

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Natália de Oliveira Assis

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO DE TRINCA
DISCRETA COM REDEFINIÇÃO DA MALHA ASSOCIADO
A MODELOS DE DANO ESCALAR**

Belo Horizonte
2023

Natália de Oliveira Assis

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO DE TRINCA DISCRETA COM
REDEFINIÇÃO DA MALHA ASSOCIADO A MODELOS DE DANO
ESCALAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Silva Penna

Belo Horizonte
2023

A848i

Assis, Natália de Oliveira.

Implementação de um modelo de trinca discreta com redefinição da malha associado a modelos de dano escalar [recurso eletrônico] / Natália de Oliveira Assis. – 2023.

1 recurso online (85 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 81-85.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Resistência de materiais – Teses. 3. Mecânica da fratura – Teses. 4. Materiais – Fadiga – Teses. 5. Materiais de construção – Inovações tecnológicas – Teses. 6. Concreto – Testes – Teses. 7. Concreto – Análise – Teses. 8. Programas de computador – Engenharia – Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 402 DA ALUNA NATÁLIA DE OLIVEIRA ASSIS

Às **14:00** horas do dia **26** do mês de **outubro** de **2023**, reuniu-se, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **06 de outubro de 2023**, para julgar a defesa da Dissertação de Mestrado intitulada "**Implementação de Um Modelo de Trinca Discreta Com Redefinição da Malha Associado a Modelos de Dano Escalar**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Samuel Silva Penna**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa da candidata. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto - DEES - UFMG

Prof. Dr. Francisco Evangelista Junior - UNB

Pelas indicações acima, à candidata foi considerada APROVADA, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 26 de outubro de 2023.

Observações:

1. A aprovação da candidata na defesa da Dissertação de Mestrado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas;
 2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.
-



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 26/10/2023, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Evangelista Junior, Usuário Externo**, em 26/10/2023, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Professor do Magistério Superior**, em 26/10/2023, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 20/12/2023, às 22:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2703123** e o código CRC **32D70CD4**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por guiar meus caminhos e iluminar minha jornada.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Ao meu orientador e professor Samuel Silva Penna, pelo auxílio, orientação, ensinamentos e paciência.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

Um modelo de trinca discreta com redefinição de malha via duplicação nodal, baseado em modelos de dano escalar é implementado e aplicado para análise não linear do concreto. A implementação desse modelo tem como objetivo analisar o comportamento do material na presença da fissuração e descrever a propagação das trincas. Os modelos de dano são usados para descrição do processo de degradação do material e, após o material atingir um critério de nucleação da trinca, uma descontinuidade geométrica é inserida na malha de elementos finitos. A redefinição da malha é realizada através da duplicação nodal, permitindo assim a adaptação da malha conforme a propagação das trincas. O modelo foi implementado no sistema computacional INSANE (*INteractive Structural Analysis Environment*), desenvolvido no departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Simulações numéricas foram realizadas para validar o modelo proposto.

Palavras-chave: trinca discreta; modelos de dano; duplicação nodal; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

A discrete crack model with re-meshing via nodal duplication, based on scalar damage models, is implemented and applied for the nonlinear analysis of concrete. The implementation of this model aims to analyze the behavior of the material in the presence of cracking and describe the propagation of cracks. The damage models are used to describe the degradation process of the material, and after the material reaches a crack nucleation criterion, a geometric discontinuity is inserted in the finite element mesh. The redefinition of the mesh is performed through nodal duplication, thus allowing the adaptation of the mesh according to the propagation of the cracks. The model was implemented in the computational system INSANE (INteractive Structural Analysis Environment), which was developed in the Department of Structural Engineering at UFMG. Numerical simulations were performed to validate the proposed model.

Key-words: discrete crack; damage models; nodal duplication; finite element method.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Curva tensão-deformação de materiais parcialmente frágeis.	18
2.1	Níveis de observação da estrutura do concreto: macro, meso e micro (van Mier, 1995).	21
2.2	Modos de ruptura (Adaptado de Broek (1986)).	22
2.3	Diferentes tipos de respostas dos materiais: tensão uniaxial x deformação: a) material elástico-frágil, b) material elasto-plástico e c) material elástico-parcialmente frágil (Adaptado de Shah <i>et al.</i> (1995) por Wolff (2010)).	23
2.4	Mecanismos de tenacidade: (a) microfissuras, (b) desvio da fissura, (c) costura da fissura pelos agregados, (d) fechamento da fissura induzido pela rugosidade da superfície fissurada, (e) ponta de fissura arredondada por vazios e (f) ramificação da fissura (Adaptado de Shah <i>et al.</i> (1995) por Wolff (2010)).	25
2.5	Processo de fissuração em materiais parcialmente frágeis e perfil de tensão (Adaptado de Gálvez <i>et al.</i> (2002)).	25
2.6	Diagrama tensão deformação do concreto (Adaptado de Shah <i>et al.</i> (1995) por Azevedo (2019)).	26
2.7	Curvas de <i>softening</i> para o concreto (Adaptado de Gálvez <i>et al.</i> (2002)).	27
2.8	Trinca e microestrutura do material seguida das abordagens de fratura para modelagem de fissuras (Adaptado de Mediavilla <i>et al.</i> (2006)).	28
2.9	Sistemas de coordenadas da trinca (Penna, 2011).	30
2.10	Hipótese de um modelo de dano uniaxial composto por um feixe de fibras elásticas paralelas rompendo em diferentes níveis de deformação (Jirásek, 2004).	33
2.11	Sistema de coordenadas global ($X - Y$) e local ($n - s$) (Penna, 2011).	37
2.12	Domínio não local (Adaptado de Souza (2016)).	40
2.13	Funções de Distribuição: (a) Gauss e (b) Sino (Souza, 2016).	41
2.14	Propagação da trinca em modelos discreto (Penna, 2011).	43
2.15	Zona de processo de fratura em concreto (Adaptado de Chen <i>et al.</i> (2018)).	45
2.16	Modelo de fissura coesiva parcialmente frágil com as superfícies fissuradas: (a) em contato e (b) parcialmente separadas (Adaptado de Shah <i>et al.</i> (1995) por Wolff (2010)).	46

2.17	Exemplo de redefinição da malha de elementos finitos via duplicação nodal:	
	a) malha original e b) malha redefinida a partir da duplicação nodal. . . .	48
2.18	Determinação da direção de propagação (Adaptado de Simone <i>et al.</i> (2003)).	50
3.1	Esquema de propagação da trinca.	54
4.1	Chapa Tractionada: (a) Geometria com dimensões em <i>mm</i> e condições de apoio e (b) Malha de elementos finitos.	57
4.2	Trajетórias de Equilíbrio Tensão \times Enlogação obtidas nas simulações numéricas da tração direta.	58
4.3	Configuração deformada da malha de elementos finitos para as simulações numéricas de tração direta: (a) Simulação 1 e (b) Simulação 2.	59
4.4	Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da chapa tracionada.	59
4.5	Geometria da viga submetida à flexão em três pontos (García-Álvarez <i>et al.</i> , 2012).	60
4.6	Malhas de elementos finitos para a viga submetida à flexão em três pontos.	61
4.7	Trajетórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas da flexão em três pontos.	62
4.8	Configuração deformada da viga submetida à flexão em três pontos para as simulações: Flexão em 3 pontos - Simulação 1, 2 e 3.	62
4.9	Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da Flexão em 3 pontos - Simulação 3.	63
4.10	Trajетórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações 3 e 4 da flexão em três pontos.	63
4.11	Configuração deformada da viga (Flexão em 3 pontos - Simulação 4). . . .	64
4.12	Malha de elementos finitos adotada na flexão em três pontos para $e = 50$ <i>mm</i>	64
4.13	Trajетória de Equilíbrio Tensão \times CMOD obtida na flexão em três pontos com trinca assimétrica ($e = 50$ <i>mm</i>).	65
4.14	Configuração deformada da malha de elementos finitos (Flexão em 3 pontos - Simulação 5).	65
4.15	Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da Flexão em 3 pontos - Simulação 5.	66
4.16	Trajетórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas 3 e 6 da flexão em três pontos.	67
4.17	Trajетórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas 4 e 7 da flexão em três pontos.	67
4.18	Configuração final da malha de elementos finitos na Flexão em 3 pontos - Simulação 6.	68

4.19	Geometria do Painel em L.	68
4.20	Malhas de elementos finitos do Painel em L.	69
4.21	Trajatórias de Equilíbrio Carga \times Deslocamento vertical obtidas nas simulações numéricas do Painel em L.	70
4.22	Trincas resultantes das simulações numéricas (a) Painel em L - Simulação 1, (b) Painel em L - Simulação 2 e (c) Painel em L - Simulação 3.	71
4.23	Caminhos das trincas obtidos nas simulações numéricas do Painel em L.	72
4.24	Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Painel em L.	72
4.25	Trajatórias de Equilíbrio Tensão \times Deslocamento vertical para as simulações 3 e 4 do Painel em L.	73
4.26	Geometria - Cisalhamento em 4 pontos (dimensões em <i>mm</i>).	74
4.27	Malhas de elementos finitos - Cisalhamento em 4 pontos.	74
4.28	Trajatórias de Equilíbrio Carga \times CMSD obtidas nas simulações numéricas do cisalhamento em quatro pontos.	75
4.29	Propagação da trinca nas simulações numéricas do cisalhamento em quatro pontos: (a) Simulação 1 e (b) Simulação 2.	76
4.30	Comportamento de <i>snap-back</i> simulado numericamente dos experimentos.	77
4.31	Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1.	77

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros adotados na simulação numérica da chapa tracionada	57
4.2	Simulações - Tração Direta	58
4.3	Parâmetros adotados na simulação numérica da flexão em três pontos . . .	60
4.4	Simulações - Flexão em 3 Pontos - $e = 0$	61
4.5	Comparação entre as simulações com erosão habilitada e desabilitada - Flexão em 3 Pontos - $e = 0$	66
4.6	Simulações - Pannel em L	69
4.7	Parâmetros adotados na simulação numérica do Pannel em L	70
4.8	Parâmetros adotados na simulação numérica do cisalhamento em 4 pontos	75
4.9	Simulações - Cisalhamento em 4 Pontos	76

LISTA DE ABREVIACÕES

CMOD	<i>Crack mouth opening displacement</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
EVR	Elemento Volumétrico Representativo
FAPEMIG	Fundação de Amparo  Pesquisa do Estado de Minas Gerais
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 2

$\{\sigma_l\}$	Vetor de tensões no sistema local
$[{}^sD]$	Matriz secante constitutiva local
$\{\varepsilon_l\}$	Vetor de deformação no sistema local
n	Direção normal à fissura
s, t	Direções tangenciais à fissura
E	Módulo de elasticidade
β_r	Fator de retenção ao cisalhamento
G	Módulo de elasticidade transversal
α_r	Fator de redução do módulo de elasticidade na direção normal à fissura
ν	Coefficiente de Poisson
G_q	Taxa de energia em materiais parcialmente frágeis
G_{Ic}	Energia necessária para formar duas superfícies de trinca
G_σ	Energia necessária para separar as duas superfícies da trinca já formada
w	Abertura da trinca
$\sigma(w)$	Tensão coesiva normal
$\sigma(w_t)$	Deslocamento da separação da fissura na ponta da trinca inicial
G_F	Energia de Fratura
f_t	Resistência à tração
w_c	Abertura crítica da trinca correspondente a tensão coesiva nula
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
l_{ch}	Comprimento característico
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
\bar{A}	Área efetiva
σ	Tensão nominal
β	Parâmetro escalar que caracteriza a integridade do material
ω	Dano
E	Módulo de elasticidade
ε	Deformação
E^0	Módulo de elasticidade do material íntegro

E^ω	Módulo de elasticidade do material degradado
σ_{ij}	Tensor de tensões
ε_{kl}	Tensor de deformações
D_{ijkl}^s	Tensor de rigidez secante
f	Função de carga-descarga
G	Módulo de cisalhamento virgem
K	Módulo volumétrico (<i>Bulk modulus</i>)
ω_1, ω_2	Variáveis de dano escalar
D_{ijkl}^e	Tensor de rigidez elástico
$\tilde{\varepsilon}$	Valor escalar de deformação equivalente
$\tilde{\sigma}$	Valor escalar de tensão equivalente
κ	Variável histórica escalar
$\dot{\kappa}$	Taxa da variável histórica
ε_i	Deformações principais
I_1	Primeiro invariante do tensor de deformação
J_2	Segundo invariante do tensor de deformação desviadora
k	Razão entre a resistência uniaxial à compressão e à tração
$\{\sigma_{ns}\}$	Tensor de tensões no sistema local
$\{\varepsilon_{ns}\}$	Tensor de deformações no sistema local
D_{ns}^s	Tensor de rigidez secante local
T^σ	Matriz de transformação de tensão
T^ε	Matriz de transformação de deformação
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
κ_0	Limiar de deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia
α	Valor máximo de dano permitido para o material
β	Intensidade de evolução do dano
$i = t$	Tração
$i = c$	Compressão
σ_i	Tensão equivalente
f_i	Tensão relativa ao limite de resistência
ε_i	Deformação equivalente relativa ao limite elástico de tração ou compressão
E_0	Módulo de elasticidade equivalente no domínio elástico
f_e	Tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material
\tilde{E}	Módulo de elasticidade equivalente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	19
1.1.1	Objetivos Gerais	19
1.1.2	Objetivos Específicos	19
1.2	Organização do texto	20
2	REVISÃO TEÓRICA	21
2.1	Comportamento mecânico do concreto	21
2.1.1	Mecânica da Fratura	22
2.1.2	Comportamento do Concreto Fissurado	24
2.2	Modelos de fissuração	27
2.3	Modelos Contínuos	28
2.3.1	Modelos de Fissuração Distribuída	28
2.3.2	Modelos de Dano	31
2.3.3	Modelos Não Locais	39
2.4	Modelos Discretos	41
2.4.1	Modelo de Trinca Discreta Coesiva	43
2.4.2	Estratégias para Redefinição de Malha em Modelos Discretos	47
2.5	Modelos Combinados	49
2.5.1	Modelo de Trinca Discreta Associado a Modelos de Dano	49
3	PROPOSTA DE MODELO DE TRINCA DISCRETA ASSOCIADO A MODELOS DE DANO ESCALAR	52
3.1	Introdução	52
3.2	Parâmetros da Propagação	52
3.3	Sistema Computacional	53
3.3.1	Algoritmo Implementado	53
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	56
4.1	Tração Direta com Entalhe Simétrico - Hordijk (1991)	56
4.2	Flexão em Três Pontos - García-Álvarez <i>et al.</i> (2012)	60
4.2.1	Flexão em 3 pontos - $e = 0$	60

4.2.2	Flexão em 3 pontos - $e = 50\text{ mm}$	64
4.2.3	Flexão em 3 pontos - erosão por dano	66
4.3	Painel em L - Winkler <i>et al.</i> (2004)	68
4.4	Cisalhamento em 4 pontos - Arrea e Ingraffea (1982)	73
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
5.1	Contribuições deste Trabalho	79
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	79
	REFERÊNCIAS	81

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O concreto é um material parcialmente frágil e amplamente utilizado na construção civil. Ele apresenta boa durabilidade, versatilidade e embora seja mais resistente à compressão do que à tração, seu uso associado à barras de aço (concreto armado) supre essa limitação. O concreto caracteriza-se por possuir características complexas de comportamento e sofrer influência da formação e propagação de fissuras. Dessa forma, a análise estrutural desse material requer a utilização de modelos mais elaborados. Esses modelos devem ser capazes de reproduzir o comportamento de *softening*, que consiste no aumento das deformações (ε) com redução da tensão (σ) (Figura 1.1), muito característico dos materiais parcialmente frágeis, além de descrever a nucleação e desenvolvimento das trincas (Shah *et al.*, 1995, van Mier, 1995).

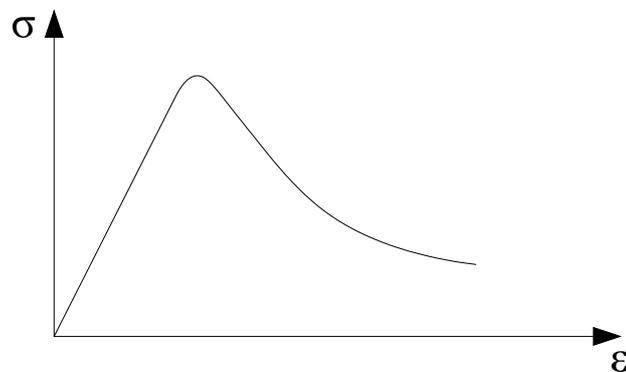


Figura 1.1: Curva tensão-deformação de materiais parcialmente frágeis.

Diante da necessidade de modelos para descrição do comportamento do concreto, estudos teóricos e modelos computacionais foram desenvolvidos ao longo dos anos. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método computacional numérico que viabiliza a criação de modelos para análise do desenvolvimento de trincas e pode ser adotado com essa finalidade. Baseando-se no Método dos Elementos Finitos, resumidamente, existem duas formas de tratar a trinca, são elas: abordagem discreta e distribuída. Nos modelos discretos, a trinca é retratada como uma descontinuidade geométrica na malha de elementos finitos e esse processo requer uma alteração na configuração inicial da malha. Já nos modelos distribuídos, a trinca não é explicitamente inserida na malha. O

meio material é considerado contínuo e são utilizadas estratégias para reproduzir o comportamento da trinca, como a inserção de zonas de degradação. Essas zonas tratam-se de regiões nas quais o material vai perdendo sua integridade até a falha e podem ter seu comportamento representado por modelos constitutivos em geral, dentre eles os modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo, que consideram ou não a anisotropia do material. Uma desvantagem na abordagem convencional de modelagem contínua para descrever o comportamento de enfraquecimento do concreto é a sensibilidade dos resultados numéricos à discretização dos elementos finitos (Jirásek, 2004). Essa sensibilidade, por sua vez, está ligada a questões de localização de deformações numericamente induzidas. Para tanto, existem modelos capazes de contornar esse problema, dentre eles pode-se citar o modelo regularizado de formulação não local. Nessa formulação, os resultados numéricos em um determinado ponto sofrem influência dos valores dos pontos da vizinhança. Dessa forma, os resultados obtidos representam uma média ponderada dos valores dentro de um domínio pré-determinado.

Existem ainda modelos de trinca que combinam a estratégia discreta e distribuída, permitindo uma abordagem combinada visando beneficiar-se das vantagens de ambas abordagens. Nesses modelos, até que ocorra a abertura da trinca o meio é considerado contínuo e seu comportamento é regido via modelos constitutivos. Após um determinado limite de resistência, há uma transição para os modelos discretos, a partir da inserção da descontinuidade causada pela trinca na malha de elementos finitos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de trinca discreta que seja capaz de descrever a trajetória de propagação de uma trinca por meio da técnica de duplicação nodal. A descrição do meio material será baseada em modelos de dano escalar, para representar a evolução da degradação até formação de uma trinca explícita. Problemas de localização de deformação gerados numericamente na análise não linear de estruturas de concreto.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral, realizou-se o trabalho de acordo com os seguintes objetivos específicos:

1. Estudo das formulações de Método de Elementos Finitos, Modelos de Fissuração, Modelos de Dano e Modelos Não Locais;
2. Elaboração da estratégia de redefinição da malha de elementos finitos a partir da duplicação nodal;

3. Concepção de um modelo de trinca discreta baseado em modelos de dano escalar;
4. Implementação computacional do modelo proposto e do algoritmo de duplicação nodal;
5. Realização de simulações numéricas para validação da implementação e avaliação do modelo proposto na representação do processo de propagação de trincas.

1.2 Organização do texto

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos.

No Capítulo 2, Revisão Teórica, é apresentada uma revisão dos principais conceitos relacionados ao comportamento mecânico do concreto. São abordados temas como a mecânica da fratura, o comportamento do concreto fissurado, modelos de fissuração, modelos de dano, modelos não locais e o modelo de trinca discreta associado a modelos de dano.

No Capítulo 3, Implementação Computacional, é descrita a implementação prática do modelo de trinca discreta com redefinição da malha via duplicação nodal baseado em modelos de dano escalar.

No Capítulo 4, Simulações Numéricas, são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com base no modelo implementado e descrito no Capítulo 3 visando a sua validação. Os resultados são analisados, discutidos e comparados a resultados experimentais.

No Capítulo 5, Considerações Finais, são apresentadas as conclusões finais do trabalho. Neste capítulo, destaca-se os principais resultados obtidos, as contribuições do estudo e possíveis direções para trabalhos futuros relacionados ao modelo proposto.

CAPÍTULO 2

REVISÃO TEÓRICA

2.1 Comportamento mecânico do concreto

O concreto é um material heterogêneo composto por uma matriz cimentícia de cimento Portland e água combinada com agregados. A modelagem e análise desse tipo de material pode-se tornar algo complexo devido às diferentes propriedades dos seus componentes. Dessa forma, algumas simplificações são feitas para análise do concreto e de acordo com a escala na qual trata-se este material, pode-se considerá-lo homogêneo.

Conforme descrito por van Mier (1995), o concreto pode ser observado e modelado de acordo com três níveis de escala: micro, meso e macro. Uma ilustração representativa dessas escalas está mostrada na Figura 2.1.

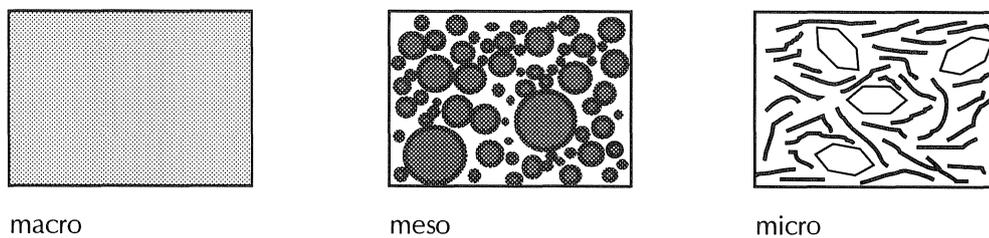


Figura 2.1: Níveis de observação da estrutura do concreto: macro, meso e micro (van Mier, 1995).

Na macroescala, considera-se o concreto como isotrópico e homogêneo. Portanto, numericamente a estrutura dispensa a divisão em pequenos elementos finitos. Nessa escala o comportamento não linear do material é tratado via modelo constitutivo. Na mesoescala faz-se a distinção entre agregados e matriz cimentícia do material. A zona de transição interfacial desempenha um papel importante, pois, geralmente é mais fraca do que a matriz e os agregados. Em um modelo de escala mesoscópica, o agregado, a matriz e as zonas de ligação são representadas por um contínuo isotrópico. Já na microescala, a análise do concreto leva em consideração as ligações de cálcio-silicatos-hidratos, que são ligadas por meio de forças de Van Der Waals. Nessa escala a homogeneidade é considerada nas partículas de cimento individuais (van Mier, 1995).

Outra característica do concreto é ser um material parcialmente frágil cujo desenvol-

vimento de trincas influencia criticamente na resposta do material ao estado de tensão (Shah, 1997). O processo de microfissuração surge antes mesmo da aplicação de cargas, isso devido à retração durante o processo inicial de cura do material. Dessa forma, o dimensionamento de estruturas em concreto deve também levar em consideração o comportamento do material na região que sofreu degradação, com o intuito de evitar falhas catastróficas. Diante desse panorama, a mecânica da fratura torna-se uma ferramenta muito importante no estudo das estruturas em concreto. Devido à complexidade do comportamento mecânico do concreto, a Mecânica da Fratura Linear não é suficiente para uma representação precisa do material. Dessa forma, a Mecânica da Fratura Não Linear descreve de forma mais adequada o material. Essa teoria permite uma caracterização mais realista de materiais que sofrem influência do processo de fraturamento, visto que com essa abordagem o comportamento de *softening* do material e os efeitos do surgimento de uma trinca e sua propagação são levados em consideração.

2.1.1 Mecânica da Fratura

A mecânica da fratura é a parte da mecânica do contínuo responsável pelo estudo do material fissurado. Esses estudos objetivam quantificar sob quais condições um material submetido a um carregamento irá colapsar, analisando os fenômenos físicos que englobam todo o processo de fissuração, da formação da fissura até a sua completa propagação.

A mecânica da fratura utiliza usualmente parâmetros relacionados à forma de solitação como hipótese de abertura de trinca em um sólido, indicando as possibilidades de sua propagação. Dessa forma, os modos de solitação e conseqüente ruptura podem ser classificados em modos I, II e III conforme mostrado na Figura 2.2 para uma chapa de espessura t (Broek, 1986).

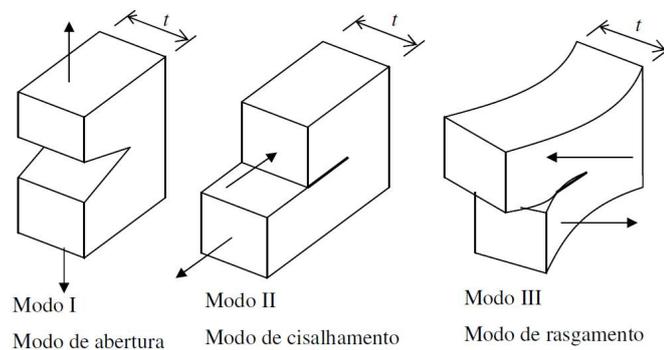


Figura 2.2: Modos de ruptura (Adaptado de Broek (1986)).

O modo I, denominado modo de abertura, é caracterizado por uma solitação no plano da chapa com direção normal ao plano das faces da trinca. No modo II, também conhecido por modo de cisalhamento ou deslizamento, a solitação é aplicada no plano

da chapa na direção paralela às bordas da trinca, levando ao deslizamento das duas superfícies separadas pela trinca. Já no modo III ou modo de rasgamento, a solicitação ocorre na direção perpendicular ao plano da chapa, causando o deslocamento fora do plano na direção do carregamento aplicado.

A mecânica da fratura é baseada no fato de que todos os materiais possuem imperfeições iniciais, como vazios e fissuras, que podem afetar a capacidade de carga das estruturas. Altas tensões prevalecem na região próxima aos defeitos preexistentes do material, podendo resultar na perda de resistência. Além disso, o material utilizado nas construções exerce influência também no comportamento mecânico das estruturas e de acordo com sua resposta aos esforços de tração, esses materiais podem ser classificados em frágeis, dúcteis ou parcialmente frágeis (Shah *et al.*, 1995).

A Figura 2.3 representa graficamente a relação entre tensão e deformação para cada um destes materiais.

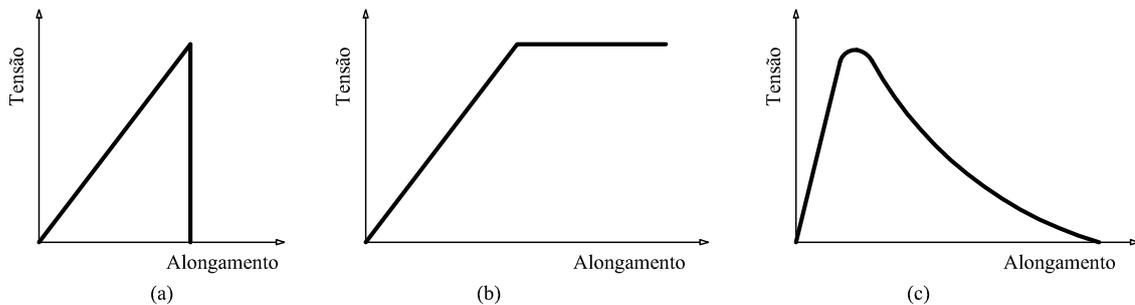


Figura 2.3: Diferentes tipos de respostas dos materiais: tensão uniaxial x deformação: a) material elástico-frágil, b) material elasto-plástico e c) material elástico-parcialmente frágil (Adaptado de Shah *et al.* (1995) por Wolff (2010)).

Observa-se na Figura 2.3-a que a tensão cai repentinamente para zero quando ocorre a ruptura de um material frágil. Já para os materiais dúcteis, existe um patamar de escoamento no qual a tensão permanece constante mesmo com acréscimo de alongamento (Figura 2.3-b). Por fim, os materiais parcialmente frágeis apresentam comportamento intermediário entre o frágil e o dúctil e são caracterizados pelo decréscimo gradual das tensões quando o material atinge seu limite de tensão (Figura 2.3-c). Nota-se que os materiais parcialmente frágeis apresentam um declínio gradual como resposta tensão-deformação. Esse comportamento é chamado *softening* ou amolecimento e é causado devido à existência de uma zona inelástica ao redor da ponta da trinca chamada zona de processo de fratura.

Para estruturas construídas com materiais parcialmente frágeis, a zona de processo de fratura passa a ser um dos fatores que caracteriza a falha das seções críticas.

Sendo o concreto um material parcialmente frágil, cuja resposta às tensões é influenciada pelo desenvolvimento de trincas, a caracterização de sua ruptura requer a aplicação de critérios de energia fundamentados nos princípios da mecânica da fratura não linear.

2.1.2 Comportamento do Concreto Fissurado

Em materiais compósitos como o concreto, a falha por tração envolve vários processos de degradação interna, tal como a expansão progressiva de microfissuras que podem causar descontinuidades (fissuras) no meio material (Rots e Blaauwendraad, 1989).

Como dito anteriormente, existe uma zona de comportamento inelástico, denominada Zona de Processo de Fratura (ZPF), na ponta da fissura que exerce significativa influência no comportamento de materiais parcialmente frágeis dependendo do seu tamanho em comparação à dimensão da estrutura.

Nessa zona existem vários mecanismos, chamados de mecanismos de tenacidade à fratura, que contribuem para o comportamento de amolecimento do concreto conforme mostrado na Figura 2.4 (Shah, 1997).

São esses mecanismos:

1. microfissuras (Figura 2.4-a), que surgem em razão ao estado de tensões muito elevado na região à frente da zona de processo de fratura e aparecem devido aos vazios deixados pela água durante o processo de cura e/ou causados pela formação de pequenas bolhas de ar que surgem no lançamento do concreto;
2. desvio da fissura (Figura 2.4-b) causada quando a fissura encontra uma partícula mais resistente em seu caminho;
3. costura da fissura pelos agregados (Figura 2.4-c), que ocorre quando a fissura avança além de um agregado, mas mantém contato entre suas faces devido à coesão gerada pela costura do grão;
4. fechamento da fissura induzido pela rugosidade da superfície fissurada (Figura 2.4-d) gerada quando um agregado se solta devido à fricção que ocorre entre as faces da fissura e do agregado, em consequência da rugosidade dessas interfaces;
5. ponta de fissura arredondada por vazios (Figura 2.4-e), que ocorre quando um agregado encontra um vazio em seu caminho;
6. ramificação da fissura (Figura 2.4-f).

Os mecanismos de tenacidade à fratura dificultam a propagação da fissura na zona de processo de fratura, pois, estes são responsáveis pela dissipação de energia nessa zona.

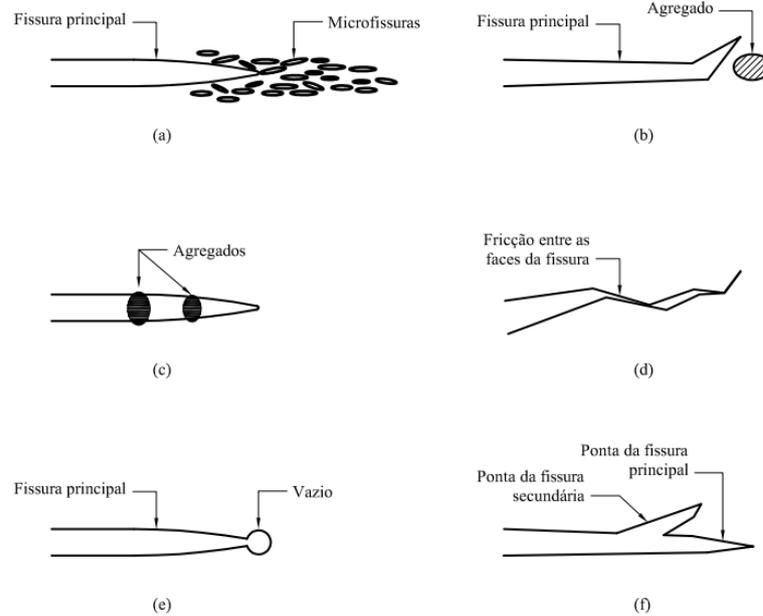


Figura 2.4: Mecanismos de tenacidade: (a) microfissuras, (b) desvio da fissura, (c) costura da fissura pelos agregados, (d) fechamento da fissura induzido pela rugosidade da superfície fissurada, (e) ponta de fissura arredondada por vazios e (f) ramificação da fissura (Adaptado de Shah *et al.* (1995) por Wolff (2010)).

Embora para muitos materiais a zona de processo de fratura possua tamanho insignificante, para os materiais parcialmente frágeis, como o concreto, seu tamanho é grande comparado ao tamanho da estrutura e não pode ser desprezado. Algumas exceções para as quais os efeitos da zona de processo de fratura podem ser considerados desprezíveis diante das dimensões das seções da estrutura são construções em concreto de grande porte, como as barragens (Liaghat *et al.*, 2019, Wolff, 2010).

A Figura 2.5 mostra o crescimento de uma trinca em materiais parcialmente frágeis.

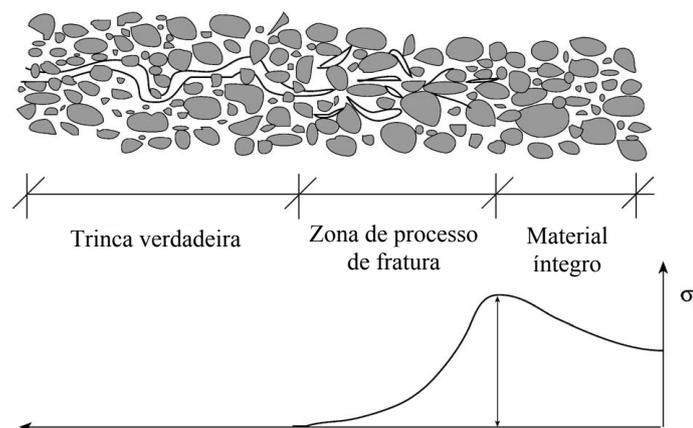


Figura 2.5: Processo de fissuração em materiais parcialmente frágeis e perfil de tensão (Adaptado de Gálvez *et al.* (2002)).

Observa-se na Figura 2.5 a existência de três zonas. A primeira corresponde à trinca verdadeira, que é livre de tensões. Em seguida, encontramos a zona de processo de fratura,

na qual o material foi carregado até a sua resistência e está parcialmente danificado, mas ainda existem pontes de material não deterioradas que são capazes de transmitir tensões através da interface (Gálvez *et al.*, 2002). Por fim, a terceira zona é a região íntegra do material.

Na Figura 2.6 é apresentada a relação entre tensão e deformação para o concreto. Conforme a análise do diagrama tensão-deformação realizada por Azevedo (2019), o segmento inicial linear crescente (trecho AB) reflete a resposta linear do material durante o processo de carregamento, seguido por uma curva suave antes do pico de tensão, indicativo do endurecimento do material.

Após atingir o limite de tensão, observa-se que a curva torna-se não linear. Durante o descarregamento, especificamente no trecho BC da curva, denominado *softening*, ocorre um enfraquecimento do material, acompanhado por um aumento nas deformações. A medida de deformação, devido à localização das deformações após o ponto máximo, é agora dividida em duas partes: a primeira refere-se às deformações elásticas, enquanto a segunda é resultado da abertura da trinca, originada pela formação de múltiplas microtrincas em todo o material.

O segmento CD da curva é atribuído às tensões entre agregados e aos efeitos de atrito entre eles, enquanto os trechos AB e BC são ocasionados pelo processo de microfissuração.

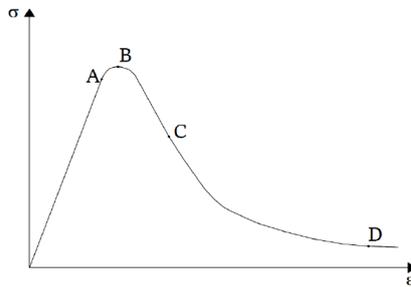


Figura 2.6: Diagrama tensão deformação do concreto (Adaptado de Shah *et al.* (1995) por Azevedo (2019)).

Como já mencionado anteriormente, a zona de processo de fratura é a responsável pelo *softening* devido aos mecanismos de tenacidade à fratura. Após atingir o limite de carregamento, na zona de processo de fratura as superfícies da fissura ainda permanecem em contato, sendo assim capazes de transmitir tensões. Conforme as superfícies vão perdendo contato, as tensões diminuem, levando a um decréscimo gradual da carga. O ramo anterior ao pico de tensão (trecho AB da Figura 2.6), exerce pouca influência na dissipação de energia em termos de energia de fratura. A maior influência ocorre no ramo de *softening*, que reduz o fluxo de energia consumida na ponta da trinca, à medida que a superfície de fratura aumenta e, conseqüentemente, a dissipação de energia. Porém, o estudo do comportamento após o pico de tensão não é simples e muitos autores recorrem a funções aproximadas com parâmetros ajustados experimentalmente.

Muitas funções para representação de *softening* foram desenvolvidas para modelar o comportamento das trincas em concreto sob tração. Pode-se observar algumas dessas curvas na Figura 2.7, como a linear, a exponencial, a bilinear, dentre outras. Segundo Gálvez *et al.* (2002), embora não exista um consenso sobre a localização exata do ponto de inflexão, as curvas bilineares são consideradas aproximações razoáveis da curva de amolecimento do concreto.

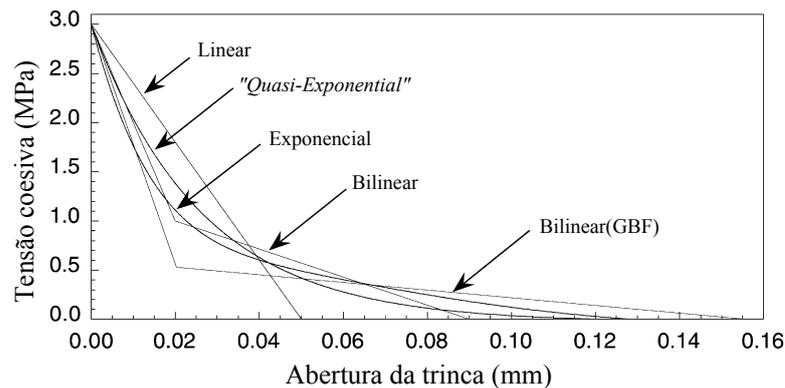


Figura 2.7: Curvas de *softening* para o concreto (Adaptado de Gálvez *et al.* (2002)).

Diante do cenário apresentado do comportamento do concreto fissurado e influência das trincas na resposta do material, nota-se que a correta modelagem do material é essencial ao processo de análise estrutural. Na seção 2.2 estão apresentados alguns modelos para representação da fissuração do concreto.

2.2 Modelos de fissuração

Devido ao concreto ser um material com diversas características particulares, modelos matemáticos adequados são necessários para correta representação de suas características (Bazant e Oh, 1983, Rots e Blaauwendraad, 1989, Pitangueira, 1998). Dessa forma, o comportamento do meio material deve ser descrito por modelos constitutivos formulados a partir de hipóteses e leis representativas do material. Inicialmente, o processo de análise do concreto considera um comportamento linear e elástico e no decorrer do processo de carregamento, o limite elástico do material é atingido devido à perda de integridade causada pela degradação. A partir deste ponto, o comportamento do material passa a ser não linear e inelástico.

Como mencionado anteriormente, o concreto é um material parcialmente frágil, e seu comportamento estrutural está diretamente ligado ao surgimento e à propagação de trincas. Assim, descrever adequadamente o fenômeno de fissuração é indispensável para a análise deste material, pois é responsável por conduzir a propagação da degradação e a perda de rigidez do mesmo.

Uma estratégia para analisar trincas é utilizando o método dos elementos finitos que, segundo ACI-Committee-446 (1997), foi usado pela primeira vez para fissuração de estruturas de concreto nos trabalhos de Clough (1962), Ngo e Scordelis (1967), Nilson (1967, 1968). Usando o método dos elementos finitos, as trincas podem ser modeladas a partir de dois conceitos principais: discreto, o qual considera a trinca como uma descontinuidade geométrica, e distribuída, onde o sólido fissurado é tratado como um meio contínuo (Rots e Blaauwendraad, 1989). A descrição da trinca abordada como distribuída encontra-se no tópico 2.3 desse trabalho e discreta em 2.4. Existem ainda modelos que combinam a abordagem discreta e distribuída. Este será apresentado na seção 2.5. Na Figura 2.8 está apresentada uma ilustração para esses três modelos citados.

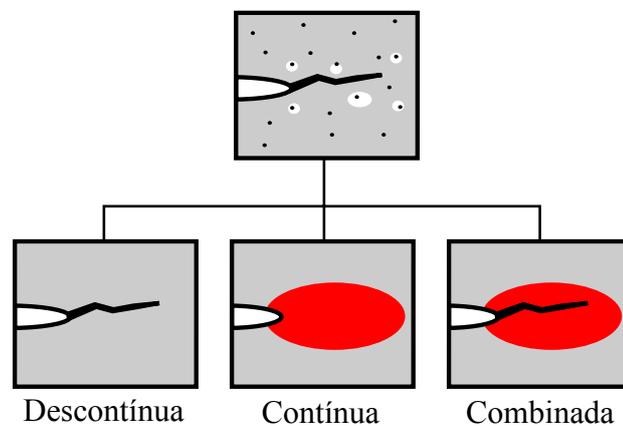


Figura 2.8: Trinca e microestrutura do material seguida das abordagens de fratura para modelagem de fissuras (Adaptado de Mediavilla *et al.* (2006)).

2.3 Modelos Contínuos

2.3.1 Modelos de Fissuração Distribuída

O modelo de fissuração distribuída, segundo Bazant e Planas (1998), representa a trinca de maneira distribuída. São consideradas que infinitas trincas paralelas de abertura infinitamente pequena estão, teoricamente, distribuídas ao longo do elemento finito e, como dito anteriormente, um sólido trincado é considerado como contínuo. Nesse modelo, as trincas são modeladas alterando-se as relações constitutivas (tensão-deformação) do contínuo sólido na vizinhança da fissura. Dessa forma, a fissura é abordada como uma característica intrínseca do material.

De acordo com Rots e Blaauwendraad (1989), o conceito de trinca distribuída pode ser classificado em: trinca distribuída fixa e rotativa. Sendo tratada como fixa, a orientação da trinca é fixada durante todo o processo computacional, em contrapartida, sendo tratada como rotativa, a orientação da trinca pode ser alterada girando em conjunto com os eixos de deformação principal. Esse modelo preserva a topologia da malha de elementos

finitos original e, além disso, não impõe restrições quanto à orientação dos planos de fissura, ou seja, dos eixos ortotrópicos. No entanto, para que o concreto seja modelado como um meio contínuo, deve-se levar em consideração o tamanho da estrutura heterogênea do material, uma vez que quando modelado com essa abordagem, zonas de dano tendem a se localizar em uma escala de observação que é da ordem do tamanho do agregado (ACI-Committee-446, 1997). Dessa maneira, o tamanho máximo dos elementos finitos usados na modelagem do comportamento de suavização de deformação deve ser relacionado ao tamanho do agregado. Para construções de pequena escala isso não apresenta nenhum obstáculo particular ao modelo, porém, para grandes construções comparadas com o tamanho da estrutura interna, isso se torna um problema. Algumas estratégias para tratar das limitações de instabilidade de localização e sensibilidade da malha de elementos finitos do modelo de trinca distribuída são: complementação do modelo material com alguma condição matemática, modelos de contínuo não local, modelos de gradiente e o contínuo micropolar (Gálvez *et al.*, 2002). Esses procedimentos são adequados para problemas específicos, mas nenhum fornece uma solução geral.

Os modelos convencionais de fissuração distribuída para o concreto consideram que o material é inicialmente isotrópico e homogêneo e à medida que o nível de tensão no material aumenta, seu comportamento é modificado pela formação das fissuras, que se propagam por todo o meio no decorrer da análise. Após o início do processo de fissuração, considera-se o concreto ortotrópico e de acordo com a direção das fissuras define-se os eixos de ortotropia.

A relação tensão-deformação para os modelos distribuídos é escrita em função dos eixos n , s e t de ortotropia conforme a equação:

$$\{\sigma_l\} = [{}^s D] \{\varepsilon_l\}, \quad (2.1)$$

onde: $\{\sigma_l\}$ é o vetor de tensões no sistema local, $[{}^s D]$ é a matriz secante constitutiva local e $\{\varepsilon_l\}$ o vetor de deformação no sistema local. Dessa forma, para um problema tridimensional a relação tensão-deformação será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ns} \\ \sigma_{st} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{sn} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{tn} & E_{ts} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{ns} \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Os índices n , s e t na Eq. 2.2 correspondem aos eixos da trinca conforme mostrado na Figura 2.9. Sendo n o a direção normal à trinca, e s e t direções tangenciais.

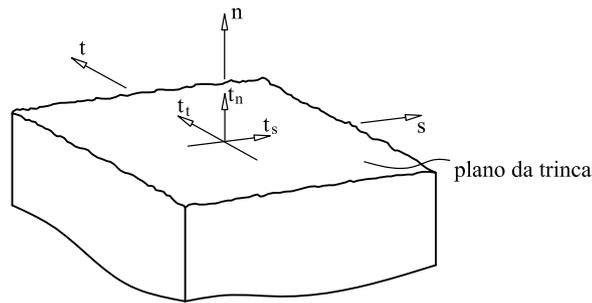


Figura 2.9: Sistemas de coordenadas da trinca (Penna, 2011).

Modelos iniciais de fissuração distribuída, como o de Rashid (1968), consideravam as direções normais às trincas com rigidez nula, dessa forma: as componentes E_{nn} , E_{ns} , E_{nt} , G_{ns} , G_{nt} da matriz secante constitutiva local $[{}^sD]$ são iguais a zero (Penna, 2011). Conseqüentemente, a Eq. 2.2 com essa simplificação e para caso bidimensional se resume a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix}, \quad (2.3)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

Após uma fissura, peças estruturais ainda são capazes de transmitir esforços, no entanto, essas primeiras aproximações não representam essa realidade. Foram identificados diversos problemas de instabilidade numérica em modelos fundamentados nessa teoria, resultantes das fortes descontinuidades ocasionadas pela transformação do meio material, que inicialmente era elástico, linear e isotrópico, para um meio ortotrópico com rigidez nula.

Modelos posteriores, como o de Suidan e Schnobrich (1973), mantiveram o módulo de elasticidade transversal G , mas reduzido por um fator de retenção ao cisalhamento β_r que varia de 0 a 1. O parâmetro β_r é uma constante fixa, escolhida no intervalo de 0 a 1. Valores próximos a 1 resultam em um endurecimento da resposta, enquanto valores próximos a zero conduzem a uma instabilidade numérica do modelo Rots e Blaauwendraad (1989). Valores típicos situam-se entre 0,05 e 0,01. Desse modo, para o cenário bidimensional, a matriz $[{}^sD]$ é expressa por:

$$[{}^sD] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Os modelos de fissuração distribuída evoluíram para incluir também um fator de redução do módulo de elasticidade na direção normal à fissura, como tentativa de promover a redução do módulo de elasticidade de forma gradual e evitar problemas de instabilidade

numérica causadas por reduções bruscas da elasticidade. Dessa forma, reescrevendo a Eq. 2.4 para incluir o fator de redução α_r tem-se:

$$[{}_l^s D] = \begin{bmatrix} \alpha_r E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

com α_r variando de 0 a 1. Este parâmetro é uma constante fixa predefinida, cuja resposta é semelhante à β_r .

Modelos como o de Bazant e Oh (1983), usando os mesmos princípios, incluíram à formulação módulos de rigidez fora da diagonal principal e consideraram o efeito de Poisson, além de manterem a redução do módulo de rigidez normal à trinca. A formulação leva em consideração apenas degradação por tração e é baseada na inversão de uma relação de flexibilidade. Modelos que consideravam tanto a degradação na direção normal à fissura quanto na direção tangente ao plano de fissuração foram desenvolvidos baseados nos trabalhos de Bazant e Oh (1983) e Rots *et al.* (1985). Para esse modelo, a matriz constitutiva secante local $[{}_l^s D]$ é dada por:

$$[{}_l^s D] = \frac{1}{(1 - \nu^2 \alpha_r)} \begin{bmatrix} \alpha_r E & \nu \alpha_r E & 0 \\ \nu \alpha_r E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2 \alpha_r) \frac{\beta_r E}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Os modelos de fissuração distribuída evoluíram para buscar soluções matemáticas que levassem a uma redução gradual na rigidez. Essa evolução levou à teoria do dano, que generaliza os modelos constitutivos que em vez de uma redução abrupta da rigidez no momento da formação da fissura, permite uma redução gradativa (Souza, 2016). Modelos baseados em dano incluem à análise do material um conjunto de variáveis de dano responsáveis pela quantificação do processo de degradação. Uma descrição mais detalhada desses modelos encontra-se na seção 2.3.2 deste trabalho.

2.3.2 Modelos de Dano

O processo de fissuração pode ter influência no comportamento dos materiais em geral, sejam eles dúcteis, frágeis ou parcialmente frágeis, implicando na necessidade de utilização de modelos adequados para descrever a formação e propagação de fissuras. A mecânica do dano contínuo é um modelo que pode ser utilizado com essa finalidade. Essa formulação descreve a perda gradativa da integridade do material causada pela propagação de microfissuras, microvazios e defeitos semelhantes presentes no meio (Jirásek, 2004). Essas alterações que ocorrem na microestrutura do material resultam na degradação de sua rigidez e esse processo evolui até a falha. Em escala microscópica, o dano pode ser tratado

como descontinuidade do material e em escalas maiores pode-se considerar o material de forma contínua (Penna, 2011).

A mecânica do dano contínuo estuda o comportamento macroscópico de um material com base na definição do “*Elemento Volumétrico Representativo*” (EVR). A dimensão do EVR é determinada baseado no fato de que o material pode ser considerado homogêneo dentro dos seus limites.

De acordo com Jirásek (2004), nos modelos de dano existem certas variáveis internas que caracterizam a densidade e a orientação dos microdefeitos. Por exemplo, na versão mais simples do modelo de dano isotrópico, o tensor de rigidez danificado é um múltiplo escalar do tensor de rigidez elástica inicial, desta forma, o dano é descrito por um único parâmetro escalar. Para estruturas submetidas a condições extremas de carregamento, a distribuição inicial de deformação que é suave pode se tornar fortemente localizada. Fato esse que pode ser causado por efeitos geométricos ou por instabilidade do material. Devido ao problema de localização, os modelos de danos locais padrão não são capazes de descrever o comportamento do material de forma adequada e como solução para este problema, tem-se a reformulação do modelo constitutivo de forma não local. Mais além, nessa reformulação a tensão em um ponto do material será dependente da deformação histórica da sua vizinhança. Uma descrição do modelo não local está apresentada na seção 2.3.3.

A seguir serão apresentados modelos constitutivos de dano que podem ser utilizados para descrição do comportamento dos materiais.

2.3.2.1 *Conceitos Fundamentais da Mecânica do Dano*

Os primeiros modelos de danos contínuos desenvolvidos consideravam a redução da área de uma seção transversal devido ao aparecimento de microfissuras como a variável interna que caracteriza o dano. Esses modelos eram baseados em modelos uniaxiais e serão descritos a seguir com base no trabalho de Jirásek (2004).

Para formulação uniaxial do dano, assume-se um feixe de fibras de um determinado material paralelo à direção da carga aplicada, como mostrado na Figura 2.10-a. Como pode-se observar na Figura 2.10-b, inicialmente todas as fibras respondem elasticamente e a tensão é suportada por todas as fibras. Neste estágio do carregamento o comprimento inicial é acrescido de ε_1 .

À medida que incrementa-se o carregamento, as fibras começam a se romper, conforme observa-se na Figura 2.10-c. Neste estágio, nota-se que a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ aumenta, a área efetiva \bar{A} diminui e o comprimento também aumenta devido à deformação ε_2 . A tensão nominal σ é a força por unidade de área inicial da seção transversal e a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é a força por unidade de área efetiva.

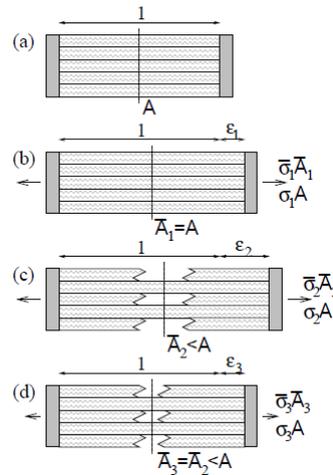


Figura 2.10: Hipótese de um modelo de dano uniaxial composto por um feixe de fibras elásticas paralelas rompendo em diferentes níveis de deformação (Jirásek, 2004).

Sendo $\sigma A = \bar{\sigma} \bar{A}$, pode-se obter a seguinte equação:

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma}. \quad (2.7)$$

A relação entre a área efetiva e total $\beta = \frac{\bar{A}}{A}$ é definido como um parâmetro escalar que caracteriza a integridade do material. Usualmente, na mecânica do dano costuma-se trabalhar com o parâmetro de dano (ω) que pode ser calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$\omega = 1 - \beta. \quad (2.8)$$

Analisando a Eq. 2.8, conclui-se que para um material totalmente íntegro, ou seja, $A = \bar{A}$, o valor do dano ω é zero. Já para um material totalmente danificado ($\bar{A} = 0$), o valor do dano é máximo e igual a um. No modelo simplificado assume-se a hipótese de que cada fibra do material permanece linear elástica até o valor de deformação que causa o rompimento da fibra. Desta forma, para o caso uniaxial, a tensão efetiva é dada pela Lei de Hooke descrita por:

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon, \quad (2.9)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ε é a deformação.

Fazendo a combinação das Eqs. 2.7, 2.8 e 2.9, obtém-se a seguinte relação:

$$\sigma = (1 - \omega) E \varepsilon. \quad (2.10)$$

Considerando cada fibra perfeitamente frágil, a tensão na fibra decai para zero de forma gradual quando é atingido um nível crítico de deformação.

Os modelos de dano podem ser divididos em dois grupos: modelos micromecânicos

e fenomenológicos. As variáveis de dano nos modelos micromecânicos representam a média dos defeitos microscópicos do material. Devido à complexidade na identificação experimental das leis de evolução de dano dos modelos micromecânicos, a modelagem de problemas de engenharia com esses modelos torna-se um processo mais difícil. Por sua vez, os modelos fenomenológicos abrangem variáveis mais simples de serem determinadas do que densidade de microfissuras que surgem no material. As variáveis dos modelos fenomenológicos constituem a base da degradação interna e representam o comportamento macroscópico do material (Penna, 2011).

Tratando-se de modelos fenomenológicos, a variável interna de dano é representada pela degradação das propriedades elásticas ou rigidez do material em regime de pequenas deformações. Como estes modelos representam a degradação progressiva do material após o regime linear, ou seja, com deformações maiores que às associadas ao seu limite de resistência, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\omega = 1 - \frac{E^\omega}{E^0}, \quad (2.11)$$

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material íntegro e E^ω o módulo de elasticidade do material degradado.

A seguir serão apresentados alguns modelos de dano.

2.3.2.2 Modelos de Dano Padrão

A estrutura dos modelos constitutivos baseados na mecânica do dano serão apresentadas a seguir conforme de Borst e Gutiérrez (1999). Tem-se a seguinte relação tensão-deformação:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^s(q_m, \omega_{mn}, \Omega_{mnop}, \dots)\varepsilon_{kl}, \quad (2.12)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, ε_{kl} é o tensor de deformações e D_{ijkl}^s é o tensor de rigidez secante que pode ser dependente de variáveis internas escalares (w), vetoriais (q_m) ou tensoriais (ω_{mn} , Ω_{mnop}).

A Eq. 2.12 se diferencia da elasticidade não linear clássica pela dependência histórica, que é introduzida por meio de uma função de carga-descarga (f) que desaparece com o carregamento e é negativa caso contrário (de Borst e Gutiérrez, 1999).

O valor de f deve permanecer zero por um período infinitesimal para que ocorra o crescimento do dano, de modo que temos o requisito adicional de que $\dot{f} = 0$. A completude da teoria é obtida a partir da especificação das equações de evolução adequadas (dependentes do material) para as variáveis internas, conforme será apresentado a seguir.

a) Modelo de Dano Isotrópico

Para o caso da evolução de dano isotrópico, segundo Ladevèze (1983), a Eq. 2.12

simplificada resulta em:

$$\sigma_{ij} = [(1 - \omega_1)G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2/3\delta_{ik}\delta_{jl}) + (1 - \omega_2)K\delta_{ij}\delta_{kl}]\varepsilon_{kl}, \quad (2.13)$$

onde G é o módulo de cisalhamento e K o módulo volumétrico (*Bulk modulus*), que são degradados respectivamente pelas variáveis de dano escalar ω_1 e ω_2 . Considerando que o módulo transversal e módulo volumétrico degradam da mesma forma, a Eq. 2.13 poder ser simplificada para a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega)D_{ijkl}^e\varepsilon_{kl}, \quad (2.14)$$

com ω sendo a variável de dano que cresce de zero a um, sendo 1 perda total da integridade do material, e D_{ijkl}^e o tensor de rigidez elástico de quarta ordem. Para complementar a relação apresentada na Eq. 2.14, tem-se a função de carregamento $f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \kappa)$, sendo $\tilde{\varepsilon}$ e $\tilde{\sigma}$ funções de valor escalar dos tensores de tensão e deformação e κ é uma variável histórica escalar. A função de carregamento f e a taxa da variável histórica, $\dot{\kappa}$, devem satisfazer as condições de carga e descarga de Kuhn-Tucker conforme:

$$f \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad f\dot{\kappa} = 0. \quad (2.15)$$

Considerando o caso em que a função de carregamento seja apenas em função de $\tilde{\varepsilon}$, tem-se:

$$f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa. \quad (2.16)$$

Diversas medidas para definir a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ foram propostas em diversos trabalhos, como Lemaitre e Chaboche (1990), Mazars (1984) e de Vree *et al.* (1995) que serão apresentadas a seguir.

A escolha de $\tilde{\varepsilon}$ de Lemaitre e Chaboche (1990) é geralmente utilizada para metais e é dada por:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}^e\varepsilon_{kl}. \quad (2.17)$$

A Eq. 2.17 apresenta um sentido de energia de deformação e pode ser redefinida para uma deformação equivalente conforme:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}^e\varepsilon_{kl}}. \quad (2.18)$$

A definição apresentada na Eq. 2.18 para $\tilde{\varepsilon}$, considera pesos iguais aos componentes de deformação de tração e compressão, o que é inadequado para descrever o comportamento mecânico de materiais parcialmente frágeis como rochas e concreto (de Borst e Gutiérrez, 1999). Para contornar esta deficiência, Mazars (1984) sugeriu a definição a seguir:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle)^2}, \quad (2.19)$$

onde ε_i são as deformações principais e $(\langle \varepsilon_i \rangle) = \varepsilon_i$ se $\varepsilon_i > 0$ e $(\langle \varepsilon_i \rangle) = 0$ caso contrário.

Uma outra definição para a deformação equivalente foi proposta por de Vree *et al.* (1995) e é dada por:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^{\varepsilon^2} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon}, \quad (2.20)$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de deformação e J_2 o segundo invariante do tensor de deformação desviadora. O parâmetro k governa a sensibilidade às componentes de deformação compressiva em relação às componentes de deformação de tração. Portanto, é definido como a razão entre a resistência uniaxial compressiva e a resistência uniaxial de tração. O parâmetro de histórico κ começa em um nível de limiar de dano κ_i e é atualizado pela exigência de que durante o crescimento do dano $f = 0$. Segundo de Borst e Gutiérrez (1999), o crescimento do dano ocorre de acordo com uma lei de evolução tal que $\omega = \omega(\kappa_i)$, que pode ser determinada a partir de um teste uniaxial.

Além dos modelos isotrópicos, existem modelos que levam em consideração que o dano não evolui da mesma maneira em todas as direções. Como exemplo desses modelos tem-se o modelo ortotrópico de de Borst e Gutiérrez (1999) que será apresentado a seguir.

b) Modelo de Dano Ortotrópico

Nos modelos de dano isotrópico, considera-se que a propagação do dano ocorre de forma igualitária em todas as direções. Já os modelos ortotrópicos diferenciam os comportamentos nas direções de ortotropia do material. Assim, de Borst e Gutiérrez (1999) propuseram um modelo que considera o dano apenas na direção principal de tração. Para esse modelo, a relação de rigidez secante é dada por:

$$\{\sigma_{ns}\} = [D_{ns}^s] \{\varepsilon_{ns}\}, \quad (2.21)$$

onde $\sigma_{ns} = [\sigma_{nn}, \sigma_{ss}, \sigma_{ns}]^T$, $\varepsilon_{ns} = [\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{ss}, \varepsilon_{ns}]^T$ e o tensor de rigidez secante local D_{ns}^s é definido como:

$$D_{ns}^s = \begin{bmatrix} \frac{(1-\omega_1)E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{(1-\omega_1)\nu E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ \frac{(1-\omega_1)\nu E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega_2)G \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde ω_1 representa a variável de dano na direção de tração e compressão e $1 - \omega_2$ a degradação da rigidez ao cisalhamento.

Introduzindo o ângulo θ como o ângulo entre o eixo x e o eixo n mostrado na Figura

2.11, pode-se relacionar as componentes de tensão σ_{ns} e deformação ε_{ns} no sistema local com as suas correspondentes no sistema global à partir das matrizes de transformação $[T^\sigma]$ e $[T^\varepsilon]$ conforme as seguintes expressões:

$$\{\sigma_{ns}\} = [T^\sigma(\theta)]\{\sigma_{xy}\} \quad (2.23)$$

e

$$\{\varepsilon_{ns}\} = [T^\varepsilon(\theta)]\{\varepsilon_{xy}\}. \quad (2.24)$$

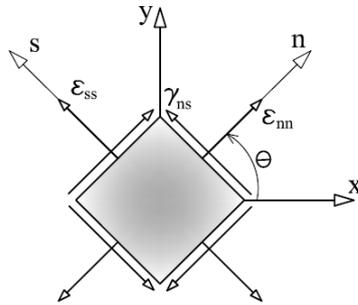


Figura 2.11: Sistema de coordenadas global ($X - Y$) e local ($n - s$) (Penna, 2011).

Substituindo as Eqs. 2.23 e 2.24 na Eq. 2.21, obtém-se a seguinte relação tensão-deformação secante orientada no sistema global de coordenadas:

$$\{\sigma_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)]^{-1}[D_{ns}^s][T^\varepsilon(\theta)]\{\varepsilon_{xy}\}. \quad (2.25)$$

A Eq. 2.25 pode ser utilizada tanto para direção rotativa do dano, quanto fixa. Para a direção fixa, a relação tensão-deformação tangente pode ser calculada a partir da derivada da Eq. 2.25 (Penna, 2011). Essa expressão é dada por:

$$\{\dot{\sigma}_{xy}\} = [T^\sigma(\theta_0)]^{-1}([D_{ns}^s] - [\Delta D_{ns}^s])[T^\varepsilon(\theta_0)]\{\dot{\varepsilon}_{xy}\} \quad (2.26)$$

e é uma relação indispensável aos processos incrementais iterativos que utilizam o método de Newton-Raphson. Na Eq. 2.26, θ_0 é o ângulo fixado da direção do dano e $[\Delta D_{ns}^s]$ é dado por:

$$[\Delta D_{ns}^s] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ \nu d_{11} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde:

$$d_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nm}} \frac{E(\varepsilon_{nm} + \nu \varepsilon_{ss})}{(1 - (1 - \omega_1)\nu^2)^2} \quad (2.28)$$

e

$$d_{31} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nm}} G_{\gamma_{ns}}, \quad (2.29)$$

sendo $\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nm}} = 1$ sob carregamento e 0 caso contrário. Por fim, percebe-se que para esta formulação, que a rigidez tangente é não simétrica.

2.3.2.3 Equações de Evolução do Dano

As equações que descrevem a evolução do dano podem ter diferentes formas de variação e, embora as formas mais comuns sejam exponenciais, também é possível utilizar equações polinomiais e lineares para representar o processo de degradação (Penna, 2011). A seguir serão apresentadas uma função de dano exponencial e uma de dano polinomial que podem ser utilizadas para descrever a evolução do dano.

A forma mais tradicional da função exponencial é dada por:

$$\begin{aligned} D(\tilde{\varepsilon}) &= 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} \left[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)} \right] \\ \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} &= \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} \left[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)} \right] + \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} \left[\alpha \beta e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)} \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde a variável $\tilde{\varepsilon}$ representa a deformação equivalente, κ_0 corresponde ao limiar de deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia. O parâmetro α indica o valor máximo de dano permitido para o material e β é a intensidade de evolução do dano.

Antes de apresentar a função polinomial de dano, tem-se a seguir a relação tensão-deformação usando uma função polinomial apresentada por Carreira e Chu (1985, 1986):

$$\sigma_i = f_i \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)^k} \quad \text{onde} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_i}{\varepsilon_i E_0} \right)}, \quad \text{sendo} \quad i = t, c. \quad (2.31)$$

A variável $i = t$ representa tração e $i = c$, compressão. Dessa forma, σ_i trata-se da tensão equivalente, f_i é a tensão relativa ao limite de resistência e ε_i é a deformação equivalente relativa ao limite de elástico de tração ou compressão de acordo com o valor de i . O módulo de elasticidade equivalente no domínio elástico é dado por E_0 . Partindo da Eq. 2.31, pode-se escrever a seguinte equação polinomial para descrição do dano:

$$\begin{aligned} D(\tilde{\varepsilon}) &= 1 - \frac{1}{\tilde{E} \tilde{\varepsilon}} \frac{\frac{f_e k \tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}}{k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} \right)^k} \\ \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} &= \frac{f_e k^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} \right)^{k-1}}{\tilde{E} \kappa_0^2 \left[k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} \right)^k \right]}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde f_e representa a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e \tilde{E} é o módulo de elasticidade equivalente.

Segundo Penna (2011), esta equação apresenta uma evolução contínua, em que κ_0 marca o limite elástico, mas não necessariamente de forma linear. Além disso, é importante destacar que:

$$\kappa_0 > \frac{f_e}{\bar{E}}, \quad \text{pois} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{\kappa_0 \bar{E}}\right)}. \quad (2.33)$$

2.3.3 Modelos Não Locais

Analisar uma estrutura de concreto baseando-se na teoria do dano requer um modelo constitutivo capaz de retratar a degradação do material, conforme apresentado na seção 2.3.2. Este modelo deve ser capaz de definir as zonas de degradação do meio e também a evolução do dano ao longo destas zonas. No entanto, ao utilizar a teoria contínua padrão para representar o comportamento de *softening* do concreto, os resultados numéricos obtidos sofrem sensibilidade à discretização dos elementos finitos (Jirásek, 2004). Para contornar este problema, de acordo com Jirásek (2004), pode-se utilizar as seguintes abordagens:

1. Modelo de trinca coesiva - admite a presença de uma forte descontinuidade e descreve o *softening* a partir de uma lei que associa a tração transmitida pela trinca com a sua abertura.
2. Modelo de trinca em banda (*crack band model*) - representa a zona de processo e a trinca por uma banda de deformação altamente localizada e separada do material por duas descontinuidades fracas, que são superfícies através das quais o campo de deformação possui um salto. Como neste modelo a largura da banda numericamente resolvida é controlada pelo tamanho dos elementos finitos, o *softening* da lei tensão-deformação deve ser ajustado de acordo com o tamanho do elemento.
3. Modelos regularizados - baseados em teorias contínuas generalizadas que incorporam um comprimento característico e evitam a localização da deformação em um volume arbitrariamente pequeno. Uma vez que os enriquecimentos impõem uma certa largura mínima da zona de processo resolvida numericamente, eles são chamados de limitadores de localização. Como exemplos destes modelos tem-se formulações não locais e teorias de gradiente de ordem superior.

Neste trabalho será utilizado o modelo regularizado de formulação não local. Esta formulação considera que os resultados numéricos obtidos em um ponto são influenciados pela sua vizinhança, ou seja, os resultados obtidos são a média ponderada dos valores dentro de um domínio pré-estabelecido.

A formulação do modelo não local descrita a seguir foi baseada no trabalho de Jirásek (2004). Sendo $f(x)$ um campo “local” em um determinado domínio V , o campo não local correspondente é definido como:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.34)$$

onde $\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ é a função de peso não local. Em um corpo infinito, a função peso depende somente da distância entre o ponto “fonte” ($\boldsymbol{\xi}$) e o ponto “alvo” (\mathbf{x}). Essa função, também conhecida como função de ponderação, define o peso das variáveis do domínio no cálculo da variável não local. Para que o operador local não altere um campo uniforme, nas regiões próximas ao limite do domínio, a função peso é redimensionada, como mostrado na equação a seguir:

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)}{\int_V \alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}\|) d\boldsymbol{\zeta}}, \quad (2.35)$$

onde $\alpha_0(r)$ é uma função decrescente não negativa da distância $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$. Para o caso unidimensional x e ξ são escalares e o domínio de integração é dado pelo intervalo $[0, L]$.

Uma representação ilustrativa do domínio não local está apresentada na Figura 2.12.

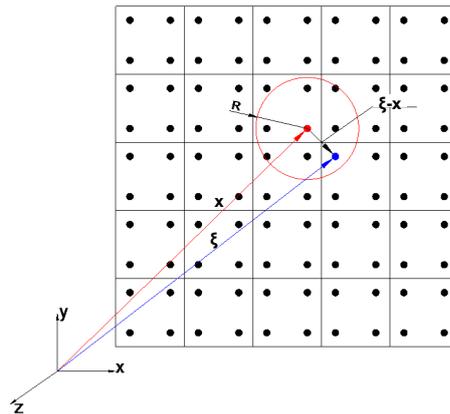


Figura 2.12: Domínio não local (Adaptado de Souza (2016)).

Várias são as funções que podem ser utilizadas como funções peso. Como exemplo, tem-se a função de Gauss que é frequentemente usada e é dada por:

$$\alpha_0(r) = \exp\left(-k \frac{r^2}{l^2}\right), \quad (2.36)$$

onde l é o chamado comprimento interno da distribuição e k é responsável pelo formato da curva, tornando os pontos mais distantes do domínio mais ou menos influentes. Outra função peso que pode ser utilizada é a função de distribuição sino, que é válida somente para pontos internos ao domínio e é dada por:

$$\alpha_0(r) = \left(1 - \frac{r^2}{(kl)^2}\right)^2 \quad (2.37)$$

Graficamente as funções de Gauss e a função sino quártica truncada estão representa-

das na Figura 2.13.

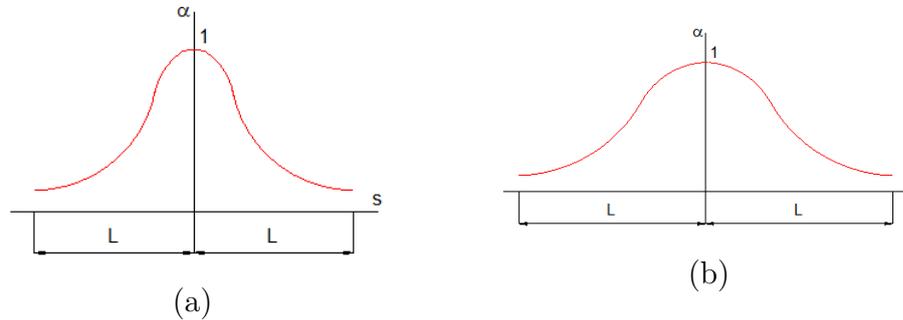


Figura 2.13: Funções de Distribuição: (a) Gauss e (b) Sino (Souza, 2016).

Segundo Jirásek (2004), a escolha da variável a ser calculada só pode ser arbitrária desde que atenda alguns requisitos básicos. São esses requisitos:

1. O modelo enriquecido deve estar de acordo com o contínuo elástico local padrão desde que o comportamento material permaneça na faixa elástica. Desta forma, não se pode somente substituir a deformação local por deformação não local e aplicar a lei constitutiva usual. Isto ocorre porque a deformação não local não é igual à local, o que alteraria o comportamento do modelo já na faixa elástica.
2. O modelo deve ser também capaz de fornecer resultados realistas em situações de carregamento simples, como no caso da tensão uniaxial. É relevante que a média do parâmetro de dano não produza efeitos de bloqueio incoerentes em estágios posteriores de enfraquecimento, conforme estudado em Jirásek (1998).

Uma formulação não local do modelo de dano isotrópico que satisfaz os requisitos descritos acima pode ser obtida ao se calcular o dano com base no parâmetro histórico da deformação equivalente não local. Dessa forma, tem-se a seguinte equação para o cálculo da deformação efetiva $\bar{\varepsilon}$ calculada com base na substituição da deformação local pela sua média não local:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi, \quad (2.38)$$

A variável histórica interna κ passa a representar o maior valor previamente alcançado de deformação não local. Ressalta-se que o dano na Eq. 2.10 é avaliado a partir da deformação não local, mas a deformação ε que aparece explicitamente nessa mesma equação é mantida local. No ramo elástico, o dano permanece igual a zero e a relação tensão-deformação é local.

2.4 Modelos Discretos

No modelo discreto, a trinca é tratada como uma entidade geométrica e é geralmente escolhido na presença de apenas uma trinca ou um conjunto finito de trincas (ACI-

Committee-446, 1997, Gálvez *et al.*, 2002). Esses modelos representam de forma mais realista o processo de fratura em estados mais avançados, em que se tem uma trinca explícita visível na macroescala da estrutura.

Na década de 60, Ngo e Scordelis (1967) realizaram uma análise via elementos finitos com o objetivo de modelar o fraturamento do concreto e utilizaram um modelo de fissuração discreto. Nesse trabalho, a configuração das trincas era definida previamente e coincidia com as fronteiras dos elementos, além disso a análise foi linear elástica e elementos de interpolação linear foram utilizados (Einsfeld, 1997). Ainda na década de 60, Nilson (1968) generalizou o processo de forma que a fissura poderia ocorrer em qualquer ponto da estrutura, mas ainda limitada às faces de encontro dos elementos finitos. Nesse modelo havia a duplicação de todos os nós da malha para que a trinca pudesse ser inserida na malha de elementos finitos no local que foi solicitado pela análise. Devido à memória reduzida dos computadores da época, esse processo era limitado. Modelos subsequentes onde a duplicação nodal só era necessária para inserção da fissura foram desenvolvidos e posteriormente Hilleborg *et al.* (1976) aplicaram o conceito de balanço enérgico ao decrescer gradativamente a relação tensão deformação entre as faces da trinca (Einsfeld, 1997). Com o avanço dos computadores, a limitação de memória para redefinição das malhas deixou de ser um problema para os modelos de trinca discreta.

Um problema encontrado nos primeiros trabalhos que abordavam as trincas com o modelo discreto foi que as trincas em estruturas de concreto de escala de tamanho típica se desenvolvem gradualmente e não de forma repentina. Isso ocorria, pois, após a abertura da trinca discreta na malha de elementos finitos a tensão reduzia bruscamente e não de forma gradativa, caracterizando assim uma trinca frágil. Como forma de contornar esse problema deve-se adotar um modelo capaz de reproduzir o comportamento de softening do concreto. O trabalho de Hilleborg *et al.* (1976) propõe um modelo de trinca coesiva capaz de contornar esse problema e está descrito na seção 2.4.1. Outra estratégia para solucionar o comportamento frágil da trinca, sem a necessidade de incorporação de modelos coesivos, é acoplar ao modelo discreto um modelo distribuído capaz de representar o comportamento do material via modelos constitutivos antes da abertura da trinca. Essa foi a estratégia adotada no presente trabalho.

Segundo Yang e Chen (2004), uma análise bem sucedida da propagação de trinca feita através do método dos elementos finitos com base no modelo de trinca discreta deve utilizar modelos apropriados para descrever comportamento de *softening* no concreto e, além disso, possuir mais quatro chaves adicionais: um critério adequado de propagação de trincas, um procedimento de redefinição de malha eficiente, uma técnica de mapeamento de malha precisa para transferir as variáveis da malha antiga para uma nova e uma eficiente técnica de solução numérica para resolver sistemas de equações não lineares, por exemplo o método de Newton-Raphson associado a um método de controle adequado ao problema, como apresentado por Fuina (2004).

O estabelecimento de um critério adequado de propagação de trinca é necessário para determinar quando e em qual direção a trinca irá propagar. De acordo com Chen *et al.* (2018), um critério constantemente usado para propagação de trincas é o de resistência à tração, que admite que quando a tensão principal máxima na ponta da trinca fictícia é igual à resistência máxima à tração do concreto, ocorrerá propagação da trinca. Podem ser adotados ainda outros critérios de resistência, critérios baseados em energia, dano ou deformações equivalentes.

Como forma de ilustrar essa abordagem de trincas, tem-se a Figura 2.14 que mostra o processo de propagação de uma trinca discreta em uma viga. Nota-se nessa ilustração o comportamento linear da curva carga (P) \times deslocamento (d) antes da abertura da trinca.

A modelagem de trincas discretas utilizando o método de elementos finitos é feita geralmente alterando-se a malha para acomodar a propagação das trincas, exceto para casos no qual o caminho da trinca é conhecido previamente (ACI-Committee-446, 1997). Dessa forma, deve-se adotar estratégias adequadas para inserção da trinca na malha de elementos. Algumas formas para redefinição de malha estão apresentadas na seção 2.4.2.

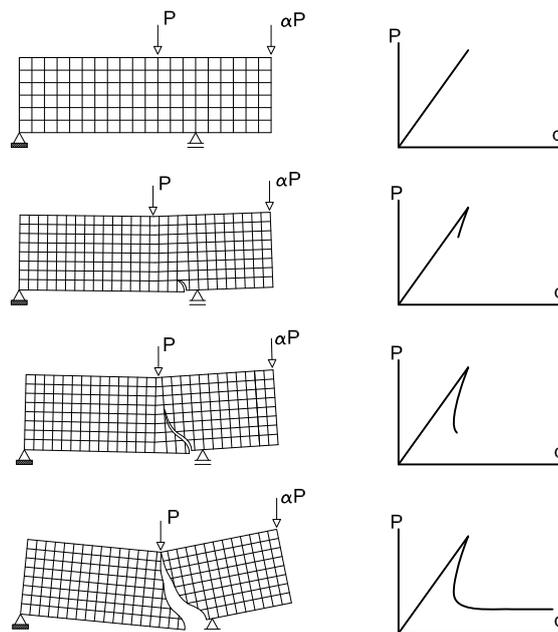


Figura 2.14: Propagação da trinca em modelos discreto (Penna, 2011).

2.4.1 Modelo de Trinca Discreta Coesiva

O modelo de trinca coesiva ou fictícia é um modelo capaz de descrever o processo de dissipação de energia em materiais parcialmente frágeis durante o processo de fissuração (Yang e Chen, 2005). Neste modelo, assume-se a existência de uma zona de processo de fratura que é responsável pela transferência de tensão até que a abertura da trinca atinja

um valor crítico. Outra consideração feita é que a região não fissurada do concreto possui comportamento elástico, desta forma não há dissipação de energia na região sem fissuras.

O trabalho de Yang e Chen (2005) apresenta um modelo de elementos finitos para a propagação de fissuras em vigas de concreto armado, utilizando trincas discretas coesivas. Nesse modelo, as trincas discretas são representadas pelo conceito de trincas coesivas, utilizando elementos de interface não lineares com uma lei constitutiva de amolecimento bilinear à tração. Além disso, o modelo incorpora critérios de propagação de trincas baseados em energia, procedimentos de redefinição de malha, métodos de mapeamento de variáveis e algoritmos para resolver equações considerando o amolecimento do material.

Já em Chen *et al.* (2018), é abordado o Método de Descontinuidade de Deslocamento (*Displacement Discontinuity Method*) para propagação de trincas coesivas em materiais parcialmente frágeis como o concreto. Neste artigo, o Método de Descontinuidade de Deslocamento é estendido para levar em consideração a zona de processo de fratura em materiais parcialmente frágeis, incorporando um algoritmo iterativo que considera a relação entre a tensão coesiva e a abertura da trinca.

Outra aplicação do modelo de trinca coesiva é apresentado no trabalho de García-Álvarez *et al.* (2012). O estudo propõe um modelo de mecânica de fratura não linear para analisar trincas em materiais quase-frágeis, como o concreto, com foco nos modos de fratura I (tração) e II (cisalhamento). A fratura é simulada por meio de uma trinca discreta representada pela interface, associada a um modelo coesivo. A relação de separação de tensões da fissura é baseada em um critério de fratura, juntamente com uma regra de fluxo e uma lei de amolecimento.

Segundo o modelo original de trinca coesiva, a propagação da trinca ocorre quando a tensão na ponta da trinca assume um valor maior que a resistência à tração do material. Quando ocorre a abertura da fissura, a tensão não zera imediatamente, esse valor decai de acordo com o aumento da extensão da trinca (Hilleborg *et al.*, 1976). Dessa forma, essa resistência residual é representada por tensões coesivas cuja tendência é de fechamento da trinca.

De acordo com Wolff (2010), para definir o comportamento do concreto na região fissurada, o Modelo de Trinca coesiva simula o modo I de abertura de trinca em uma linha, restringindo a zona de processo de fratura a uma superfície simples e bem definida.

A definição dos critérios de dissipação de energia que serão usados no domínio fissurado é um aspecto indispensável. Quando um carregamento é submetido a uma estrutura de concreto na qual existe uma trinca parcialmente frágil, a energia de carga aplicada resulta em uma taxa de energia G_q . Essa taxa de energia é dissipada na ponta da fissura e pode ser dividida em duas parcelas como mostrado na equação:

$$G_q = G_{Ic} + G_{\sigma}, \quad (2.39)$$

onde G_{Ic} é parcela de energia necessária para formar duas superfícies separadas de trinca e G_σ a parcela de energia necessária para separar as duas superfícies da trinca já formada.

O modelo de trinca coesiva utiliza apenas a parcela G_σ , uma vez que a energia para formar duas superfícies é desprezível em comparação a energia necessária para separá-las. Na parcela G_σ , o σ refere-se às tensões coesivas atuantes na direção normal às superfícies da fissura no modo I de ruptura. A tensão coesiva σ decresce gradativamente em função da abertura da trinca representada por w como observado na Figura 2.15.

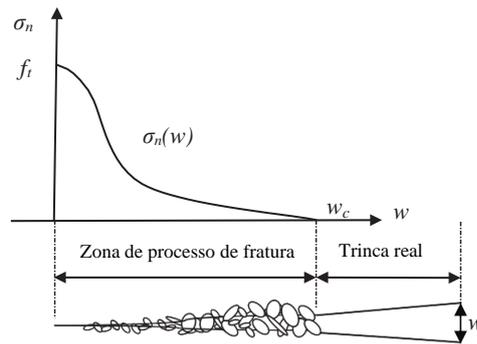


Figura 2.15: Zona de processo de fratura em concreto (Adaptado de Chen *et al.* (2018)).

A parcela de energia G_σ pode ainda ser explicada como o trabalho realizado pela tensão coesiva σ sobre uma unidade de comprimento de uma trinca (Δa) de espessura unitária e pode ser calculada pela Eq. 2.40:

$$G_\sigma = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \int_0^w \sigma(w) dx dw$$

$$G_\sigma = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} dx \int_0^w \sigma(w) dw = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2.40)$$

onde $\sigma(w)$ é a tensão coesiva normal e w_t é o deslocamento da separação da fissura na ponta da trinca inicial.

A energia G_σ pode também ser dada pela área sob a curva do gráfico da Figura 2.15. Essa área pode ser associada à energia necessária para se separar uma trinca coesiva de área unitária (G_F), denominada energia da fratura e é considerada como um parâmetro que é dependente exclusivamente do material. Dessa forma, a Eq. 2.40 pode ser reescrita como mostrado na Eq. 2.41.

$$G_q = G_\sigma = G_F = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2.41)$$

Para completude do modelo de trinca coesiva, resta somente a definição do mecanismo

de início e propagação da trinca coesiva. Para ilustrar esse mecanismo tem-se a Figura 2.16.

O comportamento de um ponto localizado em um material isotrópico é, em geral, assumido como elástico até que seja alcançada a resistência à tração do material (f_t). Nesse instante ocorre a abertura da trinca coesiva com transferência de tensão. Tomando como referência um ponto localizado na ponta da trinca inicial, tem-se o valor da abertura w igual a w_t e $\sigma(w)$ maior que zero (Figura 2.16-a). No decorrer do incremento de carga, $\sigma(w)$ começa a diminuir e a abertura da trinca w começa a aumentar. Quando a abertura w do ponto localizado na ponta da fissura alcançar um valor crítico (w_c) correspondente a tensão coesiva nula ($\sigma(w) = 0$), a trinca está totalmente separada.

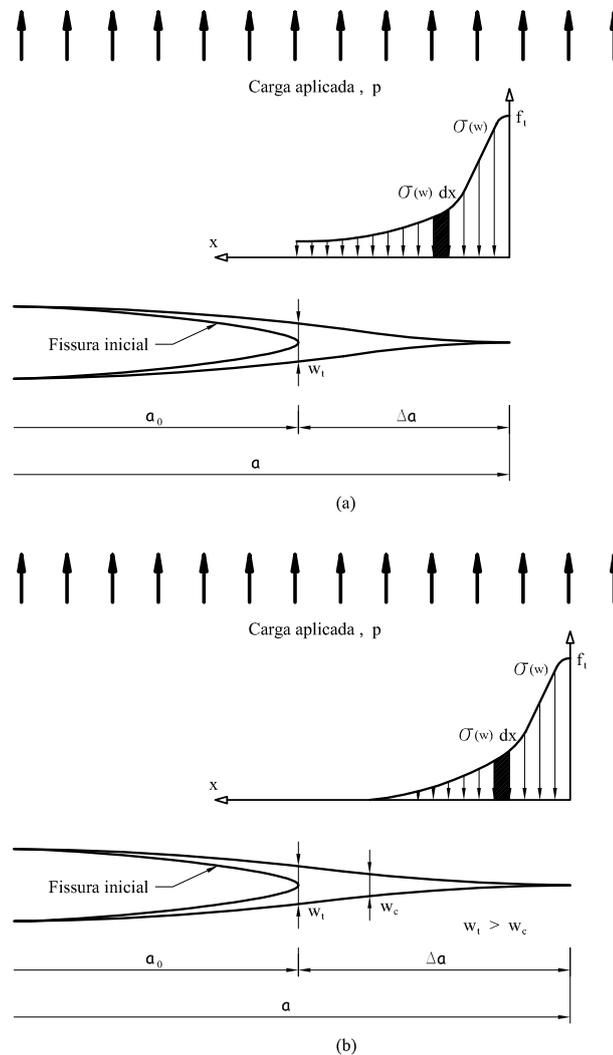


Figura 2.16: Modelo de fissura coesiva parcialmente frágil com as superfícies fissuradas: (a) em contato e (b) parcialmente separadas (Adaptado de Shah *et al.* (1995) por Wolff (2010)).

Sendo a energia de fratura dependente somente do material, o comportamento da região fissurada do concreto fica totalmente definido pela descrição da curva $\sigma(w)$, que depende do valor da resistência à tração do material f_t , da energia de fratura do material

G_F e do formato da curva de tensões coesivas determinada experimentalmente. Para completa definição do modelo de trinca coesiva basta apenas a descrição do comportamento do concreto na região não fissurada que pode ser feito pela definição dos parâmetros E (módulo de elasticidade do material) e ν (coeficiente de Poisson).

Quando dado o formato da curva $\sigma(w)$, a propriedade de fratura do material é determinada pelos valores de f_t e G_F , que combinados formam o comprimento característico l_{ch} dado por:

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2}. \quad (2.42)$$

Esse comprimento característico é proporcional ao comprimento da zona de processo de fratura baseada no modelo de trinca coesiva e é uma propriedade somente do material. Para o concreto, l_{ch} varia de 100 mm a 400 mm e o comprimento da zona de processo de fratura na completa separação da trinca inicial é da ordem de $0,3l_{ch}$ a $0,5l_{ch}$ de acordo com o modelo de trinca coesiva Shah *et al.* (1995).

2.4.2 Estratégias para Redefinição de Malha em Modelos Discretos

Como dito anteriormente, o modelo de trinca discreta é empregado na análise de estruturas para descrever o comportamento de trincas no material. Nessa abordagem, a trinca é inserida como uma descontinuidade geométrica na malha de elementos finitos. Dessa forma, essa técnica é capaz de representar descontinuidades de deformação na estrutura, no entanto, isso acarreta na mudança da topologia da estrutura (Tudjono *et al.*, 2016).

Existem alguns casos onde toda a malha é redefinida após a propagação da trinca, como demonstrado no estudo de Araújo (1999). Nesse trabalho, apresenta-se um modelo de análise elastoplástica adaptativa de estruturas com trincas. Toda vez que uma trinca propaga ou é iniciada, a geometria do modelo é alterada e a malha global é atualizada.

Em contrapartida a esses modelos complexos de redefinição total da malha, uma técnica simples de duplicação nodal pode ser adotada com essa finalidade. Essa metodologia foi adotada por Ngo e Scordelis (1967) para analisar trincas em concreto armado. Nesse procedimento, quando atingido o critério de resistência adotado no nó entre dois elementos adjacentes, uma trinca é definida entre esses dois elementos ao longo de sua aresta comum. Esse processo é realizado pela duplicação do nó entre os elementos no qual houve ruptura. Uma ilustração dessa estratégia de redefinição de malha está apresentada na Figura 2.17, onde pode-se observar que o nó 2 foi duplicado, dando origem ao nó 10 e a trinca foi inserida entre as arestas que ligam os nós 2 e 10 à ponta da trinca (nó 5).

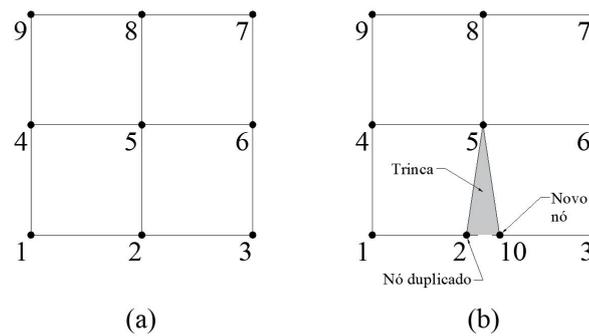


Figura 2.17: Exemplo de redefinição da malha de elementos finitos via duplicação nodal: a) malha original e b) malha redefinida a partir da duplicação nodal.

Em Tudjono *et al.* (2016), é apresentado um modelo que inclui a influência da fissuração do concreto e do deslizamento de aderência em estruturas de concreto armado por meio da abordagem de fissuração discreta. Nesse trabalho, quando o critério de tensão definido para propagação da trinca é atingido em um nó, uma trinca discreta é inserida na malha de elementos finitos. Essa inserção da trinca é feita a partir da duplicação nodal. São apresentadas três diferentes casos de propagação de trincas. O primeiro caso refere-se a iniciação de uma trinca discreta nas fibras extremas do concreto, o segundo caso foi o da propagação da trinca interceptando a armadura de aço e o último caso representou a propagação de trincas diagonais na estrutura. Embora exista três estratégias para propagação da trinca, ambas utilizam a duplicação dos nós para inserção da trinca.

No trabalho de Chen *et al.* (2019) é apresentado um modelo coesivo/contato extrínseco baseado em nós para análise de descolamento interfacial em estruturas de materiais compósitos. Este modelo adota a técnica de duplicação nodal para redefinir dinamicamente a malha de elementos finitos. Os nós são duplicados de maneira adaptativa, ocorrendo quando e onde necessário, acompanhando o avanço do processo de descolamento. Esse método, além de ser eficaz na análise, destaca-se por sua capacidade de otimizar os custos computacionais associados ao problema.

Outro exemplo de redefinição de malha é o desenvolvido por Xie em seu programa AUTOFRAP denominado como “*insert-separate*” (Xie e Gerstle (1995), Xie (1995)) e citado por Yang e Chen (2004). Nessa estratégia uma nova aresta do antigo nó da ponta da trinca é primeiro inserida na malha local na direção de propagação. O ponto de interseção desta aresta com a malha original é o novo nó da ponta da fissura e a nova fenda é então formada pela separação desses nós ao longo da linha através dos novos e antigos nós da ponta da trinca. A seguir adiciona-se uma roseta para refinar a malha do nó da ponta. Esse algoritmo utiliza também elementos de interface no caminho da trinca. Uma vantagem desse algoritmo é que a malha é redefinida apenas na região de propagação da trinca, o que afeta menos elementos e conseqüentemente torna o procedimento mais simples e computacionalmente menos oneroso. O trabalho de Yang e Chen (2004) apresenta um modelo de elementos finitos para simulação totalmente automática de propagação de

múltiplas trincas em vigas de concreto. Nesse estudo, trincas discretas foram modeladas utilizando-se elementos de interface não-lineares e o comportamento de tração do concreto foi representado pelo modelo de trinca coesiva. Como técnica de redefinição de malha foi usado um programa interno, que incorpora uma versão modificada do AUTOFRAP de Xie.

2.5 Modelos Combinados

A abordagem discreta é uma alternativa de modelo capaz de descrever a propagação de trincas, no entanto, não reproduz adequadamente o mecanismo para sua formação. Já a abordagem distribuída é mais apropriada para descrição desses mecanismos, mas não pode modelar a geometria da trinca. Diante dessas observações, a utilização de um modelo que combina a abordagem distribuída e discreta é uma boa alternativa para solução das limitações de cada um dos modelos.

O modelo apresentado em Einsfeld (1997) para o fraturamento em estruturas de concreto combina os processos discreto e distribuído. Em Einsfeld (1997), a transição do processo de fissuração distribuída para o processo discreto ocorre à medida em que as deformações se localizam em uma certa região da estrutura. O modelo proposto nesse trabalho é um modelo combinado de trinca distribuída combinado ao modelo discreto. Dessa forma, a análise ocorre segundo o modelo de fissuração distribuída e permite a inserção das fissuras discretas à medida que o critério pré-definido para nucleação ou propagação da trinca é atingido.

Existem ainda modelos combinados contínuos e descontínuos, que incorporam coesão ao processo após a nucleação da trinca. Como exemplo, Roth *et al.* (2015) apresenta um modelo que combina a mecânica do dano com a propagação de fissuras no concreto e para transferir a dissipação de energia da abordagem contínua para o modelo descontínuo é utilizado uma formulação coesiva.

De maneira similar, Cuvilliez *et al.* (2012) propõe uma abordagem integrada entre um modelo contínuo e descontínuo, acoplando um modelo de dano gradiente e uma zona coesiva, para simular a propagação de trincas em materiais parcialmente frágeis.

Na seção 2.5.1 serão apresentados alguns trabalhos que utilizam a abordagem combinada de modelos de trinca discreta associados a modelos de dano.

2.5.1 Modelo de Trinca Discreta Associado a Modelos de Dano

Na implementação de modelos de trinca que combinam a modelos discretos e contínuos, a transição entre uma abordagem e outra é crucial após o início do comportamento de *softening* (Negi e Kuma, 2022). Dessa forma, o modelo deve incluir um critério para o qual haverá inserção da trinca. Para modelos baseados em dano, um limite de dano crítico

pode ser adotado como critério, ou seja, haverá nucleação ou propagação da trinca caso seja atingido um valor pré-definido de dano.

Em Bouchard (2005), um modelo baseado no dano e trinca discreta com redefinição automática da malha é apresentado. A iniciação da trinca baseia-se tanto na tensão crítica quanto no dano crítico. Em seu modelo, Bouchard (2005) propôs que uma vez que uma trinca é iniciada, a direção de propagação pode ser calculada utilizando um dos seguintes critérios: critério de tensão circunferencial máxima, critério de densidade de energia de deformação mínima ou critério de taxa máxima de liberação de energia de deformação e após definida a direção de propagação, uma nova linha representando o avanço da trinca é adicionada à linha anterior da peça. Em sequência inicia-se a etapa de redefinição da malha que é baseada na triangulação de Delaunay.

No trabalho de Simone *et al.* (2003) é apresentado um modelo para descrição de falha que combina o modelo contínuo e descontínuo. O modelo contínuo é o de dano não local e é regularizado pela introdução de termos de gradiente nas equações constitutivas. As discontinuidades são introduzidas quando o material atinge um estado totalmente danificado e ao inserir uma descontinuidade, as interações não locais através da fissura cessam e a deformação ilimitada na superfície não tem influência no campo não local. Esse modelo foi implementado com elementos quadriláteros lineares e quadráticos. Segundo Simone *et al.* (2003), em um contínuo danificado, uma situação crítica pode ser definida como aquela na qual os valores de dano são próximos ou iguais a 1 no elemento próximo à ponta de uma descontinuidade. Dessa forma, nos exemplos mostrados em Simone *et al.* (2003), são utilizados valores de dano críticos bem próximos de 1, como 0,99; 0,999; dentre outros. Como orientação da descontinuidade, foi adotada a direção de acúmulo máximo da deformação equivalente não local em uma janela em formato de “V” à frente da ponta da descontinuidade. Essa região “V” está ilustrada na 2.18 e as variáveis i , r , d_i e θ correspondem respectivamente ao ponto integração, ao raio da região “V”, ao vetor na direção do ponto de integração i e ao ângulo de um quarto de círculo.

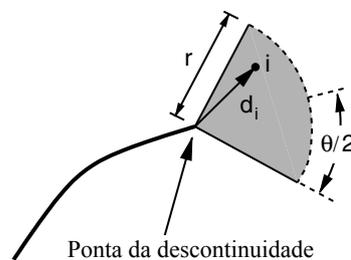


Figura 2.18: Determinação da direção de propagação (Adaptado de Simone *et al.* (2003)).

Outro modelo onde há transição de um meio contínuo para descontínuo é apresentado em Negi e Kuma (2022). Esse modelo acopla uma abordagem numérica contínua e descontínua para melhor caracterização de um processo completo de falha parcialmente

frágil através de uma cinemática aprimorada da aproximação de elementos finitos. O meio contínuo é modelado com um modelo de dano de gradiente de localização baseada em tensão micromórfica. Já o meio descontínuo é desenvolvido aprimorando os campos de deslocamentos do problema, com a utilização de interpolações descontínuas nas regiões criticamente danificadas, explorando a partição local da unidade por meio do Método de Elementos Finitos Estendido, do inglês *Extended Finite Element Method* - XFEM. O critério de identificação de trinca adotado é baseado na avaliação do dano dentro da malha de elementos finitos. Dessa forma, após o final de cada etapa incremental de carga, todos os pontos de quadratura em cada elemento finito na fronteira do domínio do problema são verificados quanto aos valores críticos de dano e no caso de vários elementos atingirem dano maior que o crítico seleciona-se o elemento que possui o maior dano geral. A direção da trinca é governada pela direção em que ocorre a máxima de deformação micromórfica equivalente e os valores de dano crítico utilizados nas simulações numéricas são aproximadamente iguais a 1 (0,993; 0,9995; dentre outros). Destaca-se que apesar de utilizar uma abordagem diferente da usada na presente dissertação para modelagem da trinca, em Negi e Kuma (2022) uma descontinuidade também é inserida à malha de elementos.

Diante da discussão acima acerca dos critérios de abertura de trinca, adotou-se nesse presente trabalho dano crítico igual a 0,95 para as simulações numéricas realizadas e apresentadas no Capítulo 4, entretanto, pode-se adotar qualquer valor. Destaca-se que a definição desse valor baseou-se no fato de que para abertura da trinca, a zona de processo da fratura modelada a partir de modelos constitutivos, já não exerce mais influência, ou seja, não há mais transferência de tensão entre as faces da trinca. Outro fator determinante para adoção dessa hipótese de dano crítico igual a 0,95 foi a discussão apresentada acima sobre o valor do dano crítico estar próximo de 1.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA DE MODELO DE TRINCA DISCRETA ASSOCIADO A MODELOS DE DANO ESCALAR

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a proposta de modelo discreto associado ao modelo de dano escalar. Além disso, forneceremos uma descrição do algoritmo que viabiliza a simulação da propagação de trincas discretas, considerando diferentes critérios de abertura da trinca e direções de propagação.

No modelo proposto, o meio é inicialmente tratado como contínuo até a nucleação da trinca. Seu comportamento é então regido por modelos constitutivos de dano escalar, podendo-se adotar medidas de deformação equivalentes tanto do modelo de dano proposto por de Borst e Gutiérrez (1999) quanto o de de Vree *et al.* (1995). Destaca-se que uma abordagem não local é incorporada ao modelo para resolver questões de localização de deformação que surgem numericamente durante a análise não linear.

A análise não linear do problema é conduzida por meio do método de Newton-Raphson, associado a um método de controle adaptado à natureza específica do problema, conforme apresentado por Fuina (2004).

3.2 Parâmetros da Propagação

A escolha do critério de nucleação desempenha um papel crucial na análise de trincas dentro do modelo implementado. Este modelo oferece flexibilidade ao permitir a seleção entre os critérios: dano, tensão máxima ou deformação máxima. No caso do critério de dano, a próxima frente de trinca, conforme as limitações de direção de propagação apresentadas na seção 3.3.1, será determinada pelo nó com o maior valor de dano. Por outro lado, os critérios de tensão ou deformação máximas indicam que o próximo nó na frente de trinca será escolhido com base no valor mais elevado de tensão ou deformação, respectivamente.

A orientação da trinca pode ser determinada pela direção calculada pelo modelo constitutivo, ou, alternativamente, pelo nó associado ao maior valor de dano, maior tensão ou maior deformação.

Além disso, um parâmetro crucial envolve a definição dos nós iniciais para a abertura da trinca. Em outras palavras, no início do processo de análise dos problemas, é necessário especificar quais nós serão o ponto de nucleação da trinca. Para cada frente de trinca, é necessário definir um nó específico. Em outras palavras, para uma única frente de trinca, apenas um nó é pré-definido; para duas frentes, dois nós são estabelecidos, e assim por diante.

O algoritmo também proporciona a possibilidade de incorporar ao processo a erosão de elementos deteriorados, seguindo um critério previamente estabelecido, o qual pode se basear em dano ou deformação máxima.

3.3 Sistema Computacional

As implementações propostas neste trabalho foram desenvolvidas no sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), criado no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, utilizando a linguagem JAVA.

Com base na implementação do método dos elementos finitos no INSANE, os cálculos de tensão, deformação e outros são realizados nos pontos de integração de cada elemento. Dessa forma, um procedimento para calcular as variáveis mencionadas também para os pontos nodais em cada elemento finito foi desenvolvido e incorporado ao INSANE. Para isso, foi criado em cada elemento um conjunto de pontos internos, associados aos nós, permitindo assim que as variáveis, como o dano, sejam avaliadas nos nós. Essa abordagem elimina a necessidade de interpolação dos valores obtidos nos pontos internos de integração do elemento, obtendo diretamente esses valores nos nós.

Uma descrição detalhada do núcleo numérico do INSANE e modelos constitutivos disponíveis podem ser encontrados, respectivamente, nos trabalhos de da Fonseca (2008) e Penna (2011).

3.3.1 Algoritmo Implementado

O funcionamento do algoritmo implementado será descrito a seguir.

Conforme mencionado anteriormente, o modelo é inicialmente tratado como um meio contínuo antes da nucleação das trincas. Assim, no início do processo de análise não linear do problema, o comportamento do meio é governado pelo modelo constitutivo de dano escalar.

Na fase de atualização de variáveis de um passo incremental da análise não linear para o seguinte, verifica-se se os nós inicialmente designados como pontos de nucleação da trinca atenderam ao critério pré-estabelecido. A partir desse ponto, o nó que satisfaz o critério adotado é duplicado, transferindo as variáveis de estado para o novo nó. No

passo da análise não linear em que o nó na ponta da trinca alcança o critério adotado, o próximo nó na ponta da trinca é redefinido. Ressalta-se aqui que as variáveis avaliadas como critérios de nucleação das trincas são calculadas diretamente nos nós, via modelo constitutivo. As etapas do algoritmo estão ilustradas na Figura 3.1.

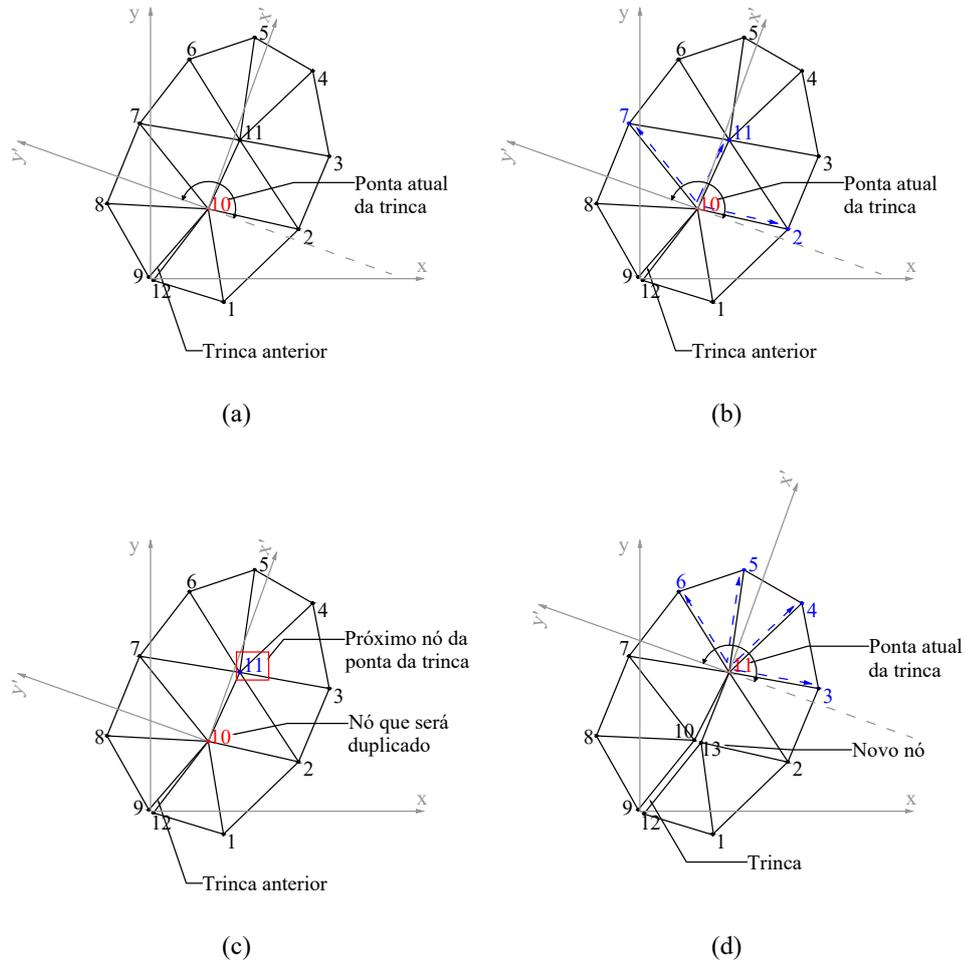


Figura 3.1: Esquema de propagação da trinca.

Como observa-se na Figura 3.1-b, o nó da ponta da trinca é o nó 10 e será ele o nó a ser duplicado. A partir desse nó, busca-se qual nó ligado a ele por uma aresta de elemento está mais próximo da direção local da trinca, ilustrada na Figura 3.1-b pelos eixos x' e y' . Os possíveis candidatos a serem a nova ponta da trinca devem estar limitados à 90° nos sentidos horário e anti-horário a partir do eixo local x' . De acordo com os critérios citados, para o exemplo mostrado na Figura 3.1-b, os possíveis nós de ponta da trinca são o 2, 7 e 11. Nota-se que o nó cuja direção mais se aproxima da direção local da trinca é o 11. Desta forma, este é o próximo nó de ponta da trinca, como mostrado na Figura 3.1-c.

O processo de definição da próxima ponta de trinca foi exemplificado por uma direção qualquer, caso a direção definida para o problema seja de dano máximo, o processo é simplificado. Para este caso, o próximo nó da ponta da trinca é aquele que, dentre os

critérios de estar conectado a ponta de trinca atual e limitado à 90° nos sentidos horário e anti-horário a partir do eixo local x' , possua maior valor de dano. Para direção da trinca segundo o nó de maior deformação ou tensão, o mesmo processo de dano máximo é válido. Altera-se apenas a variável a ser avaliada (deformação máxima ou tensão máxima).

Definida a próxima ponta da trinca, redefine-se a incidência dos elementos em função da orientação da trinca e com esta redefinição uma descontinuidade é inserida na malha de elementos finitos representando a trinca, como apresentado na Figura 3.1-d. Redefinido o nó da ponta da trinca, será este o nó verificado a cada passo incremental da análise não linear e caso este atinja o critério de abertura de trinca adotado, o processo de duplicação nodal e refinição da nova ponta de trinca se repete. O processo foi descrito para uma frente de trinca, caso o problema envolva mais uma frente, esse processo é aplicado a cada uma delas. Destaca-se que no processo de redefinição da incidência do elemento, leva-se em consideração tanto a direção da aresta da trinca anterior quanto a aresta que liga o nó duplicado a nova ponta da trinca, obtendo assim uma correta inserção da trinca na malha.

O processo da erosão funciona da seguinte maneira: quando verificado que um nó será duplicado, os elementos de sua incidência são armazenados em uma lista e a cada passo incremental verifica-se se todos os nós daquele elemento atingiram dano superior a um valor limite. Caso isso ocorra, o elemento é removido da malha de elementos finitos.

Embora tenha sido implementada a opção de diferentes critérios de abertura e direção de propagação da trinca, as simulações numéricas realizadas e apresentadas no Capítulo 4 se limitam ao critério de propagação de dano máximo e as direções validadas são: direção da trinca via modelo constitutivo e direção do nó de dano máximo.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão apresentadas simulações numéricas de forma a validar o algoritmo implementado que simula a propagação de uma trinca discreta com redefinição da malha a partir da duplicação nodal associado a modelos de dano escalar.

Para todos os exemplos, os parâmetros dos modelos de dano foram ajustados com base nos dados do material. Esse procedimento incluiu a aplicação de uma carga unitária a um elemento de dimensões unitárias, no qual a resposta do material foi observada, levando à obtenção da curva de tensão em relação à deformação para um modelo distribuído. Em seguida, os parâmetros da lei de dano foram ajustados de acordo com o modelo constitutivo escolhido, a fim de alinhar-se com a curva de referência. Esse processo de ajuste de parâmetros garantiu uma representação precisa do comportamento do material.

4.1 Tração Direta com Entalhe Simétrico - Hordijk (1991)

A tração direta será simulada conforme o ensaio apresentado por Hordijk (1991), no qual uma chapa retangular com dois entalhes simétricos e espessura de 50 *mm* é submetida a um carregamento uniformemente distribuído na parte superior. A geometria adotada para esta simulação está apresentada na Figura 4.1-a. O concreto utilizado no ensaio de Hordijk (1991) possuía as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 18000 \text{ N/mm}^2$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; resistência à tração de $f_t = 3,4 \text{ N/mm}^2$ e energia de fratura $G_f = 0,0593 \text{ N/mm}$. O ensaio é controlado pelo deslocamento vertical dos nós da face onde o carregamento foi aplicado e as deformações são medidas por extensômetros localizados a 35 *mm* de distância um do outro.

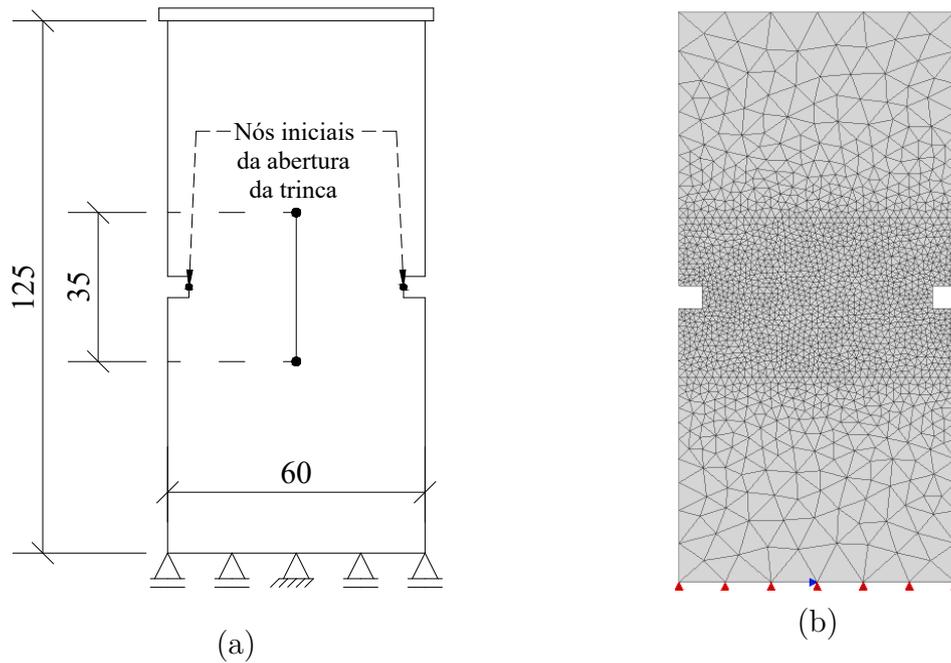


Figura 4.1: Chapa Tracionada: (a) Geometria com dimensões em mm e condições de apoio e (b) Malha de elementos finitos.

A simulação numérica do ensaio foi realizada utilizando-se um malha de elementos finitos de três nós conforme mostrado na Figura 4.1-b. O modelo constitutivo utilizado foi o modelo de Vree *et al.* (1995) e os parâmetros não locais, do material e da lei de dano utilizados estão listados na Tabela 4.1. O critério para abertura da trinca adotado foi dano de 0,95 e a direção de propagação adotada foi a direção do nó de máximo dano à frente da ponta de trinca. Os dois nós pré-definidos para a nucleação da trinca estão localizados nos entalhes, conforme apresentado na Figura 4.1-a.

No controle do processo incremental-iterativo da análise não linear, adotou-se um incremento de $2,5 \times 10^{-4} mm$ para a simulação denominada Tração Direta - Simulação 1 e $5,0 \times 10^{-4} mm$ para a Tração Direta - Simulação 2, controlando simultaneamente o deslocamento de todos os nós da face superior da chapa. Um resumo dos parâmetros que diferenciam as simulações está apresentado na Tabela 4.2. A tolerância para convergência foi de 1×10^{-4} .

Tabela 4.1: Parâmetros adotados na simulação numérica da chapa tracionada

Parâmetros Não Locais	Parâmetros do Material	Parâmetros da Lei de Dano Polinomial (Eq. 2.32)
l 36 mm	E 18000 N/mm^2	f_e 3,4
k 8,0	ν 0,2	κ_0 0,0004
		\tilde{E} 18000 N/mm^2

Tabela 4.2: Simulações - Tração Direta

Tração Direta	Incremento
Simulação 1	$2,5 \times 10^{-4}$
Simulação 2	$5,0 \times 10^{-4}$

A Figura 4.2 mostra a relação tensão x enlogação obtida a partir das simulações numéricas descritas e o resultado experimental de Hordijk (1991). A enlogação foi calculada pela diferença entre os deslocamentos verticais dos pontos distanciados igualmente do centro, correspondente ao extensômetro usado no ensaio, conforme mostrado na Figura 4.1-a.

Analisando as trajetórias mostradas na Figura 4.2, nota-se que o modelo de trinca discreta desenvolvido foi capaz de representar o comportamento da chapa tracionada. Ambas as simulações realizadas para este exemplo forneceram trajetórias de equilíbrio próximas à curva experimental. Pode-se concluir também que o valor do incremento utilizado no processo incremental iterativo tem alterações que exercem pouca influência no resultado da curva obtida. A curva da Tração Direta - Simulação 1, cujo incremento era de $2,5 \times 10^{-4} mm$, apresentou uma queda levemente mais acentuada do ramo descendente da curva em relação à Tração Direta - Simulação 2. Pode-se observar que para ambas simulações, após a tensão limite ser alcançada, ocorreu um alongamento repentino da chapa ocasionando redução brusca da tensão. Este comportamento é decorrente do estado de tração uniforme de tensão nos casos de tração direta e é representado como um salto nas curvas obtidas à partir das simulações realizadas.

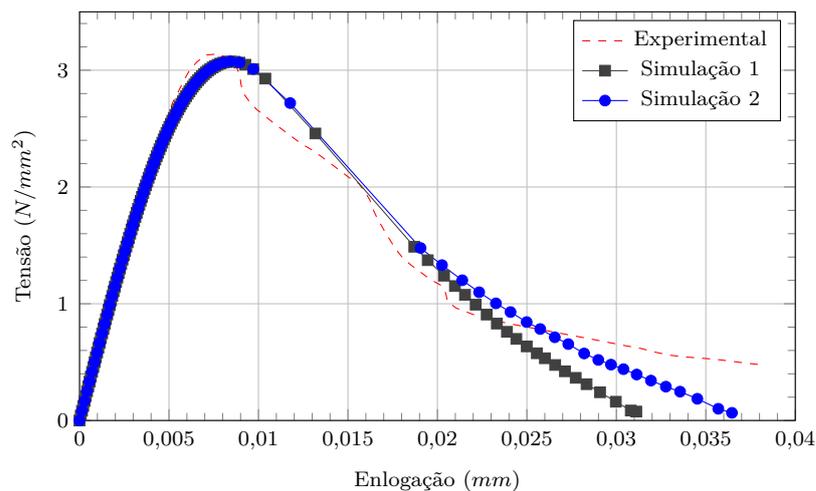


Figura 4.2: Trajetórias de Equilíbrio Tensão \times Enlogação obtidas nas simulações numéricas da tração direta.

A configuração deformada para as duas simulações estão apresentadas na Figura 4.3, onde pode-se observar a trinca formada na malha de elementos finitos representada pela descontinuidade gerada a partir do processo de duplicação nodal implementado. Observa-

se também que, embora, a relação tensão deformação tenha se alterado para diferentes incrementos no processo incremental-iterativo da análise não linear, o padrão da trinca formada foi o mesmo.

Na Figura 4.4 está apresentada a evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da chapa para Tração Direta - Simulação 2.

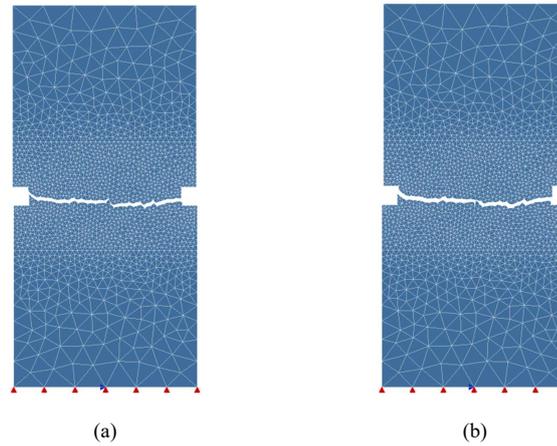


Figura 4.3: Configuração deformada da malha de elementos finitos para as simulações numéricas de tração direta: (a) Simulação 1 e (b) Simulação 2.

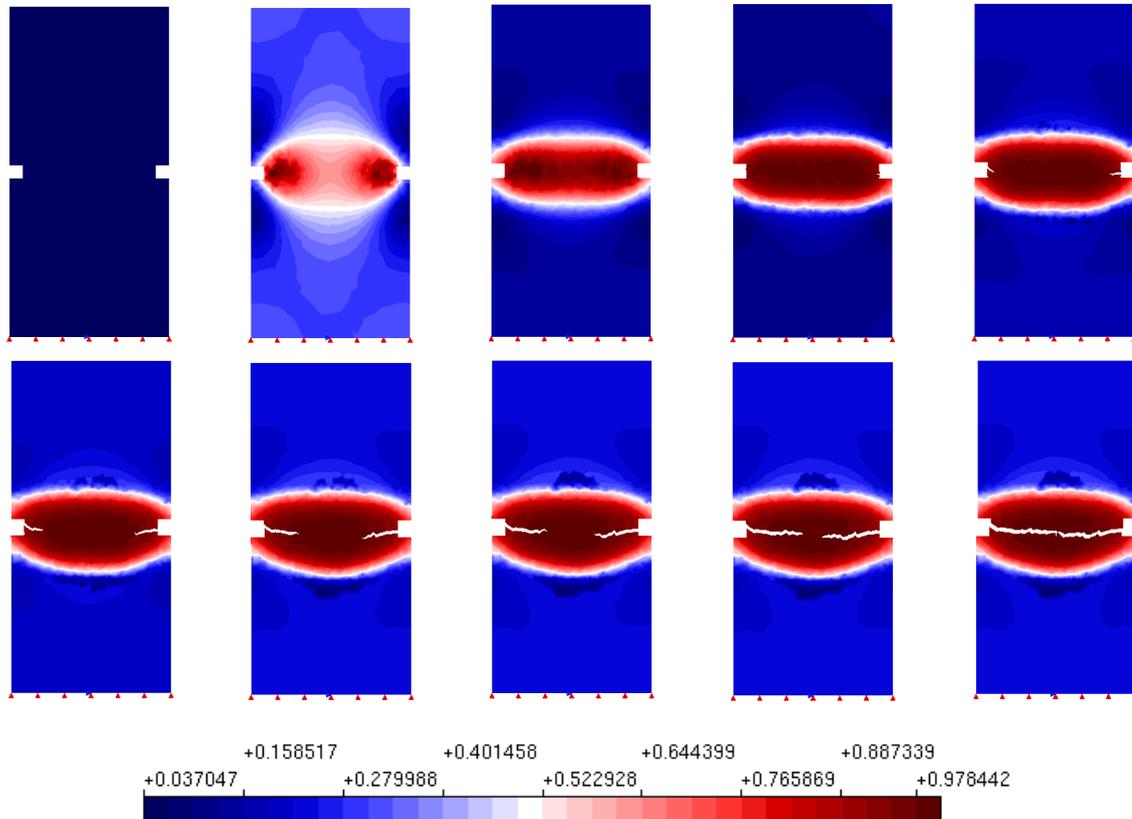


Figura 4.4: Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da chapa tracionada.

4.2 Flexão em Três Pontos - García-Álvarez *et al.* (2012)

Nesta simulação apresenta-se um ensaio de flexão em três pontos realizado por García-Álvarez *et al.* (2012). A simulação consiste em uma viga de concreto com uma trinca inicial submetida a uma carga no meio vão. A geometria do modelo, conforme apresentado em García-Álvarez *et al.* (2012), está ilustrada na Figura 4.5.

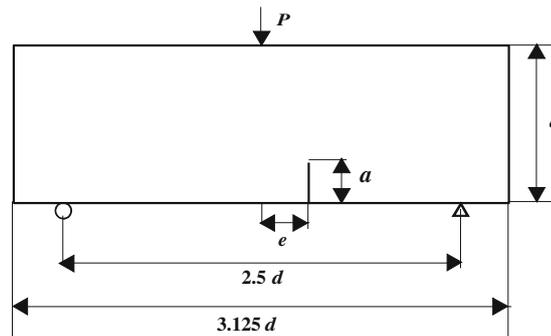


Figura 4.5: Geometria da viga submetida à flexão em três pontos (García-Álvarez *et al.*, 2012).

No presente trabalho adotou-se a dimensão d igual a 80 mm e excentricidades e de 0 e 50 mm . Os resultados para $e = 0$ estão apresentados na seção 4.2.1 e para e igual a 50 mm os resultados estão na seção 4.2.2. A trinca inicial para ambos os casos possui altura $a = 20 \text{ mm}$ e largura de 2 mm . O material possui módulo de elasticidade de 33800 N/mm^2 e coeficiente de Poisson de $0,2$. Outros dados do material são resistência à compressão $f_c = 35,0 \text{ N/mm}^2$, resistência à tração $f_t = 3,5 \text{ N/mm}^2$ e energia de fratura $G_f = 0,070 \text{ N/mm}^2$.

O modelo constitutivo adotado para esta simulação foi o proposto por de Borst e Gutiérrez (1999), a direção de propagação foi a do modelo constitutivo, o critério de propagação foi dano máximo de $0,95$ e os parâmetros não locais e de dano utilizados na modelagem estão mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros adotados na simulação numérica da flexão em três pontos

Parâmetros Não Locais	Parâmetros do Material	Parâmetros da Lei de Dano Polinomial (Eq. 2.32)
l 36 mm	E 33800 N/mm ²	f_e 3,5
k 8,0	ν 0,2	κ_0 2.071×10^{-4}
		\tilde{E} 33800 N/mm ²

4.2.1 Flexão em 3 pontos - $e = 0$

Para simulação da viga com a trinca localizada no meio do vão adotou-se duas malhas distintas mostradas na Figura 4.6 para posterior comparação dos resultados.

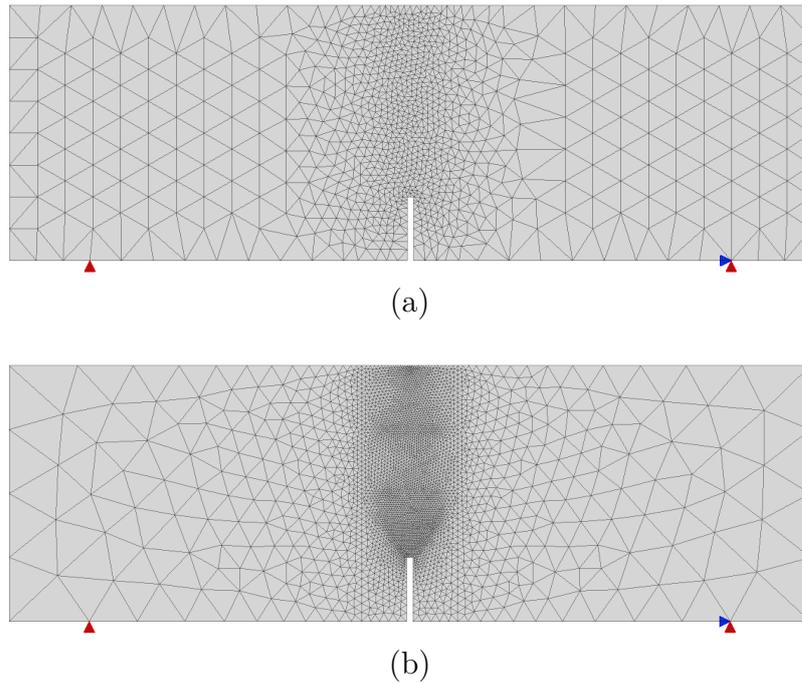


Figura 4.6: Malhas de elementos finitos para a viga submetida à flexão em três pontos.

Para a malha da Figura 4.6-a foram realizadas três simulações utilizando-se o método de controle de deslocamentos, com incremento do deslocamento vertical do nó de aplicação da carga iguais a $0,0025 \text{ mm}$ (Flexão em 3 pontos - Simulação 1), $0,0035$ (Flexão em 3 pontos - Simulação 2) e $0,005$ (Flexão em 3 pontos - Simulação 3). A Tabela 4.4 resume os parâmetros que diferenciam as simulações realizadas. A tolerância de convergência da análise não linear foi de 1×10^{-4} para deslocamentos. Para ambas simulações foram adotados os parâmetros da Tabela 4.3.

Tabela 4.4: Simulações - Flexão em 3 Pontos - $e = 0$

Flexão em 3 Pontos	Malha	Incremento	Erosão
Simulação 1	(a)	0.0025	-
Simulação 2	(a)	0.0035	-
Simulação 3	(a)	0.005	-
Simulação 4	(b)	0.005	-

As trajetórias de equilíbrio de Carga x CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) para as simulações estão apresentadas no gráfico da Figura 4.7. O CMOD corresponde ao deslocamento da abertura da boca da trinca e foi obtido a partir da diferença do deslocamento horizontal dos dois nós na extremidade das faces opostas do entalhe inicial.

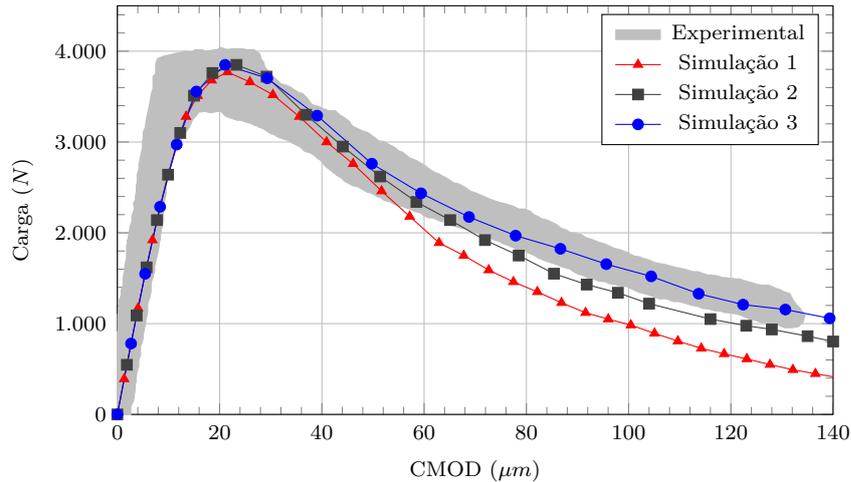


Figura 4.7: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas da flexão em três pontos.

Pode-se observar uma concordância entre os resultados obtidos nas três simulações com o resultado experimental. A Flexão em 3 pontos - Simulação 1 apresentou um desvio do ramo descendente da curva em relação ao resultado experimental. Para a Flexão em 3 pontos - Simulação 2, esse desvio foi mais suave e a curva permaneceu bem próxima do espectro experimental. Já para a Flexão em 3 pontos - Simulação 3, a trajetória teve uma melhor coincidência com o resultado experimental. Dessa forma, como essas três simulações utilizaram a mesma malha (Figura 4.6-a), pode-se perceber uma dependência do modelo em relação ao valor do incremento da análise não linear. Isso ocorre pois o valor do incremento influencia a velocidade na qual a trinca se propaga. Incrementos maiores levam à propagação mais rápida e com incrementos menores a propagação é mais lenta.

A partir da análise das trajetórias apresentadas na Figura 4.7, pode-se concluir que a Flexão em 3 pontos - Simulação 3 representou melhor o exemplo. Embora a trajetória tenha se diferenciado, a propagação da trinca para as três simulações apresentou o mesmo padrão de trinca que está mostrado na Figura 4.8. Observa-se que a trinca propagou-se indo em direção ao ponto de aplicação do carregamento.

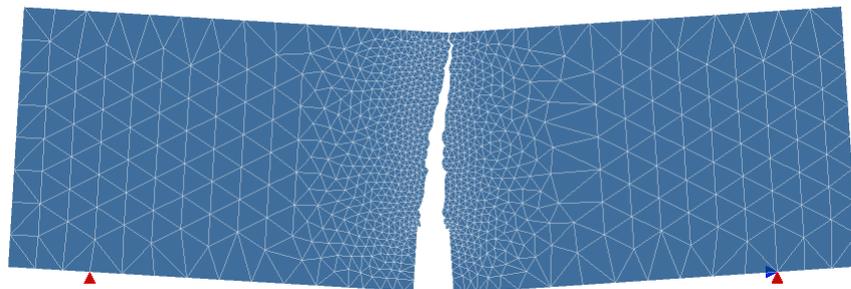


Figura 4.8: Configuração deformada da viga submetida à flexão em três pontos para as simulações: Flexão em 3 pontos - Simulação 1, 2 e 3.

A evolução do dano ao longo da propagação da trinca para a Flexão em 3 pontos - Simulação 3 está apresentado na Figura 4.9.

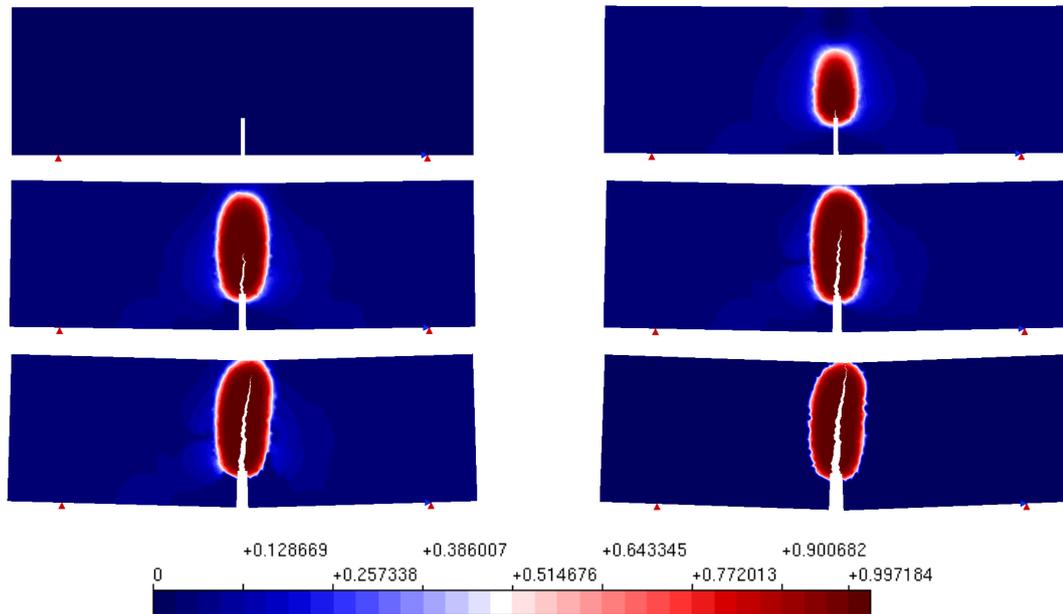


Figura 4.9: Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da Flexão em 3 pontos - Simulação 3.

Utilizando os mesmos parâmetros da tabela 4.3, uma quarta simulação (Flexão em 3 pontos - Simulação 4) adotando a malha da Figura 4.6-b foi realizada. Para esta simulação também foi adotado o método de controle de deslocamentos. O incremento do deslocamento vertical do nó de aplicação da carga igual foi de $0,005 \text{ mm}$ e a tolerância para convergência permaneceu 1×10^{-4} . A trajetória de equilíbrio para a Flexão em 3 pontos - Simulação 4 está mostrada no gráfico da Figura 4.10.

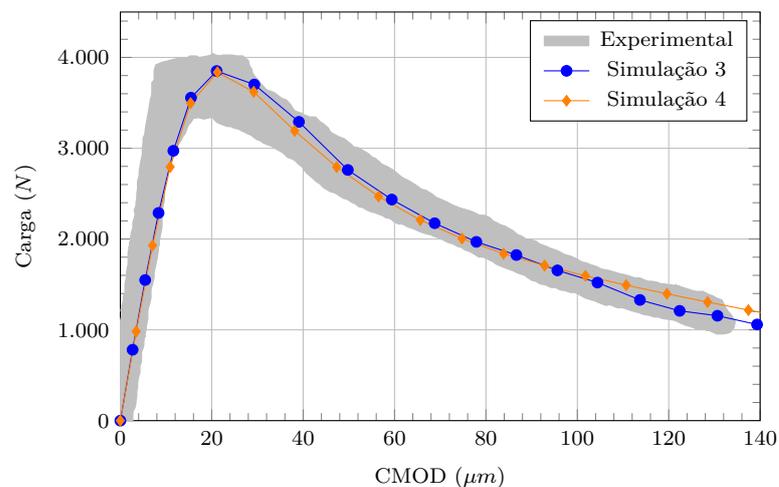


Figura 4.10: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações 3 e 4 da flexão em três pontos.

A curva da trajetória de equilíbrio para a Flexão em 3 pontos - Simulação 4 (Figura 4.10) também produziu resultado coerente com os resultados experimentais. As simulações Flexão em 3 pontos - Simulação 3 e 4 diferenciam-se apenas pela malha adotada, utilizam os mesmos parâmetros do material e incremento da análise não linear. Observa-se que essas duas simulações forneceram curvas bem próximas, mas não coincidentes. Dessa forma, pode-se concluir que, nesta simulação, a malha teve pouca influência no resultado obtido. A configuração final da trinca após sua propagação ao longo da viga para a Flexão em 3 pontos - Simulação 4 encontra-se ilustrada na Figura 4.11. Nota-se que há um leve desvio na direção da trinca próximo à extremidade superior da viga, resultado de uma região de compressão localizada nessa área.

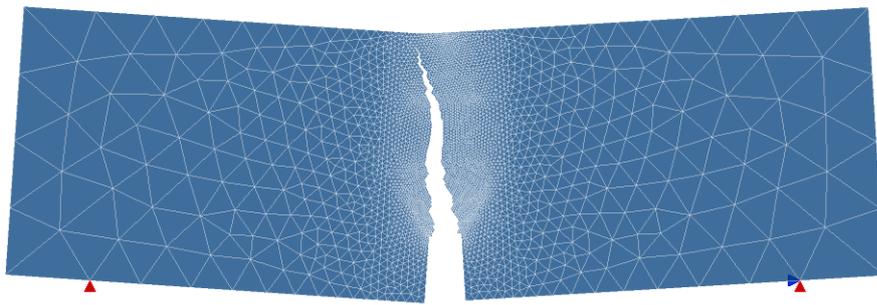


Figura 4.11: Configuração deformada da viga (Flexão em 3 pontos - Simulação 4).

4.2.2 Flexão em 3 pontos - $e = 50 \text{ mm}$

Para simulação da viga com a trinca localizada com excentricidade $e = 50 \text{ mm}$ adotou-se a malha mostrada na Figura 4.12.

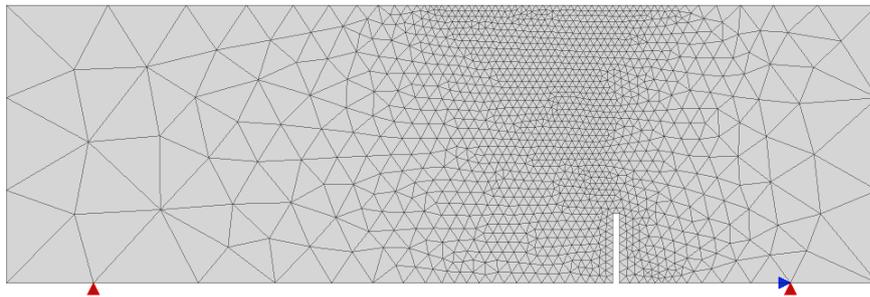


Figura 4.12: Malha de elementos finitos adotada na flexão em três pontos para $e = 50 \text{ mm}$.

Para análise dessa viga, foi realizada uma simulação denominada Flexão em 3 pontos - Simulação 5. Foram adotados os parâmetros da tabela 4.3 e método de controle de deslocamentos. O incremento do deslocamento vertical do nó de aplicação da carga igual foi de 0,0015 e a tolerância para convergência de 1×10^{-4} .

A trajetória de equilíbrio para a Flexão em 3 pontos - Simulação 5 está mostrada no gráfico da Figura 4.13.

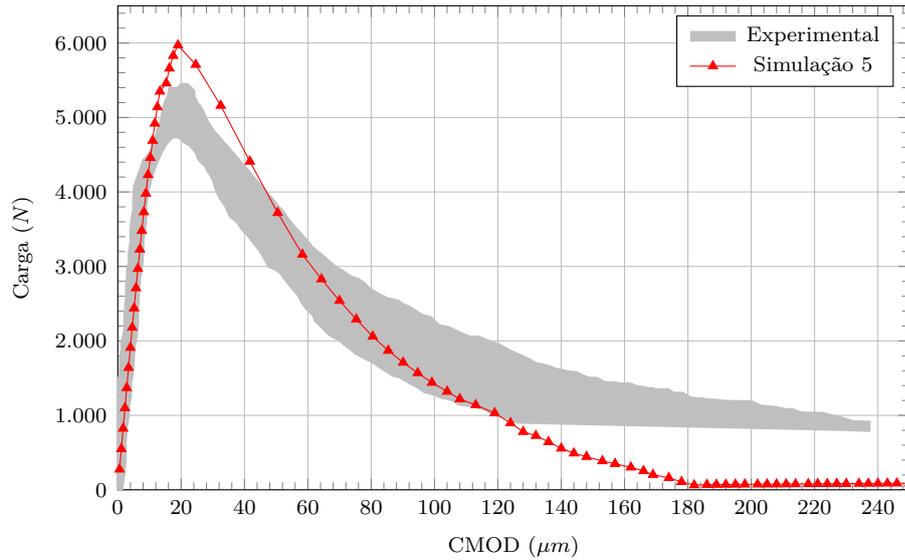


Figura 4.13: Trajetória de Equilíbrio Tensão \times CMOD obtida na flexão em três pontos com trinca assimétrica ($e = 50 \text{ mm}$).

Ao analisar a Figura 4.13 é possível observar que a curva da trajetória de equilíbrio, obtida na simulação de Flexão em 3 pontos - Simulação 5, demonstra uma notável proximidade com os resultados experimentais. Contudo, é importante ressaltar que apresentou apenas um pico mais elevado em comparação com o registrado no experimento.

A configuração deformada correspondente a essa simulação está apresentada na Figura 4.14, onde se destaca a trajetória da trinca convergindo em direção ao ponto de aplicação da carga.

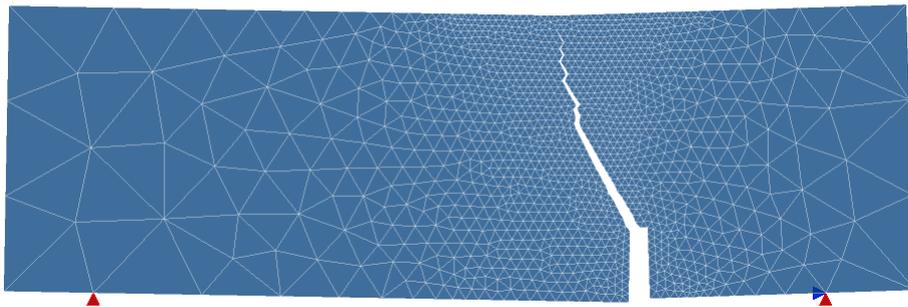


Figura 4.14: Configuração deformada da malha de elementos finitos (Flexão em 3 pontos - Simulação 5).

Outro ponto que pode ser observado nessa simulação é a evolução do dano ao longo de propagação da trinca. Esse processo está ilustrado na Figura 4.15 para a Flexão em 3 pontos - Simulação 5.

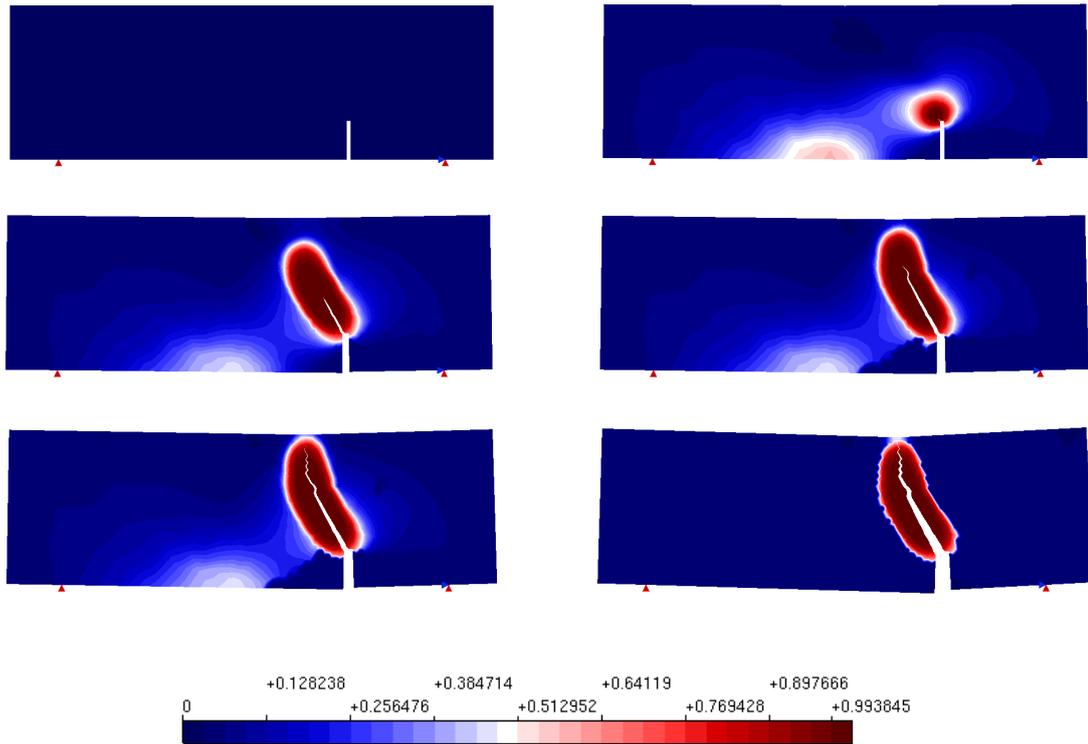


Figura 4.15: Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear da Flexão em 3 pontos - Simulação 5.

4.2.3 Flexão em 3 pontos - erosão por dano

Continuando com a análise da viga sob flexão em 3 pontos, nesta seção serão apresentadas simulações nas quais, além da abertura da trinca, também se habilitou a erosão de elementos cujo valor de dano em todos os pontos internos associados aos nós do elemento finito fosse superior a 0,99. A Flexão em 3 pontos - Simulação 6 e 7 são similares à Flexão em 3 pontos - Simulação 3 e 4, diferenciando-se apenas pela inclusão da erosão de elementos. A Tabela 4.5 resume os parâmetros que diferenciam as simulações citadas.

Tabela 4.5: Comparação entre as simulações com erosão habilitada e desabilitada - Flexão em 3 Pontos - $e = 0$

Flexão em 3 Pontos	Malha	Incremento	Erosão
Simulação 3	(a)	0.005	-
Simulação 4	(b)	0.005	-
Simulação 6	(a)	0.005	Dano(0,99)
Simulação 7	(b)	0.005	Dano(0,99)

Como forma de verificar a influência da erosão, será analisado a Figura 4.16 onde estão apresentadas as trajetórias de equilíbrio da Flexão em 3 pontos - Simulação 3 e 6 e a Figura 4.16 que mostra as trajetórias de equilíbrio da Flexão em 3 pontos - Simulação

4 e 7. Pode-se perceber que a erosão causou pouca influência nos resultados da análise da flexão em três pontos, pois as trajetórias para as simulações com mesmos parâmetros e malha ficaram bem próximas. Para a Flexão em 3 pontos - Simulação 4 e 7 a proximidade entre as curvas da trajetória foi ainda maior do que para as simulações Flexão em 3 pontos - Simulação 3 e 6.

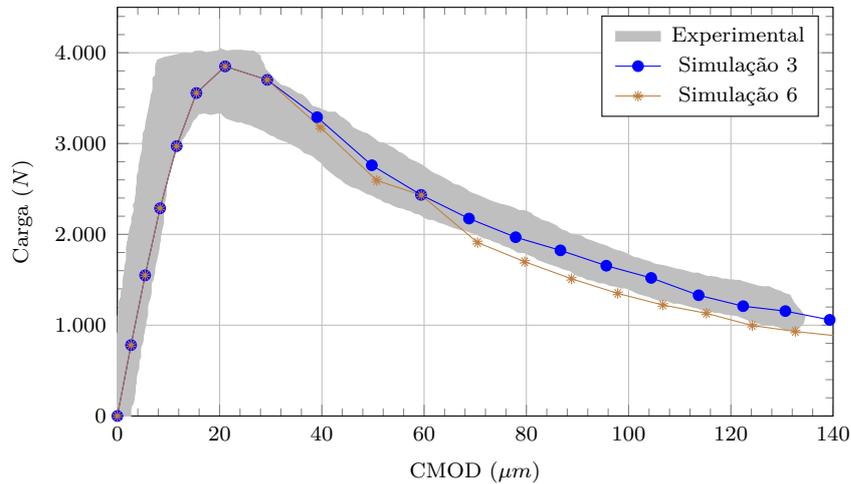


Figura 4.16: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas 3 e 6 da flexão em três pontos.

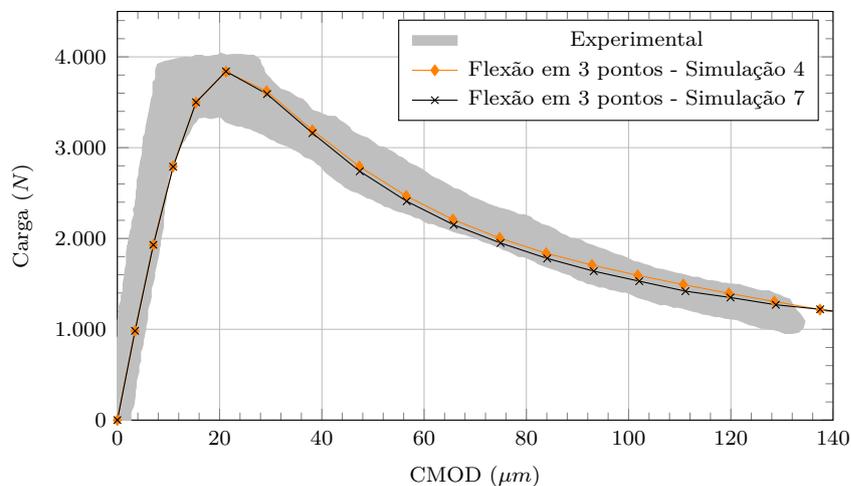


Figura 4.17: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times CMOD obtidas nas simulações numéricas 4 e 7 da flexão em três pontos.

A configuração final da malha de elementos finitos para a Flexão em 3 pontos - Simulação 6 está apresetada na Figura 4.18-a e a configuração deformada na Figura 4.18-b. Pode-se observar que ao longo do caminho da trinca que alguns elementos foram erodidos. Ressalta-se que quanto mais refinada a malha o processo de erosão de elemento é mais eficiente na descrição do caminho da trinca. Para a presente simulação não observou-se diferenças relevantes nos resultados.

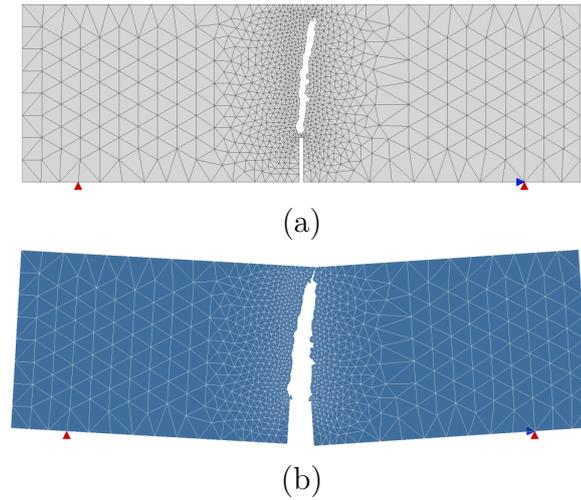


Figura 4.18: Configuração final da malha de elementos finitos na Flexão em 3 pontos - Simulação 6.

4.3 Painel em L - Winkler *et al.* (2004)

Nesta seção será apresentada a simulação numérica do painel em L baseado no experimento apresentado em Winkler *et al.* (2004). Além dos ensaios experimentais, em Winkler *et al.* (2004) simulações numéricas com o modelo constitutivo de fissuração distribuída desenvolvido pelos autores são também realizadas. A geometria deste modelo está mostrada na Figura 4.19 e as propriedades do concreto obtidas a partir do experimentos de Winkler *et al.* (2004) foram: $f_t = 2,7 N/mm^2$; $f_c = 31,0 N/mm^2$, $E_0 = 25850 N/mm^2$, $G_f = 0,065 N/mm^2$ e assumiu-se $\nu = 0,18$. Sendo o comprimento característico aproximadamente de três a cinco vezes o diâmetro do máximo do agregado e sendo esse diâmetro máximo igual a $8 mm$ considerou-se o comprimento característico igual a $28 mm$.

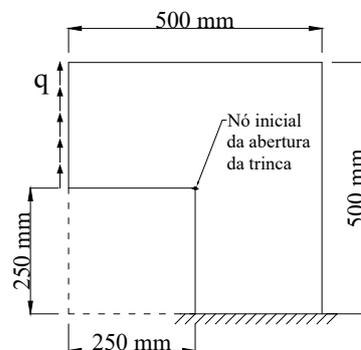


Figura 4.19: Geometria do Painel em L.

Nas simulações realizadas para o painel em L, utilizou-se as malhas mostradas na

Figura 4.20 com diferentes graus de refinamento.

Foram realizadas 3 simulações numéricas que se diferenciam pela malha adotada em cada uma. Essas simulações foram denominadas: Painel em L - Simulação 1, Painel em L - Simulação 2 e Painel em L - Simulação 3 e adotaram, respectivamente as malhas mostradas na Figura 4.19-a, 4.19-b e 4.19-c. Um resumo dos parâmetros que diferenciam as simulações está apresentado na Tabela 4.6.

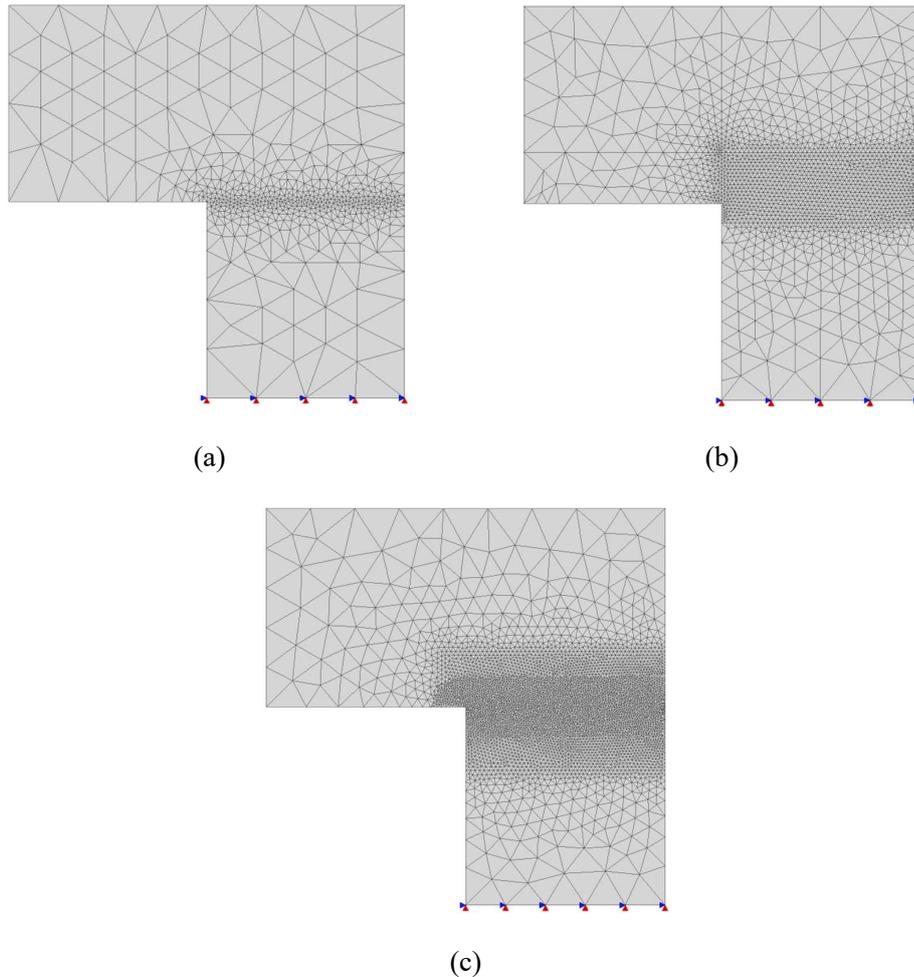


Figura 4.20: Malhas de elementos finitos do Painel em L.

Tabela 4.6: Simulações - Painel em L

Painel em L	Malha
Simulação 1	(a)
Simulação 2	(b)
Simulação 3	(c)

Nas simulações, adotou-se o modelo constitutivo de de Vree *et al.* (1995) e os parâmetros não locais, do material e da lei de dano utilizados encontram-se na Tabela 4.7. Para aber-

tura da trinca foi usado critério de dano igual a 0,95 e a direção de propagação adotada foi a direção do nó de máximo dano.

Tabela 4.7: Parâmetros adotados na simulação numérica do Painel em L

Parâmetros Não Locais		Parâmetros do Material		Parâmetros da Lei de Dano Exponencial (Eq. 2.30)	
l	28 mm	E	25850 N/mm ²	α	0,999
k	2,0	ν	0,18	β	950
				κ_0	$1,35 \times 10^{-4}$

Foi adotado no controle do processo incremental-iterativo da análise não linear do problema um incremento do fator de carga de 0,01 com o método de controle de deslocamentos do nó da extremidade superior esquerda do painel e tolerância para convergência de 1×10^{-4} .

As trajetórias de equilíbrio do ponto de deslocamento vertical máximo (nó da extremidade superior esquerda do painel) em relação à carga aplicada ao problema para as três simulações realizadas encontram-se na Figura 4.21. Os resultados experimentais obtidos por Winkler *et al.* (2004) também estão mostrados na Figura 4.21.

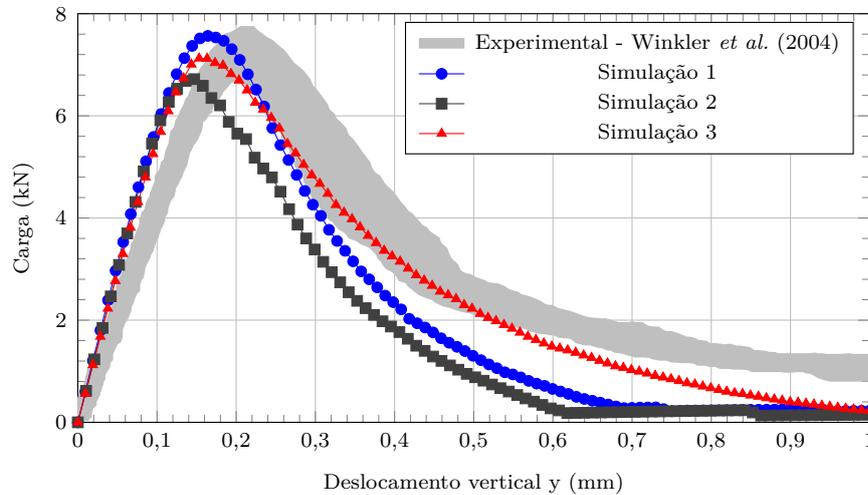


Figura 4.21: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times Deslocamento vertical obtidas nas simulações numéricas do Painel em L.

A análise das três curvas provenientes das simulações numéricas revela que a variação da malha influencia diretamente nos resultados obtidos. Nota-se que todas as simulações exibiram trajetórias com padrões de curva semelhantes aos resultados experimentais. No entanto, destaca-se que a simulação Painel em L - Simulação 3 apresentou a trajetória que mais se aproximou do resultado experimental. Essa simulação empregou a malha representada na Figura 4.19-c, que era a mais refinada na região de propagação da trinca dentre as três adotadas.

Por outro lado, a curva da trajetória da simulação Painel em L - Simulação 1 também exibiu resultados consistentes com o experimento. No entanto, a trajetória da simulação Painel em L - Simulação 2 mostrou uma maior discrepância em relação ao resultado experimental. Essa disparidade com o experimento e os demais resultados está relacionada à regularidade da malha, que influenciou a direção da propagação da trinca.

Dessa forma, é essencial avaliar com cautela o uso de malhas com maior grau de regularidade, a fim de evitar viés na propagação que possa afetar a resposta do modelo.

Além disso, para uma compreensão mais abrangente dos resultados, as configurações deformadas do Painel em L para cada uma das simulações realizadas estão apresentadas na Figura 4.22. É perceptível que as diferenças observadas nas trajetórias das simulações influenciam o padrão de trinca resultante.

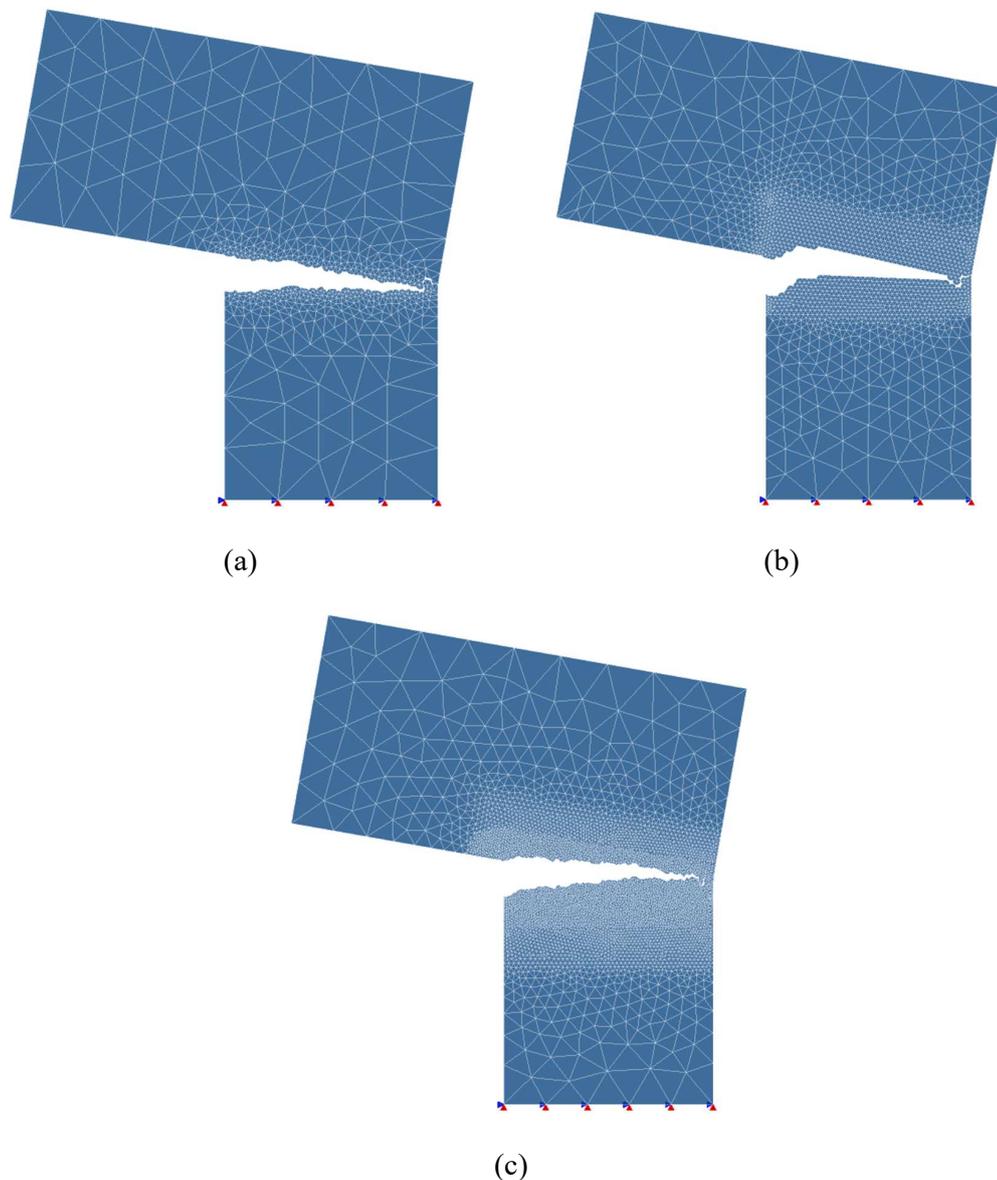


Figura 4.22: Trincas resultantes das simulações numéricas (a) Painel em L - Simulação 1, (b) Painel em L - Simulação 2 e (c) Painel em L - Simulação 3.

Como forma de avaliar o caminho da trinca obtido nas simulações em comparação com o padrão experimental, a Figura 4.23 apresenta as trincas formadas nas três simulações mencionadas. Nota-se que as trincas das simulações Painel em L - Simulação 2 e 3 ficaram bem próximas do resultado experimental. A simulação Painel em L - Simulação 1 teve pouco desvio da direção horizontal, que se deve mais uma vez ao padrão da malha gerada. Nesta simulação, observa-se uma malha mais refinada com elementos distribuídos em uma faixa de menor abrangência que nas demais. Portanto, a definição da região refinada também é um fator que deve ser considerado na discretização do modelo.

Mais além, observa-se que para as três simulações ocorreu um leve desvio, para baixo ou para cima, no final da trinca. Isso ocorreu devido a região de compressão localizada naquela área, forçando assim o desvio na direção da trinca.

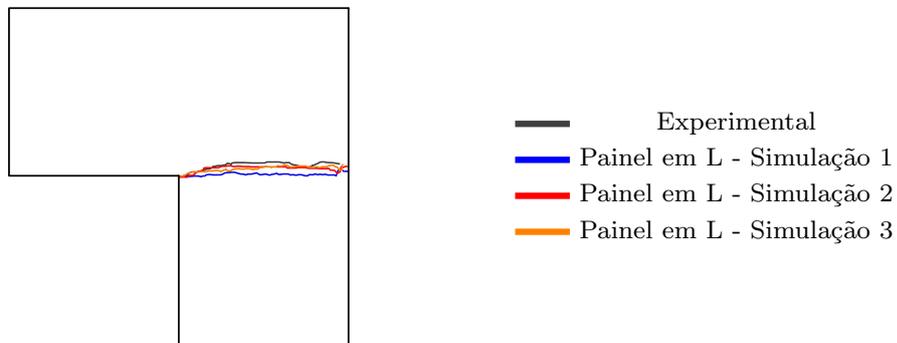


Figura 4.23: Caminhos das trincas obtidos nas simulações numéricas do Painel em L.

Na Figura 4.24 está apresentada a evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Painel em L obtido no Painel em L - Simulação 3.

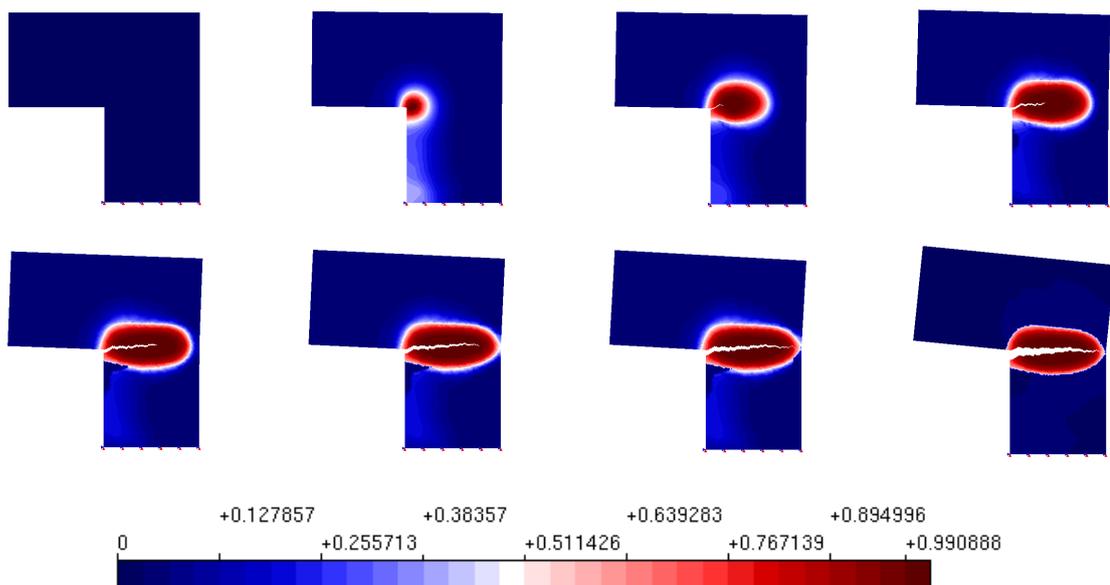


Figura 4.24: Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Painel em L.

Por fim, uma quarta simulação (Painel em L - Simulação 4) foi realizada com os mesmos parâmetros da Painel em L - Simulação 3, habilitando-se a erosão de elementos cujo dano em todos os nós era superior a 0,99. O resultado para essa simulação está apresentado na Figura 4.25.

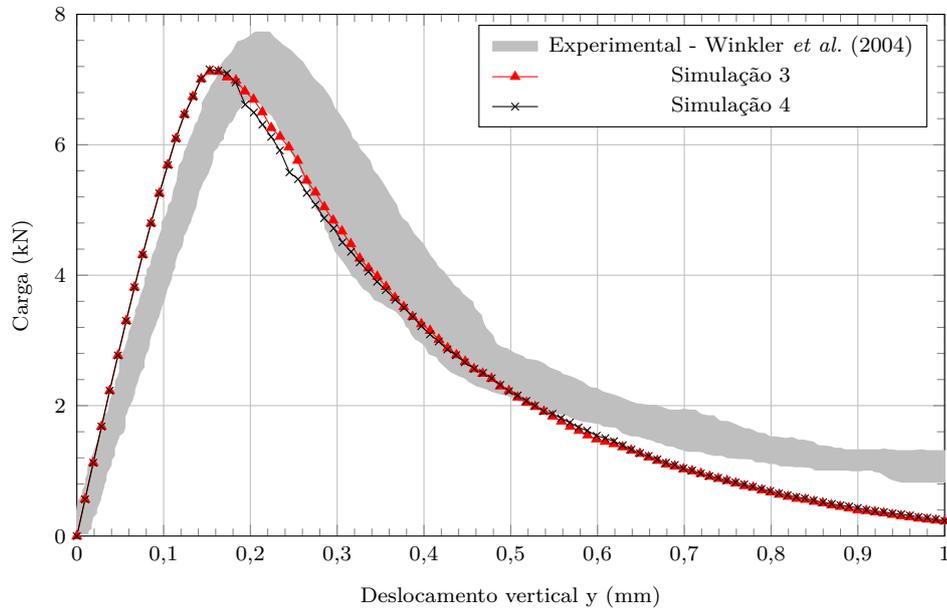


Figura 4.25: Trajetórias de Equilíbrio Tensão \times Deslocamento vertical para as simulações 3 e 4 do Painel em L.

Assim como observado para a flexão em três pontos com erosão (seção 4.2.3), para o painel em L a erosão também exerceu pouca influência sobre o resultado. Nota-se na Figura 4.25 que as trajetórias das simulações Painel em L - Simulação 3 e 4 foram quase coincidentes.

4.4 Cisalhamento em 4 pontos - Arrea e Ingraffea (1982)

Neste exemplo, as simulações numéricas referentes ao ensaio de cisalhamento em 4 pontos foram baseadas no o experimento de Arrea e Ingraffea (1982) e citado por Fang *et al.* (2008).

Neste ensaio, Arrea e Ingraffea (1982) apresentam os resultados em função do CMSD (“*Crack Mouth Sliding Displacement*”), que corresponde ao deslocamento vertical relativo das extremidades da trinca.

A geometria do ensaio e a representação do CMSD estão mostrados na Figura 4.26.

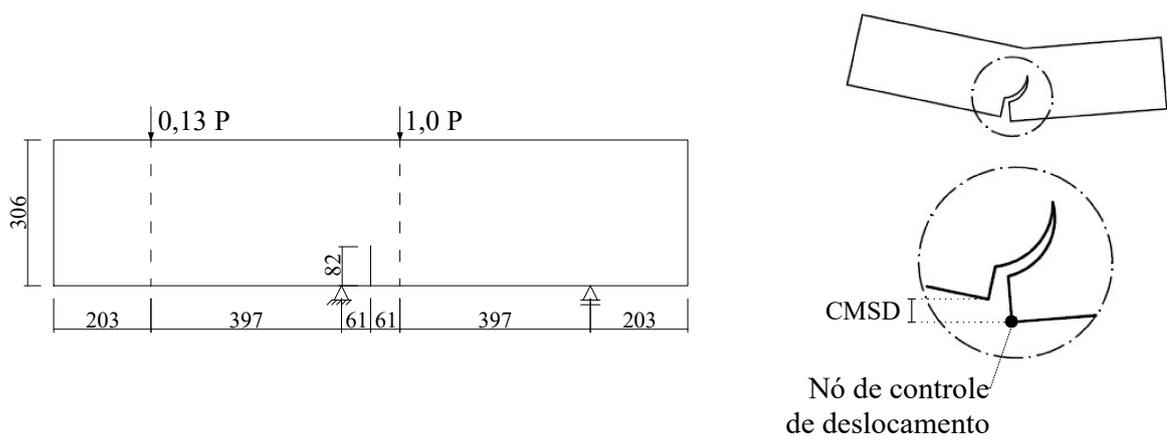


Figura 4.26: Geometria - Cisalhamento em 4 pontos (dimensões em *mm*).

Para realização das simulações, duas malhas de elementos finitos triangulares de três nós foram utilizadas (Figura 4.27). A malha da Figura 4.27-a diferencia-se da malha da Figura 4.27-b pelo grau de refinamento na região de propagação da trinca, sendo a malha (b) a mais refinada.

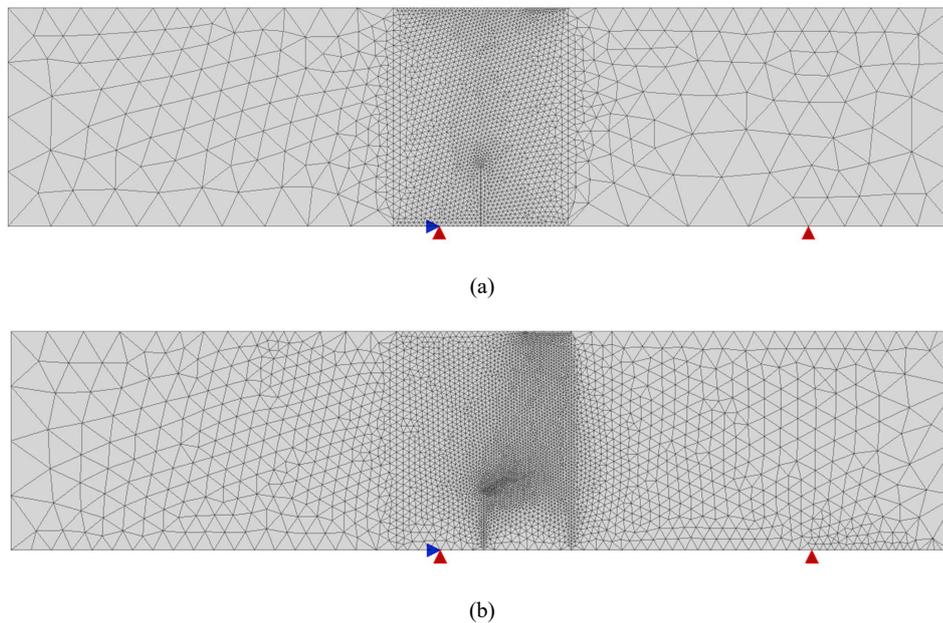


Figura 4.27: Malhas de elementos finitos - Cisalhamento em 4 pontos.

O concreto utilizado possuía as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 24800 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. A energia de fratura do concreto variou de $100,0 \text{ N/m}$ a $140,0 \text{ N/m}$ e a resistência à tração variou de $2,8 \text{ N/mm}^2$ a $4,0 \text{ N/mm}^2$. As informações referentes ao material foram extraídas do estudo de Fang *et al.* (2008).

O modelo constitutivo utilizado foi o modelo de de Vree *et al.* (1995) e os parâmetros

não locais, do material e da lei de dano utilizados encontram-se na tabela 4.8. O critério para abertura da trinca adotado foi dano superior à 0,95 e a direção de propagação adotada foi a direção do nó de máximo dano. O nó pré-definido para a nucleação da trinca está localizado na ponta do entalhe inicial.

Tabela 4.8: Parâmetros adotados na simulação numérica do cisalhamento em 4 pontos

Parâmetros Não Locais		Parâmetros do Material		Parâmetros da Lei de Dano Exponencial (Eq. 2.30)	
l	36 mm	E	24800 N/mm ²	α	0,999
k	8,0	ν	0,2	β	950
				κ_0	1.71×10^{-4}

No controle do processo incremental-iterativo da análise não linear, adotou-se um incremento de $5 \times 10^{-3} mm$, controlando o deslocamento do nó destacado na Figura 4.26. A tolerância para convergência foi de 1×10^{-4} .

A Figura 4.28 mostra a relação carga versus CMSD obtida a partir do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) e das simulações numéricas: Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1 e Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 2. Essas duas simulações diferenciam-se pela malha adotada, a simulação Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 2 utiliza a malha da Figura 4.27-a e a Simulação 2 a malha da Figura 4.27-b. Um resumo dos parâmetros que diferenciam as simulações realizadas está apresentado na Tabela 4.9.

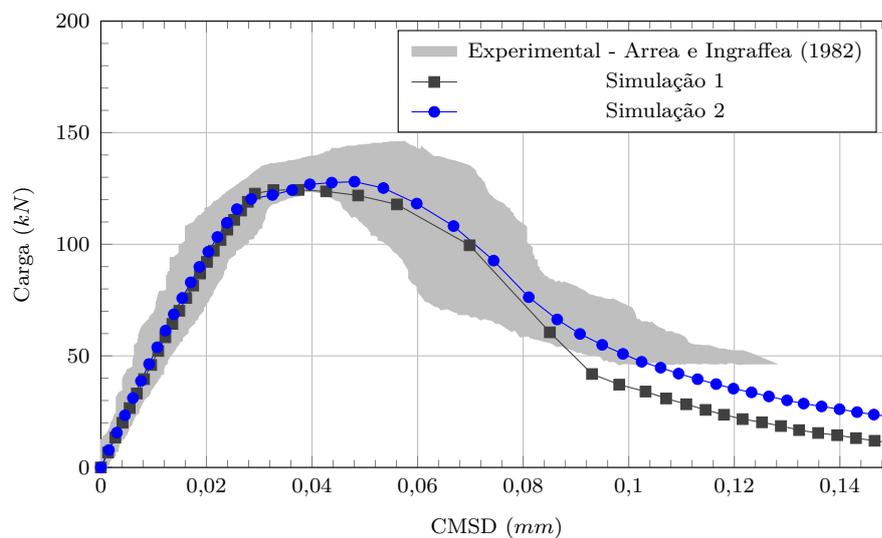


Figura 4.28: Trajetórias de Equilíbrio Carga \times CMSD obtidas nas simulações numéricas do cisalhamento em quatro pontos.

Tabela 4.9: Simulações - Cisalhamento em 4 Pontos

Cisalhamento em 4 Pontos	Malha
Simulação 1	(a)
Simulação 2	(b)

Analisando as curvas da Figura 4.28 é possível concluir que o modelo proposto conseguiu representar os resultados experimentais de forma adequada, descrevendo de maneira precisa a evolução do deslocamento vertical relativo à ponta da trinca. A curva do Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1, nota-se dois saltos entre os pontos no ramo descendente da curva. Esse comportamento é causado devido ao grau de refinamento da malha de elementos finitos, pois, elementos finitos maiores levam à propagação mais rápida da trinca.

A configuração deformada para as duas simulações estão apresentadas na Figura 4.29.

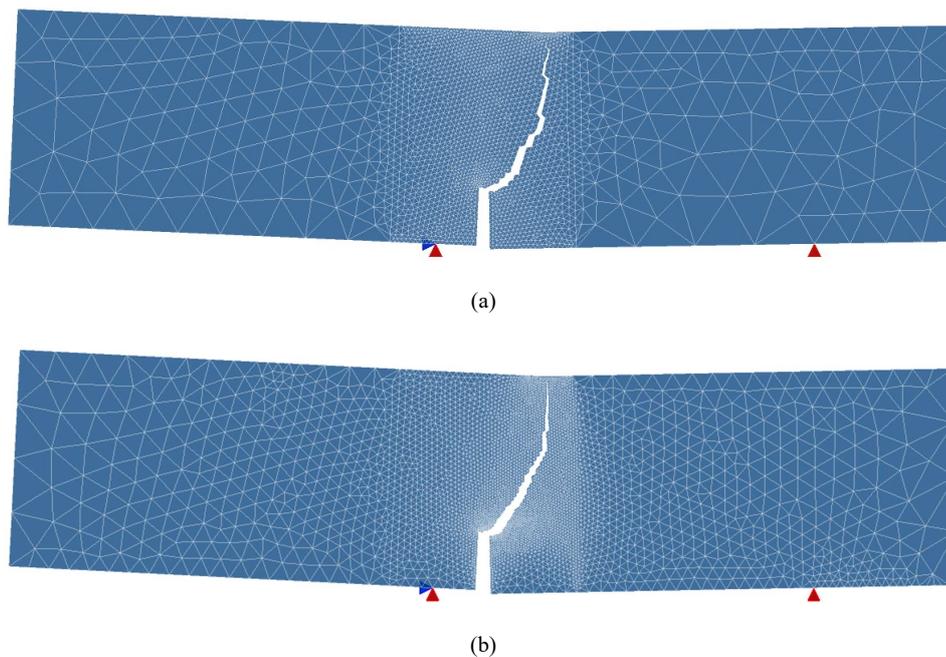


Figura 4.29: Propagação da trinca nas simulações numéricas do cisalhamento em quatro pontos: (a) Simulação 1 e (b) Simulação 2.

Um ponto importante a ser destacado na análise é da trajetória de equilíbrio observada no nó onde a carga central é aplicada em relação ao deslocamento vertical. Embora o experimento realizado por Arrea e Ingraffea (1982) não tenha apresentado resultados específicos para o ponto de aplicação da carga, simulações numéricas desse ensaio presentes na literatura, exibem um significativo fenômeno de *snap-back* ao longo dessa trajetória.

Na Figura 4.30 estão apresentadas as trajetórias de equilíbrio para esse nó do Cisalhamento em 4 Pontos - Simulação 1 e 2 e o resultado numérico obtido por Fang *et al.* (2008). Observa-se que as trajetórias de equilíbrio do nó central de aplicação da carga

das simulações Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1 e 2 não ficaram tão próximas do resultado numérico apresentado por Fang *et al.* (2008). Nota-se um pico da curva abaixo em relação à carga e com um maior valor de deslocamento vertical nas simulações Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1 e 2.

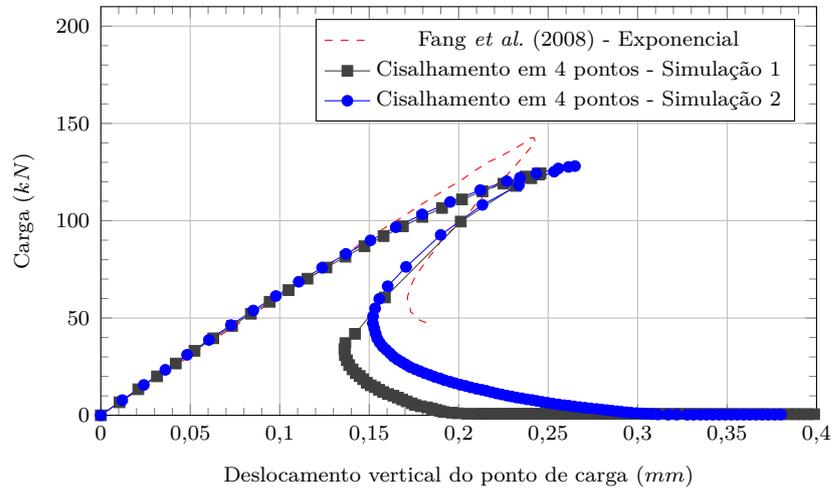


Figura 4.30: Comportamento de *snap-back* simulado numericamente dos experimentos.

Por fim, na Figura 4.31 está apresentada a evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 2.

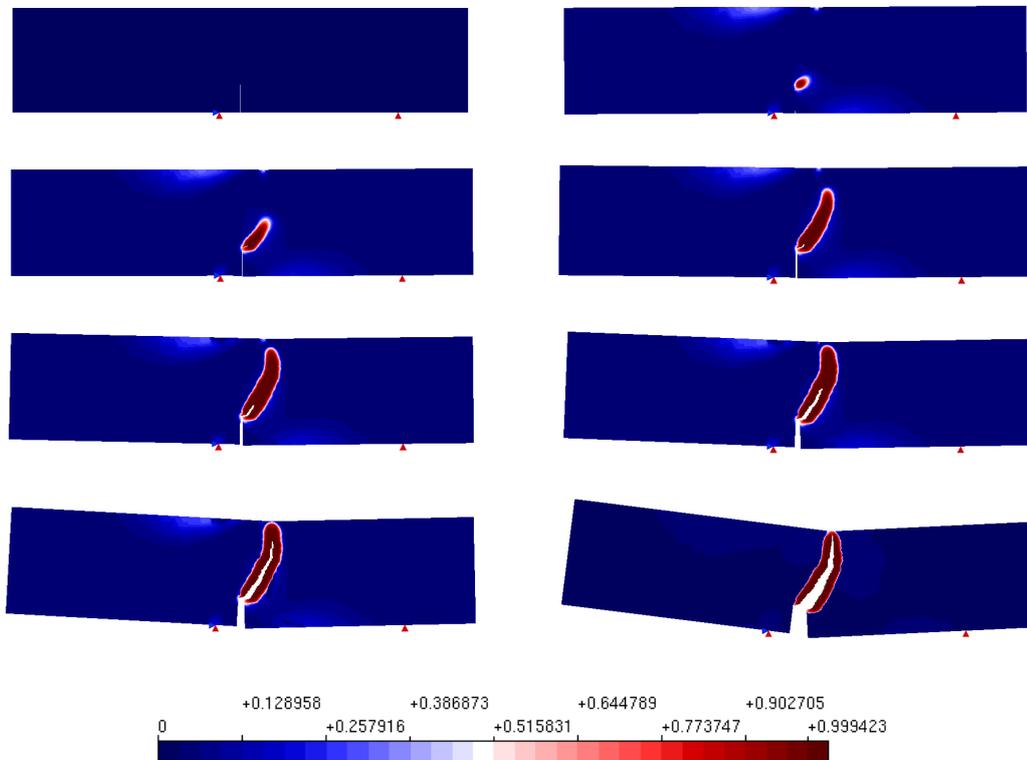


Figura 4.31: Evolução do dano e propagação da trinca ao longo dos passos da análise não linear do Cisalhamento em 4 pontos - Simulação 1.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação um modelo de trinca discreta com redefinição da malha via duplicação nodal baseado em modelos de dano escalar foi apresentado. O modelo foi implementado no sistema computacional de acesso livre e código aberto chamado INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*). Esse sistema é desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, em linguagem de programação Java, seguindo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO).

Para validação do modelo várias simulações numéricas foram realizadas e comparadas com resultados experimentais disponíveis na literatura.

Para o exemplo da tração direta com entalhe simétrico, observou-se um resultado satisfatório e uma concordância entre as trajetórias de equilíbrio numéricas e o resultado experimental, mostrando assim que o modelo é capaz de descrever esse tipo de problema. A partir desse exemplo, notou-se também a influência do incremento de carga na resposta do problema. Observou-se que o algoritmo implementado foi capaz de inserir a trinca na malha de elementos finitos em um modelo submetido a um estado de tração uniforme, que característico deste ensaio.

Os resultados da análise do exemplo de flexão 3 em três pontos com excentricidade da trinca igual a zero também foram satisfatórios e condizentes com o resultado experimental. Mais uma vez, observou-se que o incremento influencia na resposta do problema e notou-se que o maior incremento adotado apresentou uma trajetória de equilíbrio que reproduzia melhor o resultado do experimento. Outro fato observado a partir da análise da flexão em três pontos com excentricidade da trinca igual a zero é que as malhas diferentes exerceram pequena influência para esse exemplo. Para a flexão em três pontos com excentricidade da trinca igual a 50 mm, o resultado obtido aproximou-se do resultado experimental, porém o pico da trajetória de equilíbrio ficou mais elevado do que o pico do experimento.

Para a simulação numérica do painel em L, observou-se que a diferenciação da malha exerceu grande influência no resultado final. A malha cujo grau de refinamento era maior, ou seja, tinha elementos menores na região de propagação da trinca, apresentou resultado mais condizente com o experimental. A malha que era mais regular, cuja propagação da trinca era praticamente horizontal, foi o resultado que mais se afastou do experimental. Observou-se também que o caminho da trinca produzido pelas simulações Painel em L -

Simulação 2 e 3 se aproximaram do padrão da trinca experimental. No caso do Painel L - Simulação 1, a malha pouco refinada embora tenha apresentado uma propagação adequada à solicitação, influenciou na trajetória da trinca fazendo com que a configuração final fosse um pouco diferente do observado experimentalmente. Ainda assim, o algoritmo para inserção da trinca na malha de elementos finitos apresenta resultados satisfatórios.

Por fim, o modelo também apresentou resultados satisfatórios para a simulação numérica do cisalhamento em quatro pontos. Para essa simulação foram adotadas duas malhas cujo grau de refinamento na região de propagação da trinca eram diferentes e, como observado para o painel em L, a malha cujo grau de refinamento era mais elevado forneceu resultados mais apropriados.

Foram apresentados também resultados de simulações numéricas onde a erosão de elementos estava habilitada. No entanto, observou-se que a erosão apresentou pouca influência sobre os resultados obtidos.

Como vantagem do modelo implementado pode-se citar: o processo simples e eficaz de redefinição de malha que é a duplicação nodal, a possibilidade de utilizar diferentes critérios para abertura de trinca e definição da direção de propagação. Embora neste trabalho estejam apresentados resultados apenas o critério de dano crítico para abertura de trinca e as direções do nó de dano máximo e direção da trinca via modelo constitutivo como direções da fissuração, fica como sugestão para trabalhos futuros a validação de outros critérios implementados. Uma limitação do modelo proposto é a definição de qual será o nó inicial de nucleação da trinca.

Diante dos resultados numéricos obtido neste trabalho pode-se concluir que o modelo implementado produz resultados similares aos experimentais, validando assim a proposta deste trabalho.

5.1 Contribuições deste Trabalho

Este trabalho trouxe contribuições significativas para o aprimoramento do núcleo numérico do sistema computacional, através da incorporação de um arcabouço para simulação de trincas discretas com redefinição da malha via duplicação nodal baseado em modelos de dano escalar.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Diante do modelo apresentado e das discussões feitas neste trabalho, os seguintes temas que podem dar continuidade à modelagem implementada são sugeridos:

1. Validação e implementação de outros critérios de abertura e direção da trinca;

2. Estudo e implementação da nucleação automática da trinca, sem a necessidade da escolha do nó de início da trinca.
3. Estudo da influência da erosão no processo de propagação da trinca.

REFERÊNCIAS

- ACI-Committee-446 (1997), Finite element analysis of fracture in concrete structures: state-of-the-art, Technical report, American Concrete Institute.
- Araújo, T. D. P. (1999), Análise elasto-plástica adaptativa de estruturas com trincas, PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Arrea, M. e Ingraffea, A. (1982), Mixed mode crack propagation in mortar and concrete, Technical Report 81-13, Department of Structural Engineering, Cornell University.
- Azevedo, T. O. (2019), Implementação computacional de elementos de interface com elevada razão de aspecto para análise não linear de estruturas de concreto, Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H. (1983), 'Crack band for fracture of concrete', *Matériaux et Constructions* vol. 16, 155–177.
- Bazant, Z. e Planas, J. (1998), *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press, New York.
- Bouchard, P.-O. (2005), Damage and discrete crack propagation modelling: Some results and challenges for 2d and 3d configurations, in 'ICF11 - International Conference on Fracture', Turin, Italy.
- Broek, D. (1986), *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 4a edn, Martinus Nijhoff Publishers, Netherlands.
- Carreira, D. J. e Chu, K.-H. (1985), 'Stress-strain relationship for plain concrete in compression', *American Concrete Institute Journal* vol. 82(6), 797–804.
- Carreira, D. J. e Chu, K.-H. (1986), 'Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension', *American Concrete Institute Journal* vol. 83(1), 21–28.
- Chen, E., Leung, C. K. Y., Tang, S. e Lu, C. (2018), 'Displacement discontinuity method for cohesive crack propagation', *Engineering Fracture Mechanics* pp. 319–330.
- Chen, S., Mitsume, N., Gao, W., Yamada, T., Zang, M. e Yoshimura, S. (2019), 'A nodal-based extrinsic cohesive/contact model for interfacial debonding analyses in composite structures', *Computers & Structures* vol. 215, 80–97.

- Clough, R. W. (1962), The stress distribution of norfolk dam, Technical report, Series 100, Issue 19, Institute of Engineering Research, University of California.
- Cuvilliez, S., Feyel, F., Lorentz, E. e Michel-Ponnelle, S. (2012), ‘A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 237–240, 244–259.
- da Fonseca, F. T. (2008), Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos., Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- de Borst, R. e Gutiérrez, M. A. (1999), ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects’, *International Journal of Fracture* .
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J. (1995), ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’, *Computers & Structures* vol. 55(4), 581–588.
- Einsfeld, R. A. (1997), Simulação Numérica de Fraturamento em Estruturas de Concreto Combinando os Processos Discreto e Distribuído, PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Fang, X.-J., Jin, F. e Yang, Q.-D. (2008), ‘Extended finite-element analysis of fractures in concrete’, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Vol. Engineering and Computational Mechanics* vol. 161, 187–197.
- Fuina, J. S. (2004), Métodos de controle de deformações para análise não linear de estruturas, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Gálvez, J. C., Cervenka, J., Cendón, D. A. e Sauoma, V. (2002), ‘A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete’, *Cement and Concrete Research* vol. 32, 1567–1585.
- García-Álvarez, V. O., Gettu, R. e Carol, I. (2012), ‘Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model’, *Sadhana* vol. 37, 187–205.
- Hilleborg, A., Modéer, M. e Petersson, P.-E. (1976), ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’, *Cement and Concrete Research* vol. 6, 773–782.
- Hordijk, D. A. (1991), Local approach to fatigue of concrete, PhD thesis, Technische University Delft.

- Jirásek, M. (1998), ‘Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches’, *International Journal of Solids and Structures* vol. 35, 4133–4145.
- Jirásek, M. (2004), ‘Non-local damage mechanics with application to concrete’, *Failure, Degradation and Instabilities* pp. 683–707.
- Ladevèze, P. (1983), ‘Sur une théorie de l’endommagement anisotrope’, *Tech. Rep. 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie - Ecole Normale Supérieure*. Citado por de Borst e Gutiérrez (1999).
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L. (1990), *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge. Citado por de Borst e Gutiérrez (1999).
- Liaghat, F., Hematiyan, M., Khosravifard, A. e Rabczuk, T. (2019), ‘A robust meshfree method for analysis of cohesive crack propagation problems’, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*.
- Mazars, J. (1984), Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, PhD thesis, Université Paris, Paris. Citado por Lemaitre (1992) e Lemaitre e Desmorat (2005).
- Mediavilla, J., Peerlings, R. e Geers, M. (2006), ‘A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations’, *Computers and Structures* vol. 84, 604–623.
- Negi, A. e Kuma, S. (2022), ‘A continuous–discontinuous localizing gradient damage framework for failure analysis of quasi-brittle materials’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 390.
- Ngo, D. e Scordelis, A. C. (1967), ‘Finite element analysis of reinforced concrete beams’, *ACI Journal* vol. 64(3), 152–163.
- Nilson, A. H. (1967), Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, PhD thesis, University of California, Berkeley, CA, USA.
- Nilson, A. H. (1968), ‘Nonlinear analysis of reinforced concrete by finite element method’, *ACI Journal* vol. 65(9), 757–766.
- Penna, S. S. (2011), Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto, PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Pitangueira, R. L. S. (1998), Mecânica de estruturas de concreto com inclusão de efeitos de tamanho e heterogeneidade, PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

- Rashid, Y. R. (1968), ‘Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels’, *Nuclear Engineering and Design* vol. 7, 334–344.
- Roth, S.-N., Léger, P. e Soulaïmani, A. (2015), ‘A combined XFEM–damage mechanics approach for concrete crack propagation’, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 283, 923–955.
- Rots, J. G. e Blaauwendraad, J. (1989), ‘Crack models for concrete: Discrete or smeared? fixed or rotating?’, *Heron* .
- Rots, J. G., Nauta, P., Kuster, G. M. A. e Blaauwendraad, J. (1985), ‘Smeared crack approach and fracture localization in concrete’, *Heron* vol. 30, 1–48.
- Shah, S. P. (1997), ‘An overview of the fracture mechanics of concrete’, *Cement, Concrete, and Aggregates, CCAGDP* pp. 79–86.
- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C. (1995), *Fracture mechanics of concrete: applications of fracture mechanics to concrete, rock and other quasi-brittle materials*, John & Wiley Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012.
- Simone, A., Wells, G. N. e Sluys, L. J. (2003), ‘From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model’, *Computers & Methods in Applied Mechanics & Engineering* vol. 192, 4581–4607.
- Souza, P. L. F. B. (2016), Modelo de dano ortotrópico não local aplicado à regularização de resultados na análise fisicamente não linear, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Suidan, M. e Schnobrich, W. C. (1973), ‘Finite element analysis of reinforced concrete’, *Journal of the structural division, ASCE* pp. 2109–2121.
- Tudjono, S., Han, A. L. e As’ad, S. (2016), ‘Reinforced concrete finite element modeling based on the discrete crack approach’, *Civil Engineering Dimension* vol. 18(2).
- van Mier, J. G. M. (1995), ‘Fracture mechanics of concrete: will applications start to emerge?’, *Heron* vol. 40, 147–162.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H. (2004), ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* vol. 28, 797–819.
- Wolff, K. P. (2010), Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem), Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Xie, M. (1995), Finite element modelling of discrete crack propagation, PhD thesis, University of New Mexico, USA.
- Xie, M. e Gerstle, W. H. (1995), 'Energy-based cohesive crack propagation modelling', *Journal of Engineering Mechanics* pp. 1349–1458.
- Yang, Z. e Chen, J. (2004), 'Fully automatic modelling of cohesive discrete crack propagation in concrete beams using local arc-length methods', *International Journal of Solids and Structures* vol. 41, 245–261.
- Yang, Z. e Chen, J. (2005), 'Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams', *Engineering Fracture Mechanics* vol. 72, 2280–2297.