa-se à geração de microfissuras. Já fora da ZPF, os pontos materiais estariam sob regime de descontinuidade forte, equivalendo à agregação das micro-fissuras que formam uma trinca macroscópica.

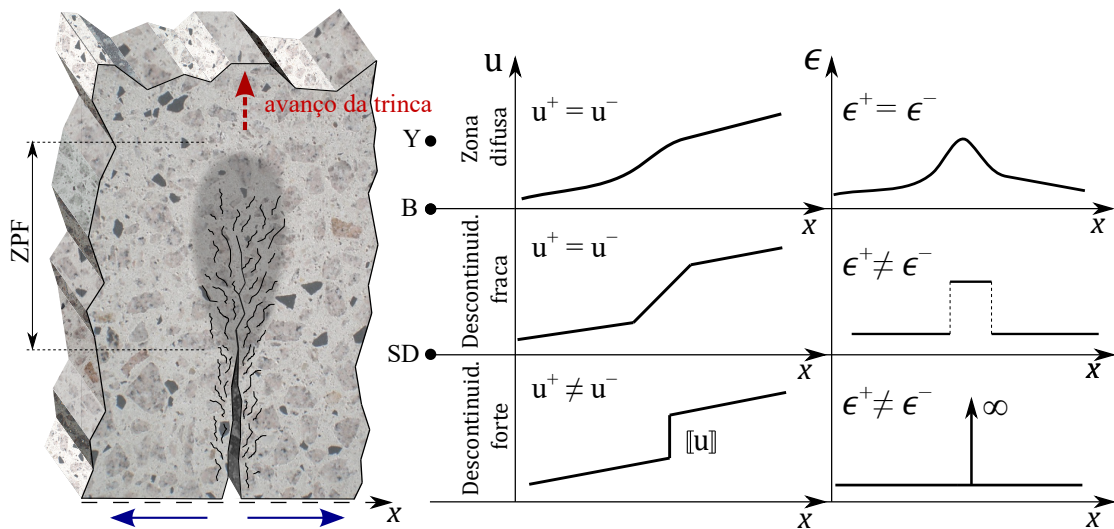


Figura 1.5: Regiões da zona de processo de fraturas.

A maior parte dos trabalhos que utilizam modelos com descontinuidades fortes, referidos como “Continuum Strong Discontinuity Approach” (CSDA), emprega o MEF ou suas variações. Só muito tempo depois (cerca de uma década), dos primeiros trabalhos associando MEF-CSDA, foi estudado seu uso junto com o método dos elementos de contorno.

Manzoli e Venturini (2004, 2007) foram os pioneiros na proposição do uso de células enriquecidas com Descontinuidade Forte Incorporada. Foram adotados modelos elastoplásticos associativos com um critério de escoamento específico, capaz de suportar os esforços de compressão sempre na fase elástica, para simular materiais parcialmente frágeis. O modelo de discretização utilizado foi o de células triangulares constantes (com saltos de deslocamentos uniformes), e lei de amolecimento exponencial.

Posteriormente Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009) expandiram a ideia utilizando um modelo de dano isotrópico, que é mais adequado a materiais parcialmente frágeis. Ainda foi considerado o regime de descontinuidade forte seguindo o regime elástico ($\mathbf{Y} \equiv \mathbf{SD}$, figura 1.4b). Diferente dos trabalhos anteriores, em que todo o domínio era discretizado, foi proposto o uso de um algoritmo automático de geração de células que eram inseridas no modelo durante o processamento. Isso tornou possível a discretização apenas da região com descontinuidade do domínio, minimizando a perda da característica básica do MEC. O algoritmo para geração automática de células, determina suas posições acompanhando a direção de propagação da trinca. Não havendo uma malha fixa, problemas de instabilidade relativos à orientação dos segmentos de descontinuidades no interior das células, foram superados. A malha gerada em tempo de processamento permitiu garantir que se utilizasse somente células com condições simétricas ou quase-simétricas (relaxando a consistência cinemática).

Para retratar com mais precisão o comportamento parcialmente frágil dos materiais, Peixoto (2016) propôs o uso do modelo de dano isotrópico com análise de bifurcação e transição entre as fases elástica, inelástica, com descontinuidade fraca e descontinuidade forte, seguindo a ideia proposta em Manzoli et al. (1998) para o MEF. O modelo contou com células quadrilaterais com aproximação constante. Também foi utilizado um algoritmo

próprio de geração automática de células, possibilitando variação no tamanho e ajuste na orientação das novas células. Os resultados mostraram eficiência na representação mais adequada da zona de processo de fratura. Contribuições nessa linha podem ser vistas em Peixoto et al. (2017), Peixoto et al. (2018), Mendonça et al. (2018) e Peixoto e Chaves (2022).

Em continuidade aos avanços, Mendonça (2021) propôs o uso de células com saltos de deslocamentos não-uniformes embutidos, permitindo uma melhor captura do movimento de rotação relativa entre as duas partes da célula, e com isso, reduzindo os problemas de “stress-locking” observados nos resultados de Peixoto (2016), que consideravam sempre saltos uniformes. Pode-se também citar o trabalho de Mendonça et al. (2020) nessa linha.

Uma observação significativa é que todos os trabalhos citados fazem uso da simplificação de modelos de estados planos (de tensão ou deformação). A formulação e abordagem de problemas tridimensionais pelo CSDA já se mostraram viáveis utilizando o MEF, como se verifica, por exemplo, nos trabalhos de Chaves (2003) e Ibáñez (2006).

1.4 Objetivos do Trabalho e Delimitações

O uso do método dos elementos de contorno implícito em análises não-lineares, com células geradas em tempo de processamento, mostrou-se viável em análises tridimensionais (ver Ribeiro et al. (2008)) com plasticidade. A discretização apenas de uma região limitada do domínio não faz com que os modelos cresçam a ponto de torná-los computacionalmente inviáveis, considerando o uso de equipamentos de computação disponíveis para a maioria dos pesquisadores e engenheiros. O uso de células com descontinuidade forte incorporada, também mostrou-se apropriado para análise de falha de sólidos de materiais parcialmente frágeis. A discretização mínima do domínio, gerada em tempo de processamento, permite o acompanhamento da trajetória de propagação da falha. Até então, essa abordagem se limitava a problemas bidimensionais.

Este trabalho tem como objetivo geral, fornecer evidências de que a metodologia pode ser estendida para análise de problemas tridimensionais, mantendo suas principais vantagens,

e consolidando a metodologia como uma alternativa competitiva com outras metodologias mais difundidas na comunidade científica.

De forma específica, tem o objetivo de apresentar a implementação de células volumétricas para discretização de domínio tridimensional, e aplicação em análise não-linear, utilizando método incremental-iterativo, e o arcabouço computacional de modelos constitutivos de degradação elástica implementados no INSANE. As células discretizam apenas região limitada do domínio, onde fenômenos de dissipação de energia devem ocorrer. Nessas células, a formulação com descontinuidade forte deve ser incorporada, para permitir análise de falha por fraturamento, não apenas por descontinuidade forte direta, mas também pelo modelo de banda variável e transição de regimes. Para essa última abordagem, a localização de deformações, deve ser avaliada pelo algoritmo de análise numérica de bifurcação. A abordagem contempla então, o algoritmo implementado no INSANE. A implementação deve também possibilitar a introdução de novas células no modelo, em tempo de processamento. As qualidades e dificuldades encontradas no uso dos algoritmos implementados estão materializados nas discussões relativas aos exemplos analisados.

Embora a implementação realizada tenha potencial para ser associada a um algoritmo que permita rastrear o desenvolvimento da superfície de fraturamento, através da determinação da forma e posição das células introduzidas durante o processamento, esse algoritmo não foi desenvolvido. As diretrizes e desafios envolvidos nessa tarefa são comentados no texto.

Cabe mencionar algumas delimitações gerais do tipo de problemas que são considerados no trabalho: a) presume-se que as ações atuam com aceleração pequena o suficiente para as forças inerciais serem ignoradas; b) para levar em conta a não-linearidade material nas análises, as ações são quase-estáticas, isto é, são aplicadas de maneira gradativa, até se obter trajetórias de equilíbrio, em análises sucessivas (variável de tempo com função similar a um fator de carga); c) os materiais considerados são macroscopicamente homogêneos e isotrópicos; d) os problemas analisados são geometricamente lineares, com deformações pequenas dentro do campo de validade do tensor tensão de Cauchy, sem distinção entre

coordenadas espaciais e materiais.

1.5 Organização do Texto

Embora seja vasto o material bibliográfico que trata dos temas deste trabalho, com objetivo de fornecer ao leitor não familiarizado com as principais características da metodologia, alguns conceitos são abordados no texto com um nível de aprofundamento que se considerou adequado, buscando sempre referenciar fontes mais detalhadas que podem ser consultadas para aprimoramento. Este trabalho está organizado em oito capítulos e um apêndice. Seguindo a esse capítulo introdutório, o Capítulo 2 resume fundamentos básicos do modelo de dano isotrópico contínuo adotado no trabalho. O Capítulo 3 apresenta as equações integrais para problemas não-lineares, que no Capítulo 4 são tratadas na forma do método dos elementos de contorno, em sua forma implícita. O Capítulo 5 aborda a formulação de descontinuidade forte, como um modelo de banda variável, e também questões relativas à localização de deformações. No Capítulo 6, é apresentada a associação do MEC com a formulação de descontinuidades fortes, considerando questões numéricas. Na sequência, no Capítulo 7 são apresentados os principais resultados numéricos obtidos com a metodologia implementada, finalizando com as considerações finais apresentadas no Capítulo 8. No Apêndice são apresentadas equações fundamentais do modelo de dano discreto, tratando também da reinterpretação do módulo de amolecimento. A lista de referências bibliográficas finaliza o texto.

Capítulo 2

Modelo de Dano Isotrópico Contínuo

Um modelo constitutivo consistente deve representar o comportamento de um sólido sob ações em sua fase inicial elástica e em fases pós-elásticas. Nos materiais parcialmente frágeis a degradação material se traduz num amolecimento que faz com que surjam deformações contínuas acentuadas e que seja reduzida a capacidade de suportar carga. Essa deterioração tende a se concentrar em regiões onde ocorrem localização de deformações que, com acréscimo de cargas, podem dar origem às descontinuidades fortes.

2.1 Carregamento em Regime Elástico

Considera-se um sólido genérico, como ilustrado na Figura 2.1, com domínio Ω , e contorno Γ ($\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$). Em parte da superfície do contorno Γ_u são estabelecidas condições de contorno essenciais ou de Dirichlet¹ (deslocamentos u_i prescritos), e na parte restante da superfície Γ_σ são estabelecidas condições de contorno naturais ou de Neumann² (forças de superfície t_i prescritas). Já no interior do sólido Ω o conjunto de forças de corpo (ou forças por unidade de volume) são descritas por resultantes b_i .

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, Alemanha

²Carl Gottfried Neumann, 1832-1925, Alemanha

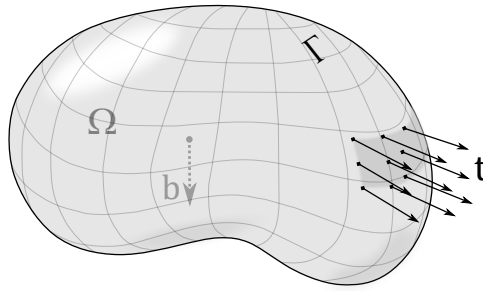


Figura 2.1: Domínio do sólido, contorno e ações.

Em sólidos macroscopicamente homogêneos, isotrópicos, e sujeitos a pequenas deformações, pode-se considerar a ação de cargas atuando de forma quase estáticas. Tem-se um problema bem formulado diferencialmente a partir do conjunto de equações seguintes:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equações de equilíbrio interno}) \quad (2.1a)$$

$$\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{eq. de compatibilidade cinemática}) \quad (2.1b)$$

$$\sigma_{ij} - E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{eq. de compatibilidade constitutiva}) \quad (2.1c)$$

$$u_i = \mathbf{u}_i^* \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{cond. contorno essenciais}) \quad (2.1d)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \mathbf{t}_i^* \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{cond. contorno naturais}) \quad (2.1e)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor de deformações (parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos), σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy e E_{ijkl}^o é o tensor constitutivo elástico do material, dado por:

$$E_{ijkl}^o = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.2)$$

sendo:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.3)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker³, E é o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson⁴.

As considerações até aqui são válidas até um ponto limite elástico (ponto **Y** na figura 1.3).

As equações 2.1a, 2.1b, 2.1d e 2.1e são válidas não apenas para o regime elástico, mas continuam válidas em fase pós-elástica em que se mantém o meio idealizadamente contínuo.

³Leopold Kronecker, 1823-1891, Alemanha

⁴Barão Siméon Denis Poisson, 1781-1840, França

Já a equação 2.1c deve ser atualizada, sendo nessa fase seguinte à fase elástica, necessário se considerar a possibilidade de comportamento com dissipação de energia. Em alternativa aos modelos de plasticidade, uma maneira mais adequada para tratar materiais parcialmente frágeis são os modelos de dano contínuo.

2.2 Modelo de Dano Isotrópico Contínuo

Nesse modelo de dano escalar isotrópico define-se uma variável escalar de dano, D , como uma relação entre uma tensão aparente, σ , e uma tensão efetiva, $\bar{\sigma}$, em uma seção:

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = 1 - D \quad \Rightarrow \quad \sigma = (1 - D)\bar{\sigma} \quad (2.4)$$

Assim, para um material localmente em estado íntegro, $D = 0$, e a tensão efetiva é igual à aparente, enquanto para um material totalmente degradado, a variável de dano D tende à unidade, e a tensão aparente tende a zero ($D \in [0, 1]$). No modelo isotrópico essa variável escalar leva em conta as micro-falhas que surgem e evoluem com o tempo, independente de sua direção. Adotando a hipótese de equivalência de deformações associadas a um estado danificado sob tensão σ e a um estado íntegro sob tensões efetivas $\bar{\sigma}$, pode-se associar o tensor constitutivo elástico do material íntegro E_{ijkl}^o ao tensor constitutivo elástico do material degradado E_{ijkl} :

$$E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^o \quad (2.5)$$

O tensor secante E_{ijkl} considera a perda de rigidez do material. Uma equação constitutiva que relaciona o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} às deformações pode ser obtida a partir da função de densidade de energia livre de Helmholtz⁵ $\psi(\epsilon_{ij}, r)$ como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi(\epsilon_{ij}, r)}{\partial \epsilon_{ij}} = (1 - D)E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.6)$$

onde r é uma variável interna escalar do tipo deformação ($r \in [r_o, \infty)$), uma propriedade do material, representando um valor limite de dano corrente. A variável de dano pode ser escrita como:

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.7)$$

⁵Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821-1894, Alemanha

onde a variável interna do tipo tensão q é uma variável conjugada da variável interna do tipo deformação r , i.e. $q(r) = (1 - D)r$, sendo ($q \in [0, r_o]$; $q|_{t=0} = r_o$).

A delimitação do domínio elástico linear pode ser estabelecida a partir de uma função de dano, F , isto é, a condição do regime elástico é definida por $F \leq 0$. Tais funções de dano podem ser descritas no espaço de deformações ou no espaço de tensões. Assim, tem-se:

$$F(\sigma_{ij}, q) = \tau_\sigma(\sigma_{ij}) - q < 0 \quad (\text{espaço das tensões}) \quad (2.8a)$$

$$\bar{F}(\epsilon_{ij}, r) = \tau_\epsilon(\epsilon_{ij}) - r < 0 \quad (\text{espaço das deformações}) \quad (2.8b)$$

Os termos τ_σ e τ_ϵ devem ser positivos ou possuir valor nulo, sendo este último correspondente ao estado indeformado. Eles representam as normas de um estado de tensões em espaços cartesianos específicos para o campo de tensões, por exemplo. Observa-se que o dano é iniciado quando τ_ϵ alcança r pela primeira vez, ou o equivalente no espaço das tensões. O domínio elástico e a superfície de dano (que delimita o domínio), são definidas, no espaço das tensões, respectivamente por:

$$\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma_{ij} | F(\sigma_{ij}, q) = \tau_\sigma - q(r) < 0\} \quad (2.9a)$$

$$\partial\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma_{ij} | F(\sigma_{ij}, q) = \tau_\sigma - q(r) = 0\} \quad (2.9b)$$

ou, no espaço das deformações, por:

$$\mathbb{E}_\epsilon := \{\epsilon_{ij} | \bar{F}(\epsilon_{ij}, r) = \tau_\epsilon - r < 0\} \quad (2.10a)$$

$$\partial\mathbb{E}_\epsilon := \{\epsilon_{ij} | \bar{F}(\epsilon_{ij}, r) = \tau_\epsilon - r = 0\} \quad (2.10b)$$

Cabe esclarecer que a referência à superfície dano está relacionada, em geral, à superfície do elipsoide de revolução no espaço de tensões (ou de deformações), estabelecido pelo termo τ citado. O termo τ_ϵ , conhecido como “deformação equivalente”, é determinado em função do critério de dano escolhido. Dentre os muitos critérios de dano disponíveis, os termos τ_ϵ podem ser determinados, como por exemplo, em Mazars e Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987), Lemaitre e Chaboche (1990) e Oliver et al. (2006). Por conveniência, neste trabalho optou-se por utilizar o critério de dano descrito por Oliver et al. (2006) para representação dos efeitos dissipativos, já que, com esse critério, a degradação ocorre

preferencialmente em estados de tração – comportamento esperado para materiais parcialmente frágeis. O referido critério tem a deformação equivalente dada por:

$$\tau_\epsilon = \sqrt{\epsilon_{ij}^+ E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^+ E_{ijkl}^{o,-1} \bar{\sigma}_{kl}} \quad (2.11)$$

sendo o tensor ϵ_{ij}^+ definido, em um sistema de coordenadas alinhado com as direções principais, como:

$$\epsilon_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{n_{dim}} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.12)$$

onde ϵ_k representa a k -ésima deformação principal, $\hat{\mathbf{e}}_k$ é um vetor unitário na direção principal correspondente e $\langle \epsilon_k \rangle = (|\epsilon_k| + \epsilon_k)/2$. Assume-se então nesse modelo adotado, que o material permanece sempre em regime elástico sob tensões de compressão, enquanto sob tensões de tração pode ser verificada a degradação do material. A figura 2.2 ilustra a limitação do domínio elástico em projeção plana no espaço de tensões de Haigh-Westergaard⁶, que como se observa, não tem limitação no octante relativo à compressão.

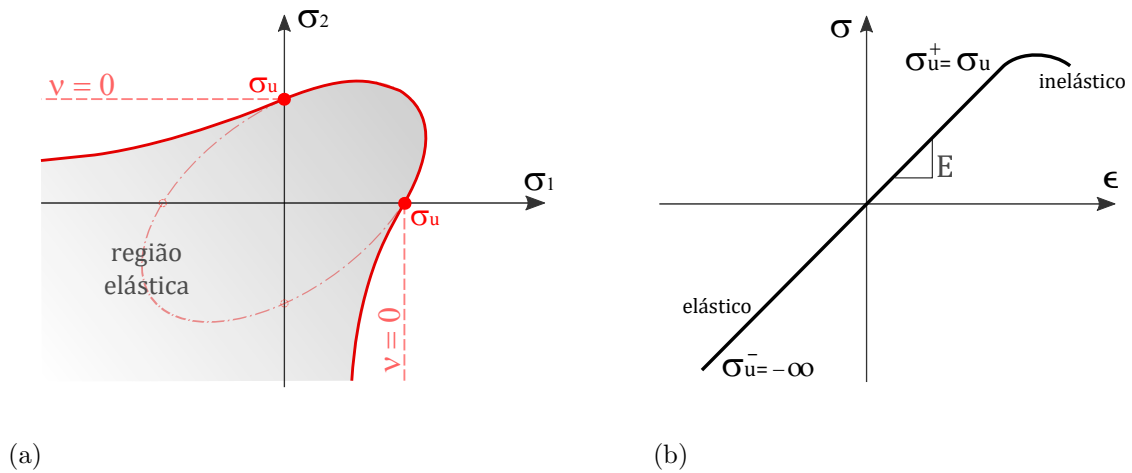


Figura 2.2: (a) Projeção do domínio elástico para o modelo de Oliver et al. (2006), (b) Representação de trajetória em espaço tensão-deformação unidimensional.

Com a evolução da aplicação de carga além do regime elástico, a superfície que delimita a região com comportamento inelástico (superfície de dano $F = 0$) é controlada pela variável interna r , e sua evolução no tempo é sempre positiva ou nula, *i.e.*, $\dot{r} \geq 0$. Como notação padrão, ponto sobre a variável indica variação temporal (taxa de variação), *i.e.*, $\dot{\bullet} \equiv \partial \bullet / \partial t$. Na análise, que consiste em avaliar a evolução da variável interna e determinar

⁶Bernard Parker Haigh, 1884-1941, Escócia; Harold Malcolm Westergaard, 1888-1950, Dinamarca

as condições de carregamento ou descarregamento do sistema, pode-se lançar mão das relações de Karush-Kuhn-Tucker⁷, que define as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \dot{r} \geq 0 ; \quad \bar{F} \leq 0 ; \quad \dot{r}\bar{F} = 0 \quad (\text{condição de carregamento/descarregamento}) \\ \text{para } \bar{F} = 0, \quad \dot{r}\dot{\bar{F}} = 0 \rightarrow (\text{condição de persistência}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dessas relações pode-se observar as condições seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \bar{F} < 0 \\ \text{Se } \bar{F} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \dot{D} = 0 \quad (\text{carregamento elástico})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \dot{\bar{F}} < 0 \\ \text{Se } \dot{\bar{F}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \dot{D} = 0 \quad (\text{descarregamento})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \Rightarrow \dot{D} = 0 \quad (\text{neutro}) \\ \dot{r} > 0 \Rightarrow \dot{D} > 0 \quad (\text{evolução de dano}) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

A solução do problema de ocorrência de dano consiste em avaliar a evolução do parâmetro τ_ϵ , procurando-se determinar o instante em que este se iguala ao valor corrente da variável interna r , que assume o maior valor definido pela função τ_ϵ ao longo do processo de carga. Notar que τ_ϵ depende somente de deformações, e a variável r é determinada em termos do tensor de deformações corrente, sendo seu valor em um determinado tempo t , dado por:

$$r(t) = \underbrace{\text{máx}\{r_o, \tau_\epsilon(s)\}}_{\text{máximo histórico de } [r_o, \tau_\epsilon(s)]} \quad s \in [0, t] \quad (2.15)$$

sendo s uma variável do tempo no intervalo entre o início ($t = 0$) e o tempo t considerado.

Como a variável interna r estabelece o limite de dano corrente, controlando a dimensão do domínio elástico delimitado pela superfície de dano $F(\tau_\epsilon, r) = 0$, é preciso ter um valor inicial (r_0) para este parâmetro, que estabeleça o início do regime inelástico. Antes da aplicação de cargas, atribui-se o valor inicial ao limite de dano ($r = r_0$), sendo esse valor inicial uma propriedade do material, que depende da tensão limite elástica uniaxial à tração (f_t), tendo-se com base na equação 2.11, a relação:

$$r_0 = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \quad (2.16)$$

Definida a transição do regime elástico para o inelástico, deve-se agora definir o instante em que ocorre a bifurcação (ponto **B** na figura 1.3). São dois casos de bifurcação, contínua

⁷William Karush, 1917-1997; Harold William Kuhn, 1925-2014, Estados Unidos; Albert William Tucker, 1905-1995, Canadá

e descontínua, sendo a primeira um caso limite da segunda, como mostram Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002). Como a bifurcação contínua é um caso mais desfavorável, pode ser adotada como condição necessária para o início da localização de deformações. As considerações detalhadas relativas à localização de deformações e modelo de banda variável com descontinuidades fraca e forte serão feitas em capítulo posterior (Capítulo 5), como evolução da análise fisicamente não-linear para análise de falha material.

Algumas considerações são necessárias antes de descrever como determinar a ocorrência da localização de deformações (ponto de bifurcação). A variável interna q , $q(r) = (1 - D)r$, controla o endurecimento/amolecimento do material, podendo ser chamada lei de endurecimento-amolecimento. A inclinação da curva que relaciona a variação de $q(r)$ à variável interna r é chamada *módulo de endurecimento-amolecimento*, representada por H , uma propriedade específica do material. Assim, H descreverá a trajetória pós-elástica, relacionando as variáveis internas q e r :

$$H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = q'(r) \Rightarrow \dot{q} = H(r)\dot{r} \quad (2.17)$$

Os possíveis comportamentos observados são ilustrados na figura 2.3.

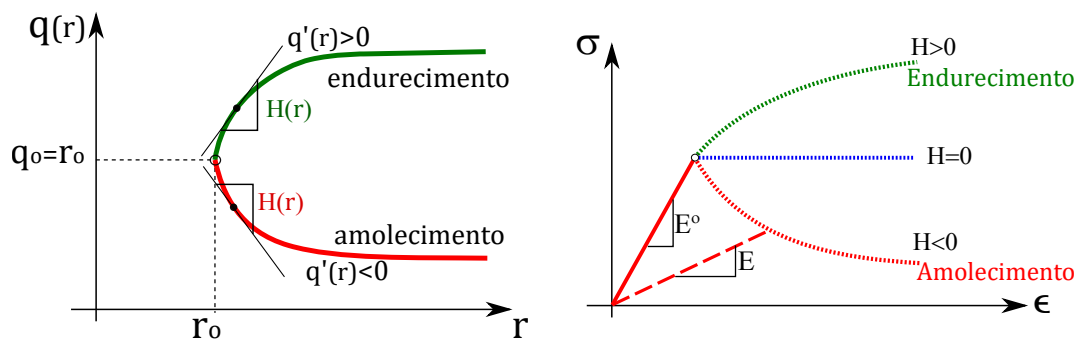


Figura 2.3: Trajetória do comportamento inelástico - endurecimento/amolecimento.

Na dissipação com campos contínuos a lei de amolecimento é postulada como propriedade do material, sendo classificada de acordo com a estrutura da função $q(r)$, e consequentemente de $D(r)$. Diferentes modelos de leis podem ser utilizados, dentre eles a lei de amolecimento exponencial adotada aqui, para a qual, definida uma constante C escalar arbitrária, tem-se $H = q'(r) = Cq$. Expressões para essa lei são definidas a seguir:

Lei de Amolecimento Exponencial

$$q(r) = \begin{cases} r_o & \text{se } r \leq r_o \\ r_o e^{A(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (2.18)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq r_o \\ 1 - \frac{r_o}{r} e^{A(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (2.19)$$

sendo A , uma constante positiva. Neste trabalho, foi adotada a expressão apresentada em Oliver et al. (1990):

$$A = \left[\frac{G_f}{r^2 l^*} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \quad (2.20)$$

onde G_f é a energia de fratura (propriedade do material) e l^* é um comprimento característico, adotado por exemplo, como a média do comprimento das arestas do elemento de célula.

2.3 Tensor Constitutivo Tangente

Uma definição importante de se mencionar é que os incrementos (taxas) de tensão e de deformação relacionam-se entre si por meio de um tensor constitutivo tangente, E_{ijkl}^t , como segue:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.21)$$

devendo-se notar que, para o caso de descarregamento (ou carga neutra) o tensor constitutivo elástico do material degradado assume o valor do módulo secante ($E_{ijkl}^t = E_{ijkl}$). Já no caso de carregamento inelástico, a redução na rigidez é computada pela atualização do tensor constitutivo tangente.

Partindo da relação básica entre tensão e deformação definida na equação 2.6 ($\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$), a expressão para o incremento temporal de tensão (derivada em relação ao tempo) é dada por:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.22)$$

Usando a relação da equação 2.5 e as taxas ($\dot{E}_{ijkl} = -\dot{D}E_{ijkl}^o$) tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{D} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \quad (2.23)$$

Desenvolvendo a expressão, tendo em conta que na condição de carregamento inelástico $\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon$, obtém-se a seguinte expressão para o tensor constitutivo tangente:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right) \dot{r} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \\ &= \left[E_{ijkl} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon_{kl}} \right) E_{ijrs}^o \epsilon_{rs} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \\ \therefore E_{ijkl}^t &= E_{ijkl} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon_{kl}} \right) E_{ijrs}^o \epsilon_{rs} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Reiterando observação anterior, em caso de descarregamento (ou carga neutra), tem-se $\dot{D} = \dot{r} = 0$, e portanto ($E_{ijkl}^t = E_{ijkl}$). Expressões para o tensor constitutivo tangente para modelo elasto-degradante, formuladas com base no desenvolvimento de modelos de plasticidade também podem ser encontradas em Simo e Ju (1987) e Carol et al. (1994).

Particularizando para o modelo de dano isotrópico com o critério de dano descrito por Oliver et al. (2006), pode-se obter a relação constitutiva incremental, a partir das equações 2.7, 2.11 e 2.24, descrita como:

$$E_{ijkl}^t = \frac{q}{r} E_{ijkl}^o - \left(\frac{q - Hr}{r^3} \right) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl}^+ \quad (2.25)$$

onde as tensões efetivas na expressão são dadas por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{ij}^+ = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^+ \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Equações Integrais para Problemas Fisicamente Não-Lineares

Nesse capítulo são apresentadas formulações das equações integrais de contorno utilizadas para análise de sólidos compostos por materiais que apresentam comportamento não linear em regime de pequenas deformações. Pode-se formular essas equações a partir da técnica de resíduos ponderados, como apresentado em Brebbia et al. (1984), bem como utilizando o teorema de Betti¹ que equivale à aplicação da segunda identidade de Green² à equação de Navier³, escrita na forma adequada a problemas não-lineares.

3.1 Formulação não-linear

Qualquer ponto de uma trajetória de equilíbrio não linear pode ser definida como a combinação de duas partes lineares, conforme pode-se observar na figura 3.1 para diagrama uniaxial.

¹Enrico Betti Glaoui, 1823-1892, Itália

²George Green, 1793-1841, Inglaterra

³Claude Louis Marie Henri Navier, 1785-1836, França

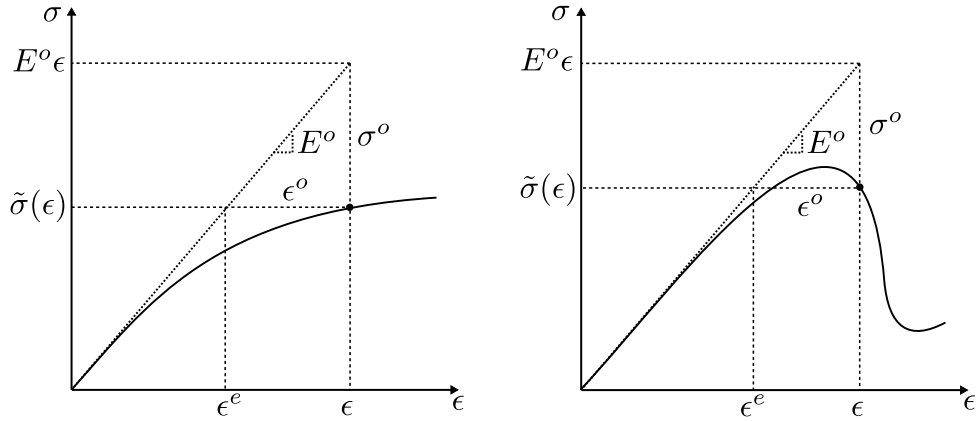


Figura 3.1: Trajetória de equilíbrio unidimensional - combinação de duas partes lineares – fonte: Peixoto et al. (2016).

Para uma determinada deformação ϵ , observa-se que a tensão real, $\tilde{\sigma}(\epsilon)$, é a diferença entre um estado de tensão, dado pela aplicação da relação elástica linear inicial ($E^o\epsilon$), e um resíduo $\sigma^o = E^o\epsilon^o$. Generalizando para o espaço tridimensional, tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon_{ij}) = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^o = E_{ijkl}^o (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^o) \quad (3.1)$$

sendo $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^o$. Considerando a variação temporal dessas grandezas, pode-se escrever:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^o \Rightarrow \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^o \quad (3.2)$$

Retomando a ilustração da figura 2.1, tem-se um domínio sólido Ω , delimitado por um contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ onde são prescritas condições de contorno naturais (em Γ_σ) ou essenciais (em Γ_u) e atuam forças externas por unidade de volume (campo resultante b_i). Nas equações 2.1, que definem o problema de mecânica quase estática, pode-se substituir a eq. (2.1c) por: $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^o$.

Aplicando as relações de compatibilidade cinemática (eq. 2.1b) às de compatibilidade constitutiva (2.1c), obtém-se $\dot{\sigma}_{ij} = \lambda_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^o$, e posteriormente substituindo na equação de equilíbrio interno (eq. 2.1a), obtêm-se a conhecida equação de Navier para deslocamentos:

$$\mu \dot{u}_{j,kk} + (\lambda + \mu) \dot{u}_{k,kj} - \dot{\sigma}_{jk,k}^o + b_i = 0 \quad (3.3)$$

A equação de equilíbrio de Navier é um conjunto de equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, de natureza elíptica, conforme demonstra Cruse (1977). Isto implica

que somente soluções contínuas, com primeiras derivadas contínuas são admitidas. As soluções fundamentais, importantes na obtenção das equações integrais do MEC, são soluções singulares para a equação de Navier, sendo que, para cada problema especial (ou fundamental) uma solução particular é determinada.

3.2 Soluções Fundamentais de Kelvin

Um problema fundamental de interesse é aquele proposto por Kelvin⁴, que considera uma carga unitária aplicada em um ponto $\boldsymbol{\xi}$ (ponto fonte) de um domínio infinito Ω^* em uma direção i , sendo obtidas expressões para deslocamentos $u_j^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ em um ponto \mathbf{X} (ponto campo), e para forças de superfície, $t_j^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em um plano que contém este ponto \mathbf{X} . Define-se como $r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, a distância entre os pontos de colocação (ponto fonte) e de medida (ponto campo), sendo válidas as relações:

$$r_i = X_i - \xi_i ; \quad r_{,i}|_{\mathbf{X}} \doteq r_{,i} = \frac{r_i}{r} ; \quad r_{,ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_i}{r} n_i = n_i r_{,i} \quad (3.4)$$

Quanto à força de volume, considera-se como uma carga unitária pontual em $\boldsymbol{\xi}$, representada por:

$$b_i^* = \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) P_i \quad (3.5)$$

onde $P_i = 1 \forall i$ e $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$ é a função delta de Dirac⁵.

Essa expressão de força de volume, b_i^* , pode ser substituída na equação de Navier (eq. 3.3) (a menos da variação temporal já destacada) a ser resolvida – solução fundamental de Kelvin. Tomando um determinado instante, para obtenção desta solução é conveniente se escrever os deslocamentos em termos de derivadas do vetor de Galerkin⁶, G_j , como se segue:

$$u_j^* = G_{j,ii} - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) G_{i,ji} \quad (3.6)$$

É possível assim representar a equação de Navier como uma equação biarmônica, como:

$$\mu G_{j,iiikk} + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) P_j = 0 \quad (3.7)$$

⁴William Thomson - Lord Kelvin, 1824-1907, Inglaterra

⁵Paul Adrien Maurice Dirac, 1902-1984, Inglaterra

⁶Boris Grigoryevich Galerkin, 1871-1945, Rússia

O desenvolvimento detalhado da solução da equação é mostrado por Cruse (1977). A solução fundamental expressa as componentes de deslocamento de um ponto \mathbf{X} na direção j , em função de uma carga de componentes unitários ($P_i = 1; i = 1, 2, 3$), aplicada no ponto de colocação ξ , como segue:

$$u_j^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}]P_i \quad (3.8)$$

A figura 3.2 ilustra algumas grandezas envolvidas. Desse campo de deslocamentos, os tensores de deformações infinitesimais (ϵ_{jk}^*), tensões de Cauchy (σ_{jk}^*), e forças de superfície (t_j^*) num ponto campo com superfície de normal unitária n_i , são dados pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned} \epsilon_{jk}^* &= \frac{1}{2}(u_{j,k}^* + u_{k,j}^*) \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} [\delta_{jk}r_{,i} + (2\nu-1)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}]P_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^* &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\epsilon_{ll}^* + 2\mu\epsilon_{jk}^* \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(2\nu-1)(-\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}]P_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} t_j^* &= \sigma_{jk}^*n_k \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(2\nu-1)(-n_jr_{,i} + n_i r_{,j} + \delta_{ij}n_k r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}n_k r_{,k}]P_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

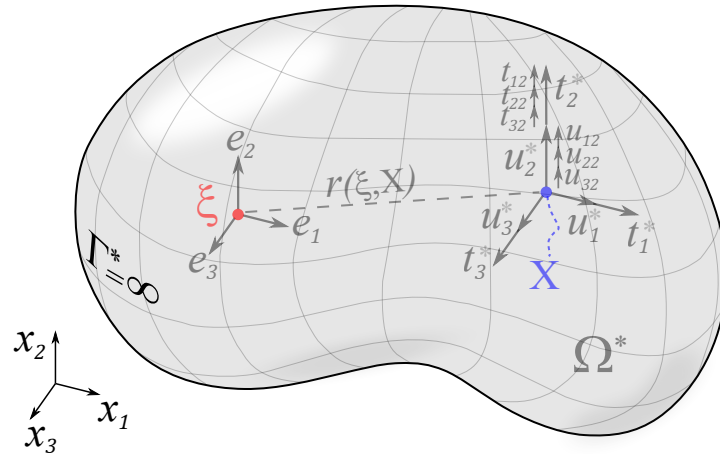


Figura 3.2: Domínio sólido e grandezas.

Um desenvolvimento completo das soluções fundamentais de Kelvin e suas derivadas (tratadas na seção 3.5) é apresentado em Peixoto (2016).

3.3 Equação para deslocamentos de pontos internos - Identidade de Somigliana

Definido o problema não-linear, descrito em termos de taxas, pode-se utilizar o teorema do trabalho recíproco de Betti para formulação das equações integrais do problema. A abordagem equivale à aplicação da segunda identidade de Green à equação de Navier, assumindo-se dois campos de deslocamentos correspondendo a estados elásticos distintos. Tal abordagem é formalmente equivalente à técnica dos resíduos ponderados, como ressalta Fudoli (1999).

Considere sistemas em equilíbrio, sujeitos a campos de deformação e tensão distintos (sistema A: $\epsilon_{ij}^A, \sigma_{ij}^A$ e sistema B: $\epsilon_{ij}^B, \sigma_{ij}^B$). Válidas as propriedades elásticas, o teorema de Betti é expresso por:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^B d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^B \epsilon_{ij}^A d\Omega \quad (3.12)$$

Integrando por partes ambos os lados da equação, e usando o teorema da divergência, obtém-se a expressão do segundo teorema de Betti, em termos de deslocamentos, forças de superfície e forças de volume para o sólido ($\Omega + \Gamma$), como:

$$\int_{\Gamma} t_i^A u_i^B d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^A u_i^B d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^B u_i^A d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^B u_i^A d\Omega \quad (3.13)$$

Considere agora um sólido Ω com contorno Γ contido em um outro sólido infinito homogêneo Ω^* com contorno Γ^* (figura 3.3). Pode-se assumir o problema fundamental de Kelvin como o sistema A do teorema de Betti, com o ponto de aplicação da carga posicionado no interior do domínio não-infinito ($\xi \in \Omega, \xi \notin \Gamma$) e o ponto campo no contorno ($\mathbf{X} \in \Gamma$), conforme mostra a figura. Como sistema B, considera-se um problema não-linear a ser analisado (em termo de taxas), com condições de contorno bem definidas. Pode-se então obter a partir da equação 3.13 (segundo teorema de Betti), uma equação que tem como única incógnita o deslocamento do ponto ξ pertencente ao domínio Ω . Para simplificar

a notação, as grandezas correspondentes ao problema fundamental (sistema A) passam a ser denotadas com o sobrescrito (*), enquanto as grandezas correspondentes ao problema a ser analisado (sistema B) passam a ser denotadas sem sobrescritos.

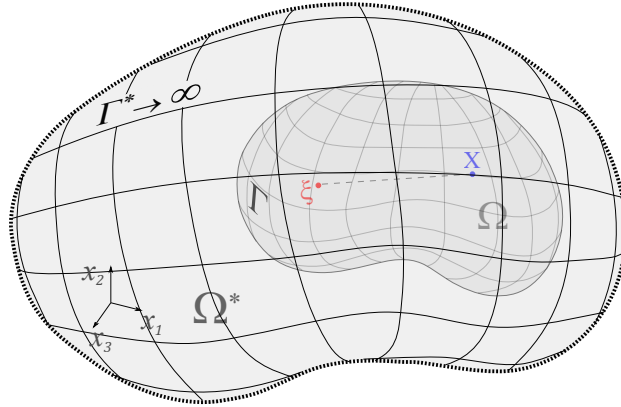


Figura 3.3: Domínios sólidos do Teorema de Betti - Identidade de Somigliana.

Deve-se observar que o problema foi formulado considerando validade das propriedades elásticas, portanto a deformação considerada se refere à parte elástica (ϵ_{ij}^e). Com a nova notação, e considerando a relação definida na equação 3.2 ($\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^o$), a equação 3.12 poderia ser reescrita com um termo adicional, como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^e d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^o d\Omega \quad (3.14)$$

Da definição de força de volume da equação 3.5, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} b_i^A u_i^B d\Omega \equiv \int_{\Omega} b_i^* \dot{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) P_i \dot{u}_i d\Omega = \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) P_i \quad (3.15)$$

onde se considerou a propriedade da função delta de Dirac, que estabelece:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) d\Omega = \begin{cases} f(\boldsymbol{\xi}) & \text{se } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

Substituindo-se apropriadamente as equações 3.15 na expressão do segundo teorema de Betti (eq. 3.13), e adicionando o termo extra mostrado na equação 3.14, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) P_i &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) t_j(\mathbf{X}) P_i d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) P_i d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) b_j(\mathbf{X}) P_i d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) P_i d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$u_j^*(\mathbf{X}) = u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad t_j^*(\mathbf{X}) = t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad \sigma_{jk}^*(\mathbf{X}) = \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i \quad (3.18)$$

Os tensores $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ e $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ são as soluções fundamentais de Kelvin e representam, respectivamente, num ponto de campo, \mathbf{X} , deslocamentos e forças de superfície na direção j e componentes de tensão jk devido a uma carga unitária concentrada no ponto de colocação, $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i . As expressões para essas soluções fundamentais foram apresentados nas equações 3.8, 3.11 e 3.10.

A equação 3.17 pode ser desmembrada para cada direção do espaço euclidiano, resultando na identidade de Somigliana⁷, que fornece componentes de deslocamento (ou, no caso, taxa de deslocamento) para pontos internos, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.4 Equação Integral de Contorno

Para que a expressão da identidade de Somigliana seja suficiente para representar uma solução para problemas de valores de contorno em um ponto interno, é necessário que as grandezas envolvidas (deslocamentos e forças) sejam conhecidas no contorno do sólido (assume-se conhecidas as forças de volume). Considera-se então a situação em que, também o ponto de colocação (ponto fonte) se situa no contorno do sólido ($\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$).

A princípio, expande-se o domínio por uma superfície esférica, Γ_ε , de raio ε , em torno do ponto de aplicação da carga unitária $\boldsymbol{\xi}$, conforme representado na figura 3.4. A superfície do sólido passa a ser definida por $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon$. A equação 3.19 assume então a forma:

⁷Carlo Somigliana, 1860-1955, Itália

$$\begin{aligned}
\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \left[\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \right] \\
& + \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right. \\
& \left. + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \right]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

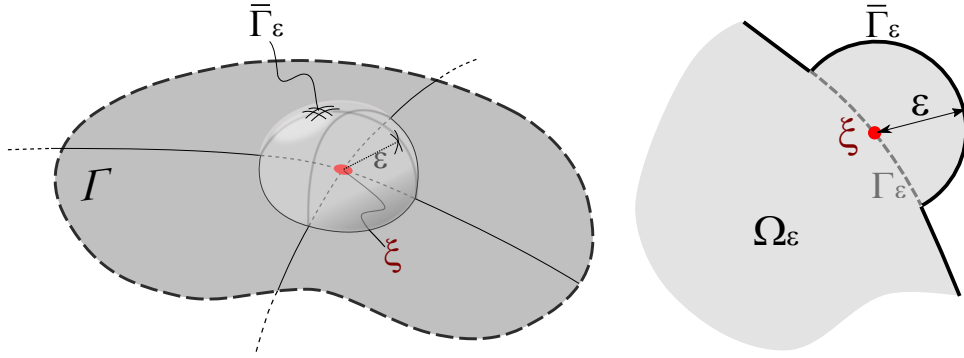


Figura 3.4: Expansão do domínio para ponto fonte no contorno.

Tomando agora o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ de modo a não alterar o contorno original do sólido, avaliam-se as integrais da equação. Na primeira integral do segundo colchete (em $\bar{\Gamma}_\varepsilon$), a singularidade da solução fundamental no núcleo da integral tem ordem $O(1/\varepsilon)$, enquanto a área da superfície excluída tem ordem $d\Gamma = O(\varepsilon^2)$, o que torna a integral nula no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. As duas últimas integrais do segundo colchetes têm soluções fundamentais de ordem $O(1/\varepsilon)$ e $O(1/\varepsilon^2)$, enquanto o volume acrescido da esfera tem ordem $d\Omega_\varepsilon = O(\varepsilon^3)$, o que também anula essas integrais na forma limite. A segunda integral do segundo colchetes (em $\bar{\Gamma}_\varepsilon$) entretanto, não se anula, e a singularidade no núcleo da integral deve ser regularizada como se segue:

$$\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) [\dot{u}_j(\mathbf{X}) - \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi})] d\Gamma(\mathbf{X}) + \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \tag{3.21}$$

Na equação 3.21, a primeira integral da direita se anula para o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, se é assumido que os deslocamentos u_i são continuamente diferenciáveis, isto é, se $[u_i(\mathbf{X}) - u_i(\boldsymbol{\xi})] =$

$O(\varepsilon)$, que é a condição de continuidade de Lipschitz⁸. Resta apenas a segunda integral da direita a ser avaliada. Esta integral é em geral representada em sua forma limite, aqui denominada $c_{ij}^*(\boldsymbol{\xi})$ como:

$$c_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (3.22)$$

Esta integral multiplica uma componente $\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})$, como pode ser observado na equação 3.21. Como na equação da identidade de Somigliana há um termo independente $\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})$, é conveniente agrupá-los, representando-os por uma única variável, dada por:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} + c_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (3.23)$$

Para pontos $\boldsymbol{\xi}$ posicionados em contorno suave, em aresta e em vértice (figura 3.5), os termos da matriz $c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ são:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{simetr.} & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi} \text{ em contorno suave}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \\ \text{simetr.} & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi} \text{ no vértice}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \\ & \frac{1}{8} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \\ \text{simetr.} & & \frac{1}{8} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi} \text{ em aresta}}$$

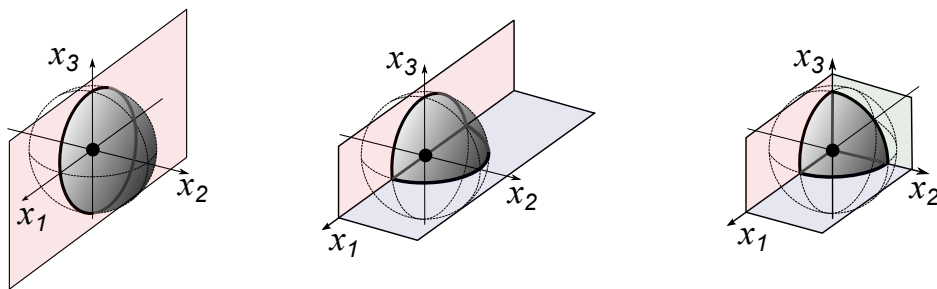


Figura 3.5: Termos de $c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ para pontos em contorno suave, em vértices e em arestas.

Para pontos genéricos do contorno, expressões para $c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ podem ser obtidas em Guiggiani e Gigante (1990) e Liao e Xu (1992) para problemas de elasticidade.

Atenção especial deve ainda ser dada à segunda integral do primeiro colchetes da equação 3.20, que apresenta uma singularidade forte. Esta integral existirá apenas no sentido

⁸Rudolf Otto Sigmund Lipschitz, 1832-1903, Alemanha

de valor principal de Cauchy, que requer que o campo $\dot{u}_i(\mathbf{X})$ satisfaça a condição de continuidade de Hölder⁹ em $\boldsymbol{\xi}$.

$$|\dot{u}_i(\mathbf{X}) - \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})| \leq \mathcal{A}|\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}|^{\mathcal{B}} \quad (3.24)$$

onde \mathbf{X} é qualquer ponto de Γ e \mathcal{A} e \mathcal{B} são constantes positivas, com $0 < \mathcal{B} \leq 1$, sendo $\mathcal{B} = 1$ o caso mais restritivo (condição de Lipschitz). As demais integrais da equação 3.20 apresentam apenas singularidades fracas quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\mathbf{X} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$. Assim, a equação integral de contorno, que fornece as componentes de deslocamentos para pontos localizados no contorno é dada por:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi})\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})t_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_j(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde o símbolo $\oint_{\Gamma} (\cdot)d\Gamma$ indica que a integral existe no sentido de valor principal de Cauchy. Os termos relativos à solução fundamental foram apresentados nas equações 3.8, 3.10, 3.11 e 3.18.

3.5 Deformações Internas

Uma expressão para taxa de deformações em pontos internos, $\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi})$, pode ser obtida da parte simétrica do gradiente da equação dos deslocamentos, dados na equação 3.19, *i.e.*:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}[\dot{u}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) + \dot{u}_{j,i}(\boldsymbol{\xi})] \quad (3.26)$$

A derivação sobre os tensores de segunda ordem dos núcleos das integrais da equação 3.19, ou seja, das soluções fundamentais (equações 3.8, 3.11 e 3.10) resulta em:

$$\begin{aligned} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = & \frac{1}{2}[u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\ = & \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2}[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,k} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \end{aligned} \quad (3.27)$$

⁹Otto Ludwig Hölder, 1859-1937, Alemanha

$$\begin{aligned}
t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [t_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + t_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ (1-2\nu)[n_i\delta_{jk} + n_j\delta_{ik} - n_k\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}n_k] \right. \\
&\quad \left. + 3\frac{\partial r}{\partial n}[\nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) + r_{,k}\delta_{ij} - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \right. \\
&\quad \left. + 3\nu(n_jr_{,i}r_{,k} + n_ir_{,j}r_{,k}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [\sigma_{ikl,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + \sigma_{jkl,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ij}\delta_{kl}) \right. \\
&\quad \left. + 3\nu(\delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) \right. \\
&\quad \left. + 3[(1-2\nu)\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] - 15r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \right\}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

As integrais da equação 3.19 que envolvem os tensores u_{ij}^* e t_{ij}^* , não resultam em integrais com grandes problemas de singularidade, uma vez que o núcleo da integral de domínio terá singularidade fraca, enquanto nas integrais de contorno não há coincidência de pontos fonte e ponto campo ($\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{X}$). Entretanto, a derivação do tensor $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ em relação ao ponto fonte que resulta na equação 3.29, introduz uma singularidade forte no núcleo da integral de domínio quando $\boldsymbol{\xi}$ e \mathbf{X} coincidem, sendo necessárias considerações adicionais, como segue.

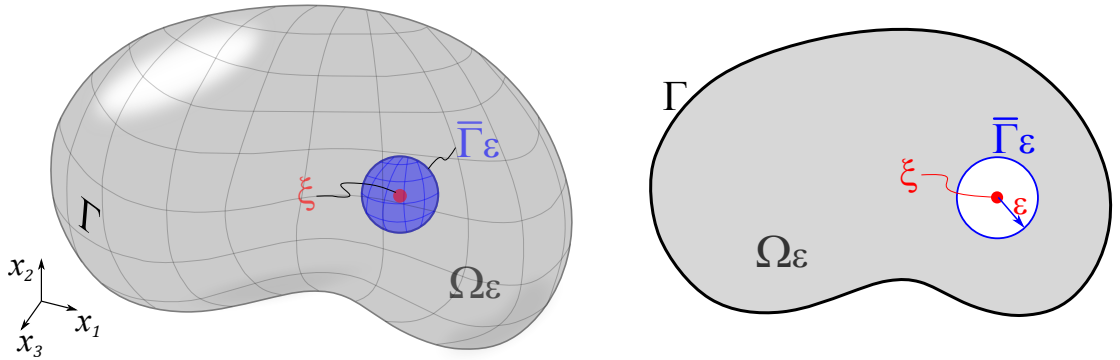


Figura 3.6: Esfera de exclusão do domínio Ω .

Tomando o ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$ no domínio envolto por uma superfície esférica (de raio ε , e centro em $\boldsymbol{\xi}$) de exclusão do domínio (figura 3.6), define-se um novo domínio Ω_ε , evitando-se a singularidade. Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, pode-se reescrever a última integral da

equação 3.19, e seu gradiente em relação ao ponto fonte como:

$$V_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (3.30)$$

$$V_{i,l}|_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_l} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \right] \quad (3.31)$$

Conforme desenvolvimento apresentado por Telles (1983), a expressão de $V_{i,l}|_{\boldsymbol{\xi}}$ se desdobra como uma diferença de duas integrais. Na forma limite, a primeira dessas integrais existe no sentido de valor principal de Cauchy, se $\dot{\epsilon}_{ij}^o$ satisfaz à condição de continuidade de Hölder, sendo expressa por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (3.32)$$

A segunda das integrais é trabalhada com expansão da taxa de deformações em série de Taylor¹⁰ em torno de um ponto fonte, contemplando a modificação do domínio Ω_ε nas coordenadas de $\boldsymbol{\xi}$, podendo ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{jk}^o(\boldsymbol{\xi}) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X})}_{-F_{ijkl}^\varepsilon} \quad (3.33)$$

sendo \bar{n}_i as componentes do vetor unitário ortogonal à $\bar{\Gamma}_\varepsilon$, apontando para a direção externa da esfera; e F_{ijkl}^ε é um termo livre oriundo da solução analítica da integral em destaque na equação 3.33. Retomando a necessidade de se utilizar a parte simétrica do gradiente para a formulação da equação integral para deformações, define-se o termo livre $F_{ijkl}^{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{2}[F_{iklj}^\varepsilon + F_{jkli}^\varepsilon]$. O desenvolvimento da expressão final, apresentado por Bui (1978), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{1}{2}[F_{iklj}^\varepsilon + F_{jkli}^\varepsilon] \\ &= \frac{1}{15(1-\nu)}[(4-5\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{kl}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

¹⁰Brook Taylor, 1685-1731, Inglaterra

Considerando as equações 3.27 , 3.11 , 3.29 e 3.34, a operação da equação 3.26 na equação 3.19 resulta na expressão final da equação integral para deformações em pontos internos, dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_k(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^o(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Capítulo 4

Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno Não-linear

A utilização do método dos elementos de contorno para análise de problemas não-lineares é antiga (Kumar e Mukherjee, 1977). Telles e Brebbia (1979) sintetizaram a formulação para problemas de plasticidade, onde a equação não-linear discreta contém explicitamente o termo de deformação plástica incrementado iterativamente. Muito depois Telles e Carner (1991) propuseram uma formulação para o mesmo tipo de problema, conhecida como formulação implícita, posteriormente aprimorada pela introdução de operadores tangentes que são atualizados nas iterações incrementais, como descreve o trabalho de Paulino e Liu (2001). A abordagem implícita com operador tangente, em comparação com procedimentos utilizados em trabalhos anteriores (Kumar e Mukherjee, 1977), apresenta vantagem em relação à estabilidade e eficiência computacional, como ressaltam Leonel e Venturini (2010). No intuito de obter uma formulação mais generalizada, compatível com soluções que permitem uso de diferentes métodos de controle, já utilizadas no MEF, Peixoto et al. (2016) propõem uma adaptação na formulação implícita. Após um procedimento de linearização da equação de equilíbrio, o vetor de incremento de deformação é dividido em uma parte associada à carga externa cumulativa, e outra associada ao vetor de desbalanceamento, resultando em dois sistemas independentes a serem resolvidos. Nessa formulação, somente são necessárias atualização de dois parâmetros da formulação constitutiva em uso durante os incrementos, *i.e.*, a tensão e o operador tangente relacionando tensões e deformações.

Para o tratamento numérico matricial das equações integrais pelo método dos elementos de contorno, discretiza-se o contorno Γ do sólido em N_e elementos de contorno (elementos de superfície), cada um definido por uma quantidade n_e de pontos, totalizando N_p pontos no contorno (nós), onde os valores de deslocamentos e forças de superfície podem ser conhecidos ou incógnitos. O domínio do sólido Ω também pode ser discretizado em uma quantidade N_c de células (ou elementos de volume), cada uma definida por n_c pontos, totalizando M_p pontos internos. A discretização do domínio, embora contraponha uma das principais vantagens do MEC – redução na ordem geométrica do problema, é necessária, pelo menos na região onde ocorrem efeitos dissipativos, típicos em problemas fisicamente não-lineares. Considerando o sólido devidamente discretizado, as equações integrais 3.19, 3.25 e 3.35 podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi}^I) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^o(\boldsymbol{\xi}^J) \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo $I = 1, \dots, N_p$ pontos do contorno; $J = 1, \dots, M_p$ pontos internos; Γ_e a superfície de cada elemento de contorno; e Ω_c o domínio de cada célula.

4.1 Elementos de Contorno

Sobre cada elemento, a geometria do contorno é aproximada por funções de forma \mathcal{N} , e os valores de deslocamentos e forças de superfície são aproximados por funções de interpolação \mathfrak{N} , a partir dos n_e valores nodais do elemento. No caso presente, as funções são

as mesmas ($\mathcal{N} = \mathfrak{N} = N$), ou seja, são elementos isoparamétricos. As aproximações são dadas por:

$$x_i(\mathbf{X}) \approx x_i(\eta_1, \eta_2) = \sum_{\alpha=1}^{n_e} N^\alpha(\eta_1, \eta_2) x_i^\alpha \quad (4.4a)$$

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}) \approx \dot{u}_i(\eta_1, \eta_2) = \sum_{\alpha=1}^{n_e} N^\alpha(\eta_1, \eta_2) \dot{u}_i^\alpha \quad (4.4b)$$

$$t_i(\mathbf{X}) \approx t_i(\eta_1, \eta_2) = \sum_{\alpha=1}^{n_e} N^\alpha(\eta_1, \eta_2) t_i^\alpha \quad (4.4c)$$

onde x_i^α , u_i^α e t_i^α representam valores nodais (nós α) das coordenadas geométricas, deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, na direção i ; N^α são funções interpoladoras (e de forma) em coordenadas paramétricas (η_1, η_2) . A figura 4.1 ilustra elementos desse tipo.

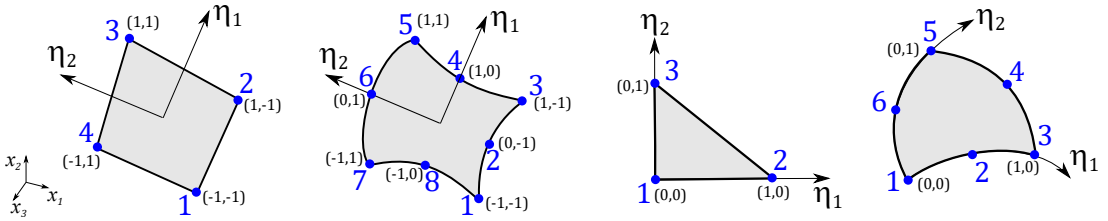


Figura 4.1: Elementos de contorno em coordenadas paramétricas.

As equações 4.4b, e 4.4c podem ser expressas matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\mathbf{X}) \\ \dot{u}_2(\mathbf{X}) \\ \dot{u}_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\eta_1, \eta_2) \\ \dot{u}_2(\eta_1, \eta_2) \\ \dot{u}_3(\eta_1, \eta_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \dot{u}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^{n_e} \\ \dot{u}_2^{n_e} \\ \dot{u}_3^{n_e} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\Leftrightarrow \{\dot{u}(\mathbf{X})\} \approx \{\dot{u}(\eta_1, \eta_2)\} = [N(\eta_1, \eta_2)] \{\dot{u}^e\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{t}_1(\mathbf{X}) \\ \dot{t}_2(\mathbf{X}) \\ \dot{t}_3(\mathbf{X}) \end{matrix} \right\} \approx \left\{ \begin{matrix} \dot{t}_1(\eta_1, \eta_2) \\ \dot{t}_2(\eta_1, \eta_2) \\ \dot{t}_3(\eta_1, \eta_2) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \cdots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \cdots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \cdots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{t}_1^1 \\ \dot{t}_2^1 \\ \dot{t}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{t}_1^{n_e} \\ \dot{t}_2^{n_e} \\ \dot{t}_3^{n_e} \end{matrix} \right\} \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \{ \dot{t}(\mathbf{X}) \} \approx \{ \dot{t}(\eta_1, \eta_2) \} = [N(\eta_1, \eta_2)] \{ \dot{t}^e \}$$

onde n_e é o número de pontos de interpolação do elemento de contorno e ; os índices inferiores se referem a direções cartesianas.

Com efeito, como as funções interpoladoras N^α são expressas em coordenadas paramétricas (η_1, η_2) , é necessária a transformação do elemento de área $\Gamma(\mathbf{X})$ do sistema global (x_i) para este novo sistema de coordenadas, isto é:

$$d\Gamma(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2)) = \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 = \mathcal{J}_e d\eta_e \quad (4.7)$$

onde $\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2)$ é o Jacobiano¹ de superfície da transformação de coordenadas.

4.2 Células Convencionais

Ao se considerar valores constantes para as grandezas avaliadas no interior de cada célula, como adotado neste trabalho, considera-se apenas um ponto de colocação $\boldsymbol{\xi}$ (ponto fonte) por célula. De maneira similar ao utilizado para os elementos que discretizam o contorno, a geometria é aproximada por funções de forma M , a partir dos n_c valores nodais de cada célula. Já as deformações inelásticas ϵ_{ij}^o , são consideradas constantes em seu interior, ou seja, são células (elementos) superparamétricas. As aproximações da geometria são dadas por:

$$x_i(\mathbf{X}) \approx x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{\alpha=1}^{n_c} M^\alpha(\eta_1, \eta_2, \eta_3) x_i^\alpha \quad (4.8)$$

onde x_i^α representa valores nodais (nós α) das coordenadas geométricas, na direção i ; M_α são funções de forma em coordenadas paramétricas (η_1, η_2, η_3) . A figura 4.2 ilustra o mapeamento com células hexaédricas.

¹referente a Carl Gustav Jakob Jacobi, 1804-1851, Alemanha

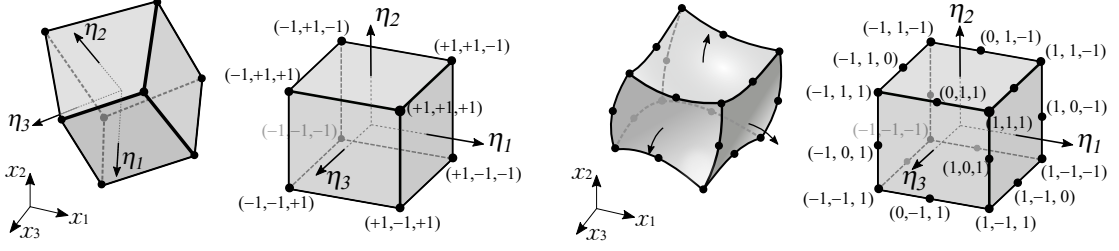


Figura 4.2: Células em coordenadas paramétrica.

Como as funções interpoladoras M^α são expressas em coordenadas paramétricas (η_1, η_2, η_3) , é necessária a transformação do volume de domínio da célula $\Omega(\mathbf{X})$ do sistema global (x_i) para este novo sistema de coordenadas, isto é:

$$d\Gamma(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) = \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \mathcal{J}_c d\eta_c \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

4.3 Equações Matriciais

Com as considerações sobre elementos de contorno e células, as equações integrais podem ser escritas em forma matricial, para melhor tratamento algébrico e computacional, como descrito nessa seção. De forma geral, os tensores associados à solução fundamental de Kelvin podem ser representados nas seguintes formas matriciais:

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \equiv \left[u^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}; \quad t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \equiv \left[t^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \equiv \left[\sigma^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{133}^* & 2\sigma_{112}^* & 2\sigma_{113}^* & 2\sigma_{123}^* \\ \sigma_{211}^* & \sigma_{222}^* & \sigma_{233}^* & 2\sigma_{212}^* & 2\sigma_{213}^* & 2\sigma_{223}^* \\ \sigma_{311}^* & \sigma_{322}^* & \sigma_{333}^* & 2\sigma_{312}^* & 2\sigma_{313}^* & 2\sigma_{323}^* \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Na última matriz foram consideradas as simetrias $\sigma_{i12}^* = \sigma_{i21}^*$, $\sigma_{i13}^* = \sigma_{i31}^*$ e $\sigma_{i23}^* = \sigma_{i32}^*$.

Os termos das matrizes são obtidos das equações 3.8, 3.11, 3.10 e 3.18.

4.3.1 Equações Matriciais para Deslocamentos de Pontos Internos

A equação integral 4.1 para um único ponto de colocação (J) do domínio pode ser reescrita, para cada elemento (contorno ou célula), levando-se em conta as equações 4.4, 4.7, 4.8 e 4.9, como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) + \sum_{\alpha=1}^{n_e} \dot{u}_j^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, (\mathbf{X}(\eta_e))) N^\alpha \mathcal{J}_e d\eta_e = \\ \sum_{\alpha=1}^{n_e} t_j^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, (\mathbf{X}(\eta_e))) N^\alpha \mathcal{J}_e d\eta_e + \dot{\epsilon}_{jk}^{o,c}(\mathbf{X}) \int_{\eta_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, (\mathbf{X}(\eta_c))) \mathcal{J}_c d\eta_c \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo n_e o número de pontos de interpolação (= número de nós) de cada elemento de contorno.

Em um elemento genérico (do contorno ou célula), as integrais à esquerda da igualdade da equação 4.12 podem ser representadas por $[H_e^J]$. Já para as primeiras integrais à direita da igualdade (integração sobre elementos de contorno), utiliza-se a denominação $[G_e^J]$, enquanto que as integrais sobre as células ficam condensadas num matriz denominada $[Q_c^J]$. De forma expandida:

$$[H_e^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{bmatrix}^J \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.13)$$

$$[G_e^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}^J \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.14)$$

$$[Q_c^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \int_{\eta_3} \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{133}^* & 2\sigma_{112}^* & 2\sigma_{113}^* & 2\sigma_{123}^* \\ \sigma_{211}^* & \sigma_{222}^* & \sigma_{233}^* & 2\sigma_{212}^* & 2\sigma_{213}^* & 2\sigma_{223}^* \\ \sigma_{311}^* & \sigma_{322}^* & \sigma_{333}^* & 2\sigma_{312}^* & 2\sigma_{313}^* & 2\sigma_{323}^* \end{bmatrix}^J \mathcal{J}_c d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \quad (4.15)$$

Os termos que multiplicam as primeiras integrais da equação 4.12 são apresentados nas equações 4.5 e 4.6, respectivamente vetores \dot{u}^e e \dot{t}^e , enquanto o termo que multiplica a última integral é:

$$\dot{\epsilon}_{jk}^{o,c} = \{\dot{\epsilon}^{o,c}\} = \left\{ \dot{\epsilon}_{11}^{o,c} \quad \dot{\epsilon}_{22}^{o,c} \quad \dot{\epsilon}_{33}^{o,c} \quad 2\dot{\epsilon}_{12}^{o,c} \quad 2\dot{\epsilon}_{13}^{o,c} \quad 2\dot{\epsilon}_{23}^{o,c} \right\}^T \quad (4.16)$$

Antes de considerar o sistema completo (todos os pontos e elementos), é importante observar uma diferença na montagem das matrizes globais $[H^u]$, $[G^u]$ e $[Q^u]$, que as tornam de tamanhos diferentes (sobrescrito $[?^u]$ refere-se a deslocamentos de pontos internos). À cada ponto da discretização corresponde um único valor de deslocamento (prescrito ou calculado) e um valor de deformação inelástica, considerando até então, meio sem descontinuidades. Tratando-se de forças de superfície, no entanto, é possível que se tenham valores diferentes para elementos vizinhos que compartilham um ponto. É possível até mesmo que em um elemento, um ponto tenha valor de uma grandeza prescrito, enquanto para o elemento vizinho essa grandeza seja incógnita.

Em forma matricial, utilizando as definições das equações 4.13 a 4.16, pode-se escrever a equação 4.12, considerando todos os pontos internos e todos os elementos:

$$\{\dot{u}^\Omega\} + [H^u]\{\dot{u}\} = [G^u]\{\dot{t}\} + [Q^u]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.17)$$

onde o sobrescrito Ω em $\{\dot{u}^\Omega\}$ foi adotado para indicar que o vetor em questão é formado por componentes referentes a pontos internos. Seguindo o que foi dito anteriormente, as matrizes possuem as dimensões seguintes:

$$[G^u] \rightarrow (3M_p \times 3N_e n_e); \quad [H^u] \rightarrow (3M_p \times 3N_p); \quad [Q^u] \rightarrow (3M_p \times 6M_p);$$

$$\{\dot{u}^\Omega\} \rightarrow (3M_p); \quad \{\dot{t}\} \rightarrow (3N_e n_e); \quad \{\dot{u}\} \rightarrow (3N_p); \quad \{\dot{\epsilon}^o\} \rightarrow (6M_p)$$

As observações relativas à montagem das matrizes podem ser sintetizadas esquematicamente:

$$\begin{aligned} \bigcup_{J=1}^{M_p} (\{\dot{u}^J\}) + \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{e=1}^{N_e} ([H_e^J]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{u}^e\}) = \\ \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{e=1}^{N_e} ([G_e^J]) \bigoplus_{e=1}^{N_e} (\{\dot{t}^e\}) + \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{c=1}^{N_c} ([Q_c^J]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{o,c}\}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde os símbolos \bigcup e \bigoplus estão associados às formas de montagem das matrizes, o primeiro indicando que coeficientes relativos a um mesmo ponto geométrico são alocados em uma mesma coluna da matriz ou linha do vetor. Já o segundo, indica que coeficientes referentes a pontos compartilhados por dois elementos distintos, são alocados em diferentes colunas (ou linhas de vetor), mesmo que tais pontos sejam geometricamente coincidentes. Na presença de dois símbolos, o primeiro (ou da esquerda) refere-se à montagem das linhas, e o segundo, à montagem das colunas.

4.3.2 Equações Matriciais para Deslocamentos de Pontos do Contorno

A equação integral de contorno para deslocamentos (equação 4.2), para um ponto de colocação (I) do contorno pode ser reescrita, para cada elemento (contorno ou célula), levando-se em conta as equações 4.4, 4.7, 4.8 e 4.9, como:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^I) + \sum_{\alpha=1}^{n_e} \dot{u}_j^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, (\mathbf{X}(\eta_e))) N^\alpha \mathcal{J}_e d\eta_e = \sum_{\alpha=1}^{n_e} \dot{t}_j^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, (\mathbf{X}(\eta_e))) N^\alpha \mathcal{J}_e d\eta_e + \dot{\epsilon}_{jk}^{o,c}(\mathbf{X}) \int_{\eta_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, (\mathbf{X}(\eta_c))) \mathcal{J}_c d\eta_c \quad (4.19)$$

As formas matriciais dos termos contendo \dot{t}_{ij} , \dot{u}_{ij} e $\dot{\sigma}_{ijk}$ são respectivamente:

$$[H_e^I] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{bmatrix}^I \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.20)$$

$$[G_e^I] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}^I \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.21)$$

$$[Q_c^I] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \int_{\eta_3} \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{133}^* & 2\sigma_{112}^* & 2\sigma_{113}^* & 2\sigma_{123}^* \\ \sigma_{211}^* & \sigma_{222}^* & \sigma_{233}^* & 2\sigma_{212}^* & 2\sigma_{213}^* & 2\sigma_{223}^* \\ \sigma_{311}^* & \sigma_{322}^* & \sigma_{333}^* & 2\sigma_{312}^* & 2\sigma_{313}^* & 2\sigma_{323}^* \end{bmatrix}^I \mathcal{J}_c d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \quad (4.22)$$

O termo $c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I)$ (ver equação 3.23) é representado por:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) \equiv \begin{bmatrix} c_{11}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{12}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{13}(\boldsymbol{\xi}^I) \\ c_{21}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{22}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{23}(\boldsymbol{\xi}^I) \\ c_{31}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{32}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{33}(\boldsymbol{\xi}^I) \end{bmatrix} = [C^I] \quad (4.23)$$

Em forma matricial, utilizando as definições das equações 4.20, 4.21 e 4.22, pode-se escrever a equação 4.19, para totalidade dos elementos e todos os pontos de colocação do contorno:

$$[H] \{\dot{u}\} = [G] \{\dot{t}\} + [Q] \{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.24)$$

Observa-se que para obtenção da matriz global $[H]$, foram somados termos da matriz $[C^I]$ com termos da matriz $[H^I]$, quando os pontos do elemento são coincidentes com o ponto

de colocação. A abordagem equivale à consideração de movimento de corpo rígido na ausência de forças, que elimina um problema de integrais com singularidade forte.

As considerações relativas aos tamanhos das matrizes globais permanecem válidas. As matrizes possuem as dimensões seguintes:

$$\begin{aligned} [G^u] &\rightarrow (3N_p \times 3N_e n_e); \quad [H^u] \rightarrow (3N_p \times 3N_p); \quad [Q^u] \rightarrow (3N_p \times 6N_p); \\ \{\dot{t}\} &\rightarrow (3N_e n_e); \quad \{\dot{u}\} \rightarrow (3N_p); \quad \{\dot{\epsilon}^o\} \rightarrow (6N_p) \end{aligned}$$

Em relação à montagem das matrizes globais, pode-se sintetizar esquematicamente, seguindo a mesma simbologia adotada na equação 4.18, obtendo-se:

$$\bigcup_{J=1}^{N_p} \bigcup_{e=1}^{N_e} ([C^I][H_e^I]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{u}^e\}) = \bigcup_{J=1}^{N_p} \bigoplus_{e=1}^{N_e} ([G_e^I]) \bigoplus_{e=1}^{N_e} (\{\dot{t}^e\}) + \bigcup_{J=1}^{N_p} \bigcup_{c=1}^{N_c} ([Q_c^I]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{o,c}\}) \quad (4.25)$$

4.3.3 Equações Matriciais para Deformações Internas

A equação integral 4.3, para um ponto de colocação (J) do domínio pode ser reescrita, para cada elemento (contorno ou célula), como:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) + \sum_{\alpha=1}^{n_e} \dot{u}_k^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}(\eta_e)) N^\alpha \mathcal{J}_e \, d\eta_e = \\ \sum_{\alpha=1}^{n_e} \dot{t}_k^\alpha(\mathbf{X}(\eta_e)) \int_{\eta_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}(\eta_e)) N^\alpha \mathcal{J}_e \, d\eta_e \\ + \dot{\epsilon}_{kl}^{o,c}(\mathbf{X}) \int_{\eta_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}(\eta_c)) \mathcal{J}_c \, d\eta_c + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^{o,c}(\boldsymbol{\xi}^J) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Em um elemento genérico (do contorno ou célula), as integrais da equação 4.26, da esquerda para direita, na forma expandida, são respectivamente:

$$[\bar{H}_e^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} t_{111}^* & t_{112}^* & t_{113}^* \\ t_{221}^* & t_{222}^* & t_{223}^* \\ t_{331}^* & t_{332}^* & t_{333}^* \\ t_{121}^* & t_{122}^* & t_{123}^* \\ t_{131}^* & t_{132}^* & t_{133}^* \\ t_{231}^* & t_{232}^* & t_{233}^* \end{bmatrix}^J \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.27)$$

$$[\bar{G}_e^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \begin{bmatrix} u_{111}^* & u_{112}^* & u_{113}^* \\ u_{221}^* & u_{222}^* & u_{223}^* \\ u_{331}^* & u_{332}^* & u_{333}^* \\ u_{121}^* & u_{122}^* & u_{123}^* \\ u_{131}^* & u_{132}^* & u_{133}^* \\ u_{231}^* & u_{232}^* & u_{233}^* \end{bmatrix}^J \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^{n_e} \end{bmatrix} \mathcal{J}_e d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.28)$$

sendo considerada, nas equações anteriores, as simetrias $(\dot{?})_{12i} = (\dot{?})_{21i}$, $(\dot{?})_{13i} = (\dot{?})_{31i}$ e $(\dot{?})_{23i} = (\dot{?})_{32i}$.

$$[\bar{Q}_c^J] \equiv \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} \int_{\eta_3} \begin{bmatrix} \sigma_{1111}^* & \sigma_{1122}^* & \sigma_{1133}^* & 2\sigma_{1112}^* & 2\sigma_{1113}^* & 2\sigma_{1123}^* \\ \sigma_{2211}^* & \sigma_{2222}^* & \sigma_{2233}^* & 2\sigma_{2212}^* & 2\sigma_{2213}^* & 2\sigma_{2223}^* \\ \sigma_{3311}^* & \sigma_{3322}^* & \sigma_{3333}^* & 2\sigma_{3312}^* & 2\sigma_{3313}^* & 2\sigma_{3323}^* \\ \sigma_{1211}^* & \sigma_{1222}^* & \sigma_{1233}^* & 2\sigma_{1212}^* & 2\sigma_{1213}^* & 2\sigma_{1223}^* \\ \sigma_{1311}^* & \sigma_{1322}^* & \sigma_{1333}^* & 2\sigma_{1312}^* & 2\sigma_{1313}^* & 2\sigma_{1323}^* \\ \sigma_{2311}^* & \sigma_{2322}^* & \sigma_{2333}^* & 2\sigma_{2312}^* & 2\sigma_{2313}^* & 2\sigma_{2323}^* \end{bmatrix}^J \mathcal{J}_c d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \quad (4.29)$$

sendo consideradas as simetrias $\sigma_{ij12}^* = \sigma_{ij21}^*$, $\sigma_{ij13}^* = \sigma_{ij31}^*$ e $\sigma_{ij23}^* = \sigma_{ij32}^*$.

Os termos do tensor de quarta ordem fora da integral na equação 4.26 podem ser calculados a partir da equação 3.34. Considerando as simetrias $F_{ij12}^{\epsilon\epsilon} = F_{ij21}^{\epsilon\epsilon}$, $F_{ij13}^{\epsilon\epsilon} = F_{ij31}^{\epsilon\epsilon}$ e $F_{ij23}^{\epsilon\epsilon} = F_{ij32}^{\epsilon\epsilon}$, o tensor pode ser escrito em forma matricial como:

$$\bar{F}_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \equiv [\bar{F}^{\epsilon\epsilon}] \begin{bmatrix} F_{1111}^{\epsilon\epsilon} & F_{1122}^{\epsilon\epsilon} & F_{1133}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1112}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1113}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1123}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{2211}^{\epsilon\epsilon} & F_{2222}^{\epsilon\epsilon} & F_{2233}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2212}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2213}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2223}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{3311}^{\epsilon\epsilon} & F_{3322}^{\epsilon\epsilon} & F_{3333}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{3312}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{3313}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{3323}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{1211}^{\epsilon\epsilon} & F_{1222}^{\epsilon\epsilon} & F_{1233}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1212}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1213}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1223}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{1311}^{\epsilon\epsilon} & F_{1322}^{\epsilon\epsilon} & F_{1333}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1312}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1313}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1323}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{2311}^{\epsilon\epsilon} & F_{2322}^{\epsilon\epsilon} & F_{2333}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2312}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2313}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2323}^{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix}^J \quad (4.30)$$

Em forma matricial, utilizando as definições das equações 4.27, 4.28 e 4.29, pode-se escrever a equação 4.26, considerando todos os pontos de colocação internos e todos os elementos:

$$\{\dot{\epsilon}\} + [H^\epsilon]\{\dot{u}\} = [G^\epsilon]\{\dot{t}\} + [Q^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.31)$$

Nota-se que a matriz global $[Q^\epsilon]$ é obtida da soma de termos das matrizes $[\bar{Q}_c^J]$ e $[F^{\epsilon\epsilon, J}]$.

As matrizes globais possuem as dimensões seguintes:

$$\begin{aligned} [G^\epsilon] &\rightarrow (6M_p \times 3N_e n_e); \quad [H^\epsilon] \rightarrow (6M_p \times 3N_p); \quad [Q^\epsilon] \rightarrow (6M_p \times 6M_p); \\ \{\dot{\epsilon}\} &\rightarrow (3M_p); \quad \{\dot{t}\} \rightarrow (3N_e n_e); \quad \{\dot{u}\} \rightarrow (3N_p); \quad \{\dot{\epsilon}^o\} \rightarrow (6M_p) \end{aligned}$$

As observações relativas à montagem das matrizes podem ser sintetizadas esquematicamente:

$$\begin{aligned} \bigcup_{J=1}^{M_p} (\{\dot{\epsilon}^J\}) + \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{e=1}^{N_e} ([\bar{H}_e^J]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{u}^e\}) = \\ \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{e=1}^{N_e} ([\bar{G}_e^J]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{t}^e\}) + \bigcup_{J=1}^{M_p} \bigcup_{c=1}^{N_c} ([Q_c^J] + [F^{\epsilon\epsilon, J}]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{o, c}\}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.4 Integração Numérica de Elementos de Contorno e Células

No núcleo das integrais das equações 4.12, 4.19 e 4.26, as expressões das soluções fundamentais (3.9, 3.10 e 3.11) e suas derivadas, apresentam denominadores com variáveis, $r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, relativas à distância entre o ponto de colocação, $\boldsymbol{\xi}$, e o ponto de avaliação (campo), \mathbf{X} . Quando esses pontos coincidem $r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = 0$, e temos singularidade no núcleo das integrais, tornando-as irregulares.

Durante a análise de um problema, o ponto de colocação ($\boldsymbol{\xi}$) se alterna entre todos os pontos (nós) da discretização. Para cada um desses pontos, todos os elementos da discretização passam por integração. Quando a integração está sendo desenvolvida em elementos que contêm o ponto de colocação, essas integrais têm núcleo singular, enquanto as integrais relativas aos demais elementos não têm singularidade.

As integrais com núcleo singular podem ser impróprias (ou fracamente singulares) ou fortemente singulares. As integrais que não têm singularidade, em que o ponto de colocação $\boldsymbol{\xi}$ está distante do elemento sob integração, os núcleos das integrais se tornam funções suaves, porém, quando $\boldsymbol{\xi}$ está muito próximo do elemento que está sendo integrado, podem ocorrer picos na função do núcleo das integrais, que as tornam quase-singulares.

Integrais regulares

A integração de elementos de contorno e de células (elementos internos) pode ser feita usando técnicas numéricas padrão, como a quadratura de Gauss-Legendre². Como a suavidade da função do núcleo das integrais depende da distância entre o elemento e o ponto de colocação, para manter a precisão dos resultados das integrações, pode-se estabelecer o número de pontos de integração em função dessa distância. Neste trabalho foi adotada uma adaptação do critério proposto por Eberwien et al. (2005), que estabelece o número de pontos de integração necessário para manter uma determinada precisão (*e.g.* tolerância ao erro de 10^{-3}).

Quando o ponto de colocação está muito próximo do elemento sob integração, caracterizando integrais quase-singulares, é necessário um tratamento diferenciado. Uma abordagem eficiente é a técnica de subdivisão de elemento. Adotou-se aqui a abordagem baseada em Beer et al. (2008), que subdivide o elemento em sub-regiões iguais, como mostra a figura 4.3. A necessidade de se fazer subdivisões, e a quantidade de sub-regiões, são determinados de modo a preservar a precisão da integração.

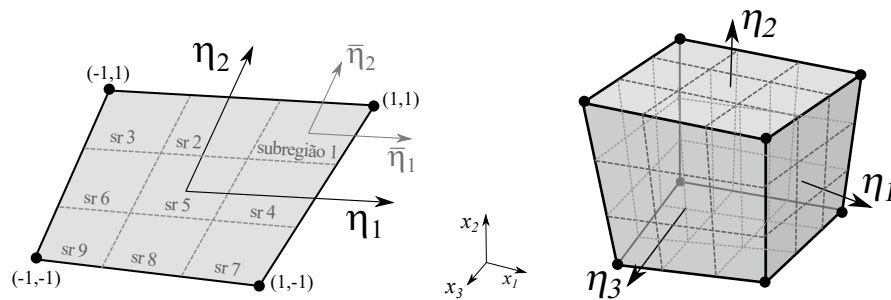


Figura 4.3: Divisão do elemento em sub-regiões, para manter precisão da integração.

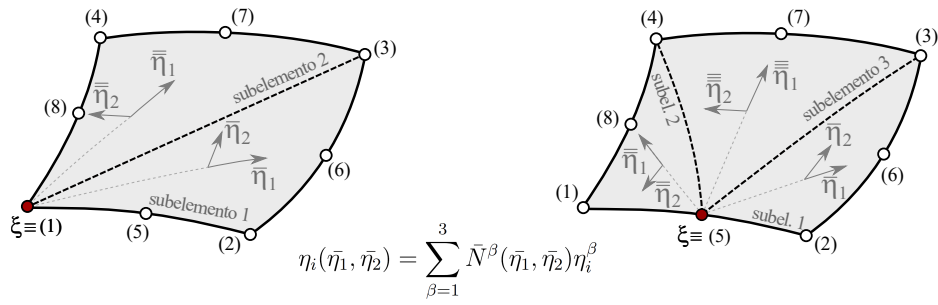
Integrais Singulares

Ocorrem quando o ponto de colocação pertence ao elemento sob integração. Estas integrais são classificadas como fracamente singulares, quando a ordem de singularidade do núcleo é $O(1/r)$ ou $O(1/r^2)$, respectivamente para elementos ou células, em problemas tridimensionais. As integrais nas equações 4.21 e 4.22 podem se enquadrar nesse caso.

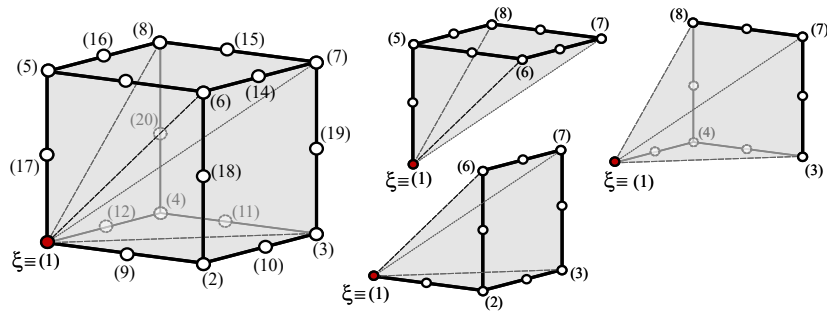
²Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, Alemanha; e Adrien-Marie Legendre, 1752-1833, França.

Entretanto, se a singularidade do núcleo do integrando é da ordem $O(1/r^2)$ para elementos ou $O(1/r^3)$ para células (em problemas tridimensionais), a integral é classificada como fortemente singular, e deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy (VPC). Este pode ser o caso das integrais nas equações 4.20 e 4.29.

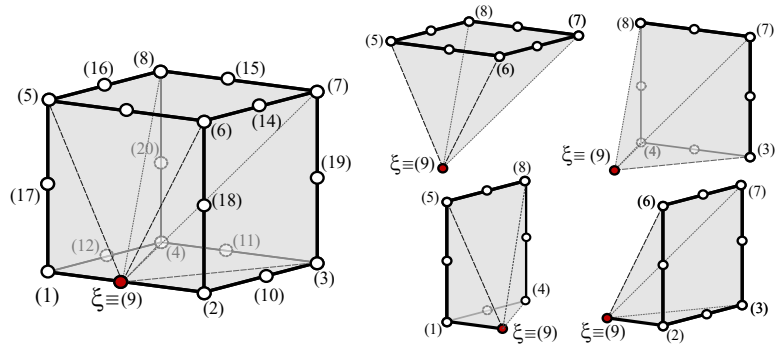
O tratamento de integrais fracamente singulares pode ser feito por meio da técnica proposta por Lachat e Watson (1976). Nessa técnica, utiliza-se a transformação em coordenadas polares triangulares, tornando um domínio triangular em um quadrado unitário, reduzindo a ordem de singularidade. Em seguida é feito o mapeamento desse quadrado unitário em coordenadas paramétricas para integração padrão. Caso adotado elementos de contorno quadrangulares, como nesse trabalho, é necessário dividir o elemento para aplicar as transformações nos subelementos gerados. A figura 4.4, ilustra essa divisão. Para células hexaédricas, adotadas aqui, segue-se a abordagem de Gao e Davies (2002), que também requer a divisão em sub-elementos. Esses subelementos têm forma de pirâmide com uma face da célula sendo a base e o ponto de colocação o vértice. A figura 4.4 ilustra essa divisão para diferentes posições do ponto de colocação (ξ).



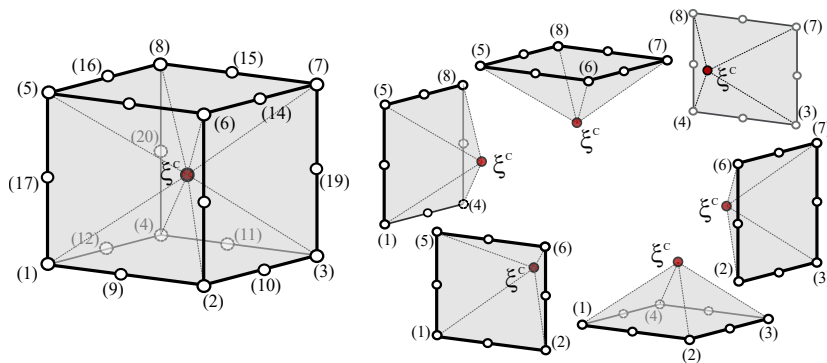
(a) Subelementos para elemento quadrangular



(b) Célula hexaédrica: singularidade em nó do vértice



(c) Célula hexaédrica: singularidade em nó de aresta



(d) Célula hexaédrica: singularidade em nó central

Figura 4.4: Divisão em subelementos para integração.

Para tratamento das integrais fortemente singulares em elementos de contorno (superfícies), pode-se usar a técnica proposta por Guiggiani e Gigante (1990). O cálculo direto das integrais VPC presentes na equação 4.19, juntamente com o termo livre c_{ij} podem ser evitados, utilizando-se o conceito de movimento de corpo rígido. Essa abordagem, amplamente conhecidas, é detalhada por Beer et al. (2008). A forma auto-regularizada das equações integrais de contorno também é uma alternativa ao cálculo direto das integrais VPC. As três alternativas de cálculo estão implementadas no INSANE, como discutido por Anacleto et al. (2013). No presente trabalho optou-se por utilizar, em todas as análises, o cálculo indireto dos termos que contêm integrais VPC, baseado no conceito de movimento de corpo rígido, por sua simplicidade.

Já para a solução de integrais fortemente singulares nas células, faz-se uso da abordagem proposta por Gao e Davies (2002). As integrais são divididas em duas partes, sendo a primeira com singularidade faca, tratada com a técnica apropriada, mencionada anteriormente, e a segunda parte, que permanece com uma singularidade forte sendo resolvida analiticamente.

4.5 Estratégia de Solução – Formulação Não-Linear Implícita

As equações matriciais de deslocamentos de pontos do contorno (eq. 4.24) e de deformações em pontos internos (eq. 4.31) podem ser organizadas em uma única equação, de natureza não-linear, que pode ser resolvida por processos iterativos. Esta abordagem, denominada formulação implícita, foi proposta inicialmente por Jin et al. (1989) e Telles e Carrer (1991).

Considerando as condições de contorno essenciais e naturais definidas em um problema, nos pontos do contorno do sólido são prescritos deslocamentos ou forças de superfície, o que implica na presença de termos prescritos e termos incógnitos nos vetores $\{\dot{u}\}$ e $\{\dot{t}\}$ das equações matriciais. Pode-se então, reescrever as equações 4.17, 4.24 e 4.31 agrupando

termos prescritos e incógnitos em vetores separados:

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [A^u]\{\dot{x}\} + [B^u]\{\dot{y}\} + [Q^u]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.33)$$

$$[A]\{\dot{x}\} = [B]\{\dot{y}\} + [Q]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.34)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [A^\epsilon]\{\dot{x}\} + [B^\epsilon]\{\dot{y}\} + [Q^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.35)$$

onde, em $\{\dot{y}\}$ são agrupados os valores prescritos no contorno, provenientes de $\{\dot{u}\}$ ou $\{\dot{t}\}$, enquanto que o vetor $\{\dot{x}\}$ contém as componentes desconhecidas destes campos. Já as matrizes referenciadas por $[A]$ e $[B]$ são compostas pelos coeficientes provenientes das matrizes referenciadas por $[H]$ e $[G]$ correspondentes aos termos incógnitos ou prescritos, respectivamente. Para maior eficiência computacional, não há necessidade de se montar as matrizes $[H]$ e $[G]$, sendo preferível a inserção dos valores dos coeficientes diretamente nas matrizes $[A]$ e $[B]$.

A equação 4.34 pode ser escrita como:

$$\{\dot{x}\} = [N]\{\dot{y}\} + [M_{e^o}]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.36)$$

onde $[N] = [A]^{-1}[B]$, e $[M_{e^o}] = [A]^{-1}[Q_{e^o}]$.

Substituindo essa expressão nas equações 4.33 e 4.35, pode-se reescrevê-las como segue:

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [N^u]\{\dot{y}\} + [M_{e^o}^u]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.37)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [N^\epsilon]\{\dot{y}\} + [M_{e^o}^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^o\} \quad (4.38)$$

onde:

$$[N^u] = [A^u][A]^{-1}[B] + [B^u]; \quad [M_{e^o}^u] = [A^u][A]^{-1}[Q] + [Q^u]$$

$$[N^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[B] + [B^\epsilon]; \quad [M_{e^o}^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[Q] + [Q^\epsilon]$$

A evolução do modelo não-linear, requer avanços que são descritos por taxas que podem ser computados como incrementos finitos. Como o tempo não é uma grandeza apreciada no modelo constitutivo considerado (modelo de dano isotrópico, não viscoso), os incrementos que controlam sua evolução são incrementos de cargas externas. Assume-se que, entre os incrementos sucessivos (patamar fixo de carga), não há evolução do dano. Para

estabelecer os valores incrementais adota-se um valor de carga acumulativo, ou fator de carga λ^i (índice se refere ao i -ésimo incremento) que define um percentual da carga externa necessária ao equilíbrio do sistema naquele incremento. Assim, considerando o i -ésimo incremento das cargas prescritas, pode-se reescrever as equações 4.36, 4.37 e 4.38:

$$\{x\}^i = \lambda^i [N] \{y\} + [M_{e^o}] \{\epsilon^o\}^i \quad (4.39)$$

$$\{u^\Omega\}^i = \lambda^i [N^u] \{y\} + [M_{e^o}^u] \{\epsilon^o\}^i \quad (4.40)$$

$$\{\epsilon\}^i = \lambda^i [N^\epsilon] \{y\} + [M_{e^o}^\epsilon] \{\epsilon^o\}^i \quad (4.41)$$

Para um determinado incremento de carga, tomando-se a equação 4.41, e considerando a não-linearidade do problema, conforme descrito na seção 3.1, a diferença entre as deformações regulares e as residuais (iniciais ou inelásticas) podem ser descritas em um vetor, $\{Q\}^i$, que na situação de equilíbrio deverá ser nulo. Como não aparecem os valores das deformações iniciais (inelásticas) na expressão do vetor de condição de equilíbrio, a formulação é dita implícita. A expressão do vetor de equilíbrio é:

$$\{Q\}^i = \lambda^i [N^\epsilon] \{y\} + [M_{e^o}^\epsilon] \left(\{\epsilon\}^i - [E^o]^{-1} \{\tilde{\sigma}(\epsilon)\}^i \right) - \{\epsilon\}^i = \{0\} \quad (4.42)$$

onde a equação 3.1 foi considerada.

A resolução da equação pode ser feita, para o conjunto de células internas, por um processo iterativo incremental, como método de Newton-Raphson³. As componentes de tensão devem ser obtidas conforme equação 3.1, cuja representação matricial numa dada célula seria $\{\tilde{\sigma}(\epsilon^c)\} = [E^o] \left(\{\epsilon^c\} - \{\epsilon^{o,c}\} \right)$. Essas componentes são obtidas diretamente da equação constitutiva do modelo de dano isotrópico (eq. 2.6) na qual a variável de dano é obtida da lei de amolecimento adotada (eq. 2.19).

Estratégia de Solução – Método Incremental-Iterativo

Observa-se que na equação 4.42 o vetor de condição de equilíbrio é escrito em função das deformações regulares e do fator de carga $\{Q\}^i \equiv \{Q(\epsilon^i, \lambda^i)\}$. Adotando a abordagem

³Isaac Newton, 1643-1727, Inglaterra; e Joseph Raphson, 1648-1715, Inglaterra

proposta por Batoz e Dhatt (1979) e Yang e Shieh (1990), o fator de carga λ^i é considerado uma variável adicional, que deve ser levada em conta na resolução da equação. Permite-se assim uma generalização, já que o fator de carga pode ser definido em função do método de controle que se deseja utilizar.

A equação 4.42 pode ser expressa na forma:

$$\{Q\}^i = \lambda^i \{P\} - \{F\}^i = \{0\} \quad (4.43)$$

onde:

$$\{P\} = [N^c] \{y\} \quad (4.44)$$

$$\{F\}^i = \{\epsilon\}^i - [M_{e^o}^c] \left(\{\epsilon\}^i - [E^o]^{-1} \{\tilde{\sigma}(\epsilon)\}^i \right) \quad (4.45)$$

Aplicando o processo de linearização de $\{Q\}^i$

$$\{Q\}_{j-1}^i + \left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \{\epsilon\}} \right]_{j-1}^i \{\delta \epsilon\}_j^i + \underbrace{\left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \lambda} \right]_{j-1}^i}_{\{P\}} \delta \lambda_j^i \approx \{0\} \quad (4.46)$$

e definindo:

$$[D]_{j-1}^i = - \left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \{\epsilon\}} \right]_{j-1}^i = \left[[I] - [M_{e^o}^c] [E^o]^{-1} \left([E^o] - \left[\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \epsilon} \right]_{j-1}^i \right) \right] \quad (4.47)$$

pode-se escrever a equação 4.46 como:

$$[D]_{j-1}^i \{\delta \epsilon\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (4.48)$$

onde j é um índice iterativo dentro de um incremento i , e $\delta(\cdot)_j^i = (\cdot)_j^i - (\cdot)_{j-1}^i$. O vetor de correção iterativa das deformações regulares, $\{\delta \epsilon\}_j^i$, pode ser desmembrada como segue:

$$\{\delta \epsilon\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\epsilon^P\}_j^i + \{\delta \epsilon^Q\}_j^i \quad (4.49)$$

Na equação 4.49 o vetor $\{\epsilon^P\}_j^i$ é relacionado à carga externa fixa $\{P\}$, enquanto $\{\delta \epsilon^Q\}_j^i$ expressa a relação de incremento de deformação referente ao resíduo do vetor de condição de equilíbrio $\{Q\}_{j-1}^i$. Ambos os vetores podem ser obtidos da solução das equações:

$$[D]_{j-1}^i \{\epsilon^P\}_j^i = \{P\} \quad (4.50)$$

$$[D]_{j-1}^i \{\delta\epsilon^Q\}_j^i = \{Q\}_{j-1}^i \quad (4.51)$$

Em uma dada iteração i , as equações 4.50 e 4.51 podem ser resolvidas de forma independente. Para a parcela corretora (relacionada ao desbalanceamento), $\delta\lambda_j^i$ deve ser definida em função do método de controle utilizado.

De maneira similar, pode-se obter expressões para correções iterativas de deslocamentos e também do vetor com incógnitas do contorno. Para tal, a partir da equação 4.41, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\delta\epsilon\}_j^i &= \{\epsilon\}_j^i - \{\epsilon\}_{j-1}^i = \delta\lambda^i [N^c] \{y\} + [M_{\epsilon^o}^\epsilon] \{\delta\epsilon^o\}_j^i \\ \Rightarrow \{\delta\epsilon^o\}_j^i &= [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \{\delta\epsilon\}_j^i - [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \delta\lambda^i [N^c] \{y\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pode-se fazer o mesmo para as expressões de $\{\delta u^{\Omega}\}_j^i$ e $\{\delta x\}_j^i$ (eq. 4.37 e 4.36), substituindo o termo $\{\delta\epsilon^o\}$ da equação anterior. Obtém-se assim:

– Para Deslocamento Internos, a partir de $\{\delta u^{\Omega}\}_j^i = \delta\lambda^i [N^u] \{y\} + [M_{\epsilon^o}^u] \{\delta\epsilon^o\}_j^i$:

$$\{\delta u^{\Omega}\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{u^{\Omega,P}\}_j^i + \{\delta u^{\Omega,Q}\}_j^i \quad (4.53)$$

onde os termos das parcelas preditora e corretora são:

$$\begin{aligned} \{u^{\Omega,P}\}_j^i &= [N^u] \{y\} + [M_{\epsilon^o}^u] [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \left([I] - [D]_{j-1}^i \right) \{\epsilon^P\}_j^i \\ \{\delta u^{\Omega,Q}\}_j^i &= [M_{\epsilon^o}^u] [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \{\delta\epsilon^Q\}_j^i \end{aligned} \quad (4.54)$$

– Para Incógnitas do Contorno, a partir de $\{\delta x\}_j^i = \delta\lambda_j^i [N] \{y\} + [M_{\epsilon^o}] \{\delta\epsilon^o\}_j^i$:

$$\{\delta x\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{x^P\}_j^i + \{\delta x^Q\}_j^i \quad (4.55)$$

onde os termos das parcelas preditora e corretora são:

$$\begin{aligned} \{x^P\}_j^i &= [N] \{y\} + [M_{\epsilon^o}] [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \left([I] - [D]_{j-1}^i \right) \{\epsilon^P\}_j^i \\ \{\delta x^Q\}_j^i &= [M_{\epsilon^o}] [M_{\epsilon^o}^\epsilon]^{-1} \{\delta\epsilon^Q\}_j^i \end{aligned} \quad (4.56)$$

Métodos de Controle e Critério de Convergência

Na expressão do vetor de condição de equilíbrio $\{Q(\epsilon^i, \lambda^i)\}$ o fator de carga λ^i é uma variável que depende do método de controle escolhido. O método de controle tem a função de determinar qual o fator de carga deve ser utilizado a cada incremento iterativo

da análise não-linear. Para representação da trajetória de equilíbrio de um ponto material de um sólido sob análise, optou-se por utilizar o método de controle de deslocamento direto. Neste, deve-se escolher um ponto de controle e uma componente do deslocamento, utilizada para definir o tamanho do incremento de carga.

A verificação de convergência dentro de um passo incremental pode ser feita como verificação por deslocamento ou verificação em força, ou até mesmo por combinação das duas. Em todos os casos é necessário se arbitrar uma tolerância. Observa-se na literatura a adoção de um valor usual de 1×10^{-4} . Neste trabalho, o controle de convergência foi feito por verificação em força, conforme expresso na próxima equação.

$$\frac{\|\{Q\}\|}{\|\lambda\{P\}\|} < \text{tolerância} \quad (4.57)$$

onde se entende $\|\{\cdot\}\|$ como a norma do vetor $\{\cdot\}$.

Como valor de tolerância adotou-se aqui o valor 1×10^{-3} , uma vez que tal fator conduziu a resultados equivalentes, se comparadas às análises usando o valor usual, porém com redução significativa no tempo de processamento.

Algoritmo da Estratégia de Solução Não-Linear

As equações apresentadas até aqui podem ser sistematizadas no algoritmo a seguir. Para utilização é necessário que estejam computados os termos das equações matriciais 4.33, 4.34 e 4.35.

ALGORITMO 1: Estratégia de solução não-linear

- i. Calcule $\{P\}$ usando a equação 4.44 e inicialize $i = 0$;
- ii. Loop externo (passo incremental): $i = i + 1$. Inicialize $j = 0$;
- iii. Se $(i > n^0 \text{ máximo incrementos}) \Rightarrow \text{FIM}$;
- iv. Inicialize vetores $\{Q\}_j^i = 0$ e $\{F\}_j^i = 0$;
- v. Loop interno (iteração dentro do passo): $j = j + 1$;
- vi. Se $(j > n^0 \text{ máximo de iterações}) \Rightarrow \text{FIM}$;
- vii. Monte matriz $[D]_{j-1}^i$ (eq. 4.47) e calcular operador tangente E_{ijkl}^t (eq. 2.25);
- viii. Resolva equações 4.50 e 4.51 para $\{\epsilon^P\}_j^i$ e $\{\delta\epsilon^Q\}_j^i$;
- ix. Calcule $\{x^P\}_j^i$, $\{\delta x^Q\}_j^i$, $\{u^{\Omega,P}\}_j^i$ e $\{\delta u^{\Omega,Q}\}_j^i$ (equações 4.56 e 4.54);
- x. Calcule o incremento do fator de carga $\delta\lambda_j^i$, usando o método de controle escolhido;
- xi. Monte os vetores $\{\delta\epsilon\}_j^i$, $\{\delta u^{\Omega}\}_j^i$ e $\{\delta x\}_j^i$ (equações 4.49, 4.53 e 4.55);
- xii. Atualize λ_j^i , $\{\epsilon\}_j^i$, $\{u^{\Omega}\}_j^i$ e $\{x\}_j^i$, considerando, $(\cdot)_j^i = (\cdot)_{j-1}^i + \delta(\cdot)_j^i$;
- xiii. Monte o vetor $\{F\}_j^i$ (eq. 4.45), utilizando componentes de $\{\tilde{\sigma}(\epsilon)\}$ calculados com equação 2.6;
- xiv. Calcule o vetor $\{Q\}_j^i = \lambda^i\{P\} - \{F\}_j^i$ (eq. 4.43);
- xv. Verifique a convergência do passo de carga (eq. 4.57):
 - não havendo convergência: retorne ao item **v.**, para próxima iteração;
 - havendo convergência: retorne ao item **ii.**, para incremento de carga.

Capítulo 5

Localização de Deformações e Modelo de Banda Variável

A degradação material, responsável pelo amolecimento, induz a deformações contínuas que tendem a se concentrar em regiões específicas onde ocorre localização de deformações. A ocorrência da localização de deformação em um ponto (bifurcação), implica na perda da condição de continuidade naquele ponto. Em materiais parcialmente frágeis, fisicamente essa perda de continuidade pode se manifestar pelo aparecimento de microfissuras em uma região ou diretamente pelo aparecimento de uma trinca macroscópica, mas em geral o processo ocorre através de uma transição do primeiro caso para o segundo. No modelo utilizado nesse trabalho, assume-se que o surgimento de descontinuidade no campo de deformações (descontinuidade fraca) deve ocorrer em uma denominada *banda de localização*. Fisicamente, essa descontinuidade equivale ao surgimento de microfissuras na zona de processo de fratura. Já a formação de trinca macroscópica equivale ao surgimento de saltos no campo de deslocamentos (descontinuidade forte). O processo em que microfissuras se transformam em trincas é retratado por um modelo de banda variável, através do estreitamento da banda de localização de deformações até uma espessura mínima (teoricamente nula).

Nesse capítulo, a primeira seção tem considerações sobre a localização de deformações e sua detecção, a seção seguinte trata sobre cinemática com descontinuidades, em seguida, a análise de descontinuidade forte, onde se apresenta a formulação do modelo constitutivo de dano discreto relacionando-o com o modelo contínuo, sintetizando-se o equacionamento

das formulações na seção posterior. Finalizando o capítulo a última seção descreve a lei de variação da banda de localização, condições para o regime de descontinuidade forte e leis de amolecimento para modelo discreto.

O desenvolvimento completo e detalhado da formulação de banda variável é apresentado por Manzoli et al. (1998). Também pode-se ver esse desenvolvimento reproduzido em Oliver (2000), Samaniego (2002), Chaves (2003), Peixoto (2016), e outros, para modelos de dano isotrópico e de plasticidade.

5.1 Análise de Bifurcação em Modelo de Dano Isotrópico

Em uma análise na qual se deseja considerar a possibilidade de falha material, deve-se definir o instante em que ocorre a bifurcação (ponto **B** na figura 1.3), conforme citado no final do Capítulo 2. A análise de bifurcação descontínua deve ser feita a cada variação no estado de deformações. Busca-se nessa análise as condições necessárias para que a taxa do campo de deformações, $\dot{\epsilon}_{ij}$ se torne descontínua entre duas superfícies que delimitam uma região denominada banda de localização (figura 5.1). O domínio do sólido é designado por Ω , e o domínio da banda por Ω_b ($\Omega_b \subset \Omega$). As duas superfícies possuem planos tangentes paralelos no ponto em análise, de forma que uma única base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ pode ser estabelecida, sendo \mathbf{n} o vetor unitário normal a estes planos.

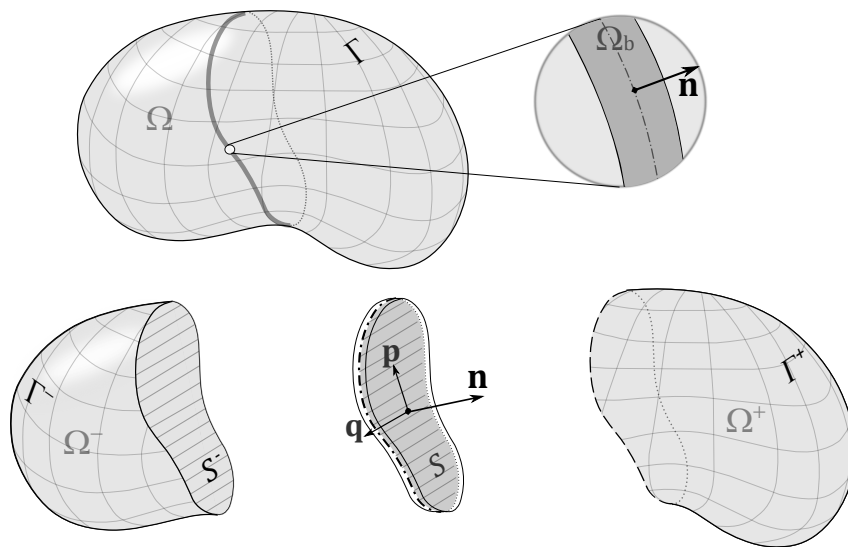


Figura 5.1: Domínio do sólido, contornos e superfície/banda de localização.

O comportamento cinemático do processo representa a região de localização de deformações por uma banda de tamanho pequeno, com espessura finita, que se destaca do domínio por duas descontinuidades fracas, isto é, superfícies de descontinuidade do campo de deformações através das quais certas componentes de deformação têm um salto, sendo que o campo de deslocamentos permanece contínuo, como ilustra a figura 1.5 (região com descontinuidade fraca). Em termos físicos, a banda entre as descontinuidades fracas corresponderia a uma zona com uma densidade de microfissuras quase constante.

5.1.1 Condição para Localização de Deformação

Pode-se desenvolver a análise buscando-se a condição para que haja descontinuidade na taxa de deformações, $[[\dot{u}_{i,j}]]n_j \neq 0$, onde $[[\cdot]]$ representa a diferença entre os valores de (\cdot) , dentro e fora da banda de localização; e n_j é o vetor normal à banda, conforme figura 5.1. Definindo a magnitude desse salto de deslocamento como $\dot{\alpha}$ e a direção em que ocorre sendo dada pelo vetor unitário m_i , tem-se $[[\dot{u}_{i,j}]]n_j = \dot{\alpha}m_i \Rightarrow [[\dot{u}_{i,j}]] = \dot{\alpha}m_in_j$. Assim, a equação de compatibilidade a ser satisfeita é:

$$[[\dot{\epsilon}_{ij}]] = \frac{1}{2} ([[\dot{u}_{i,j}]] + [[\dot{u}_{j,i}]]) = \frac{\dot{\alpha}}{2} (m_in_j + m_jn_i) \quad (5.1)$$

enquanto a condição de equilíbrio deve garantir a continuidade de tensões nas superfícies de descontinuidade, ou seja:

$$[[\dot{\sigma}_{ij}n_j]] = [[\dot{\sigma}_{ij}]]n_j = 0 \quad (5.2)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy. A relação incremental entre tensões e deformações se dá pelo tensor constitutivo tangente E_{ijkl}^t , definido na equação 2.21 ($\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl}$).

Um ponto importante é a distinção entre bifurcação contínua e descontínua, já que os tensores tangentes E_{ijkl}^t podem ser iguais ou diferentes quando se consideram regiões dentro e fora da banda de localização. Na bifurcação contínua, o material dentro e fora da banda permanece em carga, enquanto na bifurcação descontínua o material fora da banda não mantém a carga, descarregando elasticamente. Rice e Rudnicki (1980) mostram que apenas a condição de bifurcação contínua precisa ser considerada na procura pela ocorrência da localização de deformações, por se tratar de um limite inferior da condição

de ocorrência da bifurcação descontínua. Assim, considerando as simetrias dos tensores $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji}$, $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ji}$, e $E_{ijkl}^t = E_{jilk}^t$, a equação 5.2 pode ser reescrita, combinando-a com as equações 2.21 e 5.1, na forma:

$$(n_i E_{ijkl}^t n_l) m_k = Q_{jk} m_k = 0 \quad (5.3)$$

onde Q_{jk} é conhecido na literatura como tensor de localização ou tensor acústico.

Pode-se definir daí uma condição necessária para o início da localização de deformações. Como a solução trivial da equação, $m_k = 0$, corresponde a $[[\dot{\epsilon}_{ij}]] = 0$, a localização ocorrerá quando Q_{ij} for singular (matematicamente caracterizando a perda de elipticidade da equação diferencial de equilíbrio), ou seja, essa condição é descrita por:

$$\det(n_i E_{ijkl}^t n_l) = \det(Q_{jk}) = 0 \quad (5.4)$$

Embora não seja o único critério existente para determinação do início de localização de deformações, como mostram Rice e Rudnicki (1980) e Schreyer e Neilsen (1996), a análise utilizando o tensor de localização é amplamente empregada como poderoso indicador de potenciais modos de falhas descontínuas (Jirásek, 2007).

Observa-se que na maioria dos casos o tensor constitutivo tangente E_{ijkl}^t é função apenas do estado de carregamento do material, podendo ser considerado conhecido. Assim, a análise de localização consiste na busca do vetor unitário n_i , que indica a direção na qual o tensor de localização é singular, correspondendo também à direção normal à superfície de descontinuidade.

5.1.2 Estabelecimento da Localização de Deformação

Para se avaliar se as condições de estabelecimento da localização de deformação se cumprem, pela análise de bifurcação clássica (critério da perda de elipticidade do problema), é necessária a solução da equação 5.4. Essa solução pode ser obtida por abordagem analítica ou numérica, havendo vantagens específicas para cada alternativa. As soluções analíticas, além de mais precisas, não estão sujeitas a instabilidade de aproximações numéricas, e são menos custosas computacionalmente, o que justifica seu uso (Ibáñez, 2006). Em

contraponto, são necessárias a obtenção de expressões específicas para cada tipo de material (modelo constitutivo) com o qual se está trabalhando, que dependem também da dimensão espacial do problema. Algoritmos numéricos, por outro lado, são capazes de tratar de maneira genérica, materiais com diferentes modelos constitutivos, em problemas bidimensionais ou tridimensionais (Mota et al., 2016).

Abordagem Analítica

A expressão do tensor de localização (Q_{jk}), usada na análise, é específica para cada modelo constitutivo. O procedimento, em geral, requer a obtenção de uma expressão para o módulo de amolecimento (H) em função de uma direção normal unitária arbitrária ($\check{H}(\hat{n}_i)$). O problema então passa a ser a busca da direção normal para a qual se obtém o valor crítico do módulo de amolecimento (H^{crit}) que satisfaça à expressão, caso exista. Exemplo desse procedimento pode ser observado na solução explícita apresentada por Oliver et al. (1999) para modelos constitutivos elastoplásticos em estado plano. Utilizando o critério de dano proposto por Oliver et al. (2006), uma solução particularizada é apresentada em Peixoto et al. (2018). Para problemas tridimensionais, Chaves (2003) apresenta soluções para modelos de dano e de plasticidade específicos.

Diferentes maneiras de se fazer essa busca pela direção correspondente ao módulo de amolecimento crítico podem ser utilizadas, como por meio de multiplicadores de Lagrange¹ (Ottosen e Runesson, 1991) ou usando propriedades do círculo de Mohr² (Rizzi et al., 1995; Oliver e Huespe, 2004), obtendo-se soluções específicas, relativizadas pelas variações de modelos associativos ou não associativos, e pela natureza dimensional do problema.

Abordagem Numérica

A abordagem numérica pioneira para verificação da ocorrência de localização de deformações foi proposta por Ortiz et al. (1987), em um procedimento com duas etapas. Na primeira, é feita uma varredura discreta em diferentes direções arbitradas para um vetor

¹Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, Itália

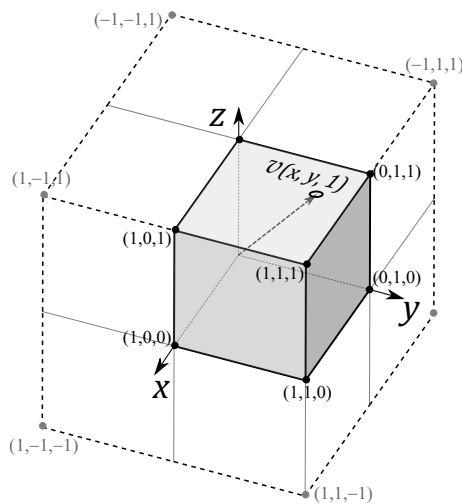
²Christian Otto Mohr, 1835-1918, Alemanha

unitário, buscando por um valor mínimo para o determinante do tensor de localização (Q_{jk}). Na segunda etapa, aplica-se um procedimento iterativo usando multiplicador de Lagrange para obtenção de solução do problema não-linear de autovalor, utilizando resultado da primeira aproximação. Mosler (2005) propôs uma variação da técnica, utilizando o valor obtido na primeira etapa como uma primeira aproximação para o método iterativo de Newton, no qual busca-se um valor mínimo para o determinante do tensor de localização e a direção normal correspondente. Em relação ao procedimento de Ortiz et al. (1987), além do método de minimização ser diferente, o que reduz uma variável do problema (multiplicador de Lagrange), a parametrização esférica da primeira etapa foi feita com funções diferentes. Uma técnica diferente foi apresentada por Oliver et al. (2010), baseada em uma solução iterativa de um problema acoplado de dois autovalores conjugados do tensor de localização. Os autores mostraram um ganho em termos de eficiência computacional, comparado aos procedimentos existentes, porém, o algoritmo funciona bem para casos em que o modelos constitutivos apresentam simetria, não apresentando resultados precisos caso essa condição não seja satisfeita, limitando sua aplicabilidade.

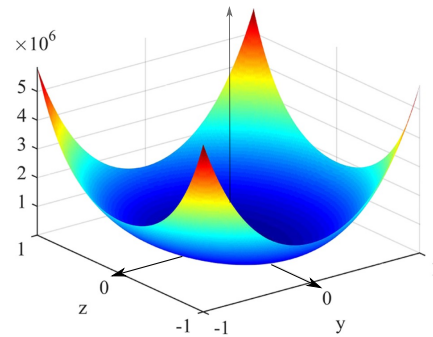
Nas duas abordagens numéricas inicialmente citadas, para parametrização inicial do espaço das soluções possíveis (primeira etapa) é utilizada a parametrização esférica. Nela, o vetor de direção da localização de deformações é restrito a uma esfera em que o raio é unitário e as coordenadas são descritas por dois parâmetros (espaço bidimensional). Na parametrização clássica descrevem-se coordenadas em termos de ângulo polar e ângulo azimutal. Outras variações também podem ser adotadas, como parametrização estereográfica, parametrização projetiva e parametrização tangente. Mota et al. (2016) desenvolveram um tipo de parametrização, denominada cartesiana, em um espaço definido por um cubo centrado com arestas de comprimento igual a duas unidades (figura 5.2a). Assim, o vetor que identifica uma direção não tem comprimento unitário fixo. Em análise de localização de deformações, apenas três faces do cubo de parametrização precisam ser consideradas, devido à simetria da condição de bifurcação. O vetor $\{v\}$ que determina a

direção é definido matematicamente como:

$$v(x, y, z) := \begin{cases} \{x, y, 1\}^T & , \text{com } x \in [-1, 1], \text{ e } y \in [-1, 1] \\ \{x, 1, z\}^T & , \text{com } x \in [-1, 1], \text{ e } z \in [-1, 1] \\ \{1, y, z\}^T & , \text{com } y \in [-1, 1], \text{ e } z \in [-1, 1] \\ \{1, 1, 1\}^T & , \text{nos casos restantes.} \end{cases} \quad (5.5)$$



(a) Cubo de parametrização



(b) Forma da função a ser otimizada –
fonte: Mota et al. (2016)

Figura 5.2: Parametrização cartesiana, espaço de parametrização e forma da função.

O procedimento sistematizado, consiste em definir o determinante do tensor de localização como uma função ($f = \det(Q_{jk}) = \det(n_i E_{ijkl}^t n_l)$).

$$Q_{jk} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(Q_{kl}) &= Q_{11}Q_{22}Q_{33} + Q_{12}Q_{23}Q_{31} + Q_{13}Q_{21}Q_{32} \\ &\quad - Q_{13}Q_{22}Q_{31} - Q_{11}Q_{23}Q_{32} - Q_{12}Q_{21}Q_{33} \end{aligned}$$

Assim tem-se uma função $f(Q(n_i))$, que pode ser parametrizada relacionando as componentes do vetor de direção n_i às coordenadas de parametrização cartesiana (dois parâmetros para cada face do cubo). Busca-se, então, o ponto de valor mínimo da função parametrizada. O comportamento dessa função, mostrado na figura 5.2b, é bem mais

simples que as funções obtidas por parametrização esférica. Essa busca (otimização linear) deve ser feita para cada uma das três faces do cubo situadas no primeiro octante, individualmente, já que cada face equivale a uma função $f(n_i)$ diferente. Para cada face, o vetor (v_i) normal à superfície de descontinuidade procurada tem duas incógnitas (x e y , ou x e z , ou y e z ; conforme equação 5.5). A otimização é feita através de um sistema linear de equações. Tomando por exemplo a face superior do cubo, o vetor procurado tem componentes $(v_1 = x, v_2 = y, v_3 = 1)$, a função que define o determinante do tensor de localização é uma função $f(x, y)$, e o sistema linear a ser resolvido tem a forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Obtido o par de soluções para a face do cubo em análise (ponto mínimo da função objetivo), deve-se verificar a consistência do resultado em relação à parametrização adotada, isto é, avaliar se o par de valores encontra-se dentro da faixa de domínio possível. Ao analisar a face superior do cubo, por exemplo, o par de soluções $\{x_{sol}, y_{sol}\}$ deve estar restrita ao domínio $(-1 \geq x_{sol} \geq 1)$ e $(-1 \geq y_{sol} \geq 1)$.

Mota et al. (2016) demonstram que a singularidade do tensor de localização é verificada quando a função f (de uma face do cubo) tem resultado negativo para um determinado ponto daquela face do cubo. Assim, por exemplo, para a face superior do cubo, num ponto de coordenadas $\{x_o, y_o, 1\}$, tem-se:

- . se $f(x_o, y_o) > 0$, não há singularidade;
- . se $f(x_o, y_o) \leq 0$, há singularidade.

Continuando então o procedimento, obtido o par de soluções para a face do cubo em análise (ponto ótimo da função objetivo), após checar a consistência do resultado, deve-se avaliar se o ponto corresponde ou não à uma singularidade. Verificando-se a singularidade, o vetor unitário n_i , que define a direção normal à superfície de descontinuidade é obtido da normalização do vetor v_i . Ou seja, para a face superior do cubo, se $f(x_{sol}, y_{sol}) \leq 0$ (há singularidade), o vetor v_i tem componentes $\{x_{sol}, y_{sol}, 1\}$, e o vetor normal procurado para esta face é $n_i = v_i / \| \mathbf{v} \|$. O procedimento deve ser repetido para as demais faces,

sendo possível obter simultaneamente até três vetores n_i , um para cada face do cubo de parametrização.

As expressões expandidas para as funções $f(x_i)$ parametrizadas para cada lado do cubo de parametrização cartesiana são apresentadas por Fioresi (2019). Nesse trabalho o autor usou o método de Newton, representando a função $f(x_i)$ com expansão em série de Taylor³ até a segunda ordem. O processo iterativo do método pode ser descrito por:

$$f_i^{k+1} = f_i^k - [f_{i,ij}^k]^{-1} f_{i,j}^k \quad (5.8)$$

onde o índice sobrescrito k é um contador de iterações, e $f_{i,ij}^k$ é a matriz Hessiana⁴ simétrica da função, \mathbf{H} , matricialmente expressa por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

O critério de convergência adotado para o método de Newton foi a norma do vetor gradiente $\| f_{i,j}^{k+1} \|$ ao final de uma iteração, ser menor que uma tolerância pré-definida (adotado 1×10^{-6}).

No presente trabalho, foi adotada a metodologia implementada por Fioresi (2019) em problemas onde é necessária a análise de bifurcação, *i.e.*, aquelas análises onde se consideram a transição entre regimes inelástico (contínuo) e a incipiência da descontinuidade em alternativa às análises que consideraram o regime de descontinuidade forte direta ao fim do regime elástico.

5.2 Cinemática com Descontinuidades

Pode-se formular equações cinemáticas para descrever descontinuidades fracas bem como para descontinuidades fortes, porém o mais apropriado é descrever ambas através de um único conjunto de equações, que aqui será denominada formulação regularizada. O

³Brook Taylor, 1685-1731, Inglaterra

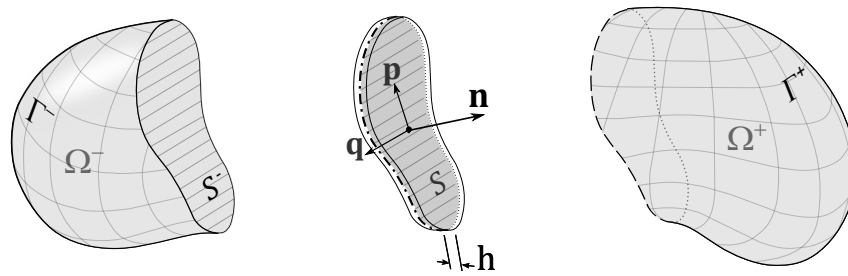
⁴referente a Ludwig Otto Hesse, 1811-1874, Alemanha

desenvolvimento detalhado da formulação regularizada pode ser visto em Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1998, 1999) e outros.

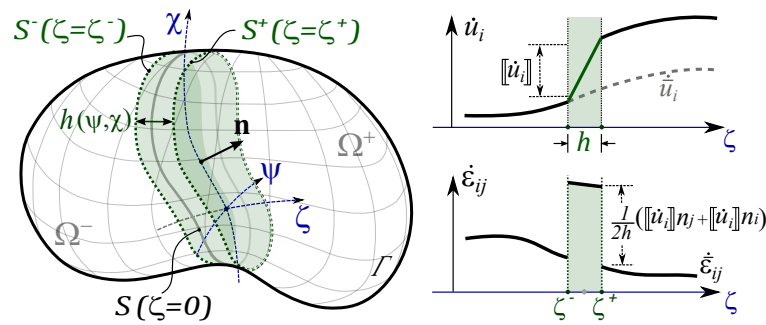
Na figura 5.3 está ilustrada uma superfície qualquer \mathcal{S} contida num domínio Ω com pontos materiais \mathbf{X} , dividindo o domínio em Ω^- e Ω^+ . Num sistema de coordenadas curvilíneas $\{\chi, \psi, \zeta\}$ (ζ direcionado para Ω^+), a superfície \mathcal{S} é definida por $\{\chi, \psi, \zeta = 0\}$, enquanto as superfícies \mathcal{S}^- e \mathcal{S}^+ , definidas por $\{\chi, \psi, \zeta = \zeta^-\}$ e $\{\chi, \psi, \zeta = \zeta^+\}$, são as bordas da banda de localização de domínio Ω_b .

O sistema de coordenadas tem base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_\chi, \hat{\mathbf{e}}_\psi, \hat{\mathbf{e}}_\zeta\}$, sendo o vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_\zeta$ coincidente com a normal n_i à superfície \mathcal{S} . Define-se $h(\chi, \psi)$ como a espessura da banda de localização medida no sentido desse vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_\zeta$.

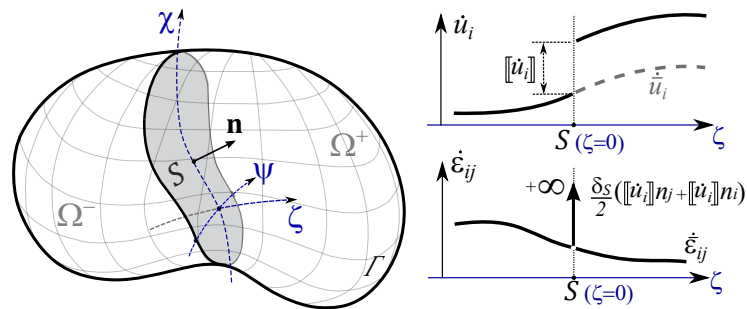
Observa-se na figura 5.3, para cada formulação ilustrada, a distribuição dos campos de deformação e deslocamento ao longo da coordenada ζ .



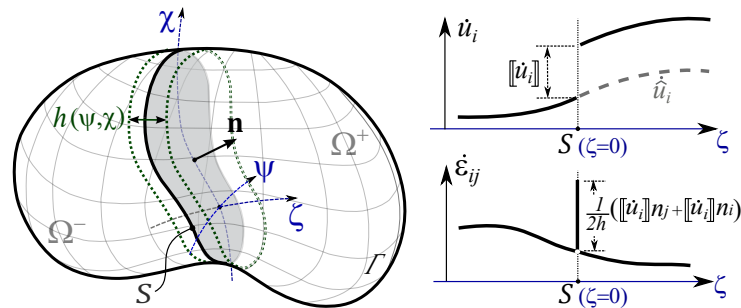
(a)



(b) Cinemática da descontinuidade fraca



(c) Cinemática da descontinuidade forte



(d) Cinemática regularizada da descontinuidade forte

Figura 5.3: Cinemática com descontinuidades, baseado em Manzoli et al. (1998) – pg.4-4.

Cinemática com Descontinuidade Fraca

Para representar um salto entre duas superfícies \mathcal{S}^- e \mathcal{S}^+ ao longo de ζ , utiliza-se uma função contínua do tipo *rampa* $\mathcal{H}_{\Omega_b}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta, t)$, que varia linearmente de 0 (em Ω^- fora da banda), até 1 (em Ω^+ fora da banda).

As taxas de deslocamentos (velocidades) e de deformações, em Ω , podem ser expressas respectivamente por:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\Omega_b}(\mathbf{X}, t) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (5.10)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\dot{\bar{u}}_{i,j} + \dot{\bar{u}}_{j,i} \right) + \frac{\mathcal{H}_{\Omega_b}}{2} \left(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket \right) + \frac{\mu_{\Omega_b}}{2h(\zeta)} \left(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket \hat{e}_j^\zeta + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket \hat{e}_i^\zeta \right) \quad (5.11)$$

onde t representa o tempo, $\bar{u}(\mathbf{X}, t)$ e $\llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t)$ são campos com continuidade C^0 , e μ_{Ω_b} é uma função de colocação sobre Ω_b , i.e., $\{\mu_{\Omega_b}(\mathbf{X}) = 1 \text{ se } \mathbf{X} \in \Omega_b \text{ e } \mu_{\Omega_b}(\mathbf{X}) = 0 \text{ se } \mathbf{X} \notin \Omega_b\}$.

Na equação 5.11 os dois primeiros termos representam a porção contínua do campo de deformações, enquanto o último termo tem valor diferente de zero apenas na banda de localização (ver definição de μ_{Ω_b}), caracterizando a descontinuidade de deformações nas superfícies \mathcal{S}^- e \mathcal{S}^+ .

Cinemática com Descontinuidade Forte

Se a espessura da banda diminui infinitamente, tendendo para a superfície \mathcal{S} (situação de descontinuidade forte), a função que representa o salto se transforma na função degrau (ou função de Heaviside⁵), dada por:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (5.12)$$

As taxas de deslocamentos e de deformações, podem ser expressas respectivamente por:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (5.13)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\dot{\bar{u}}_{i,j} + \dot{\bar{u}}_{j,i} \right) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \left(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket \right) + \frac{\delta_{\mathcal{S}}}{2} \left(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i \right) \quad (5.14)$$

⁵Oliver Heaviside, 1850-1925, Inglaterra

onde o deslocamento se torna descontínuo em \mathcal{S} e assim, $[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)$ representa a magnitude das componentes do salto no campo de deslocamentos. Ainda, $\delta_{\mathcal{S}}$ representa a função delta de Dirac em \mathcal{S} .

Como pode ser observado, os primeiros dois termos na equação 5.14 podem conter parcelas com descontinuidades finitas, enquanto o último termo se torna infinito em \mathcal{S} .

Cinemática Regularizada da Descontinuidade

Na formulação cinemática regularizada com descontinuidades, ambos os casos de descontinuidades são abordados num único conjunto de equações. As taxas de deslocamentos e de deformações podem ser expressas respectivamente por:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) [[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \quad (5.15)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i})}_{\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \text{ (finito), parcela regular}} + \underbrace{\frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2} ([[\dot{u}_{i,j}]] + [[\dot{u}_{j,i}]]) + \frac{\mu_{\mathcal{S}}}{2h(\zeta)} ([[\dot{u}_i]] n_j + [[\dot{u}_j]] n_i)}_{\text{infinito quando } h(\zeta) \rightarrow 0} \quad (5.16)$$

onde $\mu_{\mathcal{S}}$ é uma função de colocação sobre \mathcal{S} , i.e., $\{\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = 1 \text{ se } \mathbf{X} \in \mathcal{S} \text{ e } \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = 0 \text{ se } \mathbf{X} \notin \mathcal{S}\}$.

Observa-se que quando $h(\zeta)$ se aproxima de zero, $\left(\frac{\mu_{\mathcal{S}}}{2h(\zeta)}\right) \rightarrow \delta_{\mathcal{S}}$, e as equações 5.15 e 5.16 se tornam equivalentes àquelas da descontinuidade forte. Já se $h(\zeta) \neq 0$ e n_i corresponder a e_i^{ζ} , estas equações são representativas da cinemática de descontinuidade fraca, respeitada uma condição: que a espessura da banda de localização seja suficientemente pequena em relação a Ω , de modo a levar os efeitos das descontinuidades nas superfícies \mathcal{S}^+ e \mathcal{S}^- para a superfície \mathcal{S} . Essa condição também reduz efeitos da falta de compatibilidade entre equações dos campos de deslocamento e deformações, que somente é assegurada com $h(\zeta) \rightarrow 0$.

Cinemática Regularizada da Descontinuidade Reformulada

Para evitar falta de significado físico, ao se impor condições de contorno essenciais (deslocamentos) em uma região do modelo com descontinuidade no campo de deslocamento,

e também por conveniência numérica, as equações 5.15 e 5.16 devem ser reformuladas, confinando a descontinuidade a uma região limitada (arbitrária) do domínio.

Define-se então um subdomínio $\Omega_\varphi \in \Omega$, ao redor da superfície de descontinuidade \mathcal{S} (figura 5.4), bem como define-se uma função contínua $\varphi(\mathbf{X})$ em Ω_φ como:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{cases} \quad (5.17)$$

onde $a \setminus b$ significa: a parte de a excluindo-se b , i.e., $a \setminus b = a - (a \cap b)$.

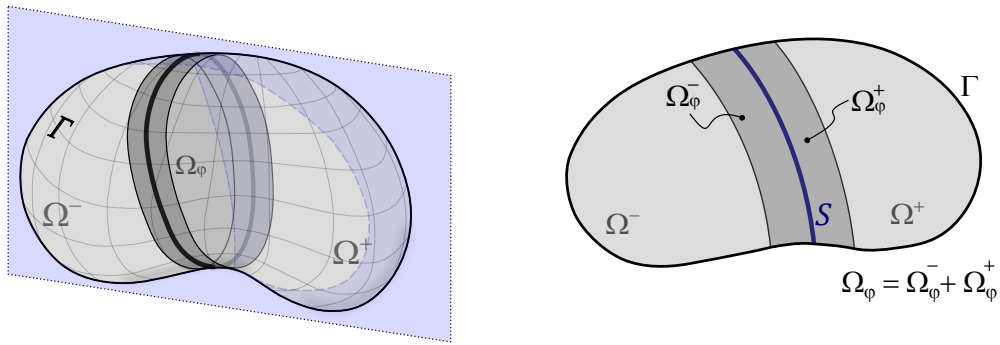


Figura 5.4: Subdomínio arbitrário Ω_φ em torno da superfície de descontinuidade.

Somando e subtraindo $\varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)$ na equação 5.15 pode-se escrever a expressão da taxa de deslocamento como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\hat{u}_i(\mathbf{X}, t) + \varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)}_{\hat{u}_i(\mathbf{X}, t)} + \underbrace{[\mathcal{H}_S(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})]}_{\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})} [[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \\ &= \hat{u}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) [[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $\hat{u}_i(\mathbf{X}, t)$ são funções contínuas e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ possui valor nulo para todo ponto \mathbf{X} em Ω , exceto no subdomínio Ω_φ . A figura 5.5 ilustra as funções consideradas. Nota-se, portanto, que o campo de deslocamentos fica composto por uma parcela regular, $\hat{u}_i(\mathbf{X}, t)$, e outra que contém as componentes do salto, $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)$, cuja região de influência é Ω_φ .

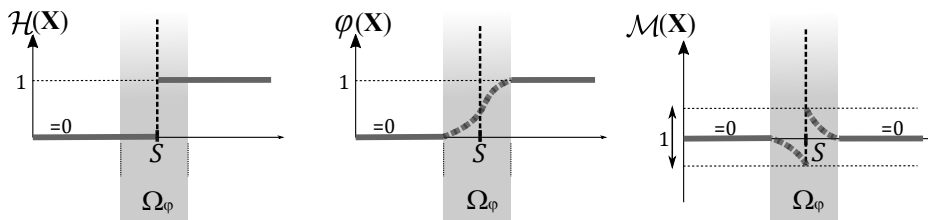


Figura 5.5: Funções $\mathcal{H}(\mathbf{X})$, $\varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S(\mathbf{X})$.

Assim a descontinuidade fica caracterizada em Ω_φ , e não em todo domínio Ω . Pode-se dessa forma aplicar as condições de contorno essenciais ao termo \hat{u}_i , desde que $\Gamma_u \cap \Omega_\varphi = 0$. Já em relação ao campo de deformações, da equação 5.16, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})}_{\dot{\epsilon}_{ij}} + \underbrace{\frac{\mathcal{M}_S^\varphi}{2}(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket)}_{-\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi} - \frac{1}{2}(\varphi_{,i} \llbracket \dot{u}_j \rrbracket + \varphi_{,j} \llbracket \dot{u}_i \rrbracket) \\ &\quad + \frac{\mu_S}{2h}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \quad (5.19) \\ &= \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi + \frac{\mu_S}{2h}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \end{aligned}$$

onde $\dot{\epsilon}_{ij}$ é uma parcela regular das deformações, $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$ possui valores não nulos apenas no subdomínio Ω_φ e o último termo é restrito aos pontos sobre a superfície \mathcal{S} .

A compatibilidade entre taxas dos campos de deformação e de deslocamentos é verificada apenas sob regime de descontinuidade forte, assim como mencionado em relação às equações 5.15 e 5.16. Nesse caso tem-se $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\mu(\mathbf{X})}{h} \right] = \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{X})$, sendo $\delta_{\mathcal{S}}$ a distribuição delta de Dirac sobre a superfície \mathcal{S} .

As expressões construídas considerando a descontinuidade confinada em φ (eq. 5.17 a 5.19) serão utilizadas posteriormente, ao se tratar a evolução de descontinuidade. Na obtenção do equacionamento do modelo constitutivo de dano coesivo (associado ao contínuo) nas seções a seguir, segue-se utilizando o modelo descrito pela figura 5.3.

5.3 Análise de Descontinuidade Forte

A análise de descontinuidade forte tem como objetivo a identificação das condições que fazem a cinemática com descontinuidades (descrita na seção anterior) compatível com modelos constitutivos contínuos, no caso, compatível com o modelo de dano isotrópico. Com efeito, deve-se observar que a continuidade das forças de superfície e de suas taxas, através da superfície de descontinuidade \mathcal{S} , é uma condição necessária para atender às condições de equilíbrio, ou seja:

$$t_i(\mathbf{X}, t) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) = \sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) \quad (5.20a)$$

$$\dot{t}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) \quad (5.20b)$$

onde t_i referem-se à forças de superfície, $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$ são componentes de tensão num ponto sobre \mathcal{S} e $\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ são as tensões num ponto infinitesimalmente próximo a ele, porém, localizado em $\Omega \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega - (\Omega \cap \mathcal{S})$.

Verifica-se que, como as deformações são finitas em $\Omega \setminus \mathcal{S}$, as componentes de tensões também devem ser, inclusive $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$ e $\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}$, para preservar o sentido físico das tensões.

5.3.1 Equações dos Modelos de Dano Coesivo

Oliver (2000) mostra em detalhes que a aplicação da cinemática com descontinuidade forte a um modelo constitutivo contínuo leva a um modelo constitutivo coesivo correspondente. Assim, para um instante, t , em que se configura a descontinuidade forte ($t = t_{SD}$), estabelece-se uma relação entre tensões (σ_{ij}) com forças de superfície (t_i) e deformações (ϵ_{ij}) com saltos nos deslocamentos em \mathcal{S} ($\Delta[[u_i]] = [[u_i]](\mathbf{X}, t) - [[u_i]](\mathbf{X}, t_{SD})$). O equacionamento do modelo de dano coesivo é apresentado na sequência.

$$\text{Energia livre: } \begin{cases} \hat{\psi}(\Delta[[u_i]], \omega) = [1 - \omega(\Delta\alpha)]\hat{\psi}_o(\Delta[[u_i]]); \\ \hat{\psi}_o(\Delta[[u_i]]) = \frac{1}{2}\Delta[[u_i]]Q_{ij}^e\Delta[[u_j]] \end{cases} \quad (5.21a)$$

$$\text{Equação constitutiva: } t_i = \frac{\partial \hat{\psi}(\Delta[[u_i]], \omega)}{\partial (\Delta[[u_i]])} = (1 - \omega)Q_{ij}^e\Delta[[u_j]] \quad (5.21b)$$

$$\text{Variável de dano: } \omega \equiv \omega(\Delta\alpha) = 1 - \frac{q^*(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha}, \quad \omega \in (-\infty, 1] \quad (5.21c)$$

$$\text{Lei de evolução da variável interna: } \frac{\partial (\Delta\alpha)}{\partial t} = \dot{\alpha}, \quad \Delta\alpha \in [0, \infty) \quad (5.21d)$$

$$\text{Crit. de dano: } \bar{G}(\Delta[[u_i]], \Delta\alpha) \equiv \tau_{\Delta[[u_i]]} - \Delta\alpha = \sqrt{\Delta[[u_i]]Q_{ij}^e\Delta[[u_j]]} - \Delta\alpha \quad (5.21e)$$

$$\text{Condições carreg.-descarreg.: } \bar{G} \leq 0, \quad \dot{\alpha} \geq 0, \quad \dot{\alpha}\bar{G} = 0, \quad \dot{\alpha}\dot{\bar{G}} = 0 \quad (5.21f)$$

$$\text{Lei de amolecimento: } \dot{q}^* = H^*\dot{\alpha}, \quad (H^* = \frac{1}{h}H < 0), \quad \begin{cases} q^* \in [0, q_{SD}], \\ q^*|_{t=t_{SD}} = q_{SD} \end{cases} \quad (5.21g)$$

A correspondência entre cada parâmetro dos modelos contínuo (Capítulo 2) e coesivo é apresentada na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Correspondência entre parâmetros dos modelos contínuo e coesivo.

Modelo	Parâmetros							
Contínuo:	σ_{ij}	ϵ_{ij}	E_{ijkl}^o	$D(r)$	r	$q(r)$	H	\bar{F}
Discreto:	t_i	$\Delta[[u_i]]$	Q_{ij}^e	$\omega(\Delta\alpha)$	$\Delta\alpha$	$q^*(\Delta\alpha)$	H^*	\bar{G}

sendo, Q_{ij}^e o tensor de localização elástico ($Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l$); $\Delta\alpha$ a variação da variável interna discreta a partir do início da descontinuidade forte ($\alpha|_t - \alpha|_{t_{SD}}$); $\omega(\Delta\alpha)$ a variável de dano; $q^*(\Delta\alpha)$ a lei de amolecimento; H^* o módulo de amolecimento discreto e \bar{G} o critério de dano.

A obtenção de cada equação equivalente do modelo discreto é tratada no Apêndice A, seguindo desenvolvimento apresentado por Oliver (2000). Destaca-se a importância da reinterpretação do módulo de amolecimento ($H = hH^*$, $\forall t > t_B$), na compatibilização da cinemática com descontinuidades e as equações do modelo contínuo. Expressão para o módulo de amolecimento discreto pode ser deduzida a partir da energia consumida durante a formação da descontinuidade forte, que fisicamente equivale ao surgimento de microfissuras. Portanto, o módulo de amolecimento discreto, H^* , se relaciona diretamente com a energia de fratura, G_f , que são propriedades físicas dos materiais, por definição. No Apêndice (seção A.6) é obtida a expressão para o caso de lei de amolecimento exponencial: $H^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q$ (equação A.21).

5.3.2 Condição para Descontinuidade Forte

Para um ponto sobre a superfície de descontinuidade \mathcal{S} , desenvolvendo a expressão do tensor de tensões no regime de descontinuidade forte $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^{\mathcal{S}}$ (eq. A.2), e considerando a expressão da variável interna do tipo deformação $r_{\mathcal{S}} = r_{SD} + \frac{1}{h} \Delta\alpha$ (eq. A.5), pode-se escrever:

$$\frac{\Delta\alpha}{q_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \left(\Delta[[u_k]] n_l + \Delta[[u_l]] n_k \right) = \frac{\Delta\alpha}{q_{\mathcal{S}}} \epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef} \quad (5.22)$$

onde $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef} := E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = (1 - D) \epsilon_{ij}$ é a chamada deformação efetiva. Na equação 5.22, o caráter finito de $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$ faz com que $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef}$ também tenha essa característica.

A equação 5.22 relaciona componentes de tensão (ou deformação efetiva) em \mathcal{S} , com saltos de deslocamentos $[[u_i]]$. Conforme detalha Oliver (1996), em uma base ortonormal de vetores unitários $\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$, sendo \mathbf{n} normal à superfície \mathcal{S} ; \mathbf{p}, \mathbf{q} tangenciando \mathcal{S} (figura 5.1), a equação 5.22 pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \Delta[[u_n]] & \frac{1}{2}\Delta[[u_p]] & \frac{1}{2}\Delta[[u_q]] \\ \frac{1}{2}\Delta[[u_p]] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta[[u_q]] & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta\alpha}{q^{\mathcal{S}}} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{np}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{nq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{pn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{qn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qq}^{\mathcal{S},ef} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Com a simetria do tensor de deformações, observa-se que das seis equações algébricas, três delas já estão contempladas nas equações constitutivas (eq. 5.21b). As demais equações (correspondentes aos termos nulos da matriz à esquerda) são chamadas *equações de descontinuidade forte* (Oliver et al., 1998). Assim, a condição para a superfície \mathcal{S} representar uma superfície de descontinuidade de deslocamentos é que em qualquer instante $t \geq t_{SD}$ se tenha:

$$\epsilon_{pp}^{ef} = \epsilon_{qq}^{ef} = \epsilon_{pq}^{ef} = \epsilon_{qp}^{ef} = 0 \quad (5.24)$$

Conforme observa Peixoto et al. (2018), para o caso bidimensional, o regime de descontinuidade forte terá início imediatamente após a bifurcação apenas se o módulo de amolecimento for nulo neste instante ($H^{crit} = 0$), o que raramente acontece, ressaltando a adequação do modelo com transição para simulações de falhas materiais mais coerentes. O mesmo é válido para o caso tridimensional, como mostra Chaves (2003) de forma geral.

5.4 Descontinuidade Fraca e Forte – O Modelo de Banda Variável

Entende-se que o regime de descontinuidade forte tem início assim que estejam atendidas as condições para seu estabelecimento (equações 5.23 e 5.24). Isso pode se dar tão logo ocorra a localização de deformação (ponto de bifurcação), ou após uma transição pelo regime de descontinuidade fraca. Independente do tipo de descontinuidade, após estabelecida a localização de deformações, a cinemática regularizada é adotada. O modelo de

banda variável, apresentado em Oliver et al. (1999), estabelece que no caso de descontinuidade fraca, a espessura da banda de localização, determinada pela variável h , tem valor finito no instante da bifurcação, definido como h_B . Essa espessura de banda deve evoluir de h_B até um valor nulo (h_{SD}), que indica o estabelecimento do regime de descontinuidade forte. Em termos numéricos adota-se $h_{SD} = k \approx 0$, onde k é um parâmetro arbitrariamente pequeno. A figura 5.6 ilustra o mecanismo de formação de descontinuidade idealizado em um problema hipotético. As tonalidades de cinza descrevem o nível de degradação do material, observando-se que evoluem apenas no interior da banda.

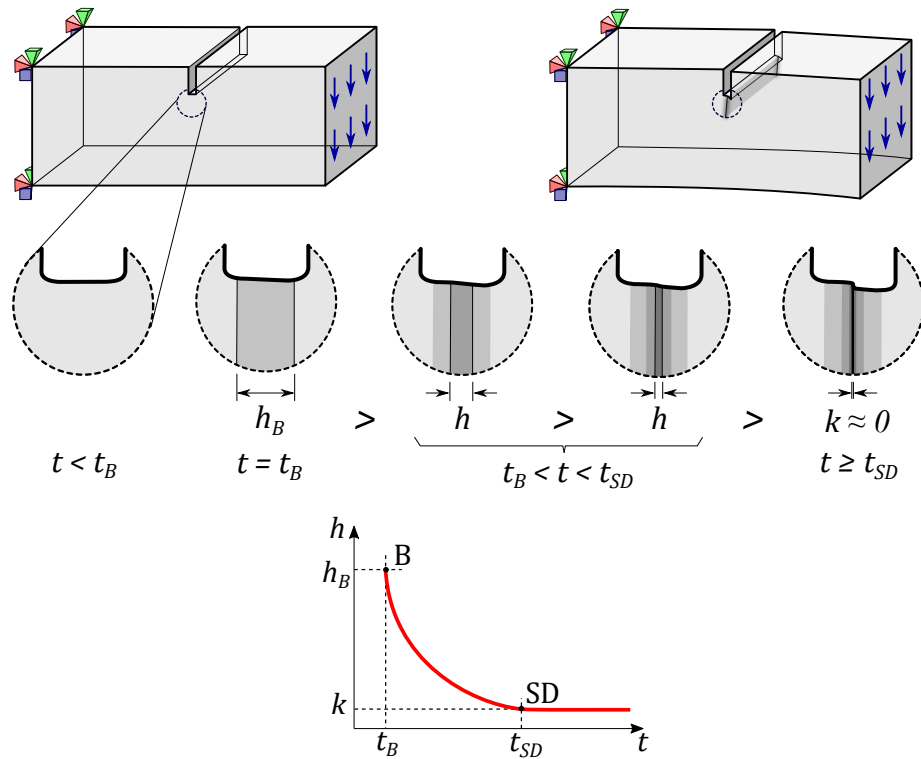


Figura 5.6: Modelo idealizado de transição – evolução da espessura da banda de localização em relação ao tempo t , do instante da bifurcação até o início do regime de descontinuidade forte.

A lei que estabelece a variação da espessura da banda e as leis de amolecimento que caracterizam cada regime são apresentadas nessa seção.

5.4.1 Regime de Descontinuidade Fraca

Ocorrida a localização de deformação e não se configurando as condições para o estabelecimento de descontinuidade no campo de deslocamentos (descontinuidade forte), tem

início o regime transitório com descontinuidade fraca. Para caracterizar o comportamento estrutural nesse regime é necessário se definir uma lei de variação da espessura da banda de localização, bem como uma lei de amolecimento que retrate a perda de rigidez do material. Configurado o regime de descontinuidade fraca, a lei de amolecimento deve ser aquela definida para o modelo coesivo, de acordo com a estrutura do módulo de amolecimento coesivo escolhida.

Lei de Variação da Banda de Localização

É necessário estabelecer uma lei que defina a variação de h entre o início da bifurcação, quando se tem $h = h_B$, até o início da configuração de continuidade forte, quando $h = k \approx 0$. A espessura da banda de localização num instante após a bifurcação é obtida observando que na equação do módulo de amolecimento coesivo, $H^* = H/h$ (equação 5.21f), as variáveis envolvidas são função de $q(r)$. Assim, pode-se definir teoricamente:

$$h_B = \left| \frac{H(q_B)}{H^*(q_B)} \right| \quad (5.25)$$

sendo a espessura inicial da banda $h_B = h(q(r_B))$. A classificação da lei de amolecimento pode ser feita, a partir desse instante, com referência ao modelo coesivo, a partir de expressões do módulo de amolecimento obtidas de parâmetros dos materiais (equações A.20 e A.21).

Adota-se aqui uma lei de variação linear em relação à variável interna do tipo tensão, conforme apresentado, por exemplo, em Manzoli et al. (1998). Alternativamente, outras formas poderiam ser consideradas (Oliver et al., 1999). Com h_B , a equação de variação da espessura da banda é definida como:

$$h(q) = \begin{cases} R(q - q_{SD}) + k & , \text{ para } q_B \leq q < q_{SD} \text{ (transição)} \\ k & , \text{ para } q \geq q_{SD} \text{ (descontin. forte)} \end{cases} \quad (5.26)$$

onde:

$$R = \frac{h_B - k}{q_B - q_{SD}} ; \quad q_{SD} = \bar{\beta}q_B \mid (0 < \bar{\beta} < 1) \quad (5.27)$$

A figura 5.7 ilustra essa variação, observando que na figura a trajetória é contrária ao sentido de crescimento de q (de **B** para **SD**). Ressalta-se que o valor de h é limitado

inferiormente por um parâmetro de regularização k de pequeno valor, ao invés de zero, por propósitos computacionais.

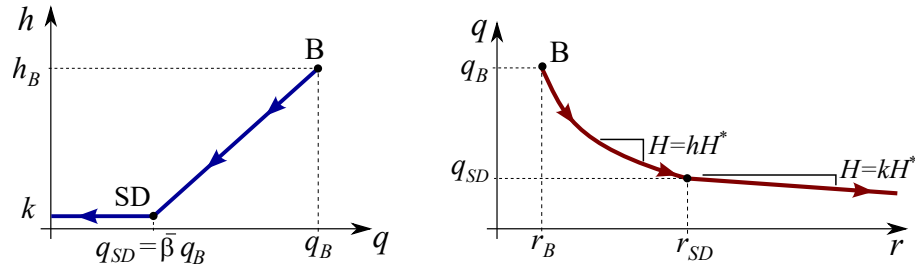


Figura 5.7: Evolução da espessura da banda de localização, e módulo de amolecimento.

Em relação ao parâmetro $\bar{\beta}$, que define o valor da variável interna relacionado ao ponto de continuidade forte, foi adotado um valor arbitrário, por simplificação. O valor arbitrado para o parâmetro é um dos fatores que determina o tempo em que uma determinada região do sólido permanecerá em regime de descontinuidade fraca. Como o processo de amolecimento continua em progresso, pode ocorrer ativação de descontinuidade na vizinhança, antes que esta região evolua para regime de descontinuidade forte. Assim, a repetição desse processo pode determinar o crescimento, da região microfissurada (descontinuidade fraca) da zona de processo de fratura (ZPF – figura 1). A adoção de valor muito elevado de $\bar{\beta}$ implica em transição mais rápida entre regimes (descontinuidade fraca e forte), resultando em ZPF menos extensa, enquanto valor muito pequeno de $\bar{\beta}$ implica em transição mais lenta entre regimes, e conseqüentemente, uma maior ZPF. No Capítulo 7 (seção 7.6) esse tema é novamente abordado, com exemplo prático.

Lei de Amolecimento

Na sequência, descreve-se a obtenção da lei de amolecimento exponencial, em contrapartida à lei adotada no modelo contínuo descrita no final da seção 2.2. Consideram-se a relação entre os módulos de amolecimento dos modelos contínuo e coesivo, $H(q) = H^*(q)h(q)$, a equação 2.17 que estabelece $H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = q'(r)$ e também a expressão do módulo de amolecimento discreto obtida especificamente para a lei de amolecimento exponencial $H^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q$ (equação A.21). Pode-se escrever, a partir das equações 5.26 e 5.27, a

equação diferencial ordinária a seguir:

$$H = q'(r) = aq^2 + bq \quad (5.28)$$

onde $a = -\frac{f_t R}{G_f \sqrt{E}}$, e $b = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}(k - Rq_{SD})$.

A solução da equação 5.28 é dada por:

$$q(r) = b \left[-a + \left(\frac{b + aq_B}{q_B} \right) e^{b(r_B - r)} \right]^{-1} \quad (5.29)$$

o que corresponde a

$$D(r) = 1 - \frac{b}{r} \left[-a + \left(\frac{b + aq_B}{q_B} \right) e^{b(r_B - r)} \right]^{-1}, \quad \text{se } r_B < r < r_{SD} \quad (5.30)$$

onde, da equação 5.29,

$$r_{SD} = r_B - \frac{1}{b} \ln \left[\frac{q_B}{q_{SD}} \left(\frac{b + aq_{SD}}{b + aq_B} \right) \right] \quad (5.31)$$

5.4.2 Regime de Descontinuidade Forte

A condição para o estabelecimento do regime de descontinuidade forte deve ser verificada constantemente, a partir do instante em que ocorre a bifurcação. Estabelecido o regime de descontinuidade forte, passam a vigorar as leis de amolecimento específicas para esse regime.

Lei de Amolecimento

Na sequência, descreve-se a obtenção da lei de amolecimento exponencial, em contrapartida à lei adotada no modelo contínuo (eq. 2.18 - 2.20), e no regime de descontinuidade fraca (eq. 5.29 - 5.31). Consideram-se novamente a relação $H(q) = H(q) * h(q)$, a equação 2.17 que estabelece $H(r) = q'(r)$ e também a expressão do módulo de amolecimento discreto obtida especificamente para a lei de amolecimento exponencial $H^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q$ (equação A.21).

Sendo $h = k$ durante todo o regime de descontinuidade forte (ver figura 5.7), pode-se escrever a equação diferencial ordinária seguinte:

$$H = q'(r) = -aq \quad (5.32)$$

onde $a = \frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}}$. Resolvendo a equação 5.32 obtém-se

$$q(r) = q_{SD} e^{a(r_{SD}-r)} \quad (5.33)$$

o que resulta em

$$D(r) = 1 - \frac{q_{SD}}{r} e^{a(r_{SD}-r)}, \quad \text{se } r > r_{SD} \quad (5.34)$$

sendo r_{SD} dada na equação 5.31.

Capítulo 6

Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades

São apresentados neste capítulo as adaptações necessárias ao MEC para generalização do tratamento de problemas com descontinuidades. Ter equações integrais para tratar problemas com descontinuidades, que sejam similares às equações utilizadas para problemas contínuos é uma vantagem, na adaptação e expansão de códigos para esta formulação alternativa. Na seção seguinte pode-se observar que é possível tratar problemas com descontinuidades utilizando formulação similar àquela que se utiliza para problemas contínuos, sendo necessárias poucas adaptações. As descontinuidades do modelo deverão ser incorporadas às células que discretizam o domínio do problema, tratando as descontinuidades nesse domínio controlado.

Dentre as principais adaptações, está a necessidade de se considerar a imposição de condição de equilíbrio interno na superfície de descontinuidade da célula, o que leva à obtenção numérica das componentes de salto dos deslocamentos a cada instante da análise. O algoritmo para a solução é apresentado, bem como novas equações para obtenção da tensão real em um dado estado de deformação, e o tensor constitutivo tangente associado. Ao final do capítulo, são descritas algumas alternativas de algoritmos de propagação de fissuras, técnica para introdução de células durante o processamento, e também considerações sobre as implementações computacionais realizadas.

6.1 Equações Integrais com Descontinuidades

Conforme apresentado na seção 5.2, a reformulação das equações cinemáticas permite considerar a distribuição dos efeitos da superfície descontínua sobre uma região finita arbitrária $\Omega_\varphi \in \Omega$.

A equação 5.18, que fornece os deslocamentos \dot{u}_i , é composta por uma parcela regular $\hat{\dot{u}}_i$ e outra que considera o salto referente à superfície \mathcal{S} . A equação 5.19 para deformações $\dot{\epsilon}_{ij}$ é composta por uma parcela regular $\hat{\dot{\epsilon}}_{ij}$, uma parcela $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$, limitada a Ω_φ e nula em $\Omega_\varphi \setminus \Omega$, e uma terceira parcela que contém a distribuição Delta de Dirac. Ambas são transcritas a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) &= \hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \\ \dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) &= \hat{\dot{\epsilon}}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi + \frac{\mu_\mathcal{S}}{2h} ([[\dot{u}_i]] n_j + [[\dot{u}_j]] n_i)\end{aligned}$$

Considerando a existência de descontinuidade, as equações de governo do problema (de equilíbrio, relação deslocamento-deformação, relação constitutiva e condições de contorno) devem ser acrescidas da condição de equilíbrio na face da descontinuidade \mathcal{S} . Assim, tem-se os seguintes resultados (análogos às equações 2.1):

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{eq. de equilíbrio interno}) \quad (6.1a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{eq. de compatib. cinemática}) \quad (6.1b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^\mathcal{S}(\dot{\epsilon}_{ij}) \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{eq. compatib. constitutiva}) \quad (6.1c)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{eq. compatib. constitutiva}) \quad (6.1d)$$

$$\dot{u}_i = \hat{\dot{u}}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{cond. contorno essenciais}) \quad (6.1e)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{cond. contorno naturais}) \quad (6.1f)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^- n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{contin. ext. forças de sup.}) \quad (6.1g)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^\mathcal{S} n_j = \dot{\sigma}_{ij}^- n_j - \dot{\sigma}_{ij}^\mathcal{S} n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{contin. int. forças de sup.}) \quad (6.1h)$$

onde $\sigma_{ij}^\mathcal{S}(\epsilon_{ij})$ representa uma relação constitutiva contínua apropriada, como a descrita no Capítulo 2. Os termos σ_{ij}^+ e σ_{ij}^- referem-se, respectivamente, às tensões em Ω^+ e Ω^- (de um lado ou de outro da superfície de descontinuidade, ver figura 5.4). As equações

complementares de equilíbrio acrescentadas, 6.1g e 6.1h, estão associadas à continuidade das forças de superfície. A equação de compatibilidade de deformações 6.1b corresponde à equação 5.19 para Ω , transcrita no início da seção. Considera-se o regime elástico linear para o domínio $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Tendo em vista a função $\varphi(\mathbf{X})$ definida *a priori* (equação 5.17), e a direção normal à superfície sendo fixa, assumindo-se uma superfície material \mathcal{S} estabelecida, pode-se escrever as relações de compatibilidade constitutivas como funções do salto de deslocamentos e da parte regular limitada das deformações (aplicação da equação 5.19 em 6.1c e 6.1d).

Assim:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}, [\dot{u}_i], [\dot{u}_{i,j}]) \quad (6.2)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} = E_{ijkl}^o \left[\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}([\dot{u}_i], [\dot{u}_{i,j}]) \right] \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^{\circ} - \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi} \quad (6.4)$$

podendo-se também escrever a equação 6.4 como $\dot{\epsilon}_{kl}^{\circ} = \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}$, na forma similar à sua correspondente (equação 3.2).

A formulação integral do problema de valor de contorno pode ser obtida utilizando a técnica dos resíduos ponderados. Alternativamente, utiliza-se as expressões do teorema de Betti (equações 3.12 e 3.13), como feito na seção 3.3. Neste caso, assim como feito anteriormente (para equação 3.14), é necessária adaptação devido à natureza elástica do teorema, através da consideração de termo extra às expressões, proveniente da relação, $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{kl}^{\circ} - \dot{\epsilon}_{ij}^{\varphi}$. Assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{kl}^{\circ} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^{\varphi} d\Omega \quad (6.5)$$

Considerando-se também a definição de força de volume, as simetrias associadas ao regime de pequenas deformações em meios isotrópicos $\dot{\epsilon}_{kl}^{\circ} = \dot{u}_{k,l}$ (válidas se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), e a expressão do segundo teorema de Betti, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) P_i &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) t_j(\mathbf{X}) P_i d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) P_i d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) P_i d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^{\varphi}(\mathbf{X}) P_i d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Essa expressão é notadamente similar à equação 3.17, considerando-se a correspondência entre os termos utilizados para meios contínuos e meios com descontinuidades, conforme a tabela 6.1 a seguir:

Tabela 6.1: Correspondência entre termos de equações.

Meios Contínuos Convencionais	Meios com Descontinuidades
u_i	\hat{u}_i
ϵ_{ij}	$\hat{\epsilon}_{ij}$
ϵ_{ij}^o	ϵ_{ij}^φ

As equações integrais são resumidas a seguir: equações de deslocamentos de pontos internos, equação integral de contorno para deslocamentos, e equações para deformações internas. As considerações de singularidades feitas para as equações correspondentes no Capítulo 3 são também válidas aqui.

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_k(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Com efeito, as equações integrais apresentadas não definem de modo completo o problema de valor de contorno com a presença da descontinuidade, uma vez que não foi contemplada a condição de equilíbrio na face da descontinuidade \mathcal{S} , representada pelas equações 6.1g e 6.1h. Essa condição de equilíbrio/continuidade deve então ser imposta à parte. Partindo da condição de equilíbrio descrita na análise de descontinuidade forte pelas equações 5.20, substituindo nestas, as equações 6.2 e 6.3, obtém-se uma expressão instantânea para o

equilíbrio na superfície de descontinuidade, f_i , que deve se anular:

$$f_i = \left\{ E_{ijkl}^o [\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket, \llbracket u_{i,j} \rrbracket)] - \sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\epsilon_{ij}) \right\} = 0 \quad (6.10)$$

sendo da equação 5.19 (transcrita no início desta seção), obtidas as deformações ϵ_{ij} para pontos sobre a superfície \mathcal{S} em um instante t , como:

$$\epsilon_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket, \llbracket u_{i,j} \rrbracket) + \frac{1}{2h} (\llbracket u_i \rrbracket n_j + \llbracket u_j \rrbracket n_i) \quad (6.11)$$

6.2 Formulação Implícita no MEC com Descontinuidades

As formas discretas das equações integrais de contorno, apresentadas no Capítulo 4 (equações 4.12, 4.19 e 4.26), permanecem válidas para o caso do modelo com descontinuidades, bem como as equações matriciais e estratégia de solução não linear. Basta que as substituições dos termos u_i , ϵ_{kl} e ϵ_{kl}^o , pelos seus correspondentes, conforme tabela 6.1, sejam feitas.

Exceção para a seção 4.2 (Células Convencionais), pois as células agora devem trazer incorporadas a elas, as particularidades do modelo com descontinuidades. No interior destas células, deverão ser observadas as condições de equilíbrio da interface descontínua descritas na equação 6.10. Pode-se adotar uma função de aproximação que considera que as componentes do salto de deslocamento $\llbracket u_i \rrbracket$ são constantes dentro de cada célula (saltos de deslocamento uniformes), e portanto $\llbracket u_{i,j} \rrbracket = 0$. Assim sendo, as deformações ϵ_{ij}^{φ} são reduzidas a $\epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket)$, e dada uma deformação regular $\hat{\epsilon}_{ij}$, as equações 6.10 e 6.11 passam a ser função apenas das componentes do salto de deslocamento, podendo-se escrever $f_i \equiv f_i(\llbracket u_i \rrbracket) = 0$. A obtenção de $\llbracket u_i \rrbracket$ é feita resolvendo-se esta equação numericamente pelo método de Newton, após linearização.

Obtendo o valor do salto nos deslocamentos (da equação 6.10), pode-se determinar $\epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket)(\hat{\epsilon}_{ij})$, e então, para deformações regulares $\hat{\epsilon}_{ij}$, estabelecer uma equação constitutiva regularizada:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\hat{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} \left(\hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket)(\hat{\epsilon}_{ij}) \right) = E_{ijkl}^o (\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^{\varphi}) \quad (6.12)$$

6.3 Células com Descontinuidade Incorporada

A discretização do domínio do sólido deve ser feita para abranger regiões com comportamento inelástico e também para compor o subdomínio Ω_φ (figura 5.4), que envolve a superfície de descontinuidade na formulação regularizada, conforme definido no final da seção 5.2.

Nas células adotadas, um ponto de colocação (nó funcional) é definido em seus centróides, de modo que as deformações iniciais são consideradas constantes em cada célula, e os demais nós são considerados apenas geométricos. Sendo assim, nas células com descontinuidade embutida, para um ponto $\mathbf{X} \in \Omega_\varphi$ pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{22}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{33}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{12}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{13}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{23}^\varphi(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{22}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{33}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{12}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{13}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{23}^{\varphi,c} \end{pmatrix} = \left\{ \dot{\epsilon}^{\varphi,c} \right\} \quad (6.13)$$

A superfície de descontinuidade divide a célula em dois subdomínios, conforme a figura 6.1. Enquanto $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$ têm valor constante nas células, definidas por um único ponto, sua geometria é descrita através de funções de forma paramétricas convencionais, conforme apresentado na seção 4.2, *i.e.*, $x_i(\mathbf{X}) \approx x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{\alpha=1}^{n_c} M^\alpha(\eta_1, \eta_2, \eta_3) x_i^\alpha$.

As funções de regularização das equações cinemáticas, $\varphi(\mathbf{X})$, também podem ser mapeadas dentro de uma célula com descontinuidade, utilizando as funções de forma, com a seguinte expressão:

$$\varphi(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) = \sum_{\varphi^+} M^{\alpha^+}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \quad (6.14)$$

onde o somatório é realizado sobre as funções de interpolação associadas aos nós localizados no domínio Ω_c^+ da célula. A figura 6.1(b) ilustra, a classificação desses nós geométricos.

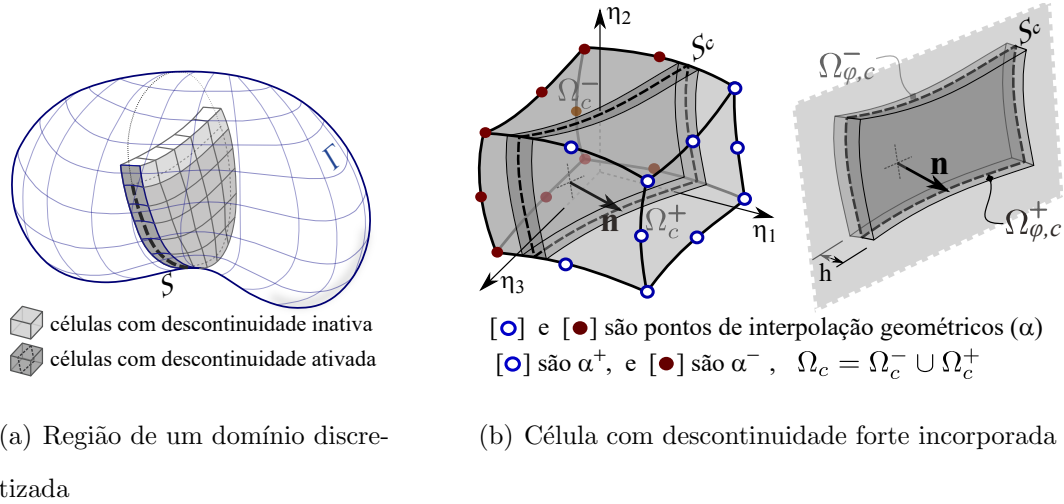


Figura 6.1: Parametrização cartesiana, espaço de parametrização e forma da função.

As componentes do salto de deslocamento também são assumidas como constantes dentro de cada célula com descontinuidade, tendo-se assim:

$$[[u_i]](\mathbf{X}) \approx [[u_i^c]] = \begin{Bmatrix} [[u_1^c]] \\ [[u_2^c]] \\ [[u_3^c]] \end{Bmatrix} = \{[[u^c]]\}, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_c \quad (6.15)$$

e, conseqüentemente, $[[u_{i,j}]](\mathbf{X}) = 0$.

6.3.1 Cálculo das Componentes do Salto de Deslocamentos

Conforme descrito na seção 6.2 as componentes do salto de deslocamentos (constante) no interior de uma célula, são obtidas através da solução da equação de equilíbrio da interface (eq. 6.10) por método numérico, após linearização. No final da subseção é apresentado um algoritmo para essa solução numérica iterativa de Newton-Raphson.

Considera-se inicialmente o gradiente da função regularizadora, $\varphi(\mathbf{X})$, obtida a partir da equação 6.14):

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial M^\alpha}{\partial \eta_k} X_i^\alpha \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} = \left(\frac{\partial M^\alpha}{\partial \eta_k} X_i^\alpha \right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_k} \left(\sum_{\alpha^+} M^{\alpha^+} \right) \right] \quad (6.16)$$

Ou, na forma matricial, aplicada ao ponto de colocação da célula ξ^c , tem-se:

$$\{\nabla \varphi(\xi^c)\} = [J(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c}, \eta_3^{\xi^c})]^{-1} \{\nabla_\xi \varphi(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c}, \eta_3^{\xi^c})\} \quad (6.17)$$

onde $\eta_i^{\xi^c}$ referem-se às coordenadas naturais do ponto de colocação da célula (centroide da célula), a matriz $[J(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c}, \eta_3^{\xi^c})]$ corresponde àquela definida na equação 4.9 e $\{\nabla_{\xi}\varphi(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c}, \eta_3^{\xi^c})\}$ é o vetor definido pelo termo entre colchetes na equação 6.16.

Retornando, agora à equação 5.19 para deformações, e considerando as componentes de salto dentro da célula (equação 6.15), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^{\varphi}(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{22}^{\varphi}(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{33}^{\varphi}(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{12}^{\varphi}(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{13}^{\varphi}(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{23}^{\varphi}(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \{\epsilon^{\varphi,c}\} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1}(\xi^c) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{,2}(\xi^c) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{,3}(\xi^c) \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2}(\xi^c) & \frac{1}{2}\varphi_{,1}(\xi^c) & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi_{,3}(\xi^c) & 0 & \frac{1}{2}\varphi_{,1}(\xi^c) \\ 0 & \frac{1}{2}\varphi_{,3}(\xi^c) & \frac{1}{2}\varphi_{,2}(\xi^c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1^c \rrbracket \\ \llbracket u_2^c \rrbracket \\ \llbracket u_3^c \rrbracket \end{Bmatrix} = [\nabla^s\varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\} \quad (6.18)$$

Assim, a equação de equilíbrio da superfície de descontinuidade (eq. 6.10) pode ser escrita de forma matricial, considerando as equações 6.15, 6.17 e 6.18, como

$$\begin{aligned} \{f\} = [\bar{N}^c]^T \left([E^o]\{\hat{\epsilon}^c\} - [E^o][\nabla^s\varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\} \right. \\ \left. - \left\{ \sigma^S \left(\{\hat{\epsilon}^c\} - [\nabla^s\varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\} + \frac{1}{h}[N^c]\{\llbracket u^c \rrbracket\} \right) \right\} \right) = \{0\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde $[E^o]$ é a matriz constitutiva linear elástica, correspondente ao tensor E_{ijkl}^o ; o parâmetro h é o valor escalar (pequeno) de regularização da função delta de Dirac; o vetor $\{\sigma^S(\cdot)\}$, corresponde às tensões fornecidas pelo modelo constitutivo adotado para representar os efeitos da descontinuidade, com variável de dano apropriada ao regime de descontinuidade fraca ou forte; e complementando,

$$[\bar{N}^c]^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix}; \quad [N^c] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ \frac{1}{2}n_2 & \frac{1}{2}n_1 & 0 \\ \frac{1}{2}n_3 & 0 & \frac{1}{2}n_1 \\ 0 & \frac{1}{2}n_3 & \frac{1}{2}n_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Assim, dado um estado de deformações regulares, $\{\hat{\epsilon}^c\}$, a equação 6.19 pode então ser resolvida a partir de sua linearização, *i.e.*,

$$\{f\}_{j-1} + \left[\frac{\partial\{f\}}{\partial\{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1} \{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j \approx 0 \quad (6.21)$$

onde j é um índice iterativo, $\{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_j - \{\llbracket u^c \rrbracket\}_{j-1}$, e

$$\left[\frac{\partial\{f\}}{\partial\{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1} = [\bar{N}^c]^T \left[-[E^o][\nabla^s \varphi] - \left[\frac{\partial\sigma^S}{\partial\epsilon} \right]_{j-1} \left[\frac{1}{h}[N^c] - [\nabla^s \varphi] \right] \right] \quad (6.22)$$

sendo o termo $\left[\frac{\partial\sigma^S}{\partial\epsilon} \right]$ a forma matricial do operador tangente do modelo constitutivo contínuo (ver equação 2.24), usado para representar os efeitos dissipativos sobre a superfície de descontinuidade \mathcal{S} . A verificação de convergência da solução iterativa é feita comparando-se, em uma iteração j , o acréscimo do saldo de deslocamento da iteração $\{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j$, com o valor total acumulado $\{\llbracket u^c \rrbracket\}_j$, em relação a um valor de tolerância arbitrada (adotado aqui tolerância de 1×10^{-4}), *i.e.*,

$$\frac{\|\{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j\|}{\|\{\llbracket u^c \rrbracket\}_j\|} > \textit{tolerância} \quad (6.23)$$

O algoritmo apresentado no quadro a seguir sistematiza os procedimentos para o cálculo do salto nos deslocamentos $\{\llbracket u^c \rrbracket\}$ dentro de uma célula com descontinuidade embutida.

ALGORITMO 2: Solução da equação de equilíbrio da interface

- i. Inicialize $j = 0$, e inicialize o vetor $\{\llbracket u^c \rrbracket\}_{j=0}$ com o valor acumulado até a última avaliação das componentes do salto de deslocamentos da célula;
- ii. Loop iterativo: $j = j + 1$;
- iii. Se $(j > n^0 \text{ máximo de iterações especificado}) \Rightarrow \text{FIM}$
- iv. Calcule $\{f\}_{j-1}$ (eq. 6.19), e $\left[\frac{\partial\{f\}}{\partial\{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1}$ (eq. 6.22);
- v. Calcule $\{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j$, usando resultados do item **iv.**, na equação 6.21;
- vi. Atualize o valor das componentes do salto: $\{\llbracket u^c \rrbracket\}_j = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_{j-1} + \{\delta\llbracket u^c \rrbracket\}_j$
- vii. Verifique a convergência da iteração (eq. 6.23):
 - não havendo convergência, retorne ao item **ii.**, para próxima iteração;
 - havendo convergência: retorne o resultado $\{\llbracket u^c \rrbracket\} = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_j$.

O resultado obtido será utilizado para o cálculo das componentes de tensão regularizadas, $\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon}^c)\}$, conforme apresentado na subseção seguinte. Considerando a estratégia global de solução do problema não-linear (seção 4.5), essas componentes de tensão são utilizadas

no cálculo do vetor $\{F\}_j^i$ (eq. 4.45). Dentro do algoritmo de solução não-linear (ALGORITMO 1), corresponde aos procedimentos do item **xiii.**. Nota-se, portanto, que o algoritmo apresentado aqui (ALGORITMO 2), deverá ser acionado para cada célula do modelo que tenha a descontinuidade ativada, em cada iteração, de cada passo incremental da solução não-linear.

6.3.2 Equação Constitutiva Regularizada – Operador Tangente

A equação constitutiva regularizada (eq. 6.12) para uma célula com descontinuidade, apresentada no final da seção 6.2, pode ser escrita em forma matricial, utilizando a equação 6.18, como:

$$\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon}^c)\} = [E^o](\{\hat{\epsilon}^c\} - \{\epsilon^{\varphi,c}\}) = [E^o](\{\hat{\epsilon}^c\} - [\nabla^s \varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\}) \quad (6.24)$$

Para as etapas pós-bifurcação da análise não-linear, é necessária a definição de um tensor constitutivo tangente para a equação constitutiva regularizada, equivalente ao operador tangente definido para a formulação contínua (equação 2.24). Isso é feito tomando-se a derivada da equação 6.24, como segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \hat{\epsilon}^c} \right] &= [E^o] \left([I] - \left[\frac{\partial \{\epsilon^{\varphi,c}\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^c\}} \right] \right) \\ &= [E^o] \left([I] - \left[\frac{\partial \{\epsilon^{\varphi,c}\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right] \left[\frac{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}}{\partial \{f\}} \right] \left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^c\}} \right] \right) \\ &= [E^o] \left([I] - [\nabla^s \varphi] \left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]^{-1} [\bar{N}^c]^T \left([E^o] - \left[\frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.3.3 Consistência Estática e Cinemática

Estudos sobre elementos com descontinuidade incorporada, tratando majoritariamente de elementos finitos, avaliaram questões relativas à consistência da descrição do campo de deformações e também das forças de superfície na interface de descontinuidade do elemento, como se pode observar em Jirásek (2000), Oliver et al. (2003), Sancho et al. (2007) e Pedrini (2008). Assim como nesta última referência, as considerações aqui se estendem para células do MEC.

Considerando as células com descontinuidade incorporada, destacam-se nas equações da

seção 6.3, o vetor n_i , relacionado à orientação da superfície de descontinuidade, e à condição de equilíbrio e continuidade de forças de superfície (equações 6.1f - 6.1h), e portanto, associado à consistência estática. Destaque também para o vetor $\varphi_{,i}$, gradiente da função φ empregada na composição do campo de deformações $\{\epsilon^{\varphi,c}\}$, sendo assim associado à consistência cinemática. O gradiente da função φ , assim como o termo associado à matriz Jacobiana no ponto de colocação da célula, $[\nabla^s \varphi]$, dependem da geometria da célula e também da posição da superfície de descontinuidade.

Na forma linearizada da equação de equilíbrio da superfície de descontinuidade (eq. 6.21), o termo $\left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{[u^c]\}} \right]$ (eq. 6.22, transcrita a seguir), apresenta influência direta dos vetores citados, nos termos $[\bar{N}^c]^T$, $[N^c]$ (eq. 6.20) e $[\nabla^s \varphi]$ (eq. 6.18).

$$\left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{[u^c]\}} \right] = -[\bar{N}^c]^T [E^o] [\nabla^s \varphi] - \frac{1}{h} [\bar{N}^c]^T \left[\frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right] [N^c] + [\bar{N}^c]^T \left[\frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right] [\nabla^s \varphi]$$

A simetria do tensor $\frac{\partial \{f\}}{\partial \{[u^c]\}}$ só ocorre para os casos em que os vetores n_i e $\varphi_{,i}$ são paralelos, o que em geral, não se verifica (ver figura 6.2a,b). Essa assimetria usualmente constatada, acaba por se transferir para a matriz do operador tangente, da equação 6.25, como ressalta Sancho et al. (2007). Células (ou elementos) com essa abordagem são nomeados: estática e cinematicamente consistentes, e não-simétricas, ou SKON (“statically and kinematically optimal nonsymmetric”) (Jirásek, 2000).

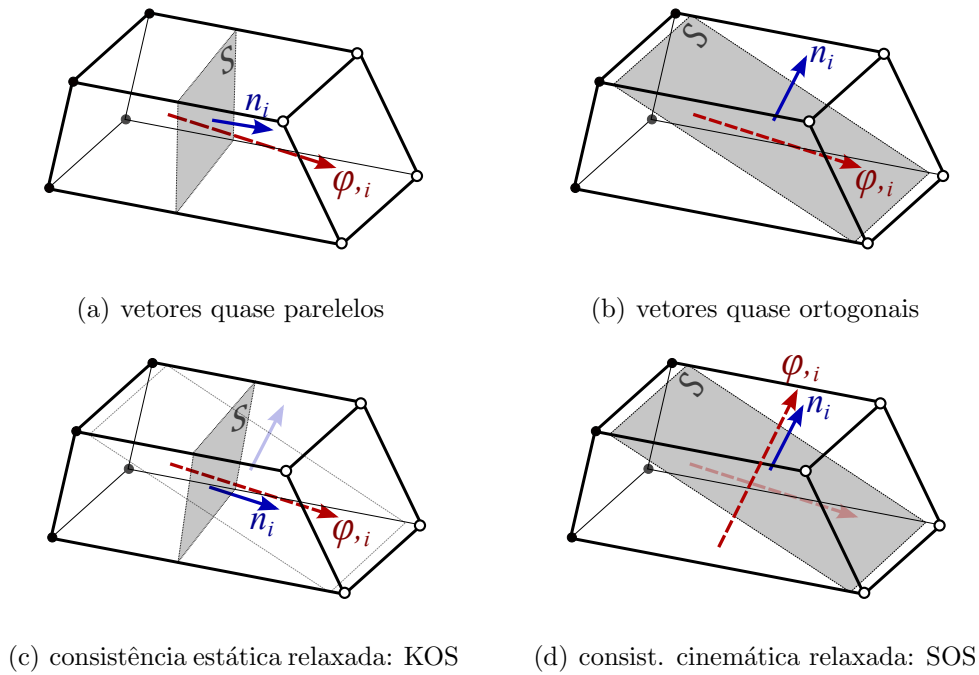


Figura 6.2: Célula com descontinuidade incorporada: normal n_i à superfície de descontinuidade \mathcal{S} , e gradiente de φ .

A estabilidade na resolução do sistema (eq. 6.21) pode ser influenciada por essa assimetria citada ($n_i \nparallel \varphi_{,i}$). Em caso extremo, poderia-se ter $n_i \perp \varphi_{,i}$, fazendo o tensor $\frac{\partial\{f\}}{\partial\{[u^c]\}}$ tender à singularidade. Com base na aproximação quase-simétrica proposta por Pedrini (2008), entende-se que os problemas de instabilidade são críticos caso o ângulo entre os vetores seja grande (superiores a 45°).

Formulações simétricas alternativas propõem a relaxação de uma das exigências de consistência, forçando $n_i \parallel \varphi_{,i}$, trazendo simetria a $\frac{\partial\{f\}}{\partial\{[u^c]\}}$ (e ao operador tangente). Prevalecendo condição cinemática sobre a estática, *i.e.*, arbitrando n_i coincidente, ou próximo à $\varphi_{,i}$ (fig. 6.2(c)), tem-se uma célula (ou elemento) dita estaticamente consistente e simétrica, ou KOS (“kinematically optimal symmetric”). Nesse caso, o movimento de corpo-rígido entre as duas partes separadas pela descontinuidade é garantida, mas não se garante a continuidade das forças de superfície. Já no caso de se priorizar a condição estática sobre a cinemática, *i.e.*, arbitrando $\varphi_{,i}$ coincidente, ou próximo à n_i (fig. 6.2(d)), tem-se uma célula dita cinematicamente consistente e simétrica, ou SOS (“Statically optimal symmetric”) pela nomenclatura de Jirásek (2000).

A condição de simetria das formulações alternativas reduzem problemas de instabilidade numérica, mas os efeitos colaterais dessas formulações alternativas são principalmente a perda de qualidade dos resultados, e consideráveis travamentos de tensão, como apontam todos as referências citadas.

As questões relativas à consistência são de considerável importância para o caso de células (ou elementos) com posicionamento geométrico pré-definido de modo independente da trajetória da trinca. Nas abordagens mais recentes do MEC-CSDA, pode-se fazer a geração das células em tempo de processamento, procurando um alinhamento adequado entre a superfície de descontinuidade e a geometria das células. Assim, pode-se assegurar as condições de consistência e obter uma condição de quase-simetria (n_i e $\varphi_{,i}$ parcialmente alinhados), o que diminui os possíveis problemas de instabilidade numérica sem a necessidade de relaxação das exigências de consistência. Essa estratégia foi adotada com algoritmos de propagação propostos nos trabalhos de Pedrini (2008) e de Peixoto (2016). Alternativamente, se for empregado um algoritmo de propagação, em que a trajetória completa é determinada previamente à avaliação da ocorrência de descontinuidades (*e.g.*, algoritmo de trajetória global (Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves, 2002)), as células são automaticamente posicionadas de modo a obter sempre a condição de quase-simetria.

6.4 Propagação de Fissuras

Em análise de falhas de sólidos utilizando o modelo de dano com descontinuidades fortes através do Método dos Elementos de Contorno, é necessária a discretização do domínio desse sólido utilizando células com descontinuidade incorporada para que seja possível considerar a propagação de uma fissura. Existem diversas estratégias para o tratamento da trajetória de propagação, que descreve a superfície de falha. Algumas estratégias mais comuns são descritas brevemente a seguir, podendo-se encontrar uma visão geral mais completa nos trabalhos de Jäger et al. (2008a) e Yun et al. (2019), direcionados para o MEF.

Algoritmo de Trajetória Fixa

Essa abordagem extremamente simples, consiste apenas em se verificar se o elemento (ou célula) vizinho a um elemento que está em regime descontínuo, tem as condições necessárias para o desenvolvimento da descontinuidade. Em caso positivo tem-se a propagação da falha. A trajetória de falha, e portanto a posição dos elementos (células) com descontinuidade embutidos, deve ser definida previamente.

Do ponto de vista computacional, é um algoritmo robusto e estável (Jäger et al., 2008a). Esta estratégia limita consideravelmente a aplicação das análises em problemas gerais, mas em contrapartida, elimina problemas de busca de trajetórias (que podem ser instáveis) e questões de geometria computacional, que podem tirar o foco de particularidades de metodologias em desenvolvimento.

Algoritmos de Trajetória Global

Também conhecido como Algoritmo do Campo Escalar, aqui a trajetória de toda a fissuração é estabelecida antes da avaliação da ocorrência de descontinuidade nos elementos. Proposta por Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves (2002), essa abordagem considera no sólido em análise, um problema auxiliar de potencial introduzindo incógnitas globais, cujo gradiente da solução descreve superfícies (ou trajetórias) equi-potenciais que podem ser artificialmente associados à potenciais superfícies de falha do problema mecânico de interesse.

O uso do algoritmo em problemas tridimensionais pode ser visto nos trabalhos de Chaves (2003) e Ibáñez (2006). Apesar do custo computacional de requerer a resolução adicional de um problema de valor de contorno, Jäger et al. (2008a) ressaltam como qualidades a estabilidade e a capacidade de lidar com problemas envolvendo fraturas múltiplas. Variações do algoritmo originalmente proposto podem ser vistas nos trabalhos de Manzoli et al. (2013), que otimizaram o algoritmo delimitando a região da análise inicial; e Annavarapu et al. (2016) e Riccardi et al. (2017), que identificaram possíveis imprecisões na definição da trajetória, e propuseram modificações, testadas para problemas planos.

A utilização dessa abordagem tem se mostrado eficiente para problemas que utilizam o MEF (e variações), mas não foi encontrada contrapartida do algoritmo utilizando o MEC.

Algoritmos de Trajetória Local e Não-local

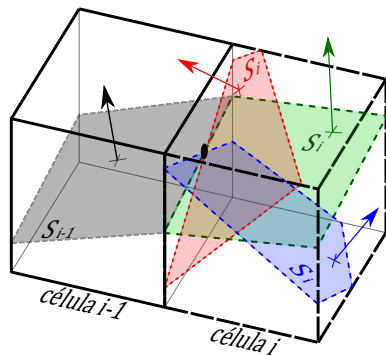
Em problemas bidimensionais, o algoritmo de trajetória local (a análise se faz célula a célula) é bem conhecido e fornece resultados robustos. Basicamente, determinada a direção de uma linha de fissura em um elemento (célula) inicial, no elemento vizinho a fissura já tem um ponto inicial definido, sendo necessário determinar uma direção em que se dará a descontinuidade nesse elemento seguinte, e repetindo-se o processo (elemento a elemento), garante-se uma continuidade C^0 à linha de fissura. Adaptações podem até mesmo garantir continuidade C^1 à linha de fissura, como apresentado por Slobbe et al. (2014), que considera uma correção à trajetória inicialmente encontrada para a descontinuidade no interior do elemento, antes fixá-la e passar ao elemento seguinte.

O algoritmo de trajetória não-local (ou de domínio parcial) pode ser visto no trabalho de Gasser e Holzapfel (2006) e Feist e Hofstetter (2007), por exemplo, em aplicação a problemas tridimensionais. O algoritmo define uma região em torno do elemento analisado e faz uma adaptação baseada nas direções das máximas tensões principais dos elementos englobados, garantindo uma superfície suave localmente (no domínio parcial), mas não em todo o domínio. Essa restrição de continuidade global não chega a comprometer os resultados, como verificaram Jäger et al. (2008b). A complexidade e custo computacional do algoritmo é um ponto desfavorável, e a superfície da fissura pode se desviar da trajetória real em casos específicos (Naderi e Iyyer, 2017).

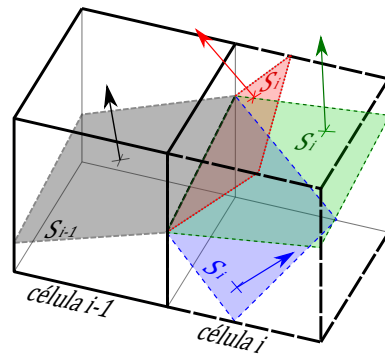
Nos trabalhos que utilizam o MEC associado à formulação de descontinuidade forte, versões próprias do algoritmo de trajetória local foram utilizadas (Manzoli e Venturini, 2004; Pedrini, 2008; Peixoto, 2016; Mendonça, 2021), em problemas de estado plano. Uma grande vantagem é a possibilidade de se gerar as células, que discretizam o domínio, durante a análise, conforme feito nos três últimos trabalhos.

Para problemas tridimensionais, entretanto, o algoritmo de trajetória local para problemas

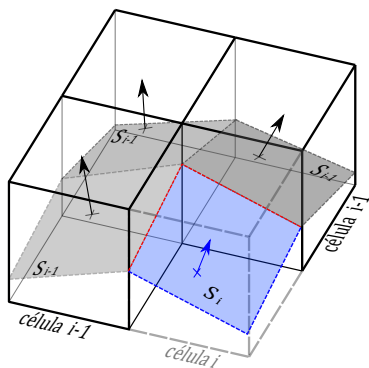
tridimensionais é bastante restritivo. Chaves (2003) resalta a dificuldade de se garantir a continuidade da superfície de descontinuidade entre elementos vizinhos. Ilustrando essa dificuldade, a figura 6.3 mostra como poderia ser a superfície de descontinuidade em uma célula (i), vizinha à célula ($i - 1$) que tem superfície já definida: se arbitrado um ponto em comum, não se garante a continuidade (fig. 6.3(a)), já forçando aresta comum, a nova superfície fica limitada, pré-definida ou até inviabilizada (figs. 6.3(b-d)).



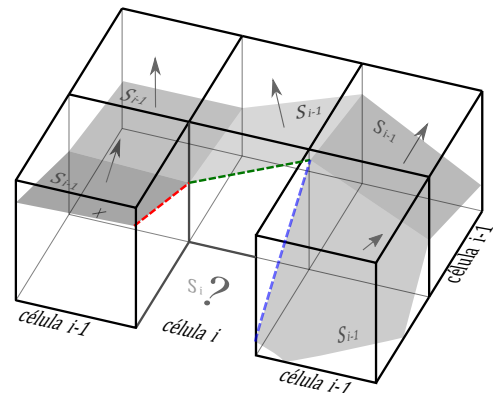
(a) forçado um ponto comum



(b) forçado uma aresta comum



(c) definida por células vizinhas



(d) superfície não-plana

Figura 6.3: Continuidade na propagação da superfície de descontinuidade em uma célula vizinha.

Apesar das limitações, Areias e Belytschko (2005) propuseram um algoritmo de propagação local para problemas tridimensionais utilizando o MEF Extendido e células tetraédricas. O algoritmo é fortemente restritivo na determinação da direção de propagação da superfície, mas garante a obtenção de superfície de descontinuidade com continuidade C^0 . Essa imposição da direção para garantir a continuidade é um tratamento totalmente local,

como ressalta Naderi e Iyyer (2017), que também faz uso dessa estratégia. A incapacidade de representar fraturas de geometrias pouco suaves é uma limitação levantada por Jäger et al. (2008b). Uma abordagem diferente proposta por Yun et al. (2019) considera linhas de propagação avaliadas individualmente, que avançam simultaneamente entre elementos vizinhos, e ao serem conectadas umas as outras, descrevem uma superfície com continuidade C^0 .

Introdução de células durante o processamento

Uma das particularidades do MEC implícito é a possibilidade de introduzir novas células no modelo (consequentemente, no sistema de equações), sem a necessidade de modificar a malha do contorno ou recalcular as integrais correspondentes a células e elementos existentes. Elas podem ser introduzidas, por exemplo, à medida que as descontinuidades são ativadas nas células já existentes. As novas células podem ter posição e geometria pré-definidas, como aconteceria ao utilizar os algoritmos de trajetória fixa e de trajetória global. As novas células podem também ter posicionamento e geometria definidas em tempo de processamento, por algoritmo específico. Isso torna possível gerar células geometricamente melhor compatibilizadas com as células já existentes e superfícies de descontinuidade ativadas, permitindo descrever a trajetória de propagação de fissura. Essa última alternativa é bastante adequada para uso com algoritmo de trajetória local.

Ao introduzir uma nova célula, um ponto interno posicionado em seu centróide é adicionado, e consequentemente, o sistema de vetores relacionados a deslocamentos e deformações deve ser expandido, respectivamente em $\{\hat{u}_N^\Omega\}$ e $\{\hat{\epsilon}_N\}$; $\{\hat{\epsilon}_N^\varphi\}$. De maneira similar, as matrizes que compõem os sistemas devem ser expandidas adequadamente, enquanto matrizes e vetores relativos somente ao contorno permanecem inalterados. A figura 6.4 ilustra, esquematicamente, como devem ser essas expansões, relativas às equações 4.33 a 4.35 na forma descontínua.

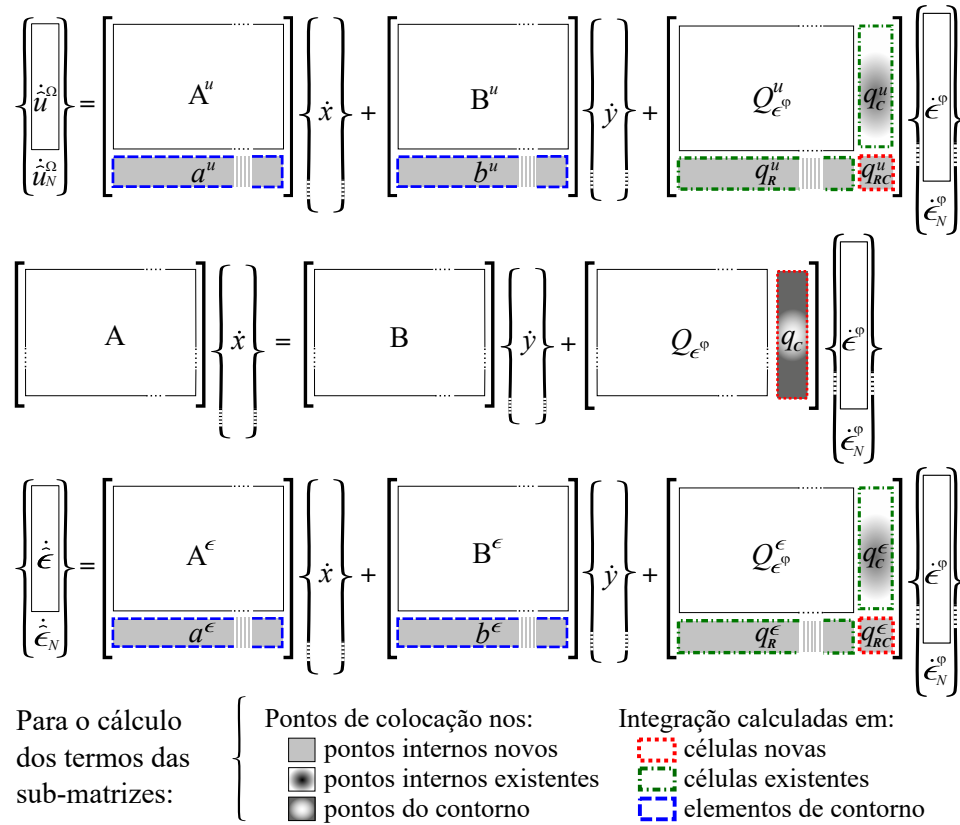


Figura 6.4: Expansões de matrizes e vetores dos sistemas de equações da análise não-linear do MEC implícito.

Como se observa, diferentes pontos de colocação e diferentes regiões de integração devem ser considerados na avaliação dos termos das novas sub-matrizes e os termos existentes nas matrizes não precisam ser recalculados. Outras expansões em matrizes do MEC implícito são necessárias, contemplando a equação 4.38 e suas componentes $[N^\epsilon]$ e $[M_{\epsilon^o}^\epsilon]$ na forma descontínua, conforme indicado na figura 6.5 esquematicamente.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N^\epsilon \\ n^\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^\epsilon \\ b^\epsilon \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} M_{\epsilon^p}^\epsilon & m_c^\epsilon \\ m_R^\epsilon & m_R^\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} \\ Q_{\epsilon^p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{\epsilon^p}^\epsilon & q_c^\epsilon \\ q_R^\epsilon & q_{RC}^\epsilon \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 6.5: Complemento das expansões de matrizes e vetores dos sistemas de equações da análise não-linear do MEC implícito.

6.5 Particularidades das Implementações

As implementações computacionais desse trabalho foram desenvolvidas no ambiente computacional colaborativo INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Utilizando a linguagem JAVA, segue o paradigma de programação orientada a objetos (POO), tendo sido inicialmente idealizado para utilização do MEF.

No INSANE, as implementações utilizando o MEC foram iniciadas em 2013 (Anacleto et al., 2013; Maia et al., 2013), utilizando o arcabouço previamente desenvolvido. Posteriormente, foi implementada a formulação não-linear implícita, permitindo análise de problemas de mecânica dos sólidos com não linearidade física, utilizando modelos de plasticidade e dano (Peixoto et al., 2016). Também foram implementadas células com descontinuidade incorporada, que permitiram a análise de falha material de problemas em estado plano, com transições de regimes, utilizando a metodologia equivalente à descrita no presente trabalho. Os últimos avanços nas implementações foram desenvolvidos por Mendonça (2021), que implementou uma variação de célula que permite saltos de deslocamento não-uniformes.

Com o presente trabalho, implementado a partir de todos os desenvolvimentos anteriores, é possível a análise não-linear de sólidos tridimensionais, com modelos de plasticidade

e dano contínuo ou com descontinuidade fraca e forte, podendo-se descrever o processo gradual de falha em uma dada superfície de fratura. Algumas intervenções específicas da implementação, não diretamente relacionadas ao foco do trabalho, mas que foram fundamentais para viabilidade das análises apresentadas, são citadas a seguir.

- Algoritmo para geração de células hexaédricas lineares e quadráticas, acoplando uma face ao elemento de contorno. Foi implementada com a técnica de mapeamento trans-finito, pela simplicidade, devendo ser delimitada a região do domínio a ser discretizado.
- Adaptações para adoção da biblioteca *libflame* (Zee, 2011) para resolução de sistemas lineares, em substituição à decomposição LU. Trata-se de uma biblioteca que apresenta soluções direcionadas principalmente a operações de álgebra linear (como produto matriz-matriz e matriz-vetor) com elementos densos (não esparsos). Implementada em código livre, e linguagem **C**, tem foco principalmente no alto desempenho, superando bibliotecas tradicionais.

O uso de soluções da biblioteca possibilitou redução muito significativa do tempo de resolução de sistemas, tornando viável a análise de problemas médios e grandes.

- Redução do tamanho das matrizes $[G^u]$, $[G]$ e $[G^\epsilon]$ (equações 4.17, 4.24 e 4.31). Conforme explicado no capítulo 4, nessas matrizes as informações dos *nós* são individualizados para cada elemento que compartilha um determinado nó, já que um mesmo *nó* pode ter valores de força de superfície diferentes em elementos vizinhos.

Para reduzir o número de termos das matrizes, foi considerado apenas um termo representativo para os *nós* com força de superfície única, prescrita em todos os elementos que o compartilhassem. Como esses *nós* são, em geral, em número muito maior que os *nós* com força de superfície incógnitas ou não-uniformes, as reduções foram significativas. Cabe lembrar que as referidas matrizes não são montadas individualmente, devendo seus termos serem inseridos diretamente nas matrizes $[A]$, $[A^u]$, $[A^\epsilon]$ e $[B]$, $[B^u]$, $[B^\epsilon]$, nas posições apropriadas (ver seção 4.5).

Essa redução foi fundamental e necessária para viabilizar a análise de exemplos maiores, que requeriam grande quantidade de memória. Essa grande demanda de memória ocorre principalmente devido aos procedimentos do método implícito do MEC, que requerem uso de matrizes invertidas, como podem ser verificados nos termos das equações 4.36, 4.37, 4.38, 4.52, 4.54 e 4.56.

- Revisão dos critérios para integração das células e elementos de contorno. Foi adotado critério que se aproxima mais da proposta de Eberwien et al. (2005). Essa determinação mais racional da quantidade de pontos de integração e eventualmente da quantidade de subdivisões dos elementos, reduziu o tempo necessário para cálculo das integrais sem perda da precisão necessária. As técnicas de integração com subdivisões e subelementação, para integrais regulares e singulares (seção 4.4), foram extendidas para as células hexaédricas implementadas.
- Extensão do processamento “multi-thread” para a etapa de avaliação das células individual das células (dentro do item xiii. do Algoritmo 1 – seção 4.5). Antes utilizada apenas na etapa de integração para cálculo dos termos das matrizes do sistema. Conseguiu-se uma pequena redução nos tempos de processamento com essa modificação.
- Implementação de Classes para geração e leitura de arquivos XML de malhas geradas no software *Gmsh* (Geuzaine e Remacle, 2009). As implementações adotadas (e a nova implementação) apenas podia gerar malhas transfinitas, limitando a possibilidade de concentração de elementos em regiões de interesse. O uso de malhas não estruturadas também tornou possível discretizações com concentração de elementos apenas em regiões de interesse. Isso reduziu a demanda por memória durante o processamento, viabilizando análises antes proibitivas.

No *Gmsh*, malhas não estruturadas puderam ser geradas usando algoritmo “Frontal-Delaunay” (Remacle et al., 2013), para superfícies (elementos de contorno), combinado com algoritmo de recombinação chamado “Blossom” (Remacle et al., 2012), para geração dos elementos quadriláteros. Já para a geração de células optou-se por usar

sempre a malha estruturada.

- Finalizando, duas alterações realizadas que, optamos por não usar nas análises:
 - Avaliação de convergência do passo incremental da análise não linear (ver item xv. do Algoritmo 1) pelo critério de deslocamento. Ou seja, substituindo o critério da equação 4.57 de verificação em força, pelo critério de verificação em deslocamento: $\frac{\|\{\delta U\}\|}{\|\{U\}\|} < \text{tolerância}$. Não foi observado ganho que justificasse sua adoção em detrimento do primeiro critério.
 - Implementados uso de elementos descontínuos, em que os nós são deslocados para dentro do elemento, em uma proporção λ , relativa ao tamanho das arestas do elemento. Os elementos descontínuos aplicados onde há descontinuidade de força de superfície reduziu a demanda por memória nas análises. Entretanto, além de inserir uma nova variável arbitrária no problema (λ), a complexidade agregada não justificou seu uso, se comparada à estratégia adotada (que amplia o número de colunas das matrizes $[G]$ apenas para *nós* onde há descontinuidade nas forças de superfície).

Apesar das alterações bem sucedidas, ainda permanece muito grande a necessidade de memória para problemas de geometria complexa. O problema é mais crítico ao usar elementos com aproximação quadrática, já que não se pode usar células com dimensões grandes, que descaracterizaria o avanço progressivo das descontinuidades. Conseqüentemente, elementos de contorno de dimensões reduzidas são necessários para compatibilização com as células.

Outro fator que permanece limitante é o tempo de processamento. Observa-se que o número de iterações necessárias para convergência de cada passo da análise não-linear aumenta muito, quando há ativação do regime descontínuo em uma quantidade significativa de células.

Capítulo 7

Exemplos Numéricos

São apresentados neste capítulo alguns exemplos numéricos de aplicação da metodologia tratada. O objetivo geral é mostrar o desempenho da implementação desenvolvida na análise de problemas apresentados em outras obras de referência, de modo a evidenciar pontos positivos e dificuldades encontradas. Não foram considerados problemas de grande porte, principalmente por limitação associada aos recursos de processamento disponíveis e à robustez da implementação (tempo de processamento). Para reduzir ou contornar essas dificuldades, a metodologia precisaria ser considerada num contexto de análises em escalas sequenciais, em que sua aplicação seja restrita a regiões pequenas.

Para processamento da maioria das análises foi utilizado computador pessoal com 15,7 GB de memória RAM e processador Intel[®] i7 11th Gen. de 2,80 GHz, 8 núcleos. Para modelos numéricos maiores foram utilizadas diferentes máquinas virtuais com até 64 GB de memória RAM, disponibilizadas para avaliação por empresas de tecnologia como Google, Oracle, OVHcloud, Linode (Akamai). Utilizado processamento paralelo sempre que possível, com número de *threads* igual a número de núcleos da máquina.

As trajetórias de equilíbrio nas análises não-lineares foram obtidas utilizando método de controle de deslocamento direto, com verificação de convergência por força (equação 4.57), adotando-se valor de tolerância 10^{-3} . Testes realizados com diferentes problemas mostraram que ao utilizar valor mais comumente encontrado, 10^{-4} , o tempo de processamento aumenta em cerca de 30%, sem alteração significativa dos resultados.

Para o modelo de dano isotrópico foi considerada deformação equivalente conforme critério apresentado em Oliver et al. (2006) (equação 2.11). A lei de evolução exponencial da variável de dano q , foi utilizada adotando-se o parâmetro $k = 0,01$ mm nas equações da seção 5.4, valor de ordem de magnitude pequena em relação às dimensões típicas dos problemas. Este também é o parâmetro de regularização da função delta de Dirac na equação 5.19, sob regime de descontinuidade forte ($k = h_{SD}$).

Nos exemplos analisados, as superfícies de falha são previamente conhecidas, pela simetria ou condições de contorno dos problemas, ou obtidas a partir de artigos de referência. Nos modelos, a discretização do domínio em células com descontinuidade incorporada é feita apenas na região que segue as superfícies esperadas de falha – método de trajetória fixa. Foram utilizadas células de geometria hexaédrica, com geometria parametrizada por função linear ou quadrática, em concordância com o tipo de elemento de contorno utilizado (quadrangular linear ou quadrático).

Sendo pré-definidas as posições (geometria) das células, pode-se considerá-las todas no sistema de equações do modelo desde o início da análise, ou inseri-las nos sistemas de equações progressivamente, à medida em que a descontinuidade é ativada nas células presentes, de modo a haver sempre uma célula em regime contínuo à frente da trinca. Essa segunda opção é mandatória para o uso em associação com algoritmo de rastreamento da propagação de trinca (não implementado). Nos processamentos realizados foram consideradas ambas as opções, que conduziram a resultados equivalentes. Para fins práticos, a preferência foi por considerar todas as células inseridas no sistema desde o início da maioria das análises. Essa alternativa demandou tempo de processamento um pouco menor, já que as integrais são calculadas em uma etapa inicial única, otimizada em processamento “multi-thread” e não requer expansões das matrizes.

Para os exemplos mais simples foi possível fazer as análises utilizando malhas geradas no algoritmo específico implementado no INSANE, capaz de gerar malhas estruturadas por mapeamento transfinito. Já para geometrias complexas utilizou-se o software Gmsh[©] (Geuzaine e Remacle, 2009), versão 4.10.1, para geração das malhas.

Nos cinco exemplos iniciais, foi considerado o regime de descontinuidade forte ao final do regime elástico, quando a tensão principal máxima supera a tensão resistente do material. A direção da normal à superfície de descontinuidade em cada célula é considerada na direção da tensão principal máxima. Nos seguintes, considerou-se também a possibilidade de transição entre regimes contínuos elástico e inelástico, e com descontinuidades fraca e forte. O instante de bifurcação é determinado numericamente conforme abordagem descrita na seção 5.1.2. Nesses casos, a direção da normal à descontinuidade é previamente conhecida, a partir do posicionamento inicial estabelecido para cada célula, não sendo calculada diretamente.

Particularizando, o exemplo inicial é o caso com geometria mais simples possível, tratando-se de um cubo sujeito a tensão uniaxial, induzindo-se uma região de possível descontinuidade. Pode-se observar aí a ocorrência de descontinuidade nas células implementadas, e também foram avaliados os efeitos do uso de células com geometrias desproporcionais. O exemplo seguinte apresenta uma placa com entalhe em que a descontinuidade se propaga verticalmente. No terceiro exemplo procura-se mostrar a propagação (ou ativação) das células para um modelo tridimensional, de uma barra com entalhe de canto sujeita a tração simples. No quarto exemplo é considerado o ensaio de flexão em três pontos analisado inicialmente por Carpinteri (1989), e os resultados são comparados a outras análises numéricas. Nesse exemplo considerou-se também o uso de elementos com aproximação quadrática. No quinto exemplo, com geometria efetivamente tridimensional, considerou-se o ensaio de arrancamento, que gera superfície de descontinuidade com curvatura dupla. No sexto exemplo é considerado o ensaio de flexão em três pontos com referência experimental de Petersson (1981). Nesse exemplo pode-se observar a necessidade do uso de elementos com aproximação quadrática para obtenção de resultados mais precisos, e também é considerada a análise de bifurcação com transição entre regimes elástico, inelástico, com descontinuidade fraca e forte. No exemplo seguinte tem-se o ensaio de cisalhamento com forças em quatro pontos, de Arrea e Ingraffea (1982), onde pode-se analisar o desempenho da abordagem para o caso de fratura em modos mistos I e II. Finalmente, o oitavo exemplo considera o ensaio de torção (Brokenshire Test), que tem superfície de

descontinuidade com geometria complexa e abrange fratura em modos mistos I e III.

Os resultados são avaliados principalmente em relação à trajetória de equilíbrio de um ponto material do sólido em análise. A qualidade dos resultados é avaliada em comparação com resultados experimentais (quando disponíveis), resultados teóricos, ou resultados numéricos obtidos por outras formulações, apresentados nos trabalhos de referência.

7.1 Cubo Sujeito a Tração Simples

Este exemplo apresenta a análise de um sólido cúbico sujeito à tração simples em uma face e engaste na face oposta (figura 7.1). Considera-se a possível ocorrência da superfície de falha material no plano médio (entre as faces carregada e a engastada) do sólido, discretizando-se o domínio nessa região específica.

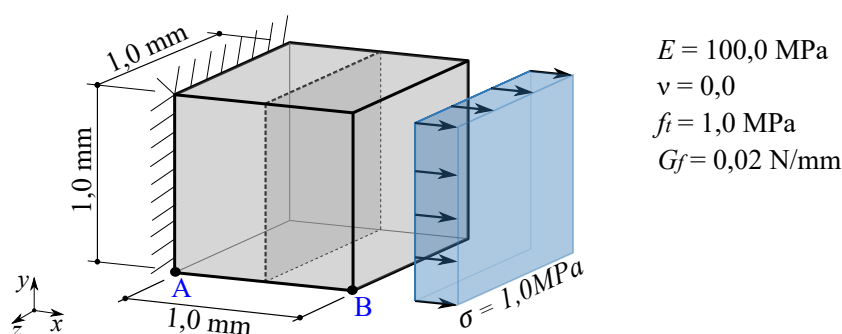


Figura 7.1: Cubo unitário sujeito a tração simples: dimensões, parâmetros do material, carregamento, restrições e superfície de descontinuidade.

As malhas consideradas nas análises foram geradas no INSANE com algoritmo de mapeamento transfinito. São apresentados resultados para quatro diferentes malhas (figura 7.2), utilizando elementos e células com função de aproximação linear. Foi mantida a proporção cúbica das células hexaédricas, e reduzida progressivamente a região discretizada do domínio. Na “malha 1” todo o domínio foi considerado como uma célula, enquanto na “malha 4” a faixa de domínio discretizado representou 12,5% da extensão lateral.

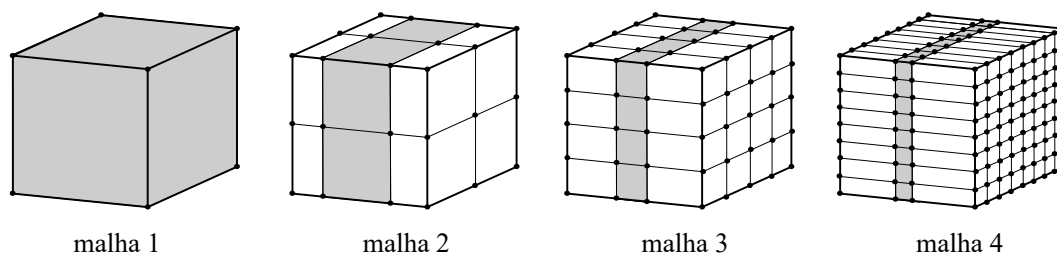
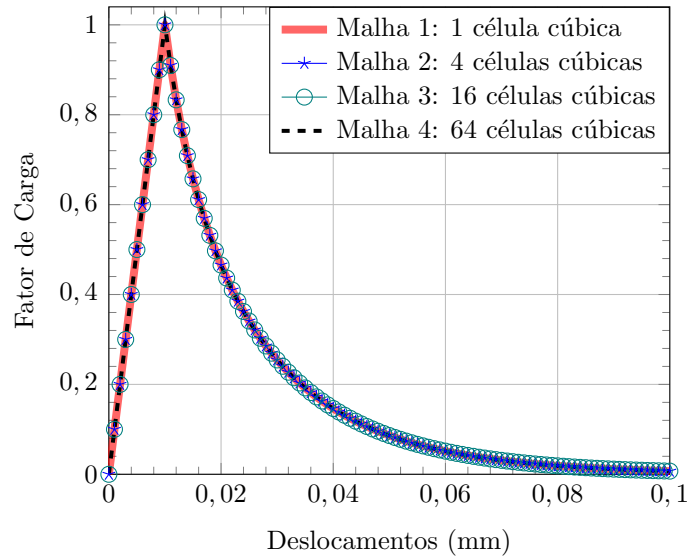
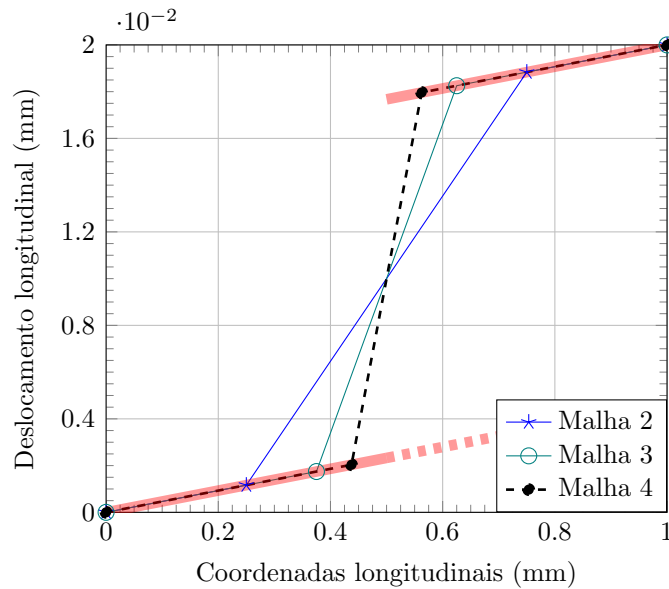


Figura 7.2: Cubo unitário sujeito a tração simples: malhas com células hexaédricas cúbicas.

Os resultados obtidos para a trajetória de equilíbrio em um ponto da face carregada são apresentados na figura 7.3a, relacionando deslocamento (do ponto B) com um fator de carga, para as diversas malhas. As curvas coincidentes mostram a independência de malha e coincidência com resultados de análise bidimensional. Para ilustrar o efeito do salto no campo de deslocamento a figura 7.3b mostra o deslocamento ao longo de uma aresta longitudinal (A-B na fig. 7.1). As diferenças entre os deslocamentos dos nós centrais são relacionados ao salto de deslocamento, que pode ser melhor observado quando os nós estão mais próximos.



(a)



(b)

Figura 7.3: Cubo unitário sujeito a tração simples: resultados para malhas com células cúbicas (a) trajetória de equilíbrio para deslocamento no ponto B; (b) deslocamento longitudinal na aresta A-B, para fator de carga 0,2 em regime inelástico.

Em um outro conjunto de análises foram utilizadas células com proporções não-cúbicas, mais alongadas ou achatadas na direção da carga aplicada (direção x na fig. 7.1), considerando a faixa discretizada do domínio com larguras de 0,20 ou 0,125 mm. Na figura 7.4 são mostradas dimensões e proporções de células que conduziram à alterações nos resultados, e na figura 7.5, os resultados obtidos para as trajetórias de equilíbrio do ponto B . Os resultados obtidos para células cúbicas ($1 \times 1 \times 1$) também são apresentadas como

referência. Para células com dimensões menos desproporcionais do que as ilustradas, as diferenças entre os resultados e a referência são desprezíveis.

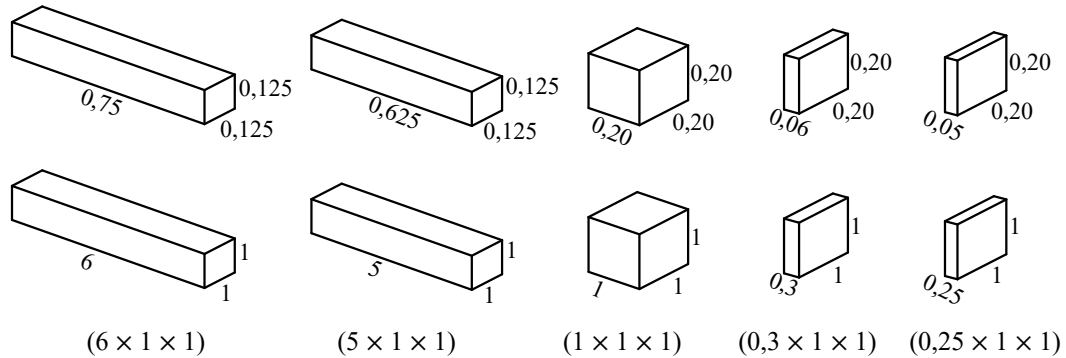


Figura 7.4: Cubo unitário sujeito a tração simples: células hexaédricas – proporções não-cúbicas.

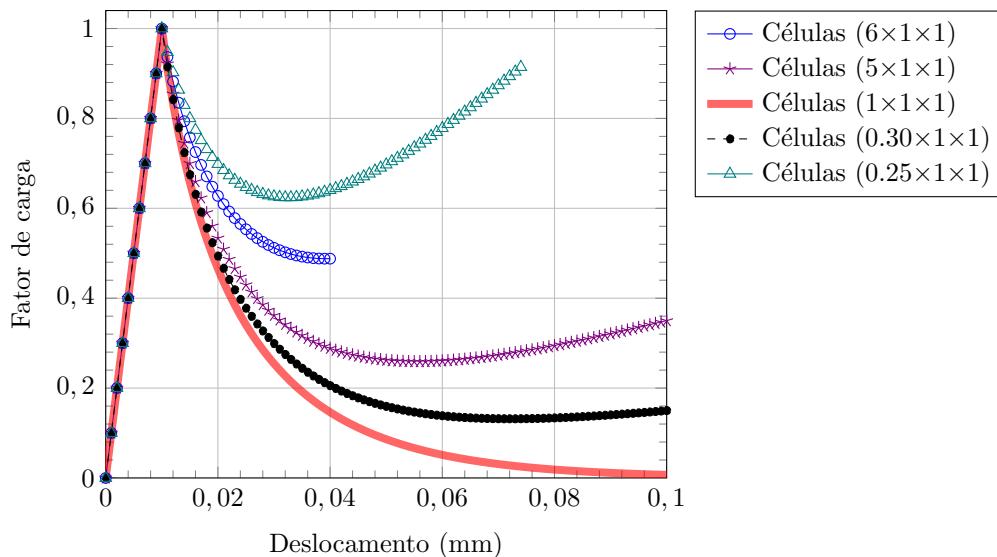


Figura 7.5: Cubo unitário sujeito a tração simples: trajetórias de equilíbrio usando células com dimensões muito desproporcionais.

Observa-se uma influência considerável no ramo descendente da trajetória de equilíbrio ao se utilizar células hexaédricas com dimensões muito desproporcionais, conduzindo a resultados incompletos ou sem sentido. Como o mesmo efeito foi observado também ao se fazer simulações usando análise não-linear com modelo constitutivo de dano padrão (contínuo), nota-se que esse efeito não tem relação direta com uso de células com descontinuidade embutida. Essa diferença de resultados obtidos está mais relacionado com perda de precisão nos processos de integrações. Testes adicionais mostraram que o uso proposital de uma quantidade reduzida de pontos de integração conduz a efeitos similares.

Por outro lado, observou-se também que os resultados podem ser melhorados ao aumentar significativamente o número de pontos de integração usados, mas o custo computacional tornaria as análises impraticáveis. É importante também mencionar que esse comportamento também pode ser observado ao fazer análises bidimensionais similares (estado plano de tensões) quando se usa células quadrilaterais com grandes desproporções.

7.2 Placa com Entalhe e Forças de Abertura

No exemplo dessa seção é reproduzida a análise tridimensional apresentada por Chaves (2003), que é uma variação do problema analisado por Rots (1988) em estado plano de tensão. Trata-se de uma placa com entalhe e região circular onde é aplicada um par de forças contrárias, que provocam a abertura do entalhe induzindo surgimento e propagação de falha. A figura 7.6 ilustra a geometria considerada, suporte e forças aplicadas, e os valores de propriedades do material considerado.

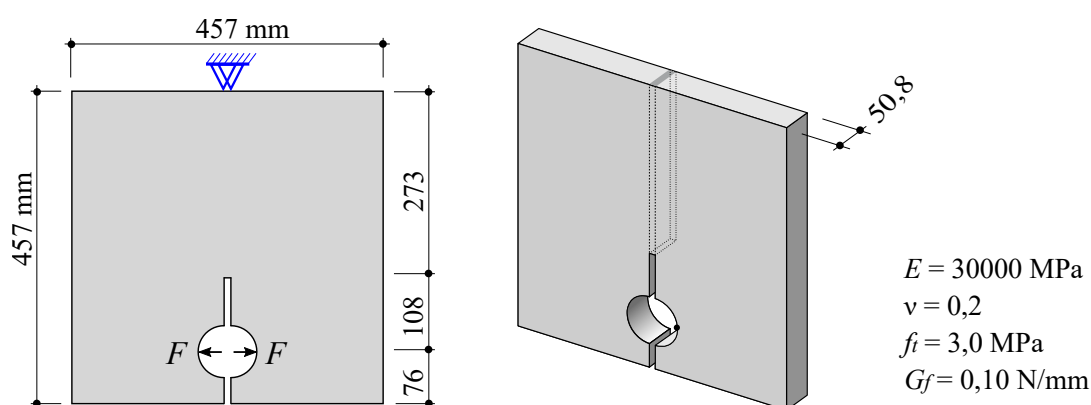


Figura 7.6: Placa com entalhe: dimensões, forças aplicadas, apoio e parâmetros do material.

O domínio foi discretizado com células hexaédricas em uma faixa que se estende do final do entalhe até o apoio. As malhas estruturadas foram geradas a partir de implementação feita no INSANE. São apresentados resultados para dois níveis de refinamento, sendo a “malha 1”, com 882 elementos de contorno quadrilaterais lineares e 54 células hexaédricas organizadas em 18 fileiras com 3 células cada, e a “malha 2”, mais refinada, com 1076 elementos de contorno e 72 células em 24 fileiras. A partir desta última malha, ilustrada na figura 7.8a, não há alteração significativa com novos refinamentos. Os resultados

obtidos são comparados com aqueles obtidos por Chaves (2003) em análise tridimensional, utilizando abordagem do MEF com descontinuidade forte (CSDA), modelo de dano com lei de amolecimento exponencial, e malha estruturada com elementos alinhados na direção de propagação da falha. A figura 7.7 mostra também os resultados obtidos considerando o MEC com descontinuidade forte com modelo bidimensional em estado plano de tensões (EPT), como referência.

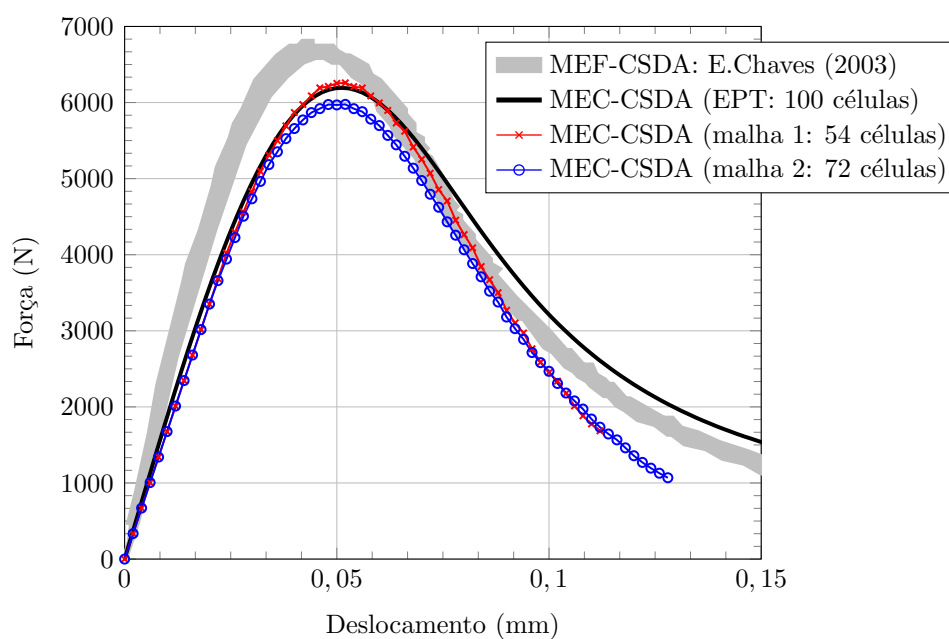


Figura 7.7: Placa com entalhe: Trajetória de equilíbrio do ponto de aplicação da carga.

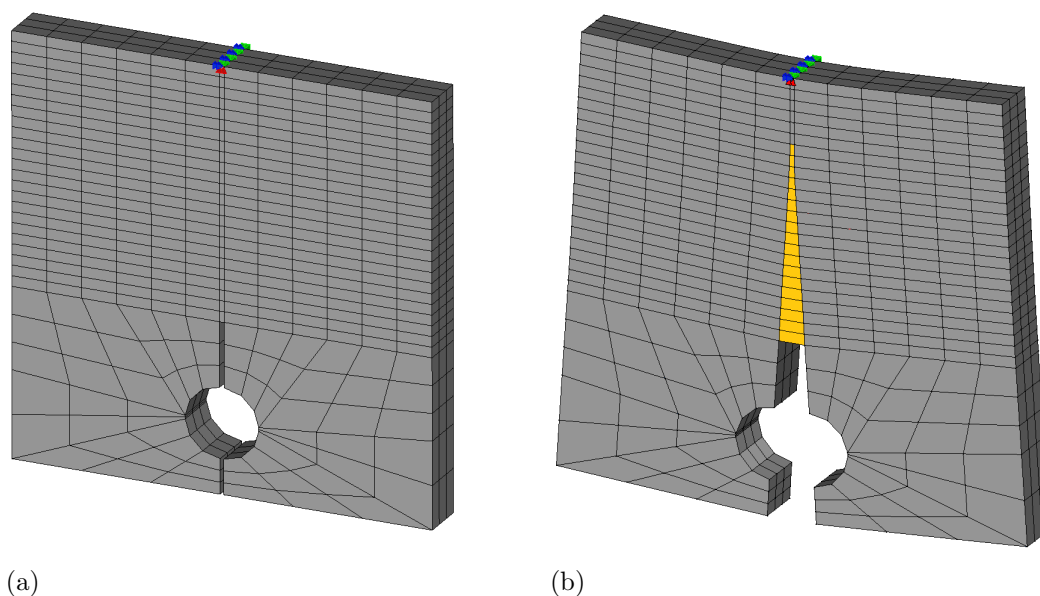


Figura 7.8: Placa com entalhe: (a) “malha 2”, gerada no INSANE; (b) modelo deformado em instante com deslocamento 0,1 mm (ampliado em 200 vezes), e destaque para região em que as células tiveram a descontinuidade ativada.

Observa-se uma boa correlação entre os resultados obtidos e a referência, com formulações que podem-se considerar equivalentes. A figura 7.8b ilustra a configuração deformada e as células com descontinuidade ativada em um determinado instante.

7.3 Barra Prismática com Entalhe Circular de Canto

Esse exemplo considera uma barra prismática, com um entalhe circular de canto, sujeita a tração simples. As dimensões gerais, e parâmetros adotados para o material são apresentados na figura 7.9. A superfície de falha é presumida no plano horizontal do entalhe, também mostrado nessa figura. A análise numérica do problema requer o uso de um modelo efetivamente tridimensional, e as soluções teóricas são limitadas a expressões desenvolvidas para cálculo do fator de intensidade de tensão, como dadas por Tada et al. (2000) e Anderson (2005).

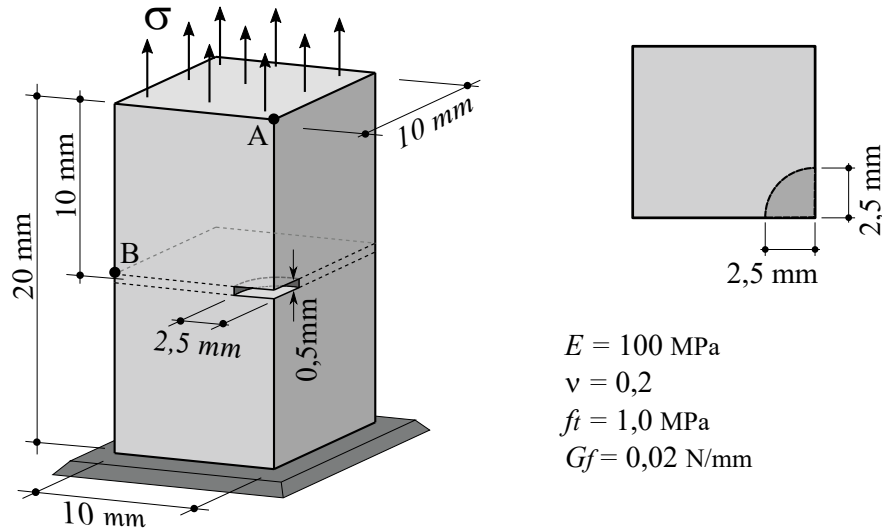


Figura 7.9: Barra com entalhe de canto: dimensões do modelo, plano do entalhe, condições de contorno e parâmetros do material.

Para análise não linear é adotado o controle do deslocamento do ponto A. As malhas estruturadas foram geradas a partir de implementação feita no INSANE, dentre as quais são apresentados aqui três graus de refinamento. Na figura 7.10 são mostradas as discretizações finais do plano de propagação da trinca, para os diferentes níveis de refinamento. As células utilizadas são hexaédricas com geometria linear.

As células, inicialmente em regime elástico, são alocadas conforme duas abordagens. Em uma abordagem considera-se inicialmente apenas as células vizinhas ao entalhe circular. Novas células são inseridas progressivamente na análise, à medida que a descontinuidade é ativada em célula existente, em posição vizinha à esta célula ativada. Em outra abordagem, todas as células do plano são consideradas inicialmente nos sistemas de equações, permanecendo em regime elástico até a ativação sequencial natural da descontinuidade. Ambas as abordagens conduzem aos mesmos resultados, como era de se esperar.

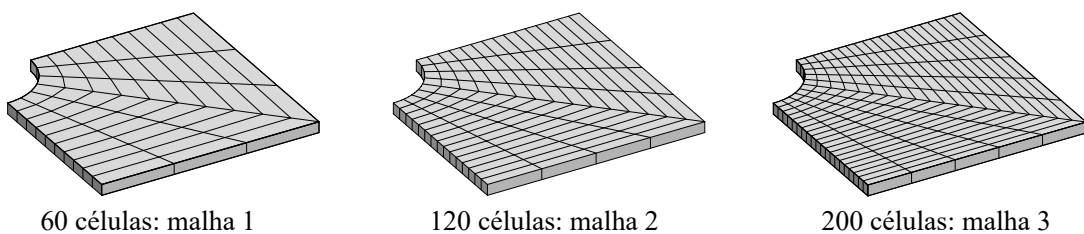


Figura 7.10: Barra com entalhe de canto: discretização final do domínio em células hexaédricas para diferentes níveis de refinamento.

Os resultados obtidos para a trajetória de equilíbrio do ponto A de controle é mostrado na figura 7.11, em conjunto com os deslocamento de um ponto intermediário (ponto B). Um valor teórico para a tensão crítica de fratura σ_{fcrit} , obtido a partir do caso particular de fator de intensidade de tensão calculado para trinca de canto em um quarto de elipse, com base nas equações de Anderson (2005), também é apresentado junto aos resultados.

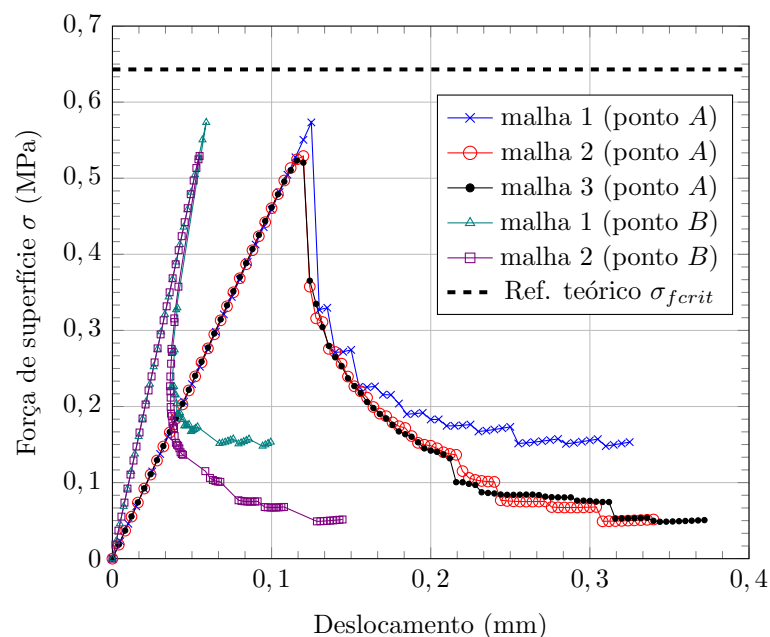


Figura 7.11: Barra com entalhe de canto: trajetória de equilíbrio de deslocamento para o ponto A , para o ponto B , e resultado teórico.

Nota-se que o refinamento da malha resulta em uma boa representação do ramo descendente da trajetória de equilíbrio. É possível observar na trajetória de equilíbrio do ponto B , o típico fenômeno de “snap-back”. As células na vizinhança desse ponto são ativadas somente quando a tensão está em torno de 0,136 MPa (para a malha 2).

As tensões de pico obtidas convergem para um valor um pouco abaixo da tensão crítica σ_{fcrit} calculada como referência teórica. Esse valor teórico refere-se a uma análise estritamente linear elástica, na qual o fator de intensidade de tensões atinge a tenacidade à fratura do material. No momento que isso ocorre, as referências pressupõem fratura frágil repentina. Por outro lado, observa-se nas análises realizadas, uma etapa inicial de propagação estável que, na prática, faz com que a trinca esteja um pouco maior no momento da fratura final (pico no passo 30). Isso justifica o pico máximo obtido estar um pouco

abaixo do valor de referência.

A ativação gradual das células, formando o plano de descontinuidade, no decorrer da análise é ilustrada na figura 7.12, indicando-se o passo de carga e a força de superfície aplicada na barra. Pode-se observar na figura, que até o passo 30 (pico) já há células com descontinuidade ativada, corroborando a propagação estável inicial.

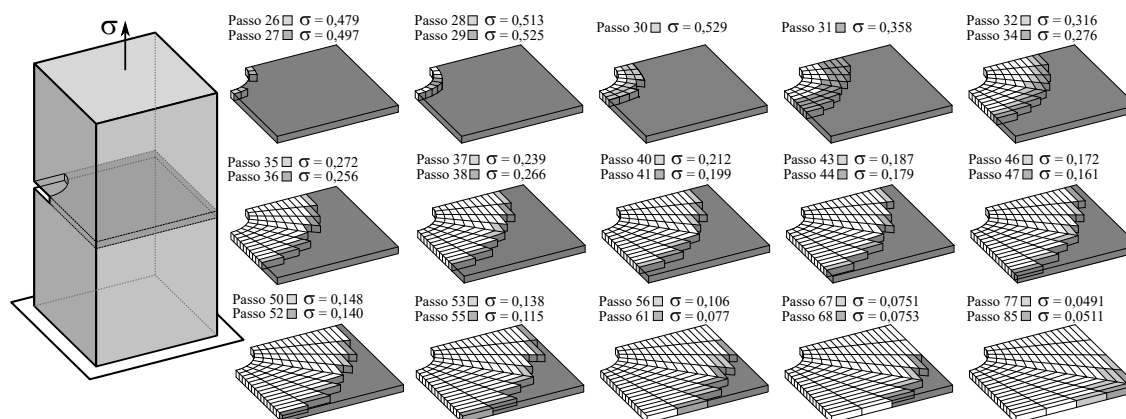


Figura 7.12: Barra com entalhe de canto: ativação gradual das células formando o plano de descontinuidade a partir do entalhe (malha 2).

7.4 Flexão em Três Pontos - Carpinteri (1989)

Nesse exemplo analisa-se o caso de flexão em três pontos de uma viga de concreto simples com entalhe no centro do vão. O exemplo foi analisado numericamente por Carpinteri (1989) utilizando modelo de trinca coesiva para investigação de falhas catastróficas e efeitos de escala. Carpinteri e Colombo (1989) apresentam uma variedade de resultados de análise de trajetória de equilíbrio pós-crítica, ressaltando as condições de ocorrência de comportamento tipo “snap-back” no modelo, com atenção principal no conceito de número de fragilidade. As análises numéricas foram feitas utilizando o MEF clássico controlando o progresso da fissura pela duplicação dos nós da ponta da trinca e introdução de lei coesiva linear ou bi-linear.

O exemplo também foi analisado por Most e Bucher (2007), utilizando associação do MEF tradicional e método sem malha na região de desenvolvimento de trinca, com propagação de fissura baseado em critério de energia. Foi considerado para o concreto um módulo de amolecimento com função linear. Almeida e Leonel (2022) também obtiveram resultados

para o problema, utilizando a formulação Dipolo do MEC – uma variação da formulação dual do MEC que introduz um campo de tensões inicial para representar a zona de processo de fratura, e requer a discretização de somente uma das superfícies da fissura, reduzindo o número de equações necessárias e consequentemente o esforço computacional.

A viga prismática de seção retangular tem todas as suas dimensões indicadas na figura 7.13, onde também são indicados os valores de parâmetros que caracterizam o concreto, como energia de fratura, G_f , tensão resistente à tração, f_t , módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson, ν , obtidos das referências. Nessa figura, pode-se observar também os apoios, carregamento considerado e a região do domínio a ser discretizada.

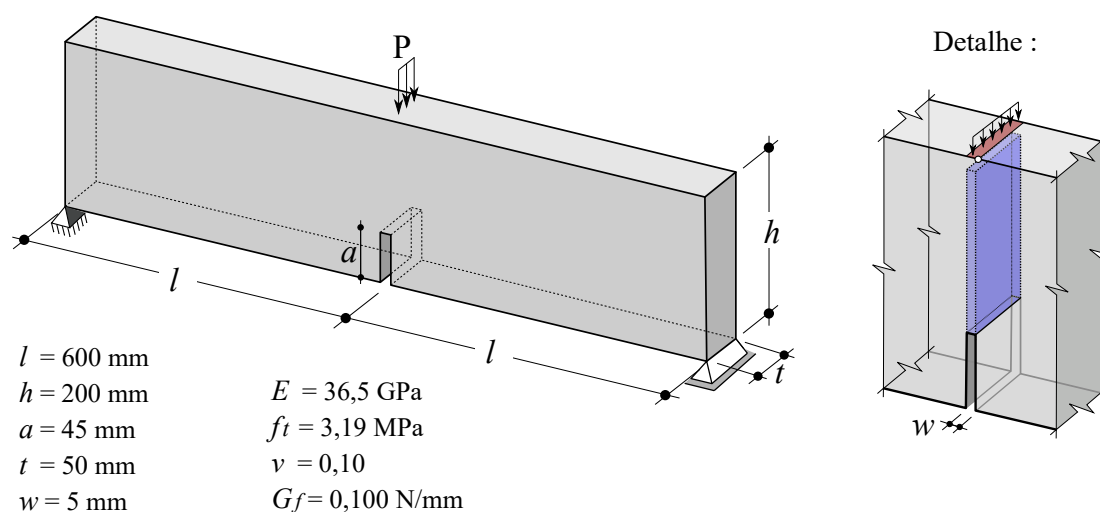


Figura 7.13: Flexão em três pontos: dimensões, parâmetros e condições de contorno.

Na parte superior a carga concentrada, P , foi aplicada em uma faixa com largura 8 mm ao longo da espessura da viga. Foi considerado um ponto na lateral dessa faixa de carga, para o controle de deslocamento vertical da análise não-linear. Sabendo-se da condição de simetria do problema, conhece-se *a priori* a potencial superfície da trinca.

Foram usados elementos de contorno quadrilaterais (BQ4) e células hexaédricas (BH1) com aproximação linear na “malha 1” (604 elementos, 132 células), “malha 2” (1704 elementos, 350 células) e “malha 3” (2006 elementos, 420 células). Elementos de contorno quadrilaterais (BQ8) e células hexaédricas (BHQ1), com aproximações quadrática foram considerados na “malha 4” (604 elementos, 132 células). As malhas 1 e 2 são mostradas na

figura 7.14. O software Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009), foi utilizado para geração das malhas, proporcionando discretizações com concentração de elementos na região central da viga.

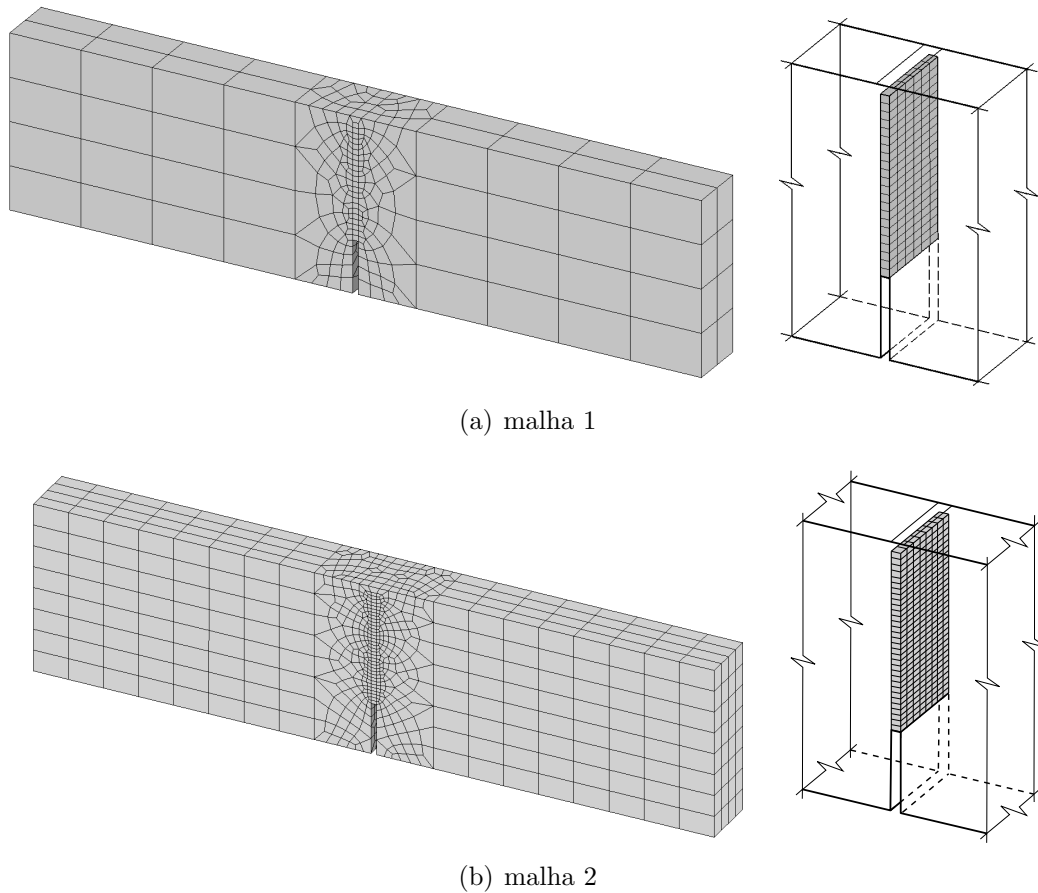


Figura 7.14: Flexão em três pontos: elementos de contorno e células.

A figura 7.15 apresenta os resultados obtidos neste trabalho e resultados das referências para comparação. A trajetória de equilíbrio relaciona o deslocamento relativo no centro do vão (razão entre deslocamento vertical, f , e altura da peça, h), com a carga relativa atuante P^* , definido como $P^* = \frac{P}{t h f_t}$.

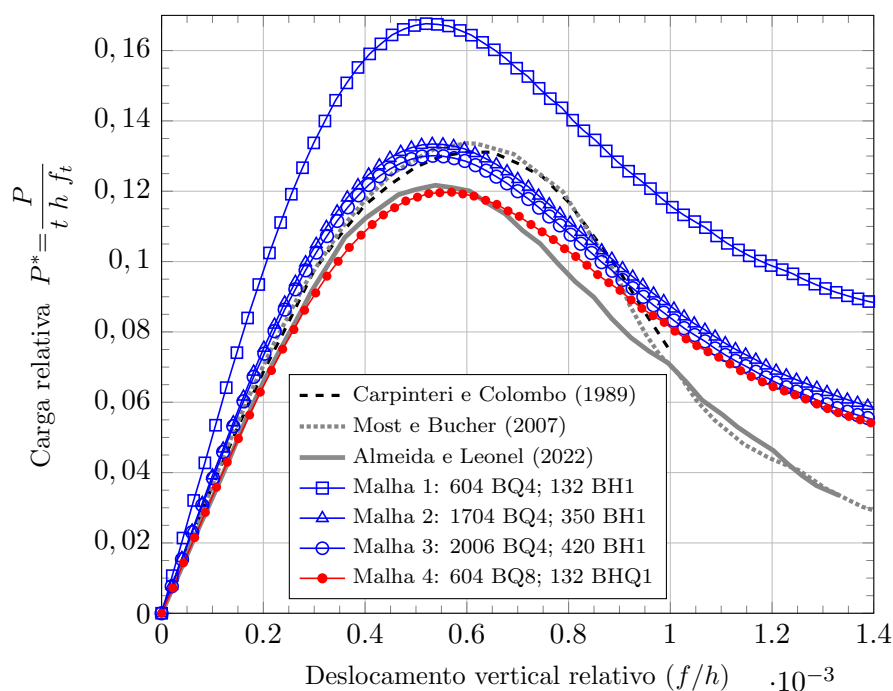


Figura 7.15: Trajetória de equilíbrio: carga relativa P^* versus deslocamento vertical relativo.

Importante ressaltar que os resultados de Carpinteri e Colombo (1989) e de Most e Bucher (2007) consideram leis coesivas lineares, enquanto o resultado obtido de Almeida e Leonel (2022) considera lei exponencial. Esse último, portanto, parece ser uma referência mais adequada para comparação direta.

Observa-se que os resultados obtidos com malhas lineares (1 a 3) convergem para os resultados de referência. O resultado obtido com uso de elementos com aproximação quadrática (malha 4) mostra o aumento na flexibilidade promovido, mesmo ao se usar menos elementos na discretização. O número de nós também é menor na malha quadrática (1946 na malha 4, e 2428 na malha 3). O mesmo ganho de precisão nos resultados foi observado na análise de exemplos similares, onde os deslocamentos se devem principalmente à flexão, como nos modelos de Petersson (1981) e de Körmeling (1983). Este primeiro é apresentado com detalhes na seção 7.6.

7.5 Teste de Arrancamento

Aqui um ensaio de arrancamento de estrutura de aço ancorada em um bloco cilíndrico de concreto é simulado. A análise é amplamente utilizada para validação de modelos tridimensionais, devido à forma cônica da superfície de falha. Por sua natureza axissimétrica o ensaio também pode ser analisado em modelo bidimensionais, como apresentado por Rots (1988). A força é aplicada em uma haste com disco de aço inserido livremente no concreto, que tem contato efetivo apenas com a parte superior do disco, fazendo com que o concreto reaja contra um anel de aço que restringe seu deslocamento. Considerando o eixo de simetria, nos modelos tridimensionais apenas um quarto do conjunto é usualmente considerado, bem como apenas o bloco de concreto é considerado no modelo numérico, aplicando-se as restrições e condições de contorno apropriadas. A figura 7.16 ilustra a geometria e condições de contorno do modelo.

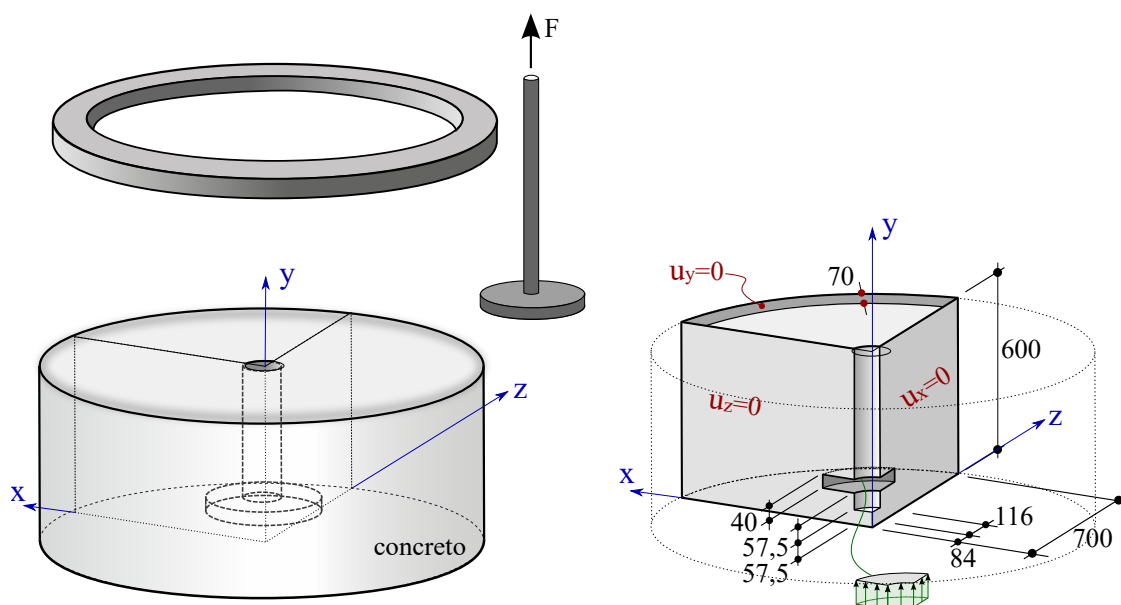


Figura 7.16: Teste de Arrancamento: aparato, dimensões e condições de contorno.

Os parâmetros que caracterizam o concreto são módulo de elasticidade, $E = 30,0$ GPa, coeficiente de Poisson, $\nu = 0,20$, energia de fratura, $G_f = 0,106$ N/mm, e tensão resistente à tração, $f_t = 3,0$ MPa.

O exemplo, apresentado em várias referências, tem sido analisado por diferentes modelos

numéricos. Areias e Belytschko (2005) usam modelo de dano com campo descontínuo discreto combinado com o MEF estendido com enriquecimento nodal em elementos afetados pela descontinuidade. Gasser e Holzapfel (2006) também fazem uso do MEF com partição de unidade, empregando uma descrição constitutiva discreta da zona coesiva baseada em modelo de desconexão (“Traction Separation Laws”). Já Feist e Hofstetter (2007) usam a abordagem com descontinuidade forte (SDA) associada ao MEF estendido, forçando a continuidade da trajetória da trinca. Jäger et al. (2009) trabalham com o MEF e enriquecimento de elementos, assumindo a falha material como atributo exclusivo da interface coesiva. A abordagem multi-escala adotada por Armero e Kim (2012) utiliza interpolação linear nos saltos de deslocamentos visando evitar o fenômeno do travamento de tensões (“stress-locking”) e garantindo assim um modelo menos rígido em relação ao de Feist e Hofstetter (2007). Benedetti et al. (2016) usam formulação do MEF com estabilização de variáveis de deformação e deslocamento, considerando modelo de plasticidade de Rankine, e aproveitando o caráter direcional do fluxo plástico na deformação inelástica. Dias et al. (2018) adotam formulação do MEF estendido com descontinuidade embutida, usando formulação estabilizada similar à de Benedetti et al. (2016), com injeção de modos de deformação aprimorados em elementos específicos nos quais se verificam a condição de bifurcação, que se tornam modos de descontinuidade de deslocamento com a evolução da trinca. Mais recentemente, Yun et al. (2019) adotam modelo de dano contínuo anisotrópico para análise de falha, com o MEF estendido. Aplicam conceito de tensão média não-local para evitar oscilações espúrias na trajetória da trinca, suavizando-a. Para evitar fenômeno “stress-locking” usam técnica de eliminação de elementos quando a variável de dano atinge valor próximo à unidade. E finalizando, Roth et al. (2020) fazem uso de formulação local do MEF estendido, acoplado a um modelo de dano contínuo com poropressão. Esses últimos também chamam atenção que o ângulo de aproximadamente 35° com o plano horizontal obtido é aparentemente coincidente com as demais referências.

As trajetórias de equilíbrio obtidas por todas estas referências são apresentadas na figura 7.17.

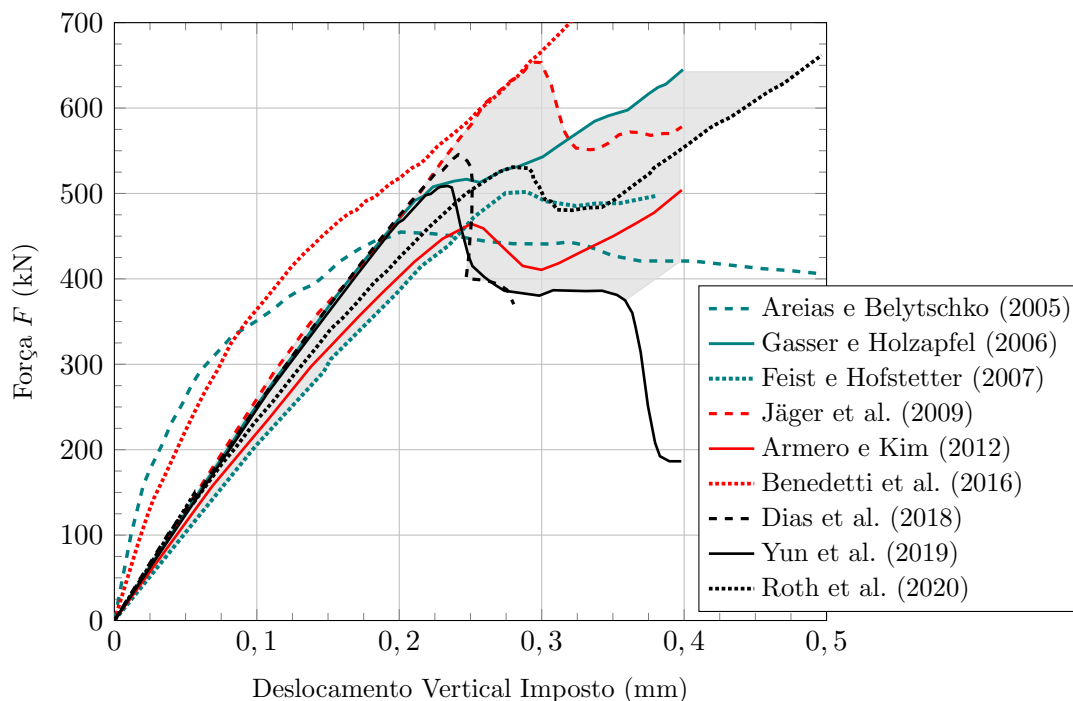


Figura 7.17: Referências: resultados para carga P versus deslocamento vertical.

Observa-se uma variabilidade grande nos resultados. Duas das abordagens conduziram a um comportamento mais rígido na etapa de carregamento, sendo portanto, deixadas fora da mancha que engloba os resultados de referências. Quando a superfície de descontinuidade atinge região inferior ao anel de contenção superior, observa-se um reincremento da carga após um breve decréscimo ou estabilização. Alguns autores atribuem esse reincremento de carga ao fato de o comportamento da falha se alterar de tensão por cisalhamento-tração para cisalhamento-compressão, e os modelos constitutivos adotados não serem capazes de capturar falhas por compressão.

São apresentadas na sequência, algumas análises feitas no presente trabalho considerando três malhas com diferentes graus de refinamento, utilizando elementos com aproximação linear. A malha 1 (mais grosseira), ilustrada na figura 7.18, tem 1408 elementos de contorno quadrilaterais (BQ4) e 204 células hexaédricas (BH1). A malha intermediária, malha 2, tem 2426 elementos de contorno e 330 células, enquanto a malha mais refinada tem 3088 elementos de contorno e 408 células. As malhas foram geradas com uso do software Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009).

As células são dispostas na região do domínio em que se espera a formação da descontinuidade, formando uma superfície cônica com ângulo de 35° com o plano da base. Como anteriormente, pode-se considerar todas as células inicialmente nos sistemas de equações, ou podem ser inseridas progressivamente. Nesse último caso, é necessário ter inicialmente células alinhadas onde se espera o início da trinca, e as demais são inseridas na frente da trinca, à medida que as descontinuidades são ativadas. Ambas as abordagens conduzem aos mesmos resultados. Para determinar a direção normal à superfície de descontinuidade dentro de cada célula, é adotada a direção calculada das tensões principais máximas.

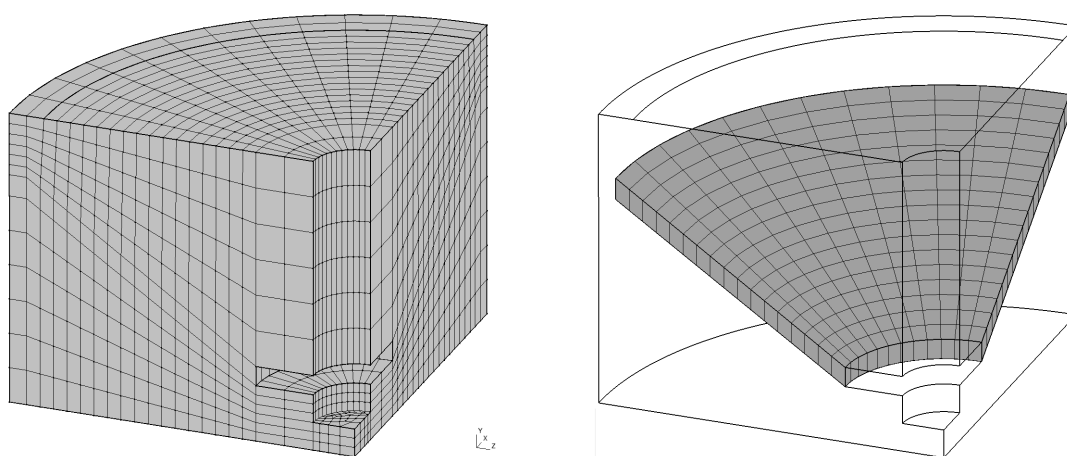


Figura 7.18: Teste de Arrancamento: malha menos refinada – elementos de contorno e células.

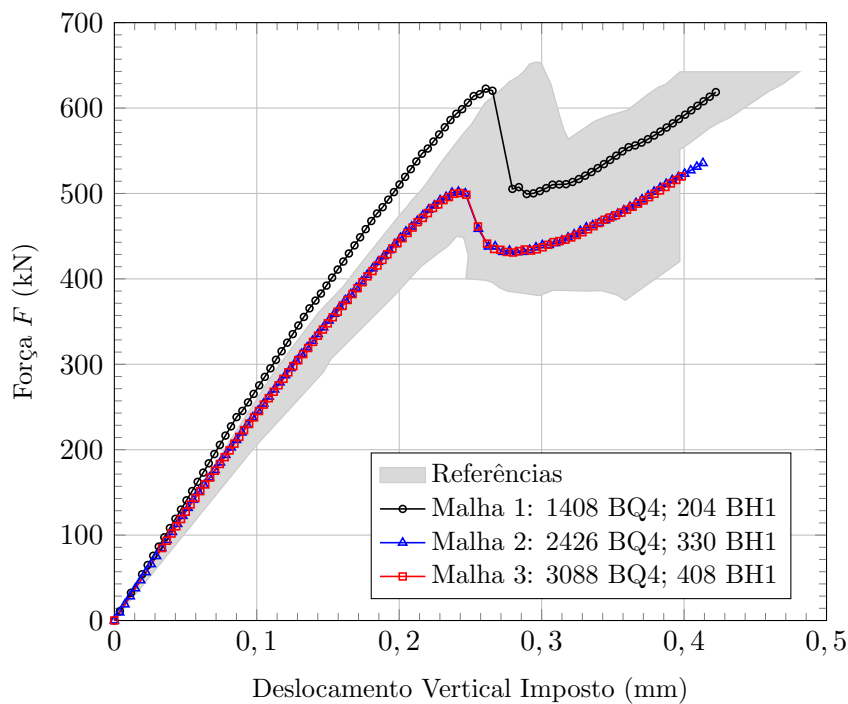


Figura 7.19: Resultados obtidos: carga P versus deslocamento vertical.

Uma boa concordância com os resultados obtidos pelas referências citadas pode ser observada na trajetória plotada na figura 7.19. Análises feitas utilizando elementos e células com aproximação quadrática conduzem a resultados equivalentes (equiparando-se o número de elementos), não apresentando vantagem em relação aos lineares.

A figura 7.20 mostra a configuração deformada obtida para deslocamento vertical de 0,4 mm, para a malha intermediária, amplificada em 200 vezes, e as células com descontinuidade ativadas em passos intermediários.

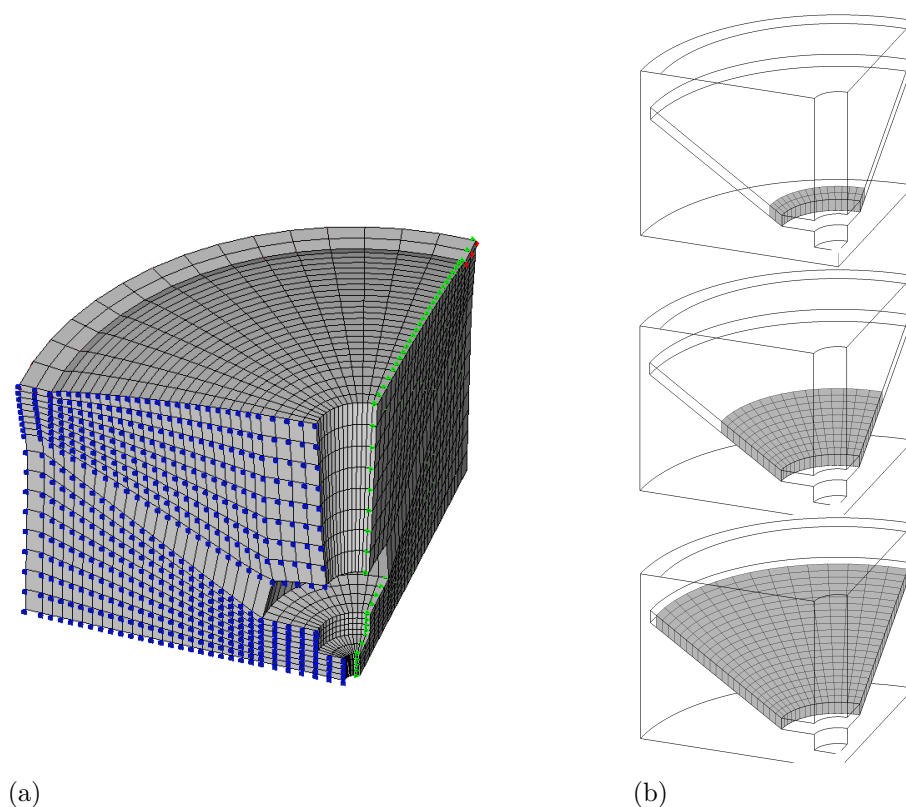


Figura 7.20: Teste de Arrancamento: (a) sólido deformado para deslocamento δ de 0,4 mm; (b) células com descontinuidade ativada em 3 etapas da trajetória: com deslocamento $\delta = 0,1$ mm; na carga de pico antes da trajetória descendente ($\delta = 0,24$ mm); e para deslocamento $\delta = 0,4$ mm.

7.6 Flexão em Três Pontos - Petersson (1981)

Nesse exemplo analisa-se o caso de flexão de uma viga de concreto simples com entalhe, conforme estudo experimental desenvolvido por Petersson (1981). Os resultados experimentais são utilizados como referência, o que difere este exemplo daquele apresentado na seção 7.4, que dispõe apenas de referências numéricas para avaliação comparativa dos resultados. Assim, pode-se avaliar também o desempenho da abordagem diferenciada que considera transição entre regimes contínuos (elástico, inelástico) e com descontinuidades (fracas ou fortes).

A viga prismática de seção retangular tem todas as suas dimensões indicadas na figura 7.21, onde também são indicados os valores de parâmetros que caracterizam o concreto, como energia de fratura, G_f , tensão resistente à tração, f_t , módulo de elasticidade,

E , e coeficiente de Poisson, ν . Nessa figura, pode-se observar também os apoios e carregamento considerados.

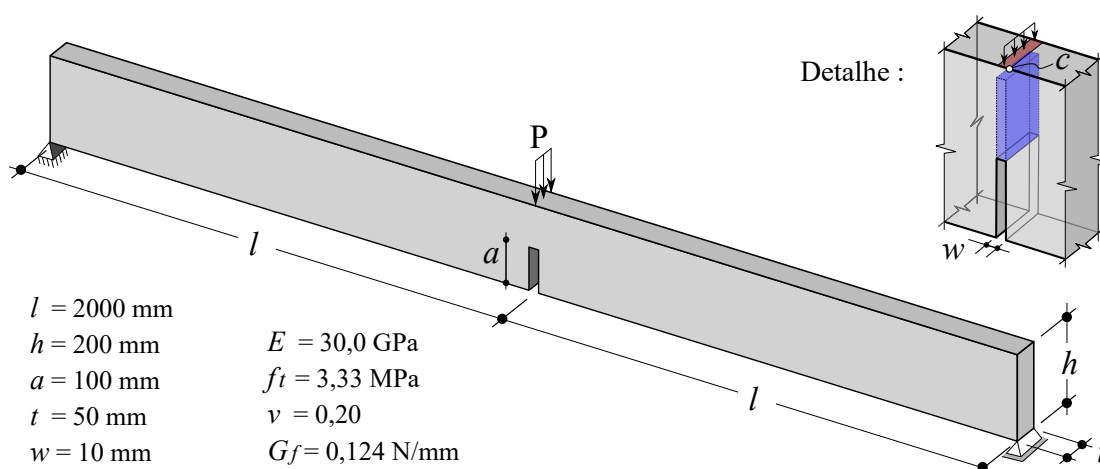


Figura 7.21: Flexão em três pontos de Petersson (1981): dimensões, parâmetros e condições de contorno.

Na parte superior a carga concentrada, P , foi aplicada em uma faixa com largura 10 mm ao longo da espessura da viga. Foi considerado o ponto, c , na lateral dessa faixa de carga, para o controle de deslocamento vertical da análise não-linear. Considerando a simetria do problema, a trajetória de propagação da trinca e, portanto, a região do domínio a discretizar é previamente conhecida.

Foram utilizadas malhas geradas no software Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009), v.4.10.1, concentrando a discretização na região central de interesse da viga. Duas malhas, com funções de aproximação distintas para os elementos de contorno (linear e quadrática), foram desenvolvidas. Para efeitos de comparação, procurou-se manter uma ordem de grandeza semelhante para o número de graus de liberdade em cada caso.

Identifica-se como “malha 1” aquela formada por células e elementos de contorno com aproximações lineares (3514 elementos, 208 células, 3724 nós). A “malha 2” é composta por células e elementos de contorno com aproximações quadráticas (1210 elementos, 126 células, 3380 nós). A figura 7.22 ilustra as malhas consideradas.

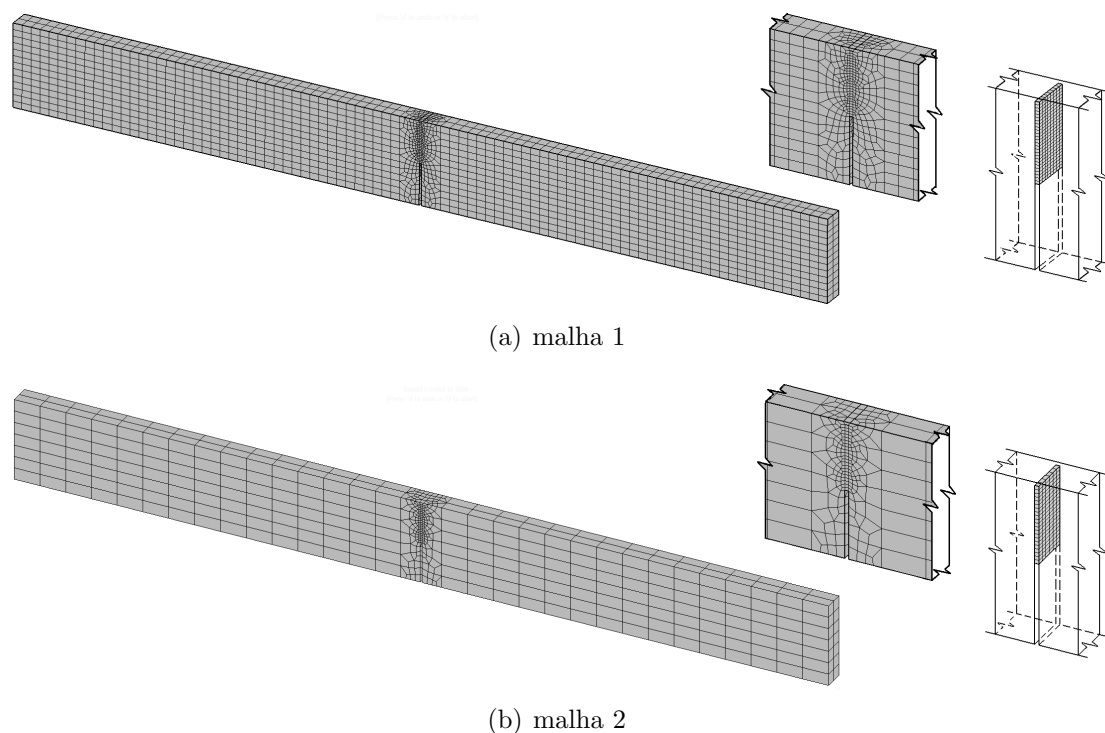


Figura 7.22: Flexão em três pontos de Petersson (1981): elementos de contorno e células.

As análises foram conduzidas com duas abordagens, a primeira considerando o regime de descontinuidade forte ativado diretamente após o regime elástico, enquanto a segunda considera a possibilidade de transição entre regime elástico, inelástico, descontinuidade fraca e descontinuidade forte (não obrigatoriamente passando por todos os regimes em sequência). Na primeira abordagem a ativação de regime de descontinuidade é considerada quando a tensão principal máxima supera a tensão limite elástica, enquanto na segunda abordagem é verificada numericamente a condição de bifurcação, conforme Mota et al. (2016). Na figura 7.23 são apresentados os resultados obtidos para as trajetórias de equilíbrio.

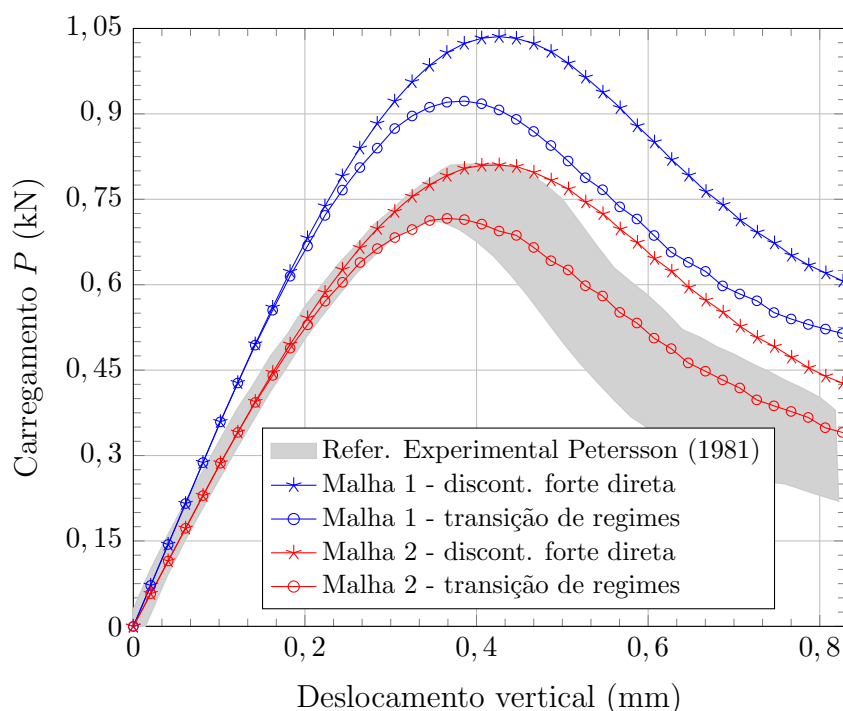


Figura 7.23: Flexão em três pontos de Petersson (1981): relação entre carga P e deslocamento vertical do ponto de controle.

Conforme esperado (ver seção 7.4), o uso de elementos com aproximação quadrática conduz a resultados mais acurados em problema envolvendo deslocamento por flexão.

Avaliando os resultados aqui apresentados, pode-se observar que o uso do modelo de banda variável, que considera transição entre regimes (especialmente entre descontinuidades fraca e forte) aproximam-se melhor dos resultados experimentais. Entende-se que essa abordagem com transição é capaz de reproduzir, com melhor coerência, o desenvolvimento da zona de processo de fratura. Nesse exemplo, esse desenvolvimento parece ser relevante, observando-se a influência do conhecido “efeito de tamanho”.

Conforme apresentado na seção 5.4.1, considera-se variação linear da espessura da banda de localização. Nesse exemplo também foi avaliado o uso de diferentes valores para o parâmetro $\bar{\beta}$, que define a razão entre o valor da variável interna para estabelecimento de descontinuidade forte q_{SD} , e o valores para o ponto de bifurcação q_B (equação 5.27). Nos resultados já apresentados, foi arbitrado $\bar{\beta} = 0,9$, valor adotado em outras referências (Manzoli et al., 1998; Peixoto, 2016; Mendonça, 2021).

Os resultados obtidos utilizando diferentes valores de $\bar{\beta}$ são apresentados nas figuras 7.24 e 7.25. Observa-se uma influência significativa do valor utilizado nos resultados obtidos. Usando valores maiores de $\bar{\beta}$ os resultados se aproximam daqueles obtidos pela abordagem com descontinuidade forte direta, enquanto valores muito pequenos geram trajetórias de equilíbrio diferentes. Considerando os resultados obtidos com uso de elementos quadráticos (mais adequado a esse problema que envolve flexão), nota-se que usando valores maiores de $\bar{\beta}$ (entre 0,80 e 0,99) obtém-se trajetórias mais aderentes aos resultados experimentais.

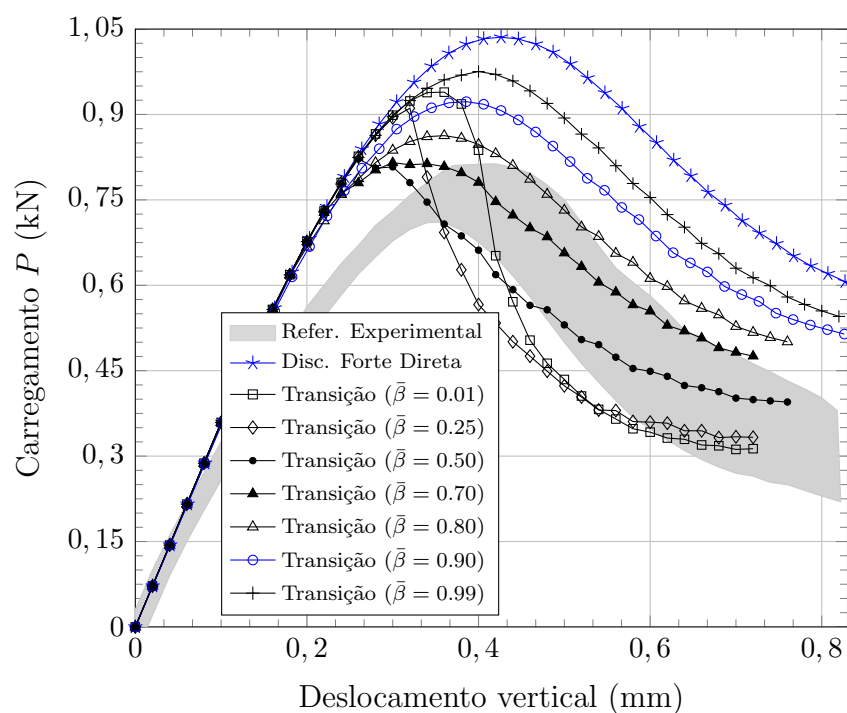


Figura 7.24: Flexão em três pontos de Petersson (1981): Malha 1 (linear) – critério para determinação de q_{SD} .

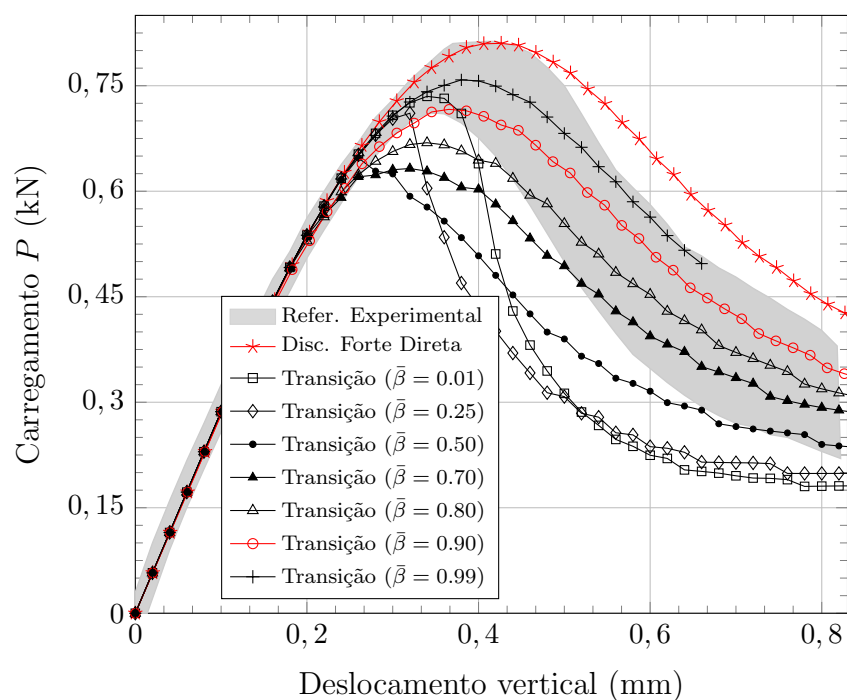


Figura 7.25: Flexão em três pontos de Peterson (1981): Malha 2 (quadrática) – critério para determinação de q_{SD} .

O parâmetro $\bar{\beta}$ tem uma forte influência na velocidade de ativação da descontinuidade forte. A título ilustrativo, a figura 7.26 mostra a evolução da falha em diferentes passos da análise, nos casos extremos considerados, *i.e.*, $\bar{\beta} = 0,01$ e $\bar{\beta} = 0,99$, e para o valor usual $\bar{\beta} = 0,90$.

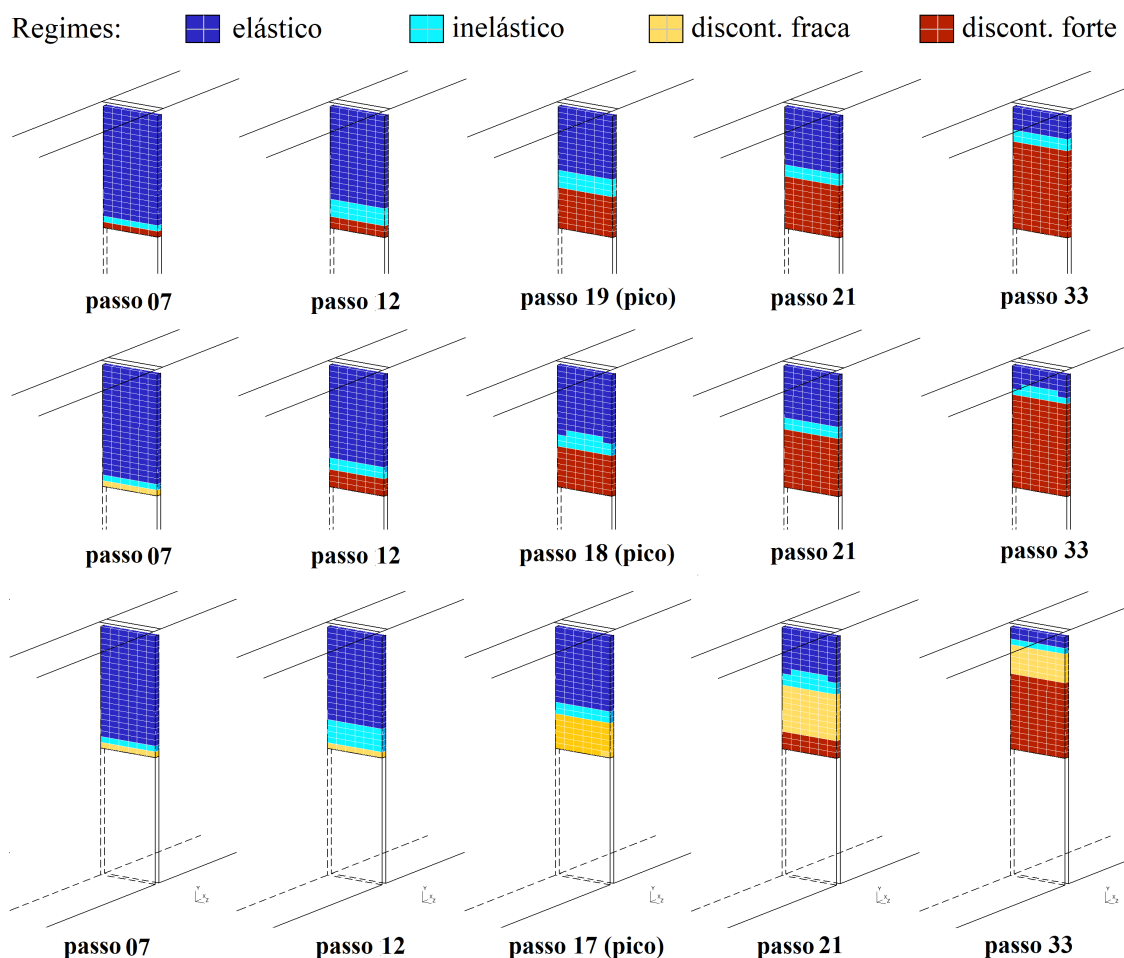


Figura 7.26: Flexão em três pontos de Petersson (1981): Malha 2 – evolução da análise considerando valores de $\bar{\beta} = 0,01$ (acima), $\bar{\beta} = 0,90$ (centro) e $\bar{\beta} = 0,99$ (abaixo).

Entende-se que esse parâmetro é determinante para o tamanho da zona de processo de fratura desenvolvida na análise numérica do sólido sendo, possivelmente, uma maneira de levar em consideração questões relativas à dimensão do agregado e efeitos de tamanho no desenvolvimento da trinca. Nos casos extremos, com valor maior ($\bar{\beta} = 0,99$) a falha se desenvolve praticamente sem a presença de região de descontinuidade fraca (relacionada à microfissuração excessiva). Por outro lado, com valor menor ($\bar{\beta} = 0,01$), a lenta transição entre descontinuidades fraca e forte (relacionada à evolução de microfissuras para macrofissura), faz com que se desenvolva uma zona de processo de fratura de tamanho irreal. Não foram encontrados estudos mais específicos a respeito dos valores mais indicados para esse parâmetro, assim, as análises nos exemplos seguintes seguiram considerando o valor tradicional $\bar{\beta} = 0,90$.

É importante ter em conta que, para uma análise visual mais rigorosa do desenvolvimento das diferentes zonas em regimes diferentes dentro da ZFP, é necessário utilizar células de tamanho reduzido (na direção de propagação da falha). Conforme medidas baseadas em imagens digitais, a extensão da ZPF é menor que duas vezes a dimensão máxima do agregado (concreto simples) na carga de pico (Wu et al., 2011), tornando difícil captar variações de regime ao longo de sua extensão. Ainda, é também necessária a adoção de passos de carga muito pequenos e captação contínua de imagens. Não sendo pequenos o suficiente, pode acontecer a transição entre descontinuidades fraca e forte em um mesmo passo de carga, passando despercebido nas imagens capturadas. Esse rigor não foi adotado nessa análise ilustrativa, por não haver informações experimentais detalhadas para comparação. Possivelmente, com trabalhos que apresentam descrição mais detalhada da ZPF obtida por emissão acústica, como recentemente feito por Lin et al. (2020), essa análise possa ser desenvolvida.

7.7 Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982)

Para avaliar a capacidade da metodologia utilizada nesse trabalho, em investigar o comportamento do processo de degradação do material, quando sujeito a um modo misto de sollicitação, este exemplo considera o ensaio de cisalhamento em quatro pontos. Estudado experimentalmente por Arrea e Ingraffea (1982), é um problema amplamente utilizado na avaliação de formulações numéricas, devido à difícil simulação dos efeitos de cisalhamento em meios parcialmente frágeis. Aqui pode-se observar uma combinação de fratura em modo I e modo II.

Duas forças diferentes são aplicadas na parte superior de uma viga prismática com entalhe transversal na parte inferior, e apoios posicionados conforme a figura 7.27. No ensaio, é monitorado o deslocamento vertical relativo das extremidades do entalhe, medida conhecida como “Crack Mouth Sliding Displacement” (CMSD) durante a aplicação da carga. Os parâmetros do concreto utilizado nos ensaios não foram totalmente reportados, podendo-se encontrar valores variados em diferentes trabalhos. Foram assumidos

A faixa transversal de aplicação de cargas (forças de superfície) foi considerada com espessura de 30 mm. O ponto de controle de deslocamento direto da análise não-linear é indicado na figura 7.27, em um dos vértices do entalhe (ponto A). As peças de apoio foram modeladas com o mesmo material da viga.

Também neste exemplo, as análises foram conduzidas em duas abordagens, a primeira considerando o regime de descontinuidade forte ativado diretamente após o regime elástico, enquanto a segunda considera a possibilidade de transição entre regime elástico, inelástico, descontinuidade fraca e descontinuidade forte (similar ao exemplo anterior).

Na figura 7.28 são apresentadas duas das malhas consideradas nas análises, para os quais os resultados convergem após refinamentos sucessivos. Ambas foram geradas no software Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009), utilizando elementos de contorno quadrilaterais e células hexaédricas. Na “malha 1” os elementos e células têm aproximação linear (4716 elementos BQ4, 700 células BH1, 4718 nós). Na “malha 2” os elementos e células têm aproximação quadrática (1712 elementos BQ8, 700 células BHQ1, 5838 nós). Para redução do tamanho dos modelos numéricos, foi aproveitada a simetria e considerada apenas metade da espessura da viga, ação necessária para viabilizar o processamento nas máquinas disponíveis. As células que discretizam o domínio foram posicionadas com base na trajetória de falha do modelo obtida em análise bidimensional por Peixoto (2016), se enquadrando dentro dos limites da região experimental de fratura mostrada por Paredes et al. (2016).

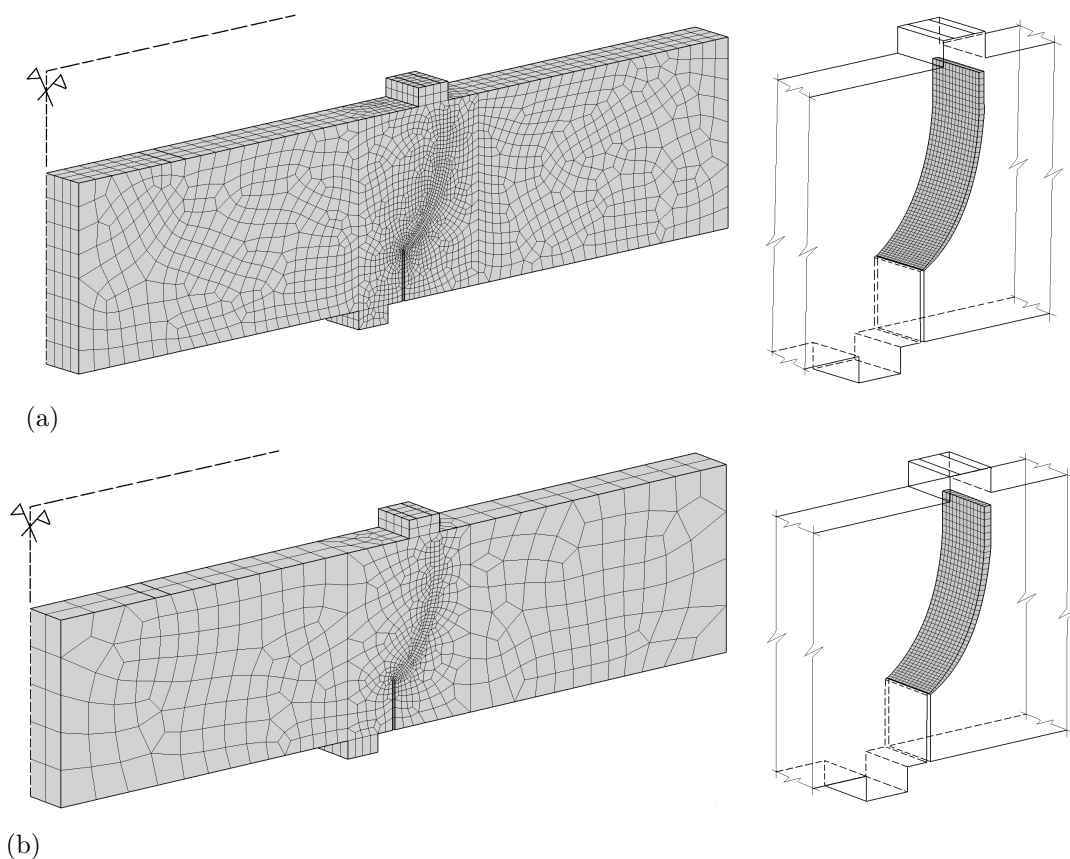


Figura 7.28: Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): elementos de contorno e células; (a) malha 1; (b) malha 2.

Uma vez que as células são posicionadas envolvendo a provável superfície de falha, optou-se por considerar a direção da normal à superfície de falha dentro de cada célula coincidente com a direção normal à superfície naquele ponto, com a intenção de se evitar desvios que comprometessem a estabilidade numérica dos cálculos. Na figura 7.29 são apresentados os resultados obtidos para as trajetórias de equilíbrio, relacionando a força, P , com o $CMSD$.

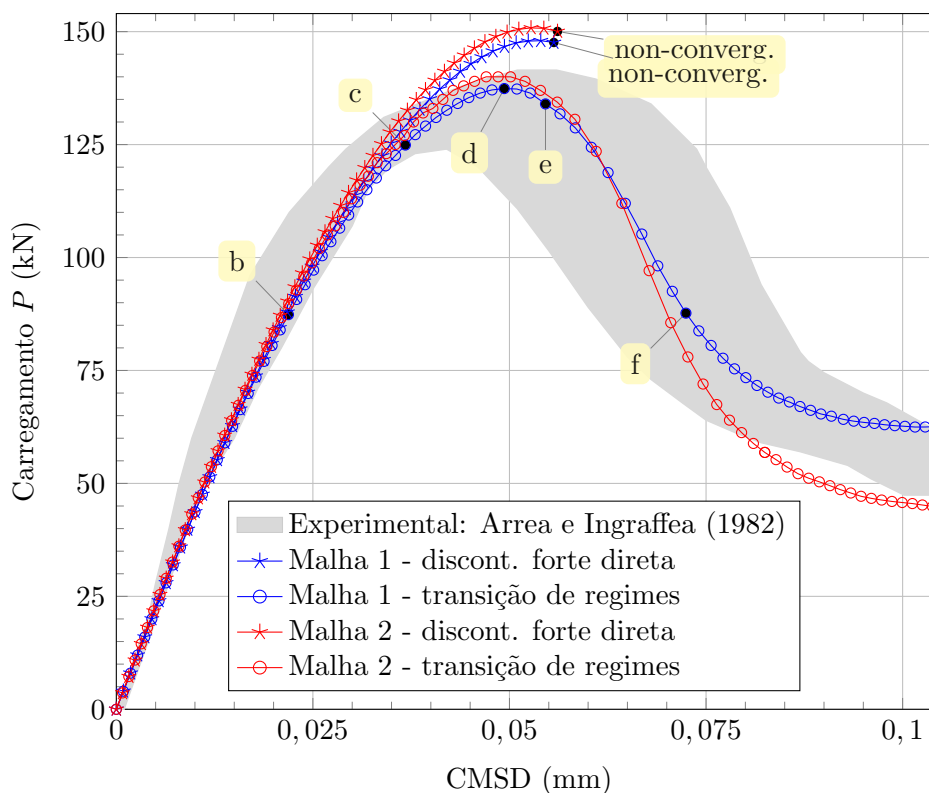


Figura 7.29: Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): trajetória de equilíbrio relacionando carga P com medidas $CMSD$.

Como assinalado na figura 7.29, a abordagem que considera o regime de descontinuidade forte direto (sem transições) apresentou instabilidade numérica, não se obtendo convergência nos cálculos de saltos de descontinuidade em algumas células em particular. Testes feitos com diferentes malhas confirmaram esse problema, que permaneceu mesmo ao adotar o cálculo livre da direção da normal à superfície de descontinuidade (direção da tensão principal máxima). Esse problema não foi observado ao utilizar o modelo de banda variável, que considera possibilidade de transições entre regimes (elástico; contínuo inelástico; descontinuidade fraca; descontinuidade forte).

A estratégia de adotar a direção da normal à superfície de descontinuidade, n_i , seguindo uma superfície de falha conhecida, resulta naturalmente em uma abordagem com consistência estática e cinemática, e quase-simétrica (ver seção 6.3.3). Ainda assim, foram feitos testes considerando a relaxação de uma das condições de consistência e imposição de simetria ($n_i \parallel \varphi_{,i}$) para verificar uma possível influência na estabilidade numérica da solução. Com ambas as relaxações de consistência (KOS ou SOS) os resultados foram

quase coincidentes, e a instabilidade permaneceu.

Ainda na figura 7.29, os resultados não mostram vantagem no uso de elementos com aproximação quadrática, diferente do exemplo em que a flexão é determinante nos deslocamentos. As cargas máximas obtidas com os dois tipos de elementos são bastante próximas, mas no ramo descendente a trajetória obtida com elementos quadráticos é mais acentuada. Ainda assim, ambas conduziram a trajetórias de equilíbrio consistentes com os resultados experimentais.

Considerando a abordagem com transição de regimes, espera-se que o modelo numérico replique a ZPF, *i.e.*, na direção de avanço da trinca, células com descontinuidade forte ativada são seguidas por células com descontinuidade fraca ativada, seguindo células em regime inelástico até células em regime elástico. Uma particularidade nas análises desse exemplo, é que em alguns poucos passos intermediários da análise não-linear, algumas células não tiveram a ativação da descontinuidade acompanhando a frente da trinca. Elas permaneceram em regime contínuo inelástico por alguns passos além do esperado, e com o avanço da análise a descontinuidade nessas células foram ativadas (diretamente em regime de descontinuidade forte). Como essas regiões que têm ativação tardia são pequenas (poucas células), não parece trazer prejuízo aos resultados. Na figura 7.30 pode-se observar o que foi descrito.

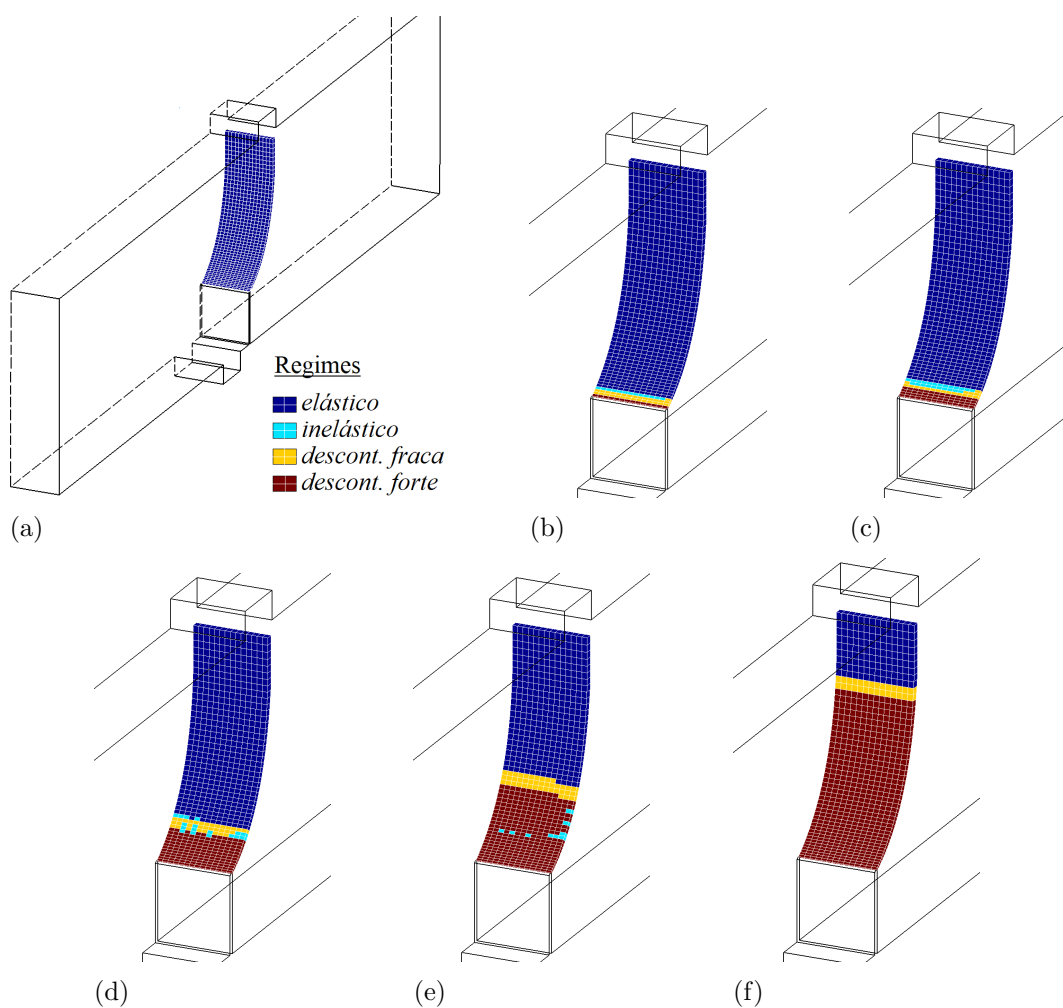


Figura 7.30: Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): transição de regime nas células, em diferentes passos intermediários, indicados na figura 7.29 pela letra correspondente.

Um efeito colateral dessa ativação tardia, é que caso se opte por fazer a análise com inclusão progressiva das células no modelo, ocorre um tipo de travamento que impede o avanço das ativações de descontinuidade. Dependendo do algoritmo usado, não são incluídas novas células na análise, e a trajetória de equilíbrio fica inconsistente (apenas crescente).

Analisando a trajetória de equilíbrio associada ao deslocamento vertical em um ponto material na região de aplicação da carga central, algumas simulações numéricas reportam um acentuado “snap-back” (Penna, 2011; Most e Bucher, 2007). Os resultados obtidos nesse trabalho também captam esse comportamento, conforme apresentado na figura 7.31, junto com resultados numéricos comparativos.

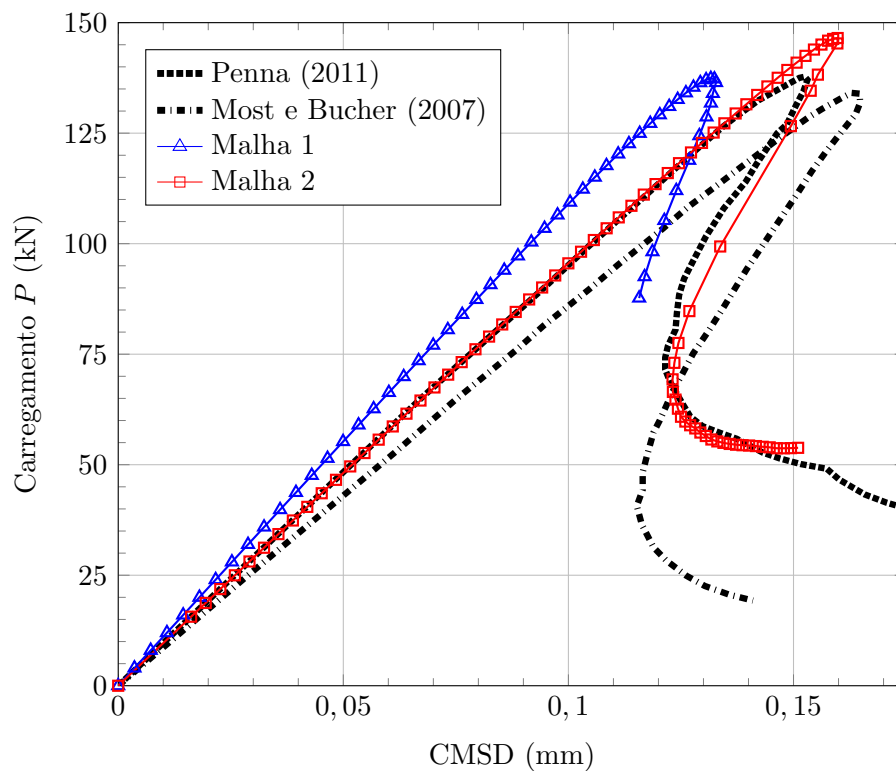


Figura 7.31: Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): trajetória de equilíbrio de ponto de aplicação da carga central.

Como ilustração, as configurações deformadas do modelo são apresentadas na figura 7.32 em alguns passos intermediários da análise (malha 2). Pode-se ver o avanço da descontinuidade (células com descontinuidades ativadas) pela notória deformação excessiva.

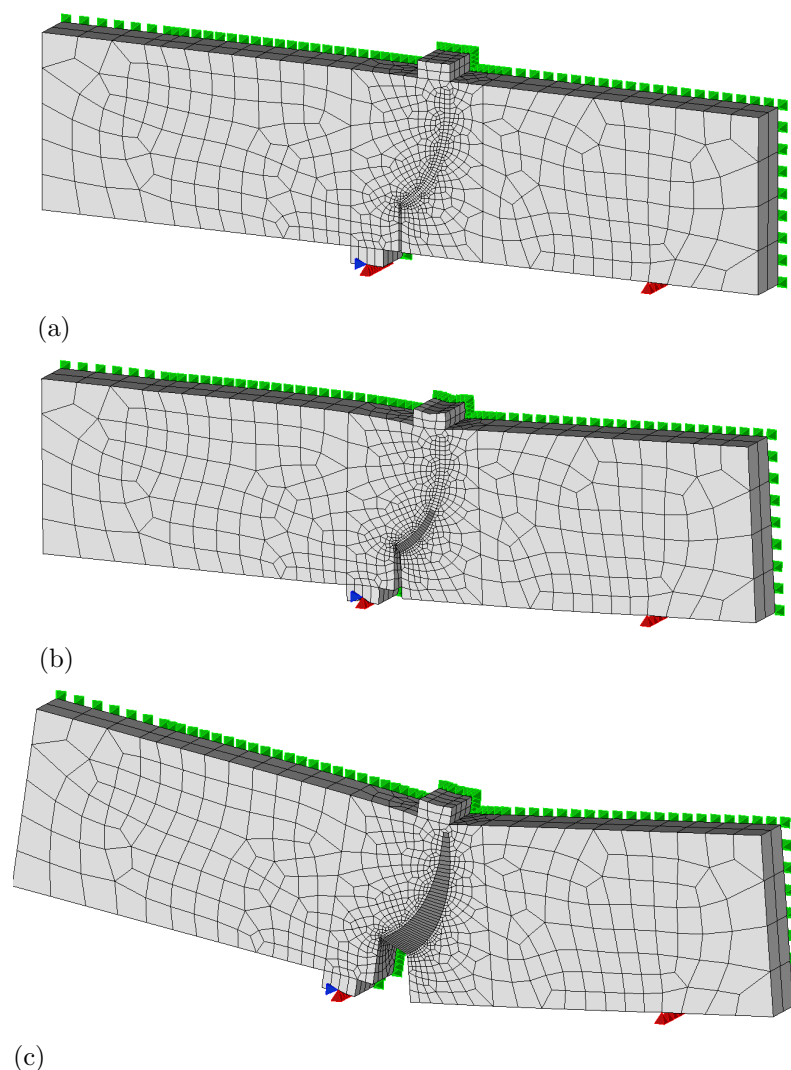


Figura 7.32: Cisalhamento em quatro pontos – Arrea e Ingraffea (1982): configurações deformadas do modelo (ampliado em 200 vezes), e progressão da descontinuidade.

7.8 Torção em Viga com Entalhe Diagonal - Brokenshire (1996)

Este último exemplo considera uma viga prismática de concreto, com um entalhe transversal enviesado, sujeita a um esforço de torção, como proposto por Brokenshire (1996). Uma descrição detalhada do procedimento experimental, junto com uma simulação numérica, é apresentada por Jefferson et al. (2004). O exemplo tem como resultado uma superfície de falha com dupla curvatura de geometria complexa, causada por transição do modo de fratura III para o modo I, de acordo com Benedetti et al. (2017), Wu et al. (2021), e outros. O uso de modelo numérico tridimensional é imprescindível para análise

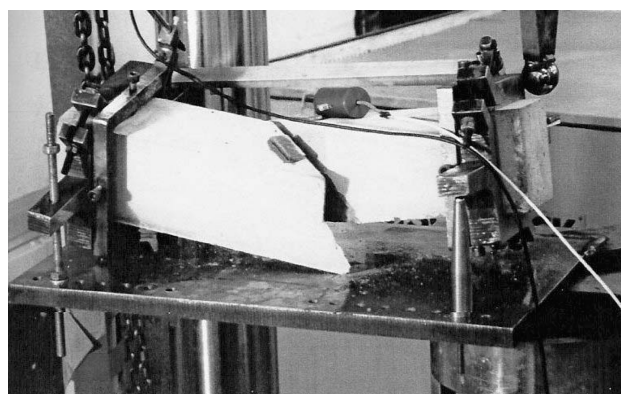
adequada desse problema.

Além do modelo detalhado por Jefferson et al. (2004), esse exemplo foi analisado numericamente por muitos autores, com diferentes abordagens. Alguns são citados brevemente aqui, observando sempre as relações de cargas com abertura de trinca, e correspondentes superfícies de falha.

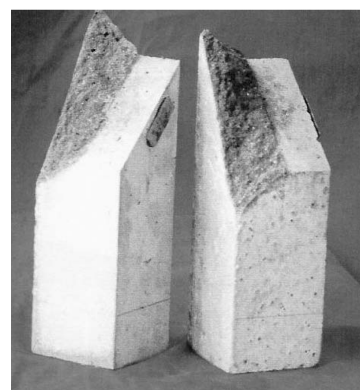
Os resultados obtidos por Gasser e Holzapfel (2006), usando o MEF com partição de unidade e descontinuidade forte embutida, subestimam a carga limite quando comparado diretamente com Jefferson et al. (2004). Uma superfície de falha com grande curvatura foi obtida consistentemente. Benedetti et al. (2017) usaram o MEF com estabilização de variáveis de deformação e deslocamentos, considerando o critério de falha de Rankine e Drucker-Prager em modelos de plasticidade e de dano contínuo isotrópico para descrever o comportamento material em regime inelástico. Os resultados com modelo de dano tiveram uma ótima concordância com a referência. Nesse trabalho foram destacadas algumas diferenças entre as superfícies de falha obtidas com o modelo de plasticidade e o modelo de dano. Dias et al. (2018) adotaram a formulação do MEF estendido com descontinuidade embutida para obter resultados com boa concordância em relação à referência experimental (Jefferson et al., 2004). A superfície de falha obtida apresentou curvaturas suaves se comparada com as anteriores. Uma superfície de falha com curvaturas menos acentuadas também foi mostrada nos resultados de Wu et al. (2021), que usaram a metodologia de “phase-field” no modelo de zona coesiva regularizada com um algoritmo modificado para solução das equações governantes. Os resultados obtidos com seus modelos de até 999300 elementos hexaédricos (“brick elements”) subestimaram a carga máxima de pico (aproximadamente 15% abaixo), o que os autores explicaram pelo uso do critério de falha simples de Rankine isotrópico. Rodrigues et al. (2020) usaram uma abordagem multi-escala, na qual a técnica de fragmentação de malha foi adotada na meso-escala. Nessa técnica, elementos de interface, com elevada razão-de-aspecto foram empregados para modelar interface da zona de transição matriz-agregado, bem como para representar o desenvolvimento de potenciais trincas em diferentes estágios. Os resultados obtidos apresentaram carga máxima ligeiramente superior à referência experimental (cerca de 9% acima), e uma

boa concordância no ramo de amolecimento da curva. Rocha e Leonel (2022) parecem ter sido os primeiros a analisarem o problema usando o MEC, em sua formulação dual com uma frente de trinca coesiva. Com alguns ajustes nos parâmetros do material, seus resultados mostraram boa concordância com a referência experimental.

Em relação ao ensaio, a viga prismática de concreto com um entalhe diagonal no centro da face superior (inclinado 45° em relação ao eixo longitudinal), é presa a duas molduras de aço com braços usados para suporte e para aplicação de carga excêntrica. Como resultado tem-se um momento de torção alinhado com o eixo longitudinal da viga. O aparato foi projetado para não restringir o empenamento das seções transversais das extremidades da viga. A figura 7.33 ilustra um corpo de prova sob ensaio.



(a) aparato de ensaio com a viga



(b) viga dividida após ensaio

Figura 7.33: Torção em viga com entalhe: aparato de ensaio e corpo de prova. Fonte: Jefferson et al. (2004), pg. 280.

No modelo numérico apenas um tipo de material foi considerado (limitação da implementação). Considerou-se assim, braços enrijecidos nas extremidades da viga, para suporte e carregamento. As dimensões são apresentadas na figura 7.34, assim como as propriedades do concreto (módulo de elasticidade, E , resistência à tração, f_t , coeficiente de Poisson, ν , e energia de fratura, G_f), obtidos em Jefferson et al. (2004).

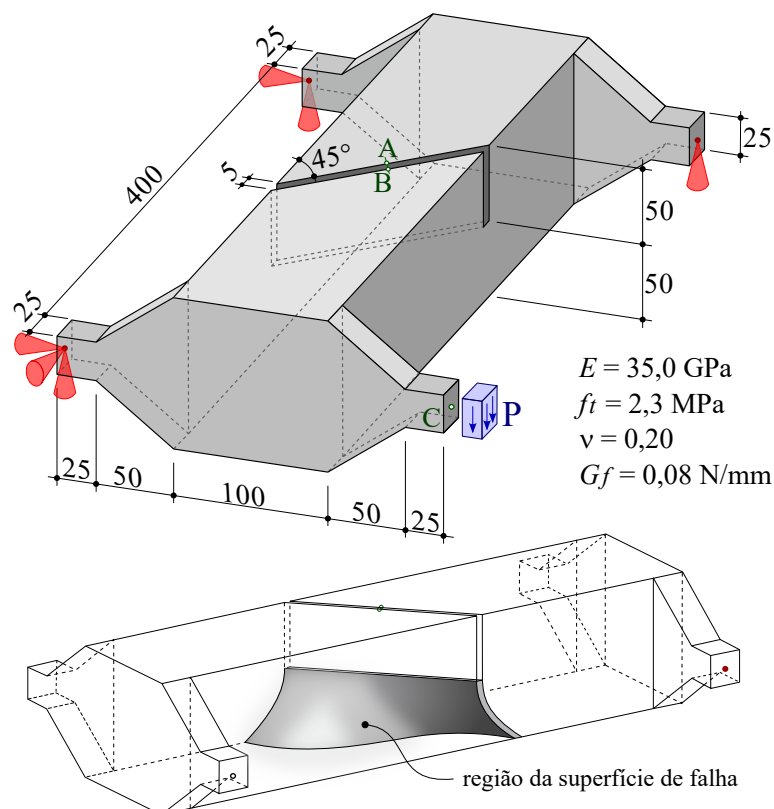


Figura 7.34: Torção em viga com entalhe: dimensões, parâmetros do material, condições de contorno e região do domínio de provável desenvolvimento da falha.

Espera-se que a superfície de falha tenha seu início ao longo do entalhe diagonal, estendendo-se até o fundo da viga e formando uma superfície de falha com curvatura complexa. As células são posicionadas de modo a descrever essa superfície de falha. Esse posicionamento foi definido com base nas ilustrações apresentadas em diferentes referências, levando em conta a anti-simetria do problema, destacada por (Benedetti et al., 2017). A figura 7.35 mostra, esquematicamente, vistas de topo e lateral das superfícies de falha obtidas por diferentes autores, baseado em figuras apresentadas.

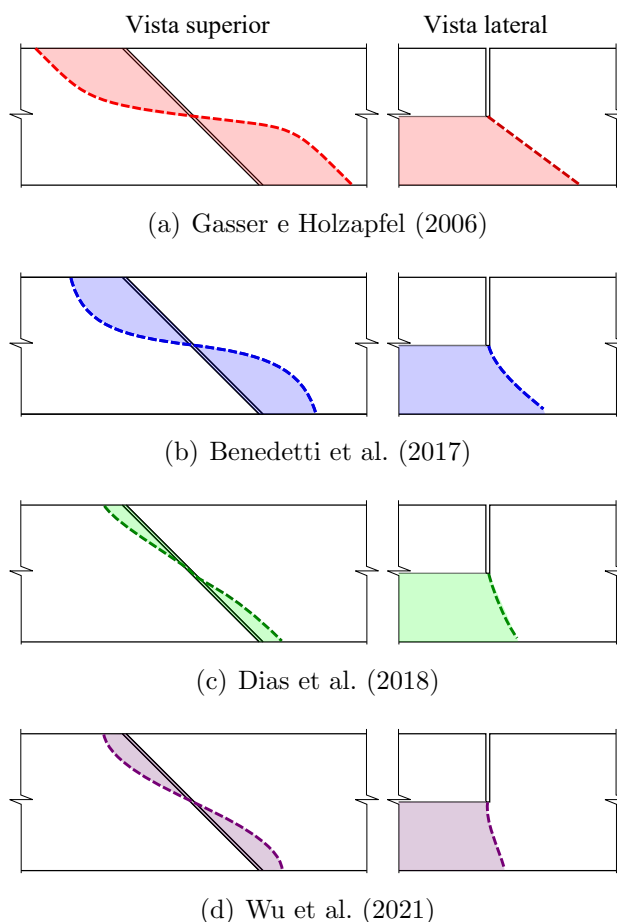


Figura 7.35: Torção em viga com entalhe: vistas esquemáticas das superfícies de falha apresentada por diferentes autores.

Análises foram feitas considerando as diferentes formas de superfícies de falha. Ao adotar superfícies com curvaturas mais acentuadas (figuras 7.35a,b), observou-se instabilidades numéricas precoces nas análises, mesmo com a imposição da direção da normal à superfície de descontinuidade de cada célula, coincidente com a normal à superfície de falha considerada. As instabilidades foram registradas no método iterativo de cálculo do salto de deslocamento. Ao adotar superfícies com curvaturas menos acentuadas (figuras 7.35c,d), foi possível evoluir análises além das cargas máximas.

Os resultados obtidos nas análises são apresentados relacionando a carga aplicada com a abertura da trinca, tipicamente denominada CMOD (“crack mouth opening displacement”). A medida CMOD é feita no centro do entalhe em direção normal ao seu alinhamento (distância relativa entre pontos A e B, na figura 7.34). A análise não-linear considera o deslocamento vertical do ponto de controle posicionado no braço do suporte

onde a carga é aplicada (ponto C na figura 7.34).

As malhas foram geradas no Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009), sendo necessário processamento em máquinas virtuais disponíveis, com 32 ou 64GB de memória. As malhas 1 e 2, para as quais são apresentados resultados, têm a discretização do domínio ilustrada na figura 7.36. A “malha” 1 tem elementos de contorno quadriláteros e células hexaédricas com aproximação linear (3916 BQ4, 1260 BH1, 5176 nós), com discretização do domínio conforme figura 7.35(c). A “malha” 2 tem elementos de contorno e células com aproximação quadrática (3128 BQ8, 1064 BHQ1, 7258 nós), com discretização do domínio conforme figura 7.35(d).

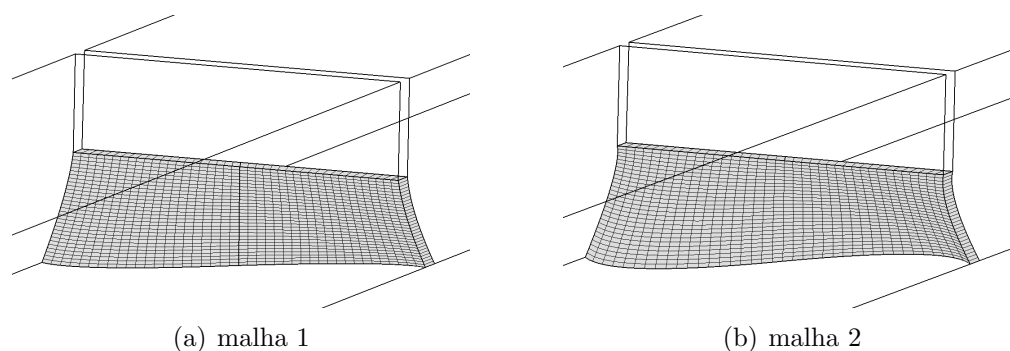


Figura 7.36: Torção em viga com entalhe: discretização do domínio em células hexaédricas.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 7.37, junto com uma região delimitada pelos dois resultados experimentais apresentados por Jefferson et al. (2004).

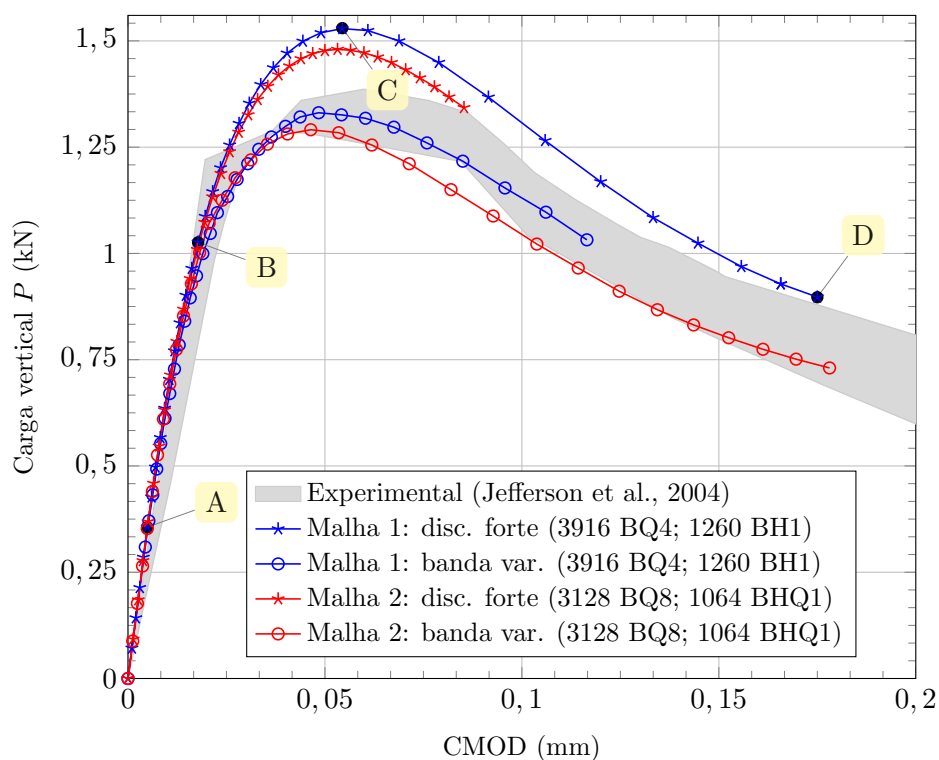


Figura 7.37: Torção em viga com entalhe: trajetória de equilíbrio – carga P versus abertura da boca da trinca (CMOD).

Para ilustrar o avanço da descontinuidade, foram marcados no gráfico alguns pontos para os quais se apresenta o avanço da descontinuidade, na figura 7.38. Os pontos são: A – primeiras ativações de descontinuidade; B – ponto intermediário; C – carga de pico; D – limite da análise. As células ativadas estão destacadas, e a configuração deformada da viga também é apresentada, considerando o modelo da “malha 1”.

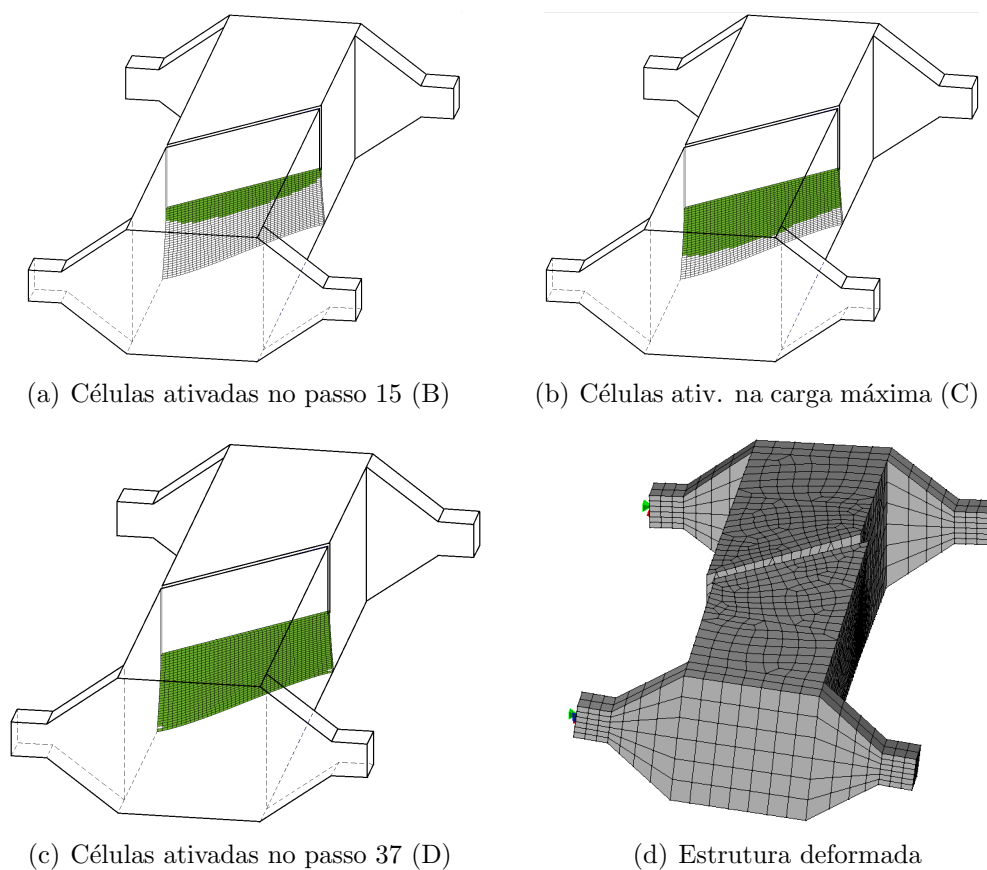


Figura 7.38: Torção em viga com entalhe: células com discontinuidades ativadas em diferentes passos da análise, e configuração deformada ampliada em 20 vezes.

De maneira similar, na figura 7.39 são apresentados os regimes nos quais se encontram as células em diferentes passos da análise. Pode-se acompanhar a evolução desde as primeiras mudanças de regime, situação para a carga máxima, até o último passo do processamento.

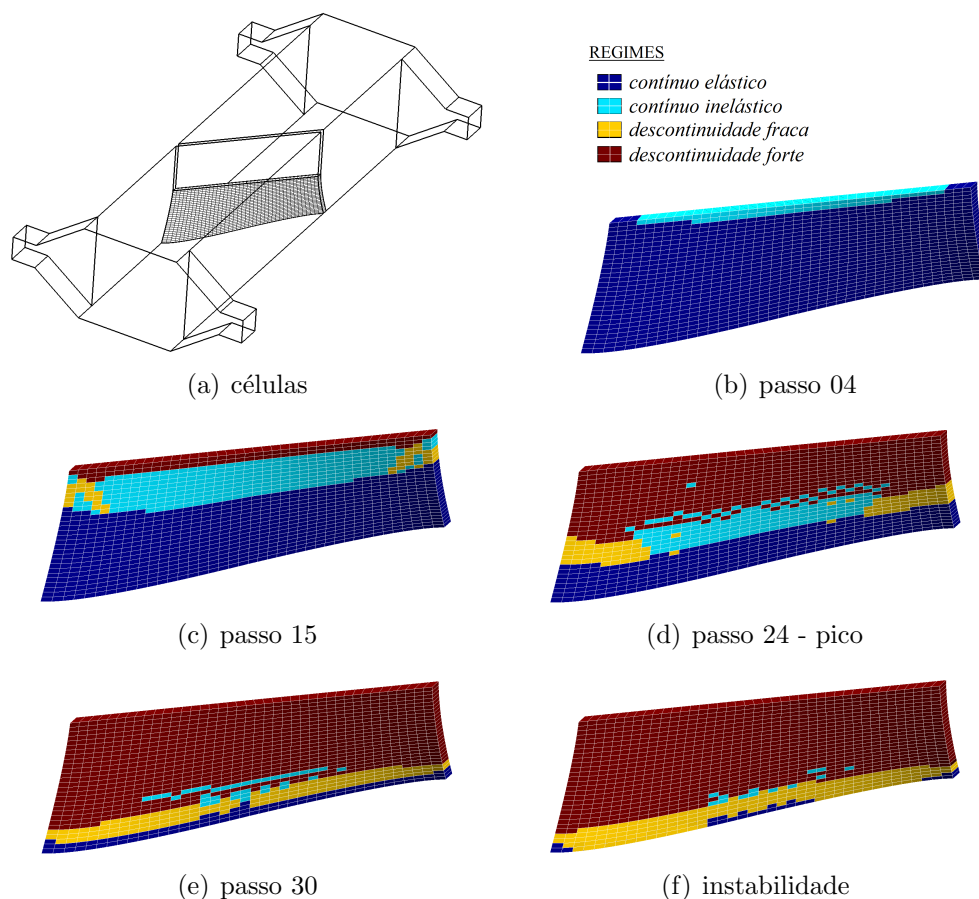


Figura 7.39: Torção em viga com entalhe: Malha 1 – transição de regime nas células, em diferentes passos intermediários.

Resultados obtidos com superfícies de falha iguais, mas variando o tipo de elemento (linear ou quadrático), ficaram muito próximos dos apresentados na figura 7.37. Não são mostrados para preservar a clareza, e por terem apresentado instabilidade em pontos menos avançados das trajetórias. A menos dos resultados da “malha 2” com descontinuidade forte direta, os processamentos foram interrompidos por falta de convergência na análise não-linear, que atingiram um número máximo de iterações estabelecido. Assim a trajetória de equilíbrio não apresentou todo o ramo descendente, como a maioria dos trabalhos de referência.

Observando as células com descontinuidade ativada nas figuras 7.38 e 7.39, nota-se que nos últimos passos as células que tocam o fundo da viga estão quase todas em regime descontínuo. Uma possível explicação para a instabilidade na análise não-linear, seria a dificuldade de se encontrar uma configuração de equilíbrio devido à perda de rigidez

ao ativar a descontinuidade de todas (ou praticamente todas) as células na superfície de falha. Essa dificuldade de convergência é notada em todas as análises (também nos outros exemplos) ao se considerar o elevado número de iterações necessárias para avançar ao passo de carga seguinte – *e.g.*, para avançar aos últimos passos da análise da malha 1 foram necessários 5321 e 5107 iterações, para modelos com descontinuidade forte direta e com transição, respectivamente. Também na figura 7.39 pode-se observar, com a evolução da análise, algumas células permanecendo em regime contínuo inelástico por mais tempo que o esperado. Como no exemplo anterior, a quantidade de células com ativação tardia são relativamente poucas, e não parecem prejudicar os resultados.

Nesse exemplo, também foi feito teste considerando relaxação das condições de consistência e forçando a simetria (ver seção 6.3.3), da mesma maneira como descrito no exemplo anterior, para tentar reduzir os problemas de instabilidade numérica. Porém, da mesma maneira, os problemas persistiram, com interrupção das análises no mesmo passo de carga. Ainda, seguindo a apresentação de algumas referências, como Jefferson et al. (2004), Lorentz (2017) e Dias et al. (2018), na figura 7.40 são apresentadas trajetórias de equilíbrio relacionando a carga aplicada P com o deslocamento relativo dos pontos A-B (figura 7.34) na direção enviesada do entalhe (“Crack Mouth Sliding Displacement” - CMSD).

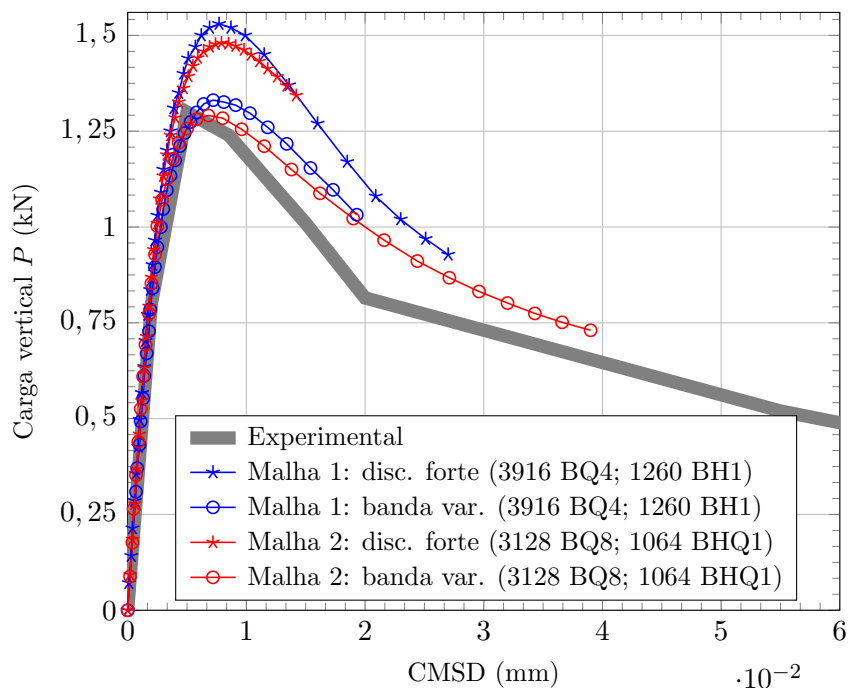


Figura 7.40: Torção em viga com entalhe: trajetória de equilíbrio – carga P versus medida CMSD.

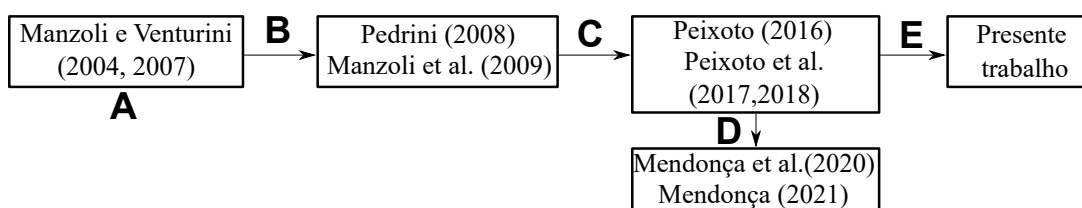
Finalizando, é válido citar que a análise do ensaio de Brokenshire é um teste complexo para análises numéricas. Nota-se, como relatado na literatura, que os resultados são muito sensíveis a pequenas variações na geometria, carga e condições de apoio. É um problema onde o tamanho da zona de processo de fratura pode ser significativo, em relação às dimensões da viga, como lembra Kaczmarczyk et al. (2014). A análise através do modelo de banda variável deve, portanto, fornecer os resultados mais precisos do que a adoção do regime de descontinuidade forte direta. Os resultados obtidos confirmam essa hipótese, e na figura 7.39, o tamanho da ZPF pode ser inferido pela quantidade de células além do regime elástico.

Capítulo 8

Considerações Finais

Neste capítulo são apresentadas considerações do trabalho desenvolvido nesta tese, fazendo um balanço das contribuições principais ao desenvolvimento da metodologia, e também apresentando alguns caminhos vislumbrados para novos avanços e desafios a serem superados.

Pode-se considerar que a linha de pesquisa desta tese, que trata da associação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com a abordagem de descontinuidade forte (CSDA) para análise não-linear de falha em sólidos parcialmente frágeis, teve início com o trabalho Manzoli e Venturini (2004). Trabalhos subsequentes promoveram avanços, como sintetizado na figura 8.1.



- A** - metodologia inicialmente proposta.
- B** - discretização em região limitada do domínio; células inseridas em tempo de processamento; algoritmo de geração e propagação em células triangulares.
- C** - possibilidade de transição de regimes contínuo elástico, inelástico, com descontinuidade fraca, e descontinuidade forte, algoritmo de propagação em células quadrilaterais.
- D** - classe de células com possibilidade de salto de descontinuidade não-uniforme.
- E** - células hexaédricas e aplicação em análise de problemas tridimensionais.

Figura 8.1: Desenvolvimento da linha de pesquisa

8.1 Desenvolvimento do Presente Trabalho

De maneira geral, o presente trabalho estende a aplicação da metodologia para a análise de sólidos tridimensionais, com algumas particularidades e restrições.

Foi implementada a geração de células para discretização de parte do domínio, para análise de problemas não-lineares envolvendo dissipação de energia. Nessas células hexaédricas superparamétricas foi incorporada também a formulação contínua com descontinuidade forte (CSDA). Para essa formulação, as funções de interpolação, incluindo componentes do salto de deslocamento, têm valores constantes em toda a célula, enquanto a geometria é aproximada por funções de forma lineares ou quadráticas. Os problemas analisados têm a forma das superfícies de falhas conhecidas, pela simetria e condições de contorno, ou obtidas em trabalhos de referência. Assim, a posição e geometria das células são pré-determinados no início das análises. A implementação também tornou disponível o uso de elementos de contorno quadrilaterais com aproximação quadrática, que se mostrou essencial nos exemplos em que os deslocamento por flexão são preponderantes.

As análises podem considerar a opção de ter a descontinuidade forte ativada diretamente ao final do regime elástico, quando a tensão principal na célula atinge o limite, f_t , do material. Dentro da célula, a superfície plana de descontinuidade \mathcal{S} tem sua direção normal determinada diretamente pela direção da tensão principal máxima, podendo ainda, alternativamente, ser determinada pela geometria da célula. Como uma outra opção, as análises podem considerar também o modelo de banda variável (seção 5.4), do qual a opção anterior (descontinuidade forte direta) é um caso limite. Nesse modelo, as células inicialmente em regime elástico podem evoluir para o regime inelástico, realizando constantemente a análise de bifurcação, que quando verificada, indica a transição para regime com descontinuidade, a princípio descontinuidade fraca e, finalmente, descontinuidade forte (não necessariamente passando por todos). Nesse modelo, é atribuída à banda de localização uma espessura inicial h_B (função dos módulos de amolecimento contínuo e coesivo) no instante da bifurcação. Essa espessura se reduz com a evolução da análise, de acordo com uma relação linear imposta, até que a variável interna (inicialmente q_B) se

reduza a um valor $q_{SD} = \bar{\beta}q_B$, e a espessura da banda assume um valor k pequeno (de regularização), configurando uma superfície de descontinuidade forte. Leis de amolecimento exponenciais específicas são definidas para cada regime.

Para o modelo de banda variável, a técnica numérica de análise de bifurcação (seção 5.1.2) foi incorporada à análise, como critério para a localização de deformações, determinando o ponto de transição entre regimes contínuo e descontínuo. Diferentemente da abordagem analítica, que usa expressões específicas para cada modelo constitutivo e dependentes também do número de dimensões do problema, tem-se a possibilidade de fazer análise utilizando modelos constitutivos distintos. Aqui foi adotado o modelo de dano descrito por Oliver et al. (2006), para materiais parcialmente frágeis (seção 2.2).

Uma série de outras modificações específicas foram imprescindíveis para viabilização das análises numéricas realizadas (seção 6.5). Ainda nessa seção 6.5, são comentadas algumas dificuldades enfrentadas em relação à elevada demanda por memória e tempo de processamento, e estratégias utilizadas para amenizá-las. As análises numéricas puderam ser desenvolvidas utilizando a opção de considerar todas as células que discretizam a região de falha inseridas desde o início da análise no modelo, ou alternativamente, puderam ser inseridas no modelo durante o processamento. A primeira alternativa permite um processamento ligeiramente mais rápido, mas a implementação da segunda é essencial para associação com um futuro algoritmo de propagação local. Nos diferentes exemplos analisados, uma série de considerações puderam se feitas, como se apresenta resumidamente a seguir.

Considerações sobre as análises e resultados

No exemplo inicial (Cubo Sujeito a Tração Simples) foi possível observar a capacidade de detecção e cálculo dos saltos de descontinuidade nas células implementadas, para diferentes malhas. Também é feito o alerta para a possibilidade de se obter resultados incoerentes caso a geometria das células utilizadas tenha proporções muito diferentes da forma cúbica, por imprecisão nas integrações. No próximo exemplo (Placa com Entalhe e Forças de Abertura) verificou-se a coerência dos resultados, com aqueles obtidos utilizando

a formulação com descontinuidade (CSDA) e o método dos elementos finitos.

O exemplo seguinte (Barra Prismática com Entalhe Circular de Canto) mostrou a propagação da descontinuidade formando a superfície de falha de maneira progressiva. A opção de considerar células inseridas progressivamente no modelo geraram resultados iguais à opção de ter todas as células inseridas desde o início da análise, sendo a segunda alternativa um pouco mais vantajosa em relação ao tempo de processamento. Essa pequena vantagem também foi verificada nos dois exemplos seguintes, sendo preferida a opção de se ter todas as células inseridas desde o início da análise.

A partir do quarto exemplo (Flexão em Três Pontos - Carpinteri (1989)), foram geradas malhas utilizando o software *Gmsh*. Nesse exemplo, em que os deslocamentos devem-se principalmente à flexão, mesmo com malhas mais grosseiras usando elementos quadráticos bons resultados foram obtidos. O quinto exemplo (Teste de Arrancamento) foi o último que considerou apenas análise com o modelo de descontinuidade forte direta. Aqui, pôde-se verificar coerência entre os resultados obtidos com a implementação realizada, e resultados de vários outros métodos numéricos. Nesse exemplo, é gerada uma superfície de falha com forma cônica.

Nos três últimos exemplos, as análises consideraram também o modelo de banda variável. Diferentemente dos exemplos anteriores, as referências para avaliação são resultados experimentais publicados por outros autores. De forma geral, comparando-se os modelos de banda variável com modelo de descontinuidade forte direta, em todos os exemplos observa-se uma redução nas cargas máximas da trajetórias de equilíbrio. Essa redução é corroborada pela informação do trabalho de Raiss et al. (1989), que observaram que uma trinca desenvolvida na ZPF ocorre com cerca de 90 por cento da resistência limite do material.

No sexto exemplo (Flexão em Três Pontos - Petersson (1981)), o uso de elementos quadráticos se mostrou mais adequado, como esperado, e o modelo de banda variável gerou resultados mais aderentes à referência experimental. Com relação ao parâmetro $\bar{\beta}$, que ajuda a determinar o instante da transição entre descontinuidades fraca e forte, o valor

adotado ($\bar{\beta} = 0,9$) mostrou-se adequado para obtenção de resultados de trajetórias de equilíbrio compatíveis com as referências. Através de análises feitas considerando diferentes valores para esse parâmetro, foi possível observar sua importância na determinação do tamanho da região microfissurada (em regime de descontinuidade fraca) da zona de processo de fratura. Mesmo visualizando as ativações em malha relativamente grosseira, notou-se que usando valores mais próximos da unidade tem-se praticamente a transição instantânea do regime contínuo para regime de descontinuidade forte, enquanto valores muito pequenos resultam em regiões muito extensas com descontinuidade fraca, incompatível com tamanho esperado para a ZPF. A calibração desse parâmetro, com uso de malha refinada e análise com pequenos avanços controlados, pode ajudar a caracterizar as regiões da ZPF, caso as análises tenham esse foco.

Nos últimos exemplos analisados (Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982); e Torção em Viga com Entalhe Diagonal: Brokenshire (1996)), também observou-se a redução nas cargas máximas obtidas nas trajetórias de equilíbrio, em proporção semelhante à referida anteriormente. Também como no caso anterior, usando o modelo de banda variável foi possível obter resultados aderentes aos resultados experimentais de referência. Problemas relativos à instabilidades numéricas foram observados em ambos os exemplos. Foi investigada, e descartada a influência das condições de quase-simetria e consistência estática e cinemática, nas instabilidades verificadas nos modelos. Essas instabilidades observadas estão relacionadas à necessidade de representação adequada da zona de processo de fratura (modelo de descontinuidade forte direta é mais instável), ou à perda de rigidez total, pelo desenvolvimento completo da superfície de falha. Ainda assim, em todos os exemplos foi possível determinar carga máxima e grande parte do ramo descendente da trajetória de equilíbrio.

De forma geral, os resultados obtidos nas análises realizadas apresentaram coerência com as referências, numéricas ou experimentais, em todos os exemplos. As limitações citadas ainda não permitem estender sua utilização da metodologia na análise de problemas práticos complexos, sem que se tenha implementado um algoritmo que permita o rastreamento da trajetória de falha em tempo de processamento. Ainda assim, os objetivos específicos

propostos para este trabalho foram alcançados, e permitiram mostrar que a metodologia estendida pode ser utilizada para análise de problemas tridimensionais.

8.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Citam-se aqui, algumas possibilidades de temas a serem abordados em trabalhos futuros, que permitiriam o avanço da metodologia, assim como algumas prováveis dificuldades a serem enfrentadas.

- Elaboração de algoritmo específico para determinação de geometria e posição de células a serem inseridas durante o processamento, através das quais se desenvolve a superfície de falha. Uma vez que esse algoritmo esteja operacional, deve ser possível analisar problemas de geometrias complexas. Alguns prováveis problemas a enfrentar:
 - dificuldade na compatibilização das novas células inseridas, com a malha dos elementos de contorno, que é lançada sem o conhecimento prévio da trajetória da superfície de falha;
 - dificuldades para garantir a continuidade, em células vizinhas, da superfície de descontinuidade (seção 6.4), que podem tornar muito complexo o algoritmo.
- Extensão da formulação e aplicação em problemas do MEC de domínio infinito e semi-infinito, eventualmente contemplando fratura hidráulica. Permanece a dificuldade relativa à continuidade da superfície de falha. Já em relação à compatibilização das novas células inseridas com a malha dos elementos de contorno, considerando-se que a descontinuidade parte de uma superfície contida no domínio infinito, para muitos problemas essa interação pode não existir.
- Estudo de técnicas para otimização computacional, que viabilize a análise de problemas maiores, reduzindo a demanda por memória e tempos de processamento. Avaliação do uso de outros métodos de controle da análise não-linear.
- Avaliação da correlação do parâmetro $\bar{\beta}$ com o tamanho da zona de processo de fratura desenvolvida em diferentes modelos, com diferentes materiais, e também sua possível

correlação com efeito de tamanho em análises de materiais parcialmente frágeis. Técnicas usadas para descrever a zona de processo de fratura em ensaios experimentais, como de emissão acústica e correlação de imagem digital, usados em alguns trabalhos, podem ser utilizados como referência.

- Desenvolvimento de técnica que viabilize a aplicação do método global de geração e propagação de fissuras. Para a análise preliminar do problema de potencial escalar, poderia-se utilizar pontos internos aleatórios. Sendo possível determinar, *a priori*, a trajetória de falha na análise preliminar, a implementação desenvolvida nesse trabalho poderia ser utilizada sem grandes modificações, definindo-se antecipadamente o posicionamento das células. Para a análise mecânica, a malha de contorno teria que ser modificada em relação à análise preliminar, para compatibilização com as células.

Referências Bibliográficas

- Almeida, L. P. R. e Leonel, E. D., (2022), Three-dimensional dipole BEM formulation for cohesive crack propagation modelling, *in* A. J. Torii e M. A. Argenta, eds, ‘Proceedings of the XLIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE’, Foz do Iguaçu, PR, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2013. ‘An object-oriented tridimensional self-regular boundary element method implementation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 37, pp. 1276–1284.
- Anderson, T. L., 2005. *Fracture Mechanics – Fundamentals and applications*. Third edn, Taylor & Francis Group.
- Andrade, S. T., 2006. Análise dos problemas bidimensionais da mecânica da fratura elástica linear usando a formulação dual do método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Annavarapu, C., Settghost, R. R., Vitali, E. e Morris, J. P., 2016. ‘A local crack-tracking strategy to model three-dimensional crack propagation with embedded methods’. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering.*, vol. 311, pp. 815–837.
- Areias, P. M. A. e Belytschko, T., 2005. ‘Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, pp. 760–788.
- Armero, F. e Kim, J., 2012. ‘Three-dimensional finite elements with embedded strong discontinuities to model material failure in the infinitesimal range’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, pp. 1291–1330.

- Arrea, M. e Ingraffea, A. R., (1982), Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete, Technical report, 81-13, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, USA.
- Barenblatt, G. I., 1962. ‘The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture’. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, pp. 55–129.
- Batoz, J. L. e Dhatt, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Bažant, Z. P., Belytschko, T. B. e Chang, T.-P., 1984. ‘Continuum theory of strain-softening’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 1666–1692.
- Bažant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16, pp. 155–177.
- Beer, G., Smith, I. e Duenser, C., 2008. *The Boundary Element Method with Programming: For Engineers and Scientists*. SpringerWienNewYork.
- Belytschko, T., Fish, J. e Engelmann, B. E., 1988. ‘A finite element with embedded localization zones’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 70, pp. 59–89.
- Benallal, A., Botta, A. S. e Venturini, W. S., 2006. ‘On the description of localization and failure phenomena by the boundary element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 5833–5856.
- Benedetti, L., Cervera, M. e Chiumenti, M., 2016. ‘High-fidelity prediction of crack formation in 2D and 3D pullout tests’. *Computers and Structures*, vol. 172, pp. 93–109.
- Benedetti, L., Cervera, M. e Chiumenti, M., 2017. ‘3D numerical modelling of twisting cracks under bending and torsion of skew notched beams’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 176, pp. 235–256.
- Blandford, G. E., Ingraffea, A. R. e Liggett, J. A., 1981. ‘Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 387–404.

- Botta, A. S., Venturini, W. S. e Benallal, A., 2005. ‘BEM applied to damage models emphasizing localization and associated regularization techniques’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 814–827.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., 1984. *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- Broek, D., 2002. *Elementary engineering fracture mechanics*. 4th edn, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Boston.
- Brokenshire, D. R., 1996. A study of torsion fracture tests. Tese de Doutorado, Cardiff University, U.K.
- Bui, H. D., 1978. ‘Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, pp. 935–939.
- Carol, I., López, C. e Roa, O., 2001. ‘Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, pp. 193–215.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31(20), pp. 2835–2865.
- Carpinteri, A., 1989. ‘Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32(2), pp. 265–278.
- Carpinteri, A. e Colombo, G., 1989. ‘Numerical analysis of catastrophic softening behaviour (snap-back instability)’. *Computers & Structures*, vol. 31(4), pp. 607–636.
- Chaves, E. W. V., 2003. A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Cope, R. J., Rao, P. V., Clark, L. A. e Norris, P., (1980), Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridgeslabs, in C. Taylor, E. Hinton e D. R. J. Oden, eds, ‘Numerical Methods for Nonlinear Problems 1’, Pineridge Press, Swansea, pp. 457–470. Citado por Chaves (2003).

- Crouch, S. L., 1976. ‘Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, pp. 301 – 343. Citado por Li et al. (2019).
- Cruse, T. A., (1972), Application of the boundary-integral equation solution method in solid mechanics, in C. A. Brebbia e H. Tottenham, eds, ‘Proceedings of an International Conference; Variational Methods in Engineering - Southampton University Press’, pp. 1–29.
- Cruse, T. A., (1977), Mathematical foundations of the boundary-integral equation method in solid mechanics, Technical report, Air Force Office of Scientific Research TR-77-1002, Special Scientific Report, USA.
- de Borst, R., 2022. ‘Fracture and damage in quasi-brittle materials: A comparison of approaches’. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 122, pp. 103652.
- de Borst, R. e Muhlhaus, H.-B., 1992. ‘Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 521–539.
- Dias, I. F., Oliver, J. e Lloberas-Valls, O., 2018. ‘Strain-injection and crack-path field techniques for 3D crack-propagation modelling in quasi-brittle materials’. *International Journal of Fracture*, vol. 212, pp. 67–87.
- Dugdale, D., 1960. ‘Yielding of steel sheets containing slits’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, pp. 100–108.
- Eberwien, U., Duenser, C. e Moser, W., 2005. ‘Efficient calculation of internal results in 2D elasticity BEM’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 447–453.
- Feist, C. e Hofstetter, G., 2007. ‘Three-dimensional fracture simulations based on the sda’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31, pp. 189–212.
- Fioresi, L. A. F., 2019. Análise de localização de deformações em modelos fisicamente não lineares. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fudoli, C. A., 1999. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno e Plasticidade com Gradiente*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Gao, X.-W. e Davies, T. G., 2002. *Boundary Element Programming in Mechanics*. Cambridge University Press.
- Gasser, T. C. e Holzapfel, G. A., 2006. ‘3D crack propagation in unreinforced concrete. a two-step algorithm for tracking 3D crack paths’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 5198–5219.
- Gens, A., Carol, I. e Alonso, E. E., 1989. ‘An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction’. *Computers and Geotechnics*, vol. 7, pp. 133–151.
- Geuzaine, C. e Remacle, J.-F., 2009. ‘Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79(11), pp. 1309–1331.
- Guiggiani, M. e Gigante, A., 1990. ‘A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method’. *The American Society of Mechanical Engineers*, vol. 57, pp. 906–915.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- Hong, H.-K. e Chen, J.-T., 1988. ‘Derivations of integral equations of elasticity’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114, pp. 1028–1044.
- Hutchinson, J., 1968. ‘Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16(1), pp. 13–31.
- Ibáñez, S. B., 2006. *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo*. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Ingraffea, A. R., (2007), *Computational fracture mechanics*, in R. d. B. E. Stein e T. J. R. Hughes, eds, ‘*Encyclopedia of Computational Mechanics - Volume 2: Solids and Structures*’, John Wiley & Sons, Ltd., chapter 11.

- Ingraffea, A. R. e Wawrzynek, R. P. A., (2004), Computational fracture mechanics: A survey of the field, *in* P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux e D. Knörzer, eds, ‘Proceedings in European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004’, Jyväskylä.
- Irwin, G. R., (1960), Plastic zone near a crack and fracture toughness, *in* G. Sachs, R. B. Jr., W. F. B. Jr., J. Burke, A. Jones, J. V. Lattore e N. L. Reed, eds, ‘Proceedings of the Seventh Sagamore Ordnance Materials Research Conference – Mechanical and Metallurgical Behavior of Sheet Materials’, Raquette Lake, New York.
- Jefferson, A. D., Barr, B. I. G., Bennett, T. e Hee, S. C., 2004. ‘Three dimensional finite element simulations of fracture tests using the craft concrete model’. *Computers and Concrete*, vol. 1(3), pp. 261–284.
- Jäger, P., Steinmann, P. e Kuhl, E., 2008*a*. ‘Modeling three-dimensional crack propagation – a comparison of crack path tracking strategies’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, pp. 1328–1352.
- Jäger, P., Steinmann, P. e Kuhl, E., 2008*b*. ‘On local tracking algorithms for the simulation of three-dimensional discontinuities’. *Computational Mechanics*, vol. 42, pp. 395–406.
- Jäger, P., Steinmann, P. e Kuhl, E., 2009. ‘Towards the treatment of boundary conditions for global crack path tracking in three-dimensional brittle fracture’. *Computational Mechanics*, vol. 45, pp. 91–107.
- Jin, H., Runesson, K. e Mattiasson, K., 1989. ‘Boundary element formulation in finite deformation plasticity using implicit integration’. *Computer and Structures*, vol. 31, pp. 25–34.
- Jirásek, M., 2000. ‘Comparative study on finite elements with embedded discontinuities’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, pp. 307–330.
- Jirásek, M., 2007. ‘Mathematical analysis of strain localization’. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 11, pp. 977–991.
- Kaczmarczyk, L., Nezhad, M. M. e Pearce, C., 2014. ‘Three-dimensional brittle fracture: configurational-force-driven crack propagation’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 97, pp. 531–550.

- Karihaloo, B. L., 1995. *Fracture mechanics and structural concrete*. Longman Scientific and Technical, Essex, England.
- Körmeling, H. A., (1983), Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete, Technical report, Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, Stevin Laboratory, Report No. 5-83-18, The Netherlands.
- Kumar, V. e Mukherjee, S., 1977. ‘Boundary-integral equation formulation for time-dependent inelastic deformation in metals’. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 19, pp. 713–724.
- Lachat, J. C. e Watson, J. O., 1976. ‘Effective numerical treatment of boundary integral equations - a formulation for three dimensional elastostatics’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, pp. 991–1005.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge. Citado por Penna (2011).
- Leão, H. M., 2021. A critical study on phase-field modelling of fracture. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Leonel, E. D., 2006. Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Leonel, E. D. e Venturini, W. S., 2010. ‘Crack growth analysis in quasi-brittle materials using a non-linear boundary element formulation’. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, vol. 12, pp. 81–94.
- Li, K., Jiang, X., Ding, H. e Hu, X., 2019. ‘Three-dimensional propagation simulation and parameter analysis of rock joint with displacement discontinuity method’. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2019. Article ID 3164817.
- Liao, H. e Xu, Z., 1992. ‘A method for direct evaluation of singular integral in direct boundary element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 1473–1485.
- Lin, F.-B., Yan, G., Bažant, Z. P. e Ding, F., 2002. ‘Nonlocal strain softening model of quasi-brittle materials using boundary element method’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26, pp. 417–424.

- Lin, Q., Wang, S., Pan, P.-Z., Bian, X. e Lu, Y., 2020. ‘Imaging opening-mode fracture in sandstone under three-point bending: A direct identification of the fracture process zone and traction-free crack based on cohesive zone model’. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 136, pp. 104516.
- Liu, J., Wu, L., Yin, K., Song, C., Bian, X. e Li, S., 2022. ‘Methods for solving finite element mesh-dependency problems in geotechnical engineering – a review’. *Sustainability*, vol. 14, pp. 2982.
- Liu, S., Wang, Y. e Wu, W., 2023. ‘A modified phase-field model for cohesive interface failure in quasi-brittle solids’. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 252, pp. 108368.
- Lorentz, E., 2017. ‘A nonlocal damage model for plain concrete consistent with cohesive fracture’. *International Journal of Fracture*, vol. 207 (2), pp. 123–159.
- Mahishi, J. M. e Adams, D. F., 1982. ‘Micromechanical predictions of crack initiation, propagation and crack growth resistance in boron/aluminum composites’. *Journal of Composite Materials*, vol. 16(6), pp. 457–469.
- Maia, A. F., Anacleto, F. E., Ribeiro, G. O. e Pitangueira, R. L. S., (2013), Analysis of Reissner’s plate with boundary element method, in Z. D. Prado, ed., ‘Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE’, Pirenópolis, GO, Brasil.
- Manzoli, O. L., Claro, G. K. S., Rodrigues, E. A. e Lopes Jr, J. A., 2013. ‘A local-global scheme for tracking crack path in three-dimensional solids’. *Computers and Concrete*, vol. 12(3), pp. 19–36.
- Manzoli, O. L., Gamino, A. L., Rodrigues, E. A. e Claro, G. K. S., 2012. ‘Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio’. *Computers and Structures*, vol. 94-95, pp. 70–82.
- Manzoli, O. L., Maedo, M. A., Bitencourt, L. A. e Rodrigues, E. A., 2016. ‘On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 153, pp. 151–170.

- Manzoli, O. L., Pedrini, R. A. e Venturini, W. S., (2009), Strong discontinuity analysis in solid mechanics using boundary element method, *in* E. J. Spoultzakis e M. H. Aliabadi, eds, ‘Avances in Boundary Element Techniques X’, Atenas, Grécia, pp. 323–329.
- Manzoli, O. L. e Shing, P. B., 2006. ‘A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements’. *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 742–757.
- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2004. ‘Uma formulação do MEC para simulação numérica de descontinuidades fortes’. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 20(3), pp. 215–234.
- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2007. ‘An implicit BEM formulation to model strong discontinuities’. *Computational Mechanics*, vol. 40, pp. 901–909.
- Manzoli, O., Oliver, J. e Cervera, M., 1998, ‘Localización de deformación: Análisis y simulación numérica de discontinuidades en mecánica de sólidos’. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE). Monografía n. 44. Barcelona.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., (1984), Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behaviour of concrete, *in* S. P. Shah, ed., ‘Application of fracture mechanics to cementitious composites. NATO advanced research workshop’, Northwestern University, pp. 375–378. Citado por Carol et al. (1994).
- Mendonça, T. S., 2021. Nova classe de células com descontinuidade forte embutida para análise de propagação de fissuras pelo método dos elementos de contorno. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Mendonça, T. S., Peixoto, R. G. e Ribeiro, G. O., 2018. ‘Crack propagation using the continuum strong discontinuity approach by the BEM: some numerical remarks’. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 40:520.
- Mendonça, T. S., Peixoto, R. G. e Ribeiro, G. O., 2020. ‘A new class of cells with embedded discontinuity for fracture analysis by the boundary element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 121, pp. 3869–3892.
- Mi, Y. e Aliabadi, M. H., 1992. ‘Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 10, pp. 161–171.

- Mosler, J., 2005. 'Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: strong and weak discontinuities'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 979–1000.
- Most, T. e Bucher, C., 2007. 'Energy-based simulation of concrete cracking using an improved mixed-mode cohesive crack model within a meshless discretization'. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31, pp. 285–305.
- Mota, A., Chen, Q., Foulk III, J. W., Ostien, J. T. e Lai, Z., 2016. 'A cartesian parametrization for the numerical analysis of material instability'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, pp. 156–180.
- Naderi, M. e Iyyer, N., 2017. '3D modeling of arbitrary cracking in solids using augmented finite element method'. *Composite Structures*, vol. 160, pp. 220–231.
- Ngo, D. e Scordelis, A. C., 1967. 'Finite element analysis of reinforced concrete beams'. *ACI Journal*, vol. 64, pp. 152–163.
- Oliver, J., 1996. 'Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3575–3600.
- Oliver, J., 2000. 'On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207–7229.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., (1998), On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids, *in* R. de Borst e E. van der Giessen, eds, 'Material instabilities in solids', John Wiley & Sons, Chichester, chapter 8, pp. 107–123.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., 1999. 'Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach'. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, pp. 319–351.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. e Lubliner, J., (1990), Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete, *in* N. Bicanic, ed., 'SCI-C Computer aided analysis and design of concrete structures', pp. 945–957.

- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004. ‘Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 3195–3220.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. e Linero, D. L., 2006. ‘Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 7093–7114.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Cante, J. C. e Díaz, G., 2010. ‘On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, pp. 786–804.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. e Chaves, E., 2002. ‘From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 113–136.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Samaniego, E., 2003. ‘A study on finite elements for capturing strong discontinuities’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 2135–2161.
- Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E. e Chaves, E., (2002), On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics, *in* ‘WCCM V. Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics’, Vienna University of Technology.
- Ortiz, M., Leroy, Y. e Needleman, A., 1987. ‘A finite element method for localized failure analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61, pp. 189–214.
- Ottosen, N. S. e Runesson, K., 1991. ‘Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, pp. 401–421.
- Paredes, J. A., Oller, S. e Barbat, A. H., 2016. ‘New tension-compression damage model for complex analysis of concrete structures’. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, vol. 142, pp. 04016072.
- Paulino, G. H. e Liu, Y., 2001. ‘Implicit consistent and continuum tangent operators in elastoplastic boundary element formulations’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 2157–2179.

- Pedrini, R. A. A., 2008. Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Peixoto, R. G., 2016. Análise de degradação material, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes através do método dos elementos de contorno. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Peixoto, R. G., Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2016. ‘A solution strategy for non-linear implicit BEM formulation using a unified constitutive modelling framework’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 64, pp. 295–310.
- Peixoto, R. G. e Chaves, A. P., 2022, *The Boundary Element Method for Damage Modeling*, Vol. II of *Book series in Discrete Models, Inverse Methods, & Uncertainty Modeling in Structural Integrity*, 1st ed. edn, UnB, Brasília, DF, Brazil, chapter 21, pp. 809–880. <https://doi.org/10.4322/978-65-86503-83-8.c21>.
- Peixoto, R. G., Ribeiro, G. O. e Pitangueira, R. L. S., 2018. ‘A boundary element method formulation for quasi-brittle material fracture analysis using the continuum strong discontinuity approach’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 202, pp. 47–74.
- Peixoto, R. G., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2017. ‘The strong discontinuity approach as a limit case of strain localization in the implicit BEM formulation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 80, pp. 127–141.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Petersson, P. E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Technical report, TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Pijaudier-Cabot, G. e Bazant, Z. P., 1987. ‘Nonlocal damage theory’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, pp. 1512–1533.

- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992. ‘The dual boundary element method: effective implementation for cracked problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Raiss, M., Dougill, J. e Newman, J., 1989. ‘Observation of the development of fracture process zones in concrete’. *S.P. Shah, S.E. Swartz and B. Barr, Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments, Elsevier Applied Science, London*, pp. 243–253. Citado por Wittmann e Hu (1991).
- Rashid, Y. R., 1968. ‘Ultimate strenght analysis of prestressed concrete pressure vessels’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Remacle, J.-F., Henrotte, F., Carrier-Baudouin, T., Béchet, E., Marchandise, E., Geuzaine, C. e Mouton, T., 2013. ‘A frontal delaunay quad mesh generator using the L_∞ norm’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 94(5), pp. 494–512.
- Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A. e Geuzainet, C., 2012. ‘Blossom-quad: A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89(9), pp. 1102–1119.
- Ribeiro, T. S. A., Beer, G. e Duenser, C., 2008. ‘Efficient elastoplastic analysis with the boundary element method’. *Computational Mechanics*, vol. 41, pp. 715–732.
- Riccardi, F., Kishta, E. e Richard, B., 2017. ‘A step-by-step global crack-tracking approach in e-fem simulations of quasi-brittle materials’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 170, pp. 44–58.
- Rice, J., 1968. ‘A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- Rice, J. R. e Rudnicki, J. W., 1980. ‘A note on some features of the theory of localization of deformation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 16, pp. 597–605.

- Rice, J. e Rosengren, G., 1968. ‘Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16(1), pp. 1–12.
- Rizzi, E., Carol, I. e Willam, K., 1995. ‘Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121(4), pp. 541–554.
- Rocha, M. e Leonel, E. D., 2022. ‘The fracture failure of three-dimensional concrete structures subjected to concentrated loadings using the boundary element method’. *IBRACON Structures and Materials Journal*, vol. 15(5), pp. 1–24.
- Rodrigues, E. A., Manzoli, O. L. e Bitencourt, L. A. G., 2020. ‘3D concurrent multiscale model for crack propagation in concrete’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 361, pp. 112813.
- Rodrigues, E. A., Manzoli, O. L., Jr., L. A. G. B. e Bittencourt, T. N., 2016. ‘2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94-95, pp. 112–124.
- Roth, S.-N., Léger, P. e Soulaïmani, A., 2020. ‘Strongly coupled XFEM formulation for non-planar three-dimensional simulation of hydraulic fracturing with emphasis on concrete dams’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 363, pp. 112899.
- Rots, J. G., 1988. Computational Modeling of Concrete Fracture. Tese de Doutorado, Civil Engineering Department of Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. e Blaauwendraad, J., 1985. ‘Smearred crack approach and fracture localization in concrete’. *HERON*, vol. 30, pp. 1–48.
- Saleh, A. L. e Aliabadi, M. H., 1995. ‘Crack growth analysis in concrete using boundary element method’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, pp. 533–545.
- Samaniego, E., 2002. Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

- Sancho, J. M., Planas, J., Fathy, A. M., Gálvez, J. C., Reyes, E. e Cendón, D. A., 2007. ‘Three-dimensional simulation of concrete fracture using embedded crack elements without enforcing crack path continuity’. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 31, pp. 173–187.
- Schreyer, H. L. e Neilsen, M. K., 1996. ‘Discontinuous bifurcation states for associated smooth plasticity and damage with isotropic elasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, pp. 3239–3256.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(7), pp. 821–840.
- Simo, J. C., Oliver, J. e Armero, F., 1993. ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids’. *Computational Mechanics*, vol. 12, pp. 277–296.
- Sládek, J., Sládek, V. e Bažant, Z. P., 2003. ‘Non-local boundary integral formulation for softening damage’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 103–116.
- Slobbe, A. T., Hendriks, M. A. N. e Rots, J. G., 2014. ‘Smoothing the propagation of smeared cracks’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 132, pp. 147–168.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 2000. *The Stress Analysis of Crack Handbook*. 3rd edn, The American Society Of Mechanical Engineers, New York, NY 10016.
- Telles, J. C. F., 1983. *Boundary Element Method applied to inelastic problems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Telles, J. C. F. e Brebbia, C. A., 1979. ‘On the application of the boundary element method to plasticity’. *Applied mathematical modelling*, vol. 3, pp. 303–311.
- Telles, J. C. F. e Carrer, J. A. M., 1991. ‘Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method’. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 15, pp. 466–470.
- Červenka, J., Červenka, V. e Laserna, S., 2018. ‘On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 197, pp. 27–47.

- Watson, J. O., (1986), Hermitian cubic end singular elements for plane strain., *in* P. K. Banerjee e J. O. Watson, eds, ‘Developments in boundary element methods 4’, Elsevier Applied Science, pp. 1–28.
- Wells, A. A., (1961), Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture, *in* ‘Proceedings of the Crack Propagation Symposium’, College of Aeronautics and Jones, O. and Royal Aeronautical Society, Cranfield, Bedfordshire. Citado por Broek (2002).
- Wells, A. A., 1963. ‘Application of fracture mechanics at and beyond general yielding’. *British Welding Research Assoc Rep M13/63*, . Citado por Broek (2002).
- Wittmann, F. H. e Hu, X., 1991, *Fracture process zone in cementitious materials*, Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 3–18.
- Wu, J.-Y., Huang, Y., Zhou, H. e Nguyen, V. P., 2021. ‘Three-dimensional phase-field modeling of mode I + II/III failure in solids’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 373, pp. 113537.
- Wu, Z., Rong, H., Zheng, J., Xu, F. e Dong, W., 2011. ‘An experimental investigation on the fpz properties in concrete using digital image correlation technique’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78(17), pp. 2978–2990.
- Xie, M., Gerstle, W. e Rahulkumar, P., 1995. ‘Energy-based automatic mixed-mode crack-propagation modeling’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, pp. 914–923.
- Yang, Y.-B. e Shieh, M.-S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2116.
- Yun, K., Wang, Z., Chang, M., Liu, J., Kim, T.-J., Son, N., Ji, K. e Ronald, S., 2019. ‘A computational methodology for simulating quasi-brittle fracture problems’. *Computers and Structures*, vol. 215, pp. 65–79.
- Zee, F. G. V., 2011. *libflame – The Complete Reference*. Draft Edition, The University of Texas at Austin. (version 5.1.0-56).

Apêndice A

Equações do Modelo de Dano Coesivo

Na análise de descontinuidade forte, um modelo constitutivo de dano coesivo é estabelecido, relacionando forças de superfície a saltos de descontinuidade em uma superfície de descontinuidade \mathcal{S} , com o modelo constitutivo contínuo. Expressões para equação constitutiva, lei de amolecimento discreto ou intrínseca, obtida a partir de reinterpretação do módulo de amolecimento, variável de dano, energia interna e critério de dano, são descritas nesse apêndice, tendo como base o desenvolvimento apresentado por Oliver (2000).

Para designação de tempos específicos da análise, utiliza-se a notação:

$t \rightarrow$ um instante qualquer da análise;

$t_B \rightarrow$ instante de ocorrência da bifurcação;

$t_{SD} \rightarrow$ instante em que se estabelece a descontinuidade forte.

A.1 Equação Constitutiva Coesiva

Após o início do regime de descontinuidade forte, o estado de deformações totais num instante t pode ser obtido a partir da integração da equação 5.16 no tempo, como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\mathbf{X}, t)|_{t \geq t_{SD}} &= \underbrace{\int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}_{ij} dt + \frac{\mu_S}{2} \int_{t_B}^{t_{SD}} \frac{1}{h} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) dt}_{\bar{\epsilon}_{ij}} \\ &\quad + \frac{\mu_S}{2} \int_{t_{SD}}^t \frac{1}{h} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) dt \quad (\text{A.1}) \\ &= \underbrace{\bar{\epsilon}_{ij}}_{\text{finito para } h \equiv k \rightarrow 0} + \underbrace{\mu_S \frac{1}{2h} (\Delta \llbracket u_i \rrbracket n_j + \Delta \llbracket u_j \rrbracket n_i)}_{\text{infinito para } h \equiv k \rightarrow 0} \end{aligned}$$

onde $\Delta[[u_i]] = [[u_i]]|_t - [[u_i]]|_{t_{SD}}$ é o incremento no salto de deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte, e μ_S uma função de colocação: ($\mu_S(\mathbf{X}) = 1$ se $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ e $\mu_S(\mathbf{X}) = 0$ se $\mathbf{X} \notin \mathcal{S}$). O caráter material da superfície descontínua, pelo qual se entende que a direção da superfície de descontinuidade não varia após instalada, foi considerado, *i.e.*, $\dot{n}_i = 0$.

Substituindo a equação constitutiva que relaciona o tensor de tensões às deformações (eq. 2.6), e a expressão da variável de dano (eq. 2.7), na equação A.1, pode-se obter o tensor de tensões em um ponto da superfície \mathcal{S} , dado por:

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \frac{q_S}{r_S} E_{ijkl}^o \left[\bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2h} (\Delta[[u_k]]n_l + \Delta[[u_l]]n_k) \right] \quad (\text{A.2})$$

A equação do vetor de força de superfície t_j em \mathcal{S} em regime de descontinuidade forte ($t > t_{SD}$, e $h \rightarrow 0$) pode ser desenvolvida em:

$$t_j = n_i \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{hr_S} \right) q_S Q_{jk}^e \Delta[[u_k]] \quad (\text{A.3})$$

onde Q_{jk}^e é definido como tensor acústico elástico ($Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l$), que tem a propriedade de ser positivo definido. Portanto, para $\Delta[[u_i]] \neq 0$, o termo $q_S Q_{jk}^e \Delta[[u_k]]$ será finito e diferente de zero, e deve-se garantir ainda que: $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{hr_S} \right) \neq \infty \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (hr_S) \neq 0$.

Desenvolvendo, define-se:

- Evolução da variável interna discreta α , a partir da evolução da variável interna do tipo deformação r em pontos sobre a superfície descontínua \mathcal{S} :

$$\dot{r}_S = \frac{1}{h} \dot{\alpha} \quad \forall t \geq t_B; \quad \alpha|_{t=t_B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

De onde se tem, integrando a equação A.4 até um instante $t \geq t_{SD}$:

$$r_S = \int_0^t \dot{r}_S dt = r_{SD} + \frac{1}{k} \int_{t_{SD}}^t \dot{\alpha}(\tau) d\tau = r_{SD} + \frac{1}{k} \Delta\alpha \quad (\text{A.5})$$

onde $\Delta\alpha = \alpha|_t - \alpha|_{t_{SD}}$, $r_B = r_S|_{t=t_B}$, e $k \equiv h$.

- Equação constitutiva discreta (ou coesiva), que relaciona forças de superfície em \mathcal{S} com saltos no campo de deslocamento $[[u_j]]$, com a presença do tensor acústico elástico ($Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l$):

$$t_i = \frac{q_S}{\Delta\alpha} Q_{ij}^e \Delta[[u_j]]; \quad \forall t \geq t_{SD} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Lei de Amolecimento Coesiva

A lei de amolecimento q do modelo contínuo, definida na equação 2.17 ($\dot{q} = H\dot{r}$), considerando a equação A.4, é escrita como:

$$\dot{q}_S = H\dot{r}_S = H\frac{1}{h}\dot{\alpha} \quad (\text{A.7})$$

Por inspeção, observa-se que os termos q_S e \dot{q}_S são finitos, considerando o caráter finito das tensões e de suas taxas, em \mathcal{S} , assim como, por definição, também $\dot{\alpha}$ tem caráter finito. Avaliando o caso em que se toma o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{H}{h}\right)$, é imperativo que este também deve assumir valores finitos, para manter o caráter finito de \dot{q}_S . Para tal, define-se:

$$H^* = \frac{H}{h} \Leftrightarrow H = hH^*; \quad \forall t > t_B \quad (\text{A.8})$$

onde H^* é chamado módulo de amolecimento discreto ou intrínseco, definido como finito, e negativo ($H^* < 0$, indicando perda de capacidade resistente). Assim como o módulo de amolecimento da formulação contínua, trata-se de uma propriedade do material, e está relacionado à energia consumida na formação da descontinuidade forte (energia de fratura), como se descreve algumas subseções à frente.

Essa *reinterpretação do módulo de amolecimento* do modelo constitutivo contínuo, como chamado por (Simo et al., 1993), permite a compatibilização entre a cinemática com descontinuidades e as equações do modelo contínuo. Quando $h \rightarrow 0$, o módulo de amolecimento discreto $H^* \rightarrow \delta_S H$ (sendo δ_S a função delta de Dirac em \mathcal{S}). Indo além, como a espessura da banda de localização h assume valores finitos para o regime de descontinuidades fracas, nota-se que essa é uma reinterpretação adequada para um modelo de banda variável.

A lei de amolecimento discreta pode então ser expressa de modo similar ao modelo contínuo, substituindo a equação A.8 em A.7, obtendo-se

$$\dot{q}_S = H^*\dot{\alpha} \quad (\text{A.9})$$

A.3 Variável de Dano Coesiva

A integração da equação A.9 no tempo, permite verificar a dependência da variável interna do tipo tensão na interface descontínua q_S em relação à variável discreta interna $\Delta\alpha$, podendo-se expressá-la como uma variável q^* função de $\Delta\alpha$, *i.e.*, $q_S = q^*(\Delta\alpha) \in [0, q_{SD}]$.

Daí, baseado na relação entre as variáveis internas do modelo contínuo que define a variável de dano $D(r)$ (eq. 2.7), pode-se definir uma correspondente ω , denominada variável de dano discreta:

$$\omega(\Delta\alpha) = 1 - \frac{q^*(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (\text{A.10})$$

com $\Delta\alpha \in [0, \infty)$ e, portanto, $\omega(\Delta\alpha) \in (-\infty, 1]$.

Assim, a equação constitutiva discreta (eq. A.6) pode ser escrita também como:

$$t_i = (1 - \omega)Q_{ij}^e \Delta \llbracket u_j \rrbracket; \quad \forall t \geq t_{SD} \quad (\text{A.11})$$

A.4 Energia Livre Coesiva

Modelos constitutivos não lineares podem ser formulados com base em fundamentos gerais consistentes da termodinâmica. Tem-se especial interesse na chamada densidade de energia livre de Helmholtz (ψ), que representa a energia mecânica armazenada em um sólido sob tensão por unidade de volume, a partir da qual pode-se obter tensões (ver eq. 2.6). Cabe agora, em contrapartida ao modelo contínuo, a definição de energia livre discreta ($\hat{\psi}$), onde o volume considerado (domínio da banda de localização) tende a uma superfície quando $h \rightarrow 0$, podendo $\hat{\psi}$ ser entendido como energia livre discreta por unidade de área (superfície \mathcal{S}). Então, para pontos $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ define-se:

$$\hat{\psi} = \lim_{h \rightarrow 0} (h\psi_{\mathcal{S}}) \quad (\text{A.12})$$

Substituindo em A.12 as equações de energia livre do modelo contínuo, de variável de dano discreta, de deformações totais e da variável interna discreta, é possível obter uma expressão para energia livre discreta $\hat{\psi}$, em termos dos saltos de descontinuidade, tensor constitutivo e da variável de dano discreta, como:

$$\hat{\psi} = (1 - \omega)\hat{\psi}_o(\Delta \llbracket u_j \rrbracket) \quad (\text{A.13})$$

onde $\hat{\psi}_o(\Delta[u_j]) = \frac{1}{2}\Delta[u_j]Q_{jk}^e\Delta[u_k]$.

A.5 Critério de Dano Coesivo

Para estabelecimento de um critério de dano é necessário definir uma contrapartida à deformação equivalente (τ_ϵ) do modelo de dano contínuo. Essa norma, no caso discreto será denominada $\tau_{\Delta[u]}$. Utilizando o mesmo critério de dano considerado no modelo contínuo, *i.e.*, modelo de Oliver et al. (2006) (eq. 2.11), e a expressão da deformação total (equação A.1), após tomar o limite $h \rightarrow 0$, tem-se:

$$\tau_{\Delta[u]} = \sqrt{\Delta[u_i]Q_{ij}^e\Delta[u_j]} \quad (\text{A.14})$$

A expressão que define o critério de dano coesivo, no espaço dos incrementos de salto de deslocamento, é:

$$\bar{G}(\Delta[u_i], \Delta\alpha) \equiv \tau_{\Delta[u]} - \Delta\alpha = \sqrt{\Delta[u_i]Q_{ij}^e\Delta[u_j]} - \Delta\alpha \quad (\text{A.15})$$

Seguindo a mesma linha do modelo contínuo, as condições de carregamento ou descarregamento discretas do sistema são:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \geq 0 ; \quad \bar{G} \leq 0 ; \quad \dot{\alpha}\bar{G} = 0 \quad (\text{condição de carreg./descarregamento}) \\ \text{para } \bar{G} = 0, \quad \dot{\alpha}\bar{G} = 0 \rightarrow (\text{condição de persistência}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.6 Módulo de Amolecimento Coesivo

Assim como no caso contínuo, o módulo de amolecimento coesivo (H^*) deve ser entendido como um parâmetro do material. A obtenção desse parâmetro pode se iniciar considerando a potência consumida no desenvolvimento do salto no campo de deslocamento, dada por:

$$\mathcal{P}_S = \int_S t_i[u_i]dS \quad (\text{A.17})$$

Integrando-se a potência no tempo, pode-se obter a energia liberada durante o regime descontínuo, por unidade de área da superfície descontínua. Avaliando-se intuitivamente que essa liberação de energia ocorre quase em sua totalidade no regime de descontinuidade

forte, quando há um efetivo “descolamento” das superfícies, pode-se entendê-la como a energia de fratura G_f (da mecânica da fratura elástica linear), que representa a quantidade de energia necessária para a total separação de uma unidade de área na região da fratura. Esse parâmetro é compreendido como uma propriedade do material, obtido por ensaios padronizados.

Trabalhando a partir das equações A.14, A.11, A.10 e considerando, do critério de dano e condições de carregamento e descarregamento (equações A.15 e A.16), que há dissipação de energia apenas a partir de $\tau_{\Delta[u]} = \Delta\alpha$ e $\dot{\tau}_{\Delta[u]} = \dot{\alpha}$, pode-se obter a expressão:

$$t_i[\dot{u}_i] = q_S \dot{\alpha} = q_S \frac{\dot{q}_S}{H^*} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo na equação A.17, integrada no tempo a partir da descontinuidade forte, a energia liberada por unidade de área (G_{SD}) pode ser escrita como:

$$G_{SD} = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} q_S \dot{\alpha} dt = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} q_S \frac{\dot{q}_S}{H^*} dt = \int_{q_{SD}}^0 q \frac{1}{H^*} dq \quad (\text{A.19})$$

No caso $G_{SD} \approx G_f$, tem-se o instante inicial da descontinuidade para $q_{SD} \approx q_o = r_o = \frac{f_t}{\sqrt{E}}$ (eq. 2.16), de forma que se pode escrever a energia de fratura como:

$$G_f = \int_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 q \frac{1}{H^*} dq \quad (\text{A.20})$$

A estrutura do módulo de amolecimento coesivo H^* definirá o tipo de lei de amolecimento a trabalhar. Cabe observar novamente que seu valor é negativo, já que está relacionado com a energia consumida na formação da unidade de superfície de descontinuidade. Para a lei exponencial, adotada no modelo contínuo, deve-se ter $H^*(q) = A^*q$, sendo A^* uma constante. Com a equação A.20 tem-se:

$$G_f = \frac{1}{A^*} q \Big|_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 \Rightarrow A^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}; \quad \therefore H^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q \quad (\text{A.21})$$