

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Otávio Augusto Silva Lima

Estudo sobre a janela crítica de percolação em lages

Belo Horizonte
2021

Otávio Augusto Silva Lima

Estudo sobre a janela crítica de percolação em lages

Versão Final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva

Belo Horizonte
2021

Lima, Otávio Augusto Silva.

L732e Estudo sobre a janela crítica de percolação em lages [recurso eletrônico] / Otávio Augusto Silva Lima.– 2021.
1 recurso online (35 f. il, color.): pdf.

Orientador: Roger William Câmara Silva
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística
Referências: f. 29-30.

1. Estatística – Teses. 2. Percolação – Teses. 3. Correlação (Estatística) – Teses. 4. Probabilidade – Teses. I. Silva, Roger William Câmara II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.
III. Título.

CDU 519.2(043)

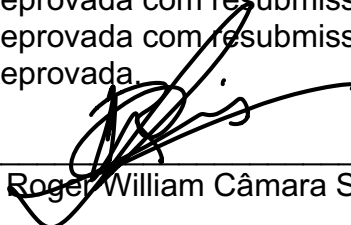


ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO(A) ALUNO(A) **OTÁVIO AUGUSTO SILVA LIMA**, MATRICULADO, SOB O Nº **2019661416**, NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 02 DE MARÇO DE 2021.

Aos 02 dias do mês de março de 2021, às 10hs00, em reunião pública virtual 256 (conforme orientações para a atividade de defesa de dissertação durante a vigência da Portaria PRPG nº 1819) OU na sala 2076 do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Estatística, para julgar a defesa de dissertação do(a) aluno(a) **OTÁVIO AUGUSTO SILVA LIMA**, nº matrícula 2019661416, intitulada:

“Estudo sobre a janela crítica de percolação em lages”, requisito final para obtenção do Grau de mestre em Estatística. Abrindo a sessão, o(a) Senhor(a) Presidente da Comissão, Prof(a). Roger William Câmara Silva (Doutor), passou a palavra ao(à) aluno(a) para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do(a) aluno(a). Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação:

- Aprovada.
 Reprovada com resubmissão do texto em ____ dias.
 Reprovada com resubmissão do texto e nova defesa em ____ dias.
 Reprovada.


Prof. Roger William Câmara Silva (Doutor)


Prof(a). Tertuliano Franco (Doutor)


Prof. Pablo Almeida Gomes (Doutor)

O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 02 de março de 2021.

Observações:

1. No caso de aprovação da tese, a banca pode solicitar modificações a serem feitas na versão final do texto. Neste caso, o texto final deve ser aprovado pelo orientador da tese. O pedido de expedição do diploma do candidato fica condicionado à submissão e aprovação, pelo orientador, da versão final do texto.
2. No caso de reprovação da tese com resubmissão do texto, o candidato deve submeter o novo texto dentro do prazo estipulado pela banca, que deve ser de no máximo 6 (seis) meses. O novo texto deve ser avaliado por todos os membros da banca que então decidirão pela aprovação ou reprovação da tese.
3. No caso de reprovação da tese com resubmissão do texto e nova defesa, o candidato deve submeter o novo texto com a antecedência à nova defesa que o orientador julgar adequada. A nova defesa, mediante todos os membros da banca, deve ser realizada dentro do prazo estipulado pela banca, que deve ser de no máximo 6 (seis) meses. O novo texto deve ser avaliado por todos os membros da banca. Baseada no novo texto e na nova defesa, a banca decidirá pela aprovação ou reprovação da tese.

Agradecimentos

Agradeço a minha família, Antonio, Marina e Tamara por me apoiarem em infinitas ocasiões de infinitos modos. Agradeço ao meu orientador Roger por se dedicar a minha formação e ser responsável direto por qualquer conquista relacionada a minha carreira acadêmica.

Agradeço a vários professores durante minha vida que indiretamente me ajudaram de diversas maneiras. Agradeço também a amigos que caminharam ao meu lado e em especial André, Pedro F., Matheus e Jéssica que me ajudaram durante período mais recente, em discussões sobre probabilidade ou ouvindo sobre percolação.

E por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudaremos o processo de percolação de elos de Bernoulli independentes em \mathbb{Z}^d através do trabalho de H. Duminil-Copin, G. Kozma e V. Tassion em *Upper bounds on the percolation correlation length* [6]. O resultado principal desse trabalho é quantificar um conhecido resultado de G. R. Grimmett e J. M. Marstrand em *The Supercritical Phase of Percolation is Well Behaved* [8]. Em [6] é mostrado que existe aglomerado infinito em $Slab_n^d$ para o parâmetro $p_n + C\sqrt{\log n}$, onde p_n é um certo p relacionado com o comprimento de correlação. Ainda mais, a probabilidade da origem percolar no $Slab_n^d$ para esse parâmetro é maior que $1/2\sqrt{\log n}$. Esse resultado é atingido utilizando um evento diferente do usado em [8] e discutiremos um pouco das diferenças, mas com foco no novo trabalho.

Palavras-chave: percolação. comprimento de correlação. probabilidade

Abstract

We study an independent Bernoulli percolation model in \mathbb{Z}^d through the work of H. Duminil-Copin, G. Kozma and V. Tassion on *Upper bounds on the percolation correlation length* [6]. The main result of this work is to quantify a known result of G. R. Grimmett and J. M. Marstrand in *The Supercritical Phase of Percolation is Well Behaved* [8]. In [6] it is shown that there is an infinite cluster on Slab_n^d with parameter $p_n + C\sqrt{\log n}$, where p_n is related with the correlation length. Even more, the probability that the origin percolates on Slab_n^d for this parameter is greater than $1/2\sqrt{\log n}$. This result is achieved using a different event than the one used in [8] and we discuss some differences, but with focus on the new work.

Keywords: percolation. correlation length. probability.

Lista de Figuras

2.1	Uma configuração de Ω na rede quadrada	11
3.1	Se a caixa preta $\Lambda_{N/10}$ se conecta ao seu par Λ_N , esse aglomerado tem diâmetro maior que $n/10$, e está na caixa tracejada Λ_N , então necessariamente é o mesmo aglomerado que conecta $\Lambda_{N/10}$ tracejado ao seu par Λ_N . Caixas distantes o suficiente, a depender de N , são independentes.	16
3.2	A exemplo do caso anterior, podemos posicionar as caixas Λ_N para garantir que o aglomerados que fazem cada conexão sejam o mesmo	17
3.3	O evento A de Grimmett-Marstrand: as caixa hachuradas nas laterais tem todos os elos abertos e são chamadas de <i>sementes</i>	18
3.4	A construção dinâmica do aglomerado da origem.	19
3.5	As caixas $k \leq K \leq n \leq N$ e os aglomerados que conectam a origem à Λ_N (condição (a)) e Λ_k à Λ_N (condição (b)). Esses aglomerados se encontram segundo a condição (c), entre as caixas Λ_k e Λ_K , e entre as caixas Λ_n e Λ_N , com alta probabilidade (linha tracejada).	20
3.6	Queremos encontrar um ponto dentro de S que se conecta a um quartil com alta probabilidade.	23
3.7	As caixas Λ_0 e $\tilde{\Lambda}_0$ centralizadas e algumas das caixas que compartilham seus elos	26
3.8	Um novo evento partindo de y	28

Sumário

1	Introdução	9
2	Definição do modelo e ferramentas	11
2.1	Percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d	11
2.2	Ferramentas básicas	13
3	Renormalizações	15
3.1	A renormalização de Grimmett e Marstrand	15
3.2	A renormalização de Copin, Kozma e Tassion	19
3.3	Demonstração do Teorema 1	25
	Referências	29
	Apêndice A Cerf e Grimmett	31
A.1	Adaptação de [4] para Proposição 1	31
A.2	Cota inferior para o comprimento de correlação	33

Capítulo 1

Introdução

O modelo de percolação surgiu com Hammersley e Broadbent [3] na década de 50 com o objetivo de estudar o comportamento de fluidos em meios porosos. Com o tempo, o interesse pelo modelo extrapolou a aplicação prática por causa de sua simplicidade e por exibir transição de fase. Do ponto de vista teórico esses modelos são grafos compostos por vértices e elos que estão abertos ou fechados segundo algum parâmetro.

Transição de fase é uma mudança não trivial num sistema decorrente de alterações em algum parâmetro do modelo, no caso de modelos de percolação, a existência ou não de conjunto infinito e conexo de elos abertos (aglomerado aberto). Alguns problemas relacionados a essa propriedade estão em aberto e são estudados até hoje. No caso dos modelos de percolação, a princípio, chamaremos esse parâmetro de p , $0 \leq p \leq 1$.

Para valores de p relativamente próximos de 0 não existe aglomerado aberto infinito (ou simplesmente aglomerado infinito), para valores relativamente próximos de 1 existe aglomerado infinito com probabilidade positiva, portanto existe um valor de p definido como ponto crítico (p_c) que determina essa mudança. Um dos problemas de interesse é o comportamento do modelo na criticalidade, ou seja, quando $p = p_c$. Conjectura-se que não existe aglomerado infinito na criticalidade, mas só sabemos que isso ocorre no grafo planar e acima de 10 dimensões. Nesse texto discutimos algumas estratégias de demonstração e algumas das dificuldades que impedem a prova da conjectura.

Grimmett e Marstrand [8] encontraram que para qualquer $p > p_c$, existe $n \geq 1$ tal que existe aglomerado infinito na origem com probabilidade positiva numa fatia ($Slab_n^d$) do grafo \mathbb{Z}^d de tamanho n :

$$\mathbb{P}_p \left[0 \xleftrightarrow{Slab_n^d} \infty \right] > 0.$$

Nesse trabalho é encontrado um evento, custoso do ponto de vista de escala, que se ocorre com probabilidade arbitrariamente próxima de 1 no parâmetro p , implica no resultado acima para algum parâmetro $p + \eta$. Duminil-Copin, Kozma e Tassion [6] quantificam esse η e tornam o resultado quantitativo com um evento menos custoso, enunciado a seguir:

Teorema 1. *Seja $d \geq 3$. Existe uma constante $C = C(d) > 0$ tal que o seguinte é verdade. Assuma que para algum $p \in [0, 1]$ e algum $\varepsilon > 0$, existam $1 \leq k \leq K \leq n \leq N < \infty$ tais que $K \leq \varepsilon^2 n$ e*

- (a) $\mathbb{P}_p [0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq \varepsilon$,
- (b) $\mathbb{P}_p [\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon})$,
- (c) $\mathbb{P}_p [A_2(k, K)] \leq \exp(-\frac{1}{\varepsilon})$ e $\mathbb{P}_p [A_2(n, N)] \leq \exp(-\frac{1}{\varepsilon})$.

Então

$$\mathbb{P}_{p+C\varepsilon} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{2N}^d} \infty] \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $\partial\Lambda_N$ é a fronteira de uma caixa de largura $2N$ e $A_2(n, N)$ é o evento onde existem dois ou mais aglomerados disjuntos que conectam $\partial\Lambda_n$ até $\partial\Lambda_N$.

Teorema 1 é aplicado junto a um conjunto de outros resultados que verificam suas hipóteses para encontrar uma escala onde o resultado é válido. Assim obtemos mais dois resultados:

Teorema 2. *Seja $d \geq 3$. Existe constante $C = C(d) > 0$ tal que para todo $n \geq 3$,*

$$\mathbb{P}_{p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}}} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_n^d} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}.$$

E, por consequência,

$$p_c(\text{Slab}_n^d) < p_c + \frac{C}{\sqrt{\log n}},$$

onde p_n é relacionado com o comprimento de correlação ξ_p .

Teorema 3. *Seja $d \geq 3$. Existe $C = C(d) > 0$ tal que para qualquer $p \neq p_c$,*

$$\xi_p \leq \exp(C|p - p_c|^{-2}).$$

As definições usadas nesses resultados serão precisas no decorrer do texto. No Capítulo 1 definimos formalmente o modelo de percolação e apresentamos algumas ferramentas que são usadas no decorrer do texto, Capítulo 2 tem uma discussão sobre tentativas de prova da conjectura citada e suas dificuldades, uma discussão informal sobre [8] afim de comparação com a demonstração do Teorema 1. E por fim, no Capítulo 3, com ajuda de outros resultados, usamos o resultado principal do capítulo anterior para obter os Teoremas ?? e ??.

Capítulo 2

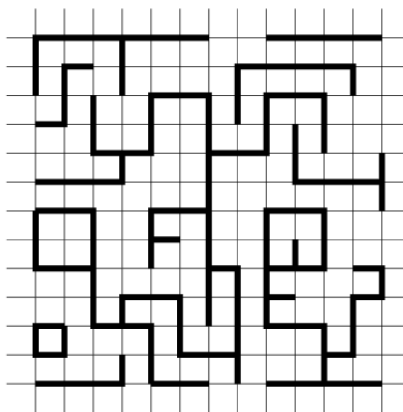
Definição do modelo e ferramentas

2.1 Percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d

Definimos o modelo: seja G um grafo com elos $\mathcal{E}(G)$ e vértices $\mathcal{V}(G)$. Vamos nos referir ao modelo como \mathbb{Z}^d quando $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d))$, onde $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| = 1\}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, coordenadas em \mathbb{Z}^d do vértice x .

Para definir o modelo de percolação Bernoulli independente, objeto de estudo nesse texto, fixamos d inteiro e associamos para cada elo $e \in E = \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ uma variável aleatória Bernoulli $X_e(\omega)$ que toma valores em $\{0, 1\}$, e medida de probabilidade denotada por μ_e , tal que $\mu_e(\{1\}) = p = 1 - \mu_e(\{0\})$, onde $p \in [0, 1]$. Dizemos que um elo $e \in E$ está aberto caso $\omega(e) = 1$ e fechado caso $\omega(e) = 0$. O espaço amostral Ω é $\{0, 1\}^{\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$, e chamamos de configurações de Ω os elementos $\omega = (\omega(e) : e \in E)$.

Figura 2.1: Uma configuração de Ω na rede quadrada



Fonte: [5]

Tomamos então a sigma álgebra \mathcal{F} gerada pelos conjuntos cilíndricos em Ω e definimos a medida produto

$$P_p = \prod_{e \in E} \mu_e,$$

obtendo um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ para cada p .

Dado dois vértices quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}^d$ dizemos que eles são vizinhos (denotado por $x \sim y$) se $\sum_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| = 1$, ou seja, se existe um elo ligando um vértice ao outro. Dado um subconjunto qualquer $S \subset \mathbb{Z}^d$, dizemos que x e y estão conectados em S (denotado por $x \xleftrightarrow{S} y$) se existe um conjunto de vértices (caminho) $x = v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = y$ tais que $v_i \in S$ e $\omega(\{v_i, v_{i+1}\}) = 1$ para todo $0 \leq i < k$. Generalizamos essa definição para conjuntos: para A e B , subconjuntos de S , dizemos que A está conectado a B em S , denotado por $A \xleftrightarrow{S} B$, se existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x \xleftrightarrow{S} y$. Quando $S = \mathbb{Z}^d$ simplificamos a notação para $A \leftrightarrow B$.

Definimos alguns subconjuntos de \mathbb{Z}^d . Para $n \geq 1$, definimos a caixa de lado $2n$ como $\Lambda_n := \{-n, \dots, n\}^d$ e sua *fronteira* de vértices $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$. A notação $x + \Lambda_n$ representa uma caixa centralizada no vértice x . Dado um conjunto $R \subset \mathbb{Z}^d$, definimos a *fronteira de elos* do conjunto A em R como $\Delta A = \{\{x, y\} \subset R : |x - y| = 1, x \in A, y \in R \setminus A\}$. Definimos também o subgrafo $Slab_n^d := \mathbb{Z}^2 \times \{-n, \dots, n\}^{d-2}$, que para $d = 3$, $Slab_n^d := \mathbb{Z}^2 \times \{-n, \dots, n\}^{d-2}$ lembra uma fatia do grafo \mathbb{Z}^3 , ou uma lage de espessura $2n + 1$. Dizemos que $A \xleftrightarrow{S} \infty$ se $A \xleftrightarrow{S} \partial\Lambda_n$ ocorre para todo $n \geq 1$.

O aglomerado (ou cluster) do vértice $x \in V$ é definido como o conjunto maximal $C(x) := \{y \in V : y \leftrightarrow x\}$, e como o modelo \mathbb{Z}^d é invariante por translação podemos considerar x como qualquer vértice, nos referindo em geral a C como aglomerado da origem de \mathbb{Z}^d .

Um dos principais objetos de interesse em percolação é o tamanho do aglomerado C , denotado por $|C|$. Quando o evento $\{|C| = \infty\}$ ocorre dizemos que houve **percolação**. Definimos a função de percolação coimo

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty) = P_p(0 \leftrightarrow \infty), \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Temos que $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$. Com um argumento de acoplamento (Cap. 2 de [9]) podemos demonstrar que a função $\theta(p)$ é não decrescente em p , motivando a definição de um valor de p conhecido como ponto crítico $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$, dependente da dimensão do modelo, tal que

$$\begin{cases} \theta(p) = 0 & \text{se } p < p_c(d); \\ \theta(p) > 0 & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

Omitiremos a dependência em d quando o contexto for claro.

Quando $p < p_c$ estamos na fase subcrítica, onde todo aglomerado é finito quase certamente; se $p > p_c$ estamos na fase supercrítica, onde existe um único aglomerado infinito quase certamente (Ver Teorema 8.1 [9]).

Sabemos que $p_c(1) = 1$, para isto, basta tomar $p < 1$ e usando continuidade em probabilidade temos que

$$P_p(|C| = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) = 0,$$

e portanto o aglomerado da origem é finito quase certamente. Para $d \geq 2$ temos ponto crítico não trivial, isto é, $0 < p_c(d) < 1$ e $p_c(d)$ é não crescente em d (ver Cap. 1.4 de [9]).

Conhece-se o valor de $\theta(p)$ no ponto crítico em algumas situações. Para $d = 2$, Harris mostrou que $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ [10] e mais tarde Kesten mostrou que $p_c(2) = \frac{1}{2}$ [11]. Para $d \geq 11$, temos que $\theta(p_c) = 0$ [7]. Supõe-se que $\theta(p_c) = 0$ para todo $d \geq 2$.

A prova para $d = 2$ não é simples, mas tem ideias importantes que podem ser resumidas: se temos uma caixa $\Lambda_n := \{-n, \dots, n\}^2$ com um cruzamento de elos abertos da direita para a esquerda e um cruzamento de baixo para cima, necessariamente esses caminhos se encontram, essa ideia facilita argumentos de renormalização pois não é necessário colar aglomerados e não tem compatível para $d \geq 3$. Outra noção complicada de trazer para dimensões maiores é a ideia de *dual*, uma versão transladada de \mathbb{Z}^2 que tem elos abertos onde elos estão fechados no grafo original, importante para alguns dos resultados citados com argumentos de simetria.

Por outro lado, a prova para $d \geq 11$ usa a noção de *mean-field behavior*, que em termos grosseiros, aproxima modelos de alta dimensão por modelos mais simples na região próxima ao ponto crítico. Conjectura-se que essa abordagem é limitada a dimensões “grandes” [5].

2.2 Ferramentas básicas

A desigualdade de FKG (Teorema 2.4, [9]) é importante para conseguir cotas inferiores para interseções de eventos que se favorecem, no sentido de serem positivamente correlacionados. Chamamos eventos com tal propriedade de eventos crescentes, definidos formalmente a seguir:

Sejam $\omega, \omega' \in \Omega$ duas configurações. Definimos a relação de ordem parcial (\succ) tal que $\omega' \succ \omega$ se, e somente se, $\omega'(e) \geq \omega(e)$, $\forall e \in E$, em palavras: todo elo aberto em ω está aberto em ω' .

Definição. Dizemos que $A \in \mathcal{F}$ é um **evento crescente** se

$$\omega \in A \implies \omega' \in A \quad \forall \omega' \succ \omega.$$

Dizemos também que uma variável aleatória X é crescente se $X(\omega) \leq X(\omega')$ para todo $\omega \prec \omega'$.

Declaramos uma variável aleatória X como decrescente se $-X$ é crescente, um evento A é dito decrescente caso seu complementar é crescente.

Lema 1. [Desigualdade FKG] Se X e Y são variáveis aleatórias crescentes (ou decrescentes) tais que $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$, então

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

Em particular, se A e B são eventos crescentes (ou decrescentes) então

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Podemos interpretar a desigualdade usando a definição de probabilidade condicional, dado que um evento crescente ocorre, seus elos abertos aumentam a probabilidade de um segundo evento ocorrer, se este for também crescente.

Em palavras, um elo e é **pivotal** para o evento A em uma certa configuração se seu estado define ocorrência do evento A . Formalmente:

Definição. O elo e é **pivotal** para o evento A na configuração ω se as configurações ω^e e ω_e definidas por

$$\omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & \text{se } f \neq e \\ 1 & \text{se } f = e, \end{cases} \quad \text{e} \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & \text{se } f \neq e \\ 0 & \text{se } f = e \end{cases}$$

satisfazem $\omega^e \in A$ e $\omega_e \notin A$.

Em algumas situações necessitaremos de cotas para a derivada da probabilidade de um evento crescente (Teorema 2.25, [9]), para isso usaremos duas ferramentas:

Lema 2. [Fórmula de Russo] Seja A evento crescente que depende apenas de uma quantidade finita de elos E , então

$$\frac{d}{dp} P_p[A] = \sum_{e \in E} P_p[e \text{ é pivotal para } A].$$

A quantidade $P_p[e \text{ é pivotal para } A]$ é também chamada de **influência de e** . Outro resultado ([13, Corollary 1.2]) que usa essas quantidades será importante nesse texto:

Lema 3. Para qualquer $\delta > 0$, existe uma constante $c = c(\delta) > 0$ tal que para qualquer evento crescente A dependente de um conjunto finito E de elos, e qualquer $p \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p[A] \geq c \log \left(\frac{1}{\max\{\mathbb{P}_p[e \text{ é pivotal para } A] : e \in E\}} \right) \cdot \mathbb{P}_p[A] (1 - \mathbb{P}_p[A]).$$

Capítulo 3

Renormalizações

3.1 A renormalização de Grimmett e Marstrand

Muitos dos principais problemas abertos na teoria da percolação estão relacionados a entender o comportamento do modelo na criticalidade, em outras palavras, quando p é igual a p_c , e em particular provar que não existe aglomerado infinito em p_c .

Conjectura 1. Em \mathbb{Z}^d , para todo $d \geq 2$, $\mathbb{P}_{p_c}[0 \leftrightarrow \infty] = 0$.

Uma estratégia para atacar a conjectura é encontrar um $\delta > 0$ e uma sequência de eventos \mathcal{E}_n dependentes apenas de elos em $\Lambda_n := \{-n, \dots, n\}^d$, tais que para qualquer p ,

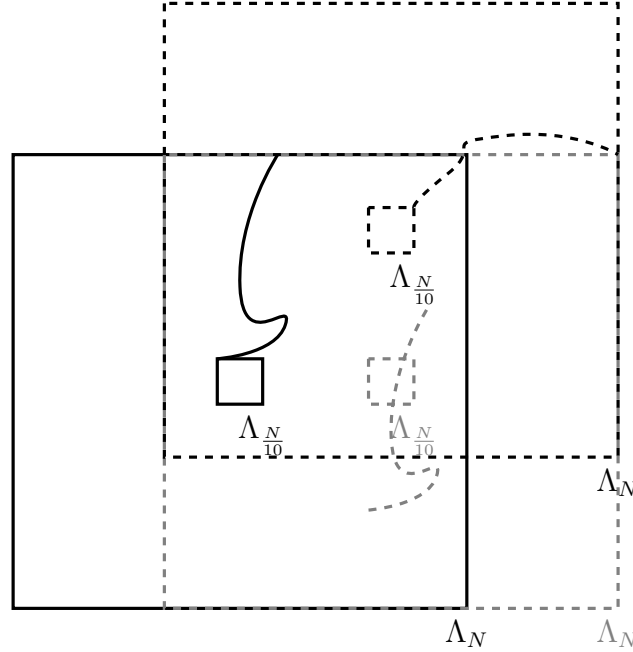
$$\exists n > 0 \text{ t.q. } \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta \iff \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \infty] > 0.$$

Em palavras, \mathcal{E}_n é um evento que depende de finitos elos e que, dependendo de n , pode ter probabilidade arbitrariamente próxima de 1. Se ambas implicações existem, a Conjectura 1 está provada. De fato, vamos supor que existe aglomerado infinito em p_c , ou seja $\mathbb{P}_{p_c}[0 \leftrightarrow \infty] > 0$, então temos que $\mathbb{P}_{p_c}[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta$ para algum n . \mathcal{E}_n é um evento que depende apenas de conjunto finito de elos e portanto $P_p[\mathcal{E}_n]$ é uma função contínua em p , então existe ε tal que $P_{p_c - \varepsilon}[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta$, o que implica que $P_{p_c - \varepsilon}[0 \leftrightarrow \infty] > 0$, contradição com a definição de p_c .

O problema dessa estratégia é a dificuldade em provar as duas implicações simultaneamente. Dependendo das hipóteses sobre a sequência de eventos \mathcal{E}_n fica mais fácil provar a suficiência, porém mais difícil provar a necessidade. Vamos ilustrar algumas opções de eventos para mostrar essa dificuldade.

Seja \mathcal{E}_n o evento onde $\Lambda_{n/10}$ está conectado a $\partial\Lambda_n$ e o segundo maior aglomerado contido em Λ_n tem diâmetro menor que $n/10$. Para mostrar a suficiência vamos usar um argumento chamado renormalização, que informalmente, consiste em olhar o modelo em escalas maiores, e nessa escala estabelecer determinados eventos que vão ser vértices num novo modelo de percolação de vértices, ou seja, dizemos que o vértice está aberto no modelo renormalizado se o evento acontece no modelo original, assim podemos analisar

Figura 3.1: Se a caixa preta $\Lambda_{N/10}$ se conecta ao seu par Λ_N , esse aglomerado tem diâmetro maior que $n/10$, e está na caixa tracejada Λ_N , então necessariamente é o mesmo aglomerado que conecta $\Lambda_{N/10}$ tracejado ao seu par Λ_N . Caixas distantes o suficiente, a depender de N , são independentes.



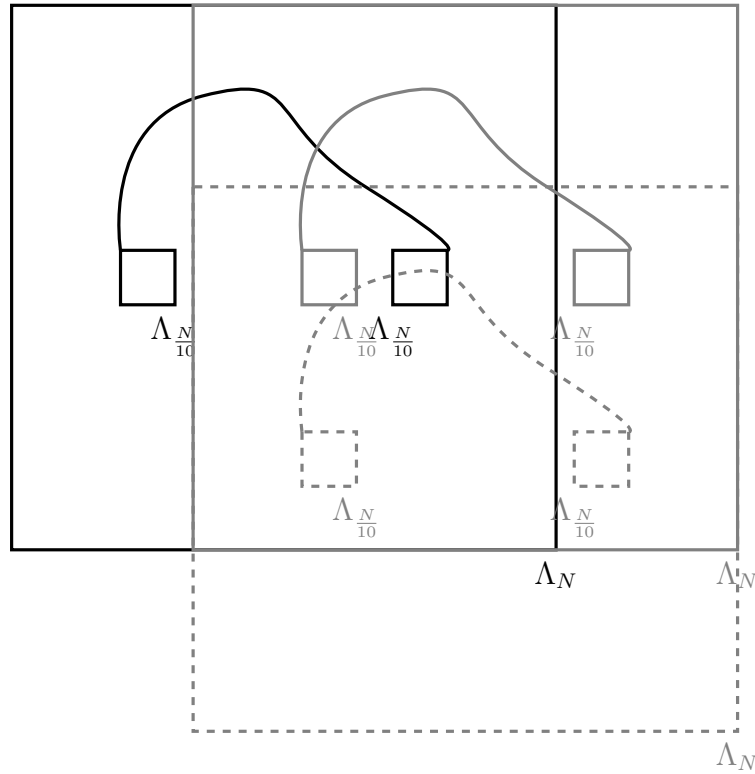
Fonte: Elaborado pelo autor.

eventos de interesse no modelo original, geralmente existência de aglomerado infinito, observando o modelo renormalizado. No nosso exemplo, um vértice estará aberto no modelo renormalizado se sua respectiva caixa $\Lambda_{n/10}$ está conectada ao seu par Λ_n , e a hipótese do segundo aglomerado é cumprida.

Se considerarmos translações de \mathcal{E}_n tais que, o segundo maior aglomerado tem diâmetro menor que $n/10$, podemos forçar os aglomerados que fazem a conexão em cada caixa Λ_n serem o mesmo, basta sobrepor uma parte da caixa Λ_n sobre a outra (Figura 3.1), o preço dessa estratégia é não ter independência no modelo renormalizado de vértices, uma vez que suas respectivas caixa compartilharam elos, mas devido a Liggett, Schonmann, e Stacey [12] temos que qualquer modelo de percolação com dependência finita entre o estado de vértices (ou elos) possui aglomerado infinito para algum valor de parâmetro menor que 1. Resta mostrar que \mathcal{E}_n , dependendo da sua escala, tem probabilidade arbitrariamente próxima de 1 (mostrado para um evento parecido em [2]) e assim podemos montar um aglomerado no modelo renormalizado, o que implica que o modelo original também tem um aglomerado infinito com probabilidade positiva. A grande dificuldade desse exemplo é provar a necessidade.

Para outro exemplo, defina agora \mathcal{E}_n como o evento em que $(-n, 0) + \Lambda_{n/2}$ está conectada a $(n, 0) + \Lambda_{n/2}$ em Λ_{2n} e existe no máximo um aglomerado em Λ_{2n} que vai de $(\pm n, 0) + \Lambda_{n/2}$ para respectiva $(\pm n, 0) + \partial\Lambda_n$. Novamente a suficiência pode ser mostrada com a argumentação do exemplo anterior, mas a necessidade também é difícil de ser

Figura 3.2: A exemplo do caso anterior, podemos posicionar as caixas Λ_N para garantir que o aglomerados que fazem cada conexão sejam o mesmo



Fonte: Elaborado pelo autor.

provada. Temos que em ambos os casos, unicidade de aglomerados é fator complicador. Aizeman [1] mostra que em altas dimensões Λ_n tem muitos aglomerados disjuntos na criticalidade.

Podemos nos perguntar se existe uma escala ótima das caixas internas no último evento \mathcal{E}_n que facilite a prova da necessidade. Apresentamos um resultado baseado diretamente no artigo de Cerf [4] que será utilizado algumas vezes nesse texto, se trata de decaimento polinomial para a probabilidade de existirem dois ou mais aglomerados disjuntos que conectam uma caixa interna à fronteira de outra caixa externa. Primeiro vamos definir o evento dois braços.

Definição (Evento dois braços). Sejam $1 \leq m \leq n$, e consideremos os estados dos elos apenas em Λ_n . Definimos $A_2(m, n)$ como o evento em que existem 2 ou mais aglomerados disjuntos que interceptam Λ_m e $\partial\Lambda_n$.

Proposição 1 ([4]). *Seja $d \geq 2$. Existe $\alpha = \alpha(d) \in (0, 1)$ tal que para qualquer $p \in (0, 1)$ e n grande suficiente,*

$$\mathbb{P}_p [A_2(n^\alpha, n)] \leq n^{-\alpha}.$$

No Lema 7 do Apêndice é mostrado como chegar a esse resultado.

Para um último exemplo, seja \mathcal{E}_n o evento onde a caixa Λ_N está conectada $\{n\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}$, com $N = N(\delta) > 0$, e independente de n . A necessidade segue da invariância translacional do grafo e FKG, mas a dificuldade está na suficiência.

Em 1990, Grimmett e Marstrand [8] demonstraram que na fase supercrítica, existem $\delta > 0$, $\eta > 0$ e um evento A com probabilidade arbitrariamente próxima de 1 e dependendo de uma quantidade finita de elos tais que

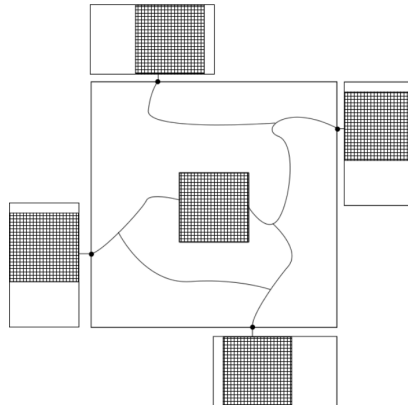
$$P_p(A) \geq 1 - \delta \implies P_{p+\eta}(0 \overset{\text{Slab}_n^d}{\longleftrightarrow} \infty) > 0.$$

onde $\text{Slab}_n^d := \mathbb{Z}^2 \times \{-n, \dots, n\}^{d-2}$ de \mathbb{Z}^d

Informalmente, podemos resumir a prova do argumento de Grimmett-Marstrand em três passos:

Primeiro é encontrado um evento A que depende de quantidade finita de elos e que a depender da escala, tem probabilidade arbitrariamente próxima de 1, nos moldes do Lema 4. O evento A consiste em a partir do centro da caixa Λ_N , existir aglo-

Figura 3.3: O evento A de Grimmett-Marstrand: as caixa hachuradas nas laterais tem todos os elos abertos e são chamadas de *sementes*.

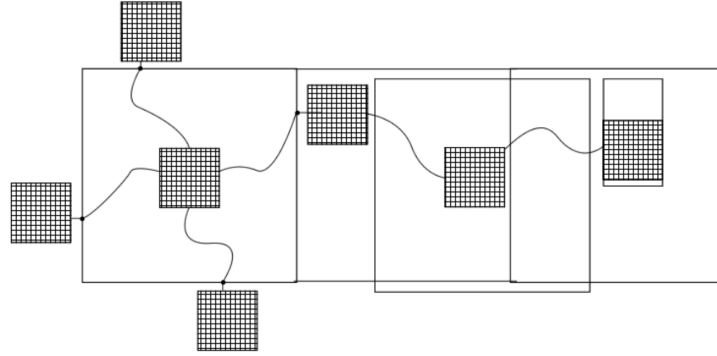


Fonte: [9]

merado aberto que encontra uma caixa Λ_n com $n \lll N$, tal caixa Λ_n , chamada de semente, tem todos os elos abertos e é localizada em algum canto da caixa maior, uma para cada face e tem esse nome por propagar o aglomerado para o próximo passo. Importante notar que na Figura 3.3 as caixas laterais tem todos os elos abertos e que $\mathbb{P}_p[\omega(e) = 1 \text{ para todo } e \in \Lambda_n] \sim \exp[-n^d]$, por isso o evento depende de uma escala muito grande.

O segundo passo é construir dinamicamente o aglomerado da origem, assim driblamos a necessidade de garantir que aglomerados dos eventos que serão renormalizados se interceptem, pois estamos montando o aglomerado passo a passo. Para isso usamos o Lema 6 que diz que se a probabilidade de encontrar um vértice do modelo renormalizado aberto é sempre suficientemente grande, então a rede original percola. É construído então

Figura 3.4: A construção dinâmica do aglomerado da origem.



Fonte: [9]

um caminho infinito de vértices, "abrindo" um novo evento A associado a um vértice do modelo renormalizado a cada passo, de semente em semente.

Por último, é preciso resolver um problema com a construção dinâmica proposta: quando observamos um aglomerado, não temos apenas informação sobre os elos abertos que formam o aglomerado, sabemos também que os elos da fronteira do aglomerado estão fechados. Portanto, para propagar o aglomerado em etapas temos que vencer essa barreira de elos fechados, e daí vem a necessidade de adicionar elos abertos com o parâmetro η . Um resultado parecido com o Lema 5 resolve esse problema.

Na próxima seção, seguindo a mesma estrutura descrita aqui, vamos usar outro evento que depende de uma escala menor de caixas.

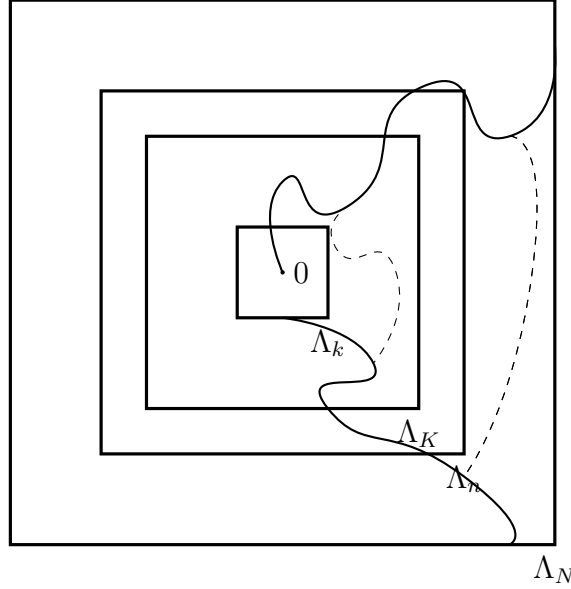
3.2 A renormalização de Copin, Kozma e Tassion

O esquema de normalização que usaremos tem quatro escalas diferentes, as quais iremos denotar por $k < K < n < N$. A escala mais importante está entre K e n , onde colocamos $1/\varepsilon^2$ caixas de tamanho K e usamos a independência entre elas para chegar a um evento de alta probabilidade. A escala entre k e K , e entre n e N serão usadas para colar caminhos usando Proposição 1 (a segunda, entre n e N , é usada apenas para resolver uma questão de técnica de conexão para uma face específica e é menos importante). Enunciamos novamente o resultado.

Teorema 1. *Seja $d \geq 3$. Existe uma constante $C = C(d) > 0$ tal que o seguinte é verdade. Assuma que para algum $p \in [0, 1]$ e algum $\varepsilon > 0$, existam $1 \leq k \leq K \leq n \leq N < \infty$ tais que $K \leq \varepsilon^2 n$ e,*

$$(a) \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq \varepsilon,$$

Figura 3.5: As caixas $k \leq K \leq n \leq N$ e os aglomerados que conectam a origem à Λ_N (condição (a)) e Λ_k à Λ_N (condição (b)). Esses aglomerados se encontram segundo a condição (c), entre as caixas Λ_k e Λ_K , e entre as caixas Λ_n e Λ_N , com alta probabilidade (linha tracejada).



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$(b) \mathbb{P}_p [\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon}),$$

$$(c) \mathbb{P}_p [A_2(k, K)] \leq \exp(-\frac{1}{\varepsilon}) \text{ e } \mathbb{P}_p [A_2(n, N)] \leq \exp(-\frac{1}{\varepsilon}).$$

Então,

$$\mathbb{P}_{p+C\varepsilon} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{3N}^d} \infty] \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontraremos quantidades que estabelecem as hipóteses do Teorema para provar o Teorema ?? e ??.

A prova do Teorema 1 é dividida em três partes. Primeiro demonstraremos o Lema 4, que nos diz que se temos as hipóteses do Teorema 1, então com alta probabilidade um conjunto conexo de vértices suficientemente grande e relativamente centralizado (contendo a origem) está conectado a uma parte específica da caixa externa, esse conjunto será usado para propagar o aglomerado, como as sementes. Em resumo, se existe um aglomerado que liga a origem à fronteira da caixa Λ_N , então esse aglomerado é relativamente grande. Depois, mostramos no Lema 5 que conseguimos colar aglomerados, encontrados via Lema 4, a custo de um aumento pequeno no parâmetro do modelo, e por fim usamos esses resultados para encontrar uma renormalização apropriada que conclui a prova.

Lema 4. *Assuma que as condições (a), (b), (c) valem. Então, existem $C > 0$ e $c > 0$ (dependendo apenas de d) tal que para todo conjunto conexo $S \ni 0$ com diâmetro maior que n ,*

$$\mathbb{P}_p \left[S \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N) \right] \geq 1 - C \exp[-c/\varepsilon],$$

onde $F(N) := \{(x_1, \dots, x_d) \in \partial\Lambda_N : x_1 = N, x_2 \geq 0, \dots, x_d \geq 0\}$.

Chamaremos os conjuntos do tipo $F(N)$ de **quartis**.

Na prova de Grimmett-Marstrand precisamos rotacionar os eventos de caixa e semente para garantir que as sementes se mantenham centralizadas nas outras caixas, por isso a definição de quartil é importante. Para comparar a conexão a uma caixa com a conexão a um quartil, basta usarmos o “truque da raiz quadrada”: se Λ_k está conectada a $\partial\Lambda_N$ por um aglomerado aberto, então Λ_k está conectada a um dos $d2^d$ quartis F , logo,

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}_p[\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} \Lambda_N] &= 1 - \mathbb{P}_p\left[\bigcup_{i=1}^{d2^d} \Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F_i(N)\right] \\ &= \mathbb{P}_p\left[\bigcap_{i=1}^{d2^d} \{\Lambda_k \not\xleftrightarrow{\Lambda_N} F_i(N)\}^c\right] \\ &\geq \prod_{i=1}^{d2^d} \mathbb{P}_p[\{\Lambda_k \not\xleftrightarrow{\Lambda_N} F_i(N)\}^c] \\ &= (1 - \mathbb{P}_p[\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)])^{d2^d}, \end{aligned}$$

onde usamos FKG (Lema 1) para obter a desigualdade. Portanto, usando a relação acima e (b) temos que

$$\mathbb{P}_p[\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)] \geq 1 - \exp[-1/\varepsilon d2^d].$$

Demonstração do Lema 4. Sem perda de generalidade, podemos assumir ε suficientemente pequeno (uma vez que c pequeno torna a afirmação do lema trivial, mais especificamente $\varepsilon \leq -\ln(1/2)/c$).

Sejam $p \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ e $k \leq K \leq n \leq N$ tais que $K \leq \varepsilon^2 n$ e as três condições (a), (b) e (c) valem. Fixamos um conjunto S que contém a origem e diâmetro de no mínimo n . De novo, sem perder generalidade, podemos assumir que $S \subset \Lambda_n$ pois caso contrário, podemos usar $S \cap \Lambda_n \subset S$ e por inclusão de eventos,

$$\mathbb{P}_p[S \leftrightarrow F(N)] \geq \mathbb{P}_p[S \cap \Lambda_n \leftrightarrow F(N)]$$

. Vamos considerar uma família de vértices $x_1, \dots, x_\ell \in S$, escolhidos de forma que as caixas $Q_i'' := x_i + \Lambda_K$ são disjuntas e contidas em Λ_n . Definimos também caixas menores $Q_i' := x_i + \Lambda_k$. Devido a restrição $K \leq \varepsilon^2 n$ e o diâmetro de S podemos escolher um número de vértices $\ell \geq c_1/\varepsilon^2$, com c_1 dependendo apenas de d . Escolhemos $\ell = \lceil c_1/\varepsilon^2 \rceil$.

Para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$, definimos dois eventos:

$$\begin{aligned} E_i &:= \{x_i \longleftrightarrow \partial Q_i''\} \cap \{\exists \text{ aglomerado único em } Q_i'' \text{ de } Q_i' \text{ até } \partial Q_i''\}, \\ B_i &:= \{Q_i' \leftrightarrow \partial\Lambda_N\}. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é conseguir uma cota inferior para a probabilidade do evento $\{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\}$, para isso vamos usar E_i e B_i e conseguir cotas para esses eventos. Por invariância translacional e condições (a) e (c),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[E_i] &= \mathbb{P}_p[\{x_i \longleftrightarrow \partial Q_i''\} \cap \{\exists \text{ aglomerado \u00fanico em } Q_i'' \text{ de } Q_i' \text{ at\u00e9 } \partial Q_i''\}] \\ &= \mathbb{P}_p\left[\{x_i \longleftrightarrow \partial Q_i''\} \cap \{\exists! \text{ aglomerado } x_i \xleftrightarrow{Q_i''} \partial Q_i''\}\right] \\ &\geq \mathbb{P}_p[x_i \longleftrightarrow \partial Q_i''] - \mathbb{P}_p[A_2(k, K)] \\ &\geq \varepsilon - \exp(-1/\varepsilon) \geq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Como constru\u00edmos Q_i'' disjuntas, ent\u00e3o os eventos E_i s\u00e3o independentes:

$$\mathbb{P}_p[\cup_i E_i] = 1 - \mathbb{P}_p[\cap_i E_i^c] = 1 - \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}_p[E_i^c] \geq 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^\ell \geq 1 - 2 \exp\left[-\frac{c_2 \ell \varepsilon}{2}\right] \geq 1 - 2e^{-c_3/\varepsilon},$$

onde a segunda desigualdade \u00e9 consequ\u00eancia de $\ell \geq c_1/\varepsilon^2$ e c_2 e c_3 s\u00e3o constantes que dependem apenas de d .

Para conseguir a cota superior para B_i basta considerarmos um face de $x_i + \Lambda_N$ fora de Λ_{N-1} e usar o truque da raiz quadrada com 0 trocado por x_i (invari\u00e2ncia translacional) e concluirmos que para todo i ,

$$\mathbb{P}_p[B_i] \leq \mathbb{P}_p[Q_i' \leftrightarrow F] \leq \exp[-1/d2^d \varepsilon],$$

ent\u00e3o pela cota da uni\u00e3o:

$$\mathbb{P}_p[\cup B_i] \leq \ell \exp[-1/d2^d \varepsilon] \leq \exp[-c_5/\varepsilon]$$

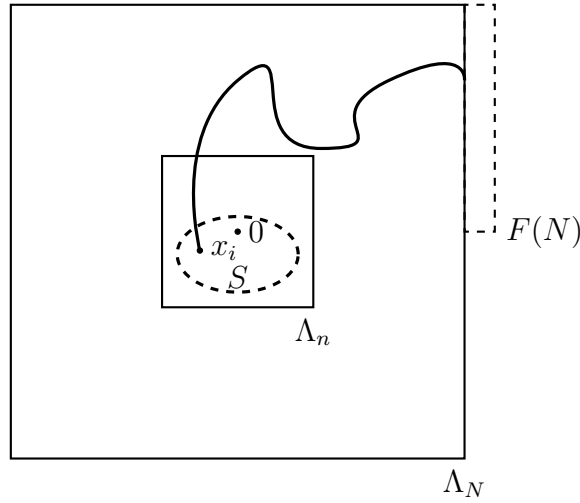
onde c_5 \u00e9 uma nova constante que depende de $\ell \leq c_1/\varepsilon^2 + 1$.

Para cotar $\{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\}$ vamos analisar o evento $E_i \setminus B_i$ para algum i . Neste evento temos que $x_i \leftrightarrow \partial Q_i''$ ocorre devido a E_i , $Q_i' \leftrightarrow \partial\Lambda_N$ ocorre devido a B_i^c , e novamente por E_i , o mesmo aglomerado faz as duas conex\u00f5es. Temos ent\u00e3o um caminho de x_i para $\partial\Lambda_N$, e como os pontos x_i est\u00e3o contidos em S , temos um caminho de S para $\partial\Lambda_N$. Por inclus\u00e3o de eventos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[S \leftrightarrow \partial\Lambda_N] &\geq \mathbb{P}_p[\exists i \text{ t.q. } E_i \setminus B_i] \\ &\geq \mathbb{P}_p[\cup E_i] - \mathbb{P}_p[\cup B_i] \\ &\geq 1 - 2e^{-c_4/\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde c_4 \u00e9 uma nova constante que depende apenas de d .

Figura 3.6: Queremos encontrar um ponto dentro de S que se conecta a um quartil com alta probabilidade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Falta apenas relacionar a cota acima com $F(N)$. Como $S \subset \Lambda_n$ podemos usar inclusão de eventos, truque da raiz quadrada e (c) para:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[S \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)] &\geq \mathbb{P}_p[\{\Lambda_n \leftrightarrow F(N)\} \cap \{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\} \cap A(n, N)^c] \\ &= 1 - \mathbb{P}_p[\{\Lambda_n \leftrightarrow F(N)\}^c \cup \{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\}^c \cup A_2(n, N)] \\ &\geq 1 - \exp[-1/\varepsilon d 2^d] - 2e^{-c_4/\varepsilon} - \exp[-\frac{1}{\varepsilon}] \\ &\geq 1 - Ce^{-c_5/\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde c_5 e C são novas constantes que dependem das demais. □

Agora que temos um evento com alta probabilidade, precisamos vencer a informação negativa de elos fechados que trazemos cada vez que abrimos um novo aglomerado. A seguir, relembramos a notação para a fronteira de elos de um conjunto restrita a um outro conjunto. Seja $R \subset \mathbb{Z}^d$, definimos

$$\Delta A := \{\{x, y\} \subset R : |x - y| = 1, x \in A, y \in R \setminus A\}.$$

Definimos também a união de duas configurações. Sejam ω e $\tilde{\omega}$ configurações, $\omega \vee \tilde{\omega}$ é a configuração tal que $e(\omega \vee \tilde{\omega})$ está aberto se $e(\omega)$ está aberto ou $e(\tilde{\omega})$ está aberto.

Lema 5. *Dados $\delta, \eta > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que, para quaisquer $p \in [\delta, 1 - \delta]$, $\varepsilon > 0$ e $A, B \subset R$, se $\mathbb{P}_p[A \xleftrightarrow{R} B] \geq 1 - 2 \exp[-\eta/\varepsilon]$ temos que*

$$\mathbb{P}[A \xleftrightarrow{R} B \text{ in } \omega \vee \tilde{\omega} \mid \omega(e) = 0, \forall e \in \Delta A] \geq 1 - \delta,$$

onde ω é uma configuração de percolação Bernoulli com parâmetro p , $\tilde{\omega}$ é configuração de percolação Bernoulli de parâmetro $\lambda\varepsilon$, $\tilde{\omega}$ é independente de ω .

Demonstração. Precisamos apenas analisar o caso $A \cap B = \emptyset$. Definimos o evento E onde todos os elos de ΔA estão fechados segundo ω , ou seja,

$$E := \{\omega(e) = 0 \text{ para todo } e \in \Delta A\},$$

e o conjunto dos elos de ΔA que possuem vértice externo conectado a B em ω por:

$$W := \{e = \{x, y\} \in \Delta A \text{ tal que } y \xleftrightarrow{R \setminus A} B \text{ em } \omega\}.$$

Podemos relacionar o evento $\{A \xleftrightarrow{R} B\}$ com o conjunto W . Qualquer caminho de A para B em R , aberto em ω , precisa usar no mínimo um elo de W . Usando o fato que o tamanho ($|W|$) de W é independente do estado de seus elos, temos que para qualquer $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[A \xleftrightarrow{R} B] &\geq \mathbb{P}_p[\text{os elos de } W \text{ estão fechados}] \\ &= \sum_k \mathbb{P}_p[\text{os elos de } W \text{ estão fechados}, |W| = k] \\ &\geq \sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{P}_p[\text{os elos de } W \text{ estão fechados}, |W| = k] \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{P}_p[\text{os elos de } W \text{ estão fechados}] P_p[|W| = k] \\ &\geq (1-p)^{t-1} \mathbb{P}_p[|W| < t]. \end{aligned}$$

Para concluir a prova, usamos a desigualdade acima e percebemos que $\{|W| \geq t\}$ é independente de E , então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \xleftrightarrow{R} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid E] &\geq \mathbb{P}[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1, W \geq t \mid E] \\ &= \mathbb{P}[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1, W \geq t] \\ &\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \mathbb{P}[W \geq t] \\ &\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \left(1 - \frac{\mathbb{P}_p[A \xleftrightarrow{R} B]}{(1-p)^{t-1}}\right) \\ &\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \left(1 - \frac{\exp[-\eta/\varepsilon]}{(1-p)^{t-1}}\right). \end{aligned}$$

Agora precisamos otimizar o lado direito. Usamos o fato que $1 + x \leq \exp x$ e escolhemos t da forma α/ε para tirar a dependência em ε da primeira parte:

$$\begin{aligned} (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \left(1 - \frac{\exp[-\eta/\varepsilon]}{(1-p)^{t-1}}\right) &\geq (1 - [\exp(-\lambda\varepsilon)]^{\frac{\alpha}{\varepsilon}}) \left(1 - \frac{\exp[-\eta/\varepsilon]}{(1-p)^{\alpha/\varepsilon-1}}\right) \\ &= (1 - \exp(-\lambda\alpha)) \left(1 - \frac{\exp[-\eta/\varepsilon]}{(1-p)^{\alpha/\varepsilon-1}}\right) \\ &= (1 - \exp(-\lambda\alpha)) \left(1 - \frac{\exp[-\eta/\varepsilon]}{(1-p)^{\alpha/\varepsilon-1}}\right) \\ &= (1 - \exp(-\lambda\alpha)) \left(1 - \exp[-\eta/\varepsilon + (1 - \alpha/\varepsilon) \log[1-p]]\right) \\ &\geq (1 - \delta/2)(1 - \delta/2) \geq 1 - \delta, \end{aligned}$$

se mostrarmos que ambas exponenciais são menores que $\delta/2$. Primeiro tomamos α suficientemente pequeno e trocamos p por δ para garantir que o segundo termo seja arbitrariamente próximo de 1 e não dependa de p . Depois escolhemos $\lambda = \lambda(\delta, \eta)$ suficientemente grande. \square

3.3 Demonstração do Teorema 1

Para demonstrar o Teorema 1 definiremos uma exploração de elos no Slab associada com uma exploração de vértices no modelo renormalizado com o objetivo de usar o Lema 6 que tem uma condição suficiente para o modelo renormalizado em \mathbb{Z}^2 percolar. Para isso usamos os dois lemas anteriores para colar aglomerados a preço de um novo processo de percolação de parâmetro $\lambda\varepsilon$ pequeno.

Primeiro vamos definir formalmente o que é a exploração de vértices: Escolha uma ordenação arbitrária dos elos de \mathbb{Z}^2 . Seja $\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \dots$ e $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \dots$ duas sequências crescentes de subconjuntos de \mathbb{Z}^2 . Dizemos que uma sequência $X_t = (A_t, B_t)$ é uma *sequência de exploração* se para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t \text{ se não existe elo que conecta } A_t \text{ com } (A_t \cup B_t)^c, \\ X_{t+1} &= (A_t \cup \{x_t\}, B_t) \text{ ou } X_{t+1} = (A_t, B_t \cup \{x_t\}) \text{ caso contrário,} \end{aligned}$$

onde x_t é um vértice de $(A_t \cup B_t)^c$ do elo mínimo (segundo a ordenação) que conecta um vértice em A_t para $(A_t \cup B_t)^c$. Em geral a sequência $\{A_t\}_{t \geq 0}$ são de vértices conectados à origem por vértices abertos depois de t passos de exploração, B_t é a fronteira de vértices fechados do aglomerado da origem.

Dizemos que uma sequência de exploração *percola* se o conjunto $\cup_{t \geq 0} A_t$ é infinito. Então precisamos de um critério para uma sequência de exploração percolar, apresentado a seguir e provado em [8, Lema 1]

Lema 6. *Seja p_c^{site} o ponto crítico de percolação de vértices Bernoulli em \mathbb{Z}^2 e $X_t = (A_t, B_t)$ uma sequência de exploração aleatória. Se existe $q > p_c^{\text{site}}$ tal que para todo $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(A_{t+1} \neq A_t \mid X_0, \dots, X_t) \geq q \quad q.c.,$$

então o processo X_t percola com probabilidade maior que uma constante $c = c(q) > 0$, está pode ser arbitrariamente próxima de 1 contanto que q esteja próximo o suficiente de 1.

Prova do Teorema 1. Para todo vértice $x \in \mathbb{Z}^2$, definimos duas caixas indexadas por x em \mathbb{Z}^d : $\Lambda_x := Nx + \Lambda_N \subset \mathbb{Z}^d$ e $\tilde{\Lambda}_x = Nx + \Lambda_{3N} \subset \mathbb{Z}^d$, onde $Nx + \Lambda_N$ é a caixa Λ_N

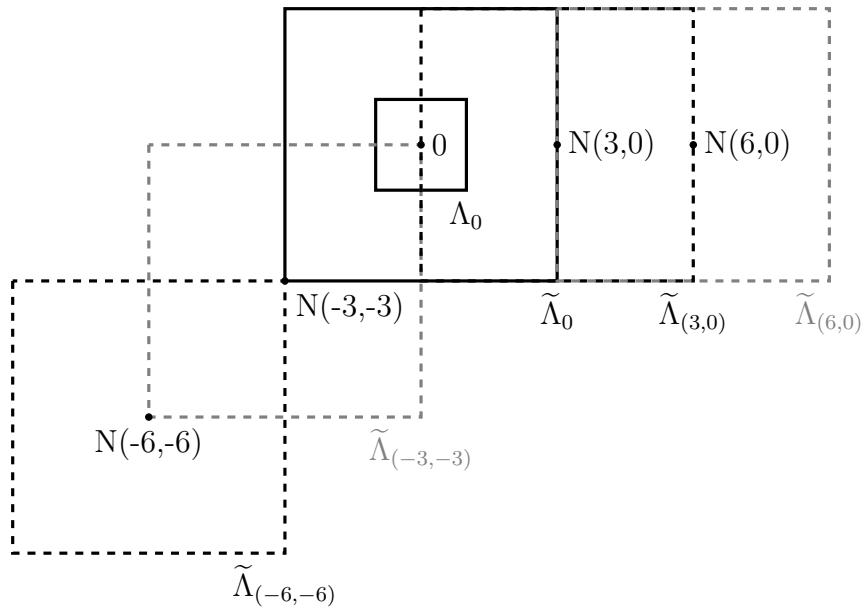
centralizado no vértice Nx . Associamos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ com $(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. Por exemplo, a origem é $(0, 0)$ e Λ_0 é a caixa de lado $3N$ centralizada na origem em \mathbb{Z}^d .

Seja ω configuração de um processo de percolação independente Bernoulli de parâmetro p no Slab_{3N}^d , e para todo $x \in \mathbb{Z}^2$, definimos ω^x como um processo de percolação independente Bernoulli de parâmetro $\lambda\varepsilon$ limitado a caixa $\tilde{\Lambda}_x$, onde λ é a constante do Lema 5. Assumimos independência entre ω e ω^x para todo $x \in \mathbb{Z}^2$ e entre ω^x e ω^y para todo par $x, y \in \mathbb{Z}^2$. A ideia é que um elo pode ser aberto tanto pelo processo ω ou por um processo ω^x relacionado com o elo, ou seja, uma das caixas $\tilde{\Lambda}_x$ que contém o elo. Os processos ω^x servirão para adicionar elos ao processo como o parâmetro η da discussão no início do capítulo. Mostraremos que a origem pertence a um aglomerado aberto infinito em

$$\omega_{\text{total}} := \omega \vee \left(\bigvee_{x \in \mathbb{Z}^2} \omega^x \right)$$

com probabilidade maior que $\varepsilon/2$. ω_{total} é a configuração resultante da junção de todos elos que estão abertos em alguma configuração ω^x ou ω . Essa afirmação conclui a prova pois, se ω_{total} percola, então por dominação estocástica, um processo de percolação de parâmetro $(p + 49 \cdot \lambda\varepsilon)$ também percola. O número 49 vem do máximo de caixas $\tilde{\Lambda}_x$ que compartilham elos com $\tilde{\Lambda}_0$, seis para cada direção (Figura 3.7).

Figura 3.7: As caixas Λ_0 e $\tilde{\Lambda}_0$ centralizadas e algumas das caixas que compartilham seus elos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora precisamos definir a sequência aleatória de exploração com a qual usaremos o Lema 6. Seja $(\omega_t)_{t \geq 0}$ uma sequência crescente de configurações no Slab, associada a uma sequência de exploração aleatória $X_t = (A_t, B_t)$ em \mathbb{Z}^2 . Definimos $\mathcal{C}(\omega)$ como o aglomerado da origem no Slab na configuração ω .

Definição. Seja $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, definimos $X_0 = (A_0, B_0) := (\{0\}, \emptyset)$ e $\omega_0 = \omega$. Para todo $t \geq 0$, definimos ω_{t+1} e X_{t+1} a partir de ω_t e X_t a seguir: se não existe elo conectando A_t para $(A_t \cup B_t)^c$, definimos $X_{t+1} := X_t$. Caso contrário, seja $x = x_t$ um vértice em $(A_t \cup B_t)^c$ do elo minimal que conecta A_t com $(A_t \cup B_t)^c$ e definimos

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &:= \omega_t \vee \omega^x, \\ X_{t+1} &:= \begin{cases} (A_t \cup \{x\}, B_t) & \text{se } 0 \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_{t+1}, \\ (A_t, B_t \cup \{x\}) & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que, por definição de ω_{total} , temos que $\omega_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \omega_t \leq \omega_{\text{total}}$. Por consequência, um aglomerado infinito em ω_∞ implica que a configuração ω_{total} também percola. Portanto, para provar o Teorema 1 basta mostrar que

$$\mathbb{P}[X \text{ percolar}] \geq \varepsilon/2.$$

Para isso, vamos estabelecer que a origem já está conectada a fronteira da caixa Λ_0 , assim desde o primeiro passo t já temos aglomerado grande o suficiente para ser propagado usando o Lema 5. A condição (a) estabelece que $\mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq \varepsilon$, por definição de probabilidade condicional, mostraremos que

$$\mathbb{P}[X \text{ percolar} \mid 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ in } \mathcal{C}(\omega_0)] \geq 1/2.$$

A condição do Lema 6 pede que encontremos $q > p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^2)$, tal que $c(q) \geq 1/2$ e portanto basta mostrar que

$$\mathbb{P}(A_{t+1} \neq A_t \mid X_0, \dots, X_t) \geq q \text{ q.c.}$$

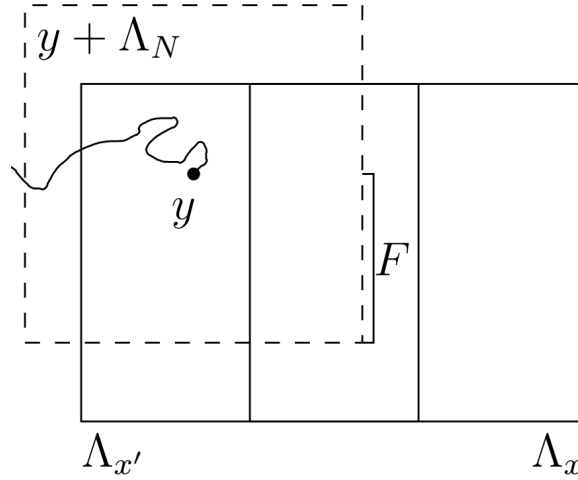
Podemos focar no caso onde ainda temos elos para serem checados na fronteira do aglomerado e por isso, ainda não determinamos que aglomerado da origem é finito. Temos, pela definição da sequência de exploração, que $A_{t+1} \neq A_t$ se 0 está conectado a Λ_x em ω_{t+1} . As variáveis X_0, \dots, X_t e os eventos em que x está bem definido são mensuráveis com respeito a $\mathcal{C}(\omega_0), \dots, \mathcal{C}(\omega_t)$, então basta mostrar que para uma sequência possível de aglomerados C_0, C_1, \dots, C_t , temos

$$\mathbb{P}(B_{t+1} = B_t \mid X_0, \dots, X_t) = \mathbb{P}(\Lambda_0 \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_{t+1} \mid \mathcal{C}(\omega_0) = C_0, \dots, \mathcal{C}(\omega_t) = C_t) \geq q \text{ q.c.}$$

O aglomerado da origem C_t nos dá informação também da sua fronteira de elos, sabemos por definição da sequência de exploração que $\{A_0 \leftrightarrow C_t\}$ e $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_t$, e portanto, só dependemos do aglomerado mais recente, então podemos reescrever a probabilidade acima como

$$\mathbb{P}(C_t \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_t \vee \omega^x \mid C(\omega_t) = C_t \text{ e a fronteira de elos de } C_t \text{ está fechada}). \quad (3.1)$$

Observe que qualquer aglomerado C_t intersecta $\Lambda_{x'}$, onde x' é o vértice do elo minimal e

Figura 3.8: Um novo evento partindo de y 

Fonte: [6]

em A_t , pois o aglomerado chegou até Λ'_x . Como condicionamos em $0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0$, o diâmetro de C_t é no mínimo N em todos os passos. Seja y um vértice em $C_t \cap \Lambda_{x'}$. Temos que uma caixa Λ_N centralizada em y tem algum quartil F incluído em Λ_x , a caixa referente ao vértice que estamos analisando (Figura 3.8). Por aplicação do Lema 4 trocando a origem por y e tomando $S = C_t \cap \Lambda_{x'}$, temos

$$\mathbb{P}_p[C_t \xleftrightarrow{\tilde{\Lambda}_x} \Lambda_x \text{ in } \omega \vee \omega^x] \geq \mathbb{P}_p[C_t \xleftrightarrow{\tilde{\Lambda}_x} F(N) \subset \Lambda_x] \geq 1 - C \exp[-c/\varepsilon].$$

O evento $C_t \leftrightarrow \Lambda_x$ é crescente, então podemos substituir $\omega \vee \omega^x$ para $\omega_t \vee \omega^x$, onde só abrimos mais elos. Por independência entre ω^x e ω_t e o resultado acima, podemos usar o Lema 5 que diz que (3.1) é tão próximo de 1 quanto necessário se λ é grande o suficiente, uma vez que o conjunto $C_t \cap \Lambda_{x'}$ está contido em $\tilde{\Lambda}_x$ e temos as hipóteses, o que conclui a prova do Teorema 1. \square

Referências

- [1] M. Aizenman. On the number of incipient spanning clusters. *Nuclear Physics B*, 485(3):551–582, Fev. 1997.
- [2] P. Antal and A. Pisztora. On the chemical distance for supercritical bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 24(2):1036–1048, Abril 1996.
- [3] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes: I. crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(3):629–641, 1957.
- [4] R. Cerf. A lower bound on the two-arms exponent for critical percolation on the lattice. *The Annals of Probability*, 43(5):2458–2480, Set. 2015.
- [5] J. Chayes, Amber L. Puha, and Ted Sweet. Independent and dependent percolation. 1999.
- [6] H. Duminil-Copin, G. Kozma, and V. Tassion. Upper bounds on the percolation correlation length. *In and Out of Equilibrium 3: Celebrating Vladas Sidoravicius*, 77, Abril 2021.
- [7] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$. *Electron. J. Probab.*, 22:65 pp., 2017.
- [8] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1879):439–457, 1990.
- [9] G.R. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 1999.
- [10] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56(1):13–20, 1960.
- [11] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.

-
- [12] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1):71–95, Jan 1997.
- [13] M. Talagrand. On russo’s approximate zero-one law. *Ann. Probab.*, 22(3):1576–1587, Jul 1994.

Apêndice A

Cerf e Grimmett

A.1 Adaptação de [4] para Proposição 1

A Proposição 1 vem dos resultados de Cerf [4], porém não está presente no formato apresentado aqui. Em resumo, precisamos alterar o Lema 6.1 para $p \neq p_c$:

Lema 7. *Existe uma constante positiva $C = C(d)$ tal que, para qualquer $n \geq 1$ e $p \in (\delta, 1]$,*

$$\forall x, y \in \Lambda_n \quad \mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] \geq \frac{1}{n^C}.$$

Demonstração. Temos por inclusão de eventos que $\mathbb{P}_p[A_2(n, n^C)] \leq \mathbb{P}_p[\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}]$, assumimos então que $\mathbb{P}_p[\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}] > 1/n$, caso contrário a Proposição 1 já está provada. Pela cota da união,

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}] \geq \mathbb{P}_p[\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}] > 1/n.$$

Logo existe no mínimo um vértice $x \in \partial\Lambda_n$ tal que $\mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}] \geq \frac{1}{n|\partial\Lambda_n|}$. Usando novamente a cota da união, invariância translacional e inclusão de eventos, temos que para qualquer $m \leq n$

$$\sum_{y \in \partial\Lambda_m} \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow y] \geq \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}] \geq \frac{1}{n|\partial\Lambda_n|}.$$

Usando o mesmo raciocínio existe $y' \in \partial\Lambda_m$ tal que

$$\mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_m} y'] \geq \frac{1}{n|\partial\Lambda_n||\partial\Lambda_m|} \geq \frac{1}{(4d^2)(2n+1)^{d-1}(2m+1)^{d-1}}.$$

Podemos supor que y' pertence a qualquer uma das faces do cubo d-dimensional, por exemplo $y' \in \{n\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$. Definimos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ como a translação de um vértice

em uma direção. Por FKG e simetria

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n \cup (2ne_1 + \Lambda_n)} 2ne_1] &\geq \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n \cup (2ne_1 + \Lambda_n)} y' \cap y' \xleftrightarrow{\Lambda_n \cup (2ne_1 + \Lambda_n)} 2ne_1] \\
&\geq \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n \cup (2ne_1 + \Lambda_n)} y'] \mathbb{P}_p[y' \xleftrightarrow{\Lambda_n \cup (2ne_1 + \Lambda_n)} 2ne_1] \\
&\geq \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} y] \mathbb{P}_p[y \xleftrightarrow{(2ne_1 + \Lambda_n)} 2ne_1] \\
&= \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} y] \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} y] \\
&\geq \left(\frac{1}{(4d^2)(2n+1)^{2d-2}} \right)^2
\end{aligned}$$

Fixamos agora dois vértices x, y em Λ_n

$$x = (x_1, \dots, x_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d).$$

Vamos supor primeiro $y_i - x_i$ é par. Essa limitação serve para a montagem de caixas de tamanho $n_i \leq n$ e usarmos a desigualdade acima. Vamos construir um caminho de x a y , onde trocamos uma coordenada a cada passo. Para $1 \leq i \leq d$, definimos

$$z_0 = x, z_1 = (y_1, x_2, \dots, x_d), \dots, z_{d-1} = (y_1, \dots, y_{d-1}, x_d), z_d = y.$$

Por inclusão de eventos e FKG

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] &\geq \mathbb{P}_p\left[\bigcap_{i=1}^d z_{i-1} \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} z_i\right] \\
&\geq \prod_{1 \leq i \leq d} \mathbb{P}_p[z_{i-1} \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} z_i]
\end{aligned}$$

Seja $n_i = (y_i - x_i)/2$, inteiro pois $y_i - x_i$ é par. Temos que $n_i \leq n$ e vale a inclusão $z_{i-1} + \Lambda_n \cup z_i + \Lambda_n \subset \Lambda_{2n}$. Por consequência,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[z_{i-1} \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} z_i] &\geq \mathbb{P}_p[z_{i-1} \xleftrightarrow{z_{i-1} + \Lambda_n \cup z_i + \Lambda_n} z_i] \\
&\geq \left(\frac{1}{(4d^2)(2n_i + 1)^{2d-2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora temos uma cota inferior para $\mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y]$ usando o caminho que construímos. Então para alguma constante c ,

$$\mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] \geq \prod_{1 \leq i \leq d} \mathbb{P}_p[z_{i-1} \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} z_i] \geq \frac{c}{n^{4d^2 - 4d}}.$$

Para o caso geral, se $x \neq y$ e $x_i - y_i$ não é par, podemos encontrar um vértice $z \in \Lambda_n$, vizinho de y , tal que para as coordenadas $1 \leq i \leq d$ em que $y_i - x_i$ é ímpar, $z_i - x_i$ será par, e nas coordenadas onde $y_i - x_i$ é par definimos $z_i = y_i$ e então

$$\text{Para todo } i \in \{1, \dots, d\} \quad z_i - y_i \leq 1, \quad z_i - x_i \text{ é par.}$$

Agora usamos inclusão de eventos e FKG para construir um caminho que passe por z ,

$$\mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] \geq \mathbb{P}_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} z]P_p[z \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] \geq \frac{c}{n^{4d^2-4}}p^d \geq \frac{c'}{n^{4d^2-4}}.$$

□

Lema 8. *[[4] Proposição 5.3] Seja $d \geq 2$ e $p \in (0, 1)$. Existe uma constante κ dependendo apenas de d e p tal que*

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}_p[A_2(0, n)] \leq \frac{\kappa \ln n}{\sqrt{n}}.$$

Lema 9. *[[4] Corolário 7.2] Para qualquer $n \geq 1$, $\ell \geq n$, temos*

$$\mathbb{P}_p[A_2(n, \ell)] \leq \frac{3^{9d} n^{4d-2} \mathbb{P}_p[A_2(0, \ell - n)]}{p \inf\{P_p[x \xleftrightarrow{\Lambda_{2n}} y] : x, y \in \partial\Lambda_n\}}.$$

Prova da Proposição 1. Usaremos a cota superior do Lema 8 e do Lema 7 na desigualdade do Lema 9. Logo,

$$\mathbb{P}_p[A_2(n, \ell)] \leq \frac{3^{9d} n^{4d-2} n^C \kappa \ln(\ell - n)}{p \sqrt{\ell - n}}.$$

A desigualdade acima vale para todo $\ell \geq n$, portanto escolhemos ℓ suficientemente grande para provar a Proposição 1. □

A.2 Cota inferior para o comprimento de correlação

Seguimos [9] para mostrar uma cota inferior para o comprimento de correlação usada na prova do Teorema ??,

Lema 10. *Se $p_c > p$ então $\xi_p \leq n/\theta(p, n)$.*

Demonstração. Primeiro definimos algumas quantidades, o hiperplano $H(n) := \{x \in \mathbb{Z}^d : x_1 = n\}$, o evento onde origem esta conectada a $H(n)$ por um cluster finito: $G_n := \{0 \leftrightarrow H(n), |C| < \infty\}$, a união de hiperplanos $R_k := \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_1 < k\}$ e a translação dessa união de hiperplanos como $R_k(i) := \{x \in \mathbb{Z}^d : (i-1)k \leq x_1 < ik\}$. O objetivo é construir um caminho que não intercepta aglomerado infinito e que passa por várias fatias R_k do grafo. Seleccionamos k tal que existe um aglomerado infinito em todas as fatias, então esse aglomerado deve ser evitado pelo caminho.

Usando a notação do Lema 6 para construção dinâmica do cluster da origem em \mathbb{Z}^d : estabelecemos uma enumeração arbitrária de elos de \mathbb{Z}^d e definimos como $A_0 = \{0\}$ e $A_{m+1} = A_m \cup \{x_{m+1}\}$ onde $\{x_{m+1}\}$ é o vértice ligado a A_m pelo elo minimal segundo tal enumeração no passo $m+1$. Se no passo $m+1$ não houver mais elo aberto para ser

analisado, ou seja, encontramos um cluster finito $|C|$ da origem, definimos $A_n = |C|$ para todo $n \geq m$.

Relacionada com a construção dinâmica do cluster da origem definimos como v_i o primeiro vértice a ser incluído em $|C_{m_i}|$ para algum $m_i \in \mathbb{N}$, claro que v_i só existe se $C \cap R_k(i) \neq \emptyset$. Definindo v_1 como a origem temos uma sequência v_1, v_2, \dots, v_T onde definimos $T := \sup\{i : C \cap R_k(i) \neq \emptyset\}$.

Fixando um $p > p_c$, por Grimmett-Marstrand [8] existe k tal que $p > p_c(R_k) := \sup\{p : \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{R_k} \infty] > 0\}$.

Seja n inteiro tal que $n = kr + s$ onde $0 \leq s < k$. Se o evento G_n ocorre então necessariamente temos que $T \geq r$ e v_i não está num cluster infinito de $R_k(i)$ para $1 \leq i \leq r$, definimos essa intersecção como B_r . Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[G_n] &\leq \mathbb{P}_p[\{T \geq r\} \cap \{v_i \notin \theta_{R_k(i)} \text{ para } 1 \leq i \leq r\}] \\ &:= \mathbb{P}_p[B_r] = \mathbb{P}_p[B_r \cap B_{r-1}] = \mathbb{P}_p[B_r | B_{r-1}] \mathbb{P}_p[B_{r-1}] \end{aligned}$$

onde $\theta_{R_k(i)}$ é o aglomerado infinito de $R_k(i)$. Temos que para todo $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[B_j | B_{j-1}] &= \mathbb{P}_p[\{T \geq j\} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq j} \{v_i \notin \theta_{R_k(i)}\} | B_{j-1}] \\ &= \mathbb{P}_p[\{T \geq j\} \cap \{v_j \notin \theta_{R_k(j)}\} | B_{j-1}] \\ &= \sum_v \mathbb{P}_p[\{T \geq j\} \cap \{v_j \notin \theta_{R_k(j)}\} \cap \{v_j = v\} | B_{j-1}] \\ &= \sum_v \mathbb{P}_p[v_j \notin \theta_{R_k(j)} | B_{j-1} \cap \{v_j = v\} \cap \{T \geq j\}] \\ &\quad \times P_p[\{v_j = v\} | B_{j-1} \cap \{T \geq j\}] P_p[T \geq j | B_{j-1}] \\ &\leq \sum_v \mathbb{P}_p[v \notin \theta_{R_k(j)} | B_{j-1} \cap \{v_j = v\} \cap \{T \geq j\}] \\ &\quad \times P_p[\{v_j = v\} | B_{j-1} \cap \{T \geq j\}] \\ &= \sum_v (1 - \mathbb{P}_p[v \xleftrightarrow{R_k} \infty]) P_p[\{v_j = v\} | B_{j-1} \cap \{T \geq j\}] \\ &= (1 - \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{R_k} \infty]), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem do fato de que devido a construção dinâmica do aglomerado da origem A_m , que o estado dos elos de $R_k(j)$ não dependem dos eventos B_{j-1} e $T \geq j$. Agora iteramos o argumento para chegar em

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[G_n] &\leq \mathbb{P}_p[B_r] = \mathbb{P}_p[B_r \cap B_{r-1}] = \mathbb{P}_p[B_r | B_{r-1}] \mathbb{P}_p[B_{r-1}] \\ &\leq (1 - \mathbb{P}_p[0 \xleftrightarrow{R_k} \infty])^r. \end{aligned}$$

Definindo $\gamma_k(p) := -\log(1 - \mathbb{P}_p[0 \overset{R_k}{\leftrightarrow} \infty])$ temos que

$$\mathbb{P}_p[G_n] \leq \exp[-r\gamma_k(p)].$$

Queremos o resultado em função de n . Para isso basta notar que $n \leq (r+1)k$ e portanto

$$\mathbb{P}_p[G_n] \leq \exp[-n\gamma_k(p)/k + \gamma_k(p)].$$

Temos, por inclusão de eventos que

$$\mathbb{P}_p[G_n] \leq \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n, |C| < \infty] \leq 2d\mathbb{P}_p[G_n].$$

Por resultados do capítulo 8 de [9] (Teoremas 8.18 e 8.21), $\mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n, |C| < \infty] \leq \exp[-n/\xi_p]$, reorganizando chegamos em $\xi_p \leq n/\theta(p, n)$.

□