

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós-Graduação em Física

João Guilherme Lara Condé

**Momentum de um átomo absorvendo luz em um gás e uso de memória quântica
para gerar fótons com modos espaciais controlados**

Belo Horizonte
2023

João Guilherme Lara Condé

Momentum de um átomo absorvendo luz em um gás e uso de memória quântica para gerar fótons com modos espaciais controlados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C745m Condé, João Guilherme Lara.

Momentum de um átomo absorvendo luz em um gás e uso de memória quântica para gerar fótons com modos espaciais controlados / João Guilherme Lara Condé. – 2023.
89f. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 76-85.

1. Óptica quântica. 2. Informação quântica. 3. Eletromagnetismo.
4. Átomos. I. Título. II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 420ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR JOÃO GUILHERME LARA CONDÉ orientado pelo professor Pablo Lima Saldanha, para obtenção do grau de **DOCTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 8 horas e 30 minutos de quinze de setembro de dois mil e vinte e três reuniu-se, por videoconferência, a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Leonardo Teixeira Neves** (Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG), **Daniel Felinto Pires Barbosa** (Departamento de Física/UFPE) e **Nelson Guilherme Castelli Astrath** (Departamento de Física/UEM) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **JOÃO GUILHERME LARA CONDÉ** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**Momentum de um átomo absorvendo luz em um gás e uso de memória quântica para gerar fótons com modos espaciais controlados**". O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 15 de setembro de 2023.

Prof. Pablo Lima Saldanha
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Leonardo Teixeira Neves
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Prof. Daniel Felinto Pires Barbosa
Departamento de Física/UFPE

Prof. Nelson Guilherme Castelli Astrath
Departamento de Física/UEM

Candidato: João Guilherme Lara Condé



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 15/09/2023, às 13:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Felinto Pires Barbosa, Usuário Externo**, em 15/09/2023, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson Guilherme Castelli Astrath, Usuário Externo**, em 15/09/2023, às 14:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 15/09/2023, às 14:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Servidor(a)**, em 15/09/2023, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Guilherme Lara Condé, Usuário Externo**, em 15/09/2023, às 15:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?aca=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2630294** e o código CRC **3EA73C60**.

Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro às agências de fomento CNPq e CAPES.

Resumo

Nessa tese tratamos de dois trabalhos distintos, ambos relacionados a fenômenos de interação entre luz e átomos. O primeiro trabalho tem como objetivo avaliar a troca de momentum e energia entre um pulso de onda plana e um átomo imerso em um meio material através de um modelo microscópico clássico. Comparamos nosso resultado com as formulações de Abraham e Minkowski para o momentum de uma onda eletromagnética se propagando em um meio material. A formulação de Abraham prevê que o momentum da onda deve ser $(1/n)E/c$, em que E é a sua energia, c a velocidade da luz no vácuo e n o índice de refração do meio. Já a formulação de Minkowski prevê um momentum igual a nE/c . Aqui avaliamos o momentum recebido por um átomo por uma onda eletromagnética em um meio dielétrico linear não-magnético, não-dispersivo e com índice de refração próximo de 1. Tratamos o átomo classicamente como um oscilador harmônico. Tratamos o meio microscopicamente como uma coleção de dipolos elétricos que geram uma segunda onda eletromagnética que se superpõe com a onda incidente. Mostramos que a superposição dessas ondas transfere para o átomo um momentum proporcional ao índice de refração, mas menor que o momento de Minkowski.

No segundo trabalho exploramos a interação entre luz e átomos frios, e como ela pode ser usada para armazenar informação quântica e manipular estados quânticos. Estados quânticos codificados em luz são amplamente utilizados em aplicações de computação e telecomunicação quântica por sua velocidade rápida de transmissão em meios transparentes, apresentar pouco ruído e alta coerência. Um grau de liberdade útil para essa tarefa é o modo espacial. Luz, por outro lado, é difícil de se armazenar por grandes períodos de tempo, o que levou ao desenvolvimento de protocolos de transferência de informação da luz para átomos frios para possibilitar o armazenamento. Entre esses protocolos, destacamos o esquema DLCZ para memórias quânticas. Utilizando os recursos tratados, propomos um protocolo original que permite criar qudits codificados em modos Hermite-Gaussianos ou Laguerre-Gaussianos de fótons únicos a partir de feixes clássicos interagindo com memórias quânticas. Mostramos como a informação clássica codificada em modos espaciais de um campo eletromagnético clássico pode ser transformada em informação quântica. Fazemos o tratamento teórico quântico que demonstra quantitativamente a validade do nosso protocolo. Mostramos as condições necessárias e o regime em que um fóton pode ser produzido com o mesmo modo espacial de um feixe clássico com certa fidelidade. Também propomos uma maneira de simular o emaranhamento produzido pelo decaimento espontâneo e a emissão e detecção de um fóton por um de dois átomos inicialmente excitados com esse esquema.

Palavras-chave: Óptica quântica; informação quântica; protocolo DLCZ; debate Abraham-Minkowski; fundamentos de física quântica; eletromagnetismo.

Abstract

In this thesis we deal with two distinct works, both related to interaction phenomena between light and atoms. The first work aims to evaluate the exchange of momentum and energy between a plane wave pulse and an atom immersed in a material medium through a classical microscopic model. We compare our result with Abraham and Minkowski's formulations for the momentum of an electromagnetic wave propagating in a material medium. Abraham's formulation predicts that the wave's momentum must be $(1/n)E/c$, where E is its energy, c the speed of light in vacuum, and n the refractive index of the wave. Minkowski's formulation predicts a momentum equal to nE/c . Here we evaluate the momentum received by an atom by an electromagnetic wave in a non-magnetic, non-dispersive linear dielectric medium with refractive index close to 1. We treat the atom classically as a harmonic oscillator. We treat the medium microscopically as a collection of electric dipoles that generate a second electromagnetic wave that overlaps with the incident wave. We show that the superposition of these waves transfers to the atom a momentum proportional to the refractive index, but smaller than the Minkowski moment.

In the second work we explore the interaction between light and cold atoms, and how it can be used to store quantum information and manipulate quantum states. Light-encoded quantum states are widely used in quantum computing and telecommunication applications due to their fast transmission speed in transparent media, low noise and high coherence. A useful degree of freedom for this task is spatial mode. Light, on the other hand, is difficult to store for long periods of time, which led to the development of protocols for transferring information from light to cold atoms, to make storage possible. Among these protocols, we highlight the DLCZ scheme for quantum memories. Using the treated resources, we propose an original protocol that allows the creation of qudits encoded in Hermite-Gaussian or Laguerre-Gaussian modes of single photons from classical beams interacting with quantum memories. We show how classical information encoded in spatial modes of a classical electromagnetic field can be transformed into quantum information. We perform the quantum theoretical treatment that quantitatively demonstrates the validity of our protocol. We show the necessary conditions and regime in which a photon can be produced with the same spatial mode as a classical beam with certain fidelity. We also propose a way to simulate the entanglement produced by spontaneous decay and the emission and detection of a photon by one of two initially excited atoms with this scheme.

Keywords: Quantum optics; quantum information; DLCZ protocol; Abraham-Minkowski debate; foundations of quantum physics; electromagnetism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
I	MOMENTUM DE UM ÁTOMO ABSORVENDO LUZ EM UM MEIO GASOSO E O DEBATE ABRAHAM-MINKOWSKI	15
2	O DEBATE ABRAHAM-MINKOWSKI	16
2.1	Argumentos que apoiam cada formulação	16
2.2	Momentum canônico e cinético	20
2.3	Resolução	22
3	MOMENTUM E ENERGIA ABSORVIDOS POR UM ÁTOMO EM UM MEIO MATERIAL	23
3.1	Modelo microscópico para um meio gasoso	23
3.1.1	Parâmetros e validade	26
3.1.2	Verificação macroscópica	28
3.1.3	Feixe refletido	31
3.2	Momentum e energia transferidos para o átomo absorvedor	34
3.3	Discussão	37
II	PREPARAÇÃO DE INFORMAÇÃO QUÂNTICA COM MODOS ESPACIAIS DE FÓTONS ÚNICOS	38
4	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	39
5	FEIXES ELETROMAGNÉTICOS	43
5.1	Modos Gaussianos	43
5.2	Modos Hermite-Gaussianos	44
5.3	Modos Laguerre-Gaussianos	46
6	MEMÓRIAS QUÂNTICAS	49
6.1	Esquema DLCZ	49
6.1.1	Protocolo DLCZ e superradiância	50
7	CONVERTENDO UM MODO DE LUZ CLÁSSICA EM UM MODO QUÂNTICO	54

7.1	Transferência de um estado de um feixe de luz clássico para um feixe quântico	54
7.1.1	Teoria de preparação dos fótons	54
7.1.2	Transferência do estado do modo espacial	56
7.2	Transferência e adição de momentum angular	59
8	EMARANHAMENTO TESTEMUNHADO POR PADRÃO DE INTERFERÊNCIA	62
8.1	Preparação	64
8.2	Deteccção	66
8.3	Aproximações	67
8.4	Abordagem realista	68
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
	REFERÊNCIAS	73
	 APÊNDICES	 84
	APÊNDICE A – CAMPO ELÉTRICO DE UMA ESFERA HOMOGENEAMENTE POLARIZADA	85

1 Introdução

Átomos, quando estimulados pelo campo eletromagnético da luz, podem absorver energia. Essa energia pode então ser usada na emissão de radiação vinda do átomo. Esse processo possui descrições clássica e quântica, ambas abordadas nesse trabalho. Esse tipo de interação no vácuo, i.e., quando só há um átomo envolvido, é extensivamente tratado na literatura e na maior parte incontroverso. Estamos interessados aqui em situação em que um número grande de átomos é iluminado por um feixe externo de luz e todos eles tem a possibilidade de interagir com ele. Aqui apresentamos dois trabalhos distintos. O primeiro deles diz respeito ao debate Abraham-Minkowski, que trata da troca de momentum e energia entre um átomo imerso em um meio material e um feixe de luz. Através de uma modelagem microscópica e cálculo numérico mostramos que a razão média entre o momentum e a energia absorvida é proporcional ao índice de refração, porém por um fator menor do que previsto usando a expressão de Minkowski. No segundo, tratamos das propriedades espaciais da frente de onda da luz emitida por átomos de uma nuvem de átomos frios. Discutimos como essas propriedades surgem de um fenômeno quântico de interferência entre os átomos. Usamos essa propriedade para propor um protocolo de conversão de informação codificada em um modo espacial de um feixe de luz clássico para o modo espacial de um fóton.

O primeiro trabalho, apresentado na parte I, tem como objetivo avaliar a troca de momentum e energia entre um pulso de onda plana e um átomo imerso em um meio material através de um modelo microscópico clássico. Comparamos nosso resultado com as formulações de Abraham [1] e Minkowski [2] para o momentum de uma onda eletromagnética se propagando em um meio material.

A expressão matemática para o momentum linear da luz no vácuo é bem estabelecida desde o final do século XIX. No entanto, o momentum da luz em um meio material é um tópico ainda em debate [3–7]. Várias formulações diferentes foram feitas, frequentemente contraditórias em algum sentido [4]. As duas expressões mais influentes são as formuladas por Abraham e Minkowski.

Abraham previa que a densidade de momentum de uma onda eletromagnética seria $(1/c^2)\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, enquanto Minkowski previa que seria $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$. Aqui, \mathbf{E} é o campo elétrico médio e \mathbf{B} é o campo magnético médio. As grandezas *deslocamento elétrico* médio \mathbf{D} e o *campo magnético auxiliar* médio \mathbf{H} são definidas como [8]

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}, \quad (1.1)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. As grandezas \mathbf{P} e \mathbf{M} , chamadas respectivamente de polarização e magnetização, são respostas

do meio à presença dos campos elétrico e magnético. Para meios contínuos, os campos em qualquer posição do espaço são iguais aos campos médios. Para meios granulares, que serão tratados mais tarde, isso não é mais verdade. Embora os campos médios em uma região muito menor que o comprimento de onda da luz e com muitos átomos ainda sejam iguais aos campos em um meio contínuo, a forma como esses campos variam no espaço gera uma distinção relevante, como será visto no capítulo 3.

Para um meio dielétrico e diamagnético linear, o meio responde na forma

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

em que χ_e e χ_m são grandezas adimensionais chamadas respectivamente de susceptibilidade elétrica e susceptibilidade magnética do meio. Isso implica em

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}, \quad (1.3)$$

onde definimos $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ e $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$.

Em um meio material linear sem dispersão, a densidade de energia u de uma onda eletromagnética é dada por $u = (1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ [9]. Usando o fato de que o índice de refração n se relaciona com os parâmetros elétricos e magnéticos do meio através da expressão $n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$, e que a velocidade da luz do vácuo c é dada por $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, podemos reescrever a densidade de energia como $u = (\epsilon/2)[|\mathbf{E}|^2 + (c^2/n^2)|\mathbf{B}|^2]$. Tendo também em mente a relação entre os módulos dos campos $|\mathbf{B}|/|\mathbf{E}| = n/c$, a densidade de energia é reduzida a simplesmente $u = \epsilon|\mathbf{E}|^2$.

Comparemos agora esse valor com o módulo da densidade de momentum para cada uma das definições. A definição de Abraham em meios lineares pode ser escrita como

$$\mathcal{P}_{Abr} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu}\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \frac{c^2\epsilon}{n^2}\mathbf{B}). \quad (1.4)$$

Como $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, o produto vetorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ pode ser reescrito como $|\mathbf{E}||\mathbf{B}|\mathbf{k}$, em que \mathbf{k} é a direção de propagação da onda. Assim,

$$\mathcal{P}_{Abr} = \frac{\epsilon}{nc}|\mathbf{E}|^2. \quad (1.5)$$

A definição de Minkowski, por outro lado, pode ser escrita como

$$\mathcal{P}_{Min} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.6)$$

Usando os mesmos argumentos, é fácil ver que

$$\mathcal{P}_{Min} = \frac{n\epsilon}{c}|\mathbf{E}|^2. \quad (1.7)$$

Isso torna evidente a diferença na dependência no índice de refração entre cada uma das definições. O módulo do momentum de Abraham dividido pela densidade de energia é igual a

$$\frac{\mathcal{P}_{Abr}}{u} = \frac{1}{nc} \quad (1.8)$$

enquanto o de Minkowski é

$$\frac{\mathcal{P}_{Min}}{u} = \frac{n}{c}. \quad (1.9)$$

Isso implica que, para meios lineares, o momentum previsto por Abraham seria inversamente proporcional ao índice de refração do meio, enquanto o de Minkowski seria diretamente proporcional.

Vários trabalhos experimentais nas últimas décadas foram dedicados a determinar qual expressão é a descrição correta da densidade de momentum da luz [10–15]. No entanto, ao mesmo tempo, entendeu-se que muitas formulações diferentes para eletrodinâmica de meios contínuos, com diferentes tensores de energia-momentum e diferentes expressões para a densidade de momentum eletromagnético, levam às mesmas previsões experimentais quando o tensor de energia-momentum do material apropriado é levado em conta [4, 16]. Recentemente, argumentou-se que a expressão de Abraham está associada à densidade de momentum eletromagnético cinético e a de Minkowski à densidade de momentum eletromagnético canônico [17]. Outras expressões também carregam importância física significativa [4, 18–26], como a densidade de momentum $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que é compatível com a conservação do momentum em diversas situações quando a parte material do momentum é calculada empregando a força de Lorentz [23, 24]. Depois de mais de 100 anos, o debate Abraham-Minkowski ainda é um tema de interesse, com trabalhos teóricos [25–31] e experimentais [32–35] sendo publicados para esclarecer diferentes aspectos do momentum da luz em um meio. Em particular, um trabalho de Campbell *et al.* [32] mostrou que o momentum transferido da luz para um átomo de um condensado de Bose-Einstein é proporcional a n , conforme previsto pela expressão de Minkowski.

No capítulo 2, tratamos argumentos e experimentos que corroboram a validade de cada uma dessas duas principais formulações. No capítulo 3, apresentamos os primeiros resultados originais dessa tese. Nele avaliamos teoricamente o momentum recebido por um átomo vindo de uma onda eletromagnética em um meio dielétrico linear não-magnético e não-dispersivo. Tratamos o átomo classicamente como um oscilador harmônico. Tratamos o meio como uma coleção de dipolos elétricos que geram uma segunda onda eletromagnética que se superpõe com a onda incidente. Mostramos que a superposição dessas ondas transfere para o átomo um momentum proporcional a n , porém inferior à formulação de Minkowski.

No segundo trabalho, apresentado na parte II, exploramos a interação entre luz e átomos frios, e como ela pode ser usada para armazenar informação quântica e produzir estados quânticos.

Características de sistemas quânticos que não são presentes em sistemas clássicos, como o emaranhamento, podem ser usadas como um recurso para construir tecnologias que não são possíveis sem o uso delas. Já é estabelecido na literatura que tecnologias

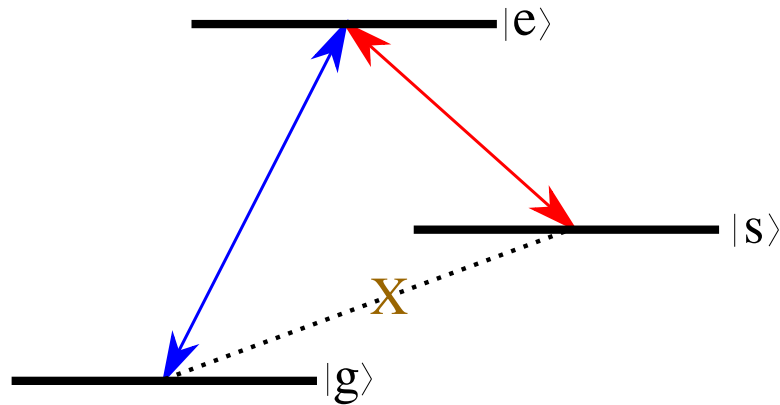


Figura 1 – Representação de um sistema atômico de três níveis com configuração λ . Transições de dipolo $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ e $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$ podem ser induzidas pela interação com a luz. Decaimentos $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ e $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$ podem ocorrer com a emissão de um fóton. Transições $|g\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ de dipolo são proibidas.

como sensores quânticos e computadores quânticos apresentam avanços em relação às tecnologias anteriores [36, 37]. Com o intuito de desenvolver essas aplicações, estados quânticos codificados em luz são amplamente utilizados por sua velocidade rápida de transmissão em meios transparentes, apresentar pouco ruído e alta correlação [38]. Luz, por outro lado, é difícil de se armazenar por grandes períodos de tempo. Isso levou à necessidade do desenvolvimento de memórias quânticas, dispositivos que podem armazenar um fóton e recriar seu estado quântico [39].

Diversos tipos de tecnologia são utilizadas no desenvolvimento de memórias quânticas, como sólidos dopados com íons de terras raras [39, 40], centros de vacância em diamantes [41, 42] e vapores alcalinos [43, 44]. Nessa tese, destacamos protocolos de transferência de informação da luz para átomos frios [45–48]. Entre esses protocolos, destacamos o esquema DLCZ [48].

Nesse protocolo são utilizados átomos com três níveis relevantes; um excitado $|e\rangle$ e dois fundamentais $|g\rangle$ e $|s\rangle$. Os átomos tem uma configuração lambda, i.e., transições de dipolo elétrico podem ser estimuladas entre os estados fundamentais e o estado excitado, mas não entre os estados fundamentais, como representado na figura 1. Inicialmente, todos átomos se encontram no estado fundamental $|g\rangle$ e o campo eletromagnético quântico se encontra no estado de vácuo. O processo é dividido em duas etapas, a etapa de *escrita* e a etapa de *leitura*. Durante a etapa de escrita, um laser rotulado *laser de escrita* passa pela nuvem atômica induzindo uma transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ em um dos átomos da nuvem com a emissão de um fóton que é detectado em um modo específico, definindo assim o estado quântico da nuvem atômica. Há uma superposição quântica de qual átomo ficou no estado $|s\rangle$. A nuvem permanece nesse estado até a segunda etapa, quando o *laser de leitura* estimula o átomo excitado da nuvem de volta para o estado inicial. Quando isso

acontece, existe a emissão de um fóton que carrega informação sobre o estado quântico da nuvem de átomos. O fato desse fóton poder ser removido da nuvem atômica sob demanda caracteriza o sistema como memória.

No capítulo 4, tratamos a quantização do campo eletromagnético e interações entre átomos e luz. No capítulo 5, tratamos sobre feixes paraxiais. No capítulo 6, discutimos memórias quânticas, em especial o esquema DLCZ.

No capítulo 7 apresentamos mais resultados originais dessa tese. Utilizando os recursos tratados, propomos um protocolo original que permite criar qudits codificados em modos Hermite-Gaussianos ou Laguerre-Gaussianos de fótons únicos a partir de feixes clássicos. Mostramos como a informação codificada em modos espaciais de um campo eletromagnético clássico pode ser transformada em informação quântica. Fazemos o tratamento teórico quântico que demonstra quantitativamente a validade do nosso protocolo. Mostramos as condições necessárias e o regime em que um fóton pode ser produzido com o mesmo modo espacial de um feixe clássico com certa fidelidade. Esse tratamento é fundamental para o desenvolvimento de uma proposta experimental. Ainda no capítulo 7, estendemos também a ideia para estabelecer um protocolo de adição de momentum angular. Discutimos a viabilidade de se implementar os protocolos propostos com tecnologia atual.

No capítulo 8, usamos os mesmos recursos abordados no capítulo 7 para propor uma maneira de simular o emaranhamento produzido pelo decaimento espontâneo e a emissão e detecção de um fóton por um de dois átomos inicialmente excitados com esse esquema.

Parte I

Momentum de um átomo absorvendo luz em
um meio gasoso e o debate
Abraham-Minkowski

2 O Debate Abraham-Minkowski

A formulação de Abraham prevê que a razão entre o momentum e a energia de um pulso de luz em um meio é proporcional a $1/n$, enquanto que a de Minkowski prevê uma razão proporcional a n . Nesse capítulo, tratamos aspectos relevantes do debate Abraham-Minkowski sobre o momentum da luz em um meio material, tais como argumentos que apoiam cada formulação, e o entendimento atual do debate.

2.1 Argumentos que apoiam cada formulação

Ambas as formulações são fundamentadas por argumentos razoáveis. O experimento de pensamento chamado de “caixa de Einstein” [49, 50] evidencia o mérito da formulação de Abraham [17, 22, 51]. Ele é baseado no fato de que o centro de massa-energia de um sistema isolado deve se propagar com velocidade constante em um referencial inercial. Considere um fóton que atravessa uma “caixa” transparente de massa M , comprimento L e índice de refração n . Imaginamos que existe uma película antirreflexiva que elimina a necessidade de tratar qualquer componente refletida da luz. Em um referencial em que o objeto se encontra em repouso antes e depois de interagir com o feixe de luz, a conservação do momentum unidimensional na direção de propagação do fóton nos dá

$$\hbar k = \frac{\hbar\omega}{c} = Mv + \mathcal{P}_f, \quad (2.1)$$

em que $\hbar k$ é o momentum inicial do fóton no vácuo antes de atravessar o objeto e v é a velocidade da caixa enquanto a luz se propaga por ela e \mathcal{P}_f é o momentum do fóton dentro da caixa. A velocidade v pode ser escrita em termos do deslocamento total da caixa e o tempo total que a luz passa dentro dela através da expressão $v = \Delta d_c/t = c\Delta d_c/nL$, fazendo assim que possamos reescrever a conservação de momentum como

$$\mathcal{P}_f = \frac{\hbar\omega}{c} - M\frac{c\Delta d_c}{nL}. \quad (2.2)$$

A posição do centro de massa-energia do sistema é independente da interação entre o feixe e a caixa, como visto na figura 2. Isso é, o deslocamento da caixa devido à interação com o feixe deve ser equivalente ao deslocamento do feixe, ou seja

$$Mc^2\Delta d_c = \hbar\omega\Delta d_f. \quad (2.3)$$

O deslocamento total do fóton $\Delta d_f = c\Delta t = L(n-1)$ pode ser facilmente inferido a partir da diferença temporal $\Delta t = Ln/c - L/c = L(n-1)/c$ gasta pelo fóton para percorrer uma distância L dentro ou fora da caixa. Substituindo isso na equação 2.3, a conservação da

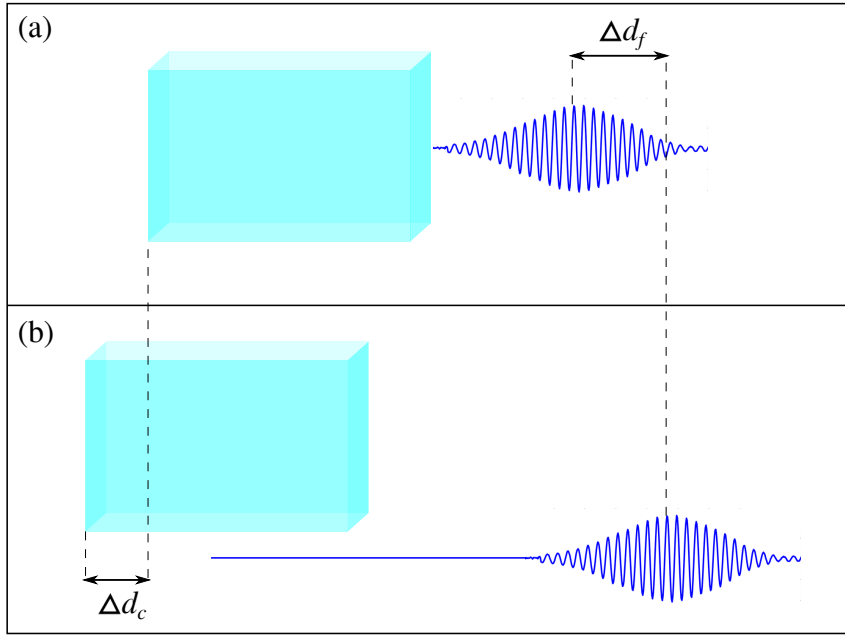


Figura 2 – Diferença entre a posição da luz em duas diferentes situações: (a) A luz atravessa o objeto com índice de refração n ; (b) A luz se propaga apenas pelo vácuo. A invariância da posição do centro de massa-energia requer que se a posição da luz foi deslocada na direção de propagação devido à interação com o meio, também deve haver um deslocamento do meio em si.

posição do centro de massa-energia torna-se

$$\Delta d_c = \frac{\hbar\omega(n-1)L}{Mc^2}. \quad (2.4)$$

Compondo esse resultado com a conservação de momentum, temos

$$\mathcal{P}_f = \frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar\omega(n-1)}{cn} = \frac{\hbar\omega}{cn} = \frac{\hbar k}{n}, \quad (2.5)$$

que é consistente com a formulação de Abraham.

Já do lado do momentum de Minkowski, sua formulação é apoiada por um experimento de pensamento baseado na absorção de um fóton por um átomo [17, 52]. Seja um átomo de massa M se movendo com velocidade v para longe de uma fonte de luz com frequência ω . O átomo tem uma transição de níveis com frequência ω_0 . Se um fóton é absorvido pelo átomo, levando sua velocidade a v' , a conservação de energia é

$$\hbar\omega + \frac{Mv^2}{2} = \hbar\omega_0 + \frac{Mv'^2}{2}, \quad (2.6)$$

em que o termo $\hbar\omega$ representa a energia do fóton absorvido e $\hbar\omega_0$ energia relacionada a transição do átomo. A conservação de momentum é

$$\mathcal{P}_f + Mv = Mv' \quad (2.7)$$

em que \mathcal{P}_f é o momentum do fóton absorvido. Para pequenas variações de velocidade, podemos usar a aproximação

$$\frac{1}{2}(v'^2 - v^2) = \frac{1}{2}(v' + v)(v' - v) \approx v(v' - v) \quad (2.8)$$

para reescrever o momentum do fóton como

$$\mathcal{P}_f = M(v' - v) \approx \frac{M}{2v}(v'^2 - v^2) = \frac{\hbar}{v}(\omega - \omega_0). \quad (2.9)$$

Para que a absorção ocorra, deve-se respeitar a condição de ressonância

$$\omega = \left(1 + \frac{nv}{c}\right)\omega_0, \quad (2.10)$$

quem vem do efeito doppler gerado pelo movimento relativo entre o átomo e a luz. Portanto

$$\mathcal{P} = \frac{\hbar\omega}{v} - \frac{\hbar}{v}\left(1 - \frac{nv}{c}\right)\omega = \frac{n\hbar\omega}{c} = n\hbar k \quad (2.11)$$

que é consistente com a formulação de Minkowski.

Vemos a partir desses experimentos de pensamento que ambas as formulações tem mérito em descrever o momentum de um fóton em um meio material.

Além disso, ambas as formulações também são respaldadas por resultados experimentais.

O primeiro resultado experimental relevante veio através do experimento de Jones *et al.* [10, 11]. Ele mediu a pressão de radiação causada pela luz em um meio refrator diretamente. O experimento consiste em um espelho suspenso verticalmente por uma vira de torção em um tubo preenchido com um líquido dielétrico, que é iluminado por feixes de luz fora do eixo da fibra, sofrendo torque. O torque medido no espelho submerso no líquido se mostrou ser n vezes maior do que em um espelho no vácuo, corroborando a formulação de Minkowski.

O experimento de Walker *et al.* [13, 14] traz evidência empírica da importância do momentum de Abraham. O experimento está esquematizado na figura 3. Ele é baseado na medição do torque em um disco de material dielétrico e não-magnético suspenso em uma região com campo elétrico dependente do tempo, e um campo magnético ortogonal estático. O campo elétrico é radial ao disco, de forma que o termo de força proporcional a $(\partial/\partial t)\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é responsável por causar um torque no material. Esse termo não existe na formulação de Minkowski, apenas na de Abraham. A verificação da variação do momentum angular do disco foi portanto evidência da validade da formulação de Abraham.

Um dos experimentos que corroboram a formulação de Minkowski foi realizado em 2005 por Campbell *et al.* [32]. Nele o momentum transferido de fótons para átomos em um condensado de Bose-Einstein é medido através de interferência quântica, e é mostrado sendo proporcional ao índice de refração n do meio. No experimento, um

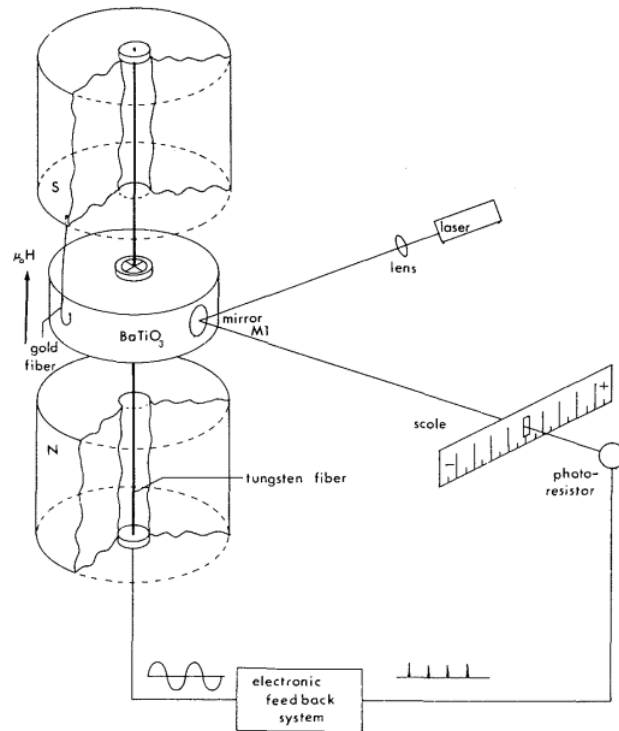


Figura 3 – Diagrama do aparato experimental de Walker *et al.* [14]. Um disco de material dielétrico é colocado em uma região em que existe um campo elétrico radial dependente do tempo, e um campo magnético vertical estático. A oscilação do disco é aferida pela posição de um feixe de laser refletido por um espelho acoplado ao disco.

condensado de Bose-Einstein é preparado de tal forma que todos os átomos tem a mesma energia cinética. O condensado é iluminado por dois feixes de luz contra-propagantes, com fótons de momentum igual a $\pm\mathcal{P}$. O sinal depende do sentido do feixe de onde veio o fóton. Inicialmente, todos átomos se encontram no estado fundamental de energia cinética $|0\mathcal{P}\rangle$. Os átomos podem espalhar um fóton de um feixe para o outro adquirindo um momentum $\pm 2\mathcal{P}$. Quando isso acontece, o estado de momentum do átomo sofre a transição $|0\mathcal{P}\rangle \rightarrow |\pm 2\mathcal{P}\rangle$ com uma amplitude de probabilidade γ . Após um tempo τ , um segundo conjunto de feixes contra-propagantes ilumina o condensado, podendo mais uma vez transferir momentum aos átomos. Depois disso, é detectada a fração de átomos remanescentes no estado fundamental. Os átomos nesse estado podem não ter absorvido nenhum momentum, mantendo-se sempre em $|0\mathcal{P}\rangle$, ou absorvido momentum de dois fótons em sentidos diferentes passando pela transição $|0\mathcal{P}\rangle \rightarrow |\pm 2\mathcal{P}\rangle \rightarrow |0\mathcal{P}\rangle$. Existe uma diferença de fase entre os estados $|0\mathcal{P}\rangle$ vindo de cada um desses caminhos. Isso se deve ao fato de que as evoluções temporais, dadas via equação de Schrodinger, são diferentes para cada estado de energia. Isso é, a evolução temporal da uma fase $\exp(-2i|\mathcal{P}|^2\tau/M\hbar)$ a mais para o estado que passa por $|\pm 2\mathcal{P}\rangle$ durante o intervalo de tempo τ , em que $|\mathcal{P}|^2/2M$ é a energia cinética do átomo e M é sua massa. Assim, a probabilidade de um átomo se

encontrado no estado $|0\mathcal{P}\rangle$ é proporcional à

$$|1 + \gamma^2 e^{\frac{-i|\mathcal{P}|^2\tau}{M\hbar}}|^2 \propto \cos\left(\frac{-|\mathcal{P}|^2\tau}{M\hbar}\right) + A, \quad (2.12)$$

em que A é uma constante que depende de γ . Medições dessa probabilidade para vários valores de τ estão apresentadas na figura 4. A partir dessa medição é possível inferir o o

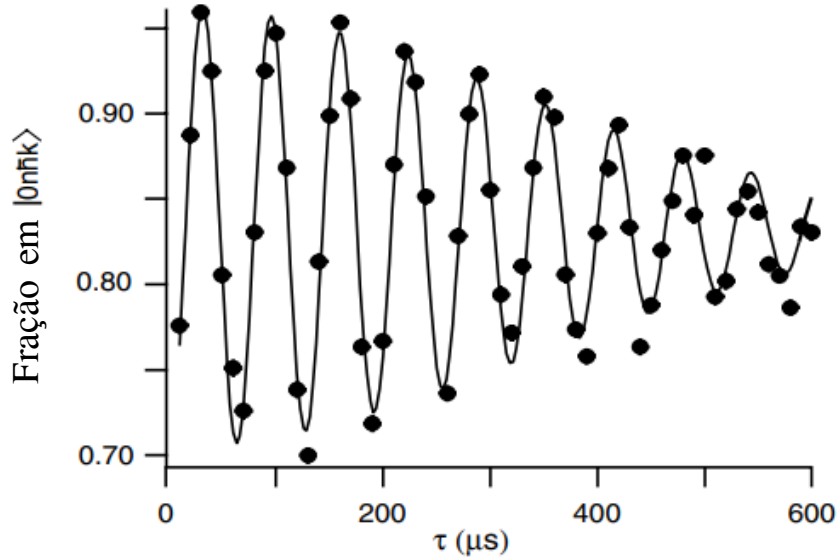


Figura 4 – Fração dos átomos detectados no estado fundamental $|0\mathcal{P}\rangle$ para $\tau = 0 - 600\mu s$. Imagem da referência [32]

módulo do momentum transferido aos átomos, e por consequência o momentum de um fóton. Os resultados encontrados indicam que o momentum transferido é igual a $n\hbar k$, ou seja, diretamente proporcional ao índice de refração.

2.2 Momentum canônico e cinético

Trabalhos notaram a relação do momentum de Abraham com o momentum cinético e o momentum de Minkowski com o momentum canônico [17, 29, 53–55]. As definições de momentum canônico e momentum cinético nem sempre levam ao mesmo valor. O momentum canônico é definido pela derivada parcial da variável dinâmica Lagrangiana pela velocidade, enquanto o momentum cinético é simplesmente o produto da velocidade pela massa. No que diz respeito a uma partícula na presença de campos eletromagnéticos, esses valores são diferentes. Podemos calcular o momentum canônico para uma partícula com momento de dipolo elétrico \mathbf{p} e momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ partindo da Lagrangiana [29]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} = \\ &= \frac{mv^2}{2} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}_0 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}_0}{c^2} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{p}_0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

O subscrito 0 denota quantidades no referencial de repouso da partícula, e \mathbf{v} é a velocidade da partícula no referencial do laboratório. O lado direito da equação é alcançado considerando $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}_0)/c^2$ e $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 - (\mathbf{v} \times \mathbf{p}_0)$, que é a transformação de Lorentz das grandezas em primeira ordem de v/c^2 [56]. Fazendo as derivadas em relação a cada componente da velocidade nos leva a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = mv_i - (\mathbf{p}_0 \times \mathbf{B})_i + \frac{(\boldsymbol{\mu}_0 \times \mathbf{E})_i}{c^2}, \quad (2.14)$$

que são as componentes do momentum canônico para uma partícula. O momentum cinético não-relativístico é simplesmente $m\mathbf{v}$. Para um meio material podemos extrapolar essa relação, considerando o meio feito de um conjunto denso de partículas com mesmo momento de dipolo elétrico e magnético, e fazendo $\mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{P}$ e $\boldsymbol{\mu}_0 \rightarrow \mathbf{M}$. Assim, chegamos na relação para as densidades de momentum material

$$\mathcal{P}_{can} - \mathcal{P}_{cin} = -\mathbf{P} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (2.15)$$

Já em relação a diferença entre as densidades de momentum de Abraham e Minkowski, podemos calculá-las usando as relações

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad e \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.16)$$

e reescrevendo os momentums como

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} &= \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{E}}{c^2} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0 c^2} = \\ &= \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{E}}{c^2} + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

e

$$\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{P} \times \mathbf{B}. \quad (2.18)$$

Isso implica em uma diferença entre eles igual a

$$\mathcal{P}_{Abr} - \mathcal{P}_{Min} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} - \mathbf{D} \times \mathbf{B} = -\mathbf{P} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (2.19)$$

Percebemos que

$$\mathcal{P}_{can} - \mathcal{P}_{cin} = \mathcal{P}_{Abr} - \mathcal{P}_{Min}, \quad (2.20)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{P}_{can} + \mathcal{P}_{Min} = \mathcal{P}_{Abr} + \mathcal{P}_{cin}. \quad (2.21)$$

Assim, o momentum de Abraham pode ser associado ao momentum eletromagnético cinético e o de Minkowski ao momentum eletromagnético canônico.

2.3 Resolução

O debate Abraham-Minkowski ainda é um tema de interesse nas publicações atuais [25–35]. Apesar disso, hoje é entendido que ambas as formulações são equivalentes. As formulações de Abraham e Minkowski levam em conta apenas um tensor energia-momentum eletromagnético. Para o entendimento completo do fenômeno, deve-se também considerar um tensor energia-momentum material associado, que não foi levado em conta nos trabalhos iniciais. Quando o tensor energia-momentum material apropriado é levado em conta, qualquer formulação leva ao mesmo resultado [4, 16]. Isso inclusive não é limitado a apenas as formulações de Abraham e Minkowski. Outras formulações [4, 18–26], com diferentes significados físicos relevantes, também levam às mesmas previsões experimentais quando o tratamento apropriado é feito.

A utilidade de cada formulação está vinculada à associação que ela pode ter com as grandezas físicas relevantes ao experimento. Como mostrado anteriormente, a expressão de Abraham está associada à densidade de momentum eletromagnético cinético e a de Minkowski à densidade de momentum eletromagnético canônico [17].

3 Momentum e energia absorvidos por um átomo em um meio material

Nesse capítulo apresentamos resultados originais dessa tese, também publicados em artigo [57]. Aqui discutimos uma questão fundamental no debate de Abraham-Minkowski sobre o momentum da luz em um meio material: se um átomo em um gás absorve um fóton, qual é o momentum transferido para ele? Tratamos o gás como um conjunto de esferas dielétricas formando um meio dielétrico linear, não-magnético e não-absorvente com um índice de refração n próximo a um. Consideramos um modelo clássico para os graus internos de liberdade do átomo absorvedor, calculando o momentum e a energia absorvida usando a força de Lorentz criada pelos campos eletromagnéticos microscópicos. Nossos resultados numéricos indicam que se os átomos são classicamente localizados, o momentum médio absorvido é proporcional ao índice de refração, mas menor do que o momentum de Minkowski. No entanto, em experimentos realizados com condensados de Bose-Einstein [32] os átomos absorvem o momentum de Minkowski. Argumentamos que não há contradição entre esses resultados, pois em um condensado de Bose-Einstein, os átomos estão em um estado quântico de superposição espacial em um volume relativamente grande, formando um meio *contínuo*. Nesse sentido, a verificação experimental de um recuo do momentum atômico compatível com o momentum de Minkowski seria associada a uma assinatura quântica do estado do meio.

3.1 Modelo microscópico para um meio gasoso

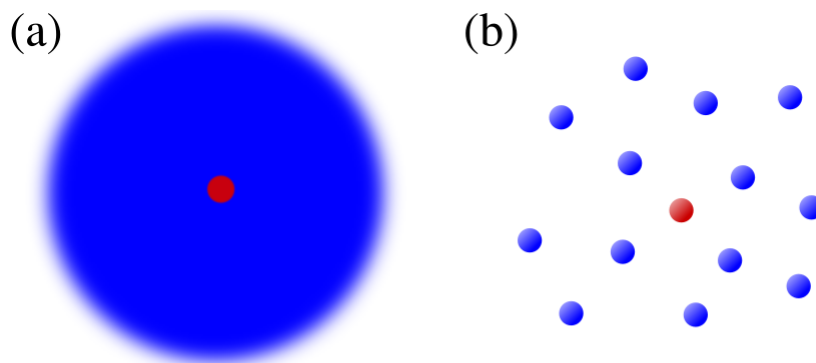


Figura 5 – Diferentes modelos para um meio gasoso onde um átomo absorve a luz. A cor vermelha indica o átomo que absorve a luz, enquanto a cor azul representa o meio material. (a) O átomo absorvedor está imerso em um meio contínuo. (b) O átomo absorvedor é imerso em uma nuvem de átomos modelados como esferas dielétricas rígidas.

A figura 5 representa dois modelos distintos para um átomo em um meio material. Em ambos tratamos o meio como dielétrico, linear, não-magnético e não-absorvente. A figura 5(a) representa um átomo (em vermelho) imerso em um meio dielétrico contínuo (em azul). A figura 5(b) mostra um modelo microscópico onde o meio é composto de esferas com raio R (em azul). Cada esfera é composta de um material dielétrico, linear, não-magnético e não-absorvente. Como o fenômeno tratado ocorre em um intervalo de tempo muito curto em comparação à variação de posição das esferas, é razoável considerar que eles não se movem. Calcularemos a razão entre o momentum e a energia transferida para o átomo absorvente em ambos os casos. Em escalas macroscópicas, os campos médios são iguais nas duas situações. Veremos em breve que quando computamos o campo médio em uma região com muitos átomos e dimensões muito menores que o comprimento de onda dos campos, recuperamos o resultado calculado assumindo que o meio é contínuo. Apesar disso, nós mostramos também nas seções seguintes que o modelo microscópico da figura 5(b) prevê resultados diferentes do que o modelo de meio contínuo da figura 5(a) no que diz respeito à transferência de momentum. Na presente seção, discutimos o modelo microscópico da figura 5(b) em detalhe.

No meio representado na figura 5(b), o campo eletromagnético total é igual à superposição dos campos elétrico e magnético incidentes \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 entrando no meio e os campos elétrico e magnético \mathcal{E}_i e \mathcal{B}_i gerados por cada esfera dielétrica. Consideramos que os campos incidentes têm a forma

$$\mathbf{E}_0 = E_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{z} - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \quad e \quad \mathbf{B}_0 = B_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{z} - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.1)$$

com $\mathbf{k}_0 = (2\pi/\lambda_0)\hat{\mathbf{z}}$, sendo λ_0 o comprimento de onda da luz no vácuo. Os campos elétricos e magnéticos externos criados pelas esferas com raio R e momento de dipolo elétrico \mathbf{p}_i são, respectivamente,

$$\mathcal{E}_i = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\omega^2}{c^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_i) \times \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{cr^2} \right) [3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}_i) - \mathbf{p}_i] \right\}, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{B}_i = \frac{\omega^2 e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{r} - \frac{c}{i\omega r^2} \right) (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_i), \quad \text{se } r > R, \quad (3.3)$$

onde \mathbf{r} é um vetor distância do centro da esfera ao ponto avaliado [9]. Dentro das esferas, desconsideramos as componentes de radiação dos campos e consideramos que elas produzem um campo elétrico uniforme e um campo magnético circulante com média zero [9]. Como não estamos interessados na variação espacial dos campos dentro das esferas, podemos considerar um campo magnético nulo em nossos cálculos. Assim, consideramos que o campo gerado dentro de cada esfera é

$$\mathcal{E}_i = \frac{-\mathbf{p}_i}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \mathcal{B}_i = 0, \quad \text{se } r < R. \quad (3.4)$$

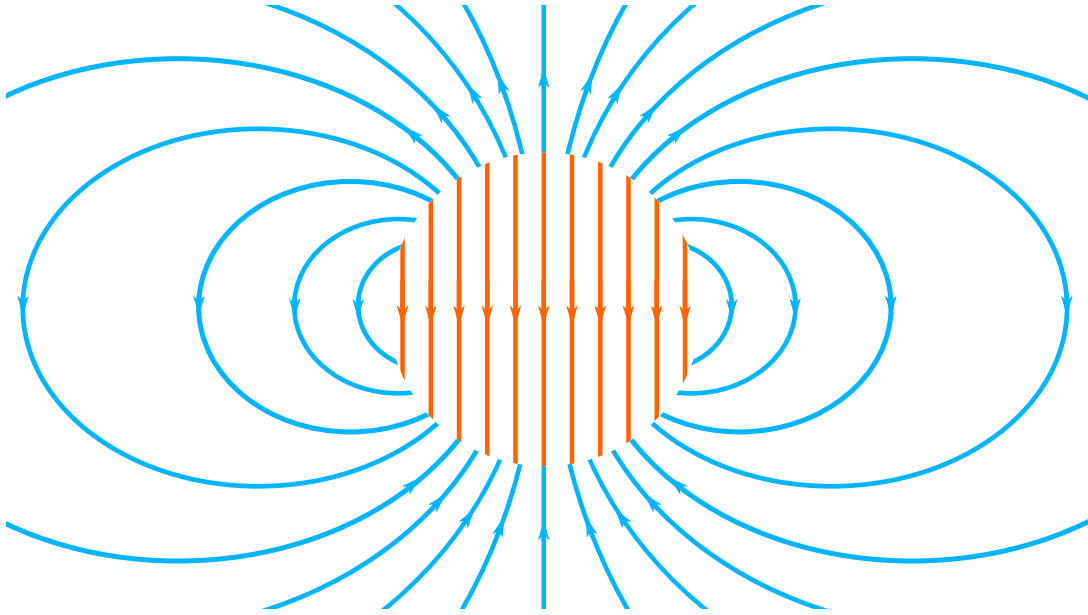


Figura 6 – Linhas de campo elétrico de uma esfera homogênea polarizada em regime estático. O campo elétrico dentro da esfera (em laranja) é homogêneo e aponta no sentido oposto ao campo aplicado \mathbf{E}_0 que induz a polarização. Fora da esfera, o campo elétrico (em azul) é o de um dipolo perfeito no centro da esfera. Uma justificativa mais detalhada é apresentada no apêndice A.

Uma justificativa mais detalhada para a forma desses campos pode ser encontrada no apêndice A. A figura 6 ilustra a contribuição eletrostática para o campo elétrico gerado por cada esfera, que é dominante para $r \ll \lambda_0$. Os campos eletromagnéticos totais no meio podem então ser escritos como

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^N \mathcal{B}_i, \quad (3.6)$$

em que os campos \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são dados pela equação 3.1, e os campos \mathcal{E}_i e \mathcal{B}_i são dados pelas equações 3.2 e 3.3, respectivamente.

O momento de dipolo de uma única esfera na presença de um campo elétrico externo é dado por [9]

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

em que α é uma constante de proporcionalidade. Essa constante α é usualmente chamada de *polarizabilidade* do dipolo¹, e tem unidade de volume. Neste modelo, a polarização macroscópica do meio deve vir dos momentos de dipolo das esferas. A polarização média \mathbf{P}

¹ Também é comum encontrar na literatura a polarizabilidade definida como $\alpha = \frac{p}{E}$, com unidades no SI de $\frac{A^2 s^4}{kg}$

de N dipolos com momento de dipolo médio \mathbf{p}_0 em um volume V é, portanto, $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_0/V$. Além disso, para meios dielétricos lineares, a relação entre o campo elétrico médio e a polarização é $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$, onde χ_e é a suscetibilidade elétrica média, tal que $\chi_e = N\alpha/V$.

Neste trabalho, consideramos que o índice de refração é próximo de um, de forma que podemos aproximar

$$n = \sqrt{1 + \chi_e} \approx 1 + \chi_e/2 = 1 + \frac{N\alpha}{2V}. \quad (3.8)$$

Neste regime, os campos eletromagnéticos totais produzidos pelas esferas são consideravelmente menores que os campos incidentes, de forma que podemos considerar que apenas o campo elétrico incidente induz polarização nas esferas, ou seja, $\mathbf{p}_i(t) = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i, t)$. Essa aproximação simplifica muito os cálculos numéricos que serão apresentados.

Esperamos que os campos macroscópicos médios sejam

$$\mathbf{E} = \left\langle \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\mathcal{E}}_i \right\rangle, \quad \mathbf{B} = \left\langle \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\mathcal{B}}_i \right\rangle, \quad (3.9)$$

em que novamente os campos \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são dados pela equação 3.1, e os campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}_i$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ são dados pelas equações 3.2 e 3.3, respectivamente. Os colchetes representam a média sobre uma região contendo muitas esferas em um volume V muito menor que o comprimento de onda da luz ao cubo.

3.1.1 Parâmetros e validade

Primeiramente, consideremos a dimensão do raio R das esferas compondo o meio. Como visto na equação 3.4, o campo elétrico dentro de uma esfera com momento de dipolo fixo é uma função de seu volume. É importante nos mantermos no limite

$$R \gg \sqrt[3]{\frac{\alpha}{4\pi}}, \quad (3.10)$$

em que $|\mathbf{E}_0| \gg |\mathbf{E}_d|$ para o campo do lado de dentro do átomo.

Queremos nos manter em um regime em que o volume ocupado pelos átomos é muito menor que o volume total do espaço. Como o volume ocupado pelos átomos é $V_a = 4\pi R^3 N/3$, concluímos que

$$R \ll \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi N}}. \quad (3.11)$$

Essas condições impõem limites superior e inferior para os valores de R , como mostrado na figura 7. Verifiquemos se esses limites são respeitados por átomos na realidade. No que diz respeito ao limite inferior, os valores α de polarizabilidade dos átomos [58] estão na ordem de $10^{-25} \text{cm}^3 = 10^{-4} \text{nm}^3$, que implica que o raio deve ser maior que $10^{-2} \text{nm} = 10^{-1} \text{Å}$. Esse valor é pelo menos uma ordem de grandeza menor que o tamanho

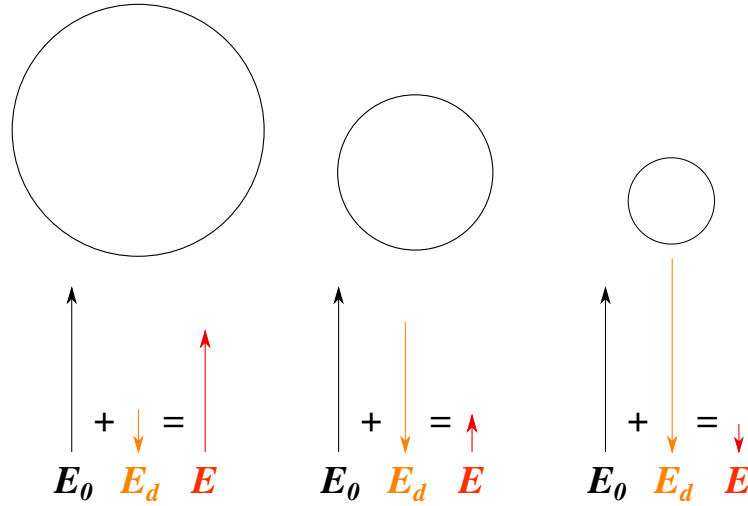


Figura 7 – O campo total \mathbf{E} dentro do átomo é a soma do campo externo incidente \mathbf{E}_0 e o campo \mathbf{E}_d produzido pelo átomo. A medida que o raio diminui, o módulo de \mathbf{E} diminui até quando $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_d$. Após isso, para valores ainda menores de R , o módulo de \mathbf{E} volta a crescer porém o sentido se inverte, o que representaria uma falha do modelo

típico de um átomo, na ordem de 1\AA . Já no que diz respeito ao limite superior, a densidade de átomos deve ser pelo menos pequena o suficiente para que esse limite seja igual ao limite inferior. Em outras palavras, compondo as equações 3.10 e 3.11, sabemos que $\alpha \ll 3V/N$. Especificamente para os valores típicos de polarizabilidade, a densidade deve ser no máximo da ordem de 10^{24} átomos/ cm^3 . Esse valor é várias ordens de grandeza maior do que a de um gás típico. O ar por exemplo tem uma densidade na ordem de 10^{19} átomos/ cm^3 na temperatura e pressão ambiente. Condensados de Bose-Einstein tem densidades ainda menores, entre 10^{13} e 10^{15} átomos/ cm^3 [59]. Nessas situações nosso modelo descreve bem a natureza.

Além disso, como $n = \sqrt{1 + \alpha N/V}$, podemos reescrever as condições de R na forma

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{4\pi}} \ll R \ll \sqrt[3]{\frac{3}{(n^2 - 1)}} \sqrt[3]{\frac{\alpha}{4\pi}}. \quad (3.12)$$

Essas condições nos mostram como a qualidade do modelo depende do valor de n . Quanto mais próximo de 1 for o valor de n , maior será o intervalo de valores de R que satisfazem ambas as condições. Se quisermos por exemplo que R seja pelo menos dez vezes maior que a condição inferior e dez vezes menor que a condição superior, precisamos de um índice de refração igual a no máximo $\sqrt{1 + 3 \cdot 10^{-6}} \approx 1,000015$. No cálculo numérico da seção seguinte, optamos por usar valores de n de no máximo 1,001. Isso nos dá, no pior dos casos, uma fator de pouco mais que dez entre cada limite. Esse valor é escolhido por ser um bom balanço entre um intervalo grande entre os limites, e um índice de refração relativamente grande.

3.1.2 Verificação macroscópica

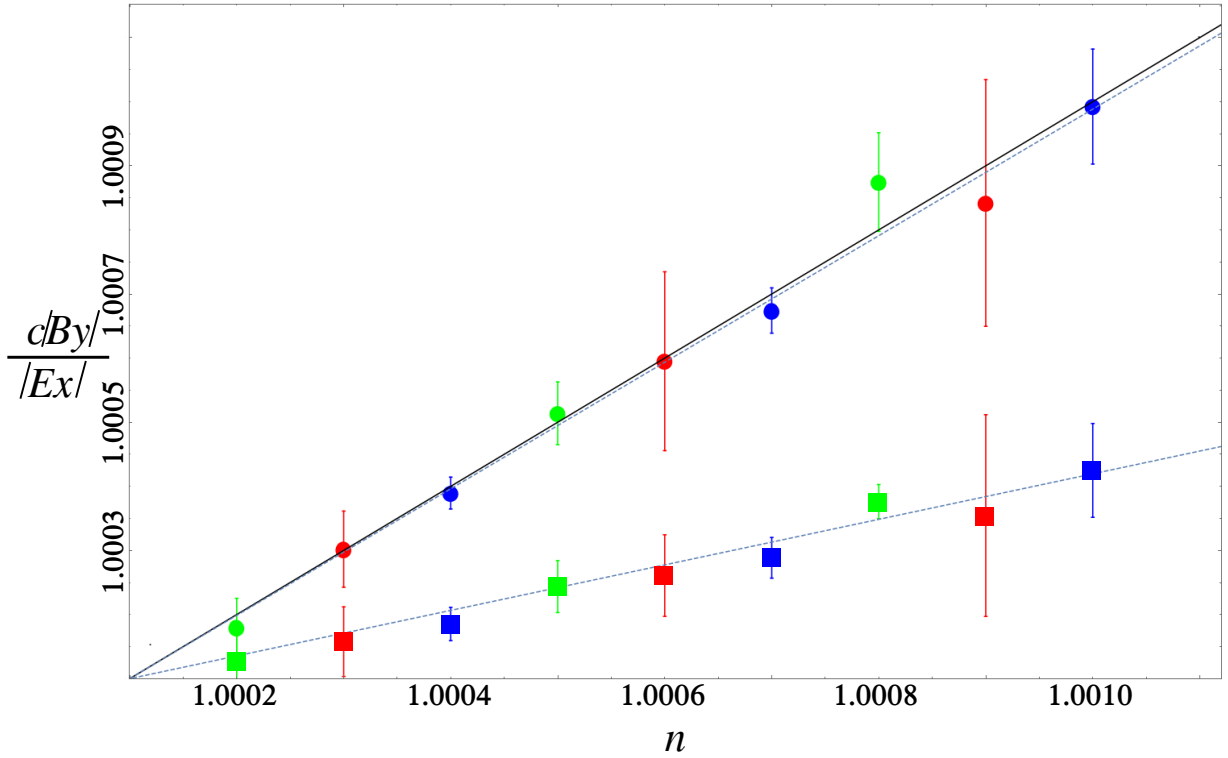


Figura 8 – Razão $|B_y|/|E_x|$, onde E_x e B_y são calculados a partir da equação (3.9), para vários valores do índice de refração n . Os círculos representam os valores calculados numericamente, e a linha preta sólida é a previsão teórica n/c para o meio contínuo. Os quadrados apresentam dados filtrados para incluir apenas posições fora de todos os átomos, enquanto os círculos apresentam dados não filtrados. As linhas tracejadas são os ajustes para a expressão $c|B_y|/|E_x| = a(n - 1) + 1$, e os valores obtidos para a são $a = 0.99 \pm 0.02$ para os círculos e $a = 0.36 \pm 0.01$ para os quadrados. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = 10^{-6}\lambda_0^3$ e $R = 2 \times 10^{-2}\lambda_0$ em verde; $\alpha = 2 \times 10^{-6}\lambda_0^3$ e $R = 10^{-2}\lambda_0$ em vermelho; $\alpha = 5 \times 10^{-7}\lambda_0^3$ e $R = 3 \times 10^{-2}\lambda_0$ em azul. Temos $V = 25\lambda_0^3$ em todos os casos e varia-se o valor de n através de uma variação do parâmetro N . As barras de erro foram calculadas repetindo as simulações cinco vezes e calculando o desvio padrão.

Para verificar a relação entre os campos microscópicos e macroscópicos, apresentadas nas equações 3.6 e 3.9, realizamos uma simulação numérica. Posicionando aleatoriamente N esferas em um volume na forma de um paralelepípedo retangular de tamanho λ_0 na direção z e um quadrado transversal de seção com lados $5\lambda_0$ no plano xy . Os campos elétricos e magnéticos médios são calculados calculando os campos da equação (3.9) em 10^6 posições aleatórias dentro de um pequeno volume ΔV . Observe que algumas posições aleatórias cairão dentro de uma esfera, enquanto outras cairão fora de todas as esferas.

Sabemos que a razão entre os módulos dos campos macroscópicos [60]

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{n}{c} \quad (3.13)$$

é proporcional ao índice de refração, como já usado anteriormente. Comparamos os campos médios calculados em função do índice de refração com os valores teóricos para os campos macroscópicos. O resultado é apresentado na figura 8.

Observamos que os campos médios calculados numericamente coincidem com os campos macroscópicos teóricos quando não fazemos nenhum tipo de filtragem das posições sorteadas. Quando consideramos apenas os campos fora das esferas, o resultado permanece proporcional ao índice de refração, porém é diminuído de um fator constante. Isso além de corroborar com a validade do modelo macroscópico, ressalta a importância da contribuição da parte do campo elétrico interna às esferas no cálculo dos campos médios.

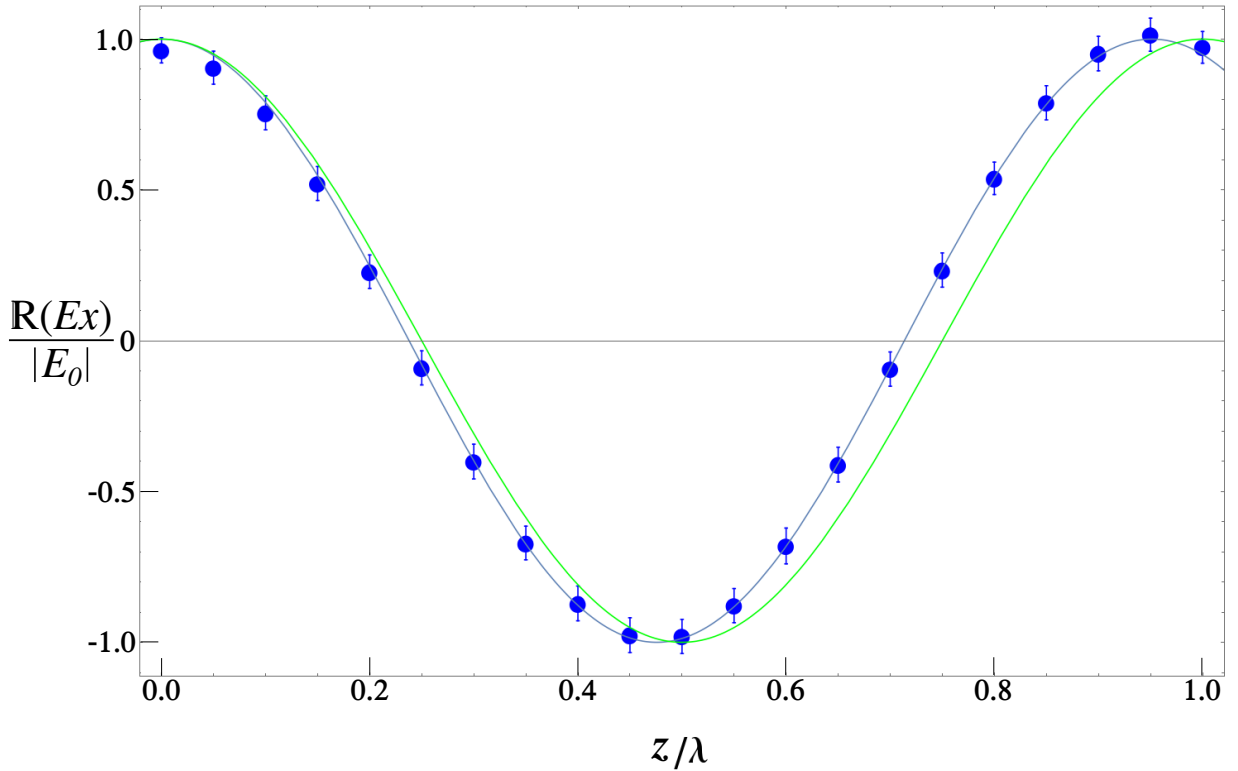


Figura 9 – Parte real de E_x da equação (3.9) em um tempo fixo ao longo da direção de propagação z . Os círculos azuis representam valores calculados numericamente para o campo, e a linha azul representa a curva de ajuste $\cos[2\pi z/\lambda]$. A linha verde representa o campo incidente \mathbf{E}_0 da equação (3.1). O valor $\lambda_0/\lambda = 1.051 \pm 0.002$ obtido do ajuste corresponde ao valor esperado $\lambda_0/\lambda = n = 1.050$ para os parâmetros utilizados, que são $N = 25625$, $\alpha = 10^{-6}\lambda_0^3$, $V = 25\lambda_0^3$ e $R = 2 \times 10^{-2}\lambda_0$.

Além disso, podemos fixar o índice de refração e observar como a fase dos campos varia espacialmente. Sabemos que em um meio material dielétrico contínuo, o comprimento

de onda dos campos é [60]

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (3.14)$$

Novamente comparamos essa previsão com os campos calculados numericamente. O resultado é apresentado na figura 9.

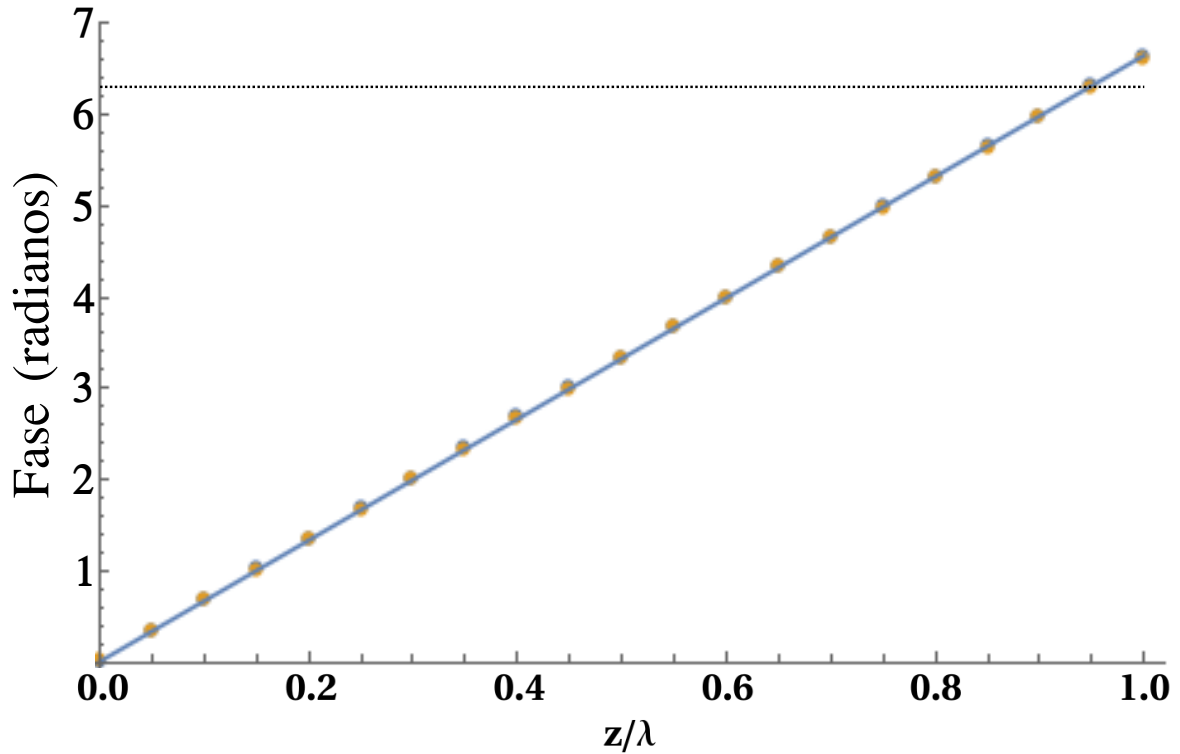


Figura 10 – Fase dos campos elétrico e magnético médios, dados pela equação 3.9, ao longo da direção de propagação z . A curva azul apresenta a previsão teórica nkz . Os pontos azuis e amarelos (praticamente indistinguíveis por sua proximidade) representam as fases dos campos médios microscópicos elétrico e magnético respectivamente. Elas são calculadas através das expressões $\arctan(\mathbb{I}\{E\}/\mathbb{R}\{E\})$ e $\arctan(\mathbb{I}\{B\}/\mathbb{R}\{B\})$. A reta preta pontilhada está fixa na fase igual a 2π . Observe que essa fase é superada antes de um período completo. Parâmetros utilizados: $n = 1.0583$, $N = 10^4$, $\alpha = 10^{-6}\lambda_0^3$, $V = 25\lambda_0^3$ e $R = 2 \times 10^{-2}\lambda_0$

Novamente, o resultado corrobora a validade do modelo microscópico. O comprimento de onda do feixe total calculado diminui em relação ao comprimento de onda do campo externo por fator igual ao índice de refração, dentro da barra de erro. Esse resultado pode ser reforçado observando a variação da fase, que é apresentada na figura 10. A fase dos campos médios totais varia por um fator n a mais do que a dos campos externos. Isso é consistente com um feixe de comprimento de onda reduzido por um fator $1/n$.

3.1.3 Feixe refletido

Na situação apresentada nesse capítulo, a luz se propaga do vácuo para um meio material de comprimento λ_0 na direção de propagação, e depois novamente para o vácuo. Nas mudanças de meio, uma componente do feixe é transmitida e outra é refletida. O feixe refletido na interface vácuo-material não penetra o material e portanto não tem efeito no fenômeno tratado. Já o feixe refletido na interface material-vácuo se propaga dentro do material e então afeta os resultados. Podemos ver esse efeito claramente analisando a razão entre os módulos dos campos magnético e elétrico ao longo do comprimento do material, mostrados na figura 11. Vemos a partir da figura que, apesar do valor médio de B/E na

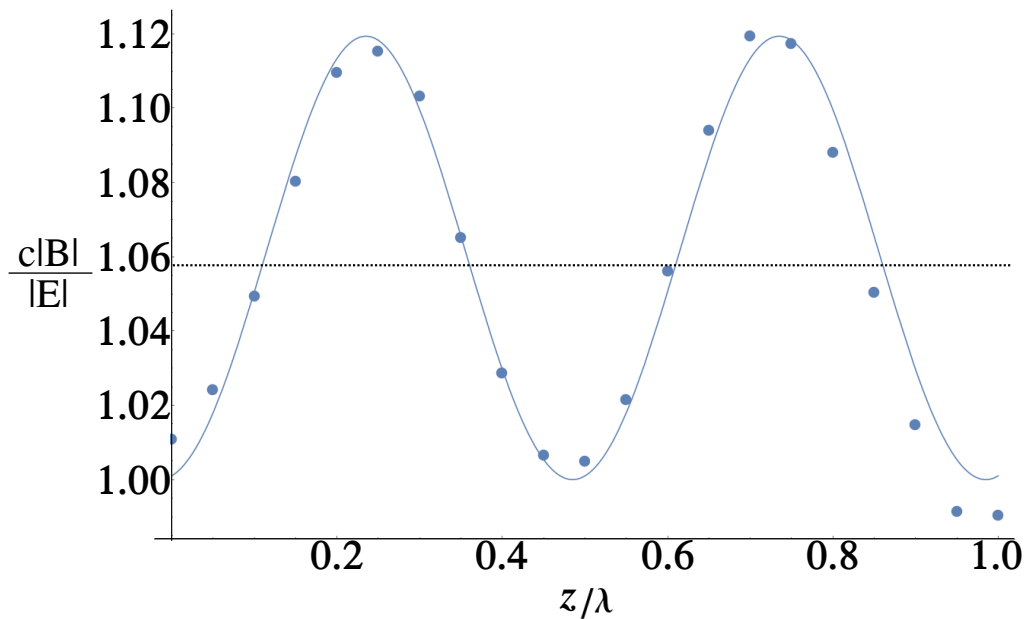


Figura 11 – Razão entre os módulos de $c\mathbf{B}$ e \mathbf{E} em função da posição na direção de propagação da luz em unidades de λ dentro do material. Os pontos azuis foram calculados com a mesma simulação apresentada na seção 3.1.2. A linha pontilhada constante igual a 1.0597 representa a média do valor calculado na simulação. Os parâmetros usados são $n = 1.0583$, $N = 10^4$, $\alpha = 3 \times 10^{-4} \lambda^3$, $m = 10^4$, $k = 2\pi\lambda^{-1}$, $L = \lambda$. A linha azul contínua é o valor teórico calculado a partir da equação 3.22. Vemos que os pontos obedecem ao perfil teórico esperado.

direção de propagação ser consistente com o esperado, existe uma oscilação periódica. Isso acontece porque existem nesses pontos uma superposição das ondas incidente e a refletida. Podemos deduzir essa curva analiticamente. Sejam os campos eletromagnéticos incidentes iguais a

$$\mathbf{E}_I = E e^{-i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}_I = B e^{-i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.16)$$

Na incidência normal, o coeficiente de Fresnel r que determina a razão entre as amplitudes dos campos refletido e incidente é [61]:

$$r = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right). \quad (3.17)$$

Quando o feixe incidente é refletido na interface com outro meio com índice de refração menor, o campo magnético recebe uma fase de π [62]. Dado isso, podemos escrever os feixes refletidos como

$$\mathbf{E}_R = rEe^{-i(ky' - \omega t)}\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B}_R = -rBe^{-i(ky' - \omega t)}\hat{\mathbf{x}}, \quad (3.19)$$

em que $y' = y + L$ é a posição da interface. Os campos totais são portanto

$$\mathbf{E}_T = Ee^{i\omega t} \left(e^{-iky} - re^{iky'} \right) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B}_T = Be^{i\omega t} \left(e^{-iky} + re^{iky'} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (3.21)$$

e a razão entre os módulos é

$$\frac{|\mathbf{B}_T|}{|\mathbf{E}_T|} = \frac{B}{E} \frac{|e^{-iky} + re^{iky'}|}{|e^{-iky} - re^{iky'}|}. \quad (3.22)$$

Essa função descreve bem os valores encontrados, como visto na figura 11. Note que se $r = 0$, a razão acima se reduz simplesmente para B/E , e a curva se torna uma reta constante.

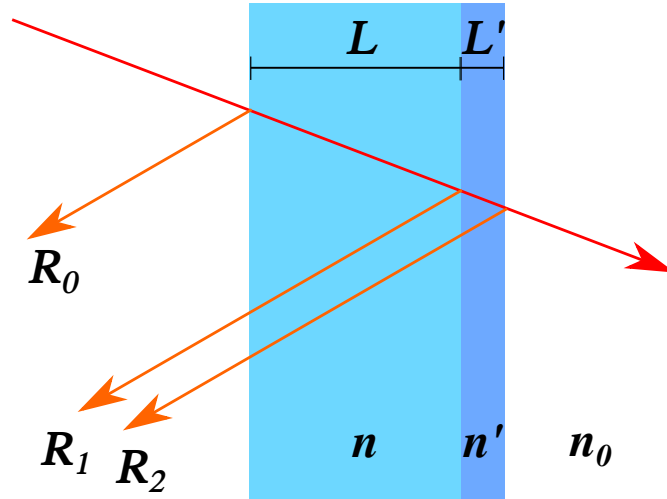


Figura 12 – Feixes refletidos na mudança de meios com índices de refração diferentes. Os feixes R_1 e R_2 se interferem dentro do material.

Podemos tentar fazer o efeito do feixe refletido ser minimizado adicionando um película antirrefletora. Uma película antirrefletora é uma película fina adicionada ao

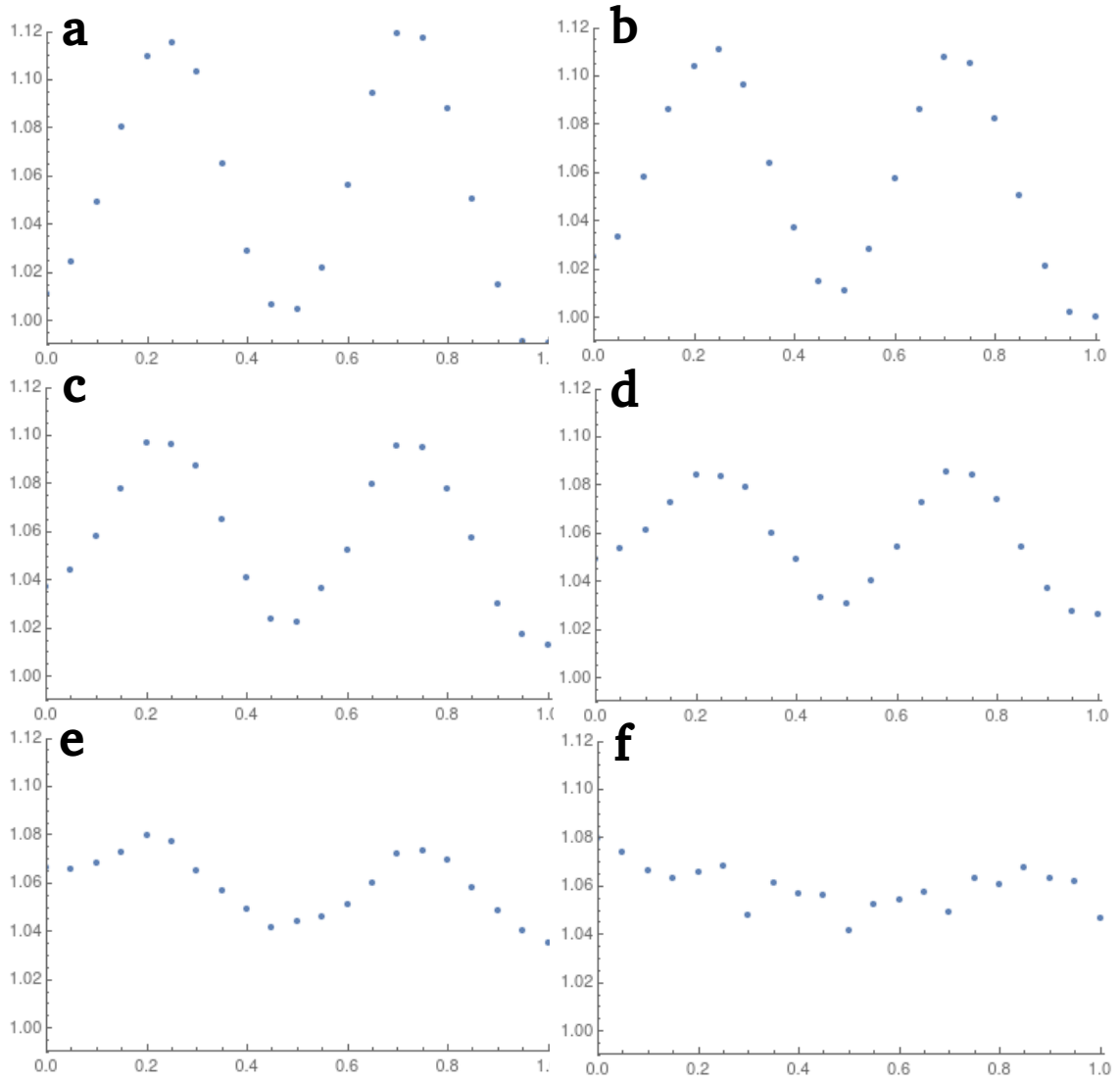


Figura 13 – Razões cB/E para vários valores de n' . Os parâmetros utilizados são os mesmos que na figura 11 a não ser pela adição da película antirreflexo. Em ordem alfabética, os valores de N' crescem linearmente de 0 até o valor teórico tal que o coeficiente de Fresnel (equação 3.17) seja $r = 0$, ou seja, em (a) $N' = 0$, (b) $N' = 236$, (c) $N' = 472$, (d) $N' = 708$, (e) $N' = 945$ e (f) $N' = 1181$.

material que cria novas interfaces e portanto novos feixes refletidos, como mostrado na figura 12. Essa película é projetada de forma que exista interferência destrutiva entre as componentes refletidas e elas se somem para zero. Essa condição acontece para $n' = \sqrt{n}$ e $L' = \lambda'/4$ em que λ' é o comprimento de onda da luz dentro da película. Adicionamos uma película antirrefletora em nossa simulação acrescentando mais átomos com polarizabilidade α em um volume V' , localizada imediatamente depois do primeiro material. Controlamos o índice de refração da película variando o número de átomos dentro dela. Na figura 13 vemos alguns desses resultados. É evidente que a película antirrefletora teve o efeito de minimizar a amplitude do feixe refletido.

3.2 Momentum e energia transferidos para o átomo absorvedor

Nesta seção, calculamos a quantidade de momentum e energia transferida pelos campos eletromagnéticos para um átomo absorvendo luz dentro de um meio gasoso. O meio é descrito pelo modelo apresentado na seção anterior. Usamos a força de Lorentz em um dipolo elétrico

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbb{R} \left\{ (\mathbf{p}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \mathbf{p}^*}{\partial t} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} \right\}, \quad (3.23)$$

onde \mathbf{p} é o momento de dipolo do átomo absorvedor e $\mathbb{R}(x)$ denota a parte real de x , para calcular a transferência de momentum. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ são os campos elétricos e magnéticos microscópicos dados pela equação (3.6). A força acima representa a força média em um ciclo óptico. Consideramos que a luz incidente é ressonante com o átomo. Desta forma, o momento de dipolo do átomo absorvedor está relacionado com o campo elétrico microscópico como

$$\mathbf{p} = i\alpha_0 \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (3.24)$$

Observe que existe uma diferença de fase de $\pi/2$ entre a oscilação do dipolo e a oscilação do campo elétrico, o que resulta em uma absorção permanente de momentum e energia pelo átomo. Observe também que a polarizabilidade atômica α_0 é diferente da polarizabilidade α das esferas dielétricas que compõem o meio. Substituindo a equação (3.24) na equação (3.23), chegamos à seguinte expressão para o momentum transferido para o átomo:

$$\mathcal{P} = \frac{\alpha_0 \epsilon_0}{2} \int dt \mathbb{R} \left\{ -i(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{\mathcal{E}} + \omega \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}} \right\}. \quad (3.25)$$

A energia absorvida pode ser calculada através do trabalho realizado pelo campo elétrico na corrente elétrica associada à variação temporal do momento de dipolo atômico:

$$U = \frac{1}{2} \int dt \mathbb{R} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right\} = \frac{\alpha_0 \epsilon_0 \omega}{2} \int dt \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (3.26)$$

Usamos simulações para calcular numericamente o momentum e a energia transferida da luz para o átomo absorvedor. Os campos microscópicos são calculados pelas equações (3.1.2) e (3.6). O momentum e a energia adquiridos pelo átomo absorvedor em uma determinada posição são calculados pelas Eqs. (3.25) e (3.26). Diferentes posições para o átomo absorvedor são escolhidas aleatoriamente, de modo que a razão média entre o momentum transferido \mathcal{P} e a energia absorvida U pode ser calculada para diferentes parâmetros médios. Analisamos separadamente os dados das situações em que o ponto observado está fora de todas as esferas dielétricas. Esta análise é feita considerando que nosso modelo para o gás consiste em um conjunto de esferas dielétricas rígidas. Esta

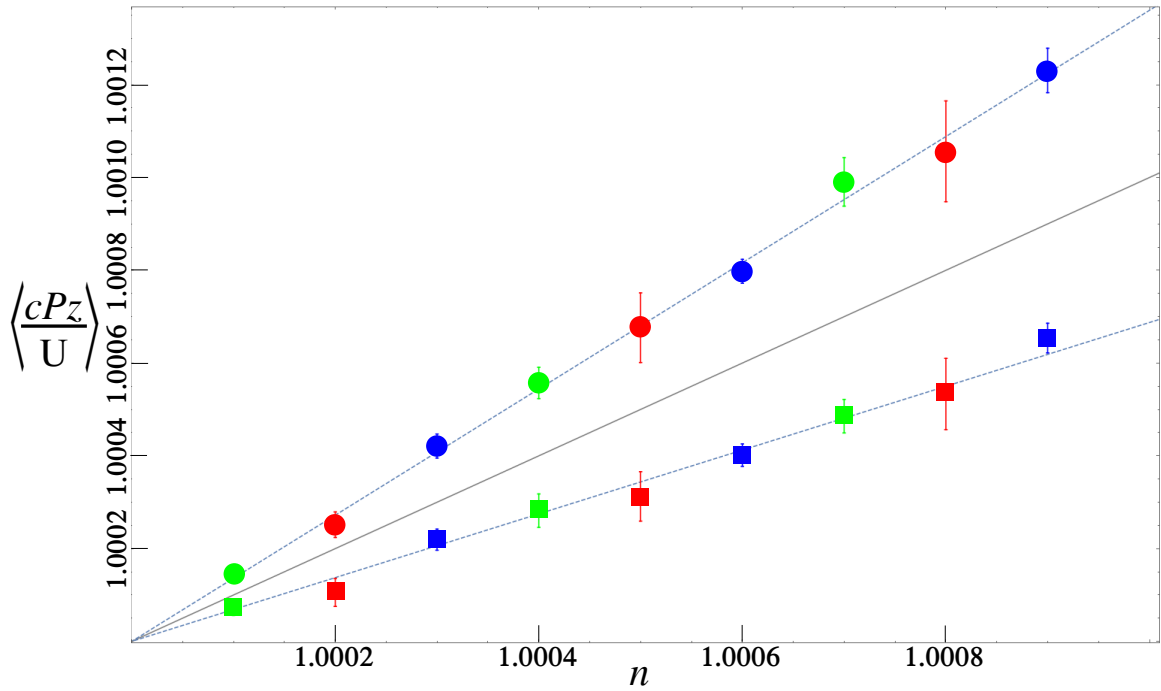


Figura 14 – Razão média entre o componente z do momentum transferido \mathcal{P}_z da equação (3.25) e a energia absorvida U da equação (3.26) em função de n . A linha preta contínua é a função $\langle c\mathcal{P}_z/U \rangle = n$. Os círculos são adquiridos avaliando pontos dentro e fora das esferas dielétricas que compõem o meio, e os quadrados são adquiridos filtrando apenas os pontos que ficam fora das esferas. As linhas pontilhadas são ajustes lineares para cada cenário. A expressão utilizada foi $\langle c\mathcal{P}_z/U \rangle = a(n - 1) + 1$ e os valores obtidos para a são $a = 1.36 \pm 0.01$ para os círculos e $a = 0.69 \pm 0.01$ para os quadrados. Conjuntos de pontos de cada cor representam dados adquiridos usando diferentes parâmetros na simulação, mostrando a independência dos resultados nos parâmetros específicos usados. O volume $V = 25\lambda_0^3$ é o mesmo para todos os conjuntos. Temos $\alpha = 10^{-6}\lambda_0^3$ e $R = 2 \times 10^{-2}\lambda_0$ em verde; $\alpha = 2 \times 10^{-6}\lambda_0^3$ e $R = 10^{-2}\lambda_0$ em vermelho; $\alpha = 5 \times 10^{-7}\lambda_0^3$ e $R = 3 \times 10^{-2}\lambda_0$ em azul. O índice de refração varia alterando o número de esferas dielétricas N escolhido, tal qual a equação (3.8). Em cada simulação, são escolhidas 10^6 posições aleatórias para o átomo absorvente. As barras de erro são calculadas repetindo as simulações cinco vezes e calculando o desvio padrão.

condição é razoável para descrever um gás clássico de átomos, já que o átomo absorvedor não pode estar dentro de outro átomo neste caso. Alguns resultados são apresentados como quadrados na figura 14. Vemos que a razão média calculada $\langle \mathcal{P}_z/U \rangle$ é diferente daquela obtida com a expressão de Minkowski para a transferência de momentum, tendo um valor menor. Poderíamos nos perguntar se considerar as contribuições das posições dentro das esferas resultaria no momentum de Minkowski, mas este não é o caso, como mostrado pelos círculos na figura 14. Neste caso, a razão média $\langle \mathcal{P}_z/U \rangle$ torna-se maior que n/c .

A figura 15 mostra um histograma dos valores obtidos para os componentes da razão entre o momentum transferido \mathcal{P} e a energia absorvida U para um determinado

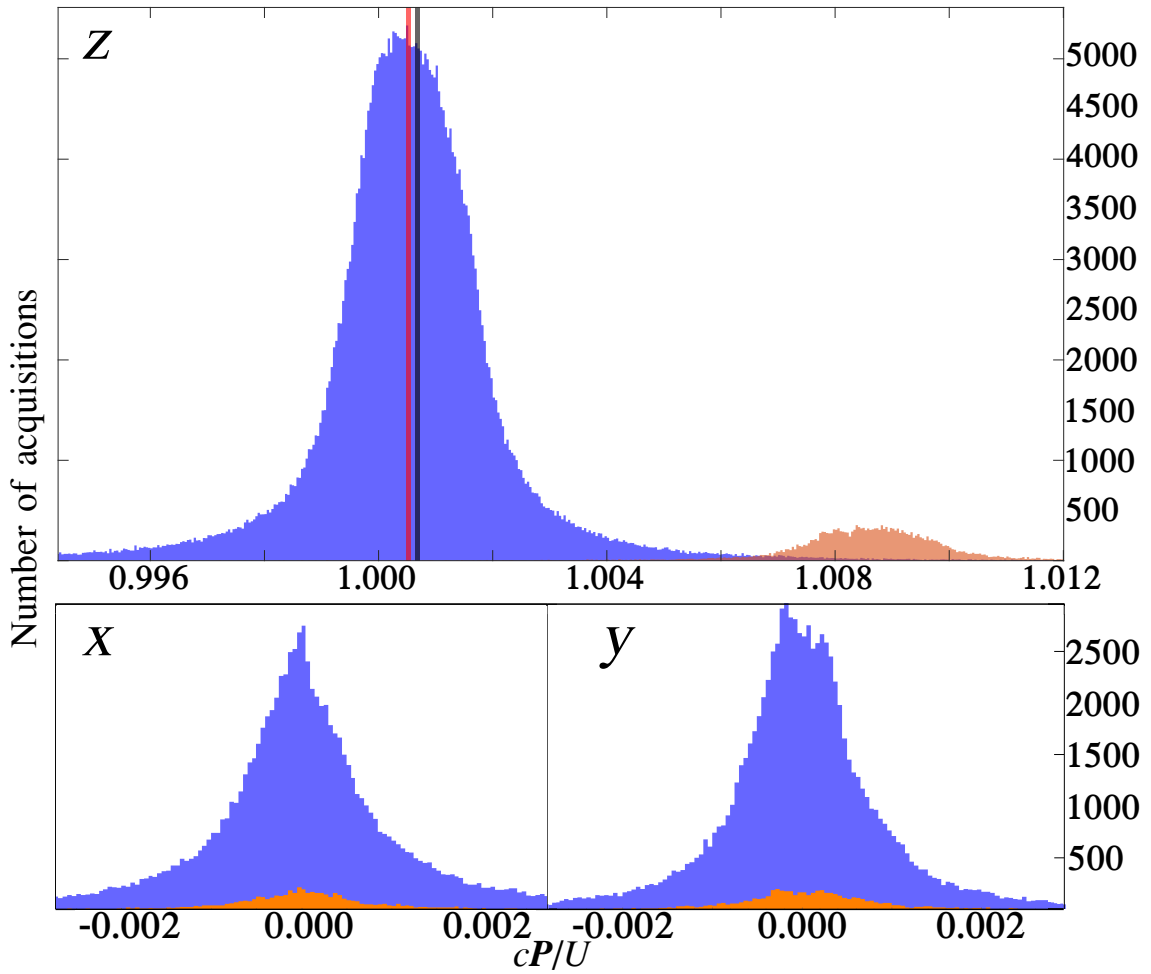


Figura 15 – Quantidade de cada valor obtido para os componentes de $c\mathcal{P}/U$ para $n = 1.00070$. As barras azuis estão relacionadas às posições do átomo absorvedor que ficam *fora* de todas as esferas. As barras laranjas estão relacionadas às posições do átomo absorvedor que caem *dentro* de pelo menos uma esfera. A linha vertical vermelha no primeiro painel corresponde ao valor médio da distribuição das barras azuis (1.00048 ± 0.00004), enquanto a linha vertical preta corresponde à previsão usando o momentum de Minkowski $c\mathcal{P}_z/U = n = 1,00070$. Os parâmetros usados são $\alpha = 2 \times 10^{-6}\lambda_0^3$, $V = 25\lambda_0^3$, $R = 2 \times 10^{-2}\lambda_0$ e $N = 20008$.

conjunto de parâmetros quando a posição do átomo absorvente é escolhida aleatoriamente em 10^6 diferentes posições. As distribuições têm variações relativamente grandes, uma vez que os campos microscópicos têm variações significativas na escala microscópica. É válido ressaltar que, como as componentes x e y de \mathcal{P} são muito menores que a componente z , elas têm uma influência desprezível em seu módulo. Assim, gráficos como os da figura 14 para $\langle c|\mathcal{P}|/U \rangle$ seriam visualmente idênticos aos mostrados.

3.3 Discussão

Experimentos realizados com condensados de Bose-Einstein mostram resultados consistentes com a expressão de Minkowski para átomos adquirindo momentum através de espalhamento de luz [32]. Como o espalhamento de luz pode ser visto como uma absorção de fótons seguida de uma emissão de fótons, esse resultado é diferente do que estamos apresentando. Apesar disso, argumentamos que não há contradição entre esses resultados. Em um condensado de Bose-Einstein, os átomos estão em um estado quântico de superposição espacial em um volume relativamente grande, formando um meio “contínuo”. Em um meio contínuo, os campos são homogêneos, de modo que o termo $(\mathcal{E}^* \cdot \nabla)\mathcal{E}$ na equação (3.25) não contribui para o momentum absorvido pelo átomo, ao contrário do que ocorre em nossas simulações. Além disso, os campos microscópicos e macroscópicos são sempre iguais na ausência de variações microscópicas. Isso nos leva à relação simplificada

$$\frac{\mathcal{P}}{U} = \frac{\int dt \Re\{\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}\}}{\int dt \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}} = \frac{B}{E} \hat{\mathbf{k}} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.27)$$

Observe também que neste caso a razão \mathcal{P}_z/U é independente da posição microscópica do átomo absorvente no meio contínuo. Assim, a distribuição mostrada na figura 15 teria um pico fino em torno de $c\mathcal{P}_z/U = n$ ao invés da distribuição larga que observamos no caso de um gás clássico de átomos. Esta distribuição fina para $c\mathcal{P}_z/U$ é consistente com os resultados experimentais com condensados de Bose-Einstein [32].

Para concluir, tratamos a situação em que um átomo absorve luz imerso em um meio gasoso linear, dielétrico, não magnético e não absorvente, modelado como um conjunto de esferas rígidas dielétricas. Calculamos o momentum e a energia absorvida pelo átomo em simulações numéricas, que mostram que a razão média entre o momentum e a energia absorvida é menor do que a prevista usando a expressão de Minkowski. Prevemos assim que um experimento semelhante ao de Campbell *et al.* [32], se realizado com um gás clássico ao invés de um condensado de Bose-Einstein, apresentaria resultados diferentes para o recuo do momentum atômico. Nesse sentido, a verificação experimental de uma transferência de momentum para os átomos compatível com o momentum de Minkowski como mostrada na Ref. [32] pode ser considerado uma assinatura quântica do estado do meio.

Parte II

Preparação de informação quântica com modos
espaciais de fótons únicos

4 Quantização do campo eletromagnético

Nessa seção, discutimos a quantização do campo eletromagnético no vácuo. Ele é de fundamental importância nesse trabalho, uma vez que ele é o sistema responsável por carregar a informação quântica relevante para os protocolos tratados nessa parte, como abordado anteriormente. Seguimos as demonstrações tais quais apresentadas na literatura [63, 64]. Usamos o calibre de Coulomb, em que na ausência de cargas e correntes elétricas é

$$\Phi = 0 \quad e \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{A} é o potencial vetor e Φ é o potencial escalar. Essa escolha implica a partir das equações de Maxwell que

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

É interessante lidarmos com os campos no espaço conjugado de vetores de onda \mathbf{k} . Supomos o caso em que o campo é contido em uma cavidade de paredes perfeitamente condutoras. O campo elétrico deve desaparecer nas paredes da cavidade e formar uma onda estacionária. Expandimos o potencial vetor em ondas planas na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.3)$$

em que V é o volume da cavidade. O resultado evidentemente não depende de V , e pode ser extrapolado para todo o espaço levando o volume a infinito. O calibre de Coulomb implica que $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$, portanto podemos representar a dependência vetorial do potencial vetor em vetores de polarização $\boldsymbol{\epsilon}_s$ ortogonais a \mathbf{k} . A forma geral para $\tilde{\mathbf{A}}$ que resolve a equação de onda 4.2 e a condições de realidade $\tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{k})$ é:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = \sum_{s=1;2} c_{\mathbf{k},s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} + c.c., \quad (4.4)$$

em que $\omega = c|k|$. Assim, o potencial vetor e os campos são iguais a:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{s=1;2} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c., \quad (4.5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{s=1;2} \sum_{\mathbf{k}} \omega c_{\mathbf{k},s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - c.c., \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{s=1;2} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},s} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},s}) e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c.. \quad (4.7)$$

Podemos observar que, a não ser pelo carácter vetorial de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}$, tanto o campo elétrico quanto o magnético são definidos pelos coeficientes escalares $c_{\mathbf{k},s}$. É razoável a partir disso imaginar que a energia do sistema campo electromagnético pode ser escrita como uma função compacta de $c_{\mathbf{k},s}$. De fato, quando substituimos as equações 4.6 e 4.7 na expressão da energia, temos

$$H = \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) = 2 \sum_{s=1;2} \sum_k \omega^2 |c_{\mathbf{k},s}|^2. \quad (4.8)$$

A essa altura queremos escrever o hamiltoniano de forma que possamos associar o campo electromagnético com um sistema de osciladores harmônicos independentes. Isso é vantajoso porque as técnicas para estudar o espectro do hamiltoniano de um oscilador harmônico são bem conhecidas. Para fazer isso, definimos as funções:

$$q_{\mathbf{k},s} = c_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} + cc, \quad (4.9)$$

$$p_{\mathbf{k},s} = -i\omega c_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega t} + cc, \quad (4.10)$$

de forma que o hamiltoniano torna-se

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s=1;2} \sum_k (q_{\mathbf{k},s}^2 + \omega^2 p_{\mathbf{k},s}^2). \quad (4.11)$$

O que garante que esse hamiltoniano realmente descreve um conjunto de osciladores harmônicos é o fato de que os operadores q e p formam um par de variáveis canonicamente conjugadas, i.e., são respeitadas as equações de Hamilton

$$\dot{q}_{\mathbf{k},s} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k},s}} \quad e \quad \dot{p}_{\mathbf{k},s} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k},s}}. \quad (4.12)$$

Dessa forma, podemos fazer a quantização impondo a relação de comutação $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Seguimos de acordo com a diagonalização tradicional de osciladores harmônicos definindo os operadores aniquilação e criação

$$a_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\mathbf{k},s} + ip_{\mathbf{k},s}) \quad e \quad a_{\mathbf{k},s}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\mathbf{k},s} - ip_{\mathbf{k},s}). \quad (4.13)$$

O hamiltoniano em função desses operadores têm a forma

$$H = \sum_{s=1;2} \sum_k \hbar\omega \left(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.14)$$

e os campos eletromagnéticos

$$\mathbf{E} = i \sum_{s=1;2} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - c.h., \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B} = i \sum_{s=1;2} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}) a_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c.h.. \quad (4.16)$$

No espaço livre, o somatório em k nas equações acima pode ser reescrito como $\sum_k \rightarrow (V/\pi^2) \int k^2 dk$ [65].

O hamiltoniano da equação 4.14 tem a forma de um oscilador harmônico para cada modo dos campos. Os auto-estados do operador hamiltoniano são conhecidos como *estados de Fock*, representados por $|n_{\mathbf{k},s}\rangle$ tal que

$$H |n_{\mathbf{k},s}\rangle = \hbar\omega(n_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}) |n_{\mathbf{k},s}\rangle. \quad (4.17)$$

Os número $n_{\mathbf{k},s}$ são inteiros a partir de zero, e estão associados a um estado do campo com n excitações no modo com vetor de onda \mathbf{k} e polarização s . Os operadores criação e aniquilação atuam nesses estados de acordo com as seguintes expressões:

$$a_{\mathbf{k},s}^\dagger |n_{\mathbf{k},s}\rangle = \sqrt{(n+1)_{\mathbf{k},s}} |(n+1)_{\mathbf{k},s}\rangle \quad e \quad a_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},s}} |(n-1)_{\mathbf{k},s}\rangle. \quad (4.18)$$

Os nomes criação e aniquilação vem do fato de que esses operadores têm uma atuação nos estados de Fock tal que aumentam e diminuem o número de excitações do campo com determinado modo. O estado mais geral para o campo eletromagnético com um fóton pode ser produzido partindo do estado de vácuo, estado tal que $n_{\mathbf{k},s} = 0$ para todos \mathbf{k} e s , quando atuado por um operador criação

$$a_\phi^\dagger = \sum_{s=1,2} \int d^3\mathbf{k} \phi_s(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},s}^\dagger. \quad (4.19)$$

Explicitamente, esse estado é escrito como

$$a_\phi^\dagger |0\rangle = \sum_{s=1,2} \int d^3\mathbf{k} \phi_s(\mathbf{k}) |1_{\mathbf{k},s}\rangle. \quad (4.20)$$

A condição de normalização impõe $\sum_{s=1,2} \int d^3\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1$.

Quando um átomo é iluminado por um feixe coerente de fótons, ele será estimulado a absorver e reemitir os fótons [66]. Considere por exemplo um átomo com dois níveis de energia: um nível fundamental $|g\rangle$ e um nível excitado $|e\rangle$, tal que a diferença de energia entre eles é $\hbar\omega_{eg}$. Durante o processo de interação entre o átomo e o campo, ocorrerão as transições $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ com a absorção de um fóton e $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ com a emissão de um fóton. Esses processos podem ser modelados pelos operadores $|e\rangle\langle g| a_{-\mathbf{k}}$ e $|g\rangle\langle e| a_{\mathbf{k}}^\dagger$, que serão úteis no capítulo 6.

Durante a interação com a luz, a probabilidade de encontrar o átomo em qualquer um dos dois níveis de energia varia senoidalmente. Essa oscilação é conhecida como *oscilação de Rabi* [66,67]. Alguns desses ciclos são representados na figura 16. A probabilidade P de um sistema de dois níveis inicialmente em $|g\rangle$ terminar em $|e\rangle$ em função do tempo é

$$P = \Omega^2 \sin^2 \left(\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} t / 2 \right) / (\Omega^2 + \Delta^2), \quad (4.21)$$

em que $\Delta = \omega_{eg} - \omega$ é o *detuning* e $\Omega = \langle e | \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{t=0} | g \rangle / \hbar$.

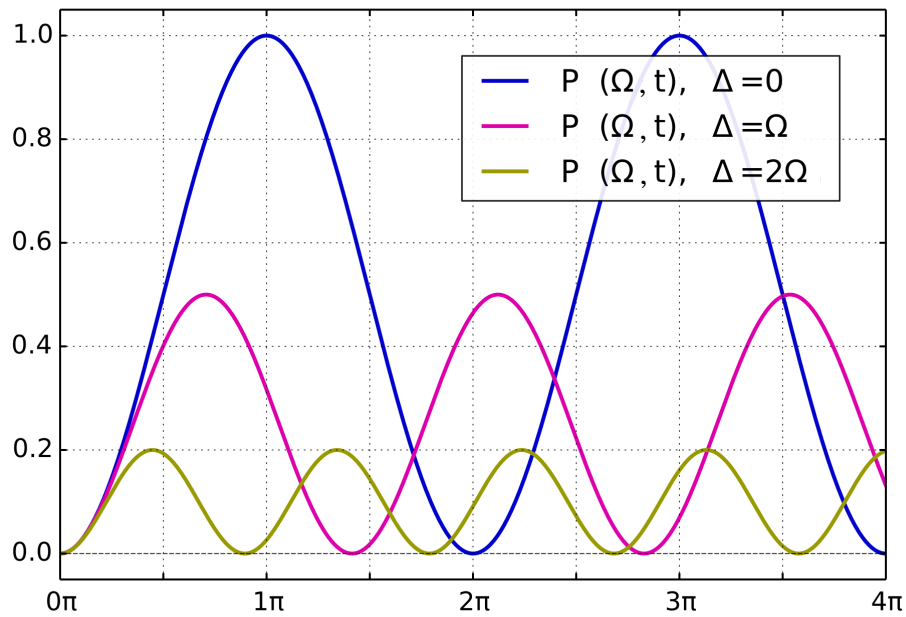


Figura 16 – Oscilações Rabi. As diferentes curvas mostram a probabilidade P (equação 4.21) de um sistema de dois níveis inicialmente em $|g\rangle$ terminar em $|e\rangle$ em função do tempo para diferentes Δ . Imagem adaptada de https://en.wikipedia.org/wiki/Rabi_cycle.

Observamos pela figura acima que o átomo só alcança o estado $|e\rangle$ quando o detuning $\Delta = 0$, ou seja, quando a frequência da luz é ressonante com o átomo. Isso é visto pela curva azul, única que alcança amplitude igual a um. Para frequências fora da ressonância, os átomos atingem combinações lineares $\alpha(t)|g\rangle + \beta(t)|e\rangle$ com β diferente de zero na maior parte do tempo, mas sempre diferente de um. Quanto mais distante da ressonância, menores os valores máximos atingidos por β .

5 Feixes eletromagnéticos

Feixes eletromagnéticos são ondas do campo eletromagnético que se propagam pelo espaço em uma direção específica, e carregam momentum e energia. Em qualquer plano normal à direção de propagação, tanto o momentum quanto a energia do feixe são finitos. Um conjunto especial de feixes são os descritos por modos Hermite-Gaussianos ou Laguerre-Gaussianos. Esses são os feixes que serão usados no capítulo 7. Como trataremos em nosso protocolo apenas de feixes com polarizações bem definidas, aqui nos preocupamos apenas com o carácter escalar dos feixes.

Modos Hermite-Gaussianos e Laguerre-Gaussianos são a solução da equação de Helmholtz na aproximação paraxial. Essa equação surge quando a solução da equação de onda [68]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(r, t) = 0 \quad (5.1)$$

é separável em $U(r, t) = u(r)\exp(-i\omega t)$, que nos permite escrever a equação diferencial

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)u(r) = 0 \quad (5.2)$$

para a parte espacial do campo, conhecida como equação de Helmholtz. Para os feixes tratados, que se propagam na direção z , usamos a aproximação paraxial. Nesse regime assumimos o ângulo θ entre \mathbf{z} e \mathbf{k} como sendo muito pequeno e escrevemos o campo como $u(r) = u'(r)\exp(ikz)$. Nessa aproximação temos

$$\left|\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right| \ll k \left|\frac{\partial u'}{\partial z}\right|. \quad (5.3)$$

Substituindo essas condições na equação de Helmholtz, chegamos à equação

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z}\right)u(r) = 0, \quad (5.4)$$

em que ∇_{\perp} é o operador diferencial no plano perpendicular a z .

5.1 Modos Gaussianos

A solução mais fundamental da equação 5.4 são os feixes gaussianos. Eles são feixes monocromáticos cuja amplitude no plano transversal ao de propagação é uma função gaussiana. Esse é o modo mais comum produzido por lasers. A amplitude é descrita pela equação [69]

$$u(r, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} e^{\frac{-ikr^2}{2R(z)}} e^{i\psi(z)} e^{ikz}, \quad (5.5)$$

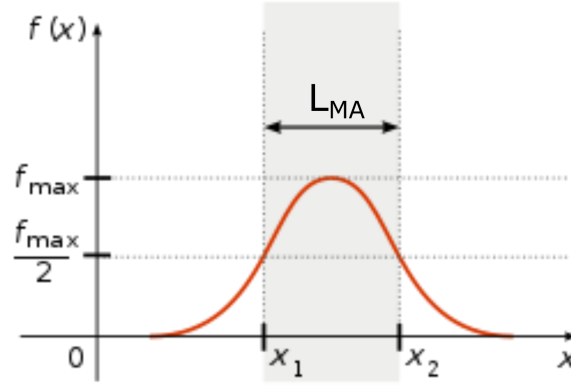


Figura 17 – A largura à meia altura L_{MA} é definida como a distancia entre x_1 e x_2 , tal que $f(x_1) = f(x_2) = f_{max}/2$ e f_{max} é o valor mais alto assumido pela função $f(x)$. Imagem adaptada de https://pt.wikipedia.org/wiki/Largura_À_m meia_altura.

em que

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi W_0^2} \right)^2}, \quad (5.6)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi W_0^2}{z\lambda} \right)^2 \right], \quad (5.7)$$

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z\lambda}{\pi W_0^2} \right), \quad (5.8)$$

λ é o comprimento de onda da luz e W_0 é a largura da cintura de um feixe Gaussiano, definida como a largura à meia altura (figura 17) em $z = 0$ dividida por $\sqrt{2 \ln 2}$, $W(z)$ é a largura do feixe ao longo da sua propagação, $R(z)$ é o raio de curvatura e $\psi(z)$ é a fase de Gouy. A divergência do feixe é apresentada na figura 18. A fase vinda do parâmetro $R(z)$ pode ser entendida como a fase vinda da aproximação em que o feixe tem uma frente de onda esférica centrada a uma distancia R . A contribuição dessa fase é igual a zero tanto em $z = 0$ quanto no limite em que o feixe se propaga infinitamente. Essas são portanto as regiões em que o feixe pode ser melhor aproximado por uma onda plana. O comprimento de Rayleigh $z_R = \pi W_0^2 / \lambda$ dita a escala em que esses termos variam de forma relevante. Como veremos mais a frente, estaremos lidando com distâncias muito menores que z_R , portanto os termos ligados ao raio de curvatura e fase de Gouy não terão contribuições significantes.

5.2 Modos Hermite-Gaussianos

Quando escrevemos a equação de Helmholtz paraxial com coordenadas cartesianas, i.e., fazendo $\nabla_{\perp} = \partial/\partial x + \partial/\partial y$, as soluções são os modos *Hermite-Gaussianos*

$$u_{m,n}(x, y, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W^2(z)}} e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}} e^{i\psi(z)} e^{ikz}. \quad (5.9)$$

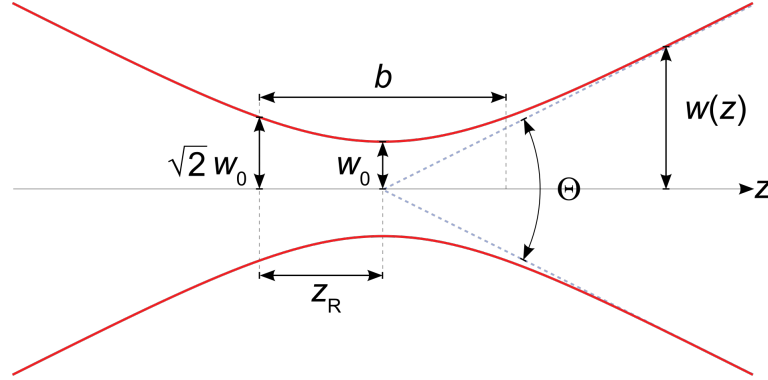


Figura 18 – Largura do feixe gaussiano $W(z)$ em função da distância z ao longo do feixe, que forma uma hipérbole. W_0 é cintura do feixe, $z_R = \pi W_0^2/\lambda$ é intervalo de Rayleigh, $b = 2z_r$ é profundidade focal, e $\Theta = 2\lambda/\pi W_0$ é dispersão angular total. Imagem de https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_beam

Os dois primeiros termos são os polinômios de Hermite, definidos como

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}. \quad (5.10)$$

Uma lista dos primeiros polinômios está na figura 19. O termo Gaussiano

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

Figura 19 – Polinômios $H_m(x)$ de Hermite (equação 5.10) para alguns valores de m .

$\exp[-(x^2 + y^2)/W^2]$ limita a intensidade do campo, levando-a a zero nas regiões do espaço com coordenadas x ou y grandes. O termo $H_m(x)$ faz com que o campo varie com um polinômio de ordem m na direção x . A intensidade no plano $x - y$ varia como mostrada na figura 20

Feixes Hermite-Gaussianos tem vantagens sobre outros modos espaciais para aplicações em informação quântica por serem soluções da equação de onda. Essa característica implica que o perfil espacial é mantido ao longo da propagação livre, o que faz com que a informação codificada em modos Hermite-Gaussianos pode ser mantida por longas distâncias comparados a outros modos [71, 72]. O acoplamento desses modos utilizando-se fibras ópticas ou chips fotônicos também é mais eficiente quando comparado a outros modos [73]. O grau de liberdade perfil espacial pode ser usado para codificar um *qudit* de dimensão arbitrariamente grande, fazendo-o frequentemente mais vantajoso que graus de liberdade como polarização em aplicações em comunicação quântica [74]. Além disso, o

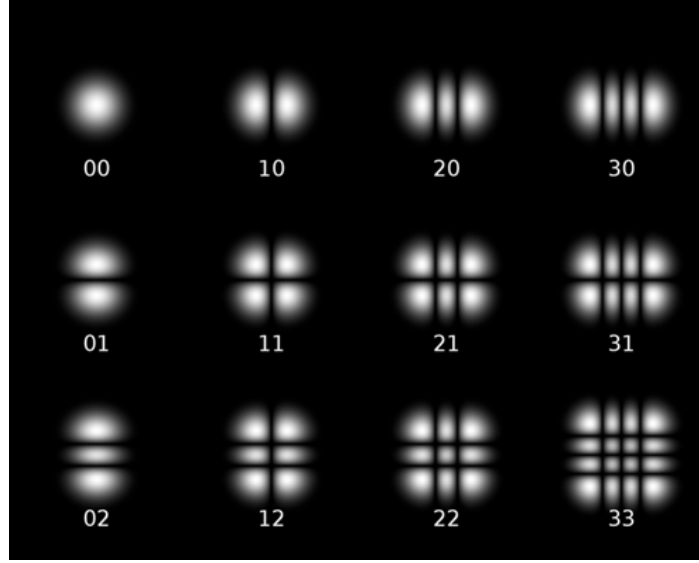


Figura 20 – Intensidade no plano $x - y$ para alguns feixes Hermite-Gaussianos $u_{m,n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$ (equação 5.9). Imagem de [70].

perfil espacial pode ser utilizado em conjunto com outros graus de liberdade. Estados do tipo

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_0 [u_{10}\mathbf{x} + u_{01}\mathbf{y}] \quad (5.11)$$

quando no regime de fótons únicos podem ser reescritos como

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_{10}\rangle \otimes |x\rangle + |u_{01}\rangle \otimes |y\rangle), \quad (5.12)$$

que apresentam emaranhamento entre o perfil espacial e polarização [75].

5.3 Modos Laguerre-Gaussianos

De forma similar aos modos Hermite-Gaussianos, os modos *Laguerre-Gaussianos* são soluções da equação de Helmholtz paraxial. Eles aparecem quando usamos o operador diferencial ∇_{\perp} em coordenadas polares ρ e ϕ . Esses modos são definidos como

$$u_{\ell,m}(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{W}\right)^m L_{\ell}^m \left(\frac{2\rho^2}{W^2}\right) e^{-\frac{\rho^2}{W^2}} e^{-im\phi} e^{\frac{-ikr^2}{2R(z)}} e^{i\psi(z)} e^{ikz}, \quad (5.13)$$

onde os termo L_{ℓ}^m são os polinômios generalizados de Laguerre. Eles podem ser definidos como

$$L_{\ell}^m(x) = x^{-m} \frac{\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^{\ell}}{\ell!} x^{\ell+m}. \quad (5.14)$$

Exemplos podem ser vistos na figura 21. Da mesma forma que os modos Hermite-

$$\begin{aligned}
 L_0^{(\alpha)}(x) &= 1 \\
 L_1^{(\alpha)}(x) &= -x + (\alpha + 1) \\
 L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2} \\
 L_3^{(\alpha)}(x) &= \frac{-x^3}{6} + \frac{(\alpha + 3)x^2}{2} - \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)x}{2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{6}
 \end{aligned}$$

Figura 21 – Polinômios generalizados $L_\ell^m(x)$ de Laguerre (equação 5.14) com alguns valores de ℓ e $m = \alpha$.

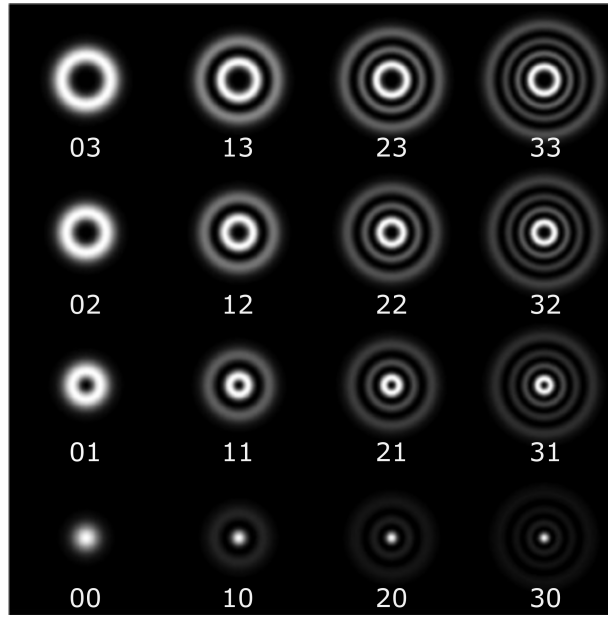


Figura 22 – Intensidade para alguns feixes Laguerre-Gaussianos $u_{\ell,m}(\rho, \phi, z)$ no plano $\rho - \phi$ (equação 5.13) para alguns pares ℓ e m , respectivamente. Imagem adaptada de [70].

Gaussianos, o campo varia com um polinômio, dessa vez na direção ρ , e decai com uma Gaussiana. A intensidade no plano $\rho - \phi$ está representada na figura 22.

O termo $e^{-im\phi}$ faz com que a fase oscile na direção ϕ . O período da oscilação depende de m . A oscilação da fase no plano $z = 0$ e as superfícies de fase constante estão representadas na figura 23.

Uma propriedade especial desses feixes é seu momentum angular orbital (OAM) [76]. A propriedade fundamental de feixes que carregam OAM é a fase helicoidal vinda do fator $\exp(-im\phi)$ (figura 23). Foi demonstrado experimentalmente que até fótons únicos em modos que carregam o termo $\exp(-im\phi)$ carregam OAM [77] (figura 24). Estes experimentos foram feitos usando fótons gerados por conversão paramétrica descendente em modos Laguerre-Gaussianos. O momentum angular orbital existe em intervalos discretos $\hbar m$, assim informação quântica pode ser armazenada nesse grau de liberdade de um fóton único, e utilizada em protocolos que usam *qbits* ou *qdits*. Por serem soluções da

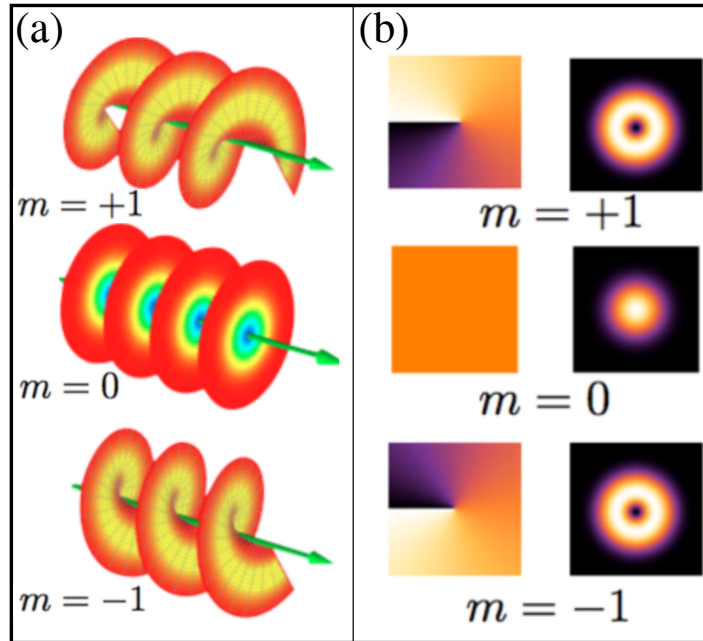


Figura 23 – Estrutura elíptica do feixe Laguerre-Gaussiano. (a) Planos de fase constante. (b) Distribuição de fase e intensidade, respectivamente, para diferentes valores de m em um plano com $z = \text{constante}$. Imagem adaptada de https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_angular_momentum_of_light.

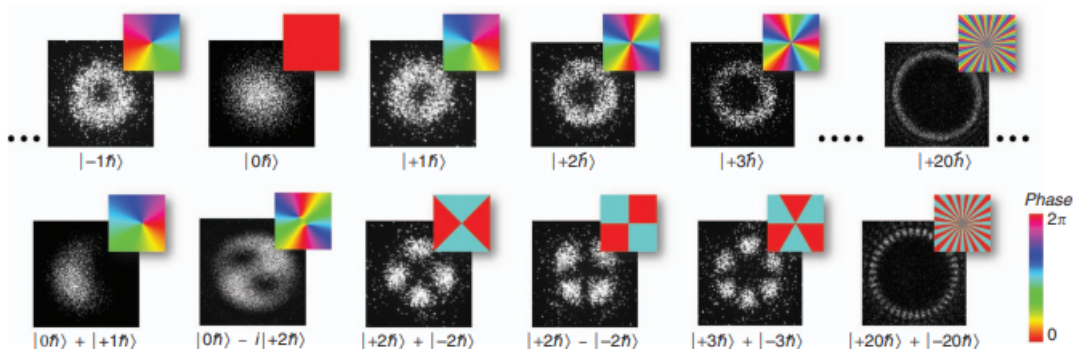


Figura 24 – A primeira linha mostra detecção de fótons únicos em função de seu momentum angular orbital. A segunda linha mostra fótons em superposições de estados de momentum angular bem definido. Imagem da referencia [77].

equação de onda, modos Laguerre-Gaussianos podem ser propagados com facilidade por longas distâncias. Experimentos recentes demonstraram correlação entre fótons através da violação de desigualdade de Bell no OAM de feixes que se propagaram por mais de 1km [78, 79]. Recentemente experimentos utilizando montagens com nuvens de átomos¹ e modos Laguerre-Gaussianos verificaram emaranhamento entre o momentum angular orbital de fótons com graus de liberdade da nuvem de átomos [80–82].

¹ Similares às abordadas na seção 6.1

6 Memórias Quânticas

6.1 Esquema DLCZ

O esquema DLCZ, sigla que se refere ao nome dos autores do artigo em que ele foi inicialmente proposto [48], é um esquema projetado para o armazenamento de informação quântica em uma nuvem de átomos frios. Como foi discutido anteriormente, a dificuldade de armazenar luz por grandes períodos de tempo faz com que seja necessário que sistemas de processamento de informação quântica usem outros sistemas físicos como memória. Nesse protocolo são utilizados átomos com três níveis relevantes; um excitado $|e\rangle$ e dois fundamentais $|g\rangle$ e $|s\rangle$, assim como tratado no capítulo 1 (figura 1). Os átomos tem uma configuração lambda, i.e., transições de dipolo elétrico podem ser estimuladas entre os estados fundamentais e o estado excitado, mas não entre os estados fundamentais. Inicialmente, todos os átomos se encontram no estado fundamental $|g\rangle$ e o campo eletromagnético quântico se encontra no estado de vácuo.

O processo é dividido em duas etapas, a etapa de *escrita* e a etapa de *leitura*. Durante a etapa de escrita, um laser rotulado *laser de escrita* passa pela nuvem atômica como mostrado na figura 25(a). Este laser tem uma frequência ligeiramente fora da frequência da transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. A interação com o laser pode induzir, com pequena probabilidade, uma transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ em um dos átomos da nuvem, com a

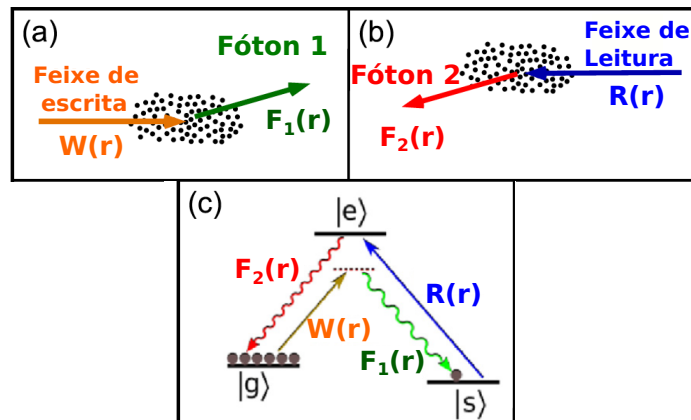


Figura 25 – Esquema DLCZ. (a) Um feixe de escrita interage com uma memória atômica inicialmente com todos os átomos no nível $|g\rangle$. Com uma pequena probabilidade, um dos átomos pode passar pela transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$, com um fóton sendo detectado no modo de campo 1. (b) A memória atômica guarda a informação por algum tempo, e um feixe de leitura extrai essa informação com um fóton emitido no campo 2. (c) Representação das transições energéticas e emissões de fótons ao longo do esquema. Imagem adaptada da referência [83]

emissão correspondente de um fóton. Isso pode ser entendido da seguinte forma: O laser induz transição entre os níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Uma vez no nível $|e\rangle$, pode haver um decaimento espontâneo para o nível $|s\rangle$, com a emissão de um fóton. Observe que, tratando o problema como um processo de espalhamento, a transição de um átomo particular com a emissão de um fóton pode ser representada por um operador proporcional a $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)\sigma_{sg,j}a^\dagger(\mathbf{r}_j)$, onde $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)$ é a amplitude do campo eletromagnético do laser de escrita no átomo j ocupando a posição \mathbf{r}_j , o operador $\sigma_{sg,j}$ leva o átomo j do nível $|g\rangle$ para o nível $|s\rangle$, e $a^\dagger(\mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}$ é o operador de criação para um fóton na posição \mathbf{r}_j , decomposto em operadores de criação para fótons em modos de onda plana definidos pelos vetores de onda \mathbf{k} . A amplitude do campo está relacionada a força da interação, e portanto com a amplitude de probabilidade da transição. O campo eletromagnético do laser é normalmente tratado como uma onda plana se propagando na direção \mathbf{z} com vetor de onda \mathbf{k}_w . Considerando os casos em que um fóton é detectado no campo de modo 1 da figura 25(a), definido pelo operador de aniquilação $a_{\mathbf{k}}$ durante o processo de escrita, haverá uma excitação distribuída coerentemente entre os átomos, uma vez que existe uma indistinguibilidade fundamental sobre qual átomo realizou a transição. O estado quântico da nuvem atômica depende do modo do fóton detectado, armazenando assim informação quântica.

A próxima etapa é o processo de leitura. Um *laser de leitura*, ressonante com a transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$, passa pela nuvem atômica, como mostrado na figura 25(b). Isso fará com que o átomo que foi excitado no processo de escrita passe pela transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Isso acontece junto com a emissão de um fóton em um modo rotulado como campo 2. O modo do fóton 2 depende do estado quântico da nuvem atômica, extraíndo a informação quântica presente na memória. Esse fóton não é reabsorvido pela nuvem devido ao fenômeno de *transparência eletromagneticamente induzida* (EIT) [84, 85]. Esse é um fenômeno de interferência quântica que faz com que um meio torne-se transparente a uma faixa de frequência, como mostrado na figura 26. A EIT tem também o papel de reduzir consideravelmente distorções devido à propagação do fóton através de uma amostra espessa [86]. Após essa etapa, toda a nuvem volta a estar no estado fundamental.

Esse protocolo é utilizado como memória porque informação pode ser escrita na nuvem, e removida sob demanda no segundo fóton após a interação com o laser de leitura. Esse esquema já foi realizado em laboratório em vários trabalhos [88–90]. Esse esquema é amplamente utilizado para a implementação de repetidores quânticos [91, 92], que são uma ferramenta essencial para criação de uma possível internet quântica [93].

6.1.1 Protocolo DLCZ e superradiância

O protocolo DLCZ foi elaborado com o intuito de aprimorar a eficiência da comunicação quântica, que em geral é prejudicada por canais longos e ruidosos. Para esse fim, são inicialmente preparadas duas nuvens de átomos emaranhadas entre si, rotuladas

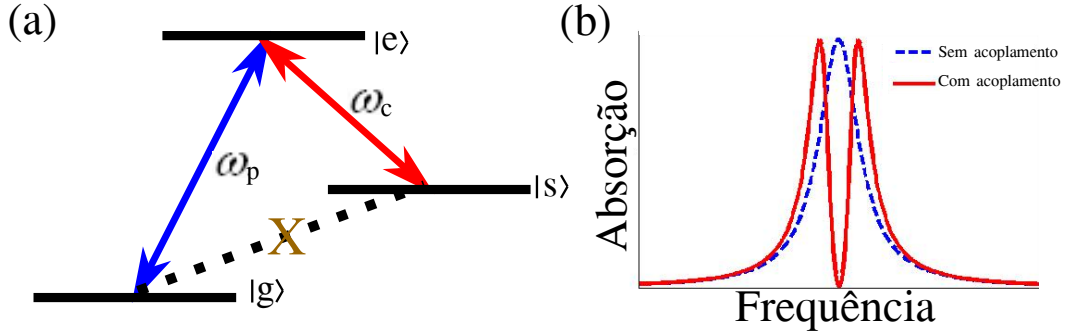


Figura 26 – Transparência electromagneticamente induzida. (a) Um átomo com configuração Λ interage com duas fontes de luz coerentes, nesse contexto usualmente chamadas de *pump* e *coupling*. Devido à essa interação, átomos tanto no estado $|g\rangle$ quanto $|s\rangle$ podem sofrer transição para o estado $|e\rangle$. Apesar disso, existe um *estado escuro* $(\Omega_p |s\rangle - \Omega_c |g\rangle)/\Omega$ para o qual a transição é cancelada por interferência destrutiva [87]. Aqui, $\Omega_{p-c} = \mu_{13-23} E_{p-c}/\hbar$, μ_{ij} é o momento de dipolo associado a transição, E_{p-c} é o campo do pump-coupling e $\Omega = \sqrt{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}$ (b) Absorção da nuvem em função da frequência, com e sem a interação com o *coupling*.

por exemplo L e I_1 . Esse par de nuvens pode trocar informação com outro par, R e I_2 , através de um *swapping* de emaranhamento [94] de forma que o emaranhamento passe a ser entre R e L . Dessa forma, a distancia entre os sistemas emaranhados pode aumentar. Esse mesmo protocolo pode ser realizado múltiplas vezes para propagar o emaranhamento por distâncias ainda maiores. Para isso primeiramente é necessário preparar um par de nuvens em um estado emaranhado. Com essa finalidade, ambas interagem com feixes de escrita, podendo excitar a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$. Se alguma das nuvens absorve uma excitação, é emitido um fóton. A detecção desse fóton é feita com uma montagem de dois detectores e um divisor de feixes, mostrado na figura 27(a). Se o divisor de feixes é 50% – 50%, a detecção em cada um dos detectores pode ser representada pelos operadores a_+ e a_- , definidos como

$$a_{\pm} = \frac{a_R \pm a_L}{\sqrt{2}}. \quad (6.1)$$

Os operadores rotulados R e L estão associados à detecção de um fóton em cada nuvem. Percebemos que a detecção é feita em um estado de superposição do fóton ter sido emitido por cada uma das nuvens. Assim, o estado das nuvem de átomos entra no estado de superposição

$$|\Psi\rangle_{\pm} = \frac{\sigma_{Rsg} \pm \sigma_{Lsg}}{\sqrt{2}} |g\rangle_R |g\rangle_L = \frac{|s\rangle_R |g\rangle_L \pm |g\rangle_R |s\rangle_L}{\sqrt{2}}, \quad (6.2)$$

que é maximamente emaranhado. O operador $\sigma_{Rs,g}$ ($\sigma_{Ls,g}$) acrescenta uma excitação da região $R(L)$ da nuvem. O *swapping* de emaranhamento é feito de forma similar, como mostrado na figura 27(b). A emissão de um segundo fóton é provocada pela interação de uma nuvem de cada par com o laser de leitura, como por exemplo I_1 e I_2 , como na figura.

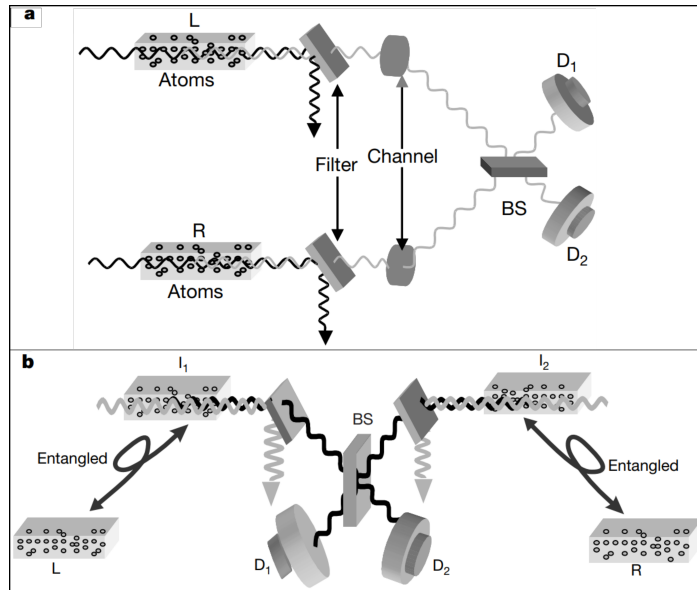


Figura 27 – (a) Montagem para a geração de emaranhamento. Um laser de escrita promove a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ e a emissão de um fóton. A detecção do fóton emitido em um modo de superposição de ter sido emitido por ambas as nuvens gera emaranhamento entre elas. (b) Montagem para conexão de emaranhamento. Temos dois pares de nuvens, L e I_1 , e I_2 e R , emaranhadas no estado $|\Psi\rangle_{\pm}$ (equação 6.2). Ambas as nuvens I_1 e I_2 são excitadas pelo laser de escrita. Se um fóton é detectado em algum dos detectores o processo é completo. Imagem adaptada de [48].

Quando um fóton é detectado em um auto-estado de $a_{\pm}^{\dagger}a_{\pm}$, uma excitação é removida do sistema de quatro nuvens, e a excitação restante passa a estar distribuída entre R e L , que estarão emaranhadas. O sistema R e L passa a ser igual ao que o sistema R e I_2 era anteriormente, com a diferença de que a separação espacial entre as nuvens passa a ser maior.

O esquema DLCZ também se mostrou importante para o estudo de superradiância, realizado pelo nosso grupo em colaboração com o grupo do Prof. Daniel Felinto na UFPE. Esse fenômeno é o aprimoramento da emissão em certos modos por um ensemble de átomos devido a interação com o vácuo. Usando esse esquema proposto, foi possível evidenciar a natureza quântica da superradiância [83, 86, 95, 96]. Seja a nuvem atômica preparada em um estado em que todos os átomos se encontram no estado fundamental $|g\rangle$ e o campo eletromagnético está no estado de vácuo. Após a interação com o laser de escrita, a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ pode ser promovida em um átomo junto com a emissão de um fóton detectado no modo do campo 1. A próxima etapa é onde a parte superradiante do fenômeno acontece. A interação com o laser de leitura pode provocar a transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$ junto com a emissão de um fóton, denominado campo 2. Como há uma superposição quântica de qual átomo emite o fóton no modo 2, há interferência construtiva entre essas situações, fazendo com que o fóton seja emitido mais rapidamente

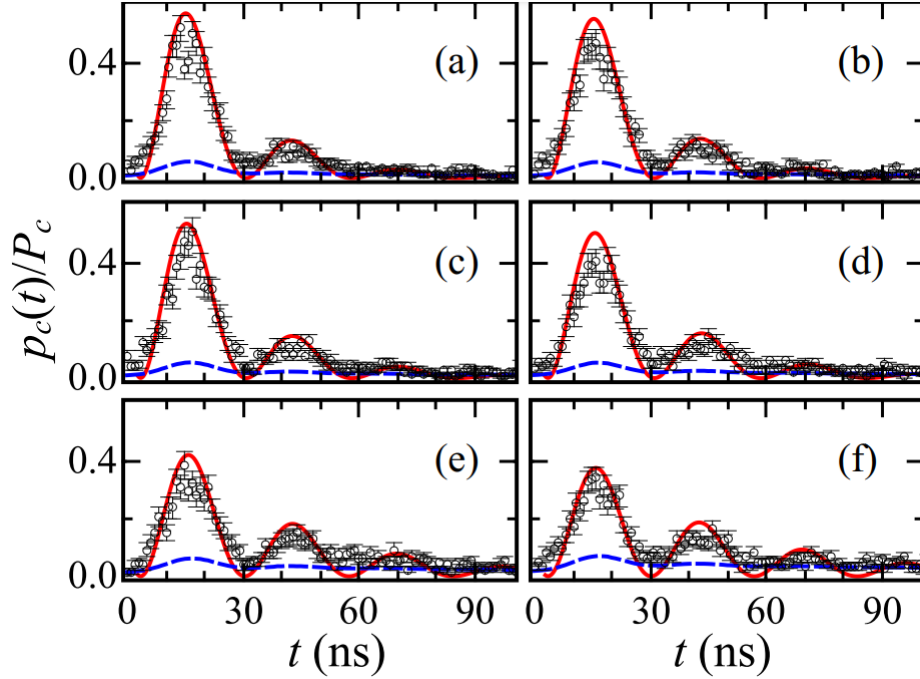


Figura 28 – Os círculos abertos fornecem a probabilidade condicional medida de detectar um fóton no campo 2 dada a detecção de um fóton no campo 1, em função do tempo. Os resultados são mostrados para quatro profundidades ópticas diferentes (proporcionais ao número de átomos N [86]): (a) 4.8, (b) 4.0, (c) 3.4, (d) 2.6, (e) 1.6, e (f) 1.0. A curva vermelha representa a previsão teórica (equação 6.3). A curva pontilhada azul é a probabilidade incondicional. Imagem da referencia [86].

do que se a emissão fosse de um átomo em particular. A probabilidade de emissão do fóton a partir do instante de incidência do feixe de leitura é dada por [96]

$$p(t) = \xi e^{-\frac{\chi\Gamma t}{2}} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (6.3)$$

onde Ω é a frequência de Rabi da transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$ induzida pelo feixe de leitura, Γ é a taxa de decaimento natural do estado excitado, ξ é um termo de normalização e χ é o termo de amplificação superradiante. O termo χ , que é sempre maior que 1, faz com que a emissão do fóton seja mais concentrada perto do tempo igual a 0. Esse termo pode ser calculado [83] e é dado por

$$\chi = 1 + \frac{N}{2W_0^2 k_{ge}^2}, \quad (6.4)$$

em que N é o número de átomos na nuvem, W_0 é a cintura do fóton 1 e k_{ge} é o número de onda do fóton emitido na transição. Esse resultado mostra como a taxa de emissão depende de N . Quanto maior o número de átomos, mais rápida é a emissão do fóton. Resultados experimentais foram obtidos e podem ser vistos na figura 28.

7 Convertendo um modo de luz clássica em um modo quântico

Aqui discutimos como o esquema DLCZ para memórias quânticas pode ser usado para converter um modo de feixe clássico do laser usado no processo de escrita da memória para o modo quântico do fóton emitido no processo de leitura. O esquema permite, assim, a preparação de um fóton no modo espacial definido pelo feixe laser de escrita, podendo ser emitido em um determinado momento controlado pela incidência do feixe de leitura na memória atômica, o que pode ter importantes aplicações em informação quântica. Os resultados apresentados à partir da seção 7.1.1 são originais, e dão prosseguimento à colaboração do nosso grupo com o grupo de ótica quântica liderado pelo Prof. Daniel Felinto, da UFPE [83, 86, 95–97]. Também discutimos um segundo esquema em que o fóton emitido no processo de escrita pode ter o componente z de seu momentum angular orbital correspondendo à soma dos componentes z do momentum angular orbital dos feixes de escrita e leitura. Mostramos que as propostas são factíveis em laboratórios atualmente.

7.1 Transferência de um estado de um feixe de luz clássico para um feixe quântico

7.1.1 Teoria de preparação dos fótons

No esquema proposto, nos baseamos no esquema DLCZ tratado na seção 6.1 e um arranjo experimental tal qual o descrito na figura 25. Cada átomo de uma nuvem atômica possui três níveis de energia, definidos como $|g\rangle$, $|s\rangle$ and $|e\rangle$, na configuração Λ , representada na figura 1 discutida na seção 6.1. Inicialmente, preparamos o sistema em um estado

$$|\Psi_0\rangle = |g\rangle |vac\rangle. \quad (7.1)$$

Aqui, a notação $|g\rangle \equiv \otimes_j |g^{(j)}\rangle$ representa um estado coletivo do sistema em que todos os átomos encontram-se no estado fundamental e $|vac\rangle$ representa o estado de vácuo do campo electromagnético.

Diferentemente dos trabalhos anteriores presentes na literatura, tratamos o campo dos lasers como tendo uma estrutura espacial geral, ao invés de considera-los como ondas planas. Se escrevermos o campo do feixe de escrita como $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{k}_w \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_w) e^{i\mathbf{k}_w \cdot \mathbf{r}_j}$, o operador que descreve o processo de espalhamento pela nuvem atômica quando há emissão

de um fóton durante o processo de escrita pode ser escrito como

$$S_w \propto \sum_j \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_w \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_w) e^{i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{sg,j} a_{\mathbf{k}}^\dagger. \quad (7.2)$$

O estado do sistema após a emissão do fóton pode então ser escrito como $|\Psi_1\rangle \propto S_w |\Psi_0\rangle$. Consideramos agora os casos em que um fóton é detectado no campo de modo $\mathcal{F}(\mathbf{r}_j)_1 = \int d\mathbf{k} \widetilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}$. A detecção de um fóton nesse modo está relacionada com o operador de aniquilação $a_1 = \int d\mathbf{k} \widetilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}$. A detecção de um fóton no campo de modo 1 corresponde a uma projeção do estado $|\Psi_1\rangle$ sobre o estado do campo eletromagnético $a_1^\dagger |vac\rangle$, de forma que o estado da nuvem atômica torna-se

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &\propto \langle vac | a_1 S_w | \Psi_0 \rangle \\ &\propto \sum_j \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_w \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_w) \widetilde{\mathcal{F}}_1^*(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} |s_j\rangle. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Aqui a notação $|s_j\rangle \equiv (\otimes_{i \neq j} |g^{(i)}\rangle) \otimes |s^{(j)}\rangle$ representa o estado coletivo da nuvem em que um átomo de índice j se encontra no nível $|s^{(j)}\rangle$ e todos os outros estão no estado $|g^{(i)}\rangle$.

De maneira semelhante à equação 7.2, o operador que descreve o processo de leitura pode ser escrito como

$$S_r \propto \sum_j \int \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k}_r \widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_r) e^{i(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{gs,j} a_{\mathbf{k}'}^\dagger, \quad (7.4)$$

onde $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_r)$ define o modo do campo do laser de leitura. Quando esse operador atua na nuvem atômica no estado da equação 7.3, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle &\propto \sum_j \int \int \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_w d\mathbf{k}' d\mathbf{k}_r \widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_r) \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k}_w) \widetilde{\mathcal{F}}_1^*(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_w + \mathbf{k}_r - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j} |g\rangle |1\mathbf{k}'\rangle = \\ &= \sum_j \int d\mathbf{k}' \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} |g\rangle |1\mathbf{k}'\rangle, \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde $\mathcal{W}(\mathbf{r})$, $\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r})$, e $\mathcal{R}(\mathbf{r})$ são as transformadas de Fourier de $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{k})$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1^*(\mathbf{k})$, e $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$ respectivamente, e $|1\mathbf{k}'\rangle$ representa um fóton único no modo com vetor de onda \mathbf{k}' .

Já que *todos* átomos estão agora no mesmo estado fundamental, temos um estado separável entre a nuvem atômica e o fóton emitido. Se fizermos a hipótese de que estamos trabalhando com uma nuvem de átomos densa, podemos substituir a soma \sum_j por uma integral $\int d\mathbf{r}_j$ e o estado do fóton emitido torna-se

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &\propto \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{r}_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} |1\mathbf{k}'\rangle \\ &\propto \int d\mathbf{k}' \widetilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}') |1\mathbf{k}'\rangle, \end{aligned} \quad (7.6)$$

com

$$\widetilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}') = \int d\mathbf{r}_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j}. \quad (7.7)$$

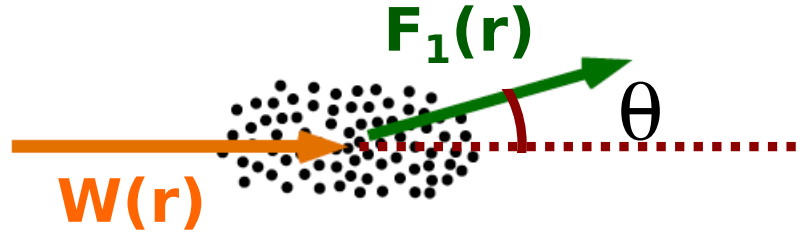


Figura 29 – Ângulo θ entre o feixe de escrita e a direção de propagação do fóton detectado no processo de escrita.

Isso significa que o perfil espacial do campo 2 será uma função do perfil espacial dos outros três campos envolvidos. Mais do que isso, segue naturalmente que o perfil espacial do campo 2 $\mathcal{F}_2(\mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{k} \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{k}}$ é simplesmente o produto do perfil dos outros campos. Esse resultado não é surpreendente quando examinamos cuidadosamente seu significado. A amplitude do campo $\mathcal{F}_2(\mathbf{r}_j)$ está relacionada à probabilidade de haver emissão de fóton no processo de leitura por um átomo na posição \mathbf{r}_j . Para que isso aconteça, a seguinte sequência de eventos deve acontecer. Inicialmente, o átomo na posição \mathbf{r}_j deve sofrer a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ durante o processo de escrita, que ocorre com uma amplitude de probabilidade proporcional a $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)$. A emissão subsequente de fótons deve estar no modo 1, o que ocorre com uma amplitude de probabilidade proporcional a $\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j)$. Este átomo deve então realizar a transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$ no processo de leitura, o que ocorre com uma amplitude de probabilidade proporcional a $\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)$. Assim, essa sequência de eventos ocorre com uma amplitude de probabilidade proporcional ao produto $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}(\mathbf{r}_j)$. Com isso estabelecido, é intuitivo dizer que

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{r}_j) = \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}(\mathbf{r}_j), \quad (7.8)$$

como indicado na equação 7.7. Esse resultado é condizente com um fenômeno de mistura de quatro ondas [98].

7.1.2 Transferência do estado do modo espacial

Mostramos na última subseção que o perfil espacial do fóton emitido no processo de leitura da memória quântica é função dos perfis espaciais de três campos diferentes, como na equação 7.7. Uma vez que esses campos são controláveis, podemos usar a memória quântica para construir um estado quântico de um fóton copiado de estados de luz clássicos, o que pode ser útil para processamento de informações quânticas ou protocolos de criptografia quântica. Por exemplo, se os campos $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}_j)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)$ podem ser considerados ondas planas, de acordo com a equação 7.8 o modo do campo $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)$ do feixe de escrita é perfeitamente transferido para o fóton emitido no processo de leitura.

Em uma modelagem mais realista, os campos $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}_j)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)$ podem ser representados como feixes gaussianos largos

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{r}_j) = e^{-\frac{(x'^2+y'^2)}{w^2}} e^{ikz'}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{r}_j) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2}} e^{-ikz}, \quad (7.9)$$

com $z' = \cos(\theta)z + \sin(\theta)x$ e $x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)z$, onde θ é o ângulo entre o feixe de escrita (que se propaga na direção z) e a direção de propagação do fóton detectado no processo de escrita, no modo $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}_j)$, mostrado na figura 29. Para ilustrar o protocolo, considere que o laser de escrita é um feixe Hermite-Gaussiano da forma

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = H_m \left(\frac{\sqrt{2}\mathbf{y}}{W_w} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}\mathbf{x}}{W_w} \right) e^{-\frac{(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)}{w^2}} e^{ikz}, \quad (7.10)$$

onde $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite de ordem n , tratado na equação 5.10. Os outros termos dos feixes gaussianos variam desprezivelmente dentro da nuvem atômica, que tem dimensões muito menores que o comprimento de Rayleigh z_R do feixe. Para um feixe com comprimento de onda na ordem de centenas de nanômetros e cintura na ordem de dezenas de micrômetros, o comprimento de Rayleigh está na ordem de centímetros. O comprimento considerado da nuvem é de no máximo 1 milímetro. Com cinturas do feixe maiores, obtemos comprimentos de Rayleigh ainda maiores.

Podemos quantificar quão similares são os campos $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)$ e $\mathcal{F}_2(\mathbf{r}_j)$ da equação 7.8 computando a fidelidade dada por

$$\mathfrak{F} = \frac{\left| \int_V d^3r \mathcal{F}_2^*(x, y, z) \mathcal{W}(x', y, z') \right|^2}{\left[\int_V d^3r |\mathcal{F}_2(\mathbf{r})|^2 \right]^{1/2} \left[\int_V d^3r |\mathcal{W}(\mathbf{r})|^2 \right]^{1/2}}, \quad (7.11)$$

onde V é o volume da nuvem atômica definida por uma largura Δ na direção \mathbf{z} e uma área grande A no plano xy , e temos $z' = \cos(\theta)z + \sin(\theta)x$ e $x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)z$, como antes. A figura 30 mostra como esse valor varia em função das razões das larguras dos feixes quando $\theta = 0$, ângulo tal que o resultado independe de Δ .

A fidelidade da equação 7.11 cai em função de θ e da largura Δ da nuvem atômica. Quanto menor a nuvem, menor é a queda de fidelidade em função do ângulo. A dependência da fidelidade em θ é mostrada na figura 31. Podemos ver que para $\theta < 2^\circ$ a fidelidade não muda apreciavelmente se $\Delta = 1\text{mm}$.

Outros modos interessantes podem ser transferidos do laser de escrita para o estado quântico do fóton emitido no processo de leitura. Por exemplo, o feixe de escrita pode ser formado pela imagem de uma fenda dupla projetada na nuvem atômica. Dessa forma, a propagação livre do fóton emitido deve apresentar franjas de interferência, enquanto a projeção da imagem da nuvem no plano de detecção desse fóton deve apresentar os dois picos da fenda. Se, por outro lado, a transformada de Fourier da fenda dupla é projetada na nuvem no processo de escrita, a projeção da transformada de Fourier da nuvem no plano de detecção do fóton emitido deve apresentar os dois picos da fenda. Uma simulação é apresentada na figura 32.

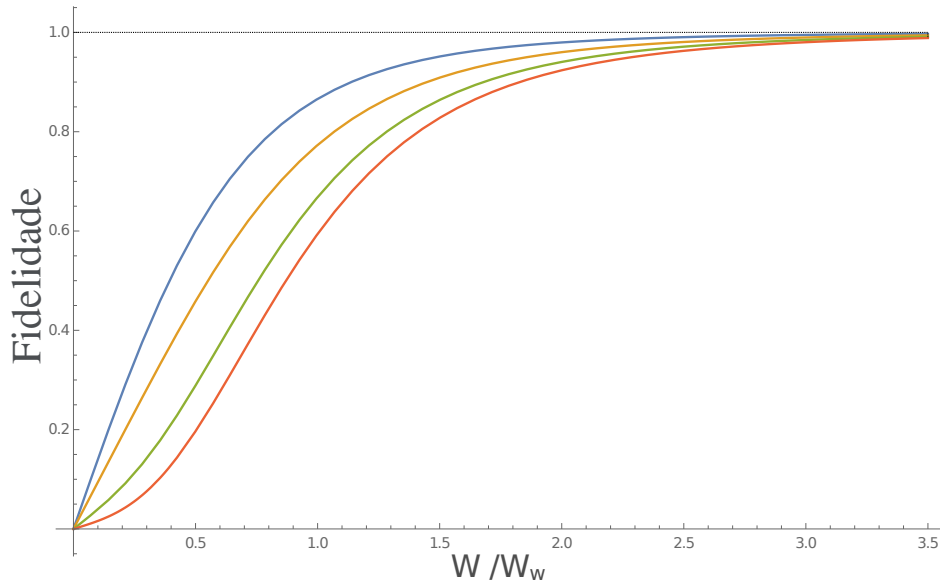


Figura 30 – Fidelidade da equação 7.11 quando $\mathcal{W}(\mathbf{r}_j)$ é dado pela equação 7.10 e $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}_j)$ e $\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)$ são dados pela equação 7.9 com $\theta = 0$. As cores azul, laranja, verde e vermelho representam os valores 0, 1, 2 e 3 respectivamente para $n = m$ no estado da equação 7.10. W_w representa a largura do feixe do laser de escrita e W a largura de ambos laser de leitura e o modo do campo 1.

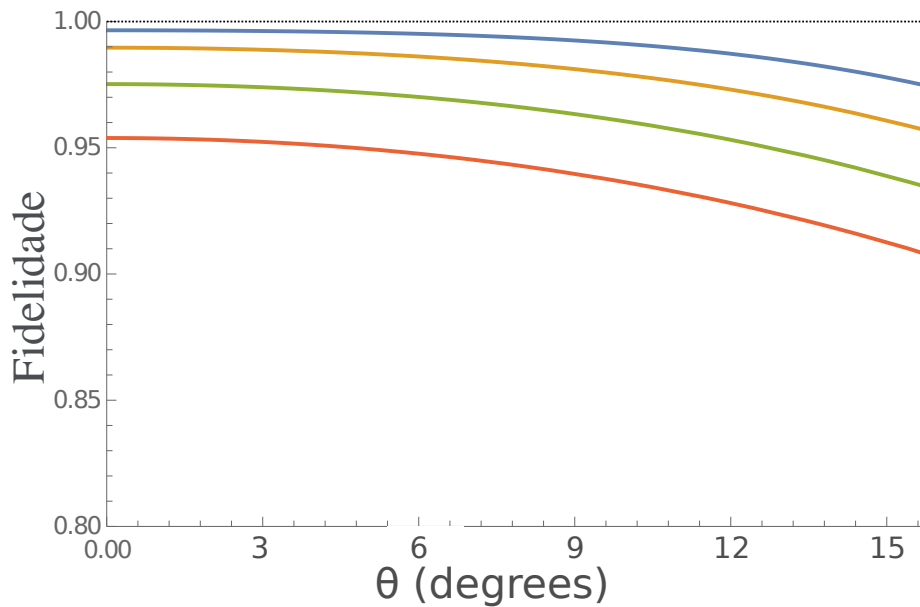


Figura 31 – Fidelidade da equação 7.11 em função do ângulo entre a direção de propagação do laser de escrita e o campo 1. Consideramos $W_w = 50\mu\text{m}$ na equação 7.10, $W = 200\mu\text{m}$ na equação 7.9, e $\Delta = 1\text{mm}$. As cores representam os mesmos modos que a figura 30.

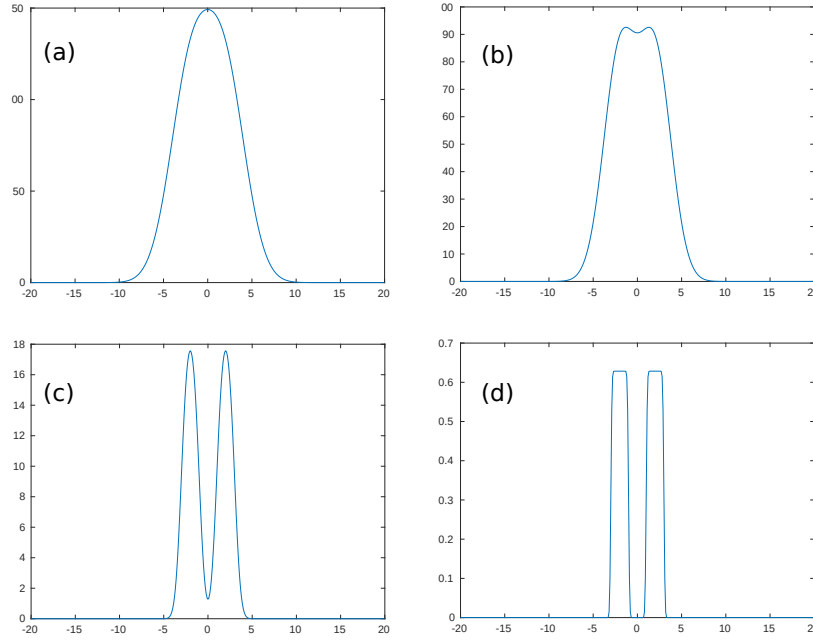


Figura 32 – Simulação do perfil espacial do campo 2 quando o laser de escrita passa por uma fenda dupla. Consideramos uma configuração na qual existem duas lentes em uma configuração $f - f$, entre a fenda e a nuvem e entre a nuvem e o detector. O perfil dos feixes \mathcal{W} , \mathcal{F}_1 e \mathcal{R} é considerado gaussianos com largura W , como representados na equação 5.5. Nas figuras *a*, *b*, *c* e *d*, tanto a largura das fendas quanto a largura do espaço entre elas foram consideradas como sendo $6W$, $4W$, $2W$ e W respectivamente. É mostrado que quanto mais largos são os feixes quando comparados às dimensões da fenda, mais próximo o campo 2 será de ter o perfil igual ao do laser de escrita

7.2 Transferência e adição de momentum angular

Foi mostrado na subseção 7.1.1 que, dadas as condições certas, o fóton no modo do campo 2 pode ter as mesmas características espaciais que o laser de escrita, até alguma alta fidelidade. Portanto, se o laser de escrita tiver algum momentum angular orbital, ele será transferido para o campo 2. O que queremos fazer agora é considerar o caso em que não apenas o laser de escrita tem uma estrutura relevante, mas também o laser de leitura. Especificamente, queremos tratar o caso em que ambos os lasers têm um valor de momentum angular orbital diferente de zero. Vamos supor novamente que os lasers são aproximadamente colimados, de modo que podem ser descritos pelos modos Laguerre-Gaussianos na forma não normalizada

$$\mathcal{W}_{\ell_w}^{m_w}(\rho, \phi, \mathbf{z}) = \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{W_w}\right)^{m_w} e^{-\frac{\rho^2}{W_w^2}} L_{\ell_w}^{m_w}\left(\frac{2\rho^2}{W_w^2}\right) e^{-im_w\phi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}, \quad (7.12)$$

$$\mathcal{R}_{\ell_r}^{m_r}(\rho, \phi, \mathbf{z}) = \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{W}\right)^{m_r} e^{-\frac{\rho^2}{W^2}} L_{\ell_r}^{m_r}\left(\frac{2\rho^2}{W^2}\right) e^{-im_r\phi} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}, \quad (7.13)$$

$$\mathcal{F}_{1\ell_1}^{m_1}(\rho', \phi', \mathbf{z}') = \left(\frac{\rho'\sqrt{2}}{W}\right)^{m_1} e^{-\frac{\rho'^2}{W^2}} L_{\ell_1}^{m_1}\left(\frac{2\rho'^2}{W^2}\right) e^{-im_1\phi'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}'}. \quad (7.14)$$

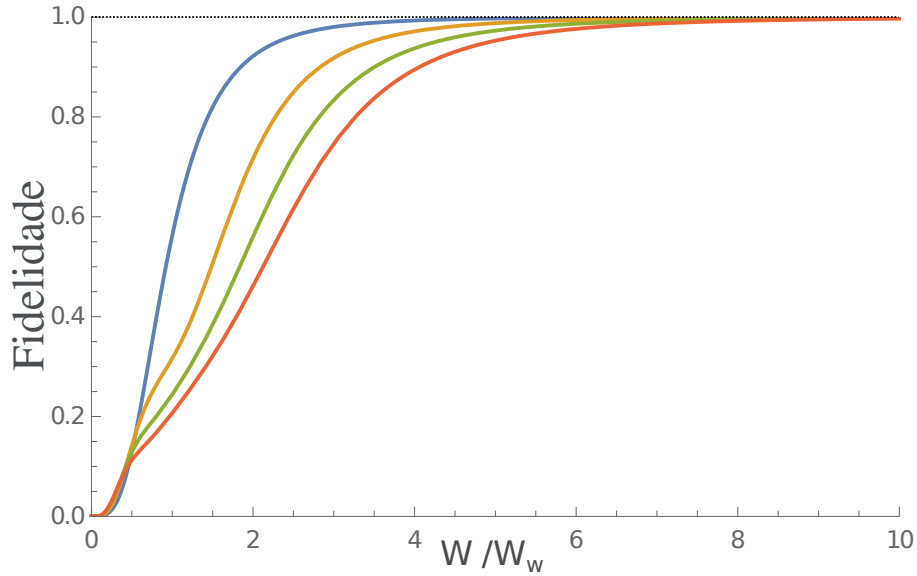


Figura 33 – Fidelidade entre o campo 2 e o laser de escrita quando adicionamos o momento angular dos outros dois campos, dada pela equação 7.15. Aqui usamos $m_w = m_r = 1$. As cores azul, laranja, verde e vermelho representam respectivamente os valores 0, 1, 2, e 3 de ℓ_w . Aqui vemos que resultados sub-ótimos são alcançados usando valores grandes de ℓ_w , mas apesar disso quando a largura W é suficientemente grande em comparação à W_w , o erro é reduzido.

Como o campo 2 será um produto dos três campos originais, conforme indicado na equação 7.8, ele terá o termo $e^{i(m_r+m_w-m_1)\phi}$. Este resultado nos motiva a encontrar um regime onde $\mathcal{F}_2 \approx \mathcal{W}_{\ell_w}^{m_r+m_w-m_1}$. Em outras palavras, estamos procurando um conjunto de parâmetros que farão com que o campo 2 tenha as mesmas características espaciais do laser de escrita, exceto pelo seu momentum angular orbital, que será somado ao momentum angular dos demais campos. Por uma questão de simplicidade, vamos primeiro investigar o caso em que \mathcal{F}_1 está em um modo gaussiano ($\ell_1 = 0$ e $m_1 = 0$). Na verdade, também faremos $\ell_r = 0$. Podemos estimar quantitativamente o quão próximos estamos de nosso objetivo, calculando a fidelidade entre os campos gerados e desejados, dada por:

$$\mathfrak{F} = \frac{\left| \int \int d\rho d\phi \rho \mathcal{W}_{\ell_w}^{*m_w+m_r} \mathcal{F}_2 \right|^2}{\left[\int \int d\rho d\phi \rho |\mathcal{W}_{\ell_w}^{*m_w+m_r}|^2 \int \int d\rho d\phi \rho |\mathcal{F}_2|^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.15)$$

É intuitivo que o valor de \mathfrak{F} seja maior para valores maiores de W . Isso porque se $W \gg W_w$, quando visto na escala de W_w , o campo \mathcal{F}_1 é aproximadamente constante e o campo \mathcal{R} também é aproximadamente constante na ausência do termo $\exp(im\phi)$. Isso é mostrado na figura 33.

Uma vez que nosso interesse está na adição de momentum angular orbital, podemos usar as informações na figura 33 para decidir nos limitar à $\ell_w = 0$ e à razão W/W_w grande o suficiente, por exemplo $W/W_w = 4$. Com isso em mente, podemos investigar a influência

Tabela 1 – Valores de \mathfrak{F} da equação 7.15 para alguns pares de m_w (linhas) e m_r (colunas). Aqui usamos $W_r/W_w = 4$, $\ell_w = 0$ e $\theta = 0^\circ$.

	0	1	2	3
0	0.9965	0.9931	0.9897	0.9862
1	0.9931	0.9897	0.9862	0.9828
2	0.9897	0.9862	0.9828	0.9794
3	0.9862	0.9828	0.9794	0.9760

Tabela 2 – Valores de \mathfrak{F} da equação 7.15 para alguns pares de m_w (linhas) e m_r (colunas). Aqui usamos $W/W_w = 4$, $\ell = 0$ e $\theta = 1^\circ$ (primeira tabela) e $\theta = 3^\circ$ (segunda tabela).

	0	1	2	3
0	0.9871	0.9837	0.9802	0.9767
1	0.9837	0.9802	0.9767	0.9733
2	0.9802	0.9767	0.9733	0.9698
3	0.9767	0.9733	0.9698	0.9664

	0	1	2	3
0	0.9158	0.9197	0.9122	0.9076
1	0.9197	0.9122	0.9076	0.9036
2	0.9122	0.9076	0.9036	0.8999
3	0.9076	0.9036	0.8999	0.8962

dos valores de m_w e m_r quando calculando \mathfrak{F} . Por questões de simetria, apenas a soma $m_w + m_r$ é relevante e não os valores individuais. Isso é mostrado na tabela 1.

O único parâmetro que resta a ser investigado aqui é o ângulo θ entre a direção do feixe do modo \mathcal{F}_1 e a direção z . Fazemos isso recriando os resultados na tabela 1, exceto que alteramos θ . Vemos esses resultados na tabela 2. Vemos que para ângulos θ da ordem de 1 grau não há muita variação na fidelidade em relação a um ângulo nulo.

Trabalhos similares na literatura [83, 86, 96] usam feixes com larguras entre 100 e $400\mu m$, e ângulos entre 2 e 3° . Os parâmetros necessários para a realização dos experimentos aqui propostos são realistas para sistemas presentes em laboratórios atualmente.

8 Emaranhamento testemunhado por padrão de interferência

Aqui nosso objetivo é usar o esquema experimental usado nas seções anteriores para estudar o análogo ao emaranhamento gerado pela emissão de um fóton por dois átomos. O fenômeno é como segue. Sejam dois átomos de dois níveis de energia - um fundamental e um excitado - rotulados como anteriormente. Inicialmente ambos os átomos se encontram no estado excitado. Um detector capaz de detectar fótons únicos é posicionado de forma que consiga atestar a emissão de um fóton por qualquer um dos átomos. Se o detector conta um fóton, mas é fundamentalmente incapaz de distinguir sua origem, criamos uma superposição dos dois possíveis estados após a emissão (figura 34(a)). O estado dos átomos após a detecção é

$$\alpha |g\rangle_1 |e\rangle_2 + \beta |e\rangle_1 |g\rangle_2, \quad (8.1)$$

em que $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ são as probabilidades de cada um dos átomos ter sido o responsável pela emissão, e os números 1 e 2 são rótulos atribuídos aos átomos. O estado é emaranhado se $0 \neq |\alpha| \neq 1$. Quando $|\alpha|^2 = |\beta|^2$, o estado é maximamente emaranhado. Observamos que um sistema de átomos inicialmente separável torna-se emaranhado pela detecção de um fóton, operação que não interage diretamente com os átomos. Após uma segunda emissão, o estado dos átomos volta a ser separável na forma $|g\rangle_1 |g\rangle_2$. A evidência desse emaranhamento estará presente no estado espacial do segundo fóton emitido, que estará em uma superposição de ter sido emitido por cada um dos átomos (figura 34(b)).

A situação descrita na figura 34, até onde sabemos, nunca implementada experimentalmente, é uma excelente ilustração de vários princípios básicos da física quântica, tal como indistinguibilidade, interferência e emaranhamento. Nossa objetivo é ser capaz de realizar um experimento que não seja análogo apenas matematicamente, mas que de fato envolva a detecção de um padrão de interferência de luz que se propaga pelo espaço livre tal qual em um experimento de fenda dupla, gerada por dois sistemas radiantes emaranhados.

Para produzir essa situação no laboratório, podemos utilizar o laser de escrita para iluminar nossa nuvem de átomos frios e estimular a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$. Diferente das propostas anteriores, estamos interessados em situações em que duas excitações foram absorvidas pela nuvem. Mais especificamente, posicionamos detectores capazes de garantir que os fótons foram emitidos de duas regiões espacialmente distintas da nuvem. Cada uma dessas regiões pode ser entendida como um dos átomos na figura 34. Se um fóton foi emitido de cada região, preparamos o estado $|s\rangle_1 |s\rangle_2$, em que cada região da nuvem

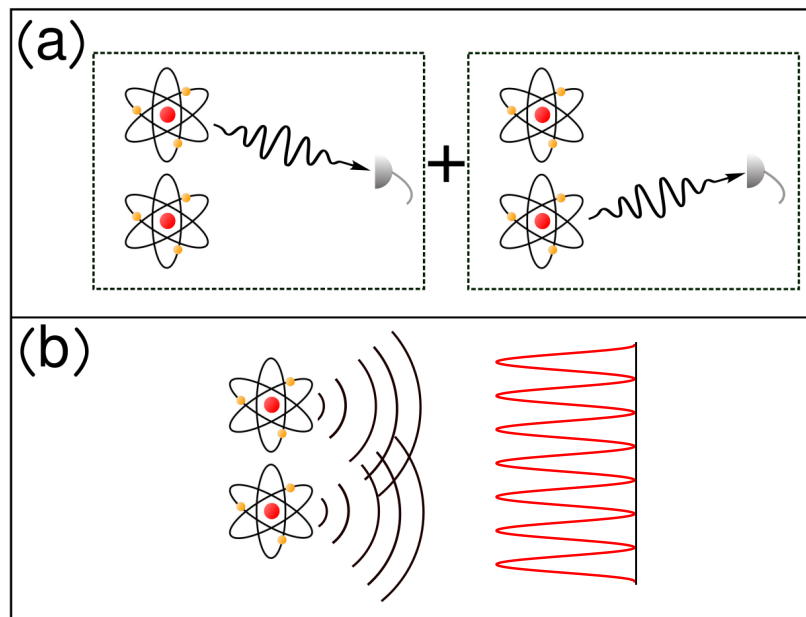


Figura 34 – (a) Um detector é capaz de detectar a emissão de um fóton vindo de algum dos dois átomos, mas não é capaz de distinguir entre eles. Quando um fóton é detectado, a indistinguibilidade sobre qual átomo emitiu o fóton leva à superposição das duas situações. (b) Quando um par de átomos com um total de uma excitação distribuída coerentemente emite um fóton, ele é emitido em um estado de superposição tal qual uma fenda dupla.

tem uma excitação. Aqui os rótulos 1 e 2 se referem à cada região. Após a preparação desse estado, um pulso do feixe de leitura pode estimular a transição $|s\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$ e a emissão de um fóton. Se esse fóton for detectado em condições tais que não há nenhuma informação sobre sua origem, o estado das nuvens passa a ser o estado emaranhado $1/\sqrt{2}(|g\rangle_1 |s\rangle_2 + e^{i\phi} |s\rangle_1 |g\rangle_2)$, em que ϕ é uma fase que depende do modo do primeiro fóton detectado. Nesse momento, se a emissão de mais um fóton for estimulada por outro pulso de laser de leitura, mais um fóton será emitido. Esse segundo fóton pode ser emitido de qualquer uma das regiões. Mais do que isso, o segundo fóton é emitido de uma superposição das duas regiões, tal qual uma fenda dupla. Isso quer dizer que o perfil espacial em um plano distante desse fóton será detectado em um padrão de interferência, como na figura 34(b), evidenciando o emaranhamento anterior entre as regiões da nuvem.

Trabalhos em que átomos são emaranhados em processos como os representados na figura 3.4(a) são presentes na literatura [99–101].

Tratamos agora quantitativamente esse conceito aplicado ao sistema experimental específico, passo a passo. Separamos o processo em duas partes: a preparação do sistema, que vai até a detecção representada na figura 34(a); e a detecção do fóton em um estado de superposição, representada na figura 34(b). O processo segue basicamente as mesmas etapas dos protocolos anteriores. A diferença principal é a absorção de duas excitações pela

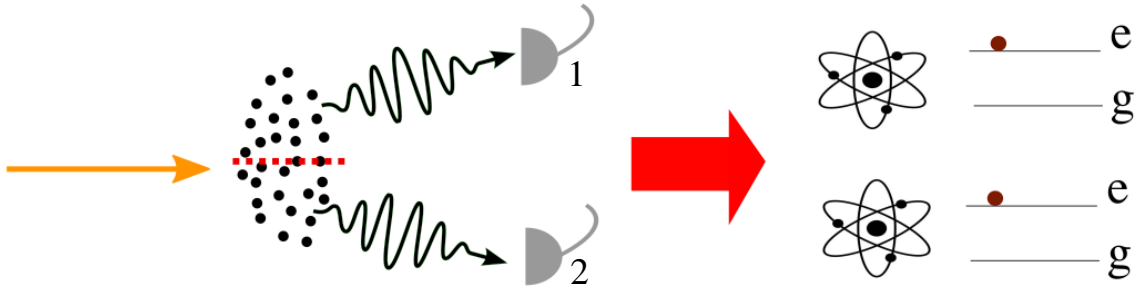


Figura 35 – A detecção de um fóton proveniente de cada parte da nuvem leva o sistema a um estado análogo à dois átomos com uma excitação cada.

nuvem. O protocolo é similar a outros trabalhos presentes na literatura [102]. O vemos em detalhe nas seções seguintes.

8.1 Preparação

Inicialmente, os átomos estão no estado $|g\rangle$ e o campo eletromagnético está no estado de vácuo. O estado desse sistema é portanto igual ao estado inicial das secções anteriores, descrito na equação 7.1. Após a interação com o laser de escrita, são absorvidas *duas* excitações pela nuvem, com a emissão de dois fótons. Há uma indistinguibilidade fundamental de quais átomos, rotulados como índices j e ℓ , fizeram a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow s$. Os fótons emitidos estarão em superposições de vetores de onda rotulados por \mathbf{k} e \mathbf{k}' . Essa interação é representada pelo mesmo operador apresentado na equação 7.2, atuando duas vezes. Isso é,

$$\begin{aligned} & \sum_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \sigma_{gs,j} \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} a_{\mathbf{k}}^\dagger \sum_\ell \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) \sigma_{gs,\ell} \int d\mathbf{k}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_\ell} a_{\mathbf{k}'}^\dagger = \\ & = \sum_{j,\ell} \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_\ell)} \sigma_{gs,j} \sigma_{gs,\ell} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Não estamos aqui preocupados com o perfil espacial do laser de escrita. Sua função nesse experimento é exclusivamente excitar os átomos. Idealmente, podemos trata-lo como uma onda plana por simplicidade, porém optamos por manter a maior generalidade possível por enquanto. O estado após essa operação é

$$|\Psi_1\rangle \propto \sum_{j,\ell} \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_\ell)} |s_j, s_\ell\rangle |1\mathbf{k}, 1\mathbf{k}'\rangle. \quad (8.3)$$

Os fótons emitidos são detectados nos modos $a_1 = \int d\mathbf{k}_1 \tilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_1)$ e $a_2 = \int d\mathbf{k}_2 \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_2)$. As amplitudes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 conjugadas a esses modos, tem como função determinar as duas regiões análogas aos dois átomos da figura 34. A analogia com o exemplo anterior pode ser vista na figura 35. Após as detecções, o sistema é levado ao estado

$$\begin{aligned}
 |\Psi_2\rangle &= \langle vac| a_1 a_2 |\Psi_1\rangle \propto \\
 \sum_{j,\ell} |s_j, s_\ell\rangle &\int \int \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_2 \tilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}_1) \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}_2) \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_\ell)} \langle vac| a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) |1\mathbf{k}, 1\mathbf{k}'\rangle.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

O produto escalar da equação 8.4 tem os seguintes dois termos:

$$\langle vac| a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) |1\mathbf{k}, 1\mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1). \tag{8.5}$$

Isso nos permite reescrever o estado na forma

$$\begin{aligned}
 |\Psi_2\rangle &\propto \sum_{j,\ell} \int \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \tilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}_1) \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_w \cdot (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_\ell)} \left[e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_\ell)} + e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_\ell)} \right] |s_j, s_\ell\rangle \propto \\
 &\propto \sum_{j,\ell} \left[\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j) \right] e^{-i\mathbf{k}_w \cdot (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_\ell)} |s_j, s_\ell\rangle,
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

usando o fato de que

$$\begin{aligned}
 \int \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \tilde{\mathcal{F}}_1(\mathbf{k}_1) \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathbf{k}_2) \left[e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_\ell)} + e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_\ell)} \right] &\propto \\
 \propto \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j). &
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Após, a nuvem interage com um pulso do laser de leitura removendo uma excitação, assim como feito nas propostas anteriores. Nessa interação é emitido um fóton. Novamente, as propriedades espaciais desse laser não são relevantes e ele idealmente poderia ser tratado como onda plana. O estado do sistema após a interação é levado a

$$\begin{aligned}
 |\Psi_3\rangle &\propto \sum_m \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_m) \sigma_{sg,m} \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} a^\dagger(\mathbf{k}) |\Psi_2\rangle = \\
 &= \sum_m \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_m) \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} |1\mathbf{k}\rangle \sum_{j,\ell} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] \sigma_{sg,m} |s_j, s_\ell\rangle.
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Conhecemos a atuação dos operadores. Especificamente, como $\sigma_{sg,m}$, operador responsável por remover uma excitação do átomo localizado na posição m , pode remover qualquer uma das duas excitações, sabemos que

$$\sigma_{sg,m} |s_j, s_\ell\rangle = \delta_{m,j} |g_j, s_\ell\rangle + \delta_{m,\ell} |s_j, g_\ell\rangle. \tag{8.9}$$

Assim como no capítulo anterior, omitimos os estados fundamentais da notação. Reescrevemos o estado como

$$\sum_{j,\ell} \int d\mathbf{k} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] [\mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |s_\ell\rangle + \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\ell} |s_j\rangle] |1\mathbf{k}\rangle. \tag{8.10}$$

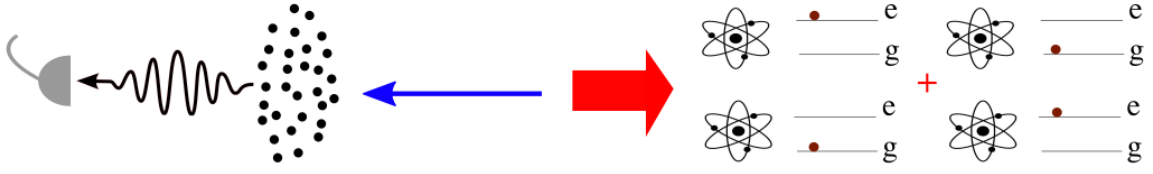


Figura 36 – A detecção de um fóton em um modo que não dá informação completa sobre sua origem, leva o sistema a um estado emaranhado.

A detecção do terceiro fóton é feita no modo $a_3 = \int d\mathbf{k}_3 \tilde{\mathcal{F}}_3(\mathbf{k}_3) a(\mathbf{k}_3)$. O estado do sistema imediatamente após é

$$\begin{aligned}
 |\Psi_4\rangle &= \langle vac | a_3 | \Psi_3 \rangle \propto \\
 &\propto \sum_{j,\ell} \int d\mathbf{k}_3 \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] \times \\
 &\quad \times [e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_j} \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j) |s_\ell\rangle + e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_\ell} \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell) |s_j\rangle] \tilde{\mathcal{F}}_3(\mathbf{k}_3) = \\
 &= \sum_{j,\ell} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] [\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j) |s_\ell\rangle + \mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell) |s_j\rangle]
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Esse terceiro fóton, detectado no modo \mathcal{F}_3 , é equivalente ao primeiro fóton detectado no exemplo representado na figura 34(a). Ele é o responsável por gerar o emaranhamento entre os átomos, ou no nosso caso, entre as regiões da nuvem. Ele precisa ser detectado em um modo que não carrega informação sobre a posição de sua origem. Idealmente, ele seria detectado em um modo de onda plana.

Com isso terminamos a preparação do sistema. Existe uma excitação no sistema distribuída entre duas regiões distintas da nuvem. A analogia com o primeiro exemplo pode ser vista na figura 36

8.2 Detecção

Para estimularmos a emissão da última excitação, o sistema interage mais uma vez com um laser de leitura. Após essa interação, temos

$$\begin{aligned}
 |\Psi_5\rangle &\propto \sum_m \mathcal{R}_2(\mathbf{r}_m) \sigma_{sg,m} \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} a^\dagger(\mathbf{k}) |\Psi_4\rangle = \\
 &= \sum_{j,\ell} \int d\mathbf{k} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] \times \\
 &\quad \times \sum_m [\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}_2(\mathbf{r}_m) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \sigma_{sg,m} |s_\ell\rangle + \mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{R}_2(\mathbf{r}_m) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \sigma_{sg,m} |s_j\rangle] |1\mathbf{k}\rangle = \\
 &= \sum_{j,\ell} \int d\mathbf{k} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j) \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] \times \\
 &\quad \times [\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j) \mathcal{R}_2(\mathbf{r}_\ell) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_\ell} + \mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell) \mathcal{R}_2(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}] |1\mathbf{k}\rangle
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Esse estado representa a nuvem com todos os átomos mais uma vez no estado fundamental, juntamente com um fóton. Vemos a partir disso que o espectro desse fóton emitido é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \propto \sum_{j,\ell} \mathcal{W}(\mathbf{r}_j)\mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell) [\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j)\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell) + \mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_j)] \times \\ \times [\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_j)\mathcal{R}_1(\mathbf{r}_j)\mathcal{R}_2(\mathbf{r}_\ell)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\ell} + \mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{R}_1(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{R}_2(\mathbf{r}_j)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Assumimos agora que ambos os lasers de leitura tem o mesmo perfil. Se a nuvem é densa o suficiente para que possamos tratar o somatório na posição dos átomos como uma integral, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \propto \int d\mathbf{r}_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_j)\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j)\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_j) \int d\mathbf{r}_\ell \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{R}(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\ell} + \\ + \int d\mathbf{r}_j \mathcal{W}(\mathbf{r}_j)\mathcal{R}(\mathbf{r}_j)\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}_j)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \int d\mathbf{r}_\ell \mathcal{W}(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{R}(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r}_\ell)\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r}_\ell) = \\ = \int d\mathbf{r} \mathcal{W}(\mathbf{r})\mathcal{R}(\mathbf{r}) [A_1\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r}) + A_2\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Aqui definimos $A_1 = \int d\mathbf{r} \mathcal{W}(\mathbf{r})\mathcal{R}(\mathbf{r})\mathcal{F}_2^*(\mathbf{r})\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r})$ e $A_2 = \int d\mathbf{r} \mathcal{W}(\mathbf{r})\mathcal{R}(\mathbf{r})\mathcal{F}_1^*(\mathbf{r})\mathcal{F}_3^*(\mathbf{r})$.

Nessa altura, avanços analíticos tornam-se difíceis sem que façamos hipóteses sobre os feixes. Primeiramente, seguiremos o desenvolvimento fazendo algumas hipóteses sobre os feixes. Em seguida calculamos numericamente a equação 8.14 de forma mais geral.

8.3 Aproximações

Fazemos a hipótese de que os lasers podem ser considerados como ondas planas contra-propagantes. Os resultados do capítulo anterior, vistos nas figuras 30 e 31, corroboram com o fato de que essas aproximações são razoáveis dentro das condições experimentais. Supomos também que \mathcal{F}_3 também pode ser tratado como onda plana. Assim,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) \propto \int d\mathbf{r} [A_1\mathcal{F}_1(\mathbf{r}) + A_2\mathcal{F}_2(\mathbf{r})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (8.15)$$

Os outros modos de detecção \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são tratados como Gaussianas iguais, a não ser por uma translação no plano normal à direção de propagação. Para uma nuvem fina na direção de propagação, podemos considerar apenas as funções

$$\mathcal{F}_1(x, 0, 0) = e^{-\frac{(x+d)^2}{w^2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_2(x, 0, 0) = e^{-\frac{(x-d)^2}{w^2}}, \quad (8.16)$$

e suas funções conjugadas

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(q, 0, 0) = e^{-\frac{q^2 w^2}{4}} e^{-idq} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{F}}_2(q, 0, 0) = e^{-\frac{q^2 w^2}{4}} e^{idq}, \quad (8.17)$$

em que d é a distancia no plano $z = 0$ entre o centro das gaussianas e a origem do sistema de coordenadas.

Nessas condições, por questões de simetria podemos ver que as constantes A_1 e A_2 possuem o mesmo módulo. Como a diferença de fase entre elas não é importante para o resultados almeçados nessa subseção, desprezamos-as nesse momento. Dessa forma temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(q, 0, 0) &\propto \int dx [\mathcal{F}_1(q, 0, 0) + \mathcal{F}_2(q, 0, 0)] e^{iqx} = \\ &= \tilde{\mathcal{F}}_1(q, 0, 0) + \tilde{\mathcal{F}}_2(q, 0, 0).\end{aligned}\quad (8.18)$$

No foco de uma lente de distancia focal f em uma configuração $f - f$, o perfil espacial do feixe é a transformada de Fourier do feixe no plano $z = 0$ [68], i.e.

$$\mathcal{F}(x, 0, 2f) = \tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{x}{\lambda f}, 0, 0\right).\quad (8.19)$$

Assim, a intensidade medida para esse fóton em função da direção em que as funções estão separadas é o módulo ao quadrado da transformada de Fourier óptica de $\mathcal{F}(x, 0, 0)$, ou seja

$$\begin{aligned}I(x, 0, 2f) &\propto \left| e^{\frac{W^2 x^2}{2\lambda^2 f^2} + \frac{idx}{\lambda f}} + e^{\frac{W^2 x^2}{2\lambda^2 f^2} - \frac{idx}{\lambda f}} \right|^2 \\ &\propto e^{\frac{W^4 x^4}{4\lambda^4 f^4}} \left| 1 + e^{\frac{2idx}{\lambda f}} \right|^2 \\ &\propto e^{\frac{W^4 x^4}{4\lambda^4 f^4}} \left(1 + \cos \frac{2dx}{\lambda f} \right),\end{aligned}\quad (8.20)$$

que é um padrão de interferência modulado por um pacote gaussiano.

8.4 Abordagem realista

Calculamos agora o perfil do feixe sem fazer as hipóteses tratadas anteriormente. Consideramos agora todos os feixes envolvidos como modos gaussianos, tais como definidos na equação 5.5. Consideramos também que existe um ângulo θ entre a direção de propagação dos lasers e a direção de propagação dos modos de detecção \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . O esquema é ilustrado na figura 37. Uma lente na trajetória dos feixes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 é usada para fazer a imagem das funções no plano da nuvem conforme a equação 8.16. Uma lente na trajetória dos feixes \mathcal{F} e \mathcal{F}_3 é usadas para que a amplitude da luz no plano de detecção esteja associada à transformada de Fourier da amplitude da luz emitida pela nuvem de átomos. Isso é obtido se os detectores estiverem posicionados no plano focal das lentes [68].

Para os feixes \mathcal{W} e \mathcal{R} , usamos uma largura seis vezes maior que a dos feixes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , como apresentado na figura 38. Escolhemos $\theta = 2^\circ$. No capítulo anterior estabelecemos que esses parâmetros são bons o suficiente para estarmos no regime desejado.

A detecção de \mathcal{F}_3 é feita por uma fibra mono-modo gaussiano, livre para transladar em um trilho, como representado na figura 39. Como a fibra é montada no plano focal de uma lente, uma translação nesse plano está associada a uma translação do vetor de onda do feixe na nuvem. Como os coeficientes A_1 e A_2 da equação 8.14 dependem de \mathcal{F}_3 ,

essa mudança de direção acarreta em uma diferença de fase entre esses dois termos. Seja $u(x, y, z, W)$ um modo gaussiano de largura W definido como

$$u(x, y, z, W) = E_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{W}} e^{ikz}. \quad (8.21)$$

Os outros termos apresentados na equação 5.5 podem ser desconsiderados, já que a integral da equação 8.14 é feita no volume da nuvem, que tem dimensões muito menores que o comprimento de Rayleigh dos feixes. As funções usadas para computar a equação 8.14 são portanto

$$\mathcal{F}_1 = u(x + d, y, z, W) \quad (8.22)$$

$$\mathcal{F}_2 = u(x - d, y, z, W) \quad (8.23)$$

$$\mathcal{W} = u(x', y, z', 6W) \quad (8.24)$$

$$\mathcal{R} = u(x', y, -z', 6W) \quad (8.25)$$

$$\mathcal{F}_3 = \tilde{u}\left(\frac{x''}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}, z'', W\right). \quad (8.26)$$

Mais uma vez usamos $z' = \cos(\theta)z + \sin(\theta)x$ e $x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)z$, onde θ é o ângulo entre a direção de propagação de \mathcal{W} e \mathcal{F}_1 como visto na figura 37. Definimos também $z'' = \cos(\theta_2)z + \sin(\theta_2)x$ e $x'' = \cos(\theta_2)x - \sin(\theta_2)z$, onde θ_2 é definido pela aproximação $\theta_2 \approx x_3/f$, como visto na figura 39. O modo \mathcal{F}_3 está associado a uma transformada de Fourier porque sua detecção é feita no plano focal da lente. A detecção de um modo de largura W está portanto associada a um modo de largura $\lambda f/W$ dentro da nuvem. Assumindo $W = 100\mu\text{m}$, $f = 1\text{m}$ e $\lambda = 500\text{nm}$, isso nos levaria a uma largura na nuvem igual a 5mm . Em outras palavras, o feixe \mathcal{F}_3 dentro da nuvem é muito largo na escala em

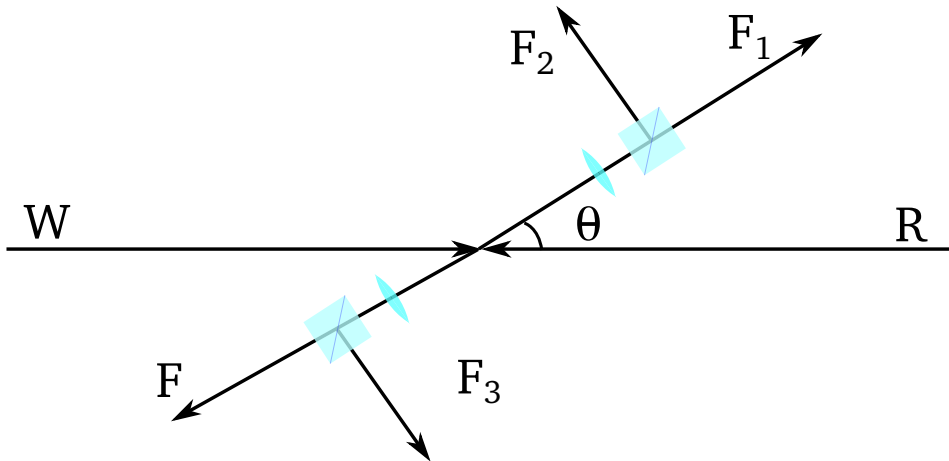


Figura 37 – Direções relativas entre os feixes tratados no esquema. As lentes nos feixes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são usadas para fazer a imagem do plano central da nuvem de átomos no plano dos detectores de fótons. As lentes nos feixes \mathcal{F}_3 e \mathcal{F} fazem a transformada de Fourier do plano da nuvem. O detector que seleciona \mathcal{F}_3 pode transladar de forma a selecionar um modo diferente.

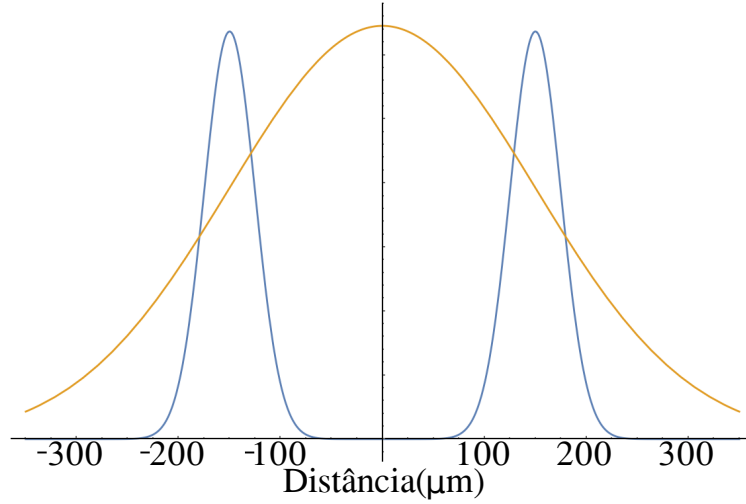


Figura 38 – Intensidade na direção x dos feixes $\mathcal{F}_1(x, 0, 0) + \mathcal{F}_2(x, 0, 0)$ (azul) e $\mathcal{W}(x, 0, 0)$ (laranja). A largura de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 é $W_0 = 50\mu\text{m}$, a separação entre eles é $2d = 300\mu\text{m}$. A largura de \mathcal{W} é $W = 300\mu\text{m}$ e o ângulo é $\theta = 2^\circ$.

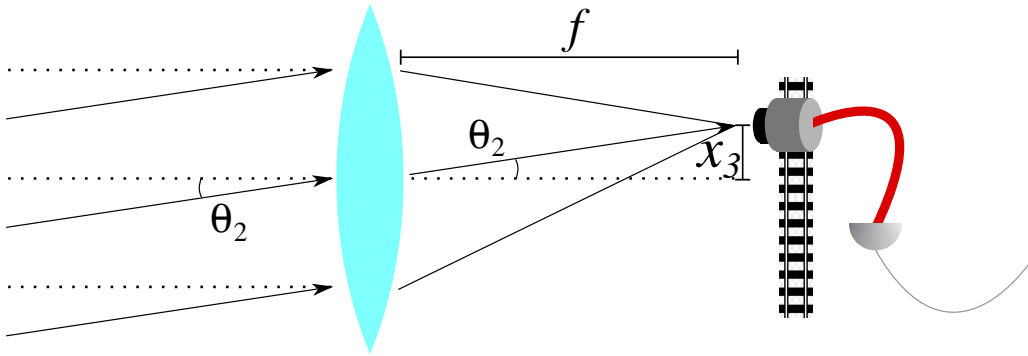


Figura 39 – Representação fora de escala do set up de detecção de \mathcal{F}_3 . Uma fibra mono-modo gaussiano é montada em um trilho no plano focal de uma lente. A posição da fibra no trilho está relacionada à direção do modo gaussiano selecionado.

que estamos lidando, o que é desejável, porque assim não há informação sobre de qual porção da nuvem o fóton 3 foi enviado, maximizando o emaranhamento resultante.

Tendo em posse todas as funções, calculamos $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{k})$ numericamente, usando a equação 8.14. A figura 40 apresenta resultados numéricos para $\mathcal{F}(x, 0, 2f)$ usando os parâmetros estabelecidos. A escala e os valores no eixo horizontal da imagem são obtidos associando a função dos vetores de onda calculada a posições através da relação $q = x/\lambda f$. Notamos que essa situação nos leva a um padrão com visibilidade teórica praticamente máxima. Notamos também que a direção do modo escolhido para \mathcal{F}_3 afeta o padrão por uma fase, como esperado, já que esse feixe determina as constantes A_1 e A_2 da equação 8.14.

Os resultados numéricos, como a largura e a resolução do padrão calculado, mostram

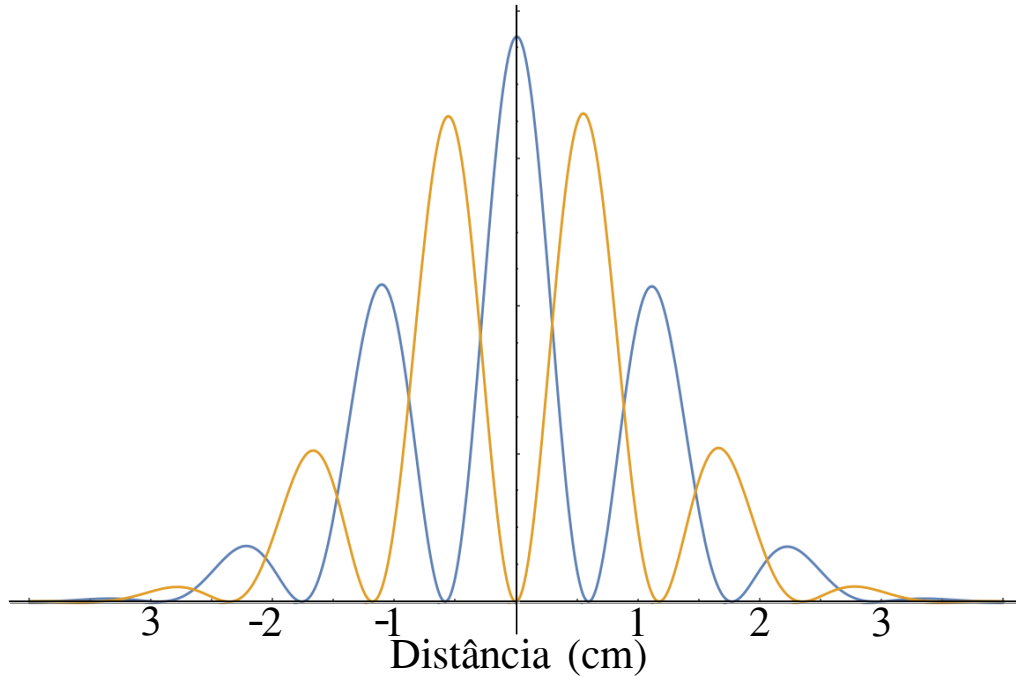


Figura 40 – Intensidade na direção x do padrão de interferência gerado a partir do cálculo numérico de $\mathcal{F}(x, 0, 2f) = \tilde{\mathcal{F}}(\frac{x}{\lambda f}, 0, 0)$. O comprimento de onda usado foi $\lambda = 500nm$. A largura de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 é $W_0 = 50\mu m$, a separação entre eles é $2d = 300\mu m$. A imagem é obtida no foco de uma lente de foco $f = 1m$ em um configuração $f - f$. As diferentes curvas representam diferentes posições do detector medindo \mathcal{F}_3 . Para a curva amarela, temos o detector do modo \mathcal{F}_3 centrado em $x_3 = 0$. Na curva azul ele está centrado em $x_3 = 260\mu m$.

que o experimento pode ser realizado de forma realística em um laboratório atualmente. Concluimos então que esse experimento, que ilustra vários princípios básicos da física quântica como indistinguibilidade, interferência e emaranhamento, é viável.

9 Considerações finais

Nessa tese tratamos de dois trabalhos distintos, ambos relacionados a fenômenos de interação entre luz e átomos.

No primeiro trabalho, avaliamos a troca de momentum e energia entre um pulso de onda plana e um átomo imerso em um meio material através de um modelo microscópico clássico. Comparamos nosso resultado com as formulações de Abraham e Minkowski para o momentum de uma onda eletromagnética se propagando em um meio material. Avaliamos o momentum recebido por um átomo que absorve energia de uma onda eletromagnética em um meio dielétrico linear não-magnético e não-dispersivo. Tratamos o átomo classicamente como um oscilador harmônico. Tratamos o meio microscopicamente como uma coleção de dipolos elétricos que geram uma segunda onda eletromagnética que se superpõe com a onda incidente. Calculamos o momentum e a energia absorvida pelo átomo em simulações numéricas, que mostram que a razão média entre o momentum e a energia absorvida é menor do que a prevista usando a expressão de Minkowski. Prevemos assim que um experimento semelhante ao de Campbell *et al.* [32], se realizado com um gás clássico ao invés de um condensado de Bose-Einstein, apresentaria resultados diferentes para o recuo do momentum atômico. Nesse sentido, a verificação experimental de uma transferência de momentum atômico compatível com o momentum de Minkowski mostrada na Ref. [32] pode ser considerado uma assinatura quântica do estado do meio.

No segundo trabalho exploramos a interação entre luz e átomos frios, e como ela pode ser usada para armazenar informação quântica e manipular estados quânticos. O grau de liberdade usado nessa tarefa foi o modo espacial. Destacamos como o esquema DLCZ pode ser utilizado para isso. Propomos um protocolo original que permite criar qudits codificados em modos Hermite-Gaussianos ou Laguerre-Gaussianos de fótons únicos a partir de feixes clássicos. Mostramos como a informação quântica codificada em modos espaciais de um campo eletromagnético clássico pode ser transformada em informação quântica e manipulada de forma controlada utilizando esse esquema. Fazemos o tratamento teórico quântico que demonstra quantitativamente a validade do nosso protocolo. Mostramos as condições necessárias e o regime em que um fóton pode ser produzido com o mesmo modo espacial de um feixe clássico com certa fidelidade. Mostramos também como o protocolo pode ser usado para a manipulação de momentum angular. Além disso, mostramos como a detecção de um fóton pode produzir emaranhamento entre núvens de átomos.

Referências

- [1] Abraham, M.: *Sull' elettrodinamica di Minkowski*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 30:33, 1910. <https://doi.org/10.1007/BF03014862>. Citado na página 10.
- [2] Minkowski, H: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. Math. Ann., 68:472, 1910. <https://doi.org/10.1007/BF01455871>. Citado na página 10.
- [3] Brevik, I.: *Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor*. Phys. Rep., 52(3):133–201, 1979, ISSN 0370-1573. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157379900747>. Citado na página 10.
- [4] Pfeifer, Robert N. C., Timo A. Nieminen, Norman R. Heckenberg e Halina Rubinsztein-Dunlop: *Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media*. Rev. Mod. Phys., 79:1197–1216, Oct 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.1197>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 12 e 22.
- [5] Barnett, Stephen M. e Rodney Loudon: *The enigma of optical momentum in a medium*. Philos. Trans. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., 368(1914):927–939, 2010. <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2009.0207>. Citado na página 10.
- [6] Milonni, Peter W. e Robert W. Boyd: *Momentum of Light in a Dielectric Medium*. Adv. Opt. Photon., 2(4):519–553, Dec 2010. <http://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?URI=aop-2-4-519>. Citado na página 10.
- [7] Kemp, B. A.: *Resolution of the Abraham-Minkowski debate: Implications for the electromagnetic wave theory of light in matter*. J. Appl. Phys., 109(11):111101, 2011. <https://doi.org/10.1063/1.3582151>. Citado na página 10.
- [8] Griffiths, David J: *Introduction to electrodynamics; 4th ed*. Pearson, Boston, MA, 2013. <https://cds.cern.ch/record/1492149>, Re-published by Cambridge University Press in 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 85.
- [9] Jackson, John David: *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, New York, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 11, 24 e 25.
- [10] Jones, R. V.: *Radiation Pressure in a Refracting Medium*. Nature, 94:439, 1951. <https://doi.org/10.1038/167439a0>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.

- [11] Jones, Reginald Victor e B. Leslie: *The measurement of optical radiation pressure in dispersive media*. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 360(1702):347–363, 1978. <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1978.0072>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.
- [12] Ashkin, A. e J. M. Dziedzic: *Radiation Pressure on a Free Liquid Surface*. Phys. Rev. Lett., 30:139–142, Jan 1973. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.139>. Citado na página 12.
- [13] Walker, G. B. e D. G. Lahoz: *Experimental observation of Abraham force in a dielectric*. Nature, 253:339, 1975. <https://doi.org/10.1038/253339a0>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.
- [14] Walker, G. e D. Lahoz: *Measurement of the Abraham Force in a Barium Titanate Specimen*. Can. J. Phys., 53:2577–2586, fevereiro 1975. <https://doi.org/10.1139/p75-313>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 18 e 19.
- [15] Gibson, A. F., M. F. Kimmitt, A. O. Koohian, D. E. Evans e G. F. D. Levy: *A Study of Radiation Pressure in a Refractive Medium by the Photon Drag Effect*. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 370(1742):303–311, 1980. <http://www.jstor.org/stable/2990241>. Citado na página 12.
- [16] P. Penfield, Jr. e H. A. Haus: *Electrodynamics of Moving Media*. MIT Press, Cambridge, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [17] Barnett, Stephen: *Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma*. Physical review letters, 104:070401, fevereiro 2010. <https://10.1103/PhysRevLett.104.070401>. Citado 5 vezes nas páginas 12, 16, 17, 20 e 22.
- [18] Burt, M. G. e Rudolf Ernst Peierls: *The momentum of a light wave in a refracting medium*. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 333(1593):149–156, 1973. <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1973.0053>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [19] Gordon, James P.: *Radiation Forces and Momenta in Dielectric Media*. Phys. Rev. A, 8:14–21, Jul 1973. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.8.14>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [20] Loudon, R., L. Allen e D. F. Nelson: *Propagation of electromagnetic energy and momentum through an absorbing dielectric*. Phys. Rev. E, 55:1071–1085, Jan 1997. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.55.1071>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.

- [21] Mansuripur, Masud: *Radiation pressure and the linear momentum of light in dispersive dielectric media*. Opt. Express, 13(6):2245–2250, Mar 2005. <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-6-2245>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [22] Loudon, R.: *Radiation pressure and momentum in dielectrics*. Fortschr. Phys., 52(11-12):1134–1140, 2004. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.200410183>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 16 e 22.
- [23] Saldanha, Pablo L.: *Division of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts*. Opt. Express, 18(3):2258–2268, Feb 2010. <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-18-3-2258>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [24] Saldanha, Pablo L.: *Division of the energy and of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts*. Opt. Commun., 284(12):2653–2657, 2011, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401811001568>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [25] Partanen, Mikko, Teppo Häyrynen, Jani Oksanen e Jukka Tulkki: *Photon mass drag and the momentum of light in a medium*. Phys. Rev. A, 95:063850, Jun 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.063850>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [26] Anghinoni, B., G.A.S. Flizikowski, L.C. Malacarne, M. Partanen, S.E. Bialkowski e N.G.C. Astrath: *On the formulations of the electromagnetic stress–energy tensor*. Ann. Phys., 443:169004, 2022, ISSN 0003-4916. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491622001506>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [27] Corrêa, Raul e Pablo L. Saldanha: *Photon reflection by a quantum mirror: A wave-function approach*. Phys. Rev. A, 93:023803, Feb 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.023803>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [28] Bliokh, Konstantin Y, Aleksandr Y Bekshaev e Franco Nori: *Optical momentum and angular momentum in complex media: from the Abraham–Minkowski debate to unusual properties of surface plasmon-polaritons*. New J. Phys., 19(12):123014, dec 2017. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8913>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [29] Saldanha, Pablo L. e J. S. Oliveira Filho: *Hidden momentum and the Abraham–Minkowski debate*. Phys. Rev. A, 95:043804, Apr 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.043804>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 20 e 22.

- [30] Corrêa, Raul e Pablo L. Saldanha: *Hidden momentum in continuous media and the Abraham-Minkowski debate*. Phys. Rev. A, 102:063510, Dec 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.063510>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [31] Partanen, M. e J. Tulkki: *Covariant theory of light in a dispersive medium*. Phys. Rev. A, 104:023510, Aug 2021. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.023510>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [32] Campbell, Gretchen K., Aaron E. Leanhardt, Jongchul Mun, Micah Boyd, Erik W. Streed, Wolfgang Ketterle e David E. Pritchard: *Photon Recoil Momentum in Dispersive Media*. Phys. Rev. Lett., 94:170403, May 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.170403>. Citado 7 vezes nas páginas 12, 18, 20, 22, 23, 37 e 72.
- [33] Astrath, N. G. C., M. L. Malacarne, L. C. and Baesso, G. V. B. Lukasiewicz e S. E. Bialkowski: *Unravelling the effects of radiation forces in water*. Nat. Commun., 5:4363, 2014. <https://doi.org/10.1038/ncomms5363>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [34] Zhang, L., W. She, N. Peng e U. Leonhardt: *Experimental evidence for Abraham pressure of light*. New J. of Phys., 17(5):053035, may 2015. <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/17/5/053035>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [35] Astrath, N. G. C., G. A. S. Flizikowski, B. Anghinoni, L. C. Malacarne, M. L. Baesso, T. Požar, M. Partanen, I. Brevik, D. Razansky e S. E. Bialkowski: *Unveiling bulk and surface radiation forces in a dielectric liquid*. Light Sci. Appl., 11, apr 2022. <https://doi.org/10.1038/s41377-022-00788-7>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [36] Giovannetti, Vittorio, Seth Lloyd e Lorenzo Maccone: *Advances in quantum metrology*. Nat. Photon, 5, 2011. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35>. Citado na página 13.
- [37] Ladd, T. D., F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe e J. L. O'Brien: *Quantum computers*. Nature, 464, 2010. <https://doi.org/10.1038/nature08812>. Citado na página 13.
- [38] Walmsley, I. A.: *Quantum optics: Science and technology in a new light*. Science, 348(6234):525–530, 2015, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/348/6234/525>. Citado na página 13.
- [39] Heshami, Khabat, Duncan G. England, Peter C. Humphreys, Philip J. Bustard, Victor M. Acosta, Joshua Nunn e Benjamin J. Sussman: *Quantum memories: emerging*

- applications and recent advances*. Journal of Modern Optics, 63(20):2005–2028, 2016. <https://doi.org/10.1080/09500340.2016.1148212>, PMID: 27695198. Citado na página 13.
- [40] Thiel, C.W., Thomas Böttger e R.L. Cone: *Rare-earth-doped materials for applications in quantum information storage and signal processing*. Journal of Luminescence, 131(3):353–361, 2011, ISSN 0022-2313. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002223131000534X>, Selected papers from DPC'10. Citado na página 13.
- [41] Heshami, Khabat, Charles Santori, Behzad Khanaliloo, Chris Healey, Victor M. Acosta, Paul E. Barclay e Christoph Simon: *Raman quantum memory based on an ensemble of nitrogen-vacancy centers coupled to a microcavity*. Phys. Rev. A, 89:040301, Apr 2014. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.040301>. Citado na página 13.
- [42] Poem, E., C. Weinzetl, J. Klatzow, K. T. Kaczmarek, J. H. D. Munns, T. F. M. Champion, D. J. Saunders, J. Nunn e I. A. Walmsley: *Broadband noise-free optical quantum memory with neutral nitrogen-vacancy centers in diamond*. Phys. Rev. B, 91:205108, May 2015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.205108>. Citado na página 13.
- [43] Phillips, D. F., A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth e M. D. Lukin: *Storage of Light in Atomic Vapor*. Phys. Rev. Lett., 86:783–786, Jan 2001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.783>. Citado na página 13.
- [44] Hosseini, M, B M Sparkes, G T Campbell, P K Lam e B C Buchler: *Storage and manipulation of light using a Raman gradient-echo process*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 45(12):124004, jun 2012. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/45/12/124004>. Citado na página 13.
- [45] Sangouard, Nicolas, Christoph Simon, Ji ří Minář, Hugo Zbinden, Hugues de Riedmatten e Nicolas Gisin: *Long-distance entanglement distribution with single-photon sources*. Phys. Rev. A, 76:050301, Nov 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.050301>. Citado na página 13.
- [46] Lloyd, Seth: *Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination*. Science, 321(5895):1463–1465, 2008, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/321/5895/1463>. Citado na página 13.
- [47] Appel, Jürgen, Eden Figueroa, Dmitry Korystov, M. Lobino e A. I. Lvovsky: *Quantum Memory for Squeezed Light*. Phys. Rev. Lett., 100:093602, Mar 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.093602>. Citado na página 13.

- [48] L.M. Duan, M.D. Lukin, J.I. Cirac P. Zoller: *Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics*. Nature, 414, Nov 2001. <https://doi.org/10.1038/35106500>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 49 e 52.
- [49] Einstein, A: *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Tragheit der Energie, Traduzido para o inglês: “The principle of conservation of motion of the center of gravity and the inertia of energy”*. Ann. Phys. (Leipzig), 20, 1906. <https://doi.org/10.1002/andp.19063250814>. Citado na página 16.
- [50] Balazs, N. L.: *The Energy-Momentum Tensor of the Electromagnetic Field inside Matter*. Phys. Rev., 91:408–411, Jul 1953. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.91.408>. Citado na página 16.
- [51] Frisch, O. R.: *Take a photon...* Contemporary Physics, 7(1):45–53, 1965. <https://doi.org/10.1080/00107516508202135>. Citado na página 16.
- [52] Bradshaw, Douglas H., Zhimin Shi, Robert W. Boyd e Peter W. Milonni: *Electromagnetic momenta and forces in dispersive dielectric media*. Optics Communications, 283(5):650–656, 2010, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401809010487>, Quo vadis Quantum Optics? Citado na página 17.
- [53] Garrison, J. C. e R. Y. Chiao: *Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in an ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric*. Phys. Rev. A, 70:053826, Nov 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.053826>. Citado na página 20.
- [54] Baxter, C., M. Babiker e R. Loudon: *Canonical approach to photon pressure*. Phys. Rev. A, 47:1278–1287, Feb 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.47.1278>. Citado na página 20.
- [55] Hinds, E. A. e Stephen M. Barnett: *Momentum Exchange between Light and a Single Atom: Abraham or Minkowski?* Phys. Rev. Lett., 102:050403, Feb 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.050403>. Citado na página 20.
- [56] Hnizdo, V.: *Magnetic dipole moment of a moving electric dipole*. American Journal of Physics, 80(7):645–647, julho 2012, ISSN 0002-9505. <https://doi.org/10.1119/1.4712308>. Citado na página 21.
- [57] Condé, João G. L. e Pablo L. Saldanha: *Recoil momentum of an atom absorbing light in a gaseous medium and the Abraham-Minkowski debate*. Phys. Rev. A, 108:013511, Jul 2023. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.108.013511>. Citado na página 23.

- [58] Schwerdtfeger, Peter e Jeffrey K. Nagle: *2018 Table of static dipole polarizabilities of the neutral elements in the periodic table*. Molecular Physics, 117(9-12):1200–1225, 2019. <https://doi.org/10.1080/00268976.2018.1535143>. Citado na página 26.
- [59] Pethick, C. J. e H. Smith: *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2ª edição, 2008. Citado na página 27.
- [60] Fowles, G.R.: *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications, New York, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- [61] Zílio, S.C.: *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. Centro de Divulgação Científica e Cultural - CDCC, 2009, ISBN 9788588533417. <https://books.google.com.br/books?id=pWrvSAAACAAJ>. Citado na página 32.
- [62] Byrnes, Steven J.: *Multilayer optical calculations*, 2016. <https://arxiv.org/abs/1603.02720>. Citado na página 32.
- [63] Mandel, Leonard e Emil Wolf: *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995. Citado na página 39.
- [64] Chiao R, Garrison J: *Quantum Optics*. Oxford University Press, 2014. Citado na página 39.
- [65] Gerry, Christopher e Peter L Knight: *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2005. Citado na página 41.
- [66] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu e Frank Laloe: *Quantum Mechanics, Volume 2, 2nd ed.* 2019. Citado na página 41.
- [67] Griffiths, David J e Darrell F Schroeter: *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2018. Citado na página 41.
- [68] Goodman, Joseph: *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, New York, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 68.
- [69] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich: *Fundamentals of Photonics*. John Wiley Sons, Ltd, 1991. Citado na página 43.
- [70] Carbone, L., Fulda P. Bond C. Brueckner F. Brown D. Wang M. Lodhia D. Palmer R. Freise A.: *The Generation of Higher-order Laguerre-Gauss Optical Beams for High-precision Interferometry*. J. Vis. Exp., 78, 2013. <https://www.jove.com/t/50564/the-generation-higher-order-laguerre-gauss-optical-beams-for-high>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

- [71] Baldijão, R. D., G. F. Borges, B. Marques, M. A. Solís-Prosser, L. Neves e S. Pádua: *Proposal for automated transformations on single-photon multipath qudits*. Phys. Rev. A, 96:032329, Sep 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.032329>. Citado na página 45.
- [72] Krenn, Mario, Mehul Malik, Manuel Erhard e Anton Zeilinger: *Orbital angular momentum of photons and the entanglement of Laguerre–Gaussian modes*. Phil. Trans. R. Soc. A, 375, Feb 2017. <http://doi.org/10.1098/rsta.2015.0442>. Citado na página 45.
- [73] Júnior, Gilberto Ferreira Borges: *Realização de operações não diagonais em qutrits de caminho*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Citado na página 45.
- [74] Cerf, Nicolas J., Mohamed Bourennane, Anders Karlsson e Nicolas Gisin: *Security of Quantum Key Distribution Using d-Level Systems*. Phys. Rev. Lett., 88:127902, Mar 2002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.127902>. Citado na página 45.
- [75] Borges, C. V. S., M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin e A. Z. Khoury: *Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam*. Phys. Rev. A, 82:033833, Sep 2010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.033833>. Citado na página 46.
- [76] Allen, L., M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman: *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*. Phys. Rev. A, 45:8185–8189, Jun 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.8185>. Citado na página 47.
- [77] Erhard, Manuel, Robert Fickler, Mario Krenn e Anton Zeilinger: *Twisted photons: new quantum perspectives in high dimensions*. Light: Science & Applications, 7(3):17146–17146, Mar 2018, ISSN 2047-7538. <https://doi.org/10.1038/lsa.2017.146>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.
- [78] Löffler, W., T. G. Euser, E. R. Eliel, M. Scharrer, P. St. J. Russell e J. P. Woerdman: *Fiber Transport of Spatially Entangled Photons*. Phys. Rev. Lett., 106:240505, Jun 2011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.240505>. Citado na página 48.
- [79] Bozinovic, Nenad, Yang Yue, Yongxiong Ren, Moshe Tur, Poul Kristensen, Hao Huang, Alan E. Willner e Siddharth Ramachandran: *Terabit-Scale Orbital Angular Momentum Mode Division Multiplexing in Fibers*. Science, 340(6140):1545–1548, 2013, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/340/6140/1545>. Citado na página 48.

- [80] Inoue, R., N. Kanai, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi e M. Kozuma: *Entanglement of orbital angular momentum states between an ensemble of cold atoms and a photon*. Phys. Rev. A, 74:053809, Nov 2006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.74.053809>. Citado na página 48.
- [81] Andersen, M. F., C. Ryu, Pierre Cladé, Vasant Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson e W. D. Phillips: *Quantized Rotation of Atoms from Photons with Orbital Angular Momentum*. Phys. Rev. Lett., 97:170406, Oct 2006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.170406>. Citado na página 48.
- [82] Inoue, R., T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi e M. Kozuma: *Measuring Qutrit-Qutrit Entanglement of Orbital Angular Momentum States of an Atomic Ensemble and a Photon*. Phys. Rev. Lett., 103:110503, Sep 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.110503>. Citado na página 48.
- [83] Barros, Davi F., Luis F. Muñoz-Martínez, Luis Ortiz-Gutiérrez, Camilo A.E. Guerra, Johan E.O. Morales, Raoni S.N. Moreira, Natália D. Alves, Ayanne F.G. Tieco, Daniel Felinto e Pablo L. Saldanha: *Fock-state superradiance in a cold atomic ensemble*. Optics Communications, 443:34–43, 2019, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401819300471>. Citado 5 vezes nas páginas 49, 52, 53, 54 e 61.
- [84] Boller, K. J., A. Imamoglu e S. E. Harris: *Observation of electromagnetically induced transparency*. Phys. Rev. Lett., 66:2593–2596, May 1991. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2593>. Citado na página 50.
- [85] Fleischhauer, Michael, Atac Imamoglu e Jonathan P. Marangos: *Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media*. Rev. Mod. Phys., 77:633–673, Jul 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.633>. Citado na página 50.
- [86] Oliveira, Rafael A. de, Milrian S. Mendes, Weliton S. Martins, Pablo L. Saldanha, José W. R. Tabosa e Daniel Felinto: *Single-photon superradiance in cold atoms*. Phys. Rev. A, 90:023848, Aug 2014. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.023848>. Citado 5 vezes nas páginas 50, 52, 53, 54 e 61.
- [87] Finkelstein, Ran, Samir Bali, Ofer Firstenberg e Irina Novikova: *A practical guide to electromagnetically induced transparency in atomic vapor*. New Journal of Physics, 25(3):035001, mar 2023. <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/acbc40>. Citado na página 51.
- [88] Kuzmich, A., W. P. Bowen, A. D. Boozer, A. Boca, C. W. Chou, L. M. Duan e H. J. Kimble: *Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum commu-*

- nication with atomic ensembles*. Nature, 423, 2003. <https://doi.org/10.1038/nature01714>. Citado na página 50.
- [89] Chrapkiewicz, Radosław, Michał Dąbrowski e Wojciech Wasilewski: *High-Capacity Angularly Multiplexed Holographic Memory Operating at the Single-Photon Level*. Phys. Rev. Lett., 118:063603, Feb 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.063603>. Citado na página 50.
- [90] Dou, Jian Peng, Ai Lin Yang, Mu Yan Du, Di Lao, Jun Gao, Lu Feng Qiao, Hang Li, Xiao Ling Pang, Zhen Feng, Hao Tang e Xian Min Jin: *A broadband DLCZ quantum memory in room-temperature atoms*. Comms. Phys., 1, 2018. <https://doi.org/10.1038/s42005-018-0057-9>. Citado na página 50.
- [91] Sangouard, Nicolas, Christoph Simon, Hugues de Riedmatten e Nicolas Gisin: *Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics*. Rev. Mod. Phys., 83:33–80, Mar 2011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.33>. Citado na página 50.
- [92] Munro, William J., Koji Azuma, Kiyoshi Tamaki e Kae Nemoto: *Inside Quantum Repeaters*. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 21(3):78–90, 2015. 10.1109/JSTQE.2015.2392076. Citado na página 50.
- [93] Wehner, Stephanie, David Elkouss e Ronald Hanson: *Quantum internet: A vision for the road ahead*. Science, 362(6412), 2018, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/362/6412/eaam9288>. Citado na página 50.
- [94] Żukowski, M. , A. Zeilinger, M. A. Horne e A. K. Ekert: *“Event-ready-detectors” Bell experiment via entanglement swapping*. Phys. Rev. Lett., 71:4287–4290, Dec 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.4287>. Citado na página 51.
- [95] Mendes, Milrian S, Pablo L Saldanha, José W R Tabosa e Daniel Felinto: *Dynamics of the reading process of a quantum memory*. New Journal of Physics, 15(7):075030, jul 2013. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/7/075030>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.
- [96] Ortiz-Gutiérrez, L., L. F. Muñoz Martínez, D. F. Barros, J. E. O. Morales, R. S. N. Moreira, N. D. Alves, A. F. G. Tieco, P. L. Saldanha e D. Felinto: *Experimental Fock-State Superradiance*. Phys. Rev. Lett., 120:083603, Feb 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.083603>. Citado 4 vezes nas páginas 52, 53, 54 e 61.
- [97] Moreira, Raoni S.N., Paulo J. Cavalcanti, Luis F. Muñoz-Martínez, Johan E.O. Morales, Pablo L. Saldanha, José W.R. Tabosa e Daniel Felinto: *Nonvolatile atomic*

- memory in the spontaneous scattering of light from cold two-level atoms*. Optics Communications, 495:127075, 2021, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821003242>. Citado na página 54.
- [98] Schneider, Thomas: *Four-Wave-Mixing (FWM)*, páginas 167–200. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004, ISBN 978-3-662-08996-5. https://doi.org/10.1007/978-3-662-08996-5_7. Citado na página 56.
- [99] Cabrillo, C., J. I. Cirac, P. García-Fernández e P. Zoller: *Creation of entangled states of distant atoms by interference*. Phys. Rev. A, 59:1025–1033, Feb 1999. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.59.1025>. Citado na página 63.
- [100] Simon, Christoph e William T. M. Irvine: *Robust Long-Distance Entanglement and a Loophole-Free Bell Test with Ions and Photons*. Phys. Rev. Lett., 91:110405, Sep 2003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.110405>. Citado na página 63.
- [101] Moehring, D. L., Maunz P. Olmschenk S. Younge K. C. Matsukevich D. N. Duan L. M. Monroe C.: *Entanglement of single-atom quantum bits at a distance*. Nature, 449, Sep 2007. <https://doi.org/10.1038/nature06118>. Citado na página 63.
- [102] Felinto, D., Chou C. W. Laurat J. Schomburg E. W. de Riedmatten H. Kimble H. J.: *Conditional control of the quantum states of remote atomic memories for quantum networking*. Nature, 2, Dec 2006. <https://doi.org/10.1038/nphys450>. Citado na página 64.

Apêndices

APÊNDICE A – Campo elétrico de uma esfera homogeneamente polarizada

No trabalho apresentado na parte I tratamos os átomos que constituem o meio material como esferas rígidas de material dielétrico linear e não-magnético de raio R . O campo elétrico externo $\mathbf{E}_0 = E_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{z} - i\omega t) \hat{\mathbf{x}}$ apresentado na equação 3.1 só varia espacialmente através do fase na direção de propagação. Como o raio R é muito menor que o comprimento de onda λ_0 do campo externo, o campo sentido pela esfera é aproximadamente homogêneo. Assim, a não ser por uma fase que depende da posição z da esfera e do tempo, a polarização dentro da esfera é igual a

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi E_0 \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.1})$$

A partir daqui, podemos seguir a demonstração tal qual apresentada em [8]. Como não existem cargas elétricas livres dentro da esfera, o campo pode ser calculado apenas pelas distribuições de carga ligada superficial σ_b e volumétrica ρ_b definidas como

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad e \quad \rho_b \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (\text{A.2})$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à superfície da esfera. Como a polarização é homogênea, a densidade de carga volumétrica é nula. A densidade de carga superficial é

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon_0 \chi E_0 \cos \theta, \quad (\text{A.3})$$

em que θ é o ângulo entre $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$, como representado na figura 41.

A melhor forma de calcular o campo elétrico para essa distribuição de cargas é calcular o potencial Φ através do método de separação de variáveis. Para um problema

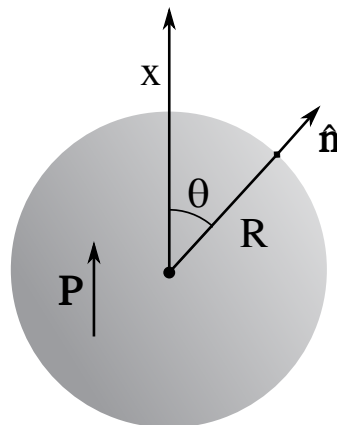


Figura 41 – Esfera de material dielétrico em uma região com campo elétrico homogêneo.

com simetria azimutal¹, a equação de Laplace em coordenadas esféricas é

$$\frac{\partial}{\partial} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Supondo soluções separáveis, ou seja, $\Phi(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\Theta(\theta)$, somos levados a duas equações diferenciais ordinárias distintas. A parte radial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) = \ell(\ell + 1)\mathcal{R} \quad (\text{A.5})$$

tem solução geral

$$\mathcal{R} = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}, \quad (\text{A.6})$$

em que A e B são constantes arbitrárias. A parte angular

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta \quad (\text{A.7})$$

tem soluções

$$\Theta(\theta) = P_\ell(\cos \theta), \quad (\text{A.8})$$

em que P_ℓ são os polinômios de Legendre. Esses polinômios são definidos pela formula

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell. \quad (\text{A.9})$$

No nosso caso em particular, em que queremos que o potencial vá a zero no infinito e não divirja na origem, ele deve ser igual a

$$\Phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{A.10})$$

na região interior à esfera, e

$$\Phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{A.11})$$

na região exterior. Definimos os valores de A_ℓ e B_ℓ através da análise das condições de contorno. Como o potencial deve ser contínuo na superfície, i.e. em $r = R$, somos levados à equação

$$\Phi(R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta). \quad (\text{A.12})$$

A ortogonalidade dos polinômios de Legendre implicam na relação

$$B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}. \quad (\text{A.13})$$

A discontinuidade do potencial na superfície

$$\left(\frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_b \quad (\text{A.14})$$

¹ Φ depende apenas das coordenadas r e θ mas não de ϕ .

implica em

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) = \\
 & = - \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) = - \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_b.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Mais uma vez usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre, ou seja

$$\int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \propto \delta_{\ell\ell'}, \tag{A.16}$$

podemos escrever o coeficiente A_{ℓ} como

$$A_{\ell} = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_0^{\pi} \sigma_b P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \tag{A.17}$$

Como estamos lidando com uma distribuição de cargas

$$\sigma = \epsilon_0 \chi E_0 \cos \theta = \epsilon_0 \chi P_1 \cos \theta, \tag{A.18}$$

todos os termos P_{ℓ} com $\ell \neq 1$ serão nulos. Isso leva imediatamente a

$$A_{\ell} = \frac{1}{3} \chi E_0. \tag{A.19}$$

Retomando as equações A.10 e A.11, substituímos o valor encontrado de A_{ℓ} e temos

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{3} \chi E_0 r \cos \theta \tag{A.20}$$

na região interior à esfera, e

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{3} \chi E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \tag{A.21}$$

na região exterior

Como $r \cos \theta = x$, o campo dentro da esfera é

$$\mathcal{E} = -\nabla \Phi = -\frac{1}{3} \chi E_0 \hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}. \tag{A.22}$$

Esse é um campo homogêneo que aponta no sentido oposto ao campo externo \mathbf{E}_0 . No que diz respeito ao potencial na parte externa, podemos reescreve-lo como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{A.23}$$

que é idêntico ao potencial de um dipolo elétrico de momento de dipolo \mathbf{p} , em que

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}. \tag{A.24}$$

Segue imediatamente que o campo elétrico \mathcal{E} fora da esfera será o de um dipolo de momento de dipolo \mathbf{p} .