UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RONALDO ANTÔNIO LUIZ SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS. MÉTODOS DE SOLUÇÕES E APLICAÇÕES

Belo Horizonte
2016

RONALDO ANTÔNIO LUIZ SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS. MÉTODOS DE SOLUÇÕES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao programa de "PÓS GRADUAÇÃO" em MATEMÁTICA da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de especialista em Matemática para Professores.
Área de concentração: Cálculo

Orientador: Heleno da Silva Cunha

Belo Horizonte

2016

Silva, Ronaldo Antônio Luiz.

S586e Equações diferenciais ordinárias: [recurso eletrônico] métodos de soluções e aplicações / Ronaldo Antônio Luiz Silva. – 2016.
1 recurso online (44 f. il.) : pdf.

Orientador: Heleno da Silva Cunha.
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.44.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. I. Cunha, Heleno da Silva . II.Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

ATA DA 182ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELO ALUNO RONALDO ANTÔNIO LUIZ SILVA.

Aos sete dias do mês de dezembro de 2016, às 13h0, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **Ronaldo Antônio Luiz Silva**, intitulada: *"Equações Diferenciais Ordinárias. Métodos de soluções e aplicações"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, com ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Heleno da Silva Cunha, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da Comissão Examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado **Aprovado**, por unanimidade, com nota 60 e conceito D. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Senhor Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 07 de dezembro de 2016.

Heleno da Silva Cunha

Prof. Heleno da Silva Cunha
Orientador

Prof. André Gimenez Bueno
Examinador

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus por ter me mantido na trilha certa durante este projeto de pesquisa com saúde e forças para chegar até o final.

Sou grato à minha família pelo apoio que sempre me deram durante toda a minha vida.

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador pelo incentivo e pela dedicação do seu escasso tempo ao meu projeto de pesquisa.

Também quero agradecer à Universidade Federal de Minas Gerais e a todos os professores do meu curso pela elevada qualidade do ensino oferecido.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) explora a teoria e aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), concentrando-se nos métodos de solução e nas diversas áreas em que essas equações são aplicadas. As EDOs são ferramentas matemáticas essenciais na modelagem de fenômenos dinâmicos presentes em diversos campos científicos.

Iniciamos com uma análise das propriedades fundamentais das EDOs, incluindo conceitos como ordem, grau e condições iniciais. Em seguida, são apresentados métodos analíticos de resolução, destacando-se a separação de variáveis, substituição e linearização, com exemplos elucidativos para melhor compreensão.

Além dos métodos analíticos, o trabalho aborda os métodos numéricos utilizados na resolução de EDOs, como o Método de Euler, Método de Runge-Kutta e Método de Adams-Bashforth, enfatizando a importância de escolher a abordagem mais adequada conforme o contexto.

A aplicação prática das EDOs é explorada em diversos campos, tais como física, biologia, engenharia e economia. Exemplos concretos demonstram como as EDOs são empregadas na modelagem de fenômenos naturais, sistemas dinâmicos e processos econômicos, evidenciando sua relevância em cenários do mundo real.

No decorrer do trabalho, são discutidas as limitações e desafios encontrados na resolução de EDOs, proporcionando uma visão crítica sobre as abordagens utilizadas. Ao final, são apresentadas conclusões que ressaltam a importância contínua do estudo das EDOs, não apenas como ferramentas matemáticas, mas como instrumentos essenciais na compreensão e solução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento. Este TCC visa contribuir para uma compreensão aprofundada das EDOs e promover sua aplicação efetiva em contextos acadêmicos e práticos.

Palavra-chave: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), concentrando-se nos métodos de solução

SUMMARY

This course completion work (TCC) explores the theory and application of Ordinary Differential Equations (ODEs), focusing on solution methods and the various areas in which these equations are applied. ODEs are essential mathematical tools for modeling dynamic phenomena present in various scientific fields.

We begin with an analysis of the fundamental properties of ODEs, including concepts such as order, degree and initial conditions. Next, analytical resolution methods are presented, highlighting the separation of variables, substitution and linearization, with clarifying examples for better understanding.

In addition to analytical methods, the work addresses numerical methods used to solve ODEs, such as the Euler Method, Runge-Kutta Method and Adams-Bashforth Method, emphasizing the importance of choosing the most appropriate approach depending on the context.

The practical application of ODEs is explored in various fields, such as physics, biology, engineering and economics. Concrete examples demonstrate how ODEs are used in modeling natural phenomena, dynamic systems and economic processes, highlighting their relevance in real-world scenarios.

During the work, the limitations and challenges encountered in resolving ODEs are discussed, providing a critical view of the approaches used. At the end, conclusions are presented that highlight the continued importance of studying ODEs, not only as mathematical tools, but as essential instruments in understanding and solving complex problems in various areas of knowledge. This TCC aims to contribute to an in-depth understanding of ODEs and promote their effective application in academic and practical contexts.

Keyword: Ordinary Differential Equations (ODEs), focusing on solution methods

SUMÁRIO

0.1 Introdução

As equaçoes diferenciais possuem grande importância como conteúdo dos curriculos dos cursos de graduaçao da área de ciências exatas devido ao fato de serem uma aplicaçao direta das disciplinas de cálculo e também por serem utilizados nas mais diversas áreas de conhecimento humano. As equaçoes diferenciais podem ser utilizadas para resolver problemas relativamente simples e cujo tema é comum à maioria das pessoas, como por exemplo juros compostos e crescimento populacional e podem, também, serem utilizadas como uma poderosa ferramenta na soluçao de problemas complexos e elaborados. Para soluçao de problemas mais complexos, geralmente se utiliza uma variedade de ferramentas analíticas e numéricas, bem como resultados gráficos produzidos por computador com objetivo de facilitar as conclusoes sobre o problema em relaçao a variáveis e parâmetros específicos. Atualmente a utilizaçao das equaçoes diferenciais está fortemente apoiada em programas computacionais e este fato dá ao estudante interessado em EDO a opçao de escolher se aprofundar em duas áreas distintas: a resoluçao analítica baseada na análise matemática ou o desenvolvimento de programas em linguagem computacional. As Equaçoes Diferenciais tiveram origem no século XVII através dos matemáticos Izaac Newton (1642 - 1727) e Gettfried Wilhelm Lebniz (1646 - 1716) com a descoberta de técnicas de derivaçao e integraçao. A partir dessas descobertas muitos matemáticos contribuiram para o desenvolvimento dos conceitos das Equaçoes Diferenciais, dos quais podemos destacar Leonhard Euler(1707 - 1783). Segundo boyer, Euler foi, sem dúvida,o maior responsável pelos método de resoluçao usados hoje nos cursos introdutórios sobre equaçoes diferenciais. Neste trabalho apresentamos uma abordagem introdutória e objetiva das Equaçoes Diferenciais, de forma acessível a leitores iniciantes no tema e também para aqueles que já possuem certo conhecimento. Para estudos mais aprofundados sugerimos a leitura de [3]. Dividimos o texto em três capítulos onde no primeiro abordamos as definiçoes preliminares. No segundo capítulo trabalhamos as Equaçoes Diferencias Lineares de Primeira Ordem por meio de definiçoes e exemplos e também abordamos alguns métodos de resoluçao de Equaçoes Diferenciais Nao Lineares de Primeira Ordem. No último capítulo exploramos algumas aplicaçoes que tratam de problemas de Crescimento e Decrescimento, de Epidemias, de Trajetórias Ortogonais, de Temperatura, de Misturas, de Circuitos Elétricos e de Dinâmica Populacional.

0.2 Definições Preliminares

Definição 0.1. *Equações Diferenciais: Uma Equação Diferencial é uma equação que envolve uma função e ao menos uma das suas derivadas.*

Exemplo 0.2. *Se* $y = f(x)$ *ou* $y = f(t)$ *é a função de uma única variável independente então as equações abaixo são exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).*

$(a)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 6y = 0$

$(b)y^{'''} + 3y^{''} + 3y^{'} + y = 0$

$(c)\dfrac{dy}{dt} + \frac{2y}{t} = t^2$

Exemplo 0.3. *Se* $w = f(x, y, z)$ *é uma função das variáveis* x, y *e* z *da variável tempo* t *então temos como exemplos equações diferenciais parciais (EDP).*

$(a)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0$

$(b)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \dfrac{\partial w}{\partial t}$

Definição 0.4. *A ordem de uma equação é a ordem da derivada de maior grau que aparece na equação..*

Definição 0.5. *Equação Linear: É uma equação diferencial de ordem* n *da forma*

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^n) = 0$$

que é linear nas variavéis $y, y^{'}, y^{''}, ..., y^n$.

Exemplo 0.6. *A Equação* $\cos(x)y^{''} + 7y^{'} + (x^2+1)y = 0$ *é linear.*

Defina $L[x] = \cos(x)y^{''} + 7y^{'} + (x^2+1)y = 0$. Assim,

- $L[y_1 + y_2] = \cos(x)(y_1 + y_2)^{''} + 7(y_1 + y_2)^{'} + (x^2+1)(y_1 + y_2) =$

$= \cos(x)(y_1^{''} + y_2^{''}) + 7(y_1^{'} + y_2^{'}) + (x^2+1)(y_1+y_2) =$

$= \cos(x)y_1^{''} + \cos(x)y_2^{''} + 7y_1^{'} + 7y_2^{'} + (x^2+1)(y_1+y_2) =$

$= (\cos(x)y_1^{''} + 7y_1^{'} + (x^2+1)y_1) + (\cos(x)y_2^{''} + 7y_2^{'} + (x^2+1)y_2) = L[y_1+y_2]$

• $L[ky] = \cos(x)(ky)^{''} + 7(ky)^{'} + (x^2+1)(ky) = \cos(x)(ky^{''}) + 7(ky^{'}) + (x^2+1)(ky) =$

$= k(\cos(x)y^{''}) + k7y^{'} + k(x^2+1)y = k[\cos(x)y^{''}) + 7y^{'} + (x^2+1)y] = kL[y]$

(b) A equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ é linear.

(c) A equação $y^{'''} + y^{'} + 2y^2 = 0$ não é linear.

(d) A equação $yy^{''} = sen(x)$ não é linear.

Capítulo 1

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

1.1 Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos das equaç?es diferenciais, tais como, classificaç?o, ordem, linearidade, etc, essa teoria elementar é importante para fundamentar as bases do que será trabalhado nos capítulos seguintes.

Definição 1.1. *A forma geral de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem é*

$$y^{'} + p(x)y = q(x) \tag{1.1}$$

*onde p e q, são funnções contínuas em um intervalo aberto **I**.*

Definição 1.2. *Quando* $q(x) = 0$ *para todo* $x \in I$ *a equação é dita Equação Homogênea.*

Agora vamos ensinar como se resolve uma determinada equação homogênea.

Método de Resolução

vamos buscar $u(x)$ tal que,

$$u(x)y^{'} + u(x)p(x)y = \frac{d}{dx}(u(x)y) \tag{1.2}$$

De 1.2 Sendo $y \neq 0$, temos que

$$u(x)y^{'} + u(x)p(x)y = u(x)y^{'} + u^{'}(x)y \Rightarrow u(x)p(x) = u^{'}(x)$$

logo

$$\frac{u^{'}(x)}{u(x)} = p(x).$$

Note que,

$$\frac{d}{dx}(\ln u(x)) = \frac{u^{'}(x)}{u(x)}$$

Daí

$$\frac{d}{dx}(\ln u(x)) = p(x)$$

então

$$\ln u(x) = \int p(x)dx + c,$$

podemos escolher $c = 0$. Portanto,

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{1.3}$$

A função 2.3 é denominada de fator integrante Encontrando a solução de y

De 1.2 e 1.3 obtemos,

$$\frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x)q(x)$$

e finalmente obtemos,

$$u(x)y = \int u(x)q(x)dx + c$$

portanto

$$\frac{\int u(x)q(x)dx + c}{u(x)}$$

ou ainda,

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c] \tag{1.4}$$

A expressão 1.4 é a solução geral da equação linear 1.1.

• As expressões (2.4) são chamadas de solução geral de (2.1).

• $u(x)$ é fator integrante.

Exemplo 1.3. *Resolva a Equação*

$$ty^{'} + 2y = sen(t), com\ t > 0.$$

Determine como se comporta a solução $y(t)$ quando t $\to \infty$

Solução: Temos que

$$ty^{'} + 2y = sen(t)$$

então

$$y^{'} + \frac{2y}{t} = \frac{sen(t)}{t}$$

Neste caso $p(t) = \frac{2}{t}$, então

$$u(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$$

Assim o fator integrante é $u(t) = t^2$. Desde modo temos,

$$y^{'} + \frac{2y}{t} = \frac{sen(t)}{t}$$

então

$$t^2 y^{'} + 2ty = tsen(t)$$

isto é

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = tsen(t)$$

Portanto

$$t^2 y = \int tsen(t)dt + C$$

Então

$$t^2y = sen(t) - t\cos(t) + C.$$

Logo

$$y(t) = \frac{sen(t) - t\cos(t) + C}{t^2}$$

Observe que $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

1.2 Problema de Valor Inicial

Definição 1.4. *Uma equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

juntamente com a condição inicial $y(x_0) = y_0$, constituem o que chamamos de Problema de Valor Inicial (PVI), a qual geralmente é denotada por

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Exemplo 1.5. *Resolva o seguinte PVI*

$$\begin{cases} ty' + 2y &= sen(t), se\ t > 0, \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 1 \end{cases}$$

Solução vimos no exemplo 0.2 que

$$y(t) = \frac{sen(t) - t\cos(t) + c}{t^2}$$

Queremos agora que, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, isto é,

$$1 = y(\frac{\pi}{2}) = \frac{sen(t) - t\cos(t) + c}{t^2}$$

segue que, $C = (\frac{\pi^2}{4}) - 1$.

Logo a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{sen(t) - t\cos(t) + (\frac{\pi^2}{4} - 1)}{t^2}$$

Teorema 1.6 (Fundamental). *Se as funções $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$ contendo o ponto $x = x_0$ então existe uma única função $y = \phi(x)$ defiida no intervalo que satisfaz 0 PVI,*

$$\begin{cases} y' + p(x)y &= q(x), \forall x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

1.3 Equação de Bernoulli

Definição 1.7. *Uma equação diferencial da forma,*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{1.5}$$

é chamada de Equação de Bernoulli (EB)

Note que se $n = 0$ ou $n = 1$ a equação de Bernoulli torna-se linear e não linear para os demais valores de n

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), n = 0 \\ y' + (p(x) - q(x))y = 0, n = 1 \end{cases}$$

Agora vamos ensinar como se resolve a Equação de Bernoulli através do método de resolução.

Método de Resolução

Considere $n \neq 0$ ou $n \neq 1$. Deste modo, vamos procurar uma solução $y = y(x)$ e $y \neq 0$. Tal que,

$$w = y^{1-n} \tag{1.6}$$

daí,

$$w' = \frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}y' \tag{1.7}$$

Multipliquemos então 1.5 por $(1-n)y^{-n}$. Deste modo temos,

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}p(x)y = (1-n)y^{-n}q(x)y^n$$

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{1-n}p(x) = (1-n)q(x) \tag{1.8}$$

Aplicando 1.6 e 1.7 em 1.8 obtemos

$$w^{'} + (1-n)p(x)w = (1-n)q(x),$$

que é uma equação linear.

a qual é uma Equação DiferenciaL Linear de 1° ordem em w, a qual sabemos resolver. Pela relação em 2.6 encontramos a solução da Equação de Bernoulli.

Exemplo 1.8. *Resolva a equação diferencial*

$$y^{'} + 2x^{-1}y = x^6y^3, 3x > 0$$

Solução: Temos uma EB com $n = 3$. Assim seja $w = y^{-2}$, daí, $w^{'} = -2yy^{-3}$. Segue então que,

$$y^{'} + 2x^{-1}y = x^6y^3$$

Portanto

$$(-2y^{-3})y^{'} + (-2y^{-3})2x^{-1}y = (-2y^{-3})x^6y^3$$

Então

$$-2y^{-3}y^{'} - 4x^{-1}y^{-2} = -2x^6$$

ou seja,

$$-2y^{-3}y^{'} - 4x^{-1}y^{-2} = 2x^6$$

então

$$w^{'} - (\frac{4}{x})w = -2x^6$$

onde $w^{'} - (\frac{4}{x})w = -2x^6$ é uma EDL de 1^o ordem.

- Fator Integrante

$$(*)u(x) = e^{\int(\frac{-4}{x})} dx = e^{-4\ln x} = \frac{1}{x^4};$$

$$(*)w(x) = \frac{\int(\frac{1}{X^4})(-2X^6)dx + c}{(\frac{1}{x^4})} \text{ portanto } w(x) = \frac{-2x^7}{3}$$

Portanto, a solução da EB em estudo é dado por

$$y(t) = \pm\left(\frac{1}{\frac{2}{3}x^7 + cx^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

0 ”Alguns métodos para algumas classes de equações não lineares”Aqui estudaremos métodos de resolução da equação diferencial

$$y_0 = f(x, y)$$

onde f é uma função não linear em relação a y.

1.3.1 Equação de Ricatti

Definição 1.9. *A equação de Ricatti ER é uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \tag{1.9}$$

onde $q_1(x), q_2(x)$ *e* $q_3(x)$ *são funções definidas em um intervalo I.*

Método de Resolução

Suponha que $y_1(x)$ é uma solução da equação ER. Considere,

$$y = y_1 + \frac{1}{\upsilon(x)}, \upsilon(x) \neq 0 \forall (x).$$

temos então que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\upsilon^{'}(x)}{[\upsilon(x)]^2}$$

Substituindo $\frac{dy}{dx}$ e y em ER encontramos,

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{\upsilon^{'}(x)}{[\upsilon(x)]^2} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\upsilon^{'}(x) = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\frac{d\upsilon}{dx}$$

então

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\frac{d\upsilon}{dx} = q_1(x) + q_2(x)[y_1 + \frac{1}{\upsilon(x)} + q_3[y_1 + \frac{1}{\upsilon(x)}]^2$$

portanto

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\frac{d\upsilon}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y_1 + \frac{q_2(x)}{\upsilon(x)} + q_3(x)y_1^2 + \frac{2q_3(x)y_1}{\upsilon(x)} + \frac{q_3(x)}{[\upsilon(x)]^2}$$

logo

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\frac{d\upsilon}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y_1 + q_3y_1^2 + \frac{q_2(x)}{\upsilon(x)} + \frac{2q_3(x)y_1}{\upsilon(x)} + \frac{q_3(x)}{[\upsilon(x)]^2}$$

Sendo y_1 solução de ER, segue que

$$-\frac{1}{[\upsilon(x)]^2}\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{q_2(x)}{\upsilon(x)} + \frac{2q_3(x)y_1}{\upsilon(x)} + \frac{q_3(x)}{[\upsilon(x)]^2}$$

$$-\frac{d\upsilon}{dx} = q_2(x)\upsilon(x) + 2q_3(x)y_1\upsilon(x) + q_3(x)$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} + [q_2(x) + 2q_3(x)y_1]\upsilon(x) + q_3(x) = 0 \tag{1.10}$$

Logo, obtemos em 1.10 uma EDL de 1^a ordem em υ.

Portanto, a solução de uma ER é dada pela relação

$$y = y_1 + \frac{1}{\upsilon(x)}$$

Exemplo 1.10. *Determine a solução da seguinte equação de Ricatti* $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$, *onde* $y_1(x) = x$

Solução: Neste caso temos,

$$q_1 = 1 + x^2, q_2 = -2x$$

e

$$q_3 = 1.$$

Daí

$$\frac{dy}{dx} = -(-2x + 2.1.x)\upsilon(x) - 1$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

Portanto

$$dv = -dx$$

Então

$$v = -x + c.$$

logo,

$$y = x + \frac{1}{c - x}$$

1.3.2 Equações Exatas

Antes de tratamos a definição de Equações Exatas vamos trabalhar com um pequeno exemplo, será importante neste tópico.

Exemplo 1.11. *Seja $w = f(u, v)$ onde $u = g(x) = x$ e $v = h(x) = y$ com $u = f(x)$. Note que*

$$w = f(u, v) = f(x, y) = f(x, f(x))$$

Assim,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Portanto

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot y'$$

Exemplo 1.12. *Vamos resolver a equação abaixo*

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0,$$

Solução: Note que temos

$$(2x + y^2)dx + (2xy)dy = 0 \tag{1.11}$$

Além disso a função, $w = f(x, y) = x^2 + xy^2$ verifica,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + y^2 e \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy$$

Logo a equação 1.11 pode ser escirta como,

$$\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot y' = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = 0$$
$$w = c$$

ou seja,

$$x^2 + xy^2 = c$$

Definição 1.13. *Uma equação diferenciável da forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é denominada exata se existe uma função $f = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \ e \ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Neste caso a solução é dada implicitamente pela função$f(x, y) = c$

Teorema 1.14. *Se as funções $M(x, y)$, $N(x, y)$, $M_y(x, y)$ e $N_x(x, y)$, forem contínuas em um retângulo R, então a equação,*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Exemplo 1.15. *Resolva a equação*

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

Solução: Temos uma equação da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

onde $M(x,y) = e^y$ e $N(x,y) = (xe^y + 2y)$. Além disso,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo a equação $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ é exata. Deste modo existe uma função $f(x,y)$ tal que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y e \frac{\partial f}{\partial y} = (xe^y + 2y)$$

Encontrando a função $f(x,y)$. Temos que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y$$

Então

$$f(x,y) = \int e^y dx = xe^y + h(y) + D,$$

com D constante. Para obter a solução implícita na forma $f(x,y) = C$, obtemos,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + h'(y)$$

que comparando

$$xe^y + h'(y) = xe^y + 2y$$

Portanto

$$h'(y) = 2y$$

Então

$$h(y) = y^2$$

Portanto, concluimos que a Derivada da função com relação a x

$$xe^y + y^2 = f(x,y)$$

$$xe^y + y^2 = C$$

1.3.3 Fator Integrante

Se a equação
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
não é exata, encontraremos uma função $\mu(x,y)$ tal que a equação
$$\mu(x,y)[M(x,y) + N(x,y)y' = 0]$$
se torne exata. A função $\mu(x,y)$ é chamada de fator integrante.

Exemplo 1.16. *Mostre que se $y = f(x)$ é solução de $M(x,y)+N(x,y)y' = 0$, então ele também é solução de $\mu(x,y)M(x,y) + N(x,y)y' = 0$.*

Determinando o fator integrante $\mu(x,y)$. Seja,
$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$
a qual, para ser exata é necessário,
$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial Y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial X},$$
ou seja,
$$(\mu M)y = (\mu N)x,$$

Observação 1.17. *A equação $(\mu M)y = (\mu N)x$, é uma equação diferencial parcial.*

Assim temos,
$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$
Suponha agora que $\mu(x,y) = \mu(x)$, ou seja, que μ dependa somente de x. Então,
$$\mu M_y = \frac{d\mu}{dx}N + \mu N_x, (\mu_y = 0) \Longrightarrow \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu(M_y - N_x)}{N}$$
Segue que,

Exemplo 1.18. *Determine a solução das equações abaixo:*

$$\frac{d\mu}{\mu} = (\frac{M_y - N_x}{N})dx$$

Então

$$\ln \mu = \int (\frac{M_y - N_x}{N})dx$$

Portanto,

$$\mu(x) = e^{\int (\frac{M_y - N_x}{N})} dx \qquad (1.12)$$

Observação 1.19. *(a) Se considerarmos $\mu(x, y) = \mu(y)$, obtemos então,*

$$\mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}} dx \qquad (1.13)$$

(b) Se a equação é exata, então temos $e^0 = 1$, como sendo o fator integrante.

Exemplo 1.20. *Determine a solução das equação $ydx + (x^2y - x)dy = 0$*

Solução: Sendo a equação $ydx + (x^2y - x)dy = 0$. Observe que $M(x, y) = y$ e $N(x, y) = (x^2y - x)$. Portanto $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$. Logo a equação não é exata. Sendo assim vamos calcular o fator integrante μ. Assim,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2 - 2xy}{x^2y - x} = \frac{-2(xy - 1)}{x(xy - 1)}.$$

Então,

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}} dx = e^{-2 \ln x}$$

Pontanto

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Daí, o fator integrante é $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Vamos agora determinar a solução. Sabendo agora que a equação,

$$\frac{y}{x^2}dx + \frac{x^2y - x}{x^2}dy = 0$$

Então

$$\frac{y}{x^2}dx + (y - \frac{1}{x})dy = 0$$

é exata. Deste modo, observe que, $\bullet M(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ então $M_y = \dfrac{1}{x^2}$ $\bullet N(x,y) = (y - \dfrac{1}{x})$ então $N_x = \dfrac{1}{x^2}$ Assim, existe uma função $f(x,y)$ tal que,

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2} e = f_y = (y - \frac{1}{x})$$

Então,

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x^2} dx$$

portanto

$$-\frac{y}{x} + h(y).$$

Logo, derivando $f(x,y)$ com relação a y, e comparando a expressão com há dada, temos,

$$y - \frac{1}{x} = f_y(x,y) = -\frac{y}{x} + h'(y)$$

portanto

$$h'(y) = y$$

então

$$h(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Portanto,

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = C$$

1.3.4 Equação Separável

Definição 1.21. *Uma equação diferenciável é separável se pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad ou \quad g(y)dy = f(x)dx \tag{1.14}$$

Exemplo 1.22. *Determine a solução da seguinte equação* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+2y^2)\cos x}{y}$

Solução:

Observe que,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+2y^2)\cos x}{y}$. Portanto, $(\dfrac{y}{1+2y^2})dy = \cos x dx$ $\int(\dfrac{y}{1+2y^2}) = \int \cos x dx \Longrightarrow (\dfrac{1}{4})\ln|1+2y^2| = senx + c$

Da condição inicial obtemos

$\dfrac{1}{4}\ln|1+2y(0)^2| = sen(0) + c \Longrightarrow (\dfrac{1}{4})\ln|1| = 0 + c \Longrightarrow c = 0.$

Portanto,

$$\ln\left|1+2y^2\right| = 4senx$$

então

$$y = \pm\sqrt{\frac{e^{4senx}-1}{2}}$$

1.3.5 Equação Redutível à forma Separável Equação Homogênea

Definição 1.23. *(Função Homogênea) Uma função $f(x,y)$ é homogênea de grau n se*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1.24. $f(x,y) = x^2 + xy$

Observe que,

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (txty) = t^2x^2 + t^2xy = t^2(x^2+xy) = t^2 f(x,y)$$

logo$f(x,y)$ é homogênea de grau 2.

Exemplo 1.25. $f(x,y) = sen(\frac{y}{x})$

$$f(tx,ty) = sen\left(\frac{ty}{tx}\right) = sen(\frac{y}{x})$$

logo$f(x,y)$ é homogênea de grau 0. Equação Homogênea 1

Definição 1.26. *A equação diferenciável*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.15}$$

é homogênea se as funções M e N são homogêneas de mesmo grau n. A equação 1.15 pode ser escrita da forma,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), f(x,y) = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} \tag{1.16}$$

Observe que $f(x,y)$ é homogênea de grau zero. De fato,

$$f(tx,ty) = \frac{-M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{-t^n M(x,y)}{t^n N(x,y)} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

Importante: Se $f(x,y)$ é homogênea de grau zero, $f(x,y) = f(tx,ty)$, com $t \in \mathbb{R}$. Para $t = \frac{1}{x}$,temos,$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x}) = F = (\frac{y}{x})$ Equação Homogênea 2

Definição 1.27. *A equação diferenciável*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.17}$$

é homogênea se a função depende unicamente da razão $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}$.

Método de Resolução

Se a equação 1.17 é homogênea então,

$$\frac{dy}{dx} = F \tag{1.18}$$

Seja $v = \frac{y}{x}$ então $y = vx$. Daí,

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

Da função 1.13 obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{F(v) - v)}{x} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}$$

Observação 1.28. *Resolvida a equação separável, a solução da equação homogênea é dada por* $v = \frac{y}{x}$

Exemplo 1.29. *Resolva a equação*

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

Solução: Observe que,

$$y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

Sendo $v = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = vx$,entao,

$$y' = x\frac{dv}{dx} + v$$

Deste modo temos que,

$$y' = \frac{x+y}{x} \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} + v = 1 + v \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = dv$$

logo,

$$v = \ln|x| + C,$$

Portanto,

$$y = x\ln|x| + Cx.$$

Capítulo 2

Aplicações

2.0.1 Crescimento e Decrescimento

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

com as condições iniciais

$$y(t0) = y0$$

ocorre em muitas teorias envolvendo crescimento e decrescimento.

Exemplo 14 O einsteinio 235 decai à taxa proporcional à quantidade de nuclideos presentes. Determinar a meia-vida T se o material perder um terço de sua massa em 11, 7 dias.

Solução: Queremos determinar a meia-vida t do material($t_0 =?; Q(t_0) = \frac{Q_0}{2}$). Deste modo sendo a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ, k > 0,$$

vamos separar as variáveis,

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt$$

Daí,

$$\ln|Q| = -kt + C0$$
$$Q(t) = e^{-kt+c0}$$

Portanto
$$Q(t) = Ce^{-kt}.$$

Vamos supor que a quantidade inicial é $Q(0) = Q0$. Então obtemos, $C = Q0$. De onde segue que,
$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}.$$

Lembrando que após 11, 7 dias a quantidade presente é de $\dfrac{2Q_0}{3}$,ou seja,

$$Q(11,7) = \frac{2Q_0}{3},$$

Assim,

$$\frac{2Q_0}{3} = Q_0 e^{-11,7k} \Longrightarrow \frac{2}{3} = e^{-11,7k} \Longrightarrow -11,7k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow k = \frac{-1}{11,7}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow k = -0,0346$$

Assim,
$$Q(t) = Q_0 e^{-0,0346t}.$$

Observe que $Q(t) \longrightarrow 0$,quando $t \longrightarrow \infty$. Vamos agora determinar o tempo para que a substância decaia a metade da quantidade inicial, ou seja, vamos determinar t_0 de modo que $Q(t_0) = \dfrac{Q_0}{2}$. Nesta condições temos,

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0,0346t0} \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,0346t} \Longrightarrow -0,0346t0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow to = \frac{-1}{-0,0346}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow t0 =$$

2.0.2 Epidemia

Exemplo 2.1. *Em uma cidade vamos dividir a população em duas partes;*
- *x: Indivíduos sadíos, mas que podem ser infectados.*

- *y: Indivíduos infectados. Determine o número de dias para que toda a cidade seja infectada, sendo,* $\dfrac{dy}{dt} = kxy$

Solução: Temos que $x + y = 1$,então $x = 1 - y$.Deste modo a equação torna-se,

$$\frac{dy}{dt} = k(1{-}y)y \Longrightarrow \frac{dy}{y(1-y)} = kdt \Longrightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int kdt \Longrightarrow \hookleftarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{(1-y)} = \int kdt \Longrightarrow$$

Assim,

$$\frac{y}{y-1} = Ce^{kt} \Longrightarrow y = Ce^{kt} - Ce^{kt}y \Longrightarrow (1 + Ce^{kt})y = Ce^{kt}.$$

logo,

$$y(t) = \frac{Ce^{kt}}{(1 + Ce^{kt})}$$

Considerando que a quantidade inicial de infectados seja dada por,

$$y(0) = y0$$

E aplicando esta a expressão $\frac{y}{y-1}$, obtemos,

$$C = \frac{y0}{1 - y0}.$$

Dai,

$$y(t) = \frac{\frac{y0}{1-y0}e^{kt}}{\frac{y0}{(1 + 1 - y0e^{kt})}}$$

Multiplicando $y(t) = \frac{\frac{y0}{1-y0}e^{kt}}{\frac{y0}{(1 + 1 - y0e^{kt})}}$ por $\frac{e^{-kt}}{e^{-kt}}$, obtemos,

$$y(t) = \frac{\frac{y0}{1-y0}}{\frac{y0}{(e^{-kt} + 1 - y0)}}$$

ou

$$y(t) = \frac{y0}{y0 + e^{-kt}(1 - y0)}$$

Observe que,$y(t) \longrightarrow 1$quando $t \longrightarrow \infty$

2.0.3 Trajetórias Ortogonais

Uma família de curvas é definida, em geral, por uma equação da forma

$$F(x, y, c) = 0$$

, onde x é a variável independente e y é a variável dependente, para cada $c \in IR$ fixo. Por exemplo, a família de curvas

$$y = cx^2, c > 0$$

, está representada pela função $F(x, y, c) = x^2+(y-c)^2-c^2$,$F(x, y, c) = 0$,que consiste num conjunto de círculos com centro $(0, c)$ e raio c. Dada uma família de curvas é possível determinar a equação diferencial que gera esta família de curvas. vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.2. *Encontre a equação diferencial que tem como solução a família de curvas $y = cx^3$.*

Solução: Derivando a família de curvas em relação a x, obtemos

$$y' = 3cx^2$$

. A equação acima já é uma equação diferencial, mas possui como solução um conjunto que contém estritamente a família de curvas $y = cx^3$. Para evitar isto, eliminamos c que é dado por $c = \frac{y}{x^3}$, obtendo $y' = 3\frac{y}{x}$, que é a equação diferencial que gera a família de curvas $y = cx^3$.

Definição 2.3. *Duas curvas são ortogonais num ponto P_0 se as retas tangentes as curvas no ponto P_0 são ortogonais. Sabemos que duas retas $y = m_0x + b_0 e y = m_1x + b_1$ são ortogonais se o produto de suas inclinações é -1, isto é, $m_0.m_1 = -1$. Na equação diferencial*

$$y' = f(x, y),$$

o valor da função $f(x, y)$ nos dá o valor das inclinações das retas tangentes a curva $y = y(x)$ solução da equação. Portanto, para determinar a família de curvas ortogonais a y basta resolver a equação

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

.

Exemplo 2.4. *Encontre a família de curvas ortogonais à família de curvas dada por $y = ce^x$.*

Solução: Primeiro vamos determinar a equação diferencial que tem como solução a família de curvas acima. Derivando em relação a y, obtemos $y' = ce^x$. Notando que $c = ye^{-x}$, segue que a equação diferencial que gera a família de exponenciais é dada por

$$y' = y$$

. Logo, para encontrar a família de curvas ortogonais à família de exponenciais, devemos resolver a equação diferencial

$$y' = -\frac{1}{y}$$

. Esta equação possui solução dada por

$$y^2 = -2x + c$$

. Portanto, a família de parábolas $y^2 = -2x + c$. é ortogonal à família de exponenciais $y = ce^x$.

2.0.4 Problemas de Temperatura e a Lei de Resfriamento e Aquecimento de Newton

O problema consiste em determinar uma função θ que define a temperatura de um corpo em cada instante de tempo. Para isto, usaremos um princípio físico conhecido como a Lei de Esfriamento ou Aquecimento de Newton. Vejamos esta lei. Lei de Esfriamento e Aquecimento de Newton: A taxa de variação da temperatura da superfície de um objeto é proporcional a diferença de temperatura do objeto com a temperatura do meio ambiente. Se $\theta(t)$ é a temperatura de um objeto no instante de tempo t e T é a temperatura do meio ambiente, então a Lei de Esfriamento e Aquecimento de Newton nos diz que

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T), \tag{2.1}$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade que depende do material de que é feito o objeto.

Observação 2.5. *: (a) O sinal negativo que aparece no segundo membro da Eq. (2.38) é devido ao fato de que o calor sempre flui da parte quente para a parte fria. Isto é, se o objeto tem temperatura maior que o meio ambiente, $\theta - T > 0$ e a temperatura θ diminui até chegar ao ponto de equilíbrio térmico, isto é, a temperatura é uma função decrescente em relação ao tempo t. Com isso, $\frac{d\theta}{dt} < 0$ e o sinal negativo é necessário. Analogamente, se $\theta - T < 0$, então a temperatura θ deve aumentar, tornando assim uma função crescente em relação ao tempo t. Com isso, $\dfrac{d\theta}{dt} > 0$ e o sinal negativo novamente é necessário. (b) A Eq. (2.38) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser resolvida utilizando o método de variáveis separáveis. É fácil ver que a solução é dada por*

$$\theta t = T + Ce^{-kt} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.6. *Suponha que uma xícara de chá está a uma temperatura inicial de $95°C$ e um minuto depois a temperatura baixou para $70°C$num quarto onde a temperatura é de $25°C$. Determine a função que representa a temperatura em cada instante de tempo e o tempo que demorará a xícara de chá para atingir a temperatura de $30°C$.*

Solução: Das condições do problema sabemos que o chá está inicialmente a temperatura de $95°C$, isto é, $\theta(0) = 95°C$. A temperatura do quarto é de $25°C$, isto é, $T = 25°C$. E um minuto depois a temperatura baixou para $70°C$, então, $\theta(1) = 70°C$. Neste caso a função que define θ em função de t é dada por

$$\theta t = 25 + Ce^{-kt}$$

. Usando que $\theta(0) = 95°C$, encontramos $C = 70°C$. Portanto, teremos

$$\theta t = 25 + 70e^{-kt}$$

. Usando que $\theta(1) = 70°C$, teremos

$$70 = 25 + 70e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14} \Rightarrow k = \ln\frac{9}{14}$$

. Logo, a função que define θ em função de t é dada por

$$\theta(t) = 25 + 70e^{-\ln(\frac{14}{9})t}$$

. Vamos agora determinar um tempo t_0 no qual a xícara atingirá $30°C$. Temos

$$30 = 25 + 70e^{-\ln(\frac{14}{9})t0)} \Rightarrow e^{-\ln(\frac{14}{9})t0} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14} \Rightarrow t_0 = \frac{\ln(14)}{\ln(\frac{14}{9})} \simeq 5,97$$

. Logo, a xícara atingirá $30°C$ depois de aproximadamente 6 minutos.

2.0.5 Misturas

Exemplo 2.7. *Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Vamos determinar qual a concentração no tanque ao fim de 50 minutos, sabendo que o problema é modelado da forma,* $\frac{dQ}{dt} = -4\frac{Q}{100+2t}Q(0) = 30$

Solução: Observe que, $\frac{dQ}{dt} + 4\frac{Q}{100+2t} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -4\frac{dt}{100+2t} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = \int -4\frac{dt}{100+2t} \Rightarrow \ln|Q| = -2\ln 100 + 2t + C_0 \Rightarrow \ln|Q| = \ln(100+2t)^{-2}$
Então, a quantidade de sal é dada por,

$$Q(t) = \frac{C}{(100+2t)^2}$$

Sendo $Q(0) = 30$, então,

$$Q(0) = \frac{C}{(100+2t)^2} \Rightarrow 30 = \frac{C}{(100)^2} \Rightarrow C = 30 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^5$$

Assim,

$$Q(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}$$

Sabendo que, a concentração $c(t)$ é o quociente da quantidade de sal pelo volume que é igual a $V(t) = 100 + 2t$, ou seja,

$$C(t) = \frac{Qt}{Vt} \Rightarrow C(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}\frac{(100+2t)}{1} \Rightarrow C(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^3}$$

Logo, quando $t = 50$, obtemos

$$C(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2 \cdot 50)^3} = C(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(200)^3} = \frac{3 \cdot 10^5}{(8 \cdot 10)^6} = 0,0375 gramas/litro$$

2.0.6 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Uma classe importante de equações de primeira ordem consiste naquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas autônomas e tem a forma

$$\frac{dY}{dT} = f(y) \tag{2.3}$$

Discutimos essas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie dada, um assunto, importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global. A Equação(2.26) é separável e pode ser resolvida facilmente. Nosso objetivo aqui é obter informações qualitativas sobre a equação diferencial. Os conceitos de estabilidade e instabilidade de soluções destas equações tem grande importância nesse contexto. Crescimento Exponencial Se $y = \varphi(t)$ é a quantidade de uma população dada no instante t, a hipótese mais simples sobre a variação da população é que a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{2.4}$$

onde a constante de proporcionalidade k é chamada taxa de declínio se $k < 0$ e taxa de crescimento se $k > 0$. Vamos supor aqui que $k > 0$, ou seja, que a população está sempre crescendo. Resolvendo a Equação (2.27) sujeita a condição inicial

$$y(t_(0)) = y(0), \tag{2.5}$$

obtemos

$$y(t) = y_(0)e^{kt}. \tag{2.6}$$

Logo o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (2.27)-(2.28) com $k > 0$, prevê que a população crescerá exponencialmente sempre para diversos valores de $y0$. Sob condições ideais, observou-se que a Equação (2.29) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos, por um período limitado de tempo. No entanto, é claro que tais condições ideais não podem perdurar indefinidamente, alguma hora as limitações sobre o espaço, o suprimento de comida ou outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e acabará inibindo o crescimento exponencial.

Exemplo 2.8. *A taxa de crescimento da população de uma cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980 era de 75.000, qual a população esperada em 2010?*

Solução: Seja $p(t)$ a função que representa a população em cada instante de tempo t. Neste caso, $p(0) = 50.000$ e $p(t) = 50.000e^{kt}$. Como $p(30) = 75.000$, segue que $K = \dfrac{\ln(\frac{3}{2})}{30}$.Logo

$$p(t) = 50.000e^{\frac{\ln(\frac{3}{2})}{30}t}$$

. Em 2010, $t = 60$, logo $p(60) = 112.500$ é a população em 2010. Crescimento Limitado Suponhamos agora que uma quantidade cresça segundo uma taxa proporcional à diferença entre um número $A > 0$ fixo e seu tamanho. Se $y = \varphi(t)$ é a quantidade presente em cada instante de tempo t, então

$$\frac{d}{dy} = k(A - y), \tag{2.7}$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade e $y < A$, para todo $t \geq 0$. A Equação (2.30) é separável e tem solução

$$y(t) = A - Be^{-kt}, \tag{2.8}$$

onde A, B e k são constantes positivas.

Observação 2.9. *:Notemos que* $\lim_{t\to+\infty} y(t) = A$*, isto é,* $y = A$ *é assíntota horizontal para o gráfico de* $y = \varphi(t)$*. O gráfico da função* $y(t) = A - Be^{-kt}$ *é denominado curva de aprendizagem. O nome é apropriado quando y(t) representa a competência segundo a qual uma pessoa realiza uma tarefa. Ao iniciar uma atividade, a competência de um indivíduo aumenta rapidamente e depois mais vagarosamente, já que uma experiência adicional tem pouco efeito na habilidade de realizar a tarefa.*

Exemplo 2.10. *Um operário recém-contratado realiza uma tarefa com mais eficiência a cada dia que passa. Se y unidades forem produzidas por dia, após t dias no trabalho, então*

$$\frac{dy}{dt} = k(80 - y),$$

onde $k > 0$ *e* $y < 80$*, para todo* $t \geq 0$*. O empregado produz 20 unidades no promeiro dia de trabalho e 50 unidades por dia após 10 dias de trabalho. a) Quantas unidades por dia ele estará produzindo após 30 dias de trabalho? b) Mostre que após 60 dias ele estará produzindo apenas 1 unidade a menos do que seu potencial completo.*

Solução: Resolvendo a equação diferencial encontramos

$$y(t) = 80 - Be^{-kt}.$$

Sendo $y(0) = 20$, tem-se que $B = 60$. Por outro lado, sendo $y(10) = 50$, tem-se que $k = \frac{\ln 2}{10}$. Desta forma, teremos

$$y(t) = 80 - 60e^{\frac{\ln 2}{10}t}.$$

a) y(30) = 72, 5.

b) y(60) = 79, 0625.

O empregado estará produzindo 79 unidades por dia que é uma unidade a menos do potencial máximo que é 80. De fato,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}(80 - 60e^{\frac{\ln 2}{10}t}) = 80.$$

Crescimento Logístico Considere agora a Equação (2.26) na forma

$$\frac{d}{dy} = f(y)y. \tag{2.9}$$

Note que estamos substituindo k na Equação (2.27) pela função $h(y)$. Queremos escolher $h(y)$ de modo que $h(y) \simeq k > 0$ quando y for pequeno,

$h(y)$ decresça quando $y$crescer e $h(y) < 0$ quando $y$for suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a é, também, uma constante positiva. Logo escrevemos (2.32) na forma

$$\frac{d}{dy} = (r - ay)y. \tag{2.10}$$

A Equação (2.33) é conhecida como a equação de Verhuest ou equação logística. Muitas vezes é conveniente escrever a Equação (2.33) na forma equivalente

$$\frac{d}{dy} = r(1 - \frac{y}{k})y. \tag{2.11}$$

onde $K = \dfrac{r}{a}$. A constante r é chamada taxa de crescimento intrínseco, isto é, a taxa de cescimento na ausência de qualquer fator limitador.

Observação 2.11. *: (a) Na busca de soluções para a Equação (2.34), primeiro procuramos soluções do tipo mais simples possível, isto é, funções constantes. Para tais soluções,$y' = 0$. Logo qualquer solução constante da Equação (2.34) deve satisfazer*

$$(1 - \frac{y}{k})y = 0$$

Logo, as soluções constantes são $y = \varphi 1(t) = 0$ e $y = \varphi 2(t) = K$. Essas soluções são chamadas de soluções de equilíbrio da Equação (2.34). O nome é devido ao fato que não há variação no valor de y quando t cresce. De modo análogo, as soluções de equilíbrio da equação autônoma mais geral (2.26) são determinadas fazendo $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ também são chamados de pontos críticos.

(b) Para visualisar outras soluções da Equação (2.34) e esboçar seus gráficos, vamos primeiro desenhar o gráfico de $f(y)$ em função de y. No caso da Equação (2.34), $f(y) = r(1 - \frac{y}{k})y$, de modo que o gráfico é uma parábola com vértice no ponto $(K/2, rK/4)$ e cujos pontos críticos são $(0, 0)$ e $(K, 0)$ que são os pontos de intersecção com os eixos dos y. Se $0 < y < K$, então $\frac{dy}{dt} > 0$, isto é, y é crescente em t nesse intervalo. Se $y > K$, então $\frac{dy}{dt} < 0$ e, neste caso, y é uma função decrescente de t nesse intervalo.

(c) O eixo dos y é muitas vezes chamado de reta de fase e é representado por uma reta vertical. Os pontos em $y = 0$ e $y = K$ são os pontos críticos ou soluções de equilíbrio. Quando y está próximo de 0 ou de K, então o coeficiente angular $f(y)$ fica próximo de zero, de modo que as curvas soluções são quase horizontais. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de y se afasta de 0 ou de K.

(d) Para esboçar os gráficos das soluções da Eq (2.34) no plano ty, começamos com as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = K$. Depois desenhamos outras curvas crescentes quando $0 < y < K$ e decrescente quando $y > K$ e que se aproximam de uma curva horizontal quando y se aproxima de um dos valores 0 ou K. Devido ao teorema de existência e unicidade, apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano ty. Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \longrightarrow +\infty$, elas não podem interseptá-las em um instante finito.

(e) Derivando a Equação (2.26) em relação a t, obtemos

$$\frac{d^{2y}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(f(y)) = f'(y) \cdot y' = f'(y) \cdot f(y).$$

Logo, o gráfico de y é convexo quando $y'' > 0$, isto é, quando f' e f tem o mesmo sinal. Analogamente, o gráfico de y é côncavo quando $y'' < 0$, isto é, quando f' e f tem sinais contrários. Os pontos de inflexão ocorre quando $f'(y) = 0$. No caso da Equação (2.34), as soluções são convexas para $0 < y < \frac{k}{2}$, onde f é positiva e crescente, de modo que ambas as funções f e f' são positivas. As soluções também são convexas para $y > K$, onde f é negativa e decrescente e f e f' são ambas negativas. Para $\frac{k}{2} < y < K$, as soluções são côncavas, já que f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. Existe um ponto de inflexão sempre que o gráfico de y em função de t cruza a reta $y = K/2$.

(f) Finalmente, note que K é uma cota superior que é aproximada, mas nunca atingida, para populações crescentes começando abaixo desse valor. É natural se referir a K como sendo o nível de saturação ou a capacidade ambiental de sustentação, para a espécie dada.

(g) As soluções da equação não-linear (2.34) são surprendentemente

diferentes das da equação linear, pelo menos para valores grandes de t. Independentemente do valor de K, isto é, não interessa quão grande seja a parcela não-linear da Equação (2.34), as soluções tendem a um valor finito quando t $\longrightarrow \infty$, *enquanto que as soluções do problema linear cresce exponencialmente sem limite quando t* $\longrightarrow \infty$. *Assim, mesmo uma minúscula parcela não-linear na equaçaõ diferencial tem um efeito decisivo na solução para valores grandes de t*

(h) Em muitas situações é suficiente ter informações qualitativas sobre a solução $y = \varphi(t)$ *da Equação (2.34). Essa informação foi obtida a partir do gráfico de f(y) e mfunção de y e sem resolver a equação. Mas se quisermos ter uma descrição mais detalhada sobre o crescimento logístico, por exemplo, se quisermos saber o valor da população em algum instante particular, então precisamos resolver a Equação (2.34) sujeita a condição inicial*

$$y(0) = y0. \tag{2.12}$$

Para isto, consideremos $y \neq 0$ *e* $y \neq K$. *Separando as variáveis, temos*

$$\frac{1}{(1-\frac{y}{k})y}dy = rdt$$

Integrando, obtemos que

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{k}\right| = rt + c, \tag{2.13}$$

onde c é uma constante arbitrária a ser determinada pela condição inicial (2.35). Se $0 < y_0 < K$, *então teremos também* $0 < y < K$ *e escrevemos (2.38) na forma*

$$\frac{1}{(1-\frac{y}{k})y} = ce^{rt}$$

onde $C = e^c$. *Usando a condiçaõ inicial segue que* $C = \frac{y_0}{(1-\frac{y_0}{k})}$. *Logo a* *solução é dada por*

$$\frac{y}{(1-\frac{y}{k})} = \frac{y_0}{1-\dfrac{y_0}{k}}e^{rt},$$

implicitamente. Resolvendo para y, encontramos

$$y = \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}} \tag{2.14}$$

Se $y_0 > K$*, então a abordagem da Equação (2.38) é um pouco diferente mas a solução é também dada por (2.39). Notemos que a Equação (2.39) também contém as soluções de equilíbrio* $y = \varphi 1(t) = 0$ *e* $y = \varphi 2(t) = K$*, correspondente as condições iniciais* $y_0 = 0$ *e* $y_0 = K$*, respectivamente.*

(i) Se $y_0 = 0$ *tem-se da Equação (2.39) que* $y(t) = K$ *para todo* $t \geq 0$*. Se* $y_0 > 0$*, então*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{y_0 k}{y_0} = k.$$

Portanto a solução tende à solução de equilíbrio $y = \varphi 2(t) = K$ *assintoticamente quando* $t \longrightarrow \infty$*. Neste caso, dizemos que a solução constante* $\varphi 2(t) = K$ *é uma solução assintoticamente estável da Equação(2.34), ou que o ponto* $y = K$ *é um ponto de equilíbrio, ou crítico, assintoticamente estável. Após um longo tempo, a população fica próxima ao nível de saturação K, independente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo. Outras soluções tendem à solução de equilíbrio mais rapidamente quando r aumenta. Por outro lado, a situação para a solução de equilíbrio* $y = \varphi 1(t) = 0$ *é bem diferente. Mesmo soluções que começam bem próximas de zero crescem quando t cresce e, como vimos, tendem a K quando* $t \longrightarrow \infty$*. Dizemos que* $\varphi 1(t) = 0$ *é uma solução de equilíbrio instável ou que* $y = 0$ *é um ponto de equilíbrio, ou crítico, instável. Isso significa que a única maneira de garantir que a solução permaneça nula é certificar-se de que seu valor inicial é exatamente iqual a zero. Concluimos que* $y = K$ *é* *um ponto de equilíbrio, ou crítico, assintoticamente estável. Isto quer dizer que após um longo tempo, a população fica próxima ao nível de saturação K independente do tamanho da população inicial, desde que seja positivo. Outras soluções tendem a solução de equilíbrio mais rapidamente quando r aumenta.*

Um Limiar Crítico

Considere agora a Equação (2.26) na forma

$$\frac{d}{dy} = -r(1 - \frac{y}{T})y, \tag{2.15}$$

com $Y(0) = y_0$, obtemos um crescimento para a solução $y(t)$ com um limiar crítico T, onde abaixo do limiar crítico T não existe crescimento e acima desse limiar a solução cresce indefinidamente. Isto significa que uma determinada população que se encontra abaixo do limiar crítico tende a se desaparecer, enquanto que um população que se encontra acima desse limiar, tende a crescer indefinidamente sem limitação. As populações de algumas espécies exibem o fenômeno de limiar. Se está presente uma quantidade muito pequena, a espécie não se propaga com sucesso e a população torna-se extinta. No entanto, se for possível juntar uma população maior do que o limiar crítico, então ocorre um crescimento ainda maior. Como é claro que uma população não pode se tornar ilimitadamente, a Equação (2.38) deve ser modificada, finalmente, para se levar isso em consideração.

Crescimento Logístico com um Limiar

O modelo de limiar (2.38) precisa ser modificado de modo que não ocorra o crescimento ilimitado quando a solução está acima do limiar T. A maneira mais simples de fazer isso é introduzir um outro fator que tem o efeito de tornar dy/dt negativo quando y for grande. Assim, consideramos

$$\frac{d}{dy} = -r(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{k})y, \tag{2.16}$$

onde $r > 0$ e $0 < T < K$. Estudando a equação do problema (2.39) sobre a condição inicial $Y(0) = y_0$, obtemos que se y começa abaixo do limiar T, então y decresce até chegar à extinção. Por outro lado, se y começa acima do limiar T, então y acaba se aproximando da capacidade de sustentação K. Um modelo desse tipo geral descreve, aparentemente, a população de pombos selvagens que existia nos Estados Unidos em números imensos até o final do século XIX. Foi muito caçado para comida e por esporte e, em consequência, seus números estavam drasticamente reduzidos na década de 1880. Infelismente, esses pombos selvagens só podiam se reproduzir com sucesso quando presentes em grandes concentrações, correspondendo a um limiar relativamente grande T. Embora ainda existisse um número relativamente grande de pássaros individuais ao final da década de 1880, não havia um número suficiente concentrado em nenhum lugar que permitisse reprodução com suceso e a população diminuiu rapidamente até a extinção. O último sobrevivente morreu em 1914. O declínio desenfreado na população de pombos selvagens de números imensos até a extinção em pouco mais de três décadas foi um dos primeiros fatores na preocupação sobre conservação naquele país.

REFERÊNCIA

[1] D. G. Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 4^a edição, 2003.

[2] W. E. Boyce and R. C. Di Prima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* LTC, Rio de Janeiro.

[3] J. Santos Reginaldo. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* http://www.mat.ufmg.br/ regi/.

[4] J. Biezuner Rodney. *Notas de Aula Equações Diferenciais Parciais I/II.* Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas/UFMG, 2010.