

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LETÍCIA DIAS MATTOS

## **Percolação Crítica em Lajes**

Belo Horizonte

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LETÍCIA DIAS MATTOS

## **Percolação Crítica em Lajes**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte

2015

Mattos, Leticia Dias.

M444p

Percolação crítica em lajes [recurso eletrônico] / Leticia Dias Mattos – 2023.  
34 f. il.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática  
Referências: f.33-34.

1. Matemática – Teses. 2. Percolação (Física estatística) – Teses. 3. Variáveis aleatórias – Probabilidades – Teses.  
I. Lima, Bernardo Nunes Borges de. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Percolação Crítica em Lajes*

**LETÍCIA DIAS MATTOS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima  
UFMG

Prof. Rémy de Paiva Sanchis  
UFMG

Prof. Augusto Quadros Teixeira  
IMPA

Belo Horizonte, 13 de novembro de 2015.

# Resumo

A percolação foi introduzida na literatura matemática em (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957) por meio da formulação de um simples modelo estocástico para compreender o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. O principal objetivo dessa dissertação é compreender o modelo de percolação de Bernoulli de arestas em lajes, que são grafos da forma  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ . Precisamente, fazemos uma exposição do resultado central contido em (DUMINIL; SIDORAVICIUS; TASSION, 2016), que demonstra a ausência quase certa de um aglomerado infinito no ponto crítico para o modelo de percolação de Bernoulli de arestas em lajes. Expomos também as ferramentas clássicas e necessárias para o estudo da percolação de Bernoulli nesses grafos, tais como a Desigualdade FKG, teoremas de existência do aglomerado infinito na fase supercrítica, bem como sua unicidade.

**Palavras-chave:** Percolação em grafos, ponto crítico, ausência de aglomerado infinito, Desigualdade FKG.

# Abstract

*Percolation was introduced in mathematical literature in (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957) through the formulation of a simple stochastic model to understand the phenomenon of fluid transport through a porous medium. The main objective of this dissertation is to understand the Bernoulli percolation model of edges on slabs, which are graphs of the form  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ . Precisely, we present the central result contained in (DUMINIL; SIDORAVICIUS; TASSION, 2016), which demonstrates the almost sure absence of an infinite cluster at the critical point for the Bernoulli percolation model of edges on slabs. We also present the classical and necessary tools for the study of Bernoulli percolation on these graphs, such as the FKG Inequality, theorems on the existence of the infinite cluster in the supercritical phase, as well as its uniqueness.*

**Keywords:** *Graph percolation, critical point, absence of infinite cluster, FKG Inequality..*

# Lista de ilustrações

Figura 1	– $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$ . . . . .	23
Figura 2	– $\mathcal{E}_n(y_n - \alpha_n/4, y_n + \alpha_n/4)$ . . . . .	23
Figura 3	– O evento $\left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^- \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}$ . . . . .	25
Figura 4	– O evento $\left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n, 0) + S_{3n} \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n!} \partial B'_n \right\}$ . . . . .	27
Figura 5	– Os eventos correspondentes às condições 1 e 2. . . . .	28
Figura 6	– Interseção das caixas $\frac{z_1+z_2}{2} + B_{6n}$ e $\frac{z_3+z_4}{2} + B_{6n}$ . Se $e = \{v_1, v_2\}$ , $f = \{v_3, v_4\}$ são arestas de $4n\mathbb{Z}^2$ , as caixas $\frac{v_1+v_2}{2} + B_{6n}$ e $\frac{v_3+v_4}{2} + B_{6n}$ não possuem interseção em $\mathbb{S}_k$ se, e somente se, $d(e, f) > 4$ . . . . .	29

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceitos básicos e o modelo de percolação</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>PERCOLAÇÃO NO PONTO CRÍTICO EM LAJES</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>O estudo local</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>O passo de renormalização</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.3</b>	<b>A Prova do Lema da Colagem</b> . . . . .	<b>30</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>35</b>



# 1 Introdução

A percolação foi introduzida na literatura matemática em (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957) por meio da formulação de um simples modelo estocástico para compreender o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Procuravase calcular, por exemplo, a probabilidade de estar molhado o centro de uma grande pedra porosa, se mergulhada em água, supondo que essa matéria possui canais de condução dispostos aproximadamente como em  $\mathbb{Z}^3$ , ou outros grafos localmente finitos, que podem estar abertos ou bloqueados (fechados) independentemente com probabilidade  $p$  e  $1 - p$ , respectivamente.

Fonte inesgotável de problemas e detentora de conjecturas com simples enunciação, desde os anos 50 a percolação é um dos principais objetos de estudo dos probabilistas. Um dos modelos mais importantes a ser considerado é a percolação de arestas de Bernoulli na rede hipercúbica  $\mathbb{Z}^d$ : definido o espaço de medida adequado, em que cada aresta é aberta com probabilidade  $p$ . Qual é a probabilidade  $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$  da origem estar conectada a um caminho aberto infinito em  $\mathbb{Z}^d$ ? A função  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  é contínua em  $p$ ? Muito progresso tem sido feito desde então com o intento de responder à última pergunta. Nesse estudo, é fundamental a existência de um valor crítico  $p_c(\mathbb{Z}^d)$  tal que

$$\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c(\mathbb{Z}^d) \\ > 0, & \text{se } p > p_c(\mathbb{Z}^d) \end{cases}$$

O parâmetro  $p_c(\mathbb{Z}^d)$  é conhecido como ponto crítico e definido formalmente por

$$p_c(\mathbb{Z}^d) = \sup \{p : \theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = 0\}$$

O caso em que  $d = 1$  não há interesse: se  $p < 1$ , por Borel–Cantelli existirão infinitas arestas fechadas à esquerda e à direita da origem quase certamente, e então  $p_c(1) = 1$ . Para  $d \geq 2$ , a existência de um fenômeno crítico não-trivial, isto é,  $0 < p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$ , foi mostrada em (BROADBENT; HAMMERSLEY, 1957) e, posteriormente, em (RUSSO, 1978) provou-se que a função  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  é infinitamente diferenciável no intervalo  $(p_c, 1]$  para todo  $d \geq 2$ . Assim, basta provar a continuidade de  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  no ponto crítico; e é exatamente esse o problema em aberto mais famoso na percolação. O resultado em (KESTEN et al., 1980), construído com base nos argumentos presentes em (HARRIS, 1960), (SEYMOUR; WELSH, 1978) e (RUSSO, 1978), culminaram na continuidade de  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  para  $d = 2$  e, somente em (HARA; SLADE, 1990) provou-se que  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  é contínua em  $p_c(\mathbb{Z}^d)$  para  $d$  suficientemente grande. Melhorando algumas cotas presentes em (HARA; SLADE, 1990), mostrou-se em (HARA; SLADE, 1994) a continuidade de  $\theta_{\mathbb{Z}^d}$  em  $p_c(\mathbb{Z}^d)$  para  $d \geq 19$ , restando os casos em que  $2 < d < 19$ .

Utilizando técnicas de renormalização em blocos, foi caracterizado por (GRIMMETT; MARSTRAND, 1990) o ponto crítico de  $\mathbb{Z}^d$  como um limite dos pontos críticos das lajes

$\mathbb{S}_k^d \equiv \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}^{d-2}$ , isto é, provou-se que  $p_c(\mathbb{Z}^d) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{S}_k^d)$ . Mostrou-se em (DUMINIL; SIDORAVICIUS; TASSION, 2016) que para o modelo de percolação em arestas no grafo  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$  ( $k \geq 0$ ), não há aglomerado infinito no ponto crítico quase certamente. Com ligeiras modificações, a prova funciona igualmente bem para as lajes  $\mathbb{S}_k^d$ , com  $d \geq 3$ . O fato de  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}^{d-2}$  ser aproximadamente  $\mathbb{Z}^d$  quando  $k$  tende a infinito sugere que a inexistência de percolação no ponto crítico aliada ao resultado em (GRIMMETT; MARSTRAND, 1990) seja uma nova luz em direção à prova da continuidade da função  $\theta$  para todo  $d \geq 3$ .

O objetivo principal desta dissertação é expor o resultado central contido em (DUMINIL; SIDORAVICIUS; TASSION, 2016). No primeiro capítulo, forneceremos as ferramentas necessárias para o estudo da percolação no ponto crítico dos grafos da forma  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ , como a Desigualdade FKG, a existência de aglomerado infinito quase certamente na fase supercrítica, bem como sua unicidade. No segundo capítulo, iniciamos com um estudo local nas lajes que será necessário para o passo de renormalização da rede, método que consiste em uma espécie de visualização do grafo sobre outra perspectiva, de acordo com a ocorrência de certos eventos bons que dependem de um número finito de arestas. Depois, expomos brevemente o argumento de renormalização e por último provamos o Lema da Colagem, o resultado mais importante apresentado neste trabalho.

## 2 Preliminares

### 2.1 Conceitos básicos e o modelo de percolação

Nesta seção, introduziremos o modelo de percolação a ser estudado e estabeleceremos definições básicas e notações adotadas em toda extensão deste texto.

Começaremos com alguns conceitos elementares na teoria dos grafos. Seguimos as definições de (BONDY; MURTY, 2008) e (GRIMMETT, 1999).

**Definição 1.** *Um grafo, ou rede,  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste de um conjunto  $V(G)$  de vértices e um conjunto  $E(G)$  de arestas, disjunto de  $V(G)$ , juntamente com uma função de incidência  $\psi_G$  que associa a cada aresta de  $G$  um par não-ordenado de vértices distintos de  $G$ . Se  $e$  é uma aresta e  $u$  e  $v$  são vértices tais que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , então dizemos que  $e$  liga  $u$  a  $v$ , e tais vértices são chamados de extremos da aresta  $e$ .*

Ao longo deste trabalho, quando não houver ambiguidades, diremos que um vértice  $v$  e uma aresta  $e$  pertencem a  $G$  se  $v \in V(G)$  e  $e \in E(G)$ .

Os grafos são nomeados dessa forma porque podem ser representados graficamente, o que auxilia a visualização e compreensão das suas propriedades. Cada vértice é indicado por um ponto e cada aresta por uma linha que une os pontos que simbolizam seus extremos.

Não há uma maneira correta de desenhar um grafo: as posições relativas dos pontos que correspondem aos vértices e a forma das linhas que representam as arestas é insignificante. Frequentemente, bem como nesta dissertação, esboçamos um diagrama do grafo e tratamos esse como sendo o grafo propriamente dito; no mesmo espírito, chamamos os pontos de vértices e as linhas de arestas. Muitas definições e conceitos na teoria dos grafos baseiam-se nessa representação gráfica. Por exemplo, os extremos de uma aresta  $e$  são ditos incidentes  $a$ , e vice-versa; dois vértices são ditos adjacentes, ou vizinhos, se são extremos de uma mesma aresta; analogamente, duas arestas são adjacentes se possuem um extremo em comum. O grau de um vértice  $v \in G$ , denotado por  $d_G(v)$ , é o número de arestas de  $G$  incidentes a  $v$ .

Um grafo  $F$  é declarado subgrafo de um grafo  $G$  se  $V(F) \subset V(G)$  e  $E(F) \subset E(G)$ . Dois subgrafos indispensáveis no estudo da percolação são os caminhos e ciclos. Um caminho é um grafo cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência linear de modo que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos nessa sequência. Analogamente, um ciclo é um grafo cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica de tal maneira que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos nessa sequência. O tamanho de um caminho, ou ciclo, é o número de arestas contidas nessa estrutura. Além disso, se  $u$  e  $v$  são dois vértices de  $G$ , o tamanho do menor caminho que liga  $u$  a  $v$  é a distância entre esses vértices.

É importante notar que para todo grafo  $G$  existe uma partição  $\mathcal{P}$  do seu conjunto de vértices tal que, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{P}, X \neq Y$ , não existe aresta  $\{u, v\}$  com  $u \in X, v \in Y$ . Dizemos que  $G$  é conexo se  $|\mathcal{P}| = 1$ , e aos subgrafos  $G'$  de  $G$  com  $V(G') \in \mathcal{P}$  e  $E(G') = \{e \in E(G) : e = \{u, v\}, u, v \in V(G')\}$ , damos o nome de componentes conexas.

Os grafos que serão alvo do nosso estudo nas próximas páginas são as lajes. Escrevemos  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  para o conjunto dos inteiros e  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$  para o conjunto de todos os pontos da forma  $(x_1, x_2, x_3)$ , com  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  e  $x_3 \in \{0, \dots, k\}$ .

**Definição 2.** Uma laje  $\mathbb{S}_k$  de tamanho  $k(k \geq 0)$  é um grafo cujo conjunto de vértices é  $V(\mathbb{S}_k) = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$  e as arestas  $E(\mathbb{S}_k) = \{\{x, y\}; x, y \in V(\mathbb{S}_k), \|x - y\| = 1\}$ , em que  $\|\cdot\|$  denota a distância euclidiana usual.

Na laje  $\mathbb{S}_k$  a distância  $\delta(x, y)$  entre dois vértices  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}_k$  pode ser dada explicitamente por

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|.$$

Uma dose de probabilidade também é necessária. Seja  $p \in [0, 1]$ ; cada aresta do grafo  $\mathbb{S}_k$  está aberta ou fechada de modo independente, com probabilidade  $p$  e  $1 - p$ , respectivamente. Formalmente, considere a tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , em que o espaço amostral é dado por  $\Omega = \prod_{e \in E(\mathbb{S}_k)} \{0, 1\}$ , com seus elementos representados por  $\omega = (\omega(e) : e \in E(\mathbb{S}_k))$  e chamados de configurações - o valor  $\omega(e) = 0$  corresponde a “ $e$  está fechada” e  $\omega(e) = 1$  equivale a “ $e$  está aberta” para todo  $e \in \mathbb{S}_k$ ;  $\mathcal{F}$  denota a  $\sigma$  álgebra dos subconjuntos de  $\Omega$  gerados pelos cilindros, caracterizados pela definição abaixo.

**Definição 3.** Um cilindro é um subconjunto de  $\Omega$  determinado por um número finito de arestas. Precisamente, para todo cilindro  $C \subset \Omega$ , existem um conjunto de arestas  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  e um vetor de estados  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  correspondente tais que

$$C = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) = \sigma_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

É primordial o fato de que todos os eventos analisados neste trabalho estão contidos nessa  $\sigma$ -álgebra.

Finalmente,  $\mathbb{P}_p$  denota a medida produto  $\prod_{e \in E(\mathbb{S}_k)} \mu_e$ , em que  $\mu_e$  é a medida de Bernoulli em  $\{0, 1\}$  para todo  $e \in E(\mathbb{S}_k)$ , dada por

$$\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p, \quad \mu_e(\omega(e) = 1) = p.$$

Note que obtemos um modelo de percolação de arestas independentes no grafo  $\mathbb{S}_k$ , uma vez que, pela medida adotada, o estado de uma aresta não é afetado por quaisquer outras. Além disso, perceba que há uma dependência em  $k$  na tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , que optamos por omitir a fim

de evitar notações carregadas. De maneira análoga, pode-se definir o espaço de probabilidade utilizado no estudo da percolação em grafos conexos e infinitos.

A visualização do modelo de percolação sobre a perspectiva do acoplamento também é bastante útil. Suponha que  $(X(e) : e \in E(\mathbb{S}_k))$  é uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , indexadas pelo conjunto de arestas  $E(\mathbb{S}_k)$ , e  $\tilde{\Omega} = \prod_{e \in E(\mathbb{S}_k)} [0, 1]$  o espaço amostral correspondente às possíveis configurações obtidas por  $(X(e) : e \in E(\mathbb{S}_k))$ . De maneira análoga, definimos a  $\sigma$ -álgebra  $\tilde{\mathcal{F}}$  de  $\tilde{\Omega}$  gerada pelos cilindros, que nesse caso são subconjuntos de  $\tilde{\Omega}$  da forma  $\{\omega \in \tilde{\Omega} : \omega(e_i) \in B_i, 1 \leq i \leq n\}$ , em que  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  é um conjunto finito qualquer de arestas em  $\mathbb{S}_k$ , como anteriormente, e  $B_i \subset [0, 1]$  é um boreliano para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ao espaço mensurável  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ , associamos a medida produto  $\mathbb{P} = \prod_{e \in E(\mathbb{S}_k)} \tilde{\mu}_e$ , em que  $\tilde{\mu}_e$  é a medida de Lebesgue no intervalo  $[0, 1]$ . Tendo o espaço de probabilidade  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$  em mãos, podemos acoplar todos os processos de percolação em  $\mathbb{S}_k$  para qualquer  $p \in [0, 1]$  da seguinte maneira: para todo  $p \in [0, 1]$ , defina  $\eta_p : E(\mathbb{S}_k) \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } X(e) \leq p \\ 0, & \text{se } X(e) > p. \end{cases}$$

Uma aresta  $e$  é dita  $p$ -aberta se  $\eta_p(e) = 1$ . As componentes do vetor aleatório  $\eta_p$  são independentes e sua distribuição marginal é dada por

$$\mathbb{P}(\eta_p(e) = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\eta_p(e) = 1) = p.$$

Note que podemos interpretar  $\eta_p$  como sendo o vetor aleatório gerado pelo processo de percolação em  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_p)$ . Claramente,  $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$  se  $p_1 \leq p_2$ , o que nos permite acoplar os dois processos de percolação com medidas  $\mathbb{P}_{p_1}$  e  $\mathbb{P}_{p_2}$ , de modo que o conjunto de arestas abertas no primeiro processo é um subconjunto do conjunto de arestas abertas no segundo.

Dizemos que um caminho está aberto se todas as suas arestas estão abertas. Dois vértices  $x, y$  do grafo estão conectados, denota-se “ $x \longleftrightarrow y$ ”, se existe um caminho aberto cujos vértices final e inicial são  $x$  e  $y$ .

Considere o subgrafo dado por uma configuração aleatória  $\omega \in \Omega$  que contém apenas  $V(\mathbb{S}_k)$  e as arestas abertas em  $\omega$ . As componentes conexas desse grafo são conhecidas como aglomerados abertos, ou apenas aglomerados. Denotamos por  $C(x)$  o aglomerado aberto que contém o vértice  $x$ , isto é,  $C(x) = \{y \in V(\mathbb{S}_k) : x \longleftrightarrow y\}$ .

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos de vértices em  $\mathbb{S}_k$ , escrevemos “ $A \leftrightarrow B$ ” se existe um caminho aberto que liga algum vértice em  $A$  a qualquer vértice em  $B$ ; se  $A \cap B \neq \emptyset$ , então  $A \leftrightarrow B$  trivialmente. Analogamente, denotamos  $\{A \leftrightarrow B\} = \{A \leftrightarrow B\}^c$ .

Se  $A$  é um conjunto de vértices na rede, simbolizamos por  $\partial A$  a fronteira de  $A$ , isto é, o subconjunto de vértices em  $A$  que são adjacentes a algum vértice não pertencente a  $A$ , ou seja,  $\partial A = \{v \in A : \exists u \in A^c, \delta(u, v) = 1\}$

Uma caixa é um subconjunto de  $\mathbb{S}_k$  da forma

$$B = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}_k \left| \begin{array}{l} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ 0 \leq x_3 \leq k \end{array} \right. \right\},$$

em que  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

O nosso principal interesse consiste no estudo da probabilidade de percolação  $\theta_k(p)$  da origem pertencer a um aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{S}_k$ , isto é,

$$\theta_k(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty).$$

Alternativamente,

$$\theta_k(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C(0)| = n).$$

Para facilitar a notação, omitimos o índice  $k$  da função  $\theta_k$  ao longo do texto quando não houver ambiguidades. É imediato que  $|C(0)| = \infty$  se, e somente se, existe uma sequência infinita de vértices  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , com  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , tal que  $x_0 = 0$ ,  $x_i$  é adjacente a  $x_{i+1}$  e a aresta  $\{x_i, x_{i+1}\}$  está aberta para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Por fim, observe que, dado um grafo  $G$  conexo e infinito com um vértice  $O$  previamente fixado como origem, podemos definir de maneira análoga a probabilidade de percolação no parâmetro  $p$  por  $\theta_G(p) = \mathbb{P}_p(|C(O)| = \infty)$ .

## 1.2 Alguns resultados clássicos

Nesta seção provaremos alguns resultados clássicos da percolação, que podem ser encontrados em (GRIMMETT, 1999). Posto que o alvo do nosso estudo são as lajes, optamos direcionar todos esses resultados para essas redes, cujas demonstrações são essencialmente as mesmas para uma classe ampla de grafos, incluindo  $\mathbb{Z}^d$ .

Naturalmente, o espaço amostral  $\Omega$  é munido de uma ordem parcial “ $\leq$ ”. Dizemos que duas configurações  $\omega, \omega'$  são comparáveis nessa ordenação se  $\omega(e) \leq \omega'(e), \forall e \in E(\mathbb{S}_k)$ , ou  $\omega'(e) \leq \omega(e), \forall e \in E(\mathbb{S}_k)$ , denotando-se  $\omega \leq \omega'$  e  $\omega' \leq \omega$ , respectivamente. Mencionado isso, analisemos as configurações pertencentes ao evento  $\{|C(0)| = \infty\}$ . Note que  $\{|C(0)| = \infty\}$  é crescente, no sentido de que, se  $\omega \in \{|C(0)| = \infty\}$ , então  $\omega' \in \{|C(0)| = \infty\}$  sempre que  $\omega \leq \omega'$ . Esse exemplo nos motiva a estabelecer a seguinte definição.

**Definição 4.** O evento  $A \in \mathcal{F}$  é dito crescente se  $\mathbb{1}_A(\omega) \leq \mathbb{1}_A(\omega')$  sempre que  $\omega \leq \omega'$ , em que  $\mathbb{1}_A$  é a função indicadora de  $A$ . Analogamente,  $A$  é decrescente se  $A^c$  é crescente. Mais geralmente, uma variável aleatória  $X$  no espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  é crescente se  $X(\omega) \leq X(\omega')$  sempre que  $\omega \leq \omega'$ , e é decrescente se  $-X$  é crescente. Assim, em termos de variáveis aleatórias, um evento  $A$  é crescente se, e somente se sua função indicadora é crescente.

Há boas razões para que trabalhemos com eventos crescentes e decrescentes sempre que possível. Frequentemente, é conveniente estimar, por exemplo, a probabilidade  $\mathbb{P}_p[\{A \cap B\}]$  da interseção de dois eventos  $A$  e  $B$  apenas em função das probabilidades  $\mathbb{P}_p(A)$  e  $\mathbb{P}_p(B)$ . Observe que se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes, é razoável nos inclinarmos a pensar que  $\mathbb{P}_p(A \mid B) \geq \mathbb{P}_p(A)$ , uma vez que a natureza crescente do evento  $B$  contribuirá para que o evento  $A$  tenha maior chance de ocorrência. É exatamente isso que nos diz a desigualdade abaixo, atribuída aos matemáticos Fortuin, Kasteleyn e Ginibre (1971), cuja demonstração pode ser encontrada em (GRIMMETT, 1999):

**Lema 5** (Desigualdade FKG). *Sejam  $A_1$  e  $A_2$  eventos crescentes. Então,*

$$\mathbb{P}_p[A_1 \cap A_2] \geq \mathbb{P}_p[A_1] \cdot \mathbb{P}_p[A_2].$$

*A mesma desigualdade é válida se ambos eventos  $A_1$  e  $A_2$  são decrescentes.*

**Corolário 6** (Truque da raiz). *Sejam  $A_1, \dots, A_m$  eventos crescentes. Então,*

$$\max_{i=1, \dots, m} \mathbb{P}_p[A_i] \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p[A_1 \cup \dots \cup A_m])^{1/m}.$$

*Demonstração.* Pela Desigualdade FKG,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c\right) &\geq \prod_{i=1}^m \mathbb{P}_p[A_i^c] \geq \left(1 - \max_{i=1, \dots, m} \mathbb{P}_p[A_i]\right)^m \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \mathbb{P}_p[A_1 \cup \dots \cup A_m])^{1/m} &\geq 1 - \max_{i=1, \dots, m} \mathbb{P}_p[A_i]. \end{aligned}$$

□

Agora temos todo o arsenal necessário para o estudo da função  $\theta$ , que será feito a seguir.

**Proposição 7.** *Para todo evento crescente  $A \in \mathcal{F}$ , a função  $\varphi_A : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\varphi_A(p) = \mathbb{P}_p(A)$  é não-decrescente em  $p$ . Em particular,  $\theta$  é não-decrescente.*

*Demonstração.* Essa proposição é intuitivamente óbvia, uma vez que, ao aumentarmos o parâmetro  $p$ , cresce o número de arestas abertas no processo, contribuição positiva para a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ . Para prová-la, basta utilizar o acoplamento introduzido na seção anterior. Com efeito, se  $p_1 \leq p_2$ , então  $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$  e  $\mathbb{1}_A(\eta_{p_1}) \leq \mathbb{1}_A(\eta_{p_2})$ . Tomando a esperança em ambos lados da última desigualdade, segue que  $\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$ . □

Obviamente,  $\theta_k(0) = 0$  e  $\theta_k(1) = 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Então, pela proposição anterior podemos inferir a existência de um ponto crítico  $p_c(\mathbb{S}_k) \in [0, 1]$  tal que

$$\theta_k(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c(\mathbb{S}_k) \\ > 0, & \text{se } p > p_c(\mathbb{S}_k). \end{cases}$$

No caso geral, se  $G$  é um grafo conexo infinito com origem  $O$ , o ponto crítico é dado por

$$p_c(G) = \sup \{p : \theta_G(p) = 0\},$$

em que  $\theta_G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é determinada por  $\theta_G(p) = \mathbb{P}_p[|C(O)| = \infty]$ , como usual.

Além disso, dizemos que estamos na fase subcrítica se  $p < p_c$ , crítica se  $p = p_c$  e supercrítica se  $p > p_c$ .

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a laje  $\mathbb{S}_k$  pode ser vista naturalmente como um subgrafo de  $\mathbb{S}_{k+1}$  e de  $\mathbb{Z}^3$ . Se, para um dado  $p \in [0, 1]$ , a probabilidade de a origem pertencer a um aglomerado infinito em  $\mathbb{S}_k$  é positiva, essa correspondência garante que o mesmo ocorre na laje  $\mathbb{S}_{k+1}$  e na rede hipercúbica  $\mathbb{Z}^3$ . Logo,  $\theta_k(p)$  é não-decrescente em  $k$ , o que implica em  $p_c(\mathbb{Z}^3) \leq p_c(\mathbb{S}_{k+1}) \leq p_c(\mathbb{S}_k)$  e, conseqüentemente, na existência do limite  $\hat{p}_c = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{S}_k) \geq p_c(\mathbb{Z}^3)$ . Mais ainda, temos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (GRIMMETT; MARSTRAND, 1990):

**Teorema 8.** *Seja  $d \geq 2$  e  $F$  um subconjunto conexo infinito de  $\mathbb{Z}^d$ , com  $p_c(F) < 1$ . Para cada  $\eta > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que*

$$p_c(2kF + B(k)) \leq p_c(\mathbb{Z}^d) + \eta. \quad (2.1)$$

Se  $d \geq 3$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{S}_k^d) = p_c(\mathbb{Z}^d). \quad (2.2)$$

Note que (2.1) implica em (2.2). Com efeito, suponha que  $d \geq 3$ . Escolhendo  $F = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}^{d-2}$ , temos

$$2kF + B(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : -k \leq x_j \leq k, \text{ para } 3 \leq j \leq d\},$$

que é isomorfo à laje  $\mathbb{S}_{2k}^d$ . Assim, a correspondência natural de  $\mathbb{S}_{2k}^d$  em  $\mathbb{Z}^d$  aliada à Desigualdade (2.1) implica que

$$p_c(\mathbb{S}_{2k}^d) = p_c(2kF + B(k)) \rightarrow p_c(\mathbb{Z}^d)$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

A proposição seguinte determina a presença de um fenômeno crítico não trivial nas lajes.

**Proposição 9.** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p_c(\mathbb{S}_k) < 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Gamma_n^k$  o conjunto cujos elementos são os caminhos autoevitantes em  $\mathbb{S}_k$  que saem da origem e têm tamanho  $n$ . Claramente  $|\Gamma_n^k| \leq 5^n$ , pois temos no máximo 5 possibilidades para a primeira aresta que compõe o caminho, bem como as subsequentes. Logo,

$$\theta_k(p) \leq \mathbb{P}_p \left[ \bigcup_{\lambda \in \Gamma_n^k} \{\lambda \text{ está aberto}\} \right] \leq \sum_{\lambda \in \Gamma_n^k} \mathbb{P}_p \{\lambda \text{ está aberto}\} \leq 5^n \cdot p^n$$



para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, se  $p < \frac{1}{5}$ , temos

$$\theta_k(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_k(p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (5p)^n = 0.$$

E como consequência  $p_c(\mathbb{S}_k) \geq \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Agora, nos resta provar a desigualdade estrita  $p_c(\mathbb{S}_k) < 1$ . Para isso, basta mostrar que existe  $p < 1$  tal que a origem tem probabilidade positiva de percolar no subgrafo gerado por  $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$  com a medida  $\mathbb{P}_p$ .

O conceito de dualidade e o argumento de Peierls fazem-se necessários neste momento. O grafo dual  $\mathbb{Z}_*^2$  de  $\mathbb{Z}^2$  é tal que

$$V(\mathbb{Z}_*^2) = \left\{ x + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) : x \in \mathbb{Z}^2 \right\} \quad \text{e} \quad E(\mathbb{Z}_*^2) = \left\{ \{x, y\}; x, y \in V(\mathbb{Z}_*^2), \|x - y\| = 1 \right\},$$

em que  $\|\cdot\|$  denota a distância euclidiana usual. Note que existe uma bijeção natural entre as arestas de  $\mathbb{Z}^2$  e  $\mathbb{Z}_*^2$ , uma vez que cada aresta de  $\mathbb{Z}^2$  cruza com uma única aresta no dual. Dado que estamos trabalhando com o processo de percolação na rede  $\mathbb{Z}^2$ , façamos a seguinte correspondência natural no grafo  $\mathbb{Z}_*^2$ : uma aresta  $e$  no dual está aberta se, e somente se, a aresta  $e' \in E(\mathbb{Z}^2)$  que cruza com  $e$  está aberta em  $\mathbb{Z}^2$ . A observação crucial é que o aglomerado da origem  $C(0)$  em  $\mathbb{Z}^2$  é finito se, e somente se, existe no dual um ciclo formado por arestas fechadas que a cercam; esse fato é altamente não trivial e sua demonstração pode ser encontrada em (KESTEN, 1982). Denotando por  $\mathcal{T}_n$  o conjunto formado por todos os ciclos de tamanho  $n$  que cercam a origem em  $\mathbb{Z}_*^2$ , temos

$$\mathbb{P}_p \left\{ |C(0)| < \infty \text{ em } \mathbb{Z}^2 \right\} = \mathbb{P}_p \left[ \bigcup_{n=4}^{\infty} \bigcup_{c \in \mathcal{T}_n} \{c \text{ está fechado}\} \right] \leq \sum_{n=4}^{\infty} |\mathcal{T}_n| \cdot (1-p)^n.$$

Mas, todo ciclo de tamanho  $n$  que cerca a origem no dual passa por uma aresta da forma  $\left\{ \left( a + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left( a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ , com  $a \in \{0, \dots, n\}$ . Visto que todo ciclo em  $\mathcal{T}_n$  contém um caminho autoevitante de tamanho  $n - 1$  que começa em algum vértice da forma  $\left( a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ,  $0 \leq a < n$ , temos que a cardinalidade de  $\mathcal{T}_n$  não excede  $n \cdot 4 \cdot 3^{n-2}$ , pois há no máximo  $n$  escolhas para  $a$  e, fixado esse,  $4 \cdot 3^{n-2}$  escolhas para o caminho autoevitante de tamanho  $n - 1$  que define o ciclo e começa em  $a$ . Logo, se  $p > \frac{2}{3}$ , temos

$$\mathbb{P}_p \left\{ |C(0)| < \infty \text{ em } \mathbb{Z}^2 \right\} \leq \sum_{n=4}^{\infty} 4n \cdot \{3(1-p)\}^n \leq 4 \cdot \left\{ \frac{3(1-p)}{[1-3(1-p)]^2} \right\},$$

em que na última desigualdade utilizamos a identidade  $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ , para  $|x| < 1$ , que pode ser obtida derivando-se ambos lados da igualdade  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot 3(1-p)$ .

Repare que  $\xi(p) \equiv \frac{3(1-p)}{[1-3(1-p)]^2} \rightarrow 0$  quando  $p$  tende a 1. Em particular, existe  $\pi \in (0, 1)$  tal que  $\xi(\pi) < 1$ . Dessa forma,  $\mathbb{P}_\pi \{ |C(0)| = \infty \text{ em } \mathbb{Z}^2 \} > 0$  e concluimos que  $p_c(\mathbb{S}_k) \leq p_c(\mathbb{Z}^2) \leq \pi < 1$ , como desejado.  $\square$

Na fase subcrítica, isto é, quando  $p < p_c(\mathbb{S}_k)$ , não existe aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{S}_k$  quase certamente, uma vez que  $\mathbb{P}_p \{ |C(x)| = \infty \} = 0, \forall x \in \mathbb{S}_k$ . Com efeito, suponha por

absurdo que exista um vértice  $x \in \mathbb{S}_k$  com  $\mathbb{P}_p\{|C(x)| = \infty\} > 0$ . Como os eventos  $\{0 \leftrightarrow x\}$  e  $\{|C(x)| = \infty\}$  são crescentes, pela Desigualdade FKG temos

$$\mathbb{P}_p\{|C(0)| = \infty\} \geq \mathbb{P}_p[\{0 \leftrightarrow x\} \cap \{|C(x)| = \infty\}] \geq \mathbb{P}_p[\{0 \leftrightarrow x\}] \cdot \mathbb{P}_p[\{|C(x)| = \infty\}] > 0,$$

uma vez que, obviamente,  $\mathbb{P}_p[\{0 \leftrightarrow x\}] > 0, \forall x \in \mathbb{S}_k$ . Uma contradição.

Para  $p > p_c(\mathbb{S}_k)$ , temos a seguinte proposição:

**Proposição 10.** *Na fase supercrítica existe aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{S}_k$  quase certamente.*

*Demonstração.* Note que o evento  $A \equiv \{\exists \text{ aglomerado aberto infinito em } \mathbb{S}_k\}$  não depende do estado de qualquer coleção finita de arestas. Dado que  $\mathbb{P}_p(A) \geq \theta(p) > 0$ , pela Lei 0-1 de Kolmogorov, segue que  $\mathbb{P}_p(A) = 1$ .  $\square$

**Teorema 11** (Unicidade do aglomerado infinito). *Na fase supercrítica, o aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{S}_k$  é único quase certamente.*

*Ideia de demonstração.* Seja  $N$  a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos disjuntos em  $\mathbb{S}_k$  e  $p > p_c(\mathbb{S}_k)$ . Pela invariância de  $\mathbb{S}_k$  por translações em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$  e por ergodicidade, mostra-se que para todo  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  vale  $\mathbb{P}_p(N = m) \in \{0, 1\}$ . Deve-se analisar caso a caso; suponha por absurdo que para algum  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  tenhamos  $\mathbb{P}_p(N = m) = 1$ . Denotando por  $B_n$  a caixa de lado  $n$  centrada na origem, considere o evento

$$E_n^m = \left\{ \exists (x_i)_{i=1}^m \left| \begin{array}{l} x_i \in \partial B_n \text{ e } x_i \leftrightarrow \infty, \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ x_i \leftrightarrow x_j \text{ em } \mathbb{S}_k \setminus B_n, \forall i \neq j \end{array} \right. \right\}.$$

Note que  $\mathbb{P}_p(\{N = m\}) = \mathbb{P}_p(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m)$ , uma vez que o evento  $\{N = m\}$  ocorre quase certamente. Logo, para algum  $l \in \mathbb{N}$ , vale  $\mathbb{P}_p(E_l^m) > 0$ . Visto que o evento  $E_l^m$  não depende do estado das arestas situadas em  $B_l$ , segue que

$$\mathbb{P}_p(N = 1) \geq \mathbb{P}_p(E_l^m) \cdot \mathbb{P}_p(\{\omega : \omega(e) = 1, \forall e \in B_l\}) > 0.$$

uma contradição com a hipótese  $\mathbb{P}_p(N = m) = 1$ .

Pela Proposição 10, existe aglomerado infinito quase certamente na fase supercrítica. Assim, obtemos que

$$\mathbb{P}_p(N \in \{1, \infty\}) = 1.$$

Agora, daremos um esboço da prova que nos permite inferir a igualdade  $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 0$ . Suponha por absurdo que  $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 1$ . Dizemos que  $x$  é um ponto de trifurcação se são satisfeitas as seguintes condições:

1.  $x$  pertence a um aglomerado aberto infinito;
2.  $x$  é extremo de exatamente 3 arestas abertas;

3. O grafo gerado por  $C(x) \setminus \{x\}$  possui 3 aglomerados abertos infinitos e disjuntos.

Dada uma configuração  $\omega \in \Omega$ , denota-se por  $T(\omega)$  o conjunto dos pontos de trifurcação em  $\omega$ .

Note que  $\alpha = \mathbb{P}_p(\{\omega : 0 \in T(\omega)\}) > 0$ . De fato, tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{P}_p(E_n^3) > 0$  e façamos uma modificação local em  $B_n$  para toda configuração  $\omega \in E_n^3$ , de modo que a origem seja um ponto de trifurcação. Observe que para algumas configurações isso não é possível devido à proximidade, em determinadas partes da caixa, dos vértices responsáveis pela realização do evento  $E_n^3$ , mas que são, de certa forma, “controláveis”. Como essas modificações geram configurações locais que têm probabilidade positiva e  $\mathbb{P}_p(E_n^3) > 0$ , pode-se concluir que  $\alpha > 0$ .

Pelo Teorema Ergódico, temos que, para todo  $\omega \in E_n^3$ , o número de pontos de trifurcação na caixa  $B_n$ ,  $|T(\omega) \cap B_n|$ , é da ordem de  $\alpha \cdot |V(B_n)| \sim \alpha \cdot c \cdot n^2$ ,  $c > 0$  constante. No entanto, para cada ponto de trifurcação  $x_i$  em  $B_n$ , existirá  $y_i \in \partial B_n$  tal que  $x_i \leftrightarrow y_i$  por um caminho autoevitante  $\ell_i$  e  $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ . Assim, para toda configuração  $\omega \in E_n^3$ , existe uma injeção entre o conjunto  $T(\omega)$  e os vértices de  $\partial B_n$ . Portanto, temos  $|T(\omega) \cap B_n| \leq |V(\partial B_n)| \sim c' \cdot n$ ,  $c' > 0$  constante, uma contradição com o comportamento assintótico obtido pela via ergódica.  $\square$

Outro importante fato é a continuidade da função  $\theta$  no intervalo  $(p_c, 1]$ , que será provada no Teorema 1.14. Antes disso, necessitamos de alguns resultados básicos de Análise na Reta.

**Definição 12.** *Uma função real  $f$  é dita semi-contínua superiormente se, para todo  $x$  do domínio e todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que  $f(y) \leq f(x) + \varepsilon$  sempre que  $|x - y| \leq \delta$ . Dizemos que  $f$  é semi-contínua inferiormente se  $-f$  é semi-contínua superiormente (Note que  $f$  é contínua se, e somente se, for semi-contínua superior e inferiormente).*

**Proposição 13.** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma sequência de funções contínuas tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ,  $\forall x \in I$ , e suponha que  $f_n \rightarrow f$  pontualmente. Então,  $f$  é semi-contínua superiormente.*

*Demonstração.* Dado  $x \in I$  e  $\varepsilon > 0$ , seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon/2$ . Como  $f_N$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f_N(y) - f_N(x)| < \varepsilon/2$ ,  $\forall y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ . Logo,

$$f_N(y) - f_N(x) \leq \varepsilon - \varepsilon/2 \leq f(x) - f_N(x) + \varepsilon.$$

Por  $f_N(y) \geq f(y)$ , segue que  $f(y) - f_N(x) \leq f(x) - f_N(x) + \varepsilon$ , ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(y) \leq f(x) + \varepsilon$  se  $|x - y| < \delta$ .  $\square$

**Proposição 14.** *Se  $f$  é função semi-contínua superiormente (inferiormente) e monótona não-decrescente (não-crescente), então  $f$  é contínua à direita.*

*Demonstração.* Uma vez que  $f$  é semi-contínua superiormente, para todo  $x$  do domínio e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(y) - f(x) \leq \varepsilon$  sempre que  $y \in [x, x + \delta)$ . Como  $f$  é monótona não-decrescente,  $0 \leq f(y) - f(x) \leq \varepsilon, \forall y \in [x, x + \delta) \Rightarrow f$  é contínua à direita.  $\square$

Agora, estamos prontos para mostrar o seguinte teorema.

**Teorema 15.** *A função  $\theta$  é contínua em  $(p_c, 1]$ .*

*Demonstração.* Basta provar que  $\theta$  é função contínua à direita e à esquerda no intervalo  $(p_c, 1]$ . É exatamente nesses casos que dividiremos essa demonstração. Como a prova não faz uso do parâmetro  $k$  de  $\mathbb{S}_k$ , esse será omitido, pois não prejudica a compreensão dos argumentos aqui apresentados.

- $\theta$  é contínua à direita em  $(p_c, 1]$ ;

Com efeito, seja  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência de funções dadas por  $\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B_n)$ . Claramente,  $\theta_n(p) \geq \theta_{n+1}(p)$  e  $\theta_n(p) \rightarrow \theta(p)$ , esse último pela continuidade da probabilidade. Como essas funções são contínuas, mais ainda, polinômios em  $p$ , segue pelas Proposições 7, 13 e 14 que  $\theta$  é contínua à direita.

- $\theta$  é contínua à esquerda em  $(p_c, 1]$ .

Vamos utilizar a técnica de acoplamento. Seja  $C_p(0)$  o aglomerado  $p$ -aberto da origem. Note que se  $p' < p$ , então  $C_{p'} \subset C_p$ . Queremos mostrar que  $\theta(p) = \lim_{p' \nearrow p} \theta(p')$ . Assim, veja que

$$\theta(p) - \lim_{p' \nearrow p} \theta(p') = \mathbb{P}(|C_p(0)| = \infty) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|C_{p-\frac{1}{n}}(0)| = \infty).$$

E, pela continuidade da probabilidade,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|C_{p-\frac{1}{n}}(0)| = \infty) &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{n > 1/p} \{|C_{p-\frac{1}{n}}(0)| = \infty\}\right] \\ \theta(p) - \lim_{p' \nearrow p} \theta(p') &= \mathbb{P}\left(\{|C_p(0)| = \infty\} \cap \bigcap_{n > 1/p} \{|C_{p-\frac{1}{n}}(0)| < \infty\}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que  $\bigcap_{n > 1/p} \{|C_{p-\frac{1}{n}}(0)| < \infty\} = \bigcap_{p' < p} \{|C_{p'}(0)| < \infty\}$ , segue que

$$\begin{aligned} \theta(p) - \lim_{p' \nearrow p} \theta(p') &= \mathbb{P}(\{|C_p(0)| = \infty\} \cap \{|C_{p'}(0)| < \infty, \forall p' < p\}) \\ &= \mathbb{P}(\{|C_p(0)| = \infty\} \cap \{|C_{p'}(0)| < \infty, \forall p' \in (p_c, p)\}). \end{aligned}$$

Seja  $\tilde{p} \in (p_c, p)$  e tome uma configuração  $\omega$  qualquer no conjunto  $A \equiv \{|C_p(0)| = \infty\} \cap \{|C_{p'}(0)| < \infty, \forall p' \in (p_c, p)\} \in \tilde{\mathcal{F}}$ . Denote por  $I_{\tilde{p}}^\omega$  o aglomerado infinito  $\tilde{p}$ -aberto em  $\omega$  e  $C_p^\omega$  o aglomerado  $p$ -aberto da origem nessa mesma configuração. Dado que  $\omega \in A$ , veja que

$|C_p^\omega| = \infty$  e que existe um caminho  $p$ -aberto, digamos,  $\lambda$ , que liga a origem a  $I_{\tilde{p}}^\omega$ , uma vez que o aglomerado infinito  $p$ -aberto é único quase certamente. Note que deve existir uma aresta  $e \in \lambda$  tal que  $X(e) = p$ . Com efeito,  $X(e) \leq p, \forall e \in \lambda$ , pela definição de  $p$ -aberto. Então, suponha por absurdo que  $X(e) < p, \forall e \in \lambda$ . Logo,  $p_m \equiv \max\{X(e) : e \in \lambda\} < p$ , o que implica em  $\lambda$  ser também um caminho  $p_m$ -aberto. Tomando  $p'' = \max\{p_m, \tilde{p}\}$ , segue que  $|C_{p''}^\omega| = \infty$ , contradição com a escolha de  $\omega \in A$ . Portanto, para toda configuração  $\omega \in A$ , existe uma aresta  $e \in \mathbb{S}_k$  tal que  $X(e) = p$ . Assim,

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\exists e \in \mathbb{S}_k : X(e) = p) \leq \sum_{e \in \mathbb{S}_k} \mathbb{P}(X(e) = p) = 0.$$

E concluímos que  $\theta(p) - \lim_{p' \nearrow p} \theta(p') = 0$ , como queríamos.  $\square$

Nesse momento, estamos prontos para iniciar o estudo da percolação crítica em lajes, a ser feita no capítulo seguinte.

## 3 Percolação no ponto crítico em lajes

Este capítulo é a parte principal desta dissertação e baseia-se essencialmente nos resultados contidos no artigo *Absence of infinite cluster for critical Bernoulli percolation on slabs* (DUMINIL; SIDORAVICIUS; TASSION, 2016). Daqui em diante fixaremos  $p$  e  $k$  e assumiremos que  $\mathbb{P}_p\{0 \leftrightarrow \infty\} > 0$ . O objetivo deste capítulo consiste em deduzir que, perante essa hipótese,  $p > p_c(\mathbb{S}_k)$ . Conclui-se, mediante a continuidade da função  $\theta$  nas fases subcrítica e supercrítica vista no capítulo anterior, que  $\theta$  é contínua no intervalo  $[0, 1]$ .

### 3.1 O estudo local

Esta seção consiste em mostrar que a probabilidade de haver certos caminhos contidos na caixa  $B_r$ , que partem de uma região conveniente e se conectam à fronteira  $\partial B_r$ , é tão alta quanto se queira, conforme  $r$  tende a infinito. Juntamente com o Lema da Colagem, esse estudo local é essencial para o passo de renormalização da rede.

Por simplicidade, introduzimos a seguinte notação.

**Notação 16.** Para um conjunto  $E \subset V(\mathbb{Z}_2)$ , seja  $\bar{E} \subset V(\mathbb{S}_k)$  o conjunto de vértices cujas duas primeiras coordenadas estão em  $E$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B \in V(\mathbb{Z}_2)$  e  $X, Y \subset B$ , definimos os eventos

$$X \xrightarrow{B} Y = \{ \text{existe um aglomerado em } \bar{B} \text{ conectando } \bar{X} \text{ a } \bar{Y} \}$$

$$X \xrightarrow{!!!} Y = \{ \text{existe um único aglomerado em } \bar{B} \text{ conectando } \bar{X} \text{ a } \bar{Y} \}$$

Por comodidade, escreveremos  $X \leftrightarrow Y$  ao invés de  $X \xrightarrow{\mathbb{S}_k} Y$  e fixaremos a notação  $B_n = [-n, n]^2$  e  $\partial B_n = B_n \setminus B_{n-1}$ .

**Proposição 17.** Existe uma sequência de inteiros positivos  $(u_n)_{n \geq 1}$ , com  $u_n \leq n/3$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ B_{u_n} \xrightarrow{B_n} \partial B_n \right] = 1.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 10, existe aglomerado infinito em  $\mathbb{S}_k$  quase certamente. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $E_n \equiv \{B_n \leftrightarrow \infty\}$ . Note que

$$\mathbb{P}_p \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right] = \mathbb{P}_p \left[ \{\exists \text{ aglomerado infinito em } \mathbb{S}_k\} \right] = 1.$$

Como a sequência de eventos  $(E_n)_{n=1}^{\infty}$  é crescente, pela continuidade da probabilidade,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p[E_n] = 1$ . Isso implica na existência de uma sequência de inteiros positivos  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\mathbb{P}_p[B_{k_n} \leftrightarrow \infty] > 1 - \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

Além disso, para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , considere o evento  $F_{m,n} = \left\{ B_{k_n} \xleftrightarrow{!B_m!} \partial B_m \right\} \cap \{B_{k_n} \leftrightarrow \infty\}$ . Observe que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a sequência de eventos  $(F_{m,n})_{m=k_n}^\infty$  também é crescente. Logo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p [F_{m,n}] = \mathbb{P}_p \left[ \bigcup_{m=k_n}^\infty F_{m,n} \right] = \mathbb{P}_p [\{B_{k_n} \leftrightarrow \infty\}], \quad (3.2)$$

em que a última igualdade deve-se a unicidade do aglomerado infinito em  $\mathbb{S}_k$ . Então, por (3.1) e (3.2) infere-se a existência de uma sequência de inteiros positivos  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\mathbb{P}_p [F_{m_n,n}] \geq 1 - \frac{1}{n}. \quad (3.3)$$

Note que podemos supor sem perda de generalidade que  $m_n \geq 3k_n$ , pois vale a inclusão

$$F_{m,n} \subset F_{m+1,n}, \forall m \geq k_n. \quad (3.4)$$

Assim, considere a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n < m_1, \\ k_j, & \text{se } m_j \leq n < m_{j+1}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Segue de (3.3), (3.4) e (3.5) que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p \left[ \left\{ B_{u_n} \xleftrightarrow{!B_n!} \partial B_n \right\} \cap \{B_{u_n} \leftrightarrow \infty\} \right] &\geq 1 - \frac{1}{n}, \forall n \geq m_1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ \left\{ B_{u_n} \xleftrightarrow{!B_n!} \partial B_n \right\} \cap \{B_{u_n} \leftrightarrow \infty\} \right] &= 1. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ \left\{ B_{u_n} \xleftrightarrow{!B_n!} \partial B_n \right\} \right] = 1.$$

como queríamos.  $\square$

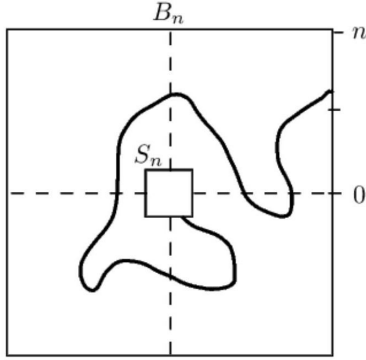
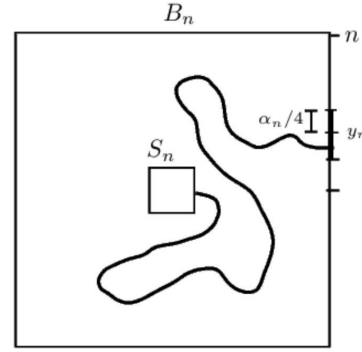
Por simplicidade, daqui em diante escreveremos  $S_n \equiv B_{u_n}$  e, para  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq n$ , definiremos o seguinte evento

$$\mathcal{E}_n(\alpha, \beta) = \left\{ S_n \xleftrightarrow{B_n} \{n\} \times [\alpha, \beta] \right\}.$$

Os dois lemas a seguir, embora um pouco técnicos, são fundamentais na conclusão da alta probabilidade de existência de uma estrutura local, que será uma importante aliada ao Lema da Colagem e ao passo de renormalização, em uma caixa de tamanho suficientemente grande.

**Lema 18.** *Existem duas sequências  $(y_n)$  e  $(\alpha_n)$  com valores em  $[0, n]$ , tais que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)] &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(y_n - \alpha_n/4, y_n + \alpha_n/4)] &= 1. \end{aligned}$$

Figura 1 –  $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$ 

 Figura 2 –  $\mathcal{E}_n(y_n - \alpha_n/4, y_n + \alpha_n/4)$ 


Elaborado pela autora, 2015

Acima, o evento  $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$  é representado na Figura 1 e o evento  $\mathcal{E}_n(y_n - \alpha_n/4, y_n + \alpha_n/4)$  é representado na Figura 2.

*Demonstração.* Aplicando o Truque da raiz aos seguintes eventos

$$A_{i,j} = \left\{ S_n \xleftrightarrow{B_n} \left\{ (-1)^i \cdot n \right\} \times \left[ 0, (-1)^j \cdot n \right] \right\}, 1 \leq i, j \leq 2$$

$$B_{i,j} = \left\{ S_n \xleftrightarrow{B_n} \left[ 0, (-1)^i \cdot n \right] \times \left\{ (-1)^j \cdot n \right\} \right\}, 1 \leq i, j \leq 2'$$

obtemos

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(0, n)] \geq 1 - \left( 1 - \mathbb{P}_p \left[ S_n \xleftrightarrow{B_n} \partial B_n \right] \right)^{1/8}.$$

Pela Proposição 17, segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(0, n)] = 1$ . Ainda, note que o evento  $\mathcal{E}_n(0, 0)$  está contido no evento  $H = \{ \text{existe pelo menos uma aresta horizontal aberta que possui um vértice na haste } \overline{(n, 0)} \}$ , em que por horizontal entende-se as arestas da forma  $\{(x, y, z), (u, v, z)\}$ . Assim,  $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_n(0, 0)) \leq 1 - \mathbb{P}_p(H^c) = 1 - (1 - p)^{4(k+1)} \equiv c$ , pois a probabilidade de todas as arestas horizontais que possuem um vértice na haste  $\overline{(n, 0)}$  estarem fechadas é  $(1 - p)^{4(k+1)}$ . Como  $\mathcal{E}_n(1, n)$  e  $\mathcal{E}_n(0, 0)$  são eventos crescentes, dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n) \cup \mathcal{E}_n(0, 0)] \\ &= \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)] + \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(0, 0)] - \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n) \cap \mathcal{E}_n(0, 0)] \\ &\leq \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(0, 0)] \cdot (1 - \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)]) + \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)], \end{aligned}$$

em que a última desigualdade é devido à Desigualdade FKG. Logo,

$$1 - \frac{\varepsilon}{1 - c} \leq \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)].$$

Dessa forma, podemos escolher  $n$  suficientemente grande de modo que valha a desigualdade

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(0, 0)] < \mathbb{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)].$$



Analogamente, para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, n-1)] > \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(n, n)].$$

As duas desigualdades acima garantem que existe e é não-trivial o número  $\alpha_n$  definido por

$$\alpha_n \equiv \max \{ \alpha \leq n-1 : \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha-1)] < \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha, n)] \}. \quad (3.6)$$

Obviamente,

$$\mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n-1)] < \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)] \quad (3.7)$$

e

$$\mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)] > \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n+1, n)]. \quad (3.8)$$

Aplicando o Truque da raiz sobre os eventos que compõem as Desigualdades (3.7) e (3.8), obtemos

$$\min \{ \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)], \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)] \} \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, n)])^{1/2}. \quad (3.9)$$

Uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, n)] = 1$ , a primeira parte do lema segue da desigualdade acima. Para a segunda parte, necessitamos da decomposição do evento

$$\mathcal{E}_n(0, \alpha_n) = \mathcal{E}_n(0, \alpha_n/2) \cup \mathcal{E}_n(\alpha_n/2, \alpha_n).$$

Novamente pelo Truque da raiz,

$$\max \{ \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n/2)], \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n/2, \alpha_n)] \} \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)])^{1/2}, \quad (3.10)$$

e tomando  $y_n = \frac{\alpha_n}{4}$  ou  $y_n = \frac{3\alpha_n}{4}$  de modo que

$$\max \{ \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(0, \alpha_n/2)], \mathbb{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n/2, \alpha_n)] \} = \mathbb{P}_p \left[ \mathcal{E}_n \left( y_n - \frac{\alpha_n}{4}, y_n + \frac{\alpha_n}{4} \right) \right]$$

segue pelas Desigualdades (3.9) e (3.10) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ \mathcal{E}_n \left( y_n - \frac{\alpha_n}{4}, y_n + \frac{\alpha_n}{4} \right) \right] = 1,$$

como queríamos. □

**Lema 19.** *Seja  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência dada pela Equação (3.6). Se  $\mathfrak{C} = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_{3n} \leq 4\alpha_n\}$ , então  $|\mathfrak{C}| = \infty$ .*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $|\mathfrak{C}| < \infty$ , isto é, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq 3^{N_0}$  tem-se  $\alpha_{3n} > 4\alpha_n$ . Então, para todo  $N > N_0$ , vale  $\alpha_{3^N} > 4^{N-N_0} \cdot \alpha_{3^{N_0}}$ . Uma vez que  $\alpha_n < n$ , segue que  $3^N > 4^{N-N_0} \cdot \alpha_{3^{N_0}}$ ,  $\forall N > N_0$ , contradição. □



Pela Equação 3.11 e o Lema 18, conclui-se que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] = 1. \quad (3.12)$$

Por um instante, vamos assumir que temos o seguinte lema a nossa disposição, que será provado na Seção 3.3. Enfatizamos que esse é o resultado mais importante desta dissertação e, pela geometria da laje, contorna a dificuldade apresentada pela renormalização em três dimensões.

**Lema 20** (Lema da Colagem). *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon, k) > 0$  tal que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] \geq 1 - \delta$$

implica

$$\mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right] \geq 1 - \varepsilon.$$

Intuitivamente, uma vez que a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos  $\left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n \right\}$ ,  $\left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^- \right\}$  e  $\left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}$  é alta, a probabilidade de se “colarem” os caminhos que realizam tais eventos é suficientemente alta.

O lema anterior e a Equação (3.12) nos dão

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right] = 1. \quad (3.13)$$

Além disso, note que (veja a figura abaixo):

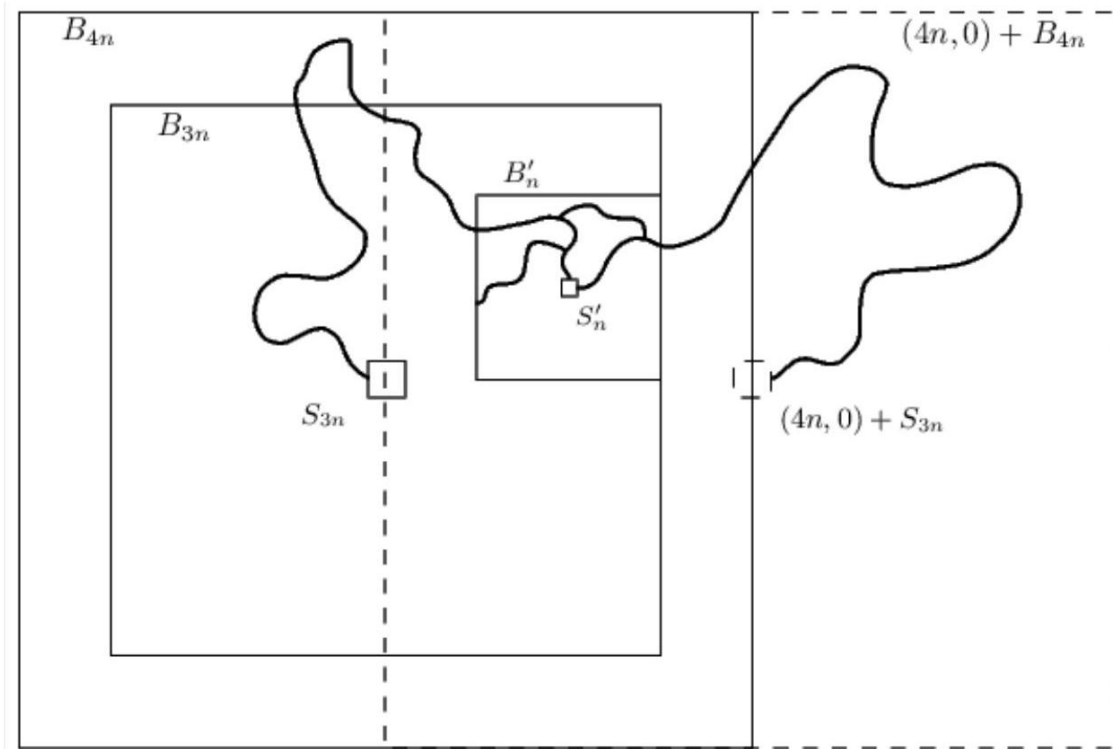
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{(2n,0)+B_{6n}} (4n,0) + S_{3n} \right] \\ & \geq \mathbb{P}_p \left[ \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n,0) + S_{3n} \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n} \partial B'_n \right\} \right] \\ & \geq \mathbb{P}_p \left[ \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right\} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n,0) + S_{3n} \right\} \right] + \mathbb{P}_p \left\{ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n} \partial B'_n \right\} - 1 \\ & \geq \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right]^2 + \mathbb{P}_p \left[ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n} \partial B'_n \right] - 1. \end{aligned}$$

O último passo segue da Desigualdade FKG e da reflexão da rede através do eixo  $\{2n\} \times \mathbb{R}$ . Logo, pela Proposição 17 e a Igualdade (3.13),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{(2n,0)+B_{6n}} (4n,0) + S_{3n} \right] = 1. \quad (3.14)$$

Nesse momento, temos quase todas as ferramentas necessárias para provarmos a continuidade da função  $\theta$  no ponto crítico. O último passo será o uso de um argumento de renormalização da nossa rede, a ser dado na seção seguinte.

Figura 4 – O evento  $\left\{S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n\right\} \cap \left\{S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n,0) + S_{3n}\right\} \cap \left\{S'_n \xleftrightarrow{!B'_n!} \partial B'_n\right\}$



Elaborado pela autora, 2015

### 3.2 O passo de renormalização

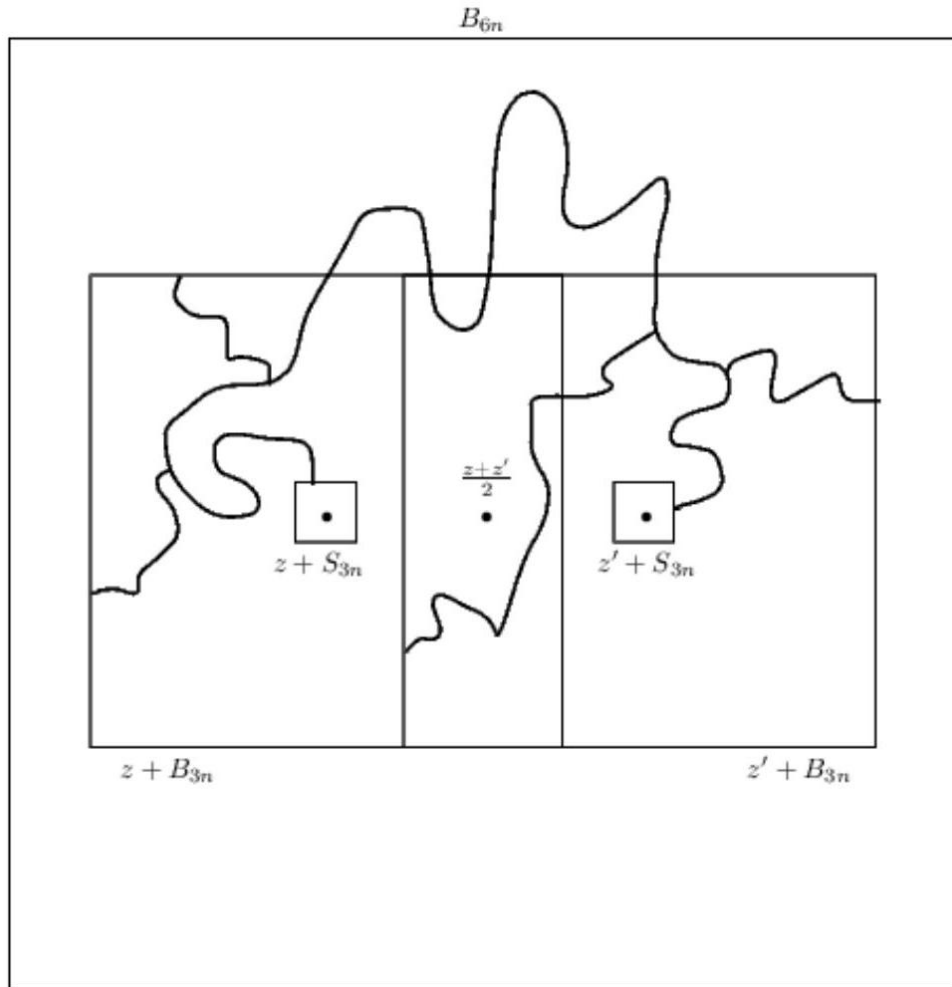
Uma das ferramentas centrais no estudo da percolação na fase supercrítica, a renormalização já era utilizada pelo matemático Harry Kesten em 1981. Nessa seção, faremos uso do argumento de renormalização estática, isto é, que não depende de um processo iterativo, tal como é apresentado, por exemplo, no trabalho (GRIMMETT; MARSTRAND, 1990).

A ideia substancial por trás dessa técnica consiste particionar a rede estudada em blocos de tamanho fixo  $r$  e definir eventos locais associados a esses blocos de modo que algumas condições simples são satisfeitas: (a) gostaríamos que esses eventos tivessem probabilidade tão alta quanto se queira, para uma escolha de  $r$  suficientemente grande; (b) deseja-se que esses eventos sejam independentes, ou pelo menos “não tão dependentes”; e (c) espera-se que um aglomerado infinito de blocos bons, isto é, aqueles cujos eventos associados de fato ocorrem, corresponda a existência de um aglomerado infinito na rede original.

Antes de aplicarmos esse método, vamos introduzir algumas definições.

**Definição 21.** *Seja  $G$  um grafo qualquer e considere duas arestas  $e, e' \in G$  juntamente com o menor caminho  $\gamma_{e,e'} \in G$  que as conecta, cujas extremidades são formadas por  $e, e'$ . A distância*

Figura 5 – Os eventos correspondentes às condições 1 e 2.



Elaborado pela autora, 2015

$d(e, e')$  entre  $e$  e  $e'$  é definida por

$$d(e, e') = |\gamma_{e,e'}| - 1.$$

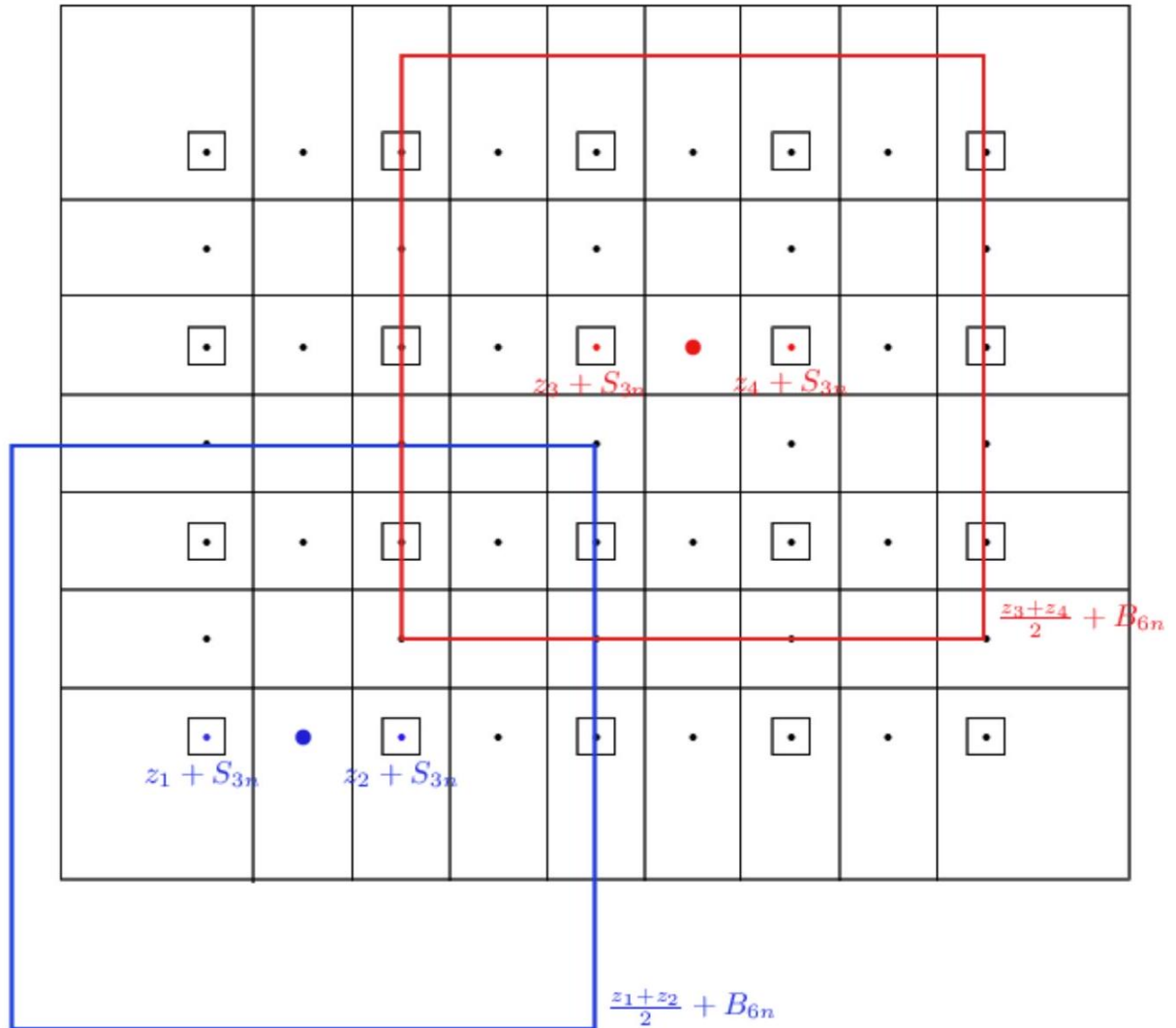
**Definição 22.** A família de variáveis aleatórias de Bernoulli  $X = \{X_e : e \in \mathbb{E}(\mathbb{S}_k)\}$  é dita  $k$ -dependente se quaisquer duas sub-famílias  $\{X_e : e \in A\}$  e  $\{X_e : e \in B\}$  são independentes sempre que  $d(e, e') > k$ , para todo  $e \in A$  e  $e' \in B$ .

Fixe  $n \in \mathbb{N}$ , a ser escolhido posteriormente. Dizemos que uma aresta  $\{z, z'\}$  de  $4n\mathbb{Z}^2$  é boa se as duas condições abaixo são satisfeitas:

1.  $z + S_{3n} \xleftrightarrow{R_n} z' + S_{3n}$ , com  $R_n = \frac{z+z'}{2} + B_{6n}$ ;
2.  $z + S_{3n} \xleftrightarrow{|z+B_{3n}|} z + \partial B_{3n}$  e  $z' + S_{3n} \xleftrightarrow{|z'+B_{3n}|} z' + \partial B_{3n}$ .

Com uma espécie de correspondência entre  $\mathbb{S}_k$  e  $4n\mathbb{Z}^2$ , uma aresta  $\{z, z'\}$  é aberta no grafo  $4n\mathbb{Z}^2$  se, e somente se, ela é boa, isto é, os eventos indicados em 1 e 2, e ilustrados na figura

Figura 6 – Interseção das caixas  $\frac{z_1+z_2}{2} + B_{6n}$  e  $\frac{z_3+z_4}{2} + B_{6n}$ . Se  $e = \{v_1, v_2\}$ ,  $f = \{v_3, v_4\}$  são arestas de  $4n\mathbb{Z}^2$ , as caixas  $\frac{v_1+v_2}{2} + B_{6n}$  e  $\frac{v_3+v_4}{2} + B_{6n}$  não possuem interseção em  $\mathbb{S}_k$  se, e somente se,  $d(e, f) > 4$ .



Elaborado pela autora, 2015

acima, ocorrem em  $\mathbb{S}_k$ . Note que a ocorrência de percolação de arestas boas em  $4n\mathbb{Z}^2$  traduz-se na existência de aglomerado aberto infinito em  $\mathbb{S}_k$ , uma vez que, denotando por  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de vértices adjacentes em  $4n\mathbb{Z}^2$  que compõem um caminho infinito, as conexões entre  $z_j + S_{3n}$  e  $z_{j+1} + S_{3n}$  em  $\overline{B_{6n}}$ , juntamente com a unicidade do aglomerado aberto que conecta  $z_j + S_{3n}$  a  $z + \partial B_{3n}$  em  $\overline{z_j + B_{3n}}$  e  $z_{j+1} + S_{3n}$  a  $z_{j+1} + \partial B_{3n}$  em  $\overline{z_{j+1} + B_{3n}} \forall j \in \mathbb{N}$ , garantem a existência de um aglomerado infinito em  $\mathbb{S}_k$  que conecta as caixas da forma  $z_j + S_{3n}$ .

Dado qualquer  $\eta \in (0, 1)$ , a Proposição 17 e a Equação (3.14) nos garantem, pela invariância de  $\mathbb{Z}^2$  por translação, a existência de um  $n \in \mathbb{N}$  tal que a probabilidade de uma aresta  $e \in 4n\mathbb{Z}^2$  ser boa excede  $1 - \eta$ . No entanto, note que o modelo de percolação em  $4n\mathbb{Z}^2$  é 4-dependente. Ilustramos abaixo esse fato:

Pelo resultado clássico presente em (BALISTER; BOLLOBÁS; WALTERS, 2005) e (LIGGETT; SCHONMANN; STACEY, 1997), em que compara-se a percolação  $k$ -dependente à percolação de Bernoulli, assegura-se a existência de  $\rho > 0$  tal que, se a probabilidade de uma aresta estar aberta em  $4n\mathbb{Z}^2$  é maior que  $1 - \rho$ , então há percolação nessa rede. Assim, tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que vale

$$\mathbb{P}_p \left\{ z + S_{3n} \xleftrightarrow{R_n} z' + S_{3n}, z + S_{3n} \xleftrightarrow{!z+B_{3n}!} z + \partial B_{3n}, z' + S_{3n} \xleftrightarrow{!z'+B_{3n}!} z' + \partial B_{3n} \right\} > 1 - \rho$$

com  $\{z, z'\} \in 4n\mathbb{Z}^2$ .

Visto que o evento  $\{e \in 4n\mathbb{Z}^2 \text{ está aberto}\}$  depende unicamente do estado das arestas em uma caixa finita de lado  $12n$  e, conseqüentemente, sua probabilidade é expressa como um polinômio no parâmetro  $p$ , existe  $q < p$  tal que

$$\mathbb{P}_q \left\{ z + S_{3n} \xleftrightarrow{R_n} z' + S_{3n}, z + S_{3n} \xleftrightarrow{!z+B_{3n}!} z + \partial B_{3n}, z' + S_{3n} \xleftrightarrow{!z'+B_{3n}!} z' + \partial B_{3n} \right\} > 1 - \rho.$$

Assim, o conjunto de arestas boas também percola ao considerarmos o parâmetro  $q$  na medida de probabilidade em  $\mathbb{S}_k$ . Posto que fixamos  $p \in [0, 1]$  tal que  $\mathbb{P}_p\{0 \leftrightarrow \infty\} > 0$  e encontramos  $q < p$ , com  $\mathbb{P}_q\{0 \leftrightarrow \infty\} > 0$ , deduzimos que  $p > q \geq p_c(\mathbb{S}_k)$ , isto é, para todo parâmetro  $p \in [0, 1]$  que respeita a condição  $\mathbb{P}_p\{0 \leftrightarrow \infty\} > 0$ , temos  $p > p_c(\mathbb{S}_k)$ . Portanto, concluímos que  $\mathbb{P}_{p_c(\mathbb{S}_k)}\{0 \leftrightarrow \infty\} = 0$  dado que temos o Lema da Colagem em mãos, a ser demonstrado a seguir.

### 3.3 A Prova do Lema da Colagem

Note que o Lema da Colagem vale trivialmente para  $k = 0$ , caso em que basta tomar  $\delta = \varepsilon$ . Portanto, podemos assumir a partir de agora que  $k > 0$ . Também necessitamos do seguinte lema, que será utilizado na prova das proposições que antecedem a demonstração do Lema da Colagem.

**Lema 23.** *Sejam  $s, t > 0$ . Considere dois eventos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  que dependem de um conjunto finito  $\mathcal{C}$  de arestas e uma função  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{B})$ , em que  $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$  denota o conjunto dos subeventos de  $\mathcal{B}$ . Assuma que*

1.  $|\phi(\omega)| \geq t, \forall \omega \in \mathcal{A}$ ,
2. *Para todo  $\omega' \in \mathcal{B}$ , existe um conjunto  $S$  de arestas,  $|S| < s$ , tal que  $\{\omega : \omega' \in \phi(\omega)\} \subset \{\omega : \omega|_c = \omega'|_{S^c}\}$*

Então,

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{A}] \leq \frac{(2/\min\{p, 1-p\})^s}{t} \mathbb{P}[\mathcal{B}].$$

Esse lema nos dá uma boa cota superior da probabilidade de  $\mathcal{A}$  quando  $s$  é pequeno e  $t$  é grande.

*Demonstração.* Posto que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dependem de um número finito de arestas, sem perda de generalidade, podemos supor por um momento que estamos trabalhando com o espaço amostral  $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathcal{C}|}$ , a  $\sigma$ -álgebra das partes  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  e a medida produto  $\mathbb{P}_p = \prod_{e \in \mathcal{C}} \mu_e$ , com  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  e  $S \subset \mathcal{C}$ , em que  $\mu_e \sim \text{Ber}(p), \forall e \in \mathcal{C}$ .

Note que  $\mathbb{P}_p(\omega') \geq \mathbb{P}_p(\omega) \cdot (\min\{p, 1-p\})^s, \forall \omega' \in \phi(\omega)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\omega') &= \mathbb{P}_p\left(\left(\omega'_{|_S}\right) \cap \left(\omega'_{|_S}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}_p\left(\left\{\omega : \omega_{|_S} = \omega'_{|_S}\right\}\right) \cdot \mathbb{P}_p\left(\left\{\omega : \omega_{|_S} = \omega'_{|_S}\right\}\right). \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{P}_p\left(\left\{\omega : \omega_{|_S} = \omega'_{|_S}\right\}\right) \geq (\min\{p, 1-p\})^s$  e, pelo item 2 acima,  $\mathbb{P}_p(\{\omega : \omega_{S^c} = \omega'_{S^c}\}) \geq \mathbb{P}_p(\{\omega : \omega' \in \phi(\omega)\})$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\omega') &\geq \mathbb{P}_p(\{\omega : \omega' \in \phi(\omega)\}) \cdot (\min\{p, 1-p\})^s \\ &\geq \mathbb{P}_p(\omega) \cdot (\min\{p, 1-p\})^s. \end{aligned}$$

Uma vez que  $|\phi(\omega)| \geq t, \forall \omega \in \mathcal{A}$ , segue que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_p[\omega] \leq \frac{1}{t(\min\{p, 1-p\})^s} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_p[\phi(\omega)].$$

Trocando a ordem do somatório, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_p[\omega] &\leq \frac{1}{t(\min\{p, 1-p\})^s} \sum_{\omega' \in \mathcal{B}} |\{\omega : \omega' \in \phi(\omega)\}| \cdot \mathbb{P}_p[\omega'] \\ &\leq \frac{2^s}{t(\min\{p, 1-p\})^s} \cdot \sum_{\omega' \in \mathcal{B}} \mathbb{P}_p[\omega'], \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de  $|\{\omega : \omega' \in \phi(\omega)\}| \leq |\{\omega : \omega_{|_S} = \omega'_{|_S}\}| = 2^s$ .  $\square$

Daqui em diante, fixemos uma ordem  $\prec$  arbitrária nas arestas emanando de cada vértice de  $\mathbb{S}_k$ , que é invariante sobre translações de  $\mathbb{Z}^2$ , e também uma ordem arbitrária  $\ll$  nos vértices de  $\mathbb{S}_k$ . Assim, defina uma ordem total dos caminhos autoevitantes de  $\overline{S_{3n}}$  para  $\overline{Z_{3n}}$  tomando a ordem lexicográfica - para dois caminhos  $\gamma = (\gamma_i)_{i \leq r}$  e  $\gamma' = (\gamma'_i)_{i \leq r'}$ , temos  $\gamma \prec \gamma'$  se uma das seguintes condições é satisfeita:

1.  $r < r'$  e  $\gamma = (\gamma'_i)_{i \leq r}$ ;
2.  $\gamma_0 \ll \gamma'_0$ ;
3.  $\exists k \in \mathbb{N}^*, k < \min\{r, r'\}$ , tq  $\gamma_j = \gamma'_j$  se  $j \leq k$  e  $(\gamma_k, \gamma_{k+1}) \prec (\gamma'_k, \gamma'_{k+1})$ .



**Definição 24.** Considere uma configuração  $\omega$  com pelo menos um caminho aberto de  $\overline{S_{3n}}$  para  $\overline{Z_{3n}}$ . Defina  $\gamma_{\min}(\omega)$  como sendo o caminho aberto autoevitante minimal que conecta  $\overline{S_{3n}}$  a  $\overline{Z_{3n}}$  (pela ordem definida acima). Seja  $U(\omega)$  o conjunto dos pontos  $z \in B'_n$ , com

1.  $\overline{\{z\}} \cap \gamma_{\min}(\omega) \neq \emptyset$ ;
2.  $\overline{z + B_1}$  está conectado a  $\overline{S'_n}$  na caixa  $B_{3n}$  por um caminho aberto  $\pi$  e a distância entre as projeções canônicas de  $\pi$  e  $\gamma_{\min}$  sobre  $\mathbb{Z}^2$  é exatamente 1.

Seja  $\mathcal{X} = \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\} \cap \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}^c$ . Observe que provar o Lema da Colagem corresponde a mostrar que a probabilidade do evento  $\mathcal{X}$  tende a zero conforme a probabilidade de  $\left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}$  aproxima-se de 1. Nós procederemos analisando duas situações que dependem da cardinalidade de  $U(\omega)$ .

**Proposição 25.** Fixe  $\varepsilon > 0$  e  $t > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbb{P}_p \left[ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] > 1 - \delta$$

implica em

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| < t\}] \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $\omega \in \mathcal{X}$  tal que  $|U(\omega)| < t$  e  $\omega'$  a configuração obtida de  $\omega$  fechando, para qualquer  $z \in U(\omega)$ , todas as arestas  $\{u, v\}$  em que  $u \in \overline{\{z\}}$  e  $v$  está conectado a  $\overline{S'_n}$  por um caminho aberto.

Observe que  $\omega'$  não contém dois caminhos abertos  $\gamma_1, \gamma_2$  em  $\overline{B'_n}$  que conectam  $\overline{S'_n}$  a  $\overline{Y_n^-}$  e a  $\overline{Y_n^+}$ , respectivamente. Com efeito, se houvessem tais caminhos abertos simultaneamente em  $\omega'$ , as projeções canônicas de  $\gamma_{\min}(\omega), \gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $\mathbb{Z}^2$  se intersectariam, uma vez que  $\omega \in \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}^c$  e nenhuma aresta de  $\gamma_{\min}(\omega)$  é fechada nesse processo. Mas, isso implicaria na existência de um vértice  $z \in U(\omega)$  e uma aresta  $\{u, v\}$ , com  $u \in \overline{\{z\}}$  e  $v$  conectado a  $\overline{S'_n}$  por um caminho aberto em  $\omega'$ , contradição. Logo, podemos construir a seguinte função

$$\phi : \mathcal{X} \cap \{|U| < t\} \longrightarrow \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c$$

que mapeia uma configuração  $\omega$  para  $\omega'$ .

Como visto acima, temos

$$\gamma_{\min}(\omega') = \gamma_{\min}(\omega) \tag{3.15}$$

para todo  $\omega \in \phi^{-1}(\omega')$ , uma vez que nenhuma aresta de  $\gamma_{\min}(\omega)$  é fechada. Isso implica em  $U(\omega') \subset U(\omega)$ . Também obtemos a inclusão contrária notando que, se  $z \in U(\omega)$ , pela Identidade (3.15),  $\overline{\{z\}} \cap \gamma_{\min}(\omega') \neq \emptyset$  e, como o conjunto de arestas fechadas para a obtenção da configuração  $\omega'$  está contido em  $\bigcup_{z \in \gamma_{\min}(\omega)} \{e; e \in \overline{z + B_1} \setminus \partial(z + B_1)\}$ , o caminho aberto

$\pi \in \omega$  que conecta  $z + \overline{B_1}$  a  $\overline{S'_n}$  e satisfaz a Condição 2 da Definição 24 não terá nenhuma aresta fechada nesse processo.

Assim, estamos sobre as hipóteses do Lema 23 tomando  $\mathcal{A} = \mathcal{X} \cap \{|U| < t\}$ ,  $\mathcal{B} = \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c$ ,  $t = 1$  e  $s = 6kt$ . Portanto,

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| < t\}] \leq (2/\min\{p, 1-p\})^{6kt} \cdot \mathbb{P}_p \left[ \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c \right]$$

e a proposição segue imediatamente.  $\square$

**Proposição 26.** Fixe  $\varepsilon > 0$ . Para  $t \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\}] \leq \varepsilon \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right].$$

*Demonstração.* Fixe  $R \geq 2$  de modo que, para qualquer vértice  $z \in \mathbb{S}_k$  e para quaisquer três vizinhos distintos  $u, v, w$  de  $z$  e três vértices distintos  $u', v', w'$  na fronteira de  $\overline{B_R(z)} \equiv \overline{(z_1, z_2) + B_R}$ , existem três caminhos disjuntos autoevitantes em  $\overline{B_R(z)} \setminus \{z\}$  conectando  $u$  a  $u'$ ,  $v$  a  $v'$  e  $w$  a  $w'$ . Note que tal  $R$  existe, uma vez que estamos lidando com o modelo de percolação em arestas e  $k > 0$ .

Para  $\omega \in \mathcal{X}$  tal que  $|U(\omega)| \geq t$  e  $z \in U(\omega)$ , construa a configuração  $\omega^{(z)}$  como segue:

1. Escolha  $u, v, w$  de modo que  $(z, u), (z, v)$  e  $(z, w)$  sejam três arestas distintas, com  $(z, v) \prec (z, w)$ . Defina  $u'$  e  $v'$  para serem, respectivamente, o primeiro e o último vértice de  $\gamma_{\min}(\omega)$ , indo de  $S_{3n}$  a  $Y_n^+ \cup Y_n^-$ , que estão em  $\overline{B_R(z)}$  (esses vértices existem pela Propriedade 1 da Definição 24). Em seguida, escolha  $w'$  na fronteira de  $\overline{B_R(z)}$  de forma que exista um caminho aberto autoevitante  $\pi$  de  $w'$  a  $\overline{S'_n}$  em  $B_{3n}$  cujas arestas não pertençam a  $\overline{B_R(z)}$ . Note que a Propriedade 2 da Definição 24 assegura a existência de  $w'$  e  $\pi$ . Além disso, como  $\omega \in \mathcal{X} \subset \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}^c$ , temos  $w' \neq u', v'$ .
2. Feche todas as arestas de  $\omega$  em  $\overline{B_{R+1}(z)}$ , com exceção das arestas de  $\gamma_{\min}(\omega)$  e  $\pi$  pertencentes a  $\overline{B_{R+1}(z)} \setminus \overline{B_R(z)}$ .
3. Abra as arestas  $(z, u), (z, v)$  e  $(z, w)$  juntamente com três caminhos autoevitantes  $\gamma_u, \gamma_v$  e  $\gamma_w$  em  $\overline{B_R(z)} \setminus \{z\}$  que conectam  $u$  a  $u', v$  a  $v'$  e  $w$  a  $w'$ .

Por construção,  $\omega^{(z)} \in \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}$  e podemos definir a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\} &\longrightarrow \mathfrak{P} \left( S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right) \\ \omega &\longmapsto \left\{ \omega^{(z)}, z \in U(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

Gostaríamos de aplicar o Lema 23 e, para isso, faz-se útil a observação abaixo.

Note que a ordem lexicográfica definida faz com que  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  e  $\gamma_{\min}(\omega)$  coincidam em  $u'$  e em todos os vértices anteriores. Uma vez que  $u'$  possui exatamente duas arestas adjacentes abertas em  $\omega^{(z)}e(z, v) \prec (z, w)$ , pelos passos 2 e 3 acima temos que  $\gamma_u, \gamma_v \subset \gamma_{\min}(\omega^{(z)})$ . Visto que  $v'$  foi escolhido como sendo o último vértice de  $\gamma_{\min}(\omega)$  que pertence a  $\overline{B_R}(z)$ , a minimalidade de  $\gamma_{\min}(\omega)$  implica na sobreposição de  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  e  $\gamma_{\min}(\omega)$  em  $v'$  e nos vértices posteriores.

Além disso, na configuração  $\omega$ , nenhum vértice de  $\gamma_{\min}(\omega)$  está conectado a  $\overline{S'_n}$  na caixa  $B_{3n}$ , simplesmente porque  $\omega \in \mathcal{X} \subset \left\{ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}^c$ . Logo,  $z$  é o único vértice em  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  que se conecta a  $\overline{S'_n}$  na caixa  $B_{3n}$  sem usar nenhuma aresta pertencente a  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$ . Isso nos permite concluir que  $\omega^{(z)} = \omega^{(z')} \Leftrightarrow z = z'$ . De fato, ou  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)}) \neq \gamma_{\min}(\omega^{(z')})$  e, nessa situação, obviamente  $\omega^{(z)} \neq \omega^{(z')}$ , ou  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)}) = \gamma_{\min}(\omega^{(z')})$ , o que implica em  $z = z'$  pela observação feita acima.

Dessa forma,  $\forall \omega \in \mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\}$ ,  $|\{\omega^{(z)}; z \in U(\omega)\}| \geq t$  e, como as configurações  $\omega$  e  $\omega^{(z)}$  diferem apenas nas arestas de  $\overline{B_{R+1}}(z)$ , segue que para todo  $\omega' \in \mathcal{B}$ , ou  $\{\omega : \omega' \in \psi(\omega)\} = \emptyset$ , ou existe  $z \in \mathbb{S}_k$  tal que  $\{\omega : \omega' \in \psi(\omega)\} \subset \left\{ \omega : \omega|_{\{\overline{B_{R+1}}(z)\}^c} = \omega'|_{\{\overline{B_{R+1}}(z)\}^c} \right\}$ . Portanto, podemos aplicar o Lema 23 tomando  $s > \left| \{e; e \in \mathbb{E}(\mathbb{S}_k), e \in \overline{B_{R+1}}(z)\} \right|$ , o que nos dá

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\}] \leq \frac{(2/\min\{p, 1-p\})^s}{t} \mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right],$$

e basta tomar  $t > \frac{(2/\min\{p, 1-p\})^s}{\varepsilon}$ . □

A demonstração do Lema da Colagem segue imediatamente das duas proposições acima:

*Demonstração do Lema da Colagem.* Fixado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $t \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\}] \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Pela Equação (3.10), dado  $\delta > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] > 1 - \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ . Escolhendo  $\delta > 0$  de modo que, pela Proposição 25, tenha-se  $\mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| < t\}] \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , segue que

$$\mathbb{P}_p[\mathcal{X}] = \mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| < t\}] + \mathbb{P}_p[\mathcal{X} \cap \{|U| \geq t\}] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}_p \left[ \mathcal{X} \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c \right] + \mathbb{P}_p \left[ \mathcal{X}^c \cap \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c \right] \leq \varepsilon.$$

□

# Referências

- BALISTER, P.; BOLLOBÁS, B.; WALTERS, M. Continuum percolation with steps in the square or the disc. *Random Structures & Algorithms*, Wiley Online Library, v. 26, n. 4, p. 392–403, 2005. Citado na página 30.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. Citado na página 10.
- BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes: I. crystals and mazes. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1957. v. 53, n. 3, p. 629–641. Citado 3 vezes nas páginas 4, 5 e 8.
- DUMINIL, H.; SIDORAVICIUS, V.; TASSION, V. Absence of infinite cluster for critical bernoulli percolation on slabs. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 69, n. 7, p. 1397–1411, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 9 e 21.
- GRIMMETT, G. R. Inequalities and entanglements for percolation and random-cluster models. *Perplexing Problems in Probability: Festschrift in Honor of Harry Kesten*, Springer, p. 91–105, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 14.
- GRIMMETT, G. R.; MARSTRAND, J. M. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 430, n. 1879, p. 439–457, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 15 e 27.
- HARA, T.; SLADE, G. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 128, n. 2, p. 333–391, 1990. Citado na página 8.
- HARA, T.; SLADE, G. Mean-field behaviour and the lace expansion. *Probability and phase transition*, Springer, p. 87–122, 1994. Citado na página 8.
- HARRIS, T. E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1960. v. 56, n. 1, p. 13–20. Citado na página 8.
- KESTEN, H. *Percolation theory for mathematicians*. [S.l.]: Springer, 1982. v. 2. Citado na página 16.
- KESTEN, H. et al. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ . *Communications in mathematical physics*, v. 74, n. 1, p. 41–59, 1980. Citado na página 8.
- LIGGETT, T. M.; SCHONMANN, R. H.; STACEY, A. M. Domination by product measures. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 25, n. 1, p. 71–95, 1997. Citado na página 30.
- RUSSO, L. A note on percolation. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, Springer, v. 43, n. 1, p. 39–48, 1978. Citado na página 8.

---

SEYMOUR, P. D.; WELSH, D. J. Percolation probabilities on the square lattice. In: *Annals of Discrete Mathematics*. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 3, p. 227–245. Citado na página 8.