

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Matemática

Jéssica Duarte Silva Guimarães

**O TEOREMA DE GAUSS-BONNET
E SUAS APLICAÇÕES**

Belo Horizonte

2020

Jéssica Duarte Silva Guimarães

O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E SUAS APLICAÇÕES

Versão final

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez

Belo Horizonte

2020

2020, Jéssica Duarte Silva Guimarães.
Todos os direitos reservados

Guimarães, Jéssica Duarte Silva.

G963t O teorema de Gauss-Bonnet e suas [recurso eletrônico] /
[manuscrito] / Jéssica Duarte Silva Guimarães. – 2020.
89 f. il.

Orientador: Arturo Ulises Fernández Pérez.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.89.

1. Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Superfícies (Matemática). 4. Gauss, Aplicações de. I. Fernández Pérez, Arturo Ulises. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

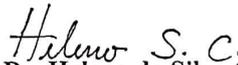
Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX

ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA, APRESENTADA PELA ALUNA JÉSSICA DUARTE SILVA GUIMARÃES.

Aos vinte e um dias do mês de janeiro de 2020, às 10h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Jéssica Duarte Silva Guimarães**, intitulada: "*O Teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações*", como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Arturo Ulises Fernández Pérez, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final, com nota 90 e conceito A. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada **Aprovada**, sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 21 de janeiro de 2020.



Prof. Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez
Orientador (UFMG)



Prof. Dr. Heleno da Silva Cunha
Examinador (UFMG)



Prof. Dr. Seme Gebara Neto
Examinador (UFMG)

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e garra para que eu possa superar os desafios que me foram colocados.

A esta universidade por ter me dado a oportunidade de fazer a especialização e adquirir conhecimento específico e para a vida.

Ao professor Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez, pela oportunidade, paciência e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais que sempre me apoiaram com muito carinho e dedicação.

Ao meu marido pelo incentivo e pelo apoio incondicional, que sempre foi compreensivo e incentivador para que eu pudesse almejar os meus sonhos e nunca desistir.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

Resumo

O presente trabalho é um texto de Geometria Diferencial baseado no livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies do Manfredo Perdigão do Carmo [1] e em outras fontes sobre o assunto. O trabalho tem por objetivo principal estabelecer uma fundamentação teórica para a apresentação e demonstração do teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações. Ao redigir o texto, o intuito foi de formar um material que possa ser utilizado por alunos de graduação para facilitar o entendimento sobre o assunto.

Palavras-chave: Superfícies; Curvaturas; Característica de Euler; Gauss-Bonnet.

Abstract

This work is a text of Differential Geometry based on the book Differential Geometry of Curves and Surfaces of Manfredo Perdigão do Carmo [1] and other sources on the subject. The main objective of the work is to establish a theoretical basis for the presentation and demonstration of Gauss-Bonnet's theorem and its applications. When writing the text, the intention was to form a material that can be used by undergraduate students to facilitate understanding on the subject.

Keywords: Surfaces; Curvatures; Characteristic of Euler; Gauss-Bonnet.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plano tangente	14
Figura 2 – Construção da área de uma região de S	19
Figura 3 – Aplicação de Gauss.	22
Figura 4 – A diferencial de Gauss mede o quanto N se afasta de $N(p)$	22
Figura 5 – A diferencial de Gauss de um plano	23
Figura 6 – Curvatura k da curva α	28
Figura 7 – Curvatura normal	29
Figura 8 – Seção normal em p ao longo de v	31
Figura 9 – Seção normal de uma esfera	32
Figura 10 – v escrito na base ortonormal	33
Figura 11 – A Aplicação de Gauss preservando a orientação em um ponto elíptico e invertendo-a em um ponto hiperbólico	36
Figura 12 – Representatividade da derivada covariante	44
Figura 13 – Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva	46
Figura 14 – $k^2 = k_g^2 + k_n^2$	51
Figura 15 – Orientação de um paralelo de S^2	52
Figura 16 – Função ângulo diferenciável φ	53
Figura 17 – Um triângulo geodésico	58
Figura 18 – Vértices	60
Figura 19 – O sinal do ângulo de uma cúspide	61
Figura 20 – Traço da curva $\alpha(t)$	64
Figura 21 – Curva α orientada positivamente.	67
Figura 22 – Superfície regular	70
Figura 23 – Triângulo, uma região simples	71
Figura 24 – Tetraedro	72
Figura 25 – Um retângulo sendo transformado em um toro	73
Figura 26 – Retângulo R	74
Figura 27 – Orientação de arestas adjacentes.	76
Figura 28 – Um triângulo T_j	76

Figura 29 – Exemplificação de vértices externos das curvas e vértices externos da triangulação.	79
Figura 30 – Triangulação do disco D	81
Figura 31 – Região R formada por γ_1 e γ_2	83
Figura 32 – Geodésica simples e fechada formando uma região R	84
Figura 33 – Imagem da geodésica α pelo homeomorfismo φ	85
Figura 34 – Região simples de $\mathbb{R}^2 - \{p\}$	85
Figura 35 – R sendo homeomorfa a um anel	86
Figura 36 – Triangulação de um anel	86
Figura 37 – R homeomorfa a um anel	87

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	SUPERFÍCIES REGULARES	11
2.1	Superfícies Parametrizadas Regulares	11
2.2	Pano Tangente e Vetor Normal	13
2.3	Primeira Forma Quadrática	15
2.4	Aplicação Normal de Gauss	20
2.5	Segunda Forma Quadrática	23
3	CURVATURAS	28
3.1	Curvatura Normal	28
3.2	Curvatura Gaussiana e Curvatura Média	33
4	GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES	38
4.1	Isometrias	38
4.2	O Teorema de Gauss e as equações de Compatibilidade	39
4.3	Derivada Covariante	43
4.4	Geodésicas	48
5	O TEOREMA DE GAUSS-BONNET	58
5.1	Preliminares	58
5.2	Versão Local do Teorema de Gauss-Bonnet	68
5.3	Versão global do Teorema de Gauss-Bonnet	70
5.4	Aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet	82
	REFERÊNCIAS	89

1 Introdução

Neste trabalho, propomos falar sobre a teoria que estuda objetos geométricos através dos conceitos e técnicas do Cálculo Diferencial, ou seja, teoria que se chama Geometria Diferencial. Tal estudo, nos direcionará para o teorema de Gauss-Bonnet, onde este tem sua beleza por relacionar a geometria de uma superfície com a sua topologia. O Teorema de Gauss-Bonnet é mais conhecido na versão aplicada à superfícies compactas sem o bordo, onde ele afirma que a curvatura gaussiana total de uma superfície fechada é igual a 2π vezes a característica de Euler da superfície. A beleza da relação está em sabermos que se alguém dobra e deforma a superfície S , sua característica de Euler, sendo uma invariante topológico, não será alterada, enquanto que as curvaturas em alguns pontos serão alteradas, mas o teorema afirma, que a integral total de todas as curvaturas permanecerá a mesma, não importa como a deformação seja feita.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentaremos um estudo local de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 . Discutiremos o conceito de plano tangente e definiremos a chamada primeira forma fundamental, a partir da qual introduziremos medidas sobre a superfície; como a área, comprimento de curvas e ângulos entre curvas. Vamos definir o vetor normal a superfície, discutir brevemente o conceito de uma superfície orientável e definir a aplicação normal de Gauss e a aplicação diferencial da aplicação normal de Gauss, que veremos que é uma aplicação auto adjunta. Relacionada à esta aplicação, definiremos uma forma quadrática, denominada segunda forma fundamental, onde veremos sua aplicação geométrica e estudaremos como esta forma quadrática está relacionada com os autovalores da matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss. No capítulo 2, apresentaremos o conceito de curvatura normal, curvatura Gaussiana e média. No capítulo 3, trataremos de um modelo especial de curvas em uma superfície, chamadas geodésicas. Para isso, definiremos campo de vetores, trataremos dos símbolos de Christoffel para em seguida definirmos a derivada covariante, curva geodésica e curvatura geodésica. No capítulo 4, introduzimos vários conceitos que consideramos essenciais para o entendimento do Teorema de Gauss-Bonnet, para então, estudarmos detalhadamente a versão local e Global do teorema e algumas aplicações.

2 Superfícies Regulares

Neste capítulo apresentaremos a definição de uma superfície parametrizada regular, definiremos plano tangente e vetor normal à superfície S em um ponto $p \in S$. Seguiremos pela primeira forma fundamental que possibilitará medições sobre superfície, definiremos a aplicação Normal de Gauss e a segunda forma fundamental.

2.1 Superfícies Parametrizadas Regulares

Definição 2.1.1. *Um Subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

(i) *X é diferenciável. Ou seja, se escrevemos a superfície como*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais de todas as ordens contínuas em U .

(ii) *X é um homeomorfismo. Isso significa que X tem uma inversa $x^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.*

(iii) *Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

As variáveis u, v são os parâmetros da superfície. A aplicação X é chamada uma parametrização em p e a vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma vizinhança coordenada.

Vamos analisar o que a definição 1.1 nos diz a respeito dessas superfícies parametrizadas regulares. A condição (i) é importante e ao mesmo tempo uma condição necessária, já que estamos trabalhando com geometria diferencial. A condição (ii) nos garante a exclusão de auto-interseções nessas superfícies, uma vez que X é uma aplicação injetiva. Na condição (iii)

podemos observar que a matriz associada a aplicação linear $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nas base canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é a matriz jacobiana:

$$dX_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

onde suas colunas são formadas pelos vetores X_u e X_v . Dessa forma, pedir que $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja injetiva é equivalente a exigir que os vetores X_u e X_v sejam linearmente independentes, ou seja, que a matriz jacobiana tenha posto 2 (o determinante de algum dos menores 2×2 deve ser não nulo). Logo a condição (iii) vem para garantir a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície, e isso garante a não existência de bicos nessas superfícies.

Vejamos um exemplo de uma superfície parametrizada regular

Exemplo 2.1.1. Considere a parametrização da esfera S^2 em coordenadas esféricas (θ, ϕ) com $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$

Vamos testar as condições i e iii da definição 1.1.1 primeiro.

i) $X(u, v)$ é diferenciável, pois tem as derivadas parciais de todas as ordens contínuas;

iii) a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, pois nesse exemplo nenhum dos Jacobianos se anulam. Observe:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = \cos(\theta)\text{sen}(\phi), \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = \text{sen}^2(\theta)\cos(\phi), \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\text{sen}^2(\theta)\text{sen}(\phi),$$

para que eles se anulem simultaneamente, é necessário que

$$\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}^4(\theta)\cos^2(\phi) + \text{sen}^4(\theta)\text{sen}^2(\phi) = 0$$

$$\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}^4(\theta)(\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi)) = 0$$

$$\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}^4(\theta) = 0$$

$$\text{sen}^2(\theta)(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) = 0$$

$$\text{sen}^2(\theta) = 0.$$

Isto não ocorre em V , uma vez que $0 < \theta < \pi$. Logo, a condição iii está satisfeita.

Para olharmos a condição ii, observamos que dado $(x, y, z) \in S^2 - C$, onde C é o semi-círculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2; y = 0, x \geq 0\}$$

θ fica determinado de maneira única por $\theta = \cos^{-1}(z)$ já que $0 < \theta < \pi$. Sabendo o valor de θ , podemos determinar $\sin(\phi)$ e $\cos(\phi)$, já que $x = \sin(\theta)\cos(\phi)$ e $y = \sin(\theta)\sin(\phi)$, e isso determina ϕ de maneira única, já que $0 < \phi < 2\pi$. Isso garante a existência de X^{-1} , a inversa de X . A função X^{-1} é contínua, esta prova não é necessária quando já se sabe que S é uma superfície regular que satisfaz i e iii, segundo [1, prop.4, p.74]

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, então, fixado um ponto $q = (u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$u \rightarrow X(u, v_0),$$

$$v \rightarrow X(u_0, v),$$

são chamadas curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas.

2.2 Pano Tangente e Vetor Normal

Nesta seção, vamos definir e trabalhar com o conceito de plano tangente e definir o conceito de vetor normal.

Definição 2.2.1. Um vetor tangente à superfície S , em um ponto $p \in S$, é o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 2.2.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes à S em $X(q)$.

Uma demonstração da Proposição 2.2.1 pode ser encontrada em [1, p.98].

Pela proposição acima, o plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $X(q) = p$ não depende da parametrização X . Este plano será chamado de plano tangente à S em p , denotado por T_pS .

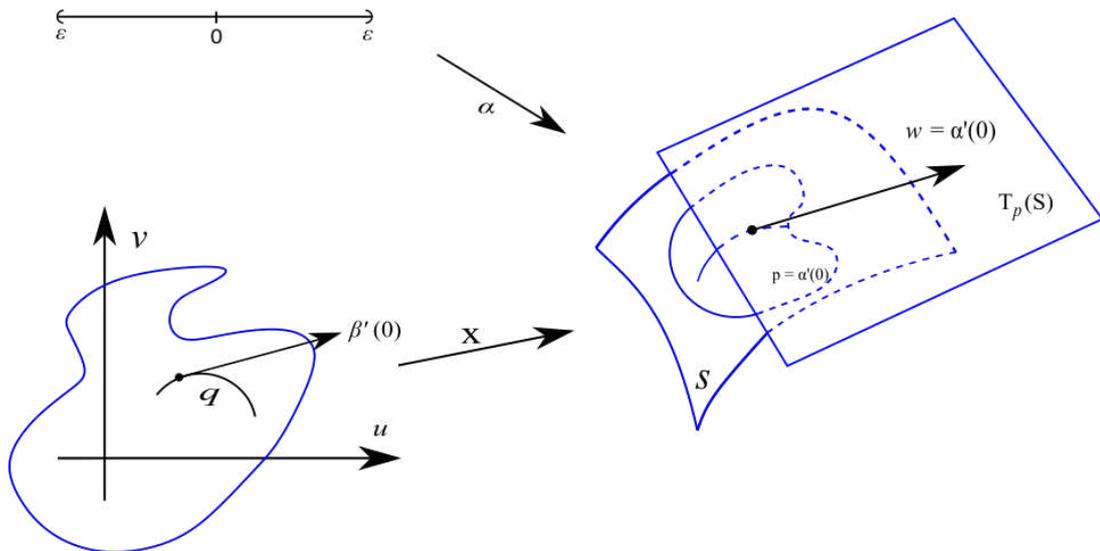
Quando escolhida uma parametrização para uma superfície, intuitivamente temos uma base

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\} \text{ de } T_pS, \text{ base associada a } X.$$

Observação: podemos escrever a base com a seguinte notação $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Segue, na Figura 1, uma representação de T_pS ,

Figura 1 – Plano tangente



Fonte: Elaborada pela autora

As coordenadas de um vetor $w \in T_pS$ na base associada a uma parametrização X são determinadas do seguinte modo: w é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha = X \circ \beta$, onde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ é dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t)))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w. \end{aligned}$$

Dessa forma, na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $(u(t), v(t))$ é a expressão, na parametrização X , de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w .

Definição 2.2.2. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e p um ponto da superfície, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é chamado de vetor normal a superfície no ponto q se ele é ortogonal ao plano tangente $T_p X$.*

Dado $T_p X$, existe uma única direção normal a este plano e, assim, existem exatamente dois vetores unitários normais à superfície em p .

Vamos definir o vetor unitário normal a S no ponto $p \in S$ da seguinte maneira:

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p).$$

2.3 Primeira Forma Quadrática

Nesta seção definiremos a primeira forma quadrática, forma que possibilita fazer medidas sobre a superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde a superfície está.

Definição 2.3.1. *Seja S uma superfície regular e seja $T_p S$ o plano tangente a S no ponto p . A aplicação*

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \geq 0$$

é denominada de primeira forma fundamental de X em q .

Vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, associada a uma parametrização $X(u, v)$. Considere uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto p . Então, um vetor $w \in T_p S$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0) = X(q)$, pode ser escrito como

$$w = X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0)$$

$$w = X_u(u_0, v_0)u'(0) + X_v(u_0, v_0)v'(0)$$

Aplicando I_q , teremos:

$$I_q(w) = (u')^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2(u')(v') \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + (v')^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

onde os valores das funções envolvidas são calculadas em $t = 0$.

Usando a seguinte notação:

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0)$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0)$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0)$$

teremos que a primeira forma fundamental será:

$$I_q(w) = (u')^2 E(u_0, v_0) + 2(u')(v')F(u_0, v_0) + (v')^2 G(u_0, v_0),$$

Quando variamos p na vizinhança coordenada correspondente a $X(u, v)$, temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis que são denominadas coeficientes da primeira forma fundamental. As funções E, F e G satisfazem algumas propriedades:

i) $E(u, v)$ e $G(u, v)$ são sempre positivos, uma vez que X_u e X_v são não nulos e

$$E(u, v) = |X_u|^2 > 0 \text{ e } G(u, v) = |X_v|^2 > 0$$

ii) $E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0$. Sabemos que:

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2$$

logo, temos que:

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0$$

Vamos calcular a primeira forma quadrática da esfera do exemplo 1.1.1.

Exemplo 2.3.1. Considere a parametrização da esfera S^2 em (θ, ϕ) com $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$

Vamos calcular X_θ e X_ϕ :

$$X_\theta(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\text{sen}(\phi), -\text{sen}(\theta)),$$

$$X_\phi(\theta, \phi) = (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \text{sen}(\theta)\cos(\phi), 0).$$

Então, os coeficientes da primeira forma quadrática são:

$$E(\theta, \phi) = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 1$$

$$F(\theta, \phi) = \langle X_\theta, X_\phi \rangle = 0$$

$$G(\theta, \phi) = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = \text{sen}^2(\theta)$$

Logo, o quadrado do módulo de um vetor $w \in T_q S^2$ é :

$$|w|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb = a^2 + b^2 \text{sen}^2(\theta).$$

Como já mencionado no início desta seção, a primeira forma fundamental nos permite fazer medidas sobre a superfície. Vejamos primeiro o comprimento s de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ que é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt;$$

e como $\alpha(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t), v(t))$ podemos calcular o comprimento de arco de α entre 0 e t por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(u')^2 E + 2(u')(v')F + (v')^2 G}.$$

Vamos, agora estabelecer uma fórmula para medir o ângulo formado por dois vetores e também pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$. Vejamos:

O ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ formado por dois vetores w_1 e w_2 não nulos tangentes à S em p é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}$$

Para expressar $\cos(\theta)$ em termos da primeira forma quadrática, observamos que $w_1 + w_2$ também é um vetor tangente a S em p e que

$$\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = |w_1|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2.$$

Logo, podemos substituir da seguinte forma:

$$\cos(\theta) = \frac{I_q(w_1+w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2)}{2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}}$$

Se o objetivo é calcular o ângulo entre duas curvas da superfície, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = X(u(r), v(r))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ entre as curvas é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(r_0)|}.$$

Assim, o ângulo entre as curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ em (u_0, v_0) é

$$\cos(\theta) = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|}(u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Logo, as curvas coordenadas se intersectam ortogonalmente se, e só se, $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) .

Através da primeira forma quadrática, também podemos calcular a área de uma região limitada em uma superfície regular S .

Um *domínio regular* de S é um subconjunto aberto e conexo de S , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável exceto em um número finito de pontos.

Uma região de S é a união de um domínio com a sua fronteira.

Seja Q uma região compacta em \mathbb{R}^2 que está contida em uma vizinhança coordenada $X : U \rightarrow S$. Então $X(Q) = R$ é uma região limitada em S .

A definição para a área dessa região R é:

Definição 2.3.2. *Seja $R \subseteq S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo*

$$\int \int_Q |X_u \times X_v| dudv = A(R), \text{ onde } Q = X^{-1}(R),$$

é chamado área de R .

Observação: A integral acima não depende da parametrização X , a demonstração é a mesma que será apresentada na seção 3.1

Como $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$, podemos fazer uma substituição. E assim, teremos a área da região $R \subseteq S$ em função dos coeficientes da primeira forma quadrática

$$A(R) = \int \int_Q |X_u \times X_v| dudv = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Justificaremos a fórmula da área de uma maneira geométrica. Vamos considerar uma partição P que divide Q em um número finito de Q_{ij} e conseqüentemente teremos um número finito de R_{ij} partições de R . Então $X(Q_{ij}) = R_{ij}$.

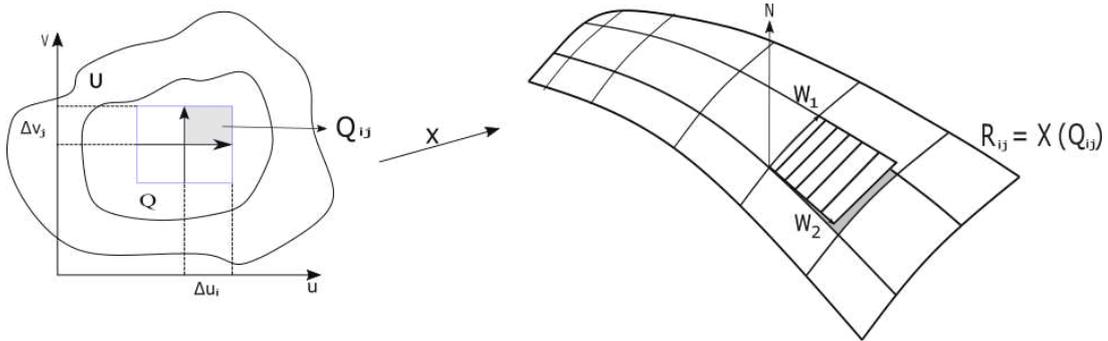
Temos que

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

$$\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$$

Agora vamos aproximar a área da região $X(Q_{ij})$ pela área do paralelogramo em $T_p S$, onde $p = X(u_{i-1}, v_{j-1})$

Figura 2 – Construção da área de uma região de S



Fonte: Elaborada pela autora

Os vetores w_1 e w_2 em $T_p S$, são imagens dos lados dos retângulos Q_{ij} , tal que

$$w_1 = \Delta u_i X_u$$

$$w_2 = \Delta v_j X_v$$

A área do paralelogramo gerado por w_1 e w_2 será

$$A_{ij} = |w_1 \times w_2| = |\Delta u_i X_u \times \Delta v_j X_v| = \Delta u_i \Delta v_j |X_u \times X_v|$$

A área da região será dada quando o número de partições Q_{ij} tenderem a infinito, ou seja, as normas das partições tenderem para zero.

Logo,

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} A_{ij}; \\
 A &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} \Delta u_i \Delta v_j |X_u \times X_v|; \\
 A &= \int \int_Q |X_u \times X_v| du dv;
 \end{aligned}$$

Onde $|P| = \sup\{\Delta u_i \Delta v_j : R_{ij} \in P\}$.

Vamos calcular a área da esfera do 2.3.1 sendo $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ com $X : V \rightarrow R^3$ dada por

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E(\theta, \phi) = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 1$$

$$F(\theta, \phi) = \langle X_\theta, X_\phi \rangle = 0$$

$$G(\theta, \phi) = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = \text{sen}^2(\theta)$$

Então,

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}(\theta) d\theta d\phi$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} ((-\cos(\pi) + \cos(0))) d\phi$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} 2 d\phi$$

$$A(S) = 4\pi.$$

2.4 Aplicação Normal de Gauss

Vamos começar esta seção com uma pequena discussão sobre o conceito de uma superfície orientável.

Em R^3 , como já vimos na Seção 1.2, dado um sistema de coordenadas $X(u, v)$ em p , fica determinada a escolha de um vetor normal unitário N em p , sendo

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p).$$

Definição 2.4.1. *Seja S uma superfície regular, $V \subset S$ um conjunto aberto. A aplicação $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ será chamada de campo diferenciável de vetores normais, onde ela associa a cada $p \in V$ um vetor normal unitário $N(p) \in \mathbb{R}^3$ a S em p .*

Uma superfície regular S é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície, e a escolha de um tal campo $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada uma orientação de S .

De uma maneira intuitiva, cada ponto p de uma superfície regular S tem um plano tangente, quando escolhermos uma orientação do plano $T_p S$ isso induz uma orientação em uma vizinhança de P . Caso seja possível fazer essa escolha para cada ponto p de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que a superfície S é orientável.

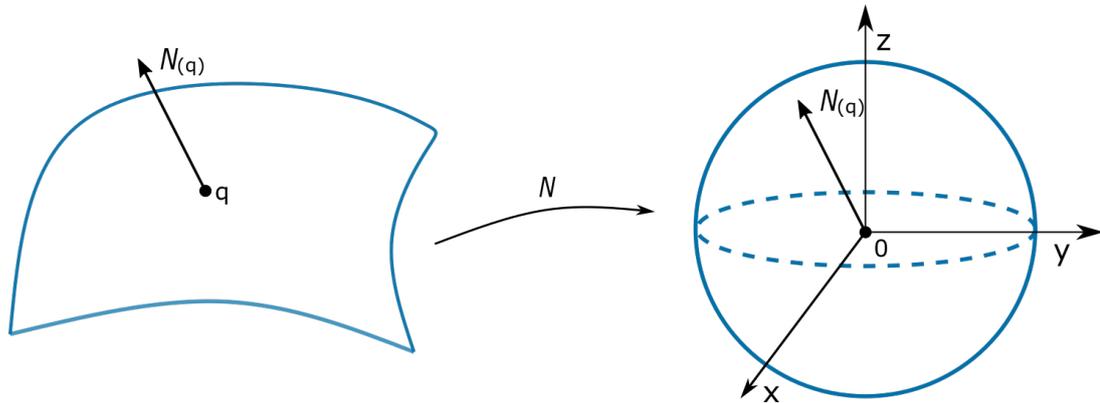
Ao longo deste trabalho, S será uma superfície regular orientável na qual foi escolhida uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N .

Logo, para S ser orientável, precisamos supor apenas a existência de um campo de vetores normais unitários contínuo em S e que um tal campo de vetores é de fato diferenciável.

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ dada por $N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p)$ é chamada de aplicação normal de Gauss. Essa aplicação toma seus valores na esfera unitária, cada ponto q de S faz corresponder o ponto $N(p)$ de S^2 . Esta aplicação pode ser definida para qualquer superfície orientável S , pois estas superfícies possuem, como vimos, uma normal unitária $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

De uma maneira intuitiva, a aplicação normal de Gauss faz a junção de todos os vetores normais unitários a superfície S em uma esfera unitária.

Figura 3 – Aplicação de Gauss.

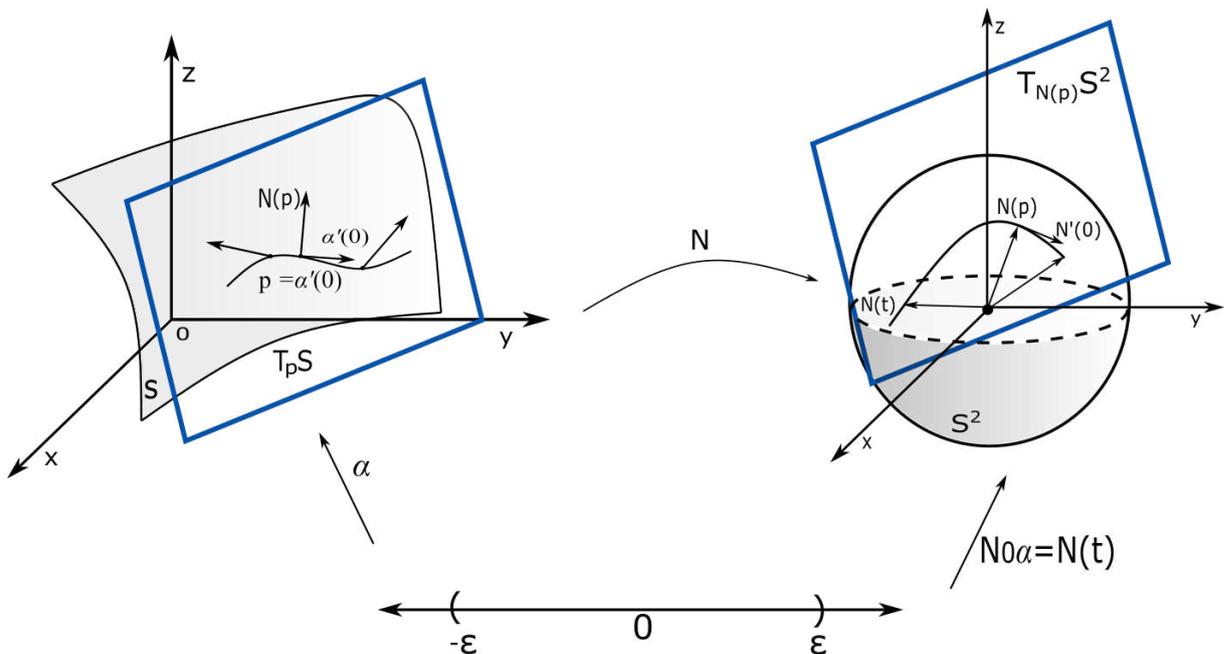


Fonte: Elaborada pela autora.

Como $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ são paralelos, já que $N(p)$ é normal em ambos, então a derivada da aplicação normal $dN(p) : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p S$. Essa derivada opera da seguinte maneira:

Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, vamos considerar a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 . O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_p S$. Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Dessa forma, dN_p mede quanto o vetor normal N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p .

Figura 4 – A diferencial de Gauss mede o quanto N se afasta de N(p)



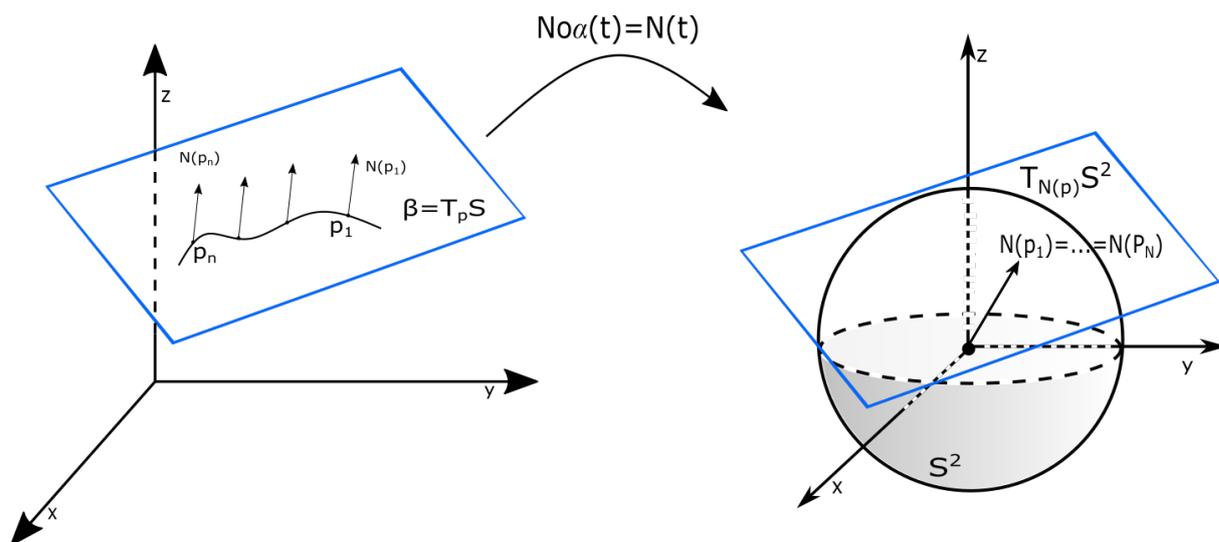
Fonte: Elaborada pela autora

Exemplo 2.4.1. Considere um plano β dado por $ax + by + cz + d = 0$, sabemos que o vetor (a, b, c) é um vetor normal ao plano P , assim o vetor normal unitário

$$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ será constante (o mesmo vetor para todo ponto } p \text{ de } S).$$

Assim, $dN = 0$, para todo $p \in S$

Figura 5 – A diferencial de Gauss de um plano



Fonte: Elaborada pela autora

A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta, isto é, $\langle dN(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS , uma demonstração de tal fato pode ser encontrada em [1, p.165].

Associada à aplicação linear auto-adjunta $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ temos a forma bilinear simétrica

$$B(v, w) = \langle dN_p(v), w \rangle, \forall v, w \in T_pS,$$

e a forma quadrática

$$Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle, \forall v \in T_pS$$

2.5 Segunda Forma Quadrática

Nesta seção vamos introduzir o conceito da segunda forma fundamental. Este conceito nos permitirá fazer um estudo das curvaturas de curvas na superfície.

Definição 2.5.1. A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle, \forall v \in T_p S$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Por motivos que se tornarão claros depois, usaremos a forma quadrática $-Q$.

Vamos escrever a segunda forma quadrática em coordenadas locais. Para isso, vamos considerar que todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ nesta seção sejam compatíveis com a orientação N de S ; isto é, em $X(U)$,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S , e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$.

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p pode ser escrito como $\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$ e

$$dN_p(\alpha') = dN_p(X_u u'(t) + X_v v'(t)) = u'(t)d_p N(X_u) + v'(t)d_p N(X_v) = u'(t)N_u + v'(t)N_v;$$

Como N_u e N_v pertencem a $T_p S$, podemos escrever

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v,$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

e, então

$$dN_p(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v;$$

portanto

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto nos mostra que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN_p é dada pela matriz $(a_{ij}), i, j = 1, 2$.

De uma outra forma, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ será

$$II_p(\alpha') = -\langle dN_p(v), v \rangle = -\langle u'(t)N_u + v'(t)N_v, X_u u'(t) + X_v v'(t) \rangle.$$

Para simplificar os cálculos omitiremos a variável t

$$II_p(\alpha') = -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + u'v' \langle N_u, X_v \rangle + u'v' \langle N_v, X_u \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle).$$

$$II_p(\alpha') = e(u'(t))^2 + 2f u'(t)v'(t) + g(v'(t))^2,$$

onde, já que $\langle N, X_v \rangle = \langle N, X_u \rangle = 0$, e assim

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_u \rangle = \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0, \text{ assim } \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \text{ assim } \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, \text{ assim } \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_v \rangle = \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0, \text{ assim } \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle,$$

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle,$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

onde, e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Vamos agora obter os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g . Sabemos que

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v,$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

então,

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F,$$

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$. As últimas relações podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Assim, os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$ serão

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{ef - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

No próximo capítulo, daremos um significado geométrico para a segunda forma fundamental, mas antes de terminarmos o capítulo calcularemos os coeficientes e, f e g da segunda forma fundamental de uma superfície.

Exemplo 2.5.1. *Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental da esfera do exemplo 2.1.1*

Considere a parametrização da esfera S^2 em coordenadas esféricas (θ, ϕ) com $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$

Já calculamos no exemplo 2.3.1 X_θ e X_ϕ :

$$X_\theta(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta)),$$

$$X_\phi(\theta, \phi) = (-\sin(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), 0).$$

Agora vamos calcular o vetor normal dado por

$$N = \frac{X_\theta \times X_\phi}{|X_\theta \times X_\phi|}.$$

$$N = \frac{1}{\sin(\theta)}(\sin^2(\theta)\cos(\phi), \sin^2(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)\sin(\theta));$$

$$N = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta));$$

Segue agora o cálculo de $X_{\theta\theta}$, $X_{\theta\phi}$, $X_{\phi\phi}$:

$$X_{\theta\theta} = (-\sin(\theta)\cos(\phi), -\sin(\theta)\sin(\phi), -\cos(\theta)),$$

$$X_{\theta\phi} = (-\cos(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)\cos(\phi), 0),$$

$$X_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\phi), -\sin(\theta)\sin(\phi), 0).$$

Assim, os coeficientes da segunda forma quadrática são

$$e = \langle N, X_{\theta\theta} \rangle = -1$$

$$f = \langle N, X_{\theta\phi} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{\phi\phi} \rangle = -\sin^2\theta.$$

A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta, isto é, $\langle dN(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS , uma demonstração de tal fato pode ser encontrada em [1, p.165].

Associada à aplicação linear auto-adjunta $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ temos a forma bilinear simétrica

$$B(v, w) = \langle dN_p(v), w \rangle, \forall v, w \in T_pS,$$

e a forma quadrática

$$Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle, \forall v \in T_pS$$

3 Curvaturas

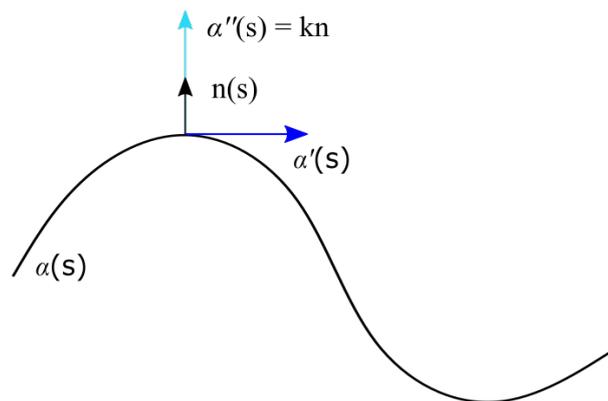
Neste capítulo apresentaremos curvaturas de uma curva e curvaturas de uma superfície.

3.1 Curvatura Normal

Vamos começar definindo a curvatura de uma curva $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, sendo que a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominada curvatura de α , assim

Definição 3.1.1. *Seja $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco¹ $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s .*

Figura 6 – Curvatura k da curva α



Fonte: Elaborada pela autora

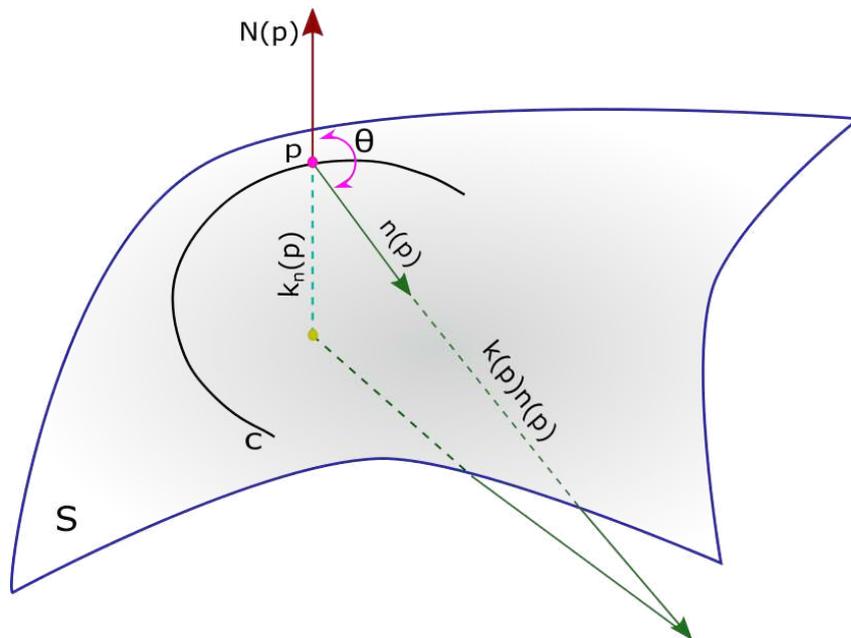
Vamos definir a curvatura normal.

Definição 3.1.2. *Seja C uma curva regular de S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p .*

De uma maneira mais clara, $k_n = \frac{\langle kn, N \rangle}{1} = \langle kn, N \rangle = k \langle n, N \rangle = k \cos \theta$, é o comprimento da projeção ortogonal do vetor kn sobre a direção normal à superfície em p , observe a figura 7.

¹ Uma curva regular $(\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I = (a, b))$ está parametrizada pelo comprimento de arco quando $|\alpha'(t)| = 1 \forall t \in I = (a, b)$.

Figura 7 – Curvatura normal



Fonte: Elaborada pela autora

Vale observar que, a curvatura normal de C não depende da orientação de C , pois k e n não se alteram quando mudamos a orientação de C , mas muda de sinal quando mudamos a orientação N da superfície para $-N$.

Daremos agora uma interpretação da segunda forma fundamental II_p

Considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C ($|\alpha'(s)| = 1$), com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde derivando temos

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle + \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Logo,

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle$$

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle$$

$$II_p(\alpha'(0)) = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle$$

$$II_p(\alpha'(0)) = \langle kn, N \rangle(p) = k_n(p).$$

Então, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_p S$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e sendo tangente em v .

Proposição 3.1.1. *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A demonstração vem da interpretação geométrica da segunda forma fundamental, uma vez que $II_p(\alpha'(0)) = k_n(p)$, todas as curvas que passam por $p \in S$ e possuem o mesmo vetor tangente em p terão a mesma curvatura normal.

A proposição acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma direção tangente $v \in T_p S$ em p , definida da seguinte forma

$$k_n(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}, \quad v \in T_p S - \{0\}$$

Observe que $k_n(\lambda v) = k_n(v) \forall v \in T_p S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, de fato

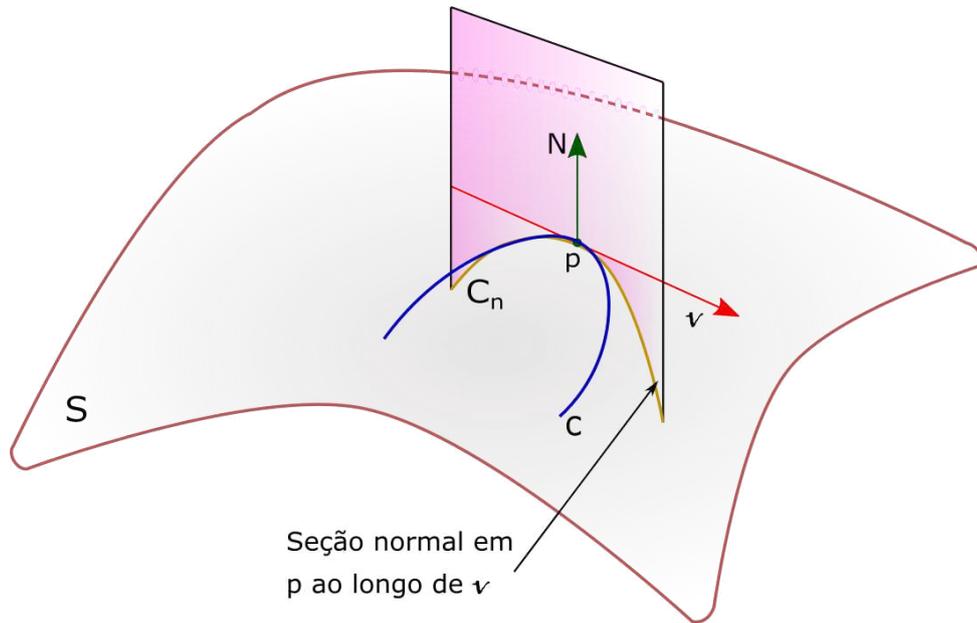
$$\begin{aligned} k_n(\lambda v) &= \frac{II_p(\lambda v)}{I_p(\lambda v)} = \frac{\lambda^2 e(u'(t))^2 + 2\lambda^2 f u'(t)v'(t) + g\lambda^2 (v'(t))^2}{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= \frac{e(u'(t))^2 + 2f u'(t)v'(t) + g(v'(t))^2}{\langle v, v \rangle} = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = k_n(v). \end{aligned}$$

Dado que podemos falar de uma de uma curvatura normal ao longo de uma direção tangente, vamos definir uma seção normal.

Definição 3.1.3. *Dado um vetor unitário $v \in T_p S$, a interseção de S com o plano contendo v e $N(p)$ é chamada a seção normal de S em p segundo v . Em uma vizinhança de p , uma seção normal de S em p é uma curva regular plana em S , cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$, se $k \neq 0$; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo v em p .*

De fato, como $k_n = k \langle n, N \rangle$ se $n = \pm N \rightarrow k_n = k$, e se $n = 0 \rightarrow k_n = 0$. Assim, o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva $\alpha(s)$ é igual à curvatura da seção normal de S em p , segundo $\alpha'(0)$

Figura 8 – Seção normal em p ao longo de v



Fonte: Elaborada pela autora

Vamos observar o que acontece com a esfera do exemplo 2.3.1:

Exemplo 3.1.1. Sendo a parametrização da esfera S^2 em coordenadas esféricas (θ, ϕ) com $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow R^3$:

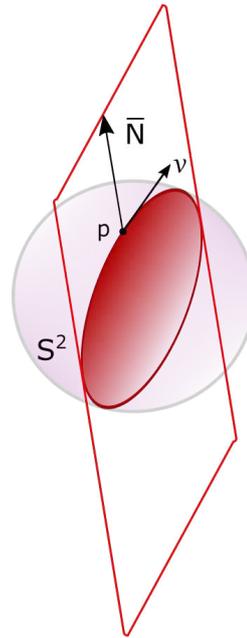
$$X(\theta, \phi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$

Temos que N calculado em 2.5.1

$$N = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \cos(\theta));$$

Assim, N aponta para fora da esfera e as seções normais (interseção do plano formado por N e um vetor $v \in T_p S^2$ com S^2) passando por um ponto $p \in S^2$ são círculos com raio 1, como poder ser visto na figura

Figura 9 – Seção normal de uma esfera



Fonte: Elaborada pela autora

Dessa forma, todas as curvaturas normais são iguais a 1, já que, a curvatura de um círculo é $\frac{1}{r}$ e $r = 1$, então $k_n = k = 1$.

Apresentaremos agora uma discussão que nos permitirá falar da curvatura normal máxima e mínima.

Seja $dN_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^2$ a diferencial de $N : S \rightarrow S^2$ em p , e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de autovetores de dN_p tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$, com $k_1 \geq k_2$. Então,

$$II_p(xe_1 + ye_2) = k_1 x^2 + k_2 y^2,$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x^2 + y^2 = 1$, isto é, k_1 é o máximo e k_2 é o mínimo das curvaturas normais à S em p .

Definição 3.1.4. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , são chamados curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamados direções principais em p . Os autovalores $-k_1$ e $-k_2$ são os autovalores de dN_p

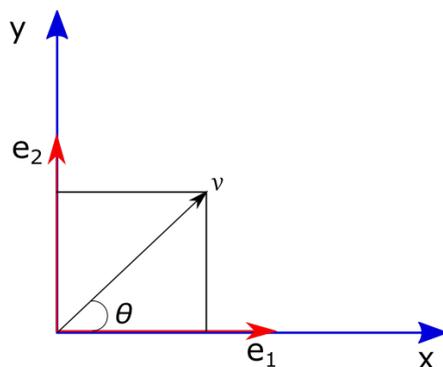
Na esfera do exemplo 3.1.1 temos que a curvatura normal é constante, $k_n = 1$, \forall ponto $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2 - \{0\}$.

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular a curvatura normal segunda uma direção dada de T_pS . Com efeito, se $v \in T_pS$ e $|v| = 1$, como e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de T_pS , temos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

sendo θ o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS . De fato,

Figura 10 – v escrito na base ortonormal



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{|v|} & \sin \theta |v| &= x \\ \sin \theta &= y & \sin \theta |v| &= x \\ \cos \theta &= \frac{x}{|v|} & \cos \theta |v| &= x \\ \cos \theta &= x & \cos \theta &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= (\cos \theta, \sin \theta) = (1, 0) \cos \theta + (0, 1) \sin \theta \\ v &= e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pela autora

A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

3.2 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média

Definição 3.2.1. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de S em p . Assim,*

$$K(p) = \det(dN_p) \quad e \quad H(p) = -\frac{1}{2}\text{traço}(dN_p).$$

Quando temos $\{e_1, e_2\}$, uma base ortonormal de $T_p S$ formada de autovetores de dN_p com $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$, teremos em função das curvaturas principais

$$k(p) = k_1 k_2 \quad e \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Podemos expressar essas curvaturas em termos da primeira e segunda forma fundamental. Como definidos, na seção 2.5, os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$ serão

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{ef - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

assim,

$$K(p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1, -k_2$ são os autovalores de dN .

Portanto

$$dN_p(v) = -kv = -kI(v), \quad \text{para algum } v \in T_p S, v \neq 0,$$

onde I é a aplicação identidade. Como temos solução além da trivial para a equação acima, segue que $\det(dN_p + kI) = 0$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

Como k_1 e k_2 são os autovalores de dN_p , então são as raízes da equação acima, portanto

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{-1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Conhecendo a curvatura Gaussiana e a curvatura média de um ponto p da superfície S podemos classificá-lo, vejamos

- *Elíptico* se $K(p) > 0$;
- *Hiperbólico* se $K(p) < 0$;
- *Parabólico* se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$;
- *Planar* se $K(p) = H(p) = 0$.

Temos ainda, uma classificação para pontos $\in S$ onde as curvaturas principais são iguais, ou seja, se $k_1 = k_2$, o ponto p recebe o nome de ponto *umbílico*.

A esfera de raio r possui apenas pontos umbílicos, já que $k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$ para todos os pontos da esfera. Os pontos da esfera também recebem a classificação de pontos elípticos, já que a curvatura Gaussiana da esfera é $K = \frac{1}{r^2}$, portando positiva $\forall p$.

Daremos agora uma interpretação geométrica para a curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$.

Para introduzirmos a interpretação, precisamos de algumas definições, vejamos:

Definição 3.2.2. *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares orientadas. Seja $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável e suponha que para algum $p \in S$, $d\varphi_p$ seja não-singular. Dizemos que φ preserva orientação em p se dada uma base positiva $\{w_1, w_2\}$ em $T_p S_1$, então $\{\varphi_p(w_1), \varphi_p(w_2)\}$ é uma base positiva em $T_{\varphi(p)} S_2$. Se $\{\varphi_p(w_1), \varphi_p(w_2)\}$ é uma base negativa, dizemos que φ reverte orientação em p .*

Assim, uma orientação N em S induz uma orientação em S^2 . Seja $p \in S$ tal que dN_p é não-singular. Como, para uma base $\{w_1, w_2\}$ em $T_p S$

$$dN_p(w_1) \times dN_p(w_2) =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} w_1 \times w_2 = K(p) w_1 \times w_2.$$

assim,

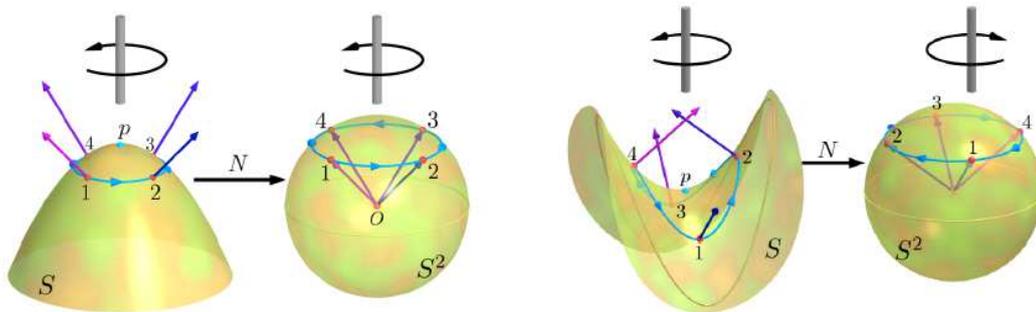
$$\langle dN_p(w_1) \times dN_p(w_2), N(p) \rangle = \det(dN_p) \langle w_1 \times w_2, N(p) \rangle = K(p) \langle w_1 \times w_2, N(p) \rangle.$$

Logo, podemos concluir que a aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ preserva a orientação em p se $K(p) > 0$ e inverte a orientação se $K(p) < 0$.

Intuitivamente, isto significa o seguinte: uma orientação de $T_p S$ induz uma orientação nas pequenas curvas fechadas em torno de p ; a imagem por N dessas curvas terão orientação igual ou oposta às primeiras curvas conforme o ponto seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente.

Uma ilustração de tal fato pode ser vista na Figura 11.

Figura 11 – A Aplicação de Gauss preservando a orientação em um ponto elíptico e invertendo-a em um ponto hiperbólico



Fonte: [3]

Para levarmos tal fato em consideração, faremos a convenção de que a área da imagem por N de uma região contida em uma vizinhança conexa $V \subset S$, onde $K \neq 0$, é positiva se $K > 0$ e negativa se $K < 0$.

Vamos enunciar a interpretação geométrica da curvatura Gaussiana K , para $K \neq 0$.

Proposição 3.2.1. *Seja p um ponto da superfície S tal que a curvatura Gaussiana $K(p) \neq 0$, e seja $V = X(u)$ uma vizinhança coordenada conexa de p onde K não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(N(B_n))}{A(B_n)},$$

onde $B_n \subset V$ é uma sequência de regiões que converge para p , isto é, $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que $B_n \subset B_\epsilon(p)$ para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Seja $R_n = X^{-1}(B_n)$ e $A_0(R_n)$ a área de R_n em \mathbf{R}^2

Pelo Teorema do Valor Médio para integral dupla, existem p_n e $q_n \in \mathbf{R}_n$ tais que :

$$\frac{A(B_n)}{A_0(R_n)} = \frac{\int \int_{R_n} |X_u \times X_v| \, dudv}{A_0(R_n)} = |X_u \times X_v|(p_n),$$

e

$$\frac{A(N(B_n))}{A_0(R_n)} = \frac{\int \int_{R_n} K |X_u \times X_v| \, dudv}{A_0(R_n)} = K(q_n) |X_u \times X_v|(q_n).$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(N(B_n))}{A(B_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{A(N(B_n))}{A_0(R_n)}}{\frac{A(B_n)}{A_0(R_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(q_n) |X_u \times X_v|(q_n)}{|X_u \times X_v|(p_n)} \\ &= \frac{K(q_n) |X_u \times X_v|(q_n)}{|X_u \times X_v|(p_n)} = K(p), \end{aligned}$$

já que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$.

□

4 Geometria Intrínseca das Superfícies

Se pegarmos uma parametrização para o cilindro e outra para o plano e calcularmos os coeficientes da primeira forma fundamental, veremos que os valores são os mesmos. Isto significa que, na questão das métricas intrínsecas (comprimento, ângulo, área, etc.), o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. Neste capítulo, veremos que muitos outros conceitos associados a uma superfície dependem apenas da primeira forma fundamental, logo, podem ser incluídos como conceitos intrínsecos.

4.1 Isometrias

Nesta seção, vamos formular o que significa dizer que duas superfícies têm a mesma primeira forma fundamental.

Definição 4.1.1. *Uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria de φ é um difeomorfismo¹ e $\forall p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$, temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Diz-se então que as superfícies são isométricas.

Assim, um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno.

Observação: Se φ é uma isometria, segue-se que

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

Definição 4.1.2. *Uma aplicação $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ é uma isometria local em p se existe uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é uma isometria. Se existir uma isometria local em $S \forall p \in S$, diz-se que a superfície S é localmente isométrica a \bar{S} .*

Duas superfícies S e \bar{S} são localmente isométricas se S é localmente isométrica a \bar{S} e \bar{S} é localmente isométrica a S .

¹ Difeomorfismo é uma função invertível que leva uma variedade diferenciável em outra, de modo que tanto a função quanto sua inversa sejam suaves, ou seja, possuem derivadas de todas as ordens.

Observação: Se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é um difeomorfismo e uma isometria local para todo ponto de S , então φ é uma isometria, falando globalmente.

Proposição 4.1.1. *Se existirem parametrizações $X : U \rightarrow S$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ em U . Então a aplicação $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria local.*

Demonstração. Seja $p \in X(U)$ e $w \in T_p S$. Então w é tangente a uma curva $X(\alpha(t))$ em $t = 0$, onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ é uma curva em U ; assim w pode ser escrito como (t=0)

$$w = X_u u' + X_v v'.$$

Por definição, o vetor $d\varphi_p(w)$ é o vetor tangente à curva $\bar{X} \circ X^{-1} \circ X(\alpha(t))$, isto é, à curva $\bar{X}(\alpha(t))$ em $t = 0$. Assim,

$$d\varphi(w) = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'.$$

Como

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2,$$

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2,$$

concluimos que $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$, para todo $p \in X(U)$ e todo $w \in T_p S$; portanto, φ é uma isometria local.

□

4.2 O Teorema de Gauss e as equações de Compatibilidade

Nesta seção, vamos associar a cada ponto de uma superfície um triedro e estudar as derivadas de seus vetores.

Considerando S uma superfície regular orientável e orientada. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização na orientação de S . É possível associar a cada ponto de $X(U)$ um triedro natural dados pelos vetores X_u, X_v e N . O estudo deste triedro é o que trabalharemos nesta seção.

Vamos expressar as derivadas dos vetores X_u, X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N,$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \overline{L_2} N,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N,$$

$$N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v,$$

$$N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v,$$

onde os $(a_{ij}), i, j = 1, 2$ foram obtidos no capítulo 2.4 e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$, são chamados de símbolos de Christoffel de S na parametrização X . Como $X_{uv} = X_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Fazendo o produto interno das 4 primeiras equações com N , obtemos que

$$L_1 = e, L_2 = \overline{L_2} = f \text{ e } L_3 = g;$$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S .

Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das 4 primeiras equações com X_u e X_v , e obtemos

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u,$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v,$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u,$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v,$$

Resolvendo as equações, obtemos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG_F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG_F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}\end{aligned}$$

Como acabamos de ver, as expressões das derivadas de X_u , X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$ dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de S . Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u,$$

$$(X_{vv})_u = (X_{uv})_v,$$

$$N_{uv} = N_{vu},$$

Substituindo as derivadas dos vetores X_u , X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$ nas equação acima, podemos reescrever as mesmas assim

$$A_1X_u + B_1X_v + C_1N = 0,$$

$$A_2X_u + B_2X_v + C_2N = 0,$$

$$A_3X_u + B_3X_v + C_3N = 0,$$

onde $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, são funções de E, F, G, e, f, g e de suas derivadas. Como os vetores X_u , X_v e N são linearmente independentes, temos que $A_i = B_i = C_i = 0, i = 1, 2, 3$, o que nos dá novas relações.

Vamos desenvolver uma das relações que usaremos posteriormente.

$$(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0$$

$$(\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN)_u = 0$$

$$(\Gamma_{11}^1)_vX_u + (\Gamma_{11}^2)_vX_v + e_vN + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN) + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN) + e(a_{12}X_u + a_{22}X_v) =$$

$$(\Gamma_{12}^1)_u X_u + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + f_u N + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v).$$

Assim, igualando os coeficientes de X_v , obtemos:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = ea_{22} - fa_{21} = -KE, \quad (4.1)$$

onde K é a curvatura Gaussiana. A expressão acima é conhecida como fórmula de Gauss.

Vamos agora, desenvolver a equação acima para quando $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização ortogonal, isto é, quando $F = 0$, assim

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{11}^2 = \frac{E_v}{2G}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-G_u}{2E}, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

e

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}, \quad (4.2)$$

de fato,

$$\begin{aligned} -KE &= \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2G} \right)_v - \frac{E_v^2}{4EG} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\ -KE &= \frac{1}{2} \left(\frac{G_{uu}G - G_u^2}{G^2} + \frac{E_{vv}G - E_v G_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} - \frac{E_u G_u}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} + \frac{E_v G_v}{2G^2} \right) \\ -KE &= \frac{1}{2EG^2} \left(EG_{uu}G - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{GE_v^2}{2} - \frac{GE_u G_u}{2} + \frac{EG_u^2}{2} + \frac{EE_v G_v}{2} \right) \\ K &= \frac{-1}{4E^2 G^2} \left(2EG_{uu}G - 2EG_u^2 + 2EGE_{vv} - 2EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u + EG_u^2 + EE_v G_v \right) \\ K &= \frac{-1}{4E^2 G^2} (2EG(G_{uu} + E_{vv}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u) \end{aligned}$$

Vamos agora desenvolver a expressão

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] \\ K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v G + EG_v) \right)}{EG} \right) + \left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_u G + EG_u) \right)}{EG} \right) \right] \\ K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_{vv}\sqrt{EG} - \frac{E_v^2 G + E_v EG_v}{2\sqrt{EG}}}{EG} \right) + \left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG} - \frac{G_u E_u G + G_u^2 E}{2\sqrt{EG}}}{EG} \right) \right] \\ K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{2E_{vv}EG - E_v^2 G - E_v EG_v}{2EG^{3/2}} + \frac{2G_{uu}EG - G_u E_u G - G_u^2 E}{2EG^{3/2}} \right] \\ K &= -\frac{1}{4E^2 G^2} [2E_{vv}EG - E_v^2 G - E_v EG_v + 2G_{uu}EG - G_u E_u G - G_u^2 E] \\ K &= -\frac{1}{4E^2 G^2} [2EG(E_{vv} + G_{uu}) - E_v^2 G - EE_v G_v - G_u E_u G - G_u^2 E] \end{aligned}$$

Assim, como as equações são iguais,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Teorema 4.2.1. Egregium (Gauss) *A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

De fato, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S em p e se $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$, onde $V \subset X(U)$ é uma vizinhança de p , é uma isometria local em P , então $Y = \varphi \circ X$ é uma parametrização de \bar{S} em $\varphi(p)$. Como φ é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações X e Y coincidem em pontos correspondentes p e $\varphi(p)$, $p \in V$; assim os respectivos símbolos de Christoffel também coincidem. Pela equação 4.1, K pode ser calculado em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Segue-se que $K(p) = K(\varphi(p))$, $\forall p \in V$.

A surpreendente característica deste teorema é que embora a definição da curvatura Gaussiana de uma superfície S em \mathbb{R}^3 certamente depender da forma na qual a superfície está localizada no espaço, o resultado final, a curvatura Gaussiana em si, é determinada pela própria métrica da superfície sem qualquer outras referências ao espaço ambiente: isto é uma invariante intrínseca. Em particular, a curvatura Gaussiana é invariante sob deformações isométricas da superfície. De uma maneira geral, o que acabamos de mostrar é que a curvatura Gaussiana, cuja definição usa de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não dependa desta posição mas apenas da primeira forma fundamental da superfície.

Uma primeira consequência do Teorema Egregium de Gauss é a de que a curvatura gaussiana distingue superfícies regulares no que diz respeito à existência de isometrias locais entre as mesmas. Podemos afirmar, por exemplo, que não existe uma isometria local entre um plano e uma esfera, já que as respectivas curvaturas gaussianas dessas superfícies são constantes e distintas uma da outra.

4.3 Derivada Covariante

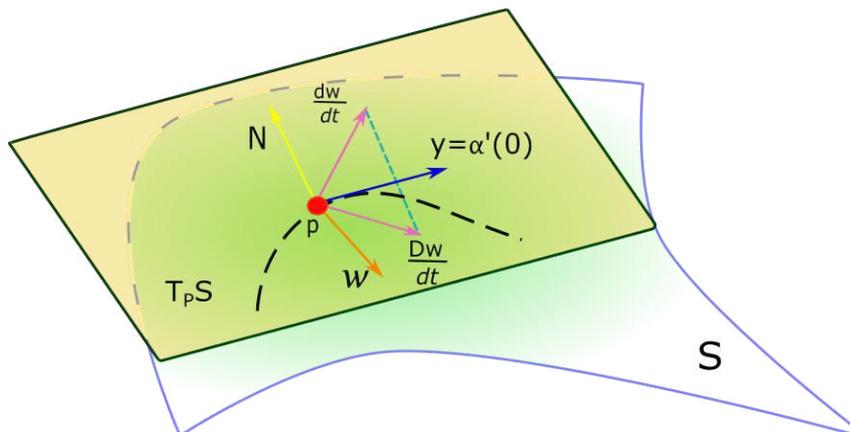
Nesta seção faremos uma exposição da geometria intrínseca. Vamos começar por definir a derivada covariante de um campo de vetores. Antes disso, vale lembrar algumas definições e conceitos.

Definição 4.3.1. Um campo de vetores (tangentes) em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência w que associa cada ponto $p \in U$ a um vetor $w(p) \in T_pS$. O campo de vetores w é diferenciável em $p \in U$ se, para alguma parametrização $X(u, v)$ em p , as funções $a(u, v)$ e $b(u, v)$ onde $w(q) = (a(u, v)X_u, b(u, v)X_v)$, são diferenciáveis em p .

Vale lembrar que o campo de vetores w é diferenciável em U se é diferenciável para todo ponto $p \in U$.

Definição 4.3.2. Seja w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pS$. Considere uma curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t), t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo de vetores w à curva α . O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano T_pS é chamado de derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor y . Esta derivada covariante é denotada por $Dw/dt(0)$.

Figura 12 – Representatividade da derivada covariante



Fonte: Elaborada pela autora

A derivada covariante não depende da curva α , mostraremos agora que esse conceito independe da escolha de α . Para isso, considere uma parametrização $X(u, v)$ de S em p e seja $X(u(t), v(t))$ a expressão da curva α e seja o campo de vetores restrito a curva α :

$$w(t) = a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v$$

$$w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a'(t)X_u + a(t)X'_u + b'(t)X_v + b(t)X'_v \\ &= a'(t)X_u + b'(t)X_v + a(t)(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(t)(X_{vu}u' + X_{vv}v') \end{aligned}$$

Vamos substituir as expressões X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} pelas expressões da seção 4.2, vejamos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a'X_u + b'X_v + a(\Gamma_{11}^1X_uu' + \Gamma_{11}^2X_vu' + eNu' + \Gamma_{12}^1X_uv' + \Gamma_{12}^2X_vv' + fNv' + \\ &\quad b(\Gamma_{12}^1X_uu' + \Gamma_{12}^2X_vu' + fNu' + \Gamma_{22}^1X_uv' + \Gamma_{22}^2X_vv' + gNu') \\ &= X_u(a' + a\Gamma_{11}^1u' + a\Gamma_{12}^1v' + b\Gamma_{12}^1u' + b\Gamma_{22}^1v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2X_vu' + a\Gamma_{12}^2v' + b\Gamma_{12}^2X_vu' + \\ &\quad b\Gamma_{22}^2v') + N(eu' + fv' + fu' + gu') \end{aligned}$$

Como Dw/dt é a projeção de dw/dt no plano tangente $T_p(S)$, vamos desprezar a componente normal, dessa forma

$$\frac{Dw}{dt}(t) = X_u(a' + a\Gamma_{11}^1u' + a\Gamma_{12}^1v' + b\Gamma_{12}^1u' + b\Gamma_{22}^1v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2X_vu' + a\Gamma_{12}^2v' + b\Gamma_{12}^2X_vu' + b\Gamma_{22}^2v') \quad (4.3)$$

Essa expressão nos mostra que a derivada covariante Dw/dt depende apenas do vetor $(u', v') = y$ e da primeira forma fundamental, assim, não depende da curva α .

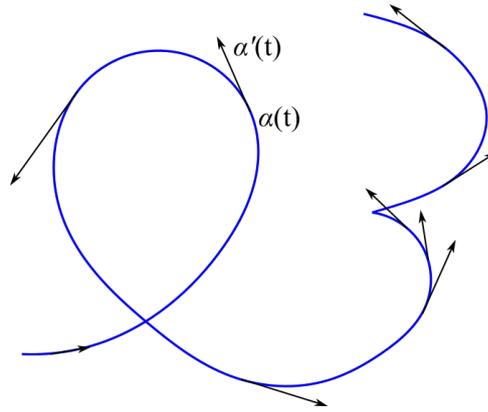
A definição de derivada covariante pode ser estendida a um campo de vetores que esteja definido apenas em pontos de uma curva parametrizada. Vamos ver algumas definições:

Definição 4.3.3. *Uma curva parametrizada $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é uma restrição a $[0, l]$ de uma aplicação diferenciável de $(0 - \epsilon, l + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, em S . Se $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$, dizemos que α liga p a q . α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para $t \in [0, l]$.*

Definição 4.3.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S . Um campo de vetores w ao longo de α é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$. O campo de vetores w é diferenciável em $t_0 \in I$ se para alguma parametrização $X(u, v)$ em $\alpha(t_0)$ as componentes $a(t), b(t)$ de $w(t) = aX_u + bX_v$ são funções diferenciáveis de t em t_0 . O campo w é diferenciável em I se é diferenciável para todo $t \in I$.*

Um exemplo de um campo de vetores diferenciáveis ao longo de uma curva α é dado pelo campo $\alpha'(t)$ de vetores tangente a α , como podemos ver na Figura (13):

Figura 13 – Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva



Fonte: Elaborada pela autora

Definição 4.3.5. *Seja w um campo diferenciável de vetores ao longo da curva α . A expressão $(Dw/dt)(t), t \in I$, está bem definida e é chamada de derivada covariante de w em t .*

Definição 4.3.6. *Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é chamado paralelo de $Dw/dt = 0$ para todo $t \in I$*

Dizer que a derivada covariante de w em t é nula para todo $t \in I$ significa dizer que a projeção de dw/dt sobre $T_{\alpha(t)}S$ é nula, logo dw/dt só pode ser normal a esse plano.

Proposição 4.3.1. *Sejam v e w campos de vetores paralelos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$. Então $\langle v(t), w(t) \rangle$ é constante. Em particular $|v(t)|$ e $|w(t)|$ são constantes e o ângulo entre $v(t)$ e $w(t)$ é constante.*

Demonstração. Como v e w são campos paralelos, $\frac{dw}{dt}(t)$ e $\frac{dv}{dt}(t)$ são vetores normais ao plano tangente à S em $\alpha(t)$.

Devido a esse fato, temos

$$\left\langle \frac{dw}{dt}(t), v(t) \right\rangle = \left\langle w(t), \frac{dv}{dt}(t) \right\rangle = 0,$$

pois $v(t)$ e $w(t)$ pertencem ao plano $T_{\alpha(t)}S$. Assim,

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \left\langle \frac{dv}{dt}(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{dw}{dt}(t) \right\rangle = 0,$$

$\forall t \in I$, ou seja, $\langle v(t), w(t) \rangle$ é constante em I e como $\langle w'(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), v(t) \rangle = 0$ teremos que

$$\frac{d}{dt}|w| = \frac{d}{dt}\sqrt{\langle w, v \rangle} = \frac{\langle w', w \rangle}{\sqrt{\langle w, w \rangle}} = 0,$$

assim obtemos $|w| = \text{cte}$ e de modo análogo $|v| = \text{cte}$, logo o ângulo entre v e w também será constante. \square

Temos como exemplo o campo de vetores tangente a um meridiano (parametrizado pelo comprimento de arco) de uma esfera unitária S^2 .

Exemplo 4.3.1. Considere a esfera do exemplo 2.1.1, temos que o meridiano é uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v_0)$ e $\alpha'(t) = u'(t)X_u + 0X_v$, também temos um campo de vetores $w = X_u$, com $a = 1$ e $b = 0$

$$w = 1X_u + 0X_v,$$

Usando a equação 4.3 e calculando os símbolos de Christoffel para a esfera, teremos

$$\frac{Dw}{dt} = X_\theta(\Gamma_{11}^1 u') + X_\phi(\Gamma_{11}^2 u') = 0,$$

já que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$.

Podemos também averiguar que o campo de vetores tangente a um meridiano (parametrizado pelo comprimento de arco) de uma esfera unitária S^2 é um campo paralelo em S^2 . De fato, como o meridiano é um grande círculo em S^2 , a derivada usual de um tal campo (α'') é normal a S^2 . Logo, tem a derivada covariante nula.

A proposição abaixo mostra que existem campos paralelos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha(t)$ em S e que eles são completamente determinados por seus valores em um ponto t_0 .

Proposição 4.3.2. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e seja $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo $w(t)$ ao longo de $\alpha(t)$, com $w(t_0) = w_0$.

Mais adiante daremos uma demonstração de tal fato. A proposição 4.3.2 nos permite falar de transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada.

Definição 4.3.7. *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Seja w um campo paralelo ao longo de α , com $w(t_0) = w_0$. O vetor $w(t_1)$, $t_1 \in I$ é chamado transporte paralelo de w_0 ao longo de α no ponto t_1 .*

Observação: Se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva regular, então o transporte paralelo não depende da parametrização regular de $\alpha(I)$.

De fato, seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow S$ uma parametrização de α com $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Como $\frac{d(w \circ h)}{ds}(s) = \frac{dw}{dt}(h(s))h'(s)$, temos que $\frac{D(w \circ h)}{ds}(s) = \frac{Dw}{dt}(h(s))h'(s)$.

Assim, $\frac{D(w \circ h)}{ds}(s) = 0$ se, e só se, $\frac{Dw}{dt}(h(s)) = 0$, já que $h'(s) \neq 0$. Assim, w é paralelo ao longo α se, e só se, $w \circ h$ é paralelo ao longo de $\beta = \alpha \circ h$.

Vamos definir uma curva regular por partes.

Definição 4.3.8. *Uma aplicação $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é uma curva parametrizada regular por partes se α é contínua e se existe uma partição*

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

do intervalo $[0, l]$ tal que a restrição $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$ é uma curva parametrizada regular. Cada $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é chamada um arco regular de α .

A noção de transporte paralelo pode ser facilmente estendida a curvas parametrizadas regulares por partes. Se digamos, o valor inicial w_0 é tangente em $\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, realizamos o transporte paralelo ao longo do arco regular $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ da maneira usual; se $t_{i+1} \neq l$, tomamos $w(t_{i+1})$ como o valor inicial para o transporte paralelo ao longo do arco seguinte $\alpha|_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$, e assim por diante.

Trabalharemos agora com as curvas geodésicas. Essas curvas serão essenciais para o estudo do teorema de Gauss Bonnet.

4.4 Geodésicas

Nesta seção, vamos definir o conceito de curvas Geodésicas, um dos conceitos mais importantes do estudo de geometria diferencial, usando a derivada covariante. De uma maneira intuitiva, dados dois pontos sobre o plano, o caminho mais curto entre eles é o segmento de reta

que os une. Dados dois pontos sobre a esfera qual o caminho mais curto entre eles? Na esfera, será o menor dos arcos do grande círculo, ou círculo máximo, que que passa pelos dois pontos, De qualquer modo, convém pensar da seguinte forma: dada uma superfície arbitrária, suave², e dois pontos sobre essa superfície, uma geodésica é uma curva que contém o arco mais curto que une esses pontos. Nesta seção, veremos conceitos mais rigorosos para definirmos uma geodésica, mas a ideia do caminho mais curto é um ponto de vista mais prático. Esse efeito tem implicações interessantes; por exemplo, nas trajetórias de um avião.

Definição 4.4.1. *Uma curva parametrizada, não constante, $\alpha : I \rightarrow S$ é chamada geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é paralelo ao longo de α , ou seja, a derivada covariante de $\alpha'(t)$ em t é nula:*

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0$$

Portanto, pela proposição 4.3.1 $|\alpha'(t)| = \text{constante} = c \neq 0$. Assim, podemos introduzir o comprimento de arco $s = ct$ como um parâmetro, e concluir que o parâmetro t de uma geodésica parametrizada α é proporcional ao comprimento de arco de α .

Definição 4.4.2. *Uma curva regular conexa $C \subset S$ é chamada geodésica se, para cada $p \in C$, a parametrização $\alpha(s)$ de uma vizinhança coordenada de p pelo comprimento de arco s é uma geodésica parametrizada; isto é, $\alpha'(s)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de $\alpha(s)$.*

De um olhar exterior à superfície, a Definição 4.4.2 é equivalente a dizer que $\alpha''(s) = k(s)n(s)$ é normal ao plano tangente, logo, paralela a normal N da superfície. Assim, podemos concluir que uma curva regular conexas $C \subset S$ com $k \neq 0$ é uma geodésica se, e só se, seu vetor normal $n(p)$ em cada ponto p é paralelo ao vetor normal $N(p)$ à superfície em p .

Exemplo 4.4.1. *Os grandes círculos de uma esfera S^2 são geodésicas. Como os grandes círculos são formados da interseção de planos que que passam pelo centro O da esfera e a esfera, $n(p)$, com $p \in$ grandes círculos, está na direção da reta que liga o ponto p ao centro O , já que o grande círculo tem centro O . Sabemos que a normal N está nesta mesma direção, assim os grandes círculos são curvas geodésicas.*

Definição 4.4.3. *Seja w um campo diferenciável e unitário ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S .*

² Uma superfície S é suave se possui um único plano tangente em cada ponto $p \in S$.

Como $w(t)$, $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $|w(t)| = 1$, temos que $\langle w'(t), w(t) \rangle = 0 \forall t \in I$. Assim, $\frac{Dw}{dt}(t)$ é paralelo ao vetor $N \times w(t)$

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \lambda(t)(N(t) \times w(t)). \quad (4.4)$$

O número real $\lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado valor algébrico da derivada covariante de w em t .

Vale ressaltar que o sinal de $[Dw/dt]$ depende da orientação de S e que

$$\lambda(t) = \left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle. \quad (4.5)$$

Definiremos agora, o conceito de curvatura geodésica.

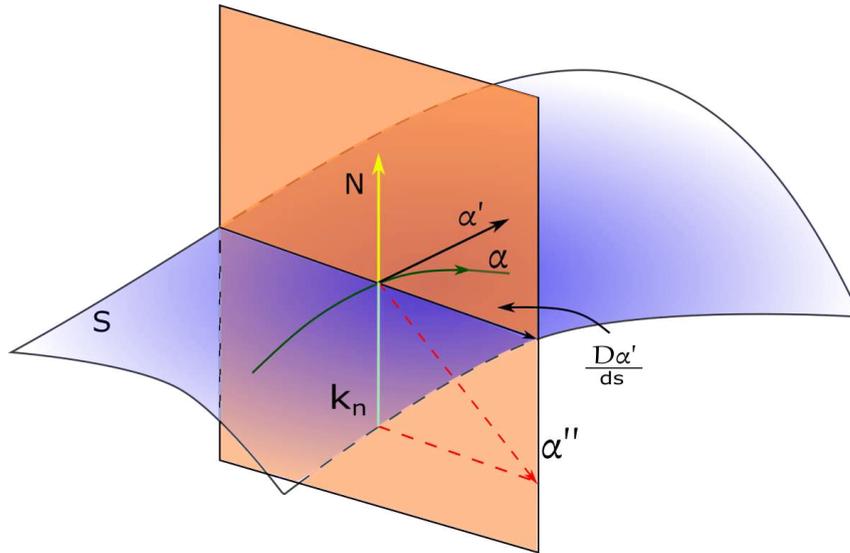
Definição 4.4.4. *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização de C , em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento de arco s . O valor algébrico $[D\alpha'(s)/ds] = K_g$ da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamado curvatura geodésica de C em p .*

Logo, pela Definição 4.4.4, as curvas geodésicas que são regulares são caracterizadas como curvas cuja curvatura geodésica é nula.

De um visão externa à superfície, o valor absoluto da curvatura geodésica k_g de C é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha''(s) = kn$, sendo k a curvatura da curva C em p e n o vetor normal da curva C em p . Sabendo que o valor da componente normal do vetor kn é o valor absoluto da curvatura normal k_n da curva $C \subset S$ em p , temos que

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2, \text{ o que pode ser observado na Figura (14)}$$

Figura 14 – $k^2 = k_g^2 + k_n^2$



Fonte: Elaborada pela autora

Exemplo 4.4.2. *Seja c o paralelo de colatitude φ , $0 < \varphi < \pi$, na esfera unitária centrada na origem S^2 . Como $k = 1/r = 1/\text{sen}\varphi$ e $|k_n| = 1$, temos que*

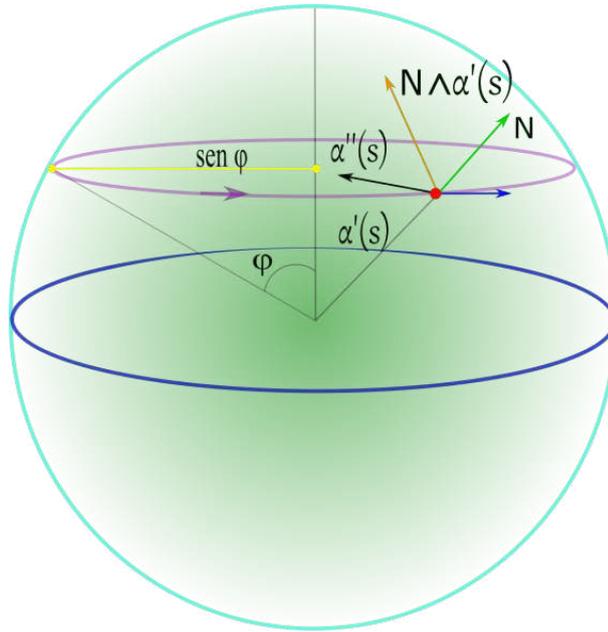
$$1/\text{sen}^2\varphi = k_n^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2;$$

$$k_g^2 = -1 + \frac{1}{\text{sen}^2\varphi} = \frac{1 - \text{sen}^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi} = \frac{\text{cos}^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi} = \text{cotg}^2\varphi.$$

Assim, os paralelos possuem curvaturas geodésicas constantes. Tomando S^2 com a orientação $N(p) = p$, $p \in S^2$, e o paralelo C com a orientação dada na figura (15), temos que

$$k_g = \text{cotg}\varphi.$$

Figura 15 – Orientação de um paralelo de S^2



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, isto é, C será um grande círculo onde sua curvatura geodésica será nula, $K_g = 0$, e portanto, teremos uma curva geodésica. Isso mostra que as únicas curvas geodésicas da esfera serão os grandes círculos.

Vamos agora, obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Para isso, precisamos de alguns termos e definições.

Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada, e sejam v e w dois campos diferenciáveis tangentes de vetores unitários ao longo de α .

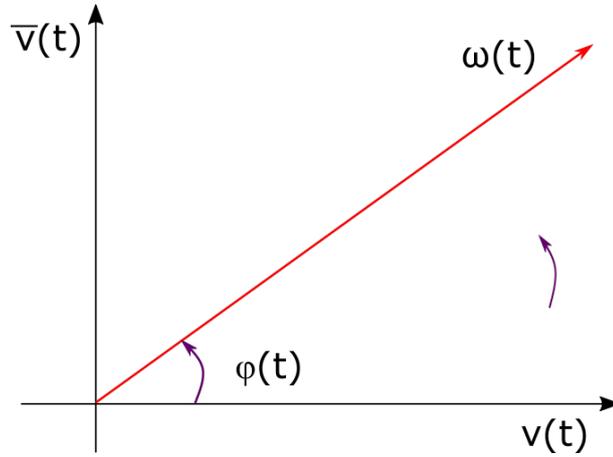
Seja $\bar{v}(t) = N(t) \times v(t)$. Então $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t)}S$ para cada $t \in I$. Assim, o vetor $w(t)$ pode ser escrito como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde a e b são funções diferenciáveis com $a^2 + b^2 = 1$.

Então, fixada uma determinação φ_0 do ângulo de $v(t_0)$ a $w(t_0)$ (i.e., $\cos(\varphi_0) = a(t_0)$ e $\sin(\varphi_0) = b(t_0)$), existe única função ângulo $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e $a(t) = \cos\varphi(t)$, $b(t) = \sin\varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Figura 16 – Função ângulo diferenciável φ



Fonte: Elaborada pela autora

Agora podemos relacionar a derivada covariante de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles.

Lema 4.4.1. *Sejam v e w dois campos diferenciáveis de vetores tangentes ao longo da curva $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1$. Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{4.6}$$

onde φ é uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ a $w(t)$, na orientação S .

Demonstração. Sejam $\bar{v}(t) = N(t) \times v(t)$, $\bar{w}(t) = N(t) \times w(t)$ e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ a $w(t)$ na orientação de S , isto é

$$w(t) = \cos\varphi(t)v(t) + \sin\varphi(t)\bar{v}(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= N(t) \times w(t) = N(t) \times (\cos\varphi(t)v(t) + \sin\varphi(t)\bar{v}(t)) \\ &= \cos\varphi(t)N(t) \times v(t) + \sin\varphi(t)N(t) \times \bar{v}(t), \\ &= \cos\varphi(t)\bar{v}(t) - \sin\varphi(t)v(t), \end{aligned}$$

e

$$w'(t) = -(\operatorname{sen}\varphi(t))\varphi'(t)v(t) + (\operatorname{cos}\varphi(t))\varphi'(t)\bar{v}(t) + \operatorname{cos}\varphi(t)v'(t) + \operatorname{sen}\varphi(t)\bar{v}'(t).$$

Como $\left[\frac{Dw}{dt}(t)\right] = \langle w'(t), \bar{w}(t) \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \left[\frac{Dw}{dt}(t)\right] &= (\operatorname{sen}\varphi(t))^2\varphi'(t) + (\operatorname{cos}\varphi(t))^2\varphi'(t) + (\operatorname{cos}\varphi(t))^2\langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle - (\operatorname{sen}\varphi(t))^2\langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle, \\ &= \varphi'(t) + \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle, \\ &= \varphi'(t) + \left[\frac{Dv}{dt}(t)\right] \end{aligned}$$

pois,

$$\langle v(t), v'(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}'(t) \rangle = 0 \text{ e } \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle = -\langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle,$$

já que

$$\langle v(t), v(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}(t) \rangle = 1 \text{ e } \langle v(t), \bar{v}(t) \rangle = 0.$$

□

Agora vamos obter uma expressão algébrica para o valor algébrico da derivada covariante.

Proposição 4.4.1. *Sejam $X(u, v)$ uma parametrização ortogonal ($F = 0$) de uma vizinhança de uma superfície orientada S , e $w(t)$ um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva $X(u(t), v(t))$. Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo de X_u a $w(t)$ na orientação dada.

Demonstração. Como $\left\{ \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{V_u \times X_v}{\sqrt{EG}} \right\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 , temos que se

$$e_1 = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}},$$

então,

$$\bar{e}_1(t) = N(t) \times e_1(t) = \frac{X_v(u(t), v(t))}{\sqrt{G(u(t), v(t))}}.$$

Sendo $w(t) = \operatorname{cos}\varphi(t)e_1(t) + \operatorname{sen}\varphi(t)\bar{e}_1(t)$, temos pelo lema 4.4.1, que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \left[\frac{De_1}{dt} \right] &= \langle e'_1, \bar{e}_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}}(u'(t)X_{uu} + v'(t)X_{uv}) + \left(\frac{1}{\sqrt{E(u(t), v(t))}} \right)' X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}}(u'(t)\langle X_{uu}, X_v \rangle + v'(t)\langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}}(-u'(t)\langle X_u, X_{vu} \rangle + v'(t)\langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}}(G_u v'(t) - E_v u'(t)), \end{aligned}$$

já que

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0, E_v = 2\langle X_u, X_{uv} \rangle \text{ e } G_u = 2\langle X_v, X_{vu} \rangle,$$

obtemos:

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

□

Como aplicação da Proposição 4.4.1 provaremos a existência e unicidade do transporte paralelo

Demonstração. Demonstração da Proposição 4.3.2.

Suponhamos que $\alpha(t) \in X(U) \forall t \in I$, onde $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ é uma parametrização ortogonal de S . Sejam $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$,

$$w(t) = \cos\varphi(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t)) + \sin\varphi(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}}(u(t), v(t)),$$

e φ_0 é uma determinação do ângulo de $\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t_0), v(t_0))$ a w_0 na orientação dada. Então, pela Proposição 4.4.1, w é um campo paralelo se, e só se

$$-\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = B(t)$$

Assim,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(t) dt$$

o que demonstra a existência e unicidade de w neste caso. Caso $\alpha(I)$ não esteja contido em uma única vizinhança coordenada, utilizaremos a compacidade de I para dividi-lo em um número finito de subintervalos de modo que a imagem de cada subintervalo por α esteja contido em uma vizinhança coordenada. Utilizando a existência e a unicidade de um campo de vetores w paralelo ao longo de α , com $W(t_0) = w_0$, da mesma maneira como foi feita na demonstração anterior. \square

Introduziremos agora as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada. Considere $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada de S e seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$. Seja $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\alpha(J) \subset X(U)$, e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de α na parametrização X . Sabemos que o campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$, $t \in J$ é dado por

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v,$$

o fato de α' ser paralelo é equivalente ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned}$$

obtido a partir da Equação 4.3 fazendo $a = u'$ e $b = v'$, e igualando a zero os coeficientes de X_u e X_v . De outra forma, $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica se, e só se, o sistema de equações de equações acima é satisfeito para todo intervalo aberto $J \subset I$ tal que $\alpha(J)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada. O sistema de equações acima é conhecido como as equações diferenciais das geodésicas de S . Um fato de extrema importância gerado pela caracterização das geodésicas por meio deste sistema de equações será a proposição seguinte.

Proposição 4.4.2. *Dada um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_pS$, $w \neq 0$, existe um $\epsilon > 0$ e uma geodésica parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Demonstração. Sejam $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $p = X(u_0, v_0)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, existem $\epsilon > 0$ e uma única solução $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ do sistema das equações diferenciais das geodésicas tal que $\beta(0) = (u_0, v_0)$ e $\beta'(0) = (a, b)$. Assim, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é a única geodésica de S tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = aX_u + bX_v$. \square

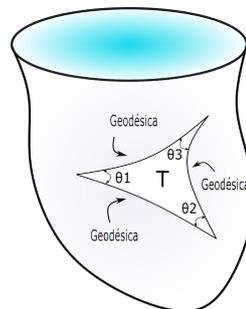
5 O Teorema de Gauss-Bonnet

5.1 Preliminares

A primeira versão deste teorema foi apresentado por Gauss no artigo *General Investigations of Curved Surfaces* (re-editado pela Raven Press, New York, 1965) e trata de triângulos geodésicos em superfícies, triângulos cujos lados são arcos de geodésicas. Gauss afirma que o excesso sobre π da soma dos ângulos internos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ do triângulo geodésico T é igual a integral da curvatura Gaussiana K sobre T ; isto é,

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi = \int \int_T K d\sigma$$

Figura 17 – Um triângulo geodésico



Fonte: Elaborada pela autora

Então, se:

(a) $K \equiv 0$, temos que $\sum_{i=1}^3 \theta_i = \pi$. Ou seja, quando temos a curvatura Gaussiana nula, a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a π , resultado que já conhecemos desde o ensino fundamental.

(b) $K \equiv 1$, temos que $\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi = \text{área}(T) > 0$. Ou seja, se olharmos para um triângulo geodésico na esfera unitária a soma dos ângulos internos excede π em exatamente o valor da área do Triângulo T .

(c) $K \equiv -1$, temos $\sum_{i=1}^3 \theta_i < \pi$. Ou seja isso que acontece em triângulos geodésicos da pseudo-esfera.

A extensão do teorema a uma região limitada por uma curva não-geodésica deve-se ao matemático francês Pierre Ossian Bonnet. Também temos uma extensão do teorema para superfícies compactas, e para enunciá-lo, vamos precisar de algumas definições topológicas, já que, o teorema nos apresenta uma relação entre propriedades topológicas da superfície compacta e a integral de sua curvatura. Logo, temos uma versão local e uma global do teorema.

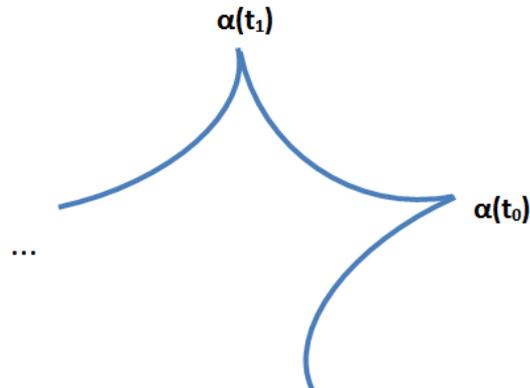
Vamos começar por sua versão local, mas antes de enunciá-lo, vamos precisar de algumas definições.

Definição 5.1.1. *Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma aplicação contínua sobre uma superfície regular S . A curva α será simples, fechada e regular por partes se:*

- i) $\alpha(0) = \alpha(l)$, o que representa uma curva fechada;*
- ii) $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0, l)$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, o que garante uma curva sem auto-interseções;*
- iii) Existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_k + 1 = l$ de $[0, l]$ tal que α é diferenciável e regular em cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$. Ou seja, a curva α deixa de ter uma reta tangente bem definida em um número finito de pontos.*

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, são chamados de vértices da curva α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados de arcos regulares de α . Veja na Figura 18 uma representação.

Figura 18 – Vértices



Fonte: Elaborada pela autora

Pela condição de regularidade, sabemos que existe os limites laterais em cada vértice $\alpha(t_i)$. Vamos defini-los da seguinte maneira:

$$\alpha'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t), \text{ com } t > t_i, \text{ sendo o limite à direita, e}$$

$$\alpha'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t), \text{ com } t < t_i, \text{ sendo o limite à esquerda.}$$

Seja S uma superfície orientada, e seja $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i^-)$ a $\alpha'(t_i^+)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$ (o vértice $\alpha(t_i)$ não é um cuspide), medimos o sinal de θ_i da seguinte maneira:

i) O sinal será positivo se :

$$\{\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i))\},$$

formam uma base positiva, sendo isto, equivalente a dizer que o determinante entre eles é positivo.

ii) O sinal será negativo se :

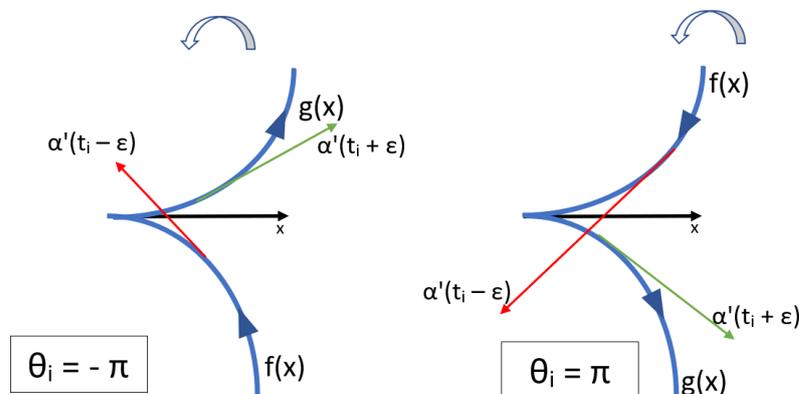
$$\{\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i))\},$$

formam uma base negativa, sendo isto, equivalente a dizer que o determinante entre eles é negativo.

O ângulo θ_i , com $0 < |\theta_i| < \pi$, é chamando de ângulo externo no vértice $\alpha(t_i)$.

Quando o vértice é um cúspide, $|\theta| = \pi$, o sinal de θ é escolhido de uma forma diferente. Usando uma parametrização, o problema fica reduzido ao caso no qual α está contido em \mathbb{R}^2 , com $\alpha(t_i) = 0$, e $\alpha'(t_i^-)$ está na parte negativa do eixo Ox , e conseqüentemente $\alpha'(t_i^+)$ está na parte positiva. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o traço de α restrito a $(t_i - \epsilon, t_i)$ é o gráfico de uma função $f : (0, \epsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}$ e o traço de α restrito a $(t_i, t_i + \epsilon)$ é o gráfico de uma função $g : (0, \epsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}$. Sabendo que a curva α não tem auto-interseções, acontecerá que, $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$, para todo x onde as funções estão definidas. Quando $f(x) > g(x)$ vamos adotar $\theta = \pi$ e quando $f(x) < g(x)$ vamos considerar $\theta = -\pi$. Vamos ilustrar os dois casos:

Figura 19 – O sinal do ângulo de uma cúspide



Fonte: Elaborada pela autora

Seja S uma superfície orientada. Dizemos que uma região $R \subset S$ é uma região simples se R é homeomorfa a um disco e a fronteira ∂R da região R for o traço de uma curva, $\alpha : I \rightarrow S$, parametrizada, simples, fechada e regular por partes (já definida anteriormente). Dizemos que a curva α é orientada positivamente se para cada $\alpha(t)$, com $\alpha(t)$ pertencendo a um arco regular, a base positiva ortogonal $\{\alpha'(t), h(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}S$ satisfaz a condição de que $h(t)$ aponta para dentro da região R , ou seja, se pegarmos uma outra curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos que o produto interno entre $\beta'(0)$ e $h(t)$ é sempre positivo. De uma maneira mais clara, se andarmos sobre a curva α na direção positiva com a cabeça apontada para N, a região R estará à nossa esquerda.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação da superfície S , onde U é homeomorfo a um disco aberto no plano. Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow X(U) \subset S$ uma

curva parametrizada simples, fechada e regular por partes, com vértices $\alpha(t_i)$ ângulos externos $\theta_i, i = 0, \dots, k$.

Seja $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que medem em cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de X_u a $\alpha'(t)$.

Falaremos agora sobre o teorema do índice de rotação de uma curva fechada, assim, precisamos de algumas definições.

Para introduzirmos o conceito de grau é necessário saber algumas propriedades das aplicações de recobrimento encontradas em manfredo/2014, seção 5.6.

Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e seja $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ o recobrimento de S^1 pela reta real \mathbb{R} dada por $\pi(x) = (\cos x, \sin x), x \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação contínua.

O grau de φ é definido da seguinte maneira. Podemos pensar no primeiro S^1 da aplicação $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ como um intervalo fechado $[0, l]$ com seus extremos 0 e l identificados. Assim, φ pode ser pensado como uma aplicação contínua $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$, com $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in S^1$. Deste modo, φ é um caminho em S^1 que é fechado em p , e assim, pode ser levantado em um único caminho $\tilde{\varphi} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, começando em um ponto $x \in \mathbb{R}$ com $\pi(x) = p$. Como $\pi(\tilde{\varphi}(0)) = \pi(\tilde{\varphi}(l))$, a diferença $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$ é um múltiplo inteiro de 2π . O número inteiro $gr \varphi$ dado por

$$\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (gr \varphi) 2\pi$$

é chamado o grau de φ .

De uma maneira intuitiva, $gr \varphi$ é o número de vezes que $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ "enrola" $[0, l]$ em torno de S^1 .

A propriedade mais importante do grau é a sua invariância por homotopias, ou seja, se $\varphi_1, \varphi_2 : S^1 \rightarrow S^1$, contínuas, são homotópicas, então $gr \varphi_1 = gr \varphi_2$.

Deve-se observar que se $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ é diferenciável, φ determina duas funções diferenciáveis $a = a(t), b = b(t)$, dadas por $\varphi(t) = (a(t), b(t))$, que satisfazem $a^2 + b^2 = 1$. Neste caso, o levantamento $\tilde{\varphi}$, começando em $\tilde{\varphi}_0 = x$, é precisamente a função diferenciável (cf. manfredo/2014 Lema 1, seção 4,4)

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_0 + \int_0^t (ab' - ba') dt.$$

Isto segue da unicidade do levantamento e do fato de que $\cos\tilde{\varphi}(t) = a(t)$, $\sin\tilde{\varphi}(t) = b(t)$, $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0$. Assim, no caso diferenciável, o grau de φ pode ser expresso por uma integral,

$$\text{gr } \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} dt.$$

Definição 5.1.2. *Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada regular e plana, e seja $\varphi : [0, l] \rightarrow S^1$ dada por*

$$\varphi(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad t \in [0, l].$$

O grau de φ é chamado índice de rotação de α .

De uma maneira intuitiva o *índice de rotação* de uma curva regular fechada é o número de voltas completas dadas pelo campo de vetores tangente ao longo da curva. Então, como exemplo, pode-se notar que o *índice de rotação* de um círculo unitário é 1, se orientado positivamente. Tal fato não é coincidência, uma vez que, o Teorema do *índice de rotação*, encontrado em manfredo/2014, p.476, para uma curva regular, plana, simples e fechada garante este fato, ou seja, o *índice de rotação* para essas curvas sempre será ± 1 (dependendo da orientação).

É possível estender a noção de *índice de rotação* para curvas regulares por partes usando os ângulos nos vértices e provar que o índice de rotação de uma curva simples, fechada e regular por partes é ± 1 , ou seja, o campo de vetores tangentes completa uma volta girando $\pm 2\pi$.

Vamos primeiro, apresentar o teorema do Índice de Rotação para curvas fechadas e regulares por partes e em seguida dar uma ideia da demonstração.

Teorema 5.1.1. *Com a notação utilizada anteriormente, temos que*

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi.$$

O sinal positivo ou negativo depende da orientação da curva α .

O teorema nos diz que a variação total do ângulo do vetor tangente a α com uma direção dada mais os "saltos" nos vértices vale $\pm 2\pi$, ou seja, temos que o *índice de rotação* da curva α (fechada e regular por partes) vale ± 1 .

Uma demonstração deste Teorema pode ser vista em [4, p. 50-62]. Além da bibliografia do H. Hopf, podemos encontrar uma demonstração em [6, p.160], onde, ele mostra que existe

uma curva com um vetor tangente contínuo com o mesmo *índice de rotação* que α , tal fato envolve um Teorema que relaciona a homotopia de duas curvas fechadas e regulares no plano ao *índice de rotação* das mesmas, ou seja, o Teorema nos garante que duas curvas são regularmente homotópicas se, e somente se, possuem o mesmo *índice de rotação*. Assim, a construção da curva que possui o mesmo *índice de rotação* que α se dá "arredondando os cantos de α ", ou seja, eliminando os vértices até obtermos uma nova curva com um campo vetorial tangente contínuo que seja homotópica à curva α , logo, o *índice de rotação* desta nova curva, que será ± 1 , é o mesmo que o da curva α . O "arredondamento dos cantos" acontece por meio de substituições de partes da curva α , que contenha um vértice, por um segmento de curva suave até que todos os vértices desapareçam.

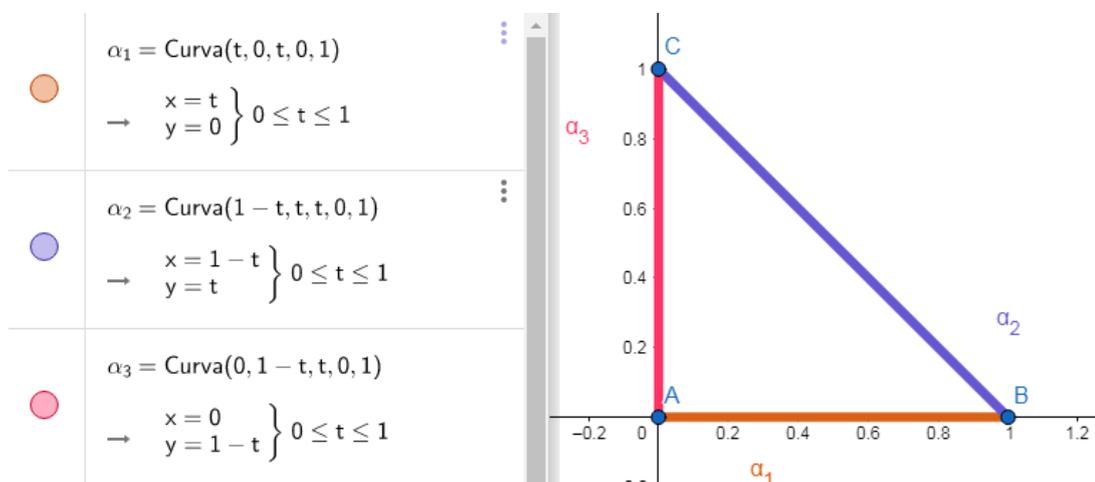
Vamos fazer uma aplicação do teorema 4.1.1:

Exemplo 5.1.1. Considere a curva α , orientada positivamente, sendo a fronteira de um triângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Encontrando as equações paramétricas de cada lado do triângulo, obtemos a parametrização da curva α , onde :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1 = (t, 0) \\ \alpha_2 = (1 - t, t) \\ \alpha_3 = (0, 1 - t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Figura 20 – Traço da curva $\alpha(t)$



Fonte: Elaborada pela autora

Considere a aplicação $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$X(u,v) = (u,v).$$

A curva α está contida na imagem da aplicação X , logo $X_u = (1, 0)$.

Vamos calcular o ângulo positivo de X_u a $\alpha'(t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Considere

$$\begin{aligned} \varphi_i : [t_i, t_{i+1}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'(t) \rangle}{|X_u| |\alpha'(t)|}\right) \end{aligned}$$

Seguem os cálculos para aplicarmos o teorema:

a) curva regular α_1

$$\varphi_0(1) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_1(1) \rangle}{|X_u| |\alpha'_1(1)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (1,0) \rangle}{1}\right) = \arccos(1) = 0;$$

$$\varphi_0(0) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_1(0) \rangle}{|X_u| |\alpha'_1(0)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (1,0) \rangle}{1}\right) = \arccos(1) = 0;$$

b) curva regular α_2

$$\varphi_1(1) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_2(1) \rangle}{|X_u| |\alpha'_2(1)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (-1,1) \rangle}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4};$$

$$\varphi_1(0) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_2(0) \rangle}{|X_u| |\alpha'_2(0)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (-1,1) \rangle}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4};$$

c) curva regular α_3

$$\varphi_2(1) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_3(1) \rangle}{|X_u| |\alpha'_3(1)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (0,-1) \rangle}{1}\right) = \arccos(0) = \frac{3\pi}{2};$$

$$\varphi_2(0) = \arccos\left(\frac{\langle X_u, \alpha'_3(0) \rangle}{|X_u| |\alpha'_3(0)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (1,0), (0,-1) \rangle}{1}\right) = \arccos(0) = \frac{3\pi}{2};$$

Assim, temos que $\sum_{i=0}^2 (\varphi(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) = 0$.

Agora vamos olhar para o ângulo externo em cada vértice $\alpha(t_i)$, $i = 0, 1, 2$:

$$\theta_0 \rightarrow \alpha'(0^-) = (0, -1)$$

$$\alpha'(0^+) = (1, 0)$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{\langle (0,-1), (1,0) \rangle}{1} = 0, \text{ assim a menor determinação será } \theta_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\theta_1 \rightarrow \alpha'(0^-) = (1, 0)$$

$$\alpha'(0^+) = (-1, 1)$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{\langle (1,0), (-1,1) \rangle}{1} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \text{ assim a menor determinação será } \theta_1 = \frac{3\pi}{4};$$

$$\theta_2 \rightarrow \alpha'(0^-) = (-1, 1)$$

$$\alpha'(0^+) = (0, -1)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{\langle (-1,1), (0,-1) \rangle}{1} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \text{ assim a menor determinação será } \theta_2 = \frac{3\pi}{4};$$

Todos os vértices serão positivos, já que o sinal do determinante de $\{\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N\}$ foi positivo em cada caso. Assim, temos que $\sum_{i=0}^2 \theta_i = 2\pi$.

Logo,

$$\sum_{i=0}^2 (\varphi(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^2 \theta_i = 2\pi.$$

Para prosseguirmos, vamos precisar de mais algumas terminologias.

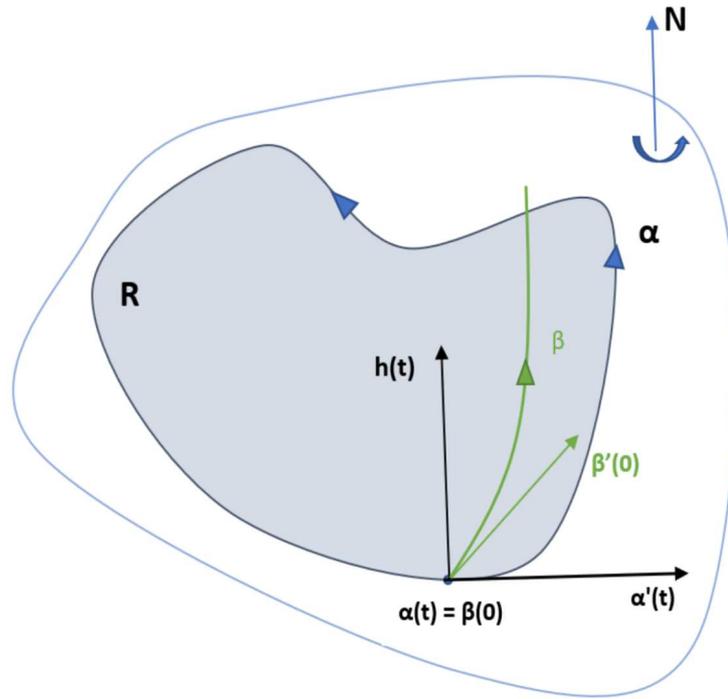
Considere S uma superfície orientada. Uma região $R \subset S$ (união de um conjunto aberto conexo¹ com a sua fronteira) é uma região **simples** se:

- R é homeomorfa a um disco;
- a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes $\alpha : I \rightarrow S$.

A curva α será orientada positivamente se para cada $\alpha(t)$, pertencente a um arco regular, a base positiva ortogonal $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ aponta para dentro da região R , ou seja, podemos pegar uma outra curva tal que $\beta : I \rightarrow R$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(0)$, e teremos que $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$. De uma maneira mais clara, se caminharmos sobre a fronteira da região R na direção positiva com a cabeça apontada para N, o interior da região estará à nossa esquerda.

¹ Um conjunto é conexo se admite apenas a cisão trivial

Figura 21 – Curva α orientada positivamente.



Fonte: Elaborada pela autora

Considere agora uma parametrização da superfície S compatível com a sua orientação $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$, onde $R \subset X(U)$ é uma região limitada de S . Se f é uma função diferenciável em S , então se vê que a integral

$$\int \int_{X^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

não depende da parametrização X , escolhida na classe de orientação de X , observe:

Seja $\bar{X}(u, v) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ uma reparametrização de X por h , onde $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$ e $h : \bar{U} \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow U$ é uma mudança de coordenadas. Seja $\bar{X}^{-1}(R) \subset \bar{U}$ e $X^{-1}(R) \subset U$, sendo $X^{-1}(R) = h(\bar{X}^{-1}(R))$. Vamos usar o fato de que $\sqrt{EG - F^2} = |\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}}|$, definido na seção de área. Então,

$$\begin{aligned} & \int \int_{\bar{X}^{-1}(R)} f(\bar{u}, \bar{v}) |\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}}| d\bar{u} d\bar{v}; \\ &= \int \int_{\bar{X}^{-1}(R)} f(u, v) |X_u \times X_v| |\det Jac(h)| d\bar{u} d\bar{v}; \end{aligned}$$

usando o teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas teremos a seguinte igualdade:

$$= \int \int_{X^{-1}(R)} f(u, v) |X_u \times X_v| \, dudv.$$

Logo, a integral não depende da parametrização de X .

É comum denotarmos a integral de f sobre a região R por

$$\int \int_R f \, d\sigma.$$

Com as definições apresentadas, segue na próxima seção a versão local e global do Teorema de Gauss-Bonnet.

5.2 Versão Local do Teorema de Gauss-Bonnet

O versão local do teorema é definida sobre uma região simples R , definida na seção 4.1, de uma superfície orientada S .

É importante salientar que a versão local será usada posteriormente na demonstração da versão global do Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 5.2.1. *Teorema de Gauss-Bonnet (Local)*

Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal ($F=0$), de uma superfície orientada S , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e X é compatível com a orientação de S . Seja $R \subset X(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Suponha que α é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco s , e sejam $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α . Então

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K é a curvatura Gaussiana de S .

Demonstração. Seja $u = u(s), v = v(s)$ a expressão de α na parametrização X . Sabemos que a derivada covariante é

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}$$

onde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de X_u a $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando a expressão acima em todos os intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ e somando os resultados,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^K \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \end{aligned}$$

Para prosseguirmos, utilizaremos o teorema de Green no plano uv , onde:

Se $P(u, v)$ e $Q(u, v)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada por $u = u(s)$, $v = v(s)$, então:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \iint_{X^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (5.1)$$

Para prosseguirmos, vamos usar a Equação 4.2 da curvatura Gaussiana, K , obtida por meio da manipulação da equação de Gauss 4.1 para quando $F=0$,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} & \iint_{X^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv = \\ & \iint_{X^{-1}(R)} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv = \\ & \iint_{X^{-1}(R)} \frac{1}{2} \left(-2K\sqrt{EG} \right) dudv = \\ & - \iint_{X^{-1}(R)} \left(K\sqrt{EG} \right) dudv = \\ & - \iint_R K d\sigma \end{aligned}$$

Dessa forma, a Equação 4.1 fica da seguinte maneira:

$$\sum_{i=0}^K \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = - \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (5.2)$$

Podemos agora, usar o teorema do índice de rotação para reescrever a última integral, sendo este:

$$\sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi.$$

Então,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

Como a curva é orientada positivamente, o sinal da expressão acima deve ser positivo. Assim, ficamos com $+2\pi$.

Reescrevendo a equação 4.2, teremos

$$\sum_{i=0}^K \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = - \int \int_R K d\sigma + 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

$$\sum_{i=0}^K \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

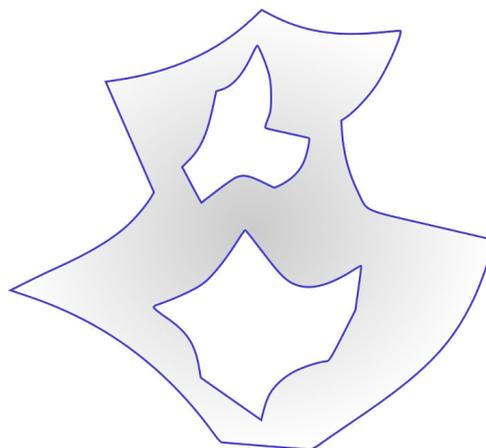
□

5.3 Versão global do Teorema de Gauss-Bonnet

Para globalizar o teorema de Gauss-Bonnet, precisamos de mais alguns preliminares topológicos.

Seja S uma superfície regular. Dizemos que uma região conexa $R \subseteq S$ é regular se R é compacta e sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam.

Figura 22 – Superfície regular

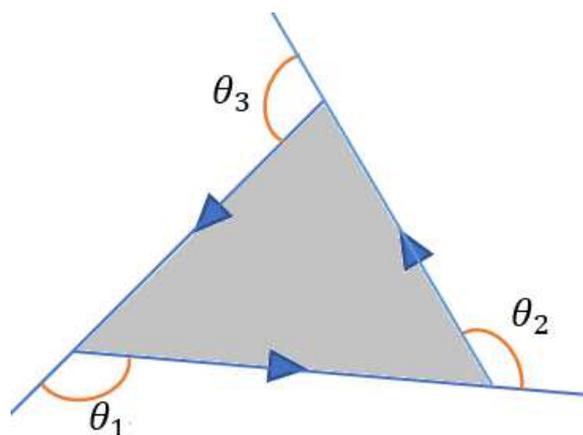


Fonte: Elaborada pela autora

Neste trabalho, vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

Uma região simples, definida na seção 4.1, que tem apenas três vértices com ângulos externos $\theta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ é chamada de *triângulo*, veja a Figura 23.

Figura 23 – Triângulo, uma região simples



Fonte: Elaborada pela autora

Uma *triangulação* de uma região regular $R \subseteq S$ é uma família finita τ de triângulos $T_j, j = 1, 2, \dots, n$, tal que

1. $\cup_{j=1}^n T_j = R$.
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset, i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Dada uma triangulação τ de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S , denotamos por F o número de triângulos, por E o número de lados, e por V o número de vértices da triangulação.

Definição 5.3.1. *O número*

$$F - E + V = \chi$$

é chamado característica de Euler-Poincaré da triangulação.

As propriedades abaixo serão apresentadas sem demonstrações. Uma exposição destes fatos pode ser encontrada [5, cap.1].

Proposição 5.3.1. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 5.3.2. *Seja S uma superfície orientada e $\{X_\alpha\}$ uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de S . Seja $R \subset S$ uma região regular de S . Então existe uma triangulação τ de R tal que todo triângulo $T \in \tau$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{X_\alpha\}$.*

Proposição 5.3.3. *Se R é uma região regular de uma superfície S , a característica de Euler não depende da triangulação de R . Vamos denotá-la por $\chi(R)$.*

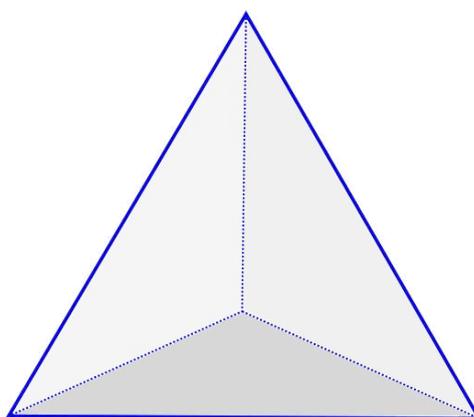
A característica de Euler é um número que não depende da triangulação, como mencionado na última proposição, dessa forma, é uma característica da região R . Esse número também é um invariante topológico, como visto em [2, p. 129] "É imediato que a característica de Euler é invariante por homeomorfismos e constitui, dessa forma, um conceito topológico."

Aproveitando do fato de que $\chi(R)$ é invariante por homeomorfismos, fica mais simples encontrar a característica de Euler de uma superfície (ou região) usando uma superfície homeomorfa mais fácil de triangular, já que "[...] duas superfícies regulares compactas são homeomorfas se, e somente se, têm a mesma característica de Euler." [2, p.24].

Observe os exemplos:

- 1) Se R é um tetraedro

Figura 24 – Tetraedro



Fonte: Elaborada pela autora

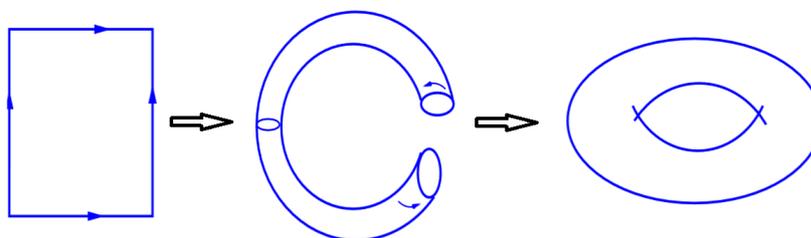
temos $F = 4, V = 4$ e $E = 6$, então $\chi(R) = 2$. Logo, qualquer superfície homeomorfa ao tetraedro terá a mesma característica de Euler. Segundo [7]

Se um poliedro é convexo, então ele é homeomorfo à esfera, pois, considerando um ponto O em seu interior e uma esfera de centro neste ponto contendo o poliedro, uma reta que passa pelo ponto O intersecta o poliedro em exatamente 2 pontos, A e B . Assim, deformamos o poliedro de forma que o ponto A é levado no ponto A' da esfera e o ponto B é levado no ponto B' da esfera, onde A' e B' são as interseções da reta com a esfera. Logo, considerando todas as retas passando pelo ponto O , podemos transformar o poliedro de modo contínuo em uma esfera com centro no ponto O .

Assim, como todo poliedro convexo é homeomorfo a esfera, temos que $\chi(S^2) = 2$.

2) Para o toro, podemos usar o fato de que ele é homeomorfo² a um retângulo onde é feita uma identificação dos lados opostos. Segue, na Figura (25), uma transformação do retângulo em um toro.

Figura 25 – Um retângulo sendo transformado em um toro



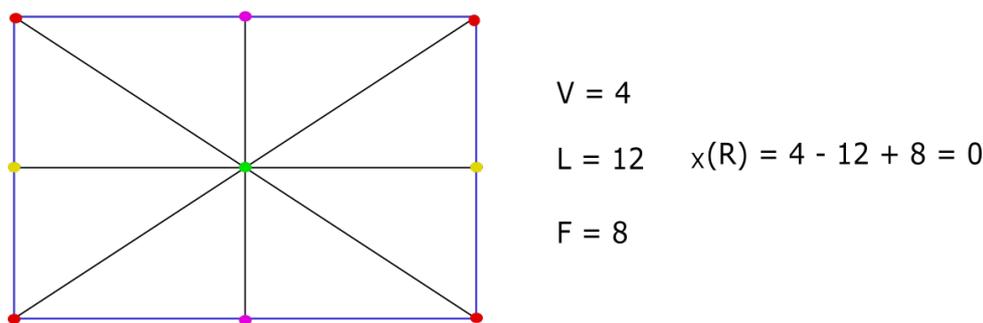
Fonte:[8, p.21]

Dessa forma, como são homeomorfos, a característica de Euler do retângulo será a mesmo do toro. Vamos calcular:

Observe uma triangulação do retângulo R

² Uma explicação pode ser vista em [8]

Figura 26 – Retângulo R



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, a característica de Euler do retângulo R será $\chi(R) = 0$, por conseguinte, a do toro também.

Teorema 5.3.1. *Teorema de classificação das superfícies compactas regulares em \mathbb{R}^3*

Toda superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa à esfera ou a um g -toro (esfera com g alças). Então $\chi(R) = 2 - 2g$, sendo g o número de alças. No caso da esfera, $g=0$.

A demonstração do teorema (5.3.1) não será feita, mas segundo [2]

o teorema sustenta-se no fato de que toda superfície regular compacta S , não sendo a esfera, é topologicamente equivalente a um polígono regular do plano, o qual tem um número par de lados, em que cada lado é identificado com o seu oposto. Daí resulta, igualmente, que toda tal superfície é topologicamente equivalente à esfera com um certo número g de alças. O número g é chamado de gênero de S .

Assim, toda superfície regular compacta, tirando a esfera o toro e seus homeomorfismos, tem a característica de Euler sendo um número par, inteiro e negativo.

Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfícies orientada S e seja τ uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_i \in \tau, j = 1, 2, \dots, k$ esteja contido em uma vizinhança coordenada $X_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{X_\alpha\}, \alpha \in A$, compatíveis com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S . A proposição seguinte mostra que faz sentido falar sobre a integral de f sobre a região R .

Proposição 5.3.4. *Com a notação acima, a soma*

$$\sum_{j=1}^k \int \int_{X_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} \, du_j dv_j$$

não depende da triangulação τ nem da família $\{X_\alpha\}$ de parametrizações de S .

Esta soma tem um significado geométrico e é chamada a integral de f sobre a região regular R . Como dito anteriormente, é comum denotá-la por

$$\int \int_R f d\sigma.$$

Agora vamos enunciar e demonstrar a versão global do Teorema de Gauss-Bonnet. Nesta versão, o teorema é definido sobre uma região regular de uma superfície orientada S .

Teorema 5.3.2. *Teorema de Gauss-Bonnet Global*

Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então

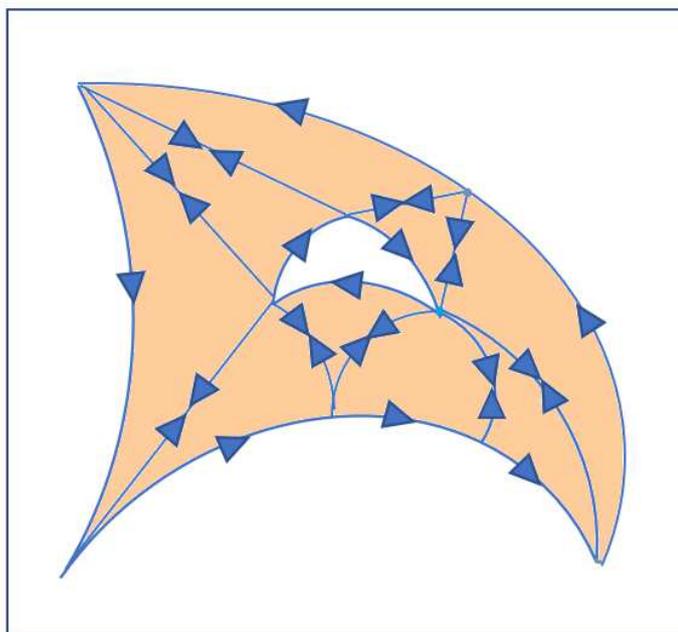
$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(S), \quad (5.3)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração. Considere uma triangulação τ da região R tal que qualquer triângulo T_j esteja contido em uma vizinhança coordenada da família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S . Tal triangulação existe pela proposição 4.3.1 e assim, nos permite aplicar o teorema de Gauss-Bonnet local, já que cada triângulo será uma região simples da superfície orientada S . Vamos considerar $\tau = \{T_1, \dots, T_F\}$.

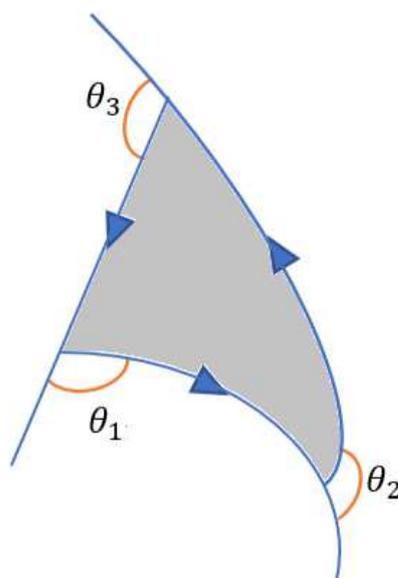
Uma observação importante na triangulação é o fato de que se a fronteira de cada triângulo de τ for orientada positivamente, teremos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Tal observação pode ser melhor exemplificada na Figura 27.

Figura 27 – Orientação de arestas adjacentes.



Fonte: Elaborada pela autora

Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet Local em um triângulo T_j , (Fig.28), obtemos,
 Figura 28 – Um triângulo T_j



Fonte: Elaborada pela autora

$$\int_{\partial T_j} K_g(s^*) ds^* + \int \int_{T_j} K d\sigma + \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi$$

onde s^* denota o comprimento do arco de T_j , a integral sobre ∂T_j significa a soma das integrais nos três lados do triângulo e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são os ângulos externos do T_j .

Agora vamos somar a equação acima calculada sobre todos os triângulos da triangulação $\tau = \{T_1, \dots, T_F\}$:

1) Somando a primeira integral de todas as equações obtemos somente o somatório da integral sobre as arcos regulares de cada curva que formam ∂R , dando o seguinte resultado

$$\sum_{j=1}^F \int_{\partial T_j} k_g(s^*) ds^* = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds.$$

A justificativa é que a curvatura geodésica sobre as arestas com orientações opostas (arestas comuns) dos triângulos adjacentes possuem o mesmo valor em módulo, porém sinais contrários devido à orientação oposta. Assim, as integrais sobre essas arestas se cancelam quando somadas restando apenas as integrais da curvatura geodésicas dos arcos que formam ∂R .

2) Na segunda integral, a integral da curvatura Gaussiana K sobre cada triângulo T_j , teremos:

$$\sum_{i=1}^F \int \int_{T_j} K d\sigma = \int \int_R K d\sigma,$$

já que a união de todos os $T_j, i = 1, \dots, F$ resultam na região R .

3) No cálculo da soma dos ângulos de todos os triângulos de $\tau = \{T_1, \dots, T_F\}$, teremos:

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k}, \text{ onde } \theta_{j,1}, \theta_{j,2}, \theta_{j,3} \text{ são os ângulos externos do } T_j.$$

4) No lado direito da igualdade teremos:

$$\sum_{i=1}^F 2\pi = 2\pi F, \text{ onde } F \text{ é o número de triângulos.}$$

Após a soma sobre todos os triângulos, chegamos a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi F \tag{5.4}$$

Chegado até aqui, agora é o momento de trabalharmos com os ângulos internos dos triângulos para arrumarmos a igualdade acima.

Considere um triângulo T_j da triangulação. Um ângulo interno pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\varphi_{j,k} = \pi - \theta_{j,k}.$$

Dessa forma,

$$\theta_{j,k} = \pi - \varphi_{j,k}.$$

Somando os ângulos do triângulo T_j , obtemos

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{j,k} = 3\pi - \sum_{k=1}^3 \varphi_{j,k}.$$

Somando de todos os triângulos, teremos

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 3\pi F - \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{j,k} \quad (5.5)$$

Antes de prosseguirmos, vamos estabelecer uma notação e algumas observações:

E_e = número de arestas externas de τ ;

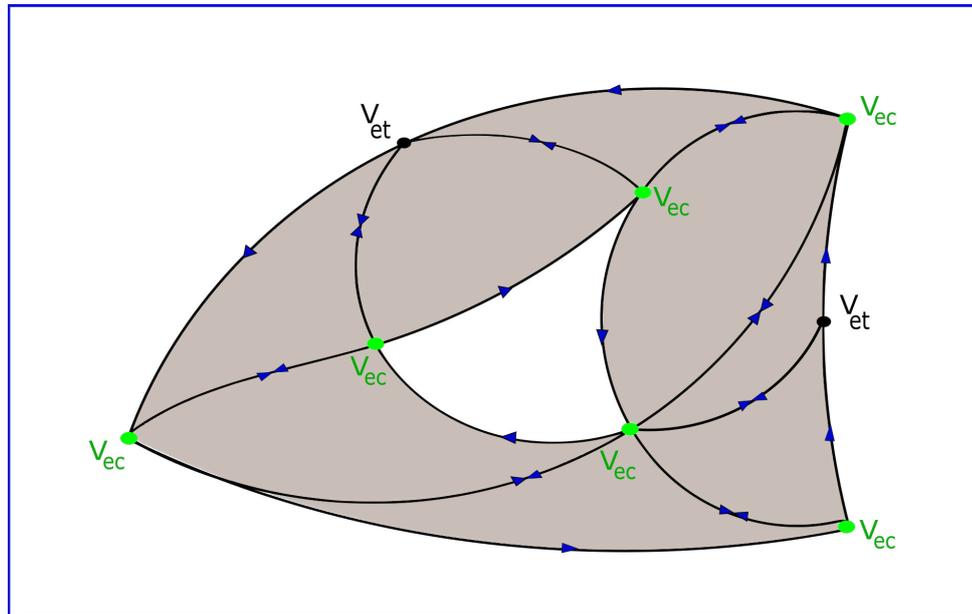
E_i = número de arestas internas de τ ;

V_e = número de vértices externos de τ ;

V_i = número de vértices internos de τ .

Observamos que os vértices externos podem ser tanto vértices das curvas como vértices gerados pela triangulação. Então, $V_e = V_{et} + V_{ec}$ = vértices externos da triangulação + vértices externos das curvas C_i (Fig.29).

Figura 29 – Exemplificação de vértices externos das curvas e vértices externos da triangulação.



Fonte: Elaborada pela autora

As curvas C_i são fechadas, dessa forma, $E_e = V_e$ e mostraremos por indução que

$$3F = 2E_i + E_e.$$

Vamos considerar $F = 1$, assim

$$3 * 1 = 2 * 0 + 1, \rightarrow 3 = 3.$$

Vamos considerar $F = 2$, assim

$$3 * 2 = 2 * 1 + 4, \rightarrow 6 = 6.$$

Suponha verdadeiro para $F = K$

$$3K = 2E_{i_k} + E_{e_k}.$$

Vamos mostrar que é verdadeiro para $F = K + 1$

$$3(K + 1) = 3K + 3.$$

Usando HI, temos

$$3(K + 1) = 3K + 3 = 2E_{i_k} + E_{e_k} + 3.$$

Sabemos que $E_{i_k} = E_{i_{k+1}} - 1$ e $E_{e_k} = E_{e_{k+1}} - 1$, então

$$3(k + 1) = 2(E_{i_{k+1}} - 1) + E_{e_{k+1}} - 1 + 3;$$

$$3(k+1) = 2E_{i_{k+1}} - 2 + E_{e_{k+1}} - 1 + 3;$$

$$3(k+1) = 2E_{i_{k+1}} + E_{e_{k+1}},$$

como queríamos mostrar.

Com a notação estabelecida e as observações feitas podemos reescrever a equação (5.5) usando o fato de que $3F = 2E_i + E_e$, veja:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} &= \pi(2E_i + E_e) - \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{j,k} \\ \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} &= 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{j,k}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

O somatório dos ângulos internos pode ser escrito como

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{j,k} = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l), \quad (5.7)$$

já que a soma dos ângulos em torno de cada vértice interno é 2π , em cada V_{et} teremos π e cada ângulo interno que faz parte do vértice de uma curva vale $\pi - \theta_l$, sendo θ_l o ângulo externo do vértice da curva.

Substituindo (5.7) em (5.6), teremos

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l).$$

Somando e subtraindo πE_e e usando o fato de que $E_e = V_e$, concluímos que

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi E_e - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l);$$

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_e - \sum_{l=1}^p \pi + \sum_{l=1}^p \theta_l;$$

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_e - \pi V_{ec} + \sum_{l=1}^p \theta_l.$$

Como $E = E_i + E_e$, $V_e = V_{et} + V_{ec}$ e $V = V_e + V_i$, temos

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_e + \sum_{l=1}^p \theta_l;$$

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E - 2\pi V_i - 2\pi V_e + \sum_{l=1}^p \theta_l;$$

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l. \tag{5.8}$$

Substituindo a equação (5.8) em (5.4), teremos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F;$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi (F - E + V);$$

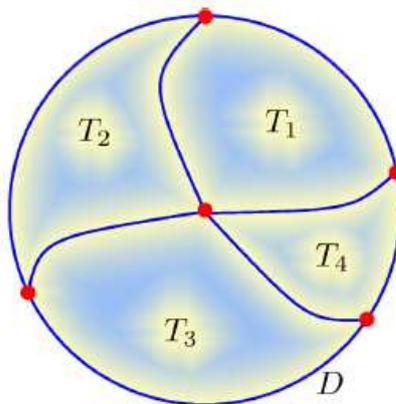
$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R);$$

□

Serão apresentados dois corolários que envolvem o teorema acima demonstrado.

Para o primeiro, vamos considerar a aplicação do teorema de Gauss-Bonnet em uma região simples. Como uma região simples é homeomorfa a um disco, temos que sua característica de Euler vale 1. Observe na Figura 37 uma triangulação do disco D, onde $F = 4$, $E = 8$ e $V = 5$, resultando em $\chi(D) = 1$.

Figura 30 – Triangulação do disco D



Fonte:[3, p.325]

Assim, o corolário abaixo nos garante que

Corolário 5.3.1. *Se R é uma região simples de S , então*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Para o segundo corolário, devemos lembrar que uma superfície compacta pode ser considerada uma região com fronteira vazia, assim

Corolário 5.3.2. *Seja S uma superfície compacta e orientável; então*

$$\int \int_R K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Como a superfície tem fronteira vazia, não teremos curvas nem vértices para inferirmos valores, restando apenas uma relação entre K , um valor puramente geométrico, e $\chi(S)$, um valor puramente topológico.

5.4 Aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta seção, veremos algumas aplicações do teorema de Gauss-Bonnet.

Aplicação 5.4.1. *Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.*

Como a superfície é compacta, vale o Corolário 5.3.2. Assim

$$\int \int_R K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Como a curvatura é positiva

$$2\pi\chi(S) > 0$$

$$\chi(S) > 0$$

$$2 - 2g > 0$$

$$-2g > -2;$$

$$2g < 2;$$

$$0 \leq g < 1;$$

$$g = 0$$

Dessa forma, como o número de alças é nulo, a superfície será homeomorfa a esfera, $S \approx S^2$

Aplicação 5.4.2. *Seja S uma superfície orientável com curvatura não-positiva. Então, duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um mesmo ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S .*

Para mostrarmos tal fato, considere que o contrário seja verdade, ou seja, que γ_1 e γ_2 se encontraram novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituíram a fronteira de uma região simples R de S . Assim, vale o corolário 5.3.1

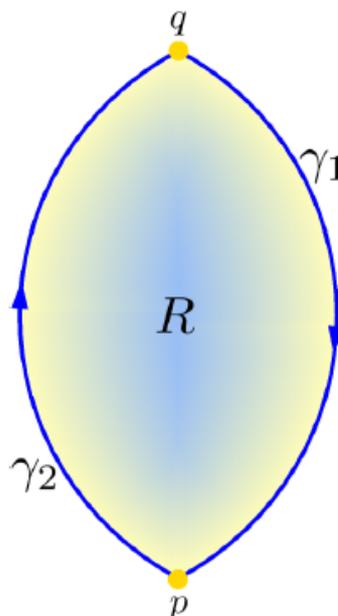
$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

Como a fronteira de R são curvas geodésicas, a primeira integral é nula, restando

$$\int \int_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos externos dos vértices p e q .

Figura 31 – Região R formada por γ_1 e γ_2 .



Fonte: [3, p.331]

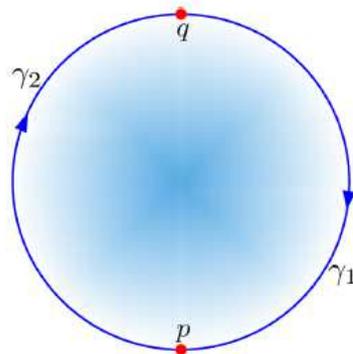
Temos que $\theta_i < \pi, i = 1, 2$, caso contrário, as curvas seriam tangentes e não formariam a fronteira de nenhuma região, já que, dado um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_p S, w \neq 0$, existe um ϵ e uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = w$, ou seja, elas seriam iguais. Temos também, que $K \leq 0$, logo

$$\int \int_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$$

Uma contradição, já que assumimos R uma região simples. Assim, concluímos que R não pode ser uma região simples.

Dessa forma, não existe uma geodésica simples e fechada que seja fronteira de uma região simples de S , caso S tenha curvatura não-positiva.

Figura 32 – Geodésica simples e fechada formando uma região R



Fonte:[3, p.332]

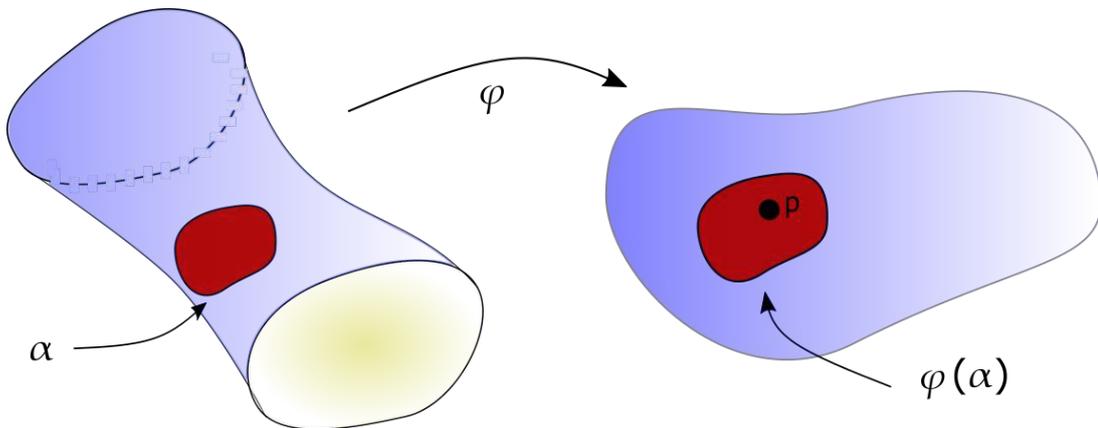
Aplicação 5.4.3. *Seja S uma superfície regular homeomorfa a um cilindro com curvatura Gaussiana $K < 0$. Então, S tem no máximo uma geodésica fechada e simples.*

Como S é homeomorfa a um cilindro, existe um homeomorfismo

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$$

Suponhamos que S contém uma geodésica fechada e simples α . Então, $\varphi(\alpha)$ será o bordo de uma região simples em \mathbb{R}^2 que contém p em seu interior. Como $K < 0$, pela aplicação (5.4.2), α não pode ser o bordo de uma região simples; dessa forma, $\varphi(\alpha)$ tem que ser o bordo de uma região do plano que contém o ponto p em seu interior.

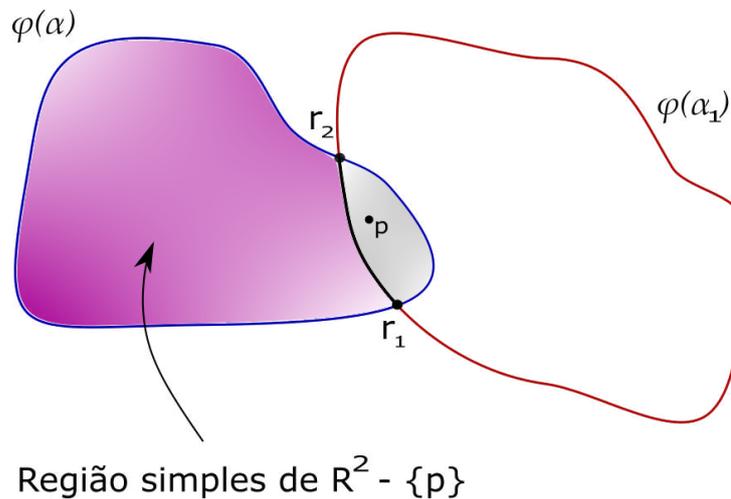
Figura 33 – Imagem da geodésica α pelo homeomorfismo φ



Fonte: Elaborada pela autora

Suponhamos agora que S contenha outra geodésica simples fechada α_1 . A imagem da geodésica $\varphi(\alpha_1)$ também contém o ponto P em seu interior já que α_1 não pode ser a fronteira de uma região simples. Podemos afirmar que α e α_1 não se intersectam. Caso contrário, os arcos $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\alpha_1)$ entre dois pontos consecutivos da interseção, r_1 e r_2 , seriam a fronteira de uma região simples em $\mathbb{R}^2 - \{p\}$.

Figura 34 – Região simples de $\mathbb{R}^2 - \{p\}$

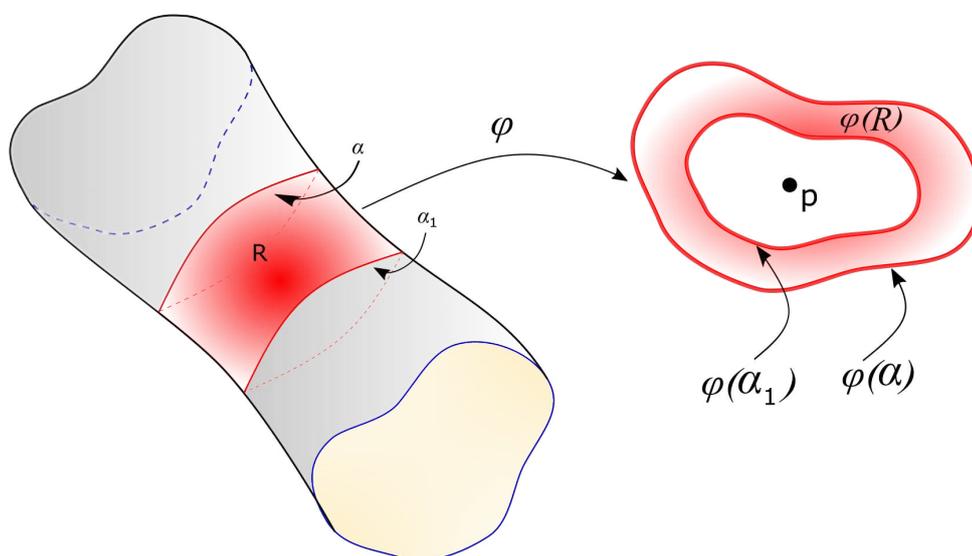


Fonte: Elaborada pela autora

Como temos um homeomorfismo entre S e $\mathbb{R}^2 - \{p\}$, a região simples sem o ponto p em seu interior, formada na imagem acima, teria como pré-imagem em S uma região simples formada por arcos de geodésicas, uma contradição pela aplicação 5.4.2 já que $K < 0$.

Suponhamos agora que as duas geodésicas simples e fechadas estejam em S de modo que não se intersectam. Veja a Figura 35.

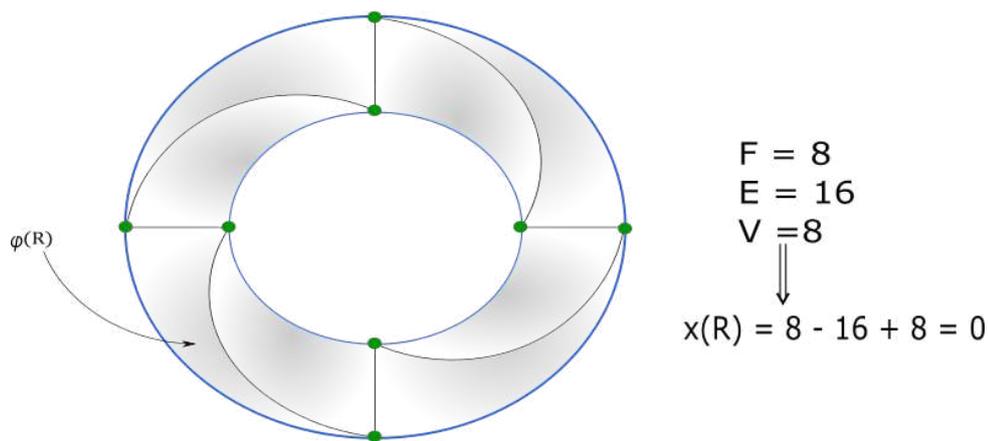
Figura 35 – R sendo homeomorfa a um anel



Fonte: Elaborada pela autora

Como a região R , formada entre as duas geodésicas, é homeomorfa a um anel, teremos $\chi(R) = 0$. Observe uma triangulação do anel

Figura 36 – Triangulação de um anel



Fonte: Elaborada pela autora

Assim,

$$\int \int_R K d\sigma = 2\pi\chi(S) = 0,$$

resultando em uma contradição, já que $K < 0$.

Logo, existe no máximo uma geodésica simples e fechada.

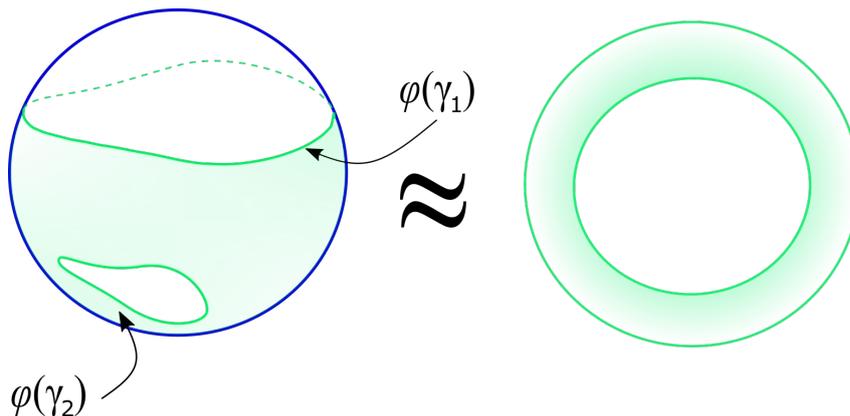
Aplicação 5.4.4. *Se existem duas geodésicas simples e fechadas γ_1 e γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, então γ_1 e γ_2 se intersectam.*

Como S é compacta e tem $K > 0$, então pela aplicação 5.4.1, S é homeomorfa à S^2 , e assim, existe um homeomorfismo φ entre $S \rightarrow S^2$

Suponhamos que S possui duas geodésicas simples e fechadas γ_1 e γ_2 que não se intersectam. Então $\varphi(\gamma_1)$ e $\varphi(\gamma_2)$ são duas curvas regulares, fechadas e simples na esfera que não se intersectam.

Considere R a região delimitada por $\varphi(\gamma_1)$ e $\varphi(\gamma_2)$. Como R é homeomorfa a um anel, $\chi(R) = 0$.

Figura 37 – R homeomorfa a um anel



Fonte: Elaborada pela autora

Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\int \int_R K d\sigma = 2\pi\chi(S) = 0.$$

Uma contradição, já que $K > 0$.

Aplicação 5.4.5. *Considere T um triângulo geodésico (triângulo cujos lados são arcos de geodésicas) em uma superfície orientada S . Sejam $\theta_i, i = 1, 2, 3$ os ângulos externos de T e $\varphi_i = \pi - \theta_i, i = 1, 2, 3$ os ângulos internos de T . O teorema de Gauss-Bonnet afirma que*

$$\int \int_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi;$$

$$\int \int_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i);$$

$$\int \int_T K d\sigma = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i.$$

Com isso, podemos fazer algumas observações à respeito da soma dos ângulos internos.

A soma $\sum_{i=1}^3 \varphi_i$ é

- Igual a π se $K = 0$.
- Maior que π se $K > 0$.
- Menor que π se $K < 0$.

Além disto, a diferença $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$, chamada de **excesso angular** de T , é dada precisamente por $\int \int_R K d\sigma$.

Referências

- [1] M. P. Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Holden Day, Rio de Janeiro, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 5, 6, 13, 14, 23 e 27.
- [2] R. F. De Lima. Introdução à geometria diferencial. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2016. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2016/06/Introdução-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf>. Acesso em: 11 de dez. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 74.
- [3] K. Frensel and J. Delgado. *Notas de Geometria Diferencial*. UFF, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 36, 81, 83 e 84.
- [4] H. Hopf. Über die drehung der tangenten und sehnen ebener kurven. *Compositio Mathematica*, 1935. Disponível em:<<https://acesse.dev/L5llo>>. Acesso em: 8 de dez. 2019. Citado na página 63.
- [5] I. S. Lars V. Ahlfors. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960. Citado na página 71.
- [6] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science Business Media, 2006. Disponível em: <<https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/leeriemm.pdf>>. Acesso em: 18 de fev. 2020. Citado na página 63.
- [7] C. I. Rodrigues, E. Q. F. Rezende, and M. L. B. Queiroz. Guia do professor - experimento - cortar cubos. *Matemática Multimídia*, SD. Disponível em: <<https://encurtador.com.br/qAFGH>>. Acesso em: 8 de dez. 2019. Citado na página 73.
- [8] M. A. Vilches. *Topologia geral*. 2012. Citado na página 73.