David Teixeira Martins

Uma Representação da Álgebra de Lie de Matrizes via Operadores de Vértice

Belo Horizonte

2022

David Teixeira Martins

Uma Representação da Álgebra de Lie de Matrizes via Operadores de Vértice

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Contiero

Belo Horizonte

2022

Martins, David Teixeira

M 387u Uma representação da álgebra de Lie de matrizes via operadores de vértice [recurso eletrônico] / David Teixeira Martins. – 2022.
1 recurso online (72 f. il, color.): pdf.

Orientador: André Luis Contiero.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 71-72

1. Matemática – Teses. 2. Operadores de vértice – Teses . 3. Lie, Álgebra de– Teses. I. Contiero,André Luis. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Uma Representação da Álgebra de Lie de Matrizes via Operadores de Vértices

DAVID TEIXEIRA MARTINS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. André Luís Contiero
UFMG

Profa. Delara Behzad
Aalto University, Finland

Prof. Letterio Gatto
Politecnico di Torino, Italy

Prof. Lucas Henrique Calixto
UFMG

Prof. Parham Salehyan
UNESP

Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG

Belo Horizonte, 17 de agosto de 2022.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor André Contiero, e aos professores Delara Behzad, Letterio Gatto, Parham Salehyan e Renato Vidal Martins pelas valiosas sugestões e correções ao presente texto, bem como os seus inúmeros ensinamentos que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Daniel Martins e Elza Sobral, que sempre me apoiaram na dedicação aos estudos. Agradeço de modo muito especial aos amigos que tive o privilégio de conhecer e que de diversas formas contribuíram de modo muito significativo com a minha jornada acadêmica: Aislan Leal, Bruno Rodrigues, Cláudia Rabelo, Eduardo Cardenas, Erinaldo Borges, Gabriel Fagundes, Joilson Porto, Jonas Jr., Leonardo Abath, Nemuel Lima, Paulo Andrade e aos colegas do curso de pós-graduação em Matemática.

À CAPES pelo suporte financeiro oferecido durante o período de pesquisa.

Resumo

O anel polinomial $B_r := \mathbb{Q}[e_1, \ldots, e_r]$ em r indeterminadas é uma representação da álgebra de Lie de todos os endomorfismos de $\mathbb{Q}[X]$ anulando-se em todo X^j, exceto para um número finito de valores de j. Determinamos a série de potências estrutural formal da B_r-representação de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. Esta é uma série de potências formal em $r+2$ indeterminadas codificando as imagens de todos os elementos básicos de B_r sob a ação da função geradora dos endomorfismos elementares de $\mathbb{Q}[X]$. A expressão obtida implica (e melhora) uma fórmula por Gatto & Salehyan, que apenas computa as funções geradoras para as imagens de elementos básicos específicos. Por uma questão de completude, construímos a série de potências estrutural formal da $B = B_\infty$-representação de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. Consiste na avaliação de um operador de vértice bosônico contra a função geradora da base padrão de Schur de B. Ela fornece uma descrição alternativa da representação bosônica de gl_∞, devida a Date, Jimbo, Kashiwara e Miwa, que não envolve explicitamente exponenciais de operadores diferenciais. Por último, fornecemos uma B_r-representação da superálgebra de Lie $\mathrm{gl}(\bigwedge \mathbb{Q}[X])$.

Palavras Chaves: derivações de Hasse-Schmidt; derivações de Schubert; operadores de vértice; representação da álgebra de Lie de matrizes; representações bosônica e fermiônica por Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa; funções simétricas.

Abstract

The polynomial ring $B_r := \mathbb{Q}[e_1, \ldots, e_r]$ in r indeterminates is a representation of the Lie algebra of all the endomorphism of $\mathbb{Q}[X]$ vanishing at X^j for all but finitely many j. We determine the structural formal power series of the B_r-representation of $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. This is a formal power series in $r+2$ indeterminates encoding the images of all the basis elements of B_r under the action of the generating function of elementary endomorphisms of $\mathbb{Q}[X]$. The obtained expression implies (and improves) a formula by Gatto & Salehyan, which only computes the generating functions for the images of specified basis elements. For sake of completeness, in the last section we construct the structural formal power series of the $B = B_\infty$-representation of $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. It consists in the evaluation of a bosonic vertex operator against the generating function of the standard Schur basis of B. It provides an alternative description of the bosonic representation of gl_∞, due to Date, Jimbo, Kashiwara and Miwa, which does not explicitly involve exponentials of differential operators. Lastly, we provide a B_r-representation of the Lie superalgebra $\mathrm{gl}(\bigwedge \mathbb{Q}[X])$.

Key-words: Hasse-Schmidt derivations; Schubert derivations; vertex operators; representation of Lie algebras of matrices; bosonic and fermionic representations by Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa; symmetric functions.

Sumário

1 Introdução

O principal objetivo desta tese é fornecer novas representações para a álgebra de Lie das matrizes de tamanho infinito com entradas em $\mathbb{Q}$, de um modo explícito, estamos falando sobre

$$\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q}) := \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid \text{quase todos } a_{ij} \in \mathbb{Q} \text{ são nulos}\},$$

cujos elementos podem ser pensados como matrizes quadradas de tamanho finito mergulhadas em um conjunto infinito de zeros.

O espaço da representação será sempre uma álgebra polinomial em um número finito ou infinito de indeterminadas, a depender do tipo de representação com que estamos lidando. Assim, grosso modo, o que fazemos é determinar o produto de uma matriz por um polinômio, de uma tal maneira que este produto seja compatível com o comutador de matrizes, i.e.:

$$M(NP) - N(MP) = [M, N]P$$

para todo par de matrizes (M, N) e todo polinômio P.

A descrição do produto citado acima apareceu pela primeira vez na literatura matemática em um célebre artigo de 1981 por Date, Jimbo, Kashiwara e Miwa (DJKM) [6], da escola japonesa do renomado matemático M. Sato no contexto da Análise Algébrica e Teoria de Representação. Nesse artigo eles determinaram uma *representação por operadores de vértice* da função geradora das matrizes elementares agindo no anel $B = B_\infty := \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ de polinômios em infinitas indeterminadas (o *espaço bosônico de Fock*).

No referido artigo considera-se o espaço vetorial dos polinômios de Laurent na indeterminada X a coeficientes em $\mathbb{Q}$, ou seja, $\mathcal{V} := \mathbb{Q}[X, X^{-1}]$. Por conseguinte, a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ (que neste contexto consiste dos endomorfismos ϕ tais que $\phi(X^j) = 0$ para quase todos $j \in \mathbb{Z}$ e com colchete de Lie dado pelo comutador clássico) pode ser facilmente identificado com $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. Então considerando-se a base canônica de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$ formada pelas matrizes elementares E_{ij} definidas por $E_{ij}X^k = \delta_{jk}X^i$ e a função geradora com relação a esta base, a saber

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} E_{ij} z^i w^{-j} : B \to B[\![z, w]\!],$$

Date, Jimbo, Kashiwara e Miwa chegaram a seguinte expressão para a ação de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ em B

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \Gamma(z, w) = \exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i(z^i - w^i)\right) \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}(z^{-i} - w^{-i})\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{1.1}$$

Desde então esta fórmula tem sido referida como a *representação* DJKM *de* $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$. Em termos práticos a Equação (1.1) nos diz que o produto de uma matriz elementar E_{ij} por um polinômio arbitrário $P \in B = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$ é $E_{ij} \cdot P = [z^i w^{-j}]\, \mathcal{E}(z, w^{-1})$, isto é, o coeficiente do monômio $z^i w^{-j}$ na expansão de $\mathcal{E}(z, w^{-1})P$.

Importantes resultados têm sido obtidos no sentido de obter representações de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$ por meio de álgebras de polinômios os quais fornecem generalizações e melhoramentos a representação DJKM.

As técnicas utilizadas no presente trabalho seguem uma abordagem cuja principal ferramenta consiste das *derivações de Schubert*. Derivações de Schubert são um tipo especial de *derivações de Hasse-Schmidt* em uma álgebra exterior, ambos os conceitos foram definidos pela primeira vez por L. Gatto em 2005 no artigo [9]. Sua principal inspiração foi o estudo da cohomologia de Grassmannianas, o cálculo de Schubert e a derivação de Wronskianos. Utilizando-se desta nova perspectiva, Gatto fornece uma reinterpretação e simplificação para o cálculo de Schubert. O resultado obtido nos diz que:

"O anel de cohomologia da grassmanniana $G_r(\mathbb{C}^n)$ pode ser realizado (por uma determinada derivação de Schubert) como um anel de operadores sobre a álgebra exterior de um módulo livre de posto n"

A partir de então, o estudo das derivações de Schubert tem se desenvolvido consideravelmente, o que é evidenciado pelas suas inúmeras aplicações em diferentes áreas da matemática, fornecendo interessantes e profundos resultados. A título de exemplo, podemos citar os trabalhos por Gatto & Santiago em [17], estendendo o cálculo de Schubert para álgebras de Grassmann e, posteriormente em [18], obtendo valiosas contribuições ao cálculo de Schubert equivariante. Podemos mencionar ainda os resultados sobre o anel de cohomologia da Grassmanniana $G_r(\mathbb{C}^n)$ [9, 15], uma generalização do Teorema de Cayley-Hamilton por Gatto & Scherbak [20], a correspondência bóson-férmion e EDOs lineares [10, 12, 19] e uma dedução alternativa da hierarquia KP como em [14].

Todos esses assuntos foram abordados de forma abrangente e bastante detalhada no livro *Hasse-Schmidt derivations on Grassmann algebras. With Applications to Vertex Operators* por Gatto e Salehyan [13], uma referência que recorremos muitas vezes no texto.

Mais recentemente as derivações de Schubert têm sido aplicadas na teoria de representação de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$ como e.g. em [3, 4, 15, 16] e [1, 2]. Aqui é conveniente dizer que em [1, 2] estão as contribuições desta tese e que as mesmas são fortemente influenciadas pelas referências anteriores.

O restante desta introdução é dedicado a descrever de forma sucinta os trabalhos mencionados no parágrafo anterior. Para isso introduzimos algumas notações e terminologias.

(1) Representações de tipo finito.

Neste contexto, os principais objetos são:

i) O espaço vetorial $V := \mathbb{Q}[X]$ de polinômios na indeterminada X, com base $\mathbf{X} := (X^i)_{i\geq 0}$ e base dual $\boldsymbol{\partial} := (\partial^j)_{j\geq 0}$, ao qual associamos sua álgebra exterior $\bigwedge V = \bigoplus_{k\geq 0} \bigwedge^k V$;

ii) O anel polinomial $B_r = \mathbb{Q}[e_1, \ldots, e_r]$ nas r indeterminadas $(e_1, \ldots, e_r)$.

Para os nossos propósitos a álgebra de Lie linear geral associada a V é muito grande, de modo que em todo este trabalho $\mathrm{gl}(V)$ denotará a subálgebra de Lie cujo espaço subjacente consiste dos endomorfismos $\phi \in \mathrm{End}(V)$ tais que $\phi(X^j) = 0$ para quase todos valores de j (a mesma notação será fixada para as potências exteriores de V). Sabemos que, neste caso, $\mathrm{gl}(V) = V \otimes V^*$ e identifica-se naturalmente com álgebra de Lie de matrizes

$$\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q}) := \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid \text{quase todos } a_{ij} \in \mathbb{Q} \text{ são nulos}\}.$$

Consequentemente, temos bases canônicas para essas álgebras, a saber

$$\mathrm{gl}(V) = \bigoplus_{i,j\geq 0} \mathbb{Q}\cdot X^i \otimes \partial^j = \bigoplus_{i,j\geq 0} \mathbb{Q}\cdot E_{ij}.$$

Cada parte graduada $\bigwedge^r V$ da álgebra exterior tem como base $(\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}))_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}$, onde

$$\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) := X^{r-1+\lambda_1} \wedge X^{r-2+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r} \in \bigwedge^r V \tag{1.2}$$

e $\mathcal{P}_r$ denota o conjunto das partições de comprimento no máximo r. Assim, por exemplo, tomando-se a partição nula $0 := (0, 0, \dots)$ temos

$$\mathbf{X}^r(0) = X^{r-1} \wedge \cdots \wedge X^1 \wedge X^0.$$

De modo inteiramente análogo definimos os elementos da base de $\bigwedge^k V^*$

$$\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\mu}) = \partial^{k-1+\mu_1} \wedge \partial^{k-2+\mu_2} \wedge \cdots \wedge \partial^{\mu_k}, \tag{1.3}$$

cada um dos quais induz um homomorfismo $\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\mu})\lrcorner : \bigwedge^r V \to \bigwedge^{r-k} V$ de grau $-k$ denominado operador de contração por $\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\mu})$. Em particular, temos que $\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\mu})\lrcorner\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\nu}) = \delta_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}$, o que nos permite a identificação $\bigwedge^k V^* = (\bigwedge^k V)^*$ e, por conseguinte, uma descrição explícita de bases para $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ para cada $k \geq 0$, a saber

$$\mathrm{gl}(\bigwedge^k V) = \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V^* = \bigoplus_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{P}_k} \mathbb{Q}\cdot\mathcal{E}^k_{\boldsymbol{\mu\nu}},$$

onde $\mathcal{E}^k_{\boldsymbol{\mu\nu}} := \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \otimes \boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\nu})$.

Fixado $r \geq 1$ e considerando-se o *polinômio genérico*

$$E_r(z) := 1 - e_1 z + \cdots + (-1)^r e_r z^r \in B_r[z],$$

temos as sequências $H_r := (h_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ e $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ definidas por meio das seguintes igualdades em $B_r[\![z]\!]$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^n := \frac{1}{E_r(z)} = \exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i z^i\right). \tag{1.4}$$

Em particular $h_j = 0$ se $j < 0$ e $h_0 = 1$. Definimos $S_i(x_1, \dots, x_i) := [z^i]\exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i z^i\right)$, ou seja, o coeficiente de z^i na expansão da exponencial. Assim, em termos das indeterminadas $(e_1, \dots, e_r)$, temos $h_i = S_i$ para todo i.

Além disso, temos bases para B_r dadas pelos determinantes de Schur $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) := \det(h_{\lambda_j - j + i})$ e $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \det(S_{\lambda_j - j+i}(\mathbf{x}))$ (Cf. [8, p. 41]):

$$B_r = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r} \mathbb{Q} \cdot \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r} \mathbb{Q} \cdot S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}).$$

A *correspondência bóson-férmion* se exprime por meio do isomorfismo de $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais

$$\phi_r : B_r \to \bigwedge^r V$$

que leva $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) = S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$, este isomorfismo é melhor compreendido por meio da fórmula de Giambelli para a derivação de Schubert $\sigma_+(z)$, como consequência da mesma conclui-se que $\bigwedge^r V$ é um B_r-módulo gerado por $\mathbf{X}^r(0)$, veja Proposição 2.7.2.

Então, uma representação de tipo finito significa que temos definido em B_r uma estrutura de módulo sobre a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ ou $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$.

(2) $B = B_\infty$**-representações de** $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$

Neste caso, consideramos $B = B_\infty = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$ o espaço bosônico de Fock é o espaço vetorial $\mathcal{V} := \mathbb{Q}[X^{-1}, X]$ dos polinômios de Laurent em X. Como explicado anteriormente $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ denota a subálgebra de Lie formada por aqueles endomorfismos que se anulam em quase todos elementos da base de $\mathcal{V}$. Com isso, temos a identificação com a álgebra de Lie de matrizes

$$\mathrm{gl}(\mathcal{V}) = \mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q}) = \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid \text{quase todos } a_{ij} \in \mathbb{Q} \text{ são nulos}\}.$$

Uma base para B é formada pelos mesmos polinômios $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$ referidos acima, a saber,

$$B = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}} \mathbb{Q} \cdot S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}),$$

onde $\mathcal{P}$ denota o conjunto de todas as partições. Considera-se então uma cópia de $\mathcal{V}$ denotada $[\mathcal{V}]$ com base $([X^i])_{i\in\mathbb{Z}}$. Para quaisquer $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}$ e $m \in \mathbb{Z}$ definimos

$$[\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}} = X^{m+\lambda_1} \wedge X^{m-1+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{m-r+1+\lambda_r} \wedge [\mathbf{X}]^{m-r},$$

onde r é qualquer inteiro positivo tal que $\ell(\boldsymbol{\lambda}) \leq r$.

O espaço fermiônico de Fock associado a $\mathcal{V}$ é por definição

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{V}) := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_m,$$

onde $\mathcal{F}_m := \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}} \mathbb{Q} \cdot [\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}}$ é o espaço fermiônico de Fock de carga m. A correspondência bóson-férmion se dá em cada $\mathcal{F}_m$, ou seja, $\mathcal{F}_m \cong B = \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ via a extensão $\mathbb{Q}$-linear da aplicação $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) \mapsto [\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}}$. Em seguida, definimos as derivações de Schubert em cada $\mathcal{F}_m$ como em [4,16].

Neste contexto, uma B-representação significa que definimos em B uma estrutura de módulo sobre a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\bigwedge^k \mathcal{V})$ ou $\mathrm{gl}(\bigwedge \mathcal{V})$.

1.1 Pesquisas anteriores

1.1.1 Gatto & Salehyan

Estudando-se o anel de cohomologia singular da Grassmanniana [15] por meio do formalismo das derivações de Schubert, Gatto & Salehyan obtiveram, como uma consequência direta, alguns fatos interessantes sore a representação de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$. Primeiramente, eles determinaram a ação da série geradora da base de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$ em um elemento $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)$ de B_r, chegando-se a seguinte expressão [15, Teorema 4.3]

$$\mathcal{E}_r(z, w^{-1}) = \frac{z^{r-1}}{w^{r-1}} \frac{1}{E_r(z)} \overline{\sigma}_-(z)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(w^{-\boldsymbol{\lambda}}, H_r), \tag{1.5}$$

e em seguida a uma fórmula equivalente [15, Teorema 5.7] dada por

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z^r}{w^r}\Gamma_r(z, w)\right),$$

onde

$$\Gamma_r(z, w) := \frac{E_r(w)}{E_r(z)}\overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(w)$$

e $\overline{\sigma}_-(z)$, $\sigma_-(w)$ são derivações de Schubert. Por um resultado anterior dos mesmos autores em [14, Teorema 7.7], no caso limite quando $r = \infty$ as derivações de Schubert $\overline{\sigma}_-(z)$ e $\sigma_-(w)$ podem ser escritas como

$$\overline{\sigma}_-(z) = \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{iz^i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \quad \text{e} \quad \sigma_-(w) = \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{iw^i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Consequentemente,

$$\Gamma_\infty(z, w) = \frac{E_\infty(w)}{E_\infty(z)}\overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(w) = \exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i(z^i - w^i)\right) \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}(z^{-i} - w^{-i})\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

reobtendo assim, por uma abordagem inteiramente distinta, a clássica expressão do operador de vértice $\Gamma(z, w)$ que aparece na representação bosônica DJKM de $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$.

1.1.2 Behzad & Gatto

Neste trabalho os autores fornecem uma extensão final da fórmula DJKM no que concerne as representações fermiônica e bosônica da superalgebra de Lie $\mathrm{gl}(\bigwedge\mathcal{V}) = \bigwedge\mathcal{V} \otimes \bigwedge\mathcal{V}^*$. Consideram-se os seguintes objetos

- a álgebra polinomial $B(\xi) = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\xi, \xi^{-1}]$ (o espaço bosônico de Fock), onde $B = \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ e ξ é uma indeterminada sobre $\mathbb{Q}$;
- o espaço fermiônico de Fock $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{V}) := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_m$ que, como $B(\xi)$, possui uma base parametrizada por $\mathbb{Z} \times \mathcal{P}$.

$\mathcal{F}$ é um $B(\xi)$-módulo de posto 1 gerado por $[\mathbf{X}]^0 := X^0 \wedge X^{-1} \wedge X^{-2} \wedge \cdots$ via a seguinte igualdade

$$\xi^m S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})[\mathbf{X}]^0 = [\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}} = X^{m+\lambda_1} \wedge X^{m-1+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{m-r+1+\lambda_r} \wedge [\mathbf{X}]^{m-r} \tag{1.6}$$

que neste contexto é interpretada como a correspondência bóson-férmion.

A base de $\mathrm{gl}(\bigwedge \mathcal{V}) = \bigoplus_{k,\ell\geq 0} \bigwedge^k \mathcal{V} \otimes \bigwedge^\ell \mathcal{V}^*$ considerada é constituída pelos elementos da forma

$$\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \otimes \boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\nu}) \in \bigwedge^k \mathcal{V} \otimes \bigwedge^\ell \mathcal{V}^*,$$

onde $\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu})$ e $\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\nu})$ são como em 1.2 e 1.3, exceto que neste caso estes elementos são parametrizados pelo conjunto $\overline{\mathcal{P}}$ das *partições bilaterais*, i.e., sequências finitas não-decrescentes de números inteiros.

Com isso, a função geradora da base de $\bigwedge^k \mathcal{V} \otimes \bigwedge^\ell \mathcal{V}^*$ é

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}) = \sum_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\overline{\mathcal{P}}_k\times\overline{\mathcal{P}}_\ell} \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \otimes \boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\nu})\, s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k) s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_\ell^{-1}), \tag{1.7}$$

onde $\mathbf{z}_k := (z_1, \ldots, z_k)$ e $\mathbf{w}_\ell^{-1} := (w_1^{-1}, \ldots, w_\ell^{-1})$ são multivariáveis formais e $s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)$ e $s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_\ell^{-1})$ são extensões naturais dos polinômios de Schur clássicos que ocorrem na teoria das funções simétricas (Veja Seção 2.2 ou [7,8] para uma exposição mais detalhada), tais extensões consistem de *funções racionais* simétricas e coincidem com os polinômios de Schur usuais para partições em $\mathcal{P}_r = \overline{\mathcal{P}} \cap \mathbb{N}^r$.

Então a fórmula que Gatto e Behzad obtêm para a $B(\xi)$-estrutura de $\mathrm{gl}(\bigwedge \mathcal{V})$ é dada pelo seguinte teorema que generaliza e, portanto, inclui como um caso particular a representação DJKM de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$.

Teorema 1.1.1. [4, Teorema 3.6] *A ação (DJKM bosônica) de $\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1})$ em $B(\xi)$ é dada por*

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} p_n(\mathbf{z}_k^{-1}) p_n(\mathbf{w}_\ell)\right) \Gamma(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell), \tag{1.8}$$

onde

(i) o mapa $\Gamma(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell) : B(\xi) \to B(\xi)[\![\mathbf{z}_k^{\pm 1}, \mathbf{w}_\ell^{\pm 1}]\!]$ é o operador de vértice

$$R(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}) \exp\left(\sum_{n\geq 1} x_n (p_n(\mathbf{z}_k) - p_n(\mathbf{w}_\ell))\right) \exp\left(-\sum_{n\geq 1} \frac{p_n(\mathbf{z}_k^{-1}) - p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})}{n} \frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

(ii) o mapa $R(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}) : B(\xi)[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}]\!] \to B(\xi)[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}]\!]$ é a única extensão $B[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}]\!]$-linear de

$$\xi^m \mapsto \xi^{m+k-\ell} \left(\frac{z_1 \cdots z_k}{w_1 \cdots w_\ell}\right)^{m-\ell+1}$$

(iii) as expressões $p_n(\mathbf{z}_k^{\pm 1})$ e $p_n(\mathbf{w}_\ell^{\pm 1})$ denotam os polinômios soma de potências de Newton, mais explicitamente:

$$p_n(\mathbf{z}_k^{\pm 1}) = z_1^{\pm n} + \cdots + z_k^{\pm n} \quad e \quad p_n(\mathbf{w}_\ell^{\pm 1}) = w_1^{\pm n} + \cdots + w_\ell^{\pm n}.$$

O significado da fórmula (1.8) é que se $P(\mathbf{x}, \xi) \in B(\xi)$ é qualquer polinômio, então a "multiplicação" de $P(\mathbf{x}, \xi)$ por $\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \otimes \boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\nu})$ é o coeficiente de $s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k) s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_\ell^{-1})$ na expansão de $\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}) P(\mathbf{x}, \xi)$.

No caso particular em que $k = l = 1$, temos $s_i(z) = z^i$ e $s_j(w^{-1}) = w^{-j}$ para todo par de inteiros $i, j \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\frac{w^n}{z^n}\right) = \frac{1}{1-w/z} \quad \text{e} \quad R(z, w^{-1})\,\xi^m = \xi^m\,\frac{z^m}{w^m}.$$

Deste modo, a igualdade (1.8) resulta em

$$\mathcal{E}(z, w^{-1})|_{B\xi^m} = \frac{z^m}{w^m}\frac{1}{1-w/z}\exp\left(\sum_{n\geq 1} x_n(z^n - w^n)\right)\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(z^{-n} - w^{-n})\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

que é precisamente a fórmula original da representação bosônica DJKM de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ como em [21, Proposição 5.2].

1.1.3 Behzad, Contiero, Gatto & Vidal Martins

Nesse artigo os autores descrevem a álgebra polinomial B_r como uma representação de $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ via operadores de vértice para todo $k \geq 0$.

Neste caso, a $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ estrutura de B_r é dada pelo produto $\star : \mathrm{gl}(\bigwedge^k V) \times B_r \to B_r$ definido nos elementos da base por

$$\left(\mathcal{E}^k_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right)\mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\nu})\lrcorner\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right).$$

A série geradora da base de $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ é dada por

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1}) = \sum_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{P}_k} \mathcal{E}^k_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} \cdot s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_k^{-1}) : B_r \longrightarrow B_r[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1}]\!], \tag{1.9}$$

onde $s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)$ e $s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_k^{-1})$ são os polinômios de Schur nas indeterminadas $\mathbf{z}_k := (z_1, \ldots, z_k)$ e $\mathbf{w}_k^{-1} := (w_1^{-1}, \ldots, w_k^{-1})$ com relação as partições $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}_k$, respectivamente. Além disso, a série $\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1})$ age sobre um elemento arbitrário $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)$ da base de B_r de acordo com a seguinte igualdade

$$\left(\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1})\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right)\mathbf{X}^r(0) = \sum_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{P}_k} s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_k^{-1})\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\nu})\lrcorner\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right).$$

Então o resultado principal do artigo, que fornece uma elegante forma para representação de $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ em termos de operadores de vértice é dada pelo seguinte:

Teorema 1.1.2. [3, Teorema 8.5] *A seguinte igualdade vale para todo par de inteiros $k, r \geq 0$ e todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$:*

$$\left(\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1})\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right)\mathbf{X}^r(0) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{z_j}{w_j}\right)^{r-k} \cdot \Gamma(\mathbf{z}_k)\Gamma^*(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \tag{1.10}$$

onde os operadores de vértice $\Gamma(\mathbf{z}_k), \Gamma^*(\mathbf{z}_k) : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k^{-1}]$ sobre a álgebra exterior $\bigwedge V$ são dados por:

$$\Gamma(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_+(\mathbf{z}_k)\overline{\sigma}_-(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^{r+k}(\boldsymbol{\lambda})$$

e

$$\Gamma^*(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma_-(\mathbf{z}_k)H_{r-k})\right)\mathbf{X}^{r-k}(0).$$

Além disso, eles são mapas $\mathbb{Q}[\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k^{-1}]$-lineares de graus 1 e -1 com respeito a graduação da álgebra exterior.

1.2 Descrição dos capítulos e resultados da tese

De modo a tornar a exposição o mais autocontida possível, destinamos o Capítulo 2 para as definições e resultados acerca dos objetos e técnicas que utilizamos. Em particular, as derivações de Hasse-Schmidt e de Schurbert em álgebras exteriores, polinômios e determinantes de Schur e a correspondência bóson-férmion.

No Capítulo 3 concentramos nossa atenção no estudo da $\mathrm{gl}(V)$ estrutura do anel B_r. Na Seção 3.1, revisitamos a fórmula 1.5 por Gatto & Salehyan, obtendo uma expressão mais explícita e elegante para a ação da série geradora $\mathcal{E}(z, w^{-1})$ sobre B_r, a saber

$$\mathcal{E}(z, w^{-1})\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{z^{r-1}}{w^{r-1}}\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)\left(\begin{vmatrix} w^{-\lambda_1} & w^{-\lambda_2+1} & \dots & w^{r-1-\lambda_r} & 0 \\ & & & & \\ X^{r+\lambda_1} & X^{r-1+\lambda_2} & \dots & X^{1+\lambda_r} & X^0 \end{vmatrix}\right). \tag{1.11}$$

A partir da Seção 3.2 desenvolvemos todos os resultados preliminares necessários para a prova do teorema principal do capítulo. Este teorema consiste em determinar uma expressão para a série de potência formal $\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) \in B_r[\![z, w^{-1}, \mathbf{t}_r]\!]$ resultante da avaliação da função geradora

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \sum_{i,j\geq 0} X^i \otimes \partial^j \cdot z^i w^{-j}$$

sobre a série geradora da base $(\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r))_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}$ de B_r.

Teorema A (Teorema 3.2.1)**.** *Seja*

$$\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) := \sum_{((i,j),\boldsymbol{\lambda})\in\mathbb{N}^2\times\mathcal{P}_r} \left[X^i \otimes \partial^j \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)$$

a função geradora da constante de estrutura de B_r como uma representação de $\mathrm{gl}(V)$. Então:

$$\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) = \frac{1}{w^{r-1}} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right) + x_n p_n(z, \mathbf{t}_r)\right) \det(\mathrm{M}).$$

A prova do Teorema A é baseada no formalismo das derivações de Schubert, no mesmo sentido de [3,4]. A matriz M que aparece no enunciado do Teorema A é o caso particular quando consideramos $k = l = 1$ da matriz definida em (1.13) que aparece no Teorema C a seguir.

No Capítulo 4 aplicamos o mesmo procedimento descrito acima para reformular a descrição DJKM da estrutura $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$ de $B = B_\infty$. Neste caso, identificamos B com o anel polinomial $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$, onde as indeterminadas x_j estão relacionadas com as e_i por meio da igualdade

$$\exp(\sum_{i\geq 1} x_i z^i) = \frac{1}{E_\infty(z)} = (1 - e_1 z + e_2 z^2 + \cdots)^{-1} \in B[\![z]\!].$$

Para ser mais consistente com a notação padrão no caso de B_∞, a base formada por determinantes de Schur será denotada por $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \det(S_{\lambda_j - j+i}(\mathbf{x}))$ em vez de $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_\infty)$. A função geradora dos elementos base de B é então $\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}} S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t})$, onde $\mathbf{t} := \mathbf{t}_\infty$ e $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as partições. Então nosso segundo resultado principal é:

Teorema B (Teorema 4.2.1)**.** *Seja*

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) = \sum_{(i,j,\boldsymbol{\lambda})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{P}} (X^i \otimes \partial^j) \star S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}) \in B[\![z, w, \mathbf{t}_r, z^{-1}, w^{-1}]\!],$$

onde $\mathbf{t} := (t_1, t_2, \ldots)$ *é uma sequência de infinitas indeterminadas. Então*

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{w^n}{z^n} - \frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n} + \frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{w^n}\right) + x_n\left(z^n - w^n + p_n(\mathbf{t}_r)\right)\right), \qquad (1.12)$$

i.e., a imagem de $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) \in B$ *através da multiplicação pelo endomorfismo elementar* $X^i \otimes \partial^j$ *é o coeficiente de* $z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)$ *de* (1.12).

Os teoremas descritos acima estão publicados no prestigiado periódico Journal of Algebra sob o título *On the vertex operator representation of Lie algebras of matrices* [1], um trabalho do autor desta tese em colaboração com O. Behzad e A. Contiero.

Aqui vale ressaltar que o Teorema B segue a mesma linha dos resultados por Gatto & Salehyan e Gatto & Behzad generalizando a representação DJKM, ou seja, consiste de uma B-representação de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$. O fato inovador na fórmula obtida é que ela não envolve a exponencial de um operador diferencial como o fazem as representações mencionadas acima. Este fato carrega um grande potencial para estender os principais resultados desta tese a situações tropicais como indicado e.g. em [11].

No Capítulo 5 abordamos o problema mais geral de fornecer uma fórmula explícita e bastante manuseável para a série geradora da $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ estrutura de B_r.

A estratégia para alcançarmos a solução é descrever a estrutura de $\bigwedge V$-módulo sobre cada subespaço $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge^k V, \bigwedge^\ell V) \cong \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^\ell V^*$ para todo par de inteiros $k, \ell \geq 1$, i.e., uma representação de endomorfismos de $\bigwedge V$ com um dado (qualquer) grau.

Para descrever a representação bosônica de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ de grau $k-\ell \leq r$ definimos um mapa bilinear $\star : \mathrm{gl}(\bigwedge V) \times B_r \to B_{r-\ell+k}$ que nos elementos das bases de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ e B_r é dado por

$$\left(\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right) \mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right).$$

A função geradora da representação bosônica de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ de grau $k-\ell$ é o mapa

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r) : B_r \longrightarrow B_{r-\ell+k}[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}^r]\!]$$

definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sum_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{P}_k\times\mathcal{P}_\ell\times\mathcal{P}_r} \left[\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k) s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\\ &= \sum_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{P}_k\times\mathcal{P}_\ell\times\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1})\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\right).\end{aligned}$$

Considerando-se as derivações de Schubert $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)$ e $\overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell)$, compomos a matriz quadrada

$$\mathrm{M} := \left(\mathrm{A}(\mathbf{t}_r, \mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell) \;\; \mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e})\right), \qquad (1.13)$$

onde $\mathrm{A}(\mathbf{t}_r, \mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell)$ é a seguinte matriz $(r+k)\times(r+k-\ell)$

$$\mathrm{A}(\mathbf{t}_r, \mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \\ \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^{k-1} & \dots & \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 & \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell)X^{r-\ell-1} & \dots & \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell)X^0 \\ \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e})$ é a matriz $(r+k)\times\ell$ definida como

$$\mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e}) := \left((-1)^{r+k-(i+j-1)}e_{i+j-\ell-1}\right)$$

cujas entradas são os operadores e_i em $B_{r+k-\ell}$, com $0 \le i \le r+k-\ell$ e assumimos que $e_j = 0$ sempre que $j < 0$ ou $j > r+k-\ell$.

Sendo assim, o principal resultado do Capítulo 5 pode ser enunciado como segue.

Teorema C (Teorema 5.3.1)**.** *A função geradora da representação bosônica de B_r como um $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$-módulo é dada por*

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r) = \prod_{j=1}^{\ell} w_j^{\ell-r} \exp\left(\sum_{n\ge1} \frac{p_n(\mathbf{t}_r)(p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1}) + nx_n)}{n} + x_n p_n(\mathbf{z}_k)\right) \det(\mathrm{M}).$$

Observamos que este teorema generaliza o Teorema 1.1.2, que trata do caso particular da representação polinomial de $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$. De fato, esta representação consiste do caso $k = l$ do nosso Teorema C. Além disso, o Teorema C fornece uma representação para a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$.

2 Preliminares

Seja $V := \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{Q} \cdot X^i$ o espaço vetorial com base $\mathbf{X} := (X^i)_{i\geq 0}$. O *dual restrito de* V é $V^* := \bigoplus_{j\geq 0} \mathbb{Q} \cdot \partial^j$, em que $\partial^j(X^i) = \delta_{ij}$ (o delta de Kronecker).

A notação para os elementos da base dual deve-se a relação entre estes elementos e a derivada parcial, a saber:

$$\partial^j = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial X^j}\bigg|_{X=0}$$

A *álgebra exterior* de V é $\bigwedge V := \bigoplus_{i\geq 0} \bigwedge^i V$, a soma direta das *potências exteriores* $\bigwedge^i V$, onde $\bigwedge^0 V = \mathbb{Q}$ e $\bigwedge^1 V = V$. A estrutura de álgebra é dada pela extensão $\mathbb{Q}$-linear da justaposição.

Usamos o termo dual restrito para o espaço V^* definido acima pelo fato de ele não consistir de todos os funcionais lineares de V em $\mathbb{Q}$ (o espaço dual de V), mas apenas dos funcionais com suporte finito. É evidente que em dimensão finita o dual restrito coincide com o dual.

Denotamos por $\mathbf{X}(z)$ e $\boldsymbol{\partial}(w^{-1})$ as *séries geradoras* dos elementos base de V e de V^*, respectivamente, a saber:

$$\mathbf{X}(z) := \sum_{i\geq 0} X^i z^i \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\partial}(w^{-1}) := \sum_{j\geq 0} \partial^j w^{-j}. \tag{2.1}$$

Definição 2.0.1. *Uma* partição *é uma sequência monótona não-crescente* $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ *de inteiros não-negativos para a qual apenas uma quantidade finita de* λ_i*, denominadas suas* partes*, é diferente de zero.*

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as partições. O *comprimento* de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}$ é o número:

$$\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \sharp\{i \geq 1 \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

O *peso* de $\boldsymbol{\lambda}$ é

$$|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i\geq 0} \lambda_i.$$

Cada partição $\boldsymbol{\lambda}$ pode ser representada de modo único por uma sequência $\boldsymbol{\lambda} = (i_1^{n_1} \dots i_m^{n_m})$, com $i_1 > \cdots > i_m \geq 0$ e $n_j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Em outras palavras, $\boldsymbol{\lambda}$ é a partição com i_j partes iguais a n_j para $j = 1, \dots, m$. Denotamos a *partição nula* por $0 := (0, 0, 0, \dots)$.

Além disso, indicaremos por $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ a partição obtida de $\boldsymbol{\lambda}$ pela supressão de sua i-ésima parte, a saber

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i)} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{i-1} \geq \lambda_{i+1} \geq \cdots).$$

Denotamos por $\mathcal{P}_r$ o conjunto de todas as partições de comprimento no máximo r e a cada partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$ associamos o elemento

$$\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) := X^{r-1+\lambda_1} \wedge X^{r-2+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r} \in \bigwedge^r V.$$

Vamos verificar que esses elementos formam uma base para $\bigwedge^r V$. Para isso é suficiente mostrar que a aplicação de $\mathcal{P}_r$ em $\{(i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{N}^r \mid i_1 > \cdots > i_r\}$ que leva $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ em $(j_1, \ldots, j_r)$, onde $j_i = \lambda_i + r - i$, é uma bijeção. Observamos que tal aplicação está bem definida, pois de $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ segue-se que $\lambda_i > \lambda_{i+1} - 1$ e, por conseguinte, $j_i > j_{i+1}$. Além disso, ela tem uma inversa dada por $j_i \mapsto \lambda_i := j_i - (r - i)$.

Observação 2.0.1. *Dada uma partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$, denotaremos por $\mathbf{X}^{r+i}(\boldsymbol{\lambda})$ o elemento da base de $\bigwedge^{r+i} V$ para o qual a partição considerada é $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{P}_{r+i}$.*

2.1 O anel B_r

Para cada $r \geq 0$, seja B_r o anel de polinômios $\mathbb{Q}[e_1, \ldots, e_r]$ nas r indeterminadas $(e_1, \ldots, e_r)$ (por convenção $B_0 = \mathbb{Q}$).

Dado o polinômio genérico $E_r(z) := 1 - e_1 z + \cdots + (-1)^r e_r z^r \in B_r[z]$, consideramos as sequências $H_r := (h_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definidas por meio das seguintes igualdades em $B_r[\![z]\!]$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^n := \frac{1}{E_r(z)} = \exp\left(\sum_{i \geq 1} x_i z^i\right). \tag{2.2}$$

Em particular $h_j = 0$ se $j < 0$ e $h_0 = 1$. Além disso, para $j \geq 0$, h_j é um polinômio isobárico de grau j em $(e_1, \ldots, e_r)$, uma vez que atribuímos peso i a e_i.

Observação 2.1.1. *Para cada $j \geq 0$ denotamos por $S_j(\mathbf{x})$ o coeficiente de z^j na expansão de $\exp(\sum_{i \geq 1} x_i z^i)$, isto é,*

$$\sum_{j \geq 0} S_j(\mathbf{x}) z^j = \exp(\sum_{i \geq 1} x_i z^i).$$

Cada $S_j(\mathbf{x})$ é um polinômio isobárico de grau j nas indeterminadas $\mathbf{x}_j := (x_1, \ldots, x_j)$, uma vez que nós atribuímos peso i a x_i.

Os exemplos a seguir ilustram como podemos calcular todos esses polinômios que aparecem na Equação 2.2 na prática.

Exemplo 2.1.1. Consideremos o caso $r = 1$, assim, $B_1 = \mathbb{Q}[e_1]$ e $E_1(z) = 1 - e_1 z$, o que implica $H_1 = (1,\ e_1,\ e_1^2,\ e_1^3,\ e_1^4,\ \ldots)$ (desprezando-se os termos nulos da sequência). Observe também que

$$\exp(\sum_{i \geq 1} x_i z^i) = \prod_{i \geq 1} \exp(x_i z^i) = \prod_{i \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(x_i z^i)^n\right).$$

Vamos nos restringir ao cálculo dos três primeiros coeficientes dessa série. Para isto é suficiente olhar para o produto dos seguintes fatores

$$\left(1 + x_1 z + \frac{1}{2}(x_1 z)^2 + \frac{1}{6}(x_1 z)^3 + \cdots\right)(1 + x_2 z^2 + \cdots)(1 + x_3 z^3 + \cdots),$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}\exp(\sum_{i\geq 1} x_i z^i) &= 1 + x_2 z^2 + x_1 z + x_1 x_2 z^3 + \frac{1}{2}x_1^2 z^2 + x_3 z^3 + \frac{1}{6}x_1^3 z^3 \\ &\quad + \textit{termos de } \deg > 3 \textit{ em } z \\ &= 1 + x_1 z + \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) z^2 + \left(x_1 x_2 + x_3 + \frac{1}{6}x_1^3\right) z^3 \\ &\quad + \textit{termos de } \deg > 3 \textit{ em } z.\end{aligned}$$

Assim, comparando com os termos da sequência H_1, obtemos

$$x_1 = e_1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}e_1^2 \qquad \text{e} \qquad x_3 = \frac{1}{3}e_1^3.$$

Exemplo 2.1.2. Para $r = 2$, temos $B_2 = \mathbb{Q}[e_1, e_2]$ e $E_2(z) = 1 - e_1 z + e_2 z^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_2(z)} &= \sum_{i\geq 0}(1 - E_2(z))^i = \sum_{i\geq 0}(e_1 z - e_2 z^2)^i \\ &= 1 + e_1 z - e_2 z^2 + e_1^2 z^2 - 2e_1 e_2 z^3 + e_1^3 z^3 + \textit{termos de } \deg > 3 \textit{ em } z \\ &= 1 + e_1 z + (e_1^2 - e_2) z^2 + (e_1^3 - 2e_1 e_2) z^3 + \textit{termos de } \deg > 3 \textit{ em } z,\end{aligned}$$

com isso $H_2 = (1,\ e_1,\ e_1^2 - e_2,\ e_1^3 - 2e_1 e_2,\ \dots)$ e comparando com os polinômios S_j obtidos no exemplo anterior, temos

$$x_1 = e_1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}e_1^2 - e_2 \qquad \text{e} \qquad x_3 = \frac{1}{3}e_1^3 - e_1 e_2.$$

2.2 Determinantes e polinômios de Schur

Considerando-se a sequência H_r e uma partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$, temos o *determinante de Schur*

$$\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) := \det(h_{\lambda_j - j + i})_{1\leq i,j\leq r} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_2 - 1} & \dots & h_{\lambda_r - r + 1} \\ h_{\lambda_1 + 1} & h_{\lambda_2} & \dots & h_{\lambda_r - r + 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_1 + r - 1} & h_{\lambda_2 + r - 2} & \dots & h_{\lambda_r} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

É um fato conhecido que $(\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r))_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}$ constitui uma $\mathbb{Q}$-base de B_r parametrizada pelas partições de comprimento no máximo r, ou seja:

$$B_r := \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} \mathbb{Q}\cdot\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r). \tag{2.4}$$

Para uma demonstração deste fato veja [8, p. 41]. Com isso temos um isomorfismo de $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais

$$\phi_r : B_r \to \bigwedge^r V \tag{2.5}$$

definido como a extensão $\mathbb{Q}$-linear do mapa de conjuntos $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) \mapsto \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$.

Temos uma outra base para B_r em termos de polinômios nas indeterminadas $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, a saber

$$B_r = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} \mathbb{Q}\cdot S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}), \tag{2.6}$$

onde

$$S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) := \det(S_{\lambda_j - j + i}(\mathbf{x})).$$

Quando $r = \infty$, definimos

$$B = B_\infty = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots],$$

a álgebra de polinômios em infinitas indeterminadas. Neste caso, os polinômios $S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$ formam uma $\mathbb{Q}$-base de B quando $\boldsymbol{\lambda}$ varia no conjunto de todas as partições.

Para cada partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_k$ e qualquer conjunto de k indeterminadas $\mathbf{x}_k := (x_1, \ldots, x_k)$, definimos

$$\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_k) = \det(x_j^{\lambda_{k-i+1}+i-1}) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_k} & x_2^{\lambda_k} & \cdots & x_k^{\lambda_k} \\ x_1^{1+\lambda_{k-1}} & x_2^{1+\lambda_{k-1}} & \cdots & x_k^{1+\lambda_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1+\lambda_1} & x_2^{k-1+\lambda_1} & \cdots & x_k^{k-1+\lambda_1} \end{vmatrix}.$$

Os polinômios $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_k)$ são anti-simétricos nas indeterminadas $(x_1, \ldots, x_k)$ sendo, portanto, divisíveis pelo *determinante de Vandermonde*:

$$\Delta_0(\mathbf{x}_k) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

O *polinômio de Schur* associado a $\mathbf{x}_k$ e a partição $\boldsymbol{\lambda}$ é definido pela igualdade

$$\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_k) = s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta_0(\mathbf{x}_k),$$

frequentemente referida como *fórmula de Jacobi-Trudi*.

Observamos que a série de potências formal a coeficientes em $\bigwedge^k V$

$$\mathbf{X}(x_k) \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}(x_1)$$

se anula sempre que $x_i = x_j$, para todo $1 \leq i < j \leq k$. Portanto, ela é divisível pelo determinante de Vandermonde $\Delta_0(\mathbf{x}_k)$ e satisfaz a seguinte igualdade:

$$\sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_k} \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}_k) \Delta_0(\mathbf{x}_k) = \mathbf{X}(x_k) \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}(x_1), \tag{2.7}$$

que tomaremos como uma definição alternativa para os polinômios de Schur, uma vez que a mesma é equivalente a definição dada anteriormente.

2.3 Álgebras de Lie e representações

Definição 2.3.1. *Uma* álgebra de Lie *consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de uma aplicação bilinear* $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *(o* colchete de Lie*)* *que satisfaz as seguintes condições:*

1) (Alternância do colchete) $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in \mathfrak{g}$;

2) (Identidade de Jacobi) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *para quaisquer* $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.3.1. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie com o colchete sendo dado pelo produto vetorial, ou seja,* $[\mathrm{v}, \mathrm{w}] = \mathrm{v} \times \mathrm{w}$.

A proposição a seguir nos diz que toda álgebra associativa A dá origem a uma álgebra de Lie, cujo colchete é dado pelo *comutador* em A, isto é, dados $x, y \in A$ definimos $[x, y] = xy - yx$.

Proposição 2.3.1. *Dada uma álgebra associativa A, o comutador define no espaço vetorial subjacente a A uma estrutura de álgebra de Lie.*

Demonstração. É fácil ver que o comutador é bilinear e alternado. Agora, precisamos verificar que o mesmo satisfaz a identidade de Jacobi. Dados $x, y, z \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] + [y, [z, x]] &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\
&= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy \\
&= xyz + zyx - yxz - zxy \\
&= (xy - yx)z - z(xy - yx) \\
&= -[z, [x, y]].
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.3.2. Seja W um espaço vetorial qualquer (de dimensão finita ou infinita) sobre um corpo K. Considere o K-espaço vetorial $\mathrm{End}_K(W)$ dos endomorfismos lineares de W

$$\mathrm{End}_K(W) := \{T : W \to W \mid T \text{ é } K\text{−linear}\}.$$

com as operações de adição e multiplicação usuais. Nestas condições $(\mathrm{End}_K(W), \circ)$ é uma álgebra associativa que, pela proposição anterior dá origem a uma álgebra de Lie cujo colchete é dado por

$$[T_1, T_2] := T_1T_2 - T_1T_2 = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1.$$

Esta álgebra de Lie será denotada por $\mathrm{gl}(W)$ e denominada *álgebra de Lie linear geral* de W.

Definição 2.3.2. *Dizemos que uma aplicação $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ entre duas álgebras de Lie é um* morfismo de álgebras de Lie *se ela satisfaz*

$$\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)], \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Um isomorfismo *é um morfismo bijetivo. Se existe um isomorfismo entre as álgebras $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ dizemos que as mesmas são isomorfas e escrevemos $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.*

Denotamos por $\mathrm{gl}_n(K)$ a álgebra de Lie das matrizes quadradas de ordem n com entradas em K, onde o colchete é dado pelo comutador de matrizes.

Seja W um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão n. Fixada uma base de W, temos um isomorfismo de álgebras associativas $\psi : \mathrm{End}_K(W) \to \mathrm{gl}_n(K)$ que associa cada endomorfismo a sua matriz na base considerada. Como essa aplicação preserva o colchete, vemos que $\psi : \mathrm{gl}(W) \to \mathrm{gl}_n(K)$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Torna-se então natural, quando $W = K^n$, a identificação $\mathrm{gl}_n(K) = \mathrm{gl}(K^n)$.

Exemplo 2.3.3. No caso do $\mathbb{Q}$-espaço vetorial V com base enumerável $\mathbf{X} = (X^0, X^1, \dots)$ em que estamos trabalhando, cada endomorfismo $T \in \mathrm{gl}(V)$ é tal que $T(X^j) \neq 0$ apenas para um número finito de valores de $j \in \mathbb{N}$.

Assim, a matriz de T com relação a base $\mathbf{X}$ é uma matriz de tamanho infinito com um número finito de entradas não-nulas, i.e., um elemento de

$$\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q}) := \{A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid \text{quase todos } a_{ij} \in \mathbb{Q} \text{ são nulos}\}.$$

Com isso, temos uma identificação natural $\mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q}) = \mathrm{gl}(V)$.

Observação 2.3.1. Temos um isomorfismo de espaços vetoriais $\mathrm{gl}(V) \cong V \otimes V^*$, onde V é nosso $\mathbb{Q}$-espaço vetorial com base $\mathbf{X} = (X^i)_{i\geq 0}$. Para construir um tal isomorfismo consideramos as bases $\{\varphi_{ij} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V) \mid \varphi_{ij}(X^k) = \delta_{jk} X^i\}$ de $\mathrm{gl}(V)$ e $\{X^i \otimes \partial^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ de $V \otimes V^*$. Agora observamos que existe uma bijeção natural entre estas bases que leva o elemento $X^i \otimes \partial^j$ em φ_{ij} e definimos o isomorfismo como a extensão $\mathbb{Q}$-linear desta bijeção. Além disso, a matriz do endomorfismo φ_{ij} com respeito à base $\mathbf{X}$ é a matriz elementar E_{ij} tal que $E_{ij} \cdot X^k = \delta_{jk} X^i$ para todo $k \geq 0$.

Definição 2.3.3. *Uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um par (W, ρ), em que W é um espaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(W)$ é um morfismo de álgebras de Lie. Neste caso, dizemos também que W é um $\mathfrak{g}$-módulo.*

Observação 2.3.2. *Uma representação de $\mathfrak{g}$ é equivalente a um espaço vetorial W junto com uma mapa bilinear $\cdot : \mathfrak{g} \times W \to W$ tal que*

$$[u, v] \cdot w = u \cdot (v \cdot w) - v \cdot (u \cdot w), \quad \forall u, v \in \mathfrak{g},\ \forall w \in W.$$

De fato, a relação explícita com a definição anterior é obtida definindo-se $u \cdot w = \rho(u)(w)$.

2.4 Derivações em álgebras

Seja $(A, \cdot)$ uma R-álgebra, onde R é um anel comutativo com unidade. Uma R-derivação de A é um R-endomorfismo $\mathcal{D}$ de A satisfazendo a regra de Leibniz:

$$\mathcal{D}(a \cdot b) = \mathcal{D}a \cdot b + a \cdot \mathcal{D}b.$$

Proposição 2.4.1. *Seja A uma álgebra comutativa associativa sobre uma $\mathbb{Q}$-álgebra R e z uma indeterminada. Seja $D = (D_1, D_2, \dots)$ uma sequência de R-derivações de A e considere a função geradora $\mathcal{D}(z) = \sum_{j\geq 1} D_j z^j$. Nessas condições*

$$\exp(\mathcal{D}(z)) := \sum_{n\geq 0} \frac{\mathcal{D}(z)^n}{n!} : A \to A[\![z]\!]$$

é um homomorfismo de R-álgebras.

Demonstração. Dados $a, b \in A$ temos

$$\mathcal{D}(z)(ab) = \mathcal{D}(z)a \cdot b + a \cdot \mathcal{D}(z)b,$$

simplesmente aplicando a regra de Leibniz a cada D_j. Portanto,

$$\mathcal{D}(z)^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{D}(z)^i a \cdot \mathcal{D}^{n-i}(z)b$$

que segue diretamente por um argumento de indução em n. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\exp(\mathcal{D}(z))(ab) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\mathcal{D}(z)^n(ab) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{D}(z)^i a \cdot \mathcal{D}^{n-i}(z)b \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \mathcal{D}(z)^i a \cdot \mathcal{D}^j(z)b \\
&= \sum_{i\geq 0} \frac{\mathcal{D}(z)^i a}{i!} \sum_{j\geq 0} \frac{\mathcal{D}(z)^j b}{j!} = \exp(\mathcal{D}(z)a) \cdot \exp(\mathcal{D}(z)b),
\end{aligned}$$

como desejado. ∎

O seguinte resultado nos dá uma recíproca da proposição acima.

Proposição 2.4.2. *Dado um homomorfismo de R-álgebras*

$$\psi(z) := 1 + \sum_{j\geq 0} \psi_j z^j : A \to A[\![z]\!],$$

existe uma única sequência $\mathcal{D} := (D_1, D_2, \dots)$ de R-derivações de A tal que $\psi(z) = \exp(\mathcal{D}(z))$.

Demonstração. Defina

$$\mathcal{D}(z) := \sum_{j\geq 1} D_j z^j = \log(1 + (\psi(z) - 1)) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(\sum_{i\geq 0} \psi^i z^i \right)^n.$$

Então $(D_1, D_2, \dots)$ é uma sequência de R-derivações de A e pela própria forma como a definimos, temos que $\psi(z) = \exp(\mathcal{D}(z))$. ∎

Tendo em vista a graduação natural da álgebra exterior $\bigwedge V$ por elementos de $\mathbb{N}$, definimos a seguir derivações em $\bigwedge V$ levando em conta essa tal graduação.

Definição 2.4.1. *Uma $\mathbb{Q}$-derivação graduada de grau $p \in \mathbb{Z}$ de $\bigwedge V$ é um $\mathbb{Q}$-endomorfismo $\mathcal{D}$ de $\bigwedge V$ que mapeia $\bigwedge^j V$ em $\bigwedge^{j+p} V$ e satisfaz a regra de Leibniz graduada:*

$$\mathcal{D}(u \wedge v) = \mathcal{D}u \wedge v + (-1)^{p\cdot q} u \wedge \mathcal{D}v, \quad \forall u \in \bigwedge^q V.$$

Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma derivação par, respectivamente ímpar, se $p \equiv 0 \pmod 2$, respectivamente $p \equiv 1 \pmod 2$.

Lema 2.4.1. *Cada $\mathbb{Q}$-derivação (graduada) $\mathcal{D}$ da álgebra exterior $\bigwedge V$ é unicamente determinada pela sua ação em $\mathbb{Q}$ e sobre os elementos da base $\mathbf{X} \subseteq V = \bigwedge^1 V$.*

Demonstração. Por definição, uma derivação é trivial em $\mathbb{Q}$, o anel de constantes, e satisfaz a regra de Leibniz (graduada). Assim, dado $(\alpha, u) \in \mathbb{Q} \times \mathbf{X}$, temos que

$$\mathcal{D}(\alpha u) = \mathcal{D}\alpha \wedge u + \alpha \mathcal{D}u.$$

Além disso, cada $\mathbf{u} \in \bigwedge V$ pode ser escrito como uma combinação $\mathbb{Q}$-linear finita de elementos homogêneos (de graus variados em geral) com todos os fatores exteriores em $\mathbf{X}$. Desde que $\mathcal{D}$ é uma aplicação $\mathbb{Q}$-linear, é suficiente supor $\mathbf{u} = X^{i_1} \wedge \cdots \wedge X^{i_r} \in \bigwedge^r V$. Deste modo, a regra de Leibniz e a definição de $\mathcal{D}$ em $\mathbf{X}$ determinam a imagem $\mathcal{D}(X^{i_1} \wedge \cdots \wedge X^{i_r})$. A afirmação sobre a unicidade é facilmente verificada. ∎

A proposição a seguir é uma das peças-chaves para a obtenção das representações a que procuramos, dado que ela nos permite definir a estrutura de $\mathrm{gl}(V)$-módulo do anel B_r.

Proposição 2.4.3. *Existe uma representação natural $\delta : \mathrm{gl}(V) \to \mathrm{End}(\bigwedge V)$ fazendo qualquer $\phi \in \mathrm{gl}(V)$ em uma derivação par $\delta(\phi)$ de $\bigwedge V$. Em outras palavras, $\delta(\phi)$ é o único $\mathbb{Q}$-endomorfismo de $\bigwedge V$ tal que*

1) $\delta(\phi)(u) = \phi(u), \quad \forall u \in V = \bigwedge^1 V$

2) $\delta(\phi)(v \wedge w) = \delta(\phi)v \wedge w + v \wedge \delta(\phi)w, \quad \forall v, w \in \bigwedge V.$

Demonstração. Dado $\phi \in \mathrm{gl}(V)$, temos que $\delta(\phi)$ é uma univocamente determinada $\mathbb{Q}$-derivação de $\bigwedge V$, pelo Lema 2.4.1. Agora, observamos que $\delta(\phi)$ é uma derivação de grau zero, assim, $\delta(\phi)\left(\bigwedge^k V\right) \subseteq \bigwedge^k V$. Por um argumento de indução no grau $k \geq 1$ podemos verificar que

$$[\delta(\phi_1), \delta(\phi_2)]v = \delta([\phi_1, \phi_2])v, \quad \forall v \in \bigwedge^k V.$$

Portanto, a aplicação $\phi \mapsto \delta(\phi)|_{\bigwedge^k V}$ nos dá um morfismo $\mathrm{gl}(V) \to \mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$ de álgebras de Lie. Ou seja, $\bigwedge^k V$ é uma representação de $\mathrm{gl}(V)$. ∎

Lema 2.4.2. *Dado $\phi \in \mathrm{gl}(V)$, temos que*

$$\mathcal{D}^{\phi}(z) := \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \delta(\phi^i) z^i\right),$$

é o único $\mathbb{Q}$-homomorfismo $\mathcal{D}^{\phi} : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![z]\!]$ tal que $\mathcal{D}^{\phi}(z)|_V = \sum_{i \geq 0} \phi^i z^i$.

Demonstração. Pela Proposição 2.4.3, $(\phi, \delta(\phi^2), \delta(\phi^3), \dots)$ é uma sequência de $\mathbb{Q}$-derivações de $\bigwedge V$. Segue da Proposição 2.4.1 que $\mathcal{D}^{\phi}$ é um $\mathbb{Q}$-homomorfismo. Além disso, para todo $u \in V$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\phi}(z)u &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \delta(\phi^i) z^i\right) u = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \delta(\phi^i) u \cdot z^i\right) \\ &= u + \phi(u)z + \phi^2(u)z^2 + \cdots = \sum_{i \geq 0} \phi^i(u) z^i.\end{aligned}$$

Para a unicidade, suponha que exista um outro homomorfismo D tal que $D(z)|_V = \sum_{i\geq 0} \phi^i z^i$. Dado um $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} D(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= D(z)(X^{r-1+\lambda_1} \wedge X^{r-2+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r}) \\ &= D(z)X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge D(z)X^{\lambda_r} \\ &= \mathcal{D}^{\phi}(z)X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{D}^{\phi}(z)X^{\lambda_r} \\ &= \mathcal{D}^{\phi}(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

■

2.5 Contrações e dualidade

Segue do Lema 2.4.1 que para cada $\beta \in V^*$ existe uma única $\mathbb{Q}$-derivação de $\bigwedge V$ de grau -1, que denotaremos por $\beta\lrcorner$, identicamente nula em $\mathbb{Q}$ e tal que $\beta\lrcorner u = \beta(u)$ para todo $u \in V$. Denominamos $\beta\lrcorner$ de *operador contração por* β. Como uma consequência direta desta definição, temos que

$$\eta(\beta\lrcorner u) = (\beta \wedge \eta)(u), \qquad \forall (u, \eta) \in \bigwedge^r V \times \bigwedge^{r-1} V^*. \tag{2.8}$$

Pela definição de $\beta\lrcorner$ segue, por indução em r, que para um dado elemento homogêneo $\mathbf{u} = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \bigwedge^r V$,

$$\beta\lrcorner\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \beta(u_i)\, u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u_i} \wedge \cdots \wedge u_r, \tag{2.9}$$

onde $\widehat{u_i}$ significa o elemento de $\bigwedge^{r-1} V$ obtido pela supressão do fator u_j de $\mathbf{u}$. Por razões de clareza e simplicidade vamos representar a Equação (2.9) por meio do seguinte diagrama:

$$\begin{vmatrix} \beta\lrcorner u_1 & \beta\lrcorner u_2 & \cdots & \beta\lrcorner u_r \\ & & & \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta(u_1) & \beta(u_2) & \cdots & \beta(u_r) \\ & & & \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

De um modo mais geral, podemos pensar sobre uma sucessão de $k \leq r$ contrações

$$(\bigwedge_{i=1}^{k} \beta_i)\lrcorner\mathbf{u} := \beta_1\lrcorner\beta_2\lrcorner\cdots\lrcorner\beta_k\lrcorner\mathbf{u}.$$

A forma explícita para esta contração é dada pelo seguinte lema, cuja demonstração segue facilmente por um argumento de indução em k, tendo como base a fórmula (2.9).

Lema 2.5.1. *Dados elementos homogêneos $\boldsymbol{\beta} = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k \in \bigwedge^k V^*$ e $\mathbf{u} = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \in \bigwedge^r V$, com $k \leq r$, temos que*

$$\boldsymbol{\beta}\lrcorner\mathbf{u} = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} (-1)^{i_1+1} \cdots (-1)^{i_k+1} \cdot [\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u})]_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}), \tag{2.11}$$

onde $\hat{\mathbf{u}}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k})$ denota o elemento de $\bigwedge^{r-k} V$ obtido de $\mathbf{u}$ removendo-se seus fatores exteriores $u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$ e $[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u})]_{i_1,\ldots,i_k}$ significa o menor $k \times k$ obtido da matriz

$$[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u})] := \begin{pmatrix} \beta_1(u_1) & \beta_1(u_2) & \cdots & \beta_1(u_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_k(u_1) & \beta_k(u_2) & \cdots & \beta_k(u_r) \end{pmatrix}$$

escolhendo-se as colunas $i_1, \dots, i_k$.

Por questões de praticidade, convencionamos representar a fórmula (2.11) por meio do seguinte diagrama

$$\boldsymbol{\beta} \lrcorner \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \beta_1(u_1) & \beta_1(u_2) & \cdots & \beta_1(u_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_k(u_1) & \beta_k(u_2) & \cdots & \beta_k(u_r) \\ u_1 & u_2 & \dots & u_r \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Segue do Lema 2.5.1, considerando-se $k = r$ e olhando para os elementos das bases de V e V^*, que

$$(\partial^{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial^{i_r})(X^{j_1} \wedge \cdots \wedge X^{j_r}) = \delta_{i_1, j_1} \cdots \delta_{i_r, j_r},$$

o que estabelece uma identificação natural entre os espaços duais restritos $\bigwedge V^*$ e $(\bigwedge V)^*$.

Podemos estender os resultados acima a fim de incluir a contração de um elemento arbitrário $u \in \bigwedge V$ pela série geradora $\boldsymbol{\partial}(w^{-1})$. É suficiente descrever essa ação em um elemento da base $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$. Lembrando que $\partial^j \lrcorner X^i = \partial^j(X^i) = \delta_{ij}$, temos

$$\boldsymbol{\partial}(w^{-1}) \lrcorner X^i = \sum_{j \geq 0} \partial^j(X^i) w^{-j} = w^{-i}.$$

Consequentemente,

$$\boldsymbol{\partial}(w^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & w^{-r+2-\lambda_2} & \dots & w^{-\lambda_r} \\ \\ X^{r-1+\lambda_1} & X^{r-2+\lambda_2} & \dots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

De um modo mais geral, podemos fazer a contração pelo produto exterior de um número finito de séries geradoras, isto é,

$$\boldsymbol{\partial}(w_k^{-1}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\partial}(w_k^{-1}) \lrcorner \cdots \lrcorner \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}).$$

Neste caso, a contração pode ser representada pelo seguinte diagrama

$$\boldsymbol{\partial}(w_k^{-1}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} w_k^{-r+1-\lambda_1} & w_k^{-r+2-\lambda_2} & \cdots & w_k^{-\lambda_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{-r+1-\lambda_1} & w_1^{-r+2-\lambda_2} & \dots & w_1^{-\lambda_r} \\ \\ X^{r-1+\lambda_1} & X^{r-2+\lambda_2} & \dots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix}, \tag{2.14}$$

que interpretamos da mesma forma como fizemos com (2.12).

Exemplo 2.5.1. *Vamos calcular $\boldsymbol{\partial}(w_2^{-1}) \wedge \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^3(0)$. Primeiro, sem utilizar o diagrama, temos que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^3(0) &= (w_1^{-2}\partial^2 + w_1^{-1}\partial^1 + \partial^0) \lrcorner \mathbf{X}^3(0) \\ &= w_1^{-2}(X^1 \wedge X^0) - w_1^{-1}(X^2 \wedge X^0) + (X^2 \wedge X^1) \end{aligned}$$

Agora, observamos que

$$\boldsymbol{\partial}(w_2^{-1})\lrcorner w_1^{-2}(X^1 \wedge X^0) = w_1^{-2}(w_2^{-1}X^0 - X^1)$$

$$\boldsymbol{\partial}(w_2^{-1})\lrcorner - w_1^{-1}(X^2 \wedge X^0) = -w_1^{-1}(w_2^{-2}X^0 - X^2)$$

$$\boldsymbol{\partial}(w_2^{-1})\lrcorner(X^2 \wedge X^1) = (w_2^{-2}X^1 - w_2^{-1}X^2)$$

Somando-se as três equações acima e agrupando os termos de acordo com os elementos da base de V, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial}(w_2^{-1}) \wedge \boldsymbol{\partial}(w_1^{-1})\lrcorner\mathbf{X}^3(0) = -(w_2^{-2}w_1^{-1} - w_2^{-1}w_1^{-2})X^0 + (w_2^{-2} - w_1^{-2})X^1 \\ - (w_2^{-1} - w_1^{-1})X^2,\end{aligned}$$

que é a mesma expressão obtida utilizando-se o diagrama (2.14)*, a saber*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} w_2^{-2} & w_2^{-1} & 1 \\ w_1^{-2} & w_1^{-1} & 1 \\ X^2 & X^1 & X^0 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} w_2^{-2} & w_2^{-1} \\ w_1^{-2} & w_1^{-1} \end{vmatrix} X^0 + (-1)^{1+1}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} w_2^{-2} & 1 \\ w_1^{-2} & 1 \end{vmatrix} X^1 \\ &+ (-1)^{2+1}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} w_2^{-1} & 1 \\ w_1^{-1} & 1 \end{vmatrix} X^2.\end{aligned}$$

2.6 Derivações de Hasse–Schmidt em álgebras exteriores

Denotemos por $\bigwedge V[\![z]\!]$ o anel de séries de potências formais na indeterminada z com coeficientes na álgebra exterior $\bigwedge V$. Para um conjunto arbitrário $\mathcal{S}$ de indeterminadas sobre $\mathbb{Q}$, vamos denotar por $\mathbb{Q}[\![\mathcal{S}]\!]$ a correspondente álgebra de séries de potências formais. A seguir temos uma reformulação estendida da principal definição da referência [9] (ver também [13]).

Definição 2.6.1. *Por uma* derivação de Hasse–Schmidt *em* $\bigwedge V$ *entenderemos qualquer extensão* $\mathbb{Q}[\![\mathcal{S}]\!]$*-linear de um mapa* $\mathbb{Q}$*-linear* $\mathcal{D}(z) : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![z]\!]$ *tal que*

$$\mathcal{D}(z)(u \wedge v) = \mathcal{D}(z)u \wedge \mathcal{D}(z)v, \qquad \forall u, v \in \bigwedge V, \tag{2.15}$$

que, por abuso de notação, denotaremos pelo mesmo símbolo

$$\mathcal{D}(z) : \mathbb{Q}[\![\mathcal{S}]\!] \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge V \to \mathbb{Q}[\![\mathcal{S}]\!] \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge V[\![z]\!],$$

no lugar do mais preciso $1_{\mathbb{Q}[\![\mathcal{S}]\!]} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{D}(z)$.

No que segue vamos denotar por $HS(\bigwedge V)$ o conjunto de todas as HS-derivações (derivações de Hasse-Schmidt) em $\bigwedge V$.

Se $\mathcal{D}_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)$ são tais que $\sum_{i\geq 0} \mathcal{D}_i z^i := \mathcal{D}(z)$, então (2.15) é equivalente ao sistema de relações

$$\mathcal{D}_i(u \wedge v) = \sum_{j=0}^{i} \mathcal{D}_j u \wedge \mathcal{D}_{i-j} v, \qquad (i \geq 0).$$

Proposição 2.6.1. [13, Proposições 4.1.7 e 4.1.9] *Se* $\mathcal{D}_0$ *é invertível em* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)$*, então*

1. $\mathcal{D}(z)$ *é invertível como uma série de potências a coeficientes em* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)$ *e sua inversa,* $\overline{\mathcal{D}}(z)$ *é uma HS-derivação.*

2. *As* fórmulas de integração por partes *seguem para todos* $u, v \in \bigwedge V$*:*

$$\mathcal{D}(z)(\overline{\mathcal{D}}(z)u \wedge v) \quad = \quad u \wedge \mathcal{D}(z)v, \tag{2.16}$$

$$\overline{\mathcal{D}}(z)(\mathcal{D}(z)u \wedge v) \quad = \quad u \wedge \overline{\mathcal{D}}(z)v. \tag{2.17}$$

As fórmulas (2.16) e (2.17) estão implicitamente assumindo a $\mathbb{Q}[\![z]\!]$-linearidade de $\mathcal{D}(z)$ da Definição 2.6.1. A extensão da linearidade das HS-derivações sobre álgebras de séries de potências será assumida no que segue sem qualquer menção em explícito.

Definição 2.6.2. *A transposta de* $\mathcal{D}(z) \in HS(\bigwedge V)$ *é o único homomorfismo*

$$\mathcal{D}(z)^T : \bigwedge V^* \to \bigwedge V^*[\![z]\!],$$

satisfazendo

$$(\mathcal{D}(z)^T\eta)u = \eta(\mathcal{D}(z)u), \qquad \forall (\eta, u) \in \bigwedge V^* \times \bigwedge V. \tag{2.18}$$

Por [14, Proposição 3.6] $\mathcal{D}(z)^T$ é uma derivação de Hasse–Schmidt em $\bigwedge V^*$.

Observação 2.6.1. *Se escrevermos*

$$\mathcal{D}(z) = D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + \cdots \quad D_i : \bigwedge V \to \bigwedge V$$

e

$$\mathcal{D}(z)^T = D_0^T + D_1^T z + D_2^T z^2 + \cdots \quad D_i^T : \bigwedge V^* \to \bigwedge V^*,$$

então dados $\eta \in \bigwedge V^*$ *e* $u \in \bigwedge V$*, temos*

$$(\mathcal{D}(z)^T\eta)u := (D_0^T \circ \eta)(u) + (D_1^T \circ \eta)(u)z + (D_2^T \circ \eta)(u)z^2 + \cdots \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$$

e

$$\eta(\mathcal{D}(z)u) := \eta(D_0(u)) + \eta(D_1(u))z + \eta(D_2(u))z^2 + \cdots \in \mathbb{Q}[\![z]\!].$$

Com isso, a condição em (2.18) *equivale as igualdades de números racionais*

$$(D_i^T \circ \eta)u = \eta(D_i(u)), \quad \forall i \geq 0.$$

2.7 Derivações de Schubert

Tendo em vista a Proposição 2.4.3 e o Lema 2.4.2 construiremos a seguir alguns tipos especiais de HS-derivações considerando os seguintes endomorfismos: $\sigma_1 : V \to V$ tal que $\sigma_1 X^j = X^{j+1}$ e $\sigma_{-1} : V \to V$ tal que $\sigma_{-1}X^j = X^{j-1}$, onde por convenção $X^k = 0$ se $k < 0$.

Definição 2.7.1. *As* derivações de Schubert *em* $\bigwedge V$ *são as HS-derivações* $\sigma_+(z) : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![z]\!]$ *e* $\sigma_-(z) : \bigwedge V \to \bigwedge V[z^{-1}]$ *definidas por*

$$\sigma_+(z) \quad = \quad \sum_{i\geq 0} \sigma_i z^i := \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}\delta(\sigma_1^i) z^i\right), \tag{2.19}$$

$$\sigma_-(z) \quad = \quad \sum_{i\geq 0} \sigma_{-i} z^{-i} := \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}\delta(\sigma_{-1}^i) z^{-i}\right), \tag{2.20}$$

e suas inversas em $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)[\![z]\!]$ *e* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)[z^{-1}]$ *respectivamente:*

$$\overline{\sigma}_+(z) \quad = \quad \sum_{i\geq 0} (-1)^i \overline{\sigma}_i z^i := \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}\delta(\sigma_1^i) z^i\right), \tag{2.21}$$

$$\overline{\sigma}_-(z) \quad = \quad \sum_{i\geq 0} (-1)^i \overline{\sigma}_{-i} z^{-i} := \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}\delta(\sigma_{-1}^i) z^{-i}\right). \tag{2.22}$$

Pelo Lema 2.4.2 vemos facilmente que $\sigma_\pm(z)$ e $\overline{\sigma}_\pm(z)$ são as únicas HS-derivações em $\bigwedge V$ tais que

$$\sigma_+(z) X^j = \sum_{i\geq 0} X^{j+i} z^i, \qquad \overline{\sigma}_+(z) X^j = X^j - X^{j+1} z, \tag{2.23}$$

e

$$\sigma_-(z) X^j = \sum_{i\geq 0} \frac{X^{j-i}}{z^i}, \qquad \overline{\sigma}_-(z) X^j = X^j - \frac{X^{j-1}}{z}. \tag{2.24}$$

Como uma consequência direta dessas definições, temos os seguintes resultados sobre a ação das derivações de Schubert em elementos da forma $\mathbf{X}^r(0)$.

Proposição 2.7.1. *As derivações de Schubert* $\overline{\sigma}_-(z)$ *e* $\sigma_-(z)$ *fixam elementos da forma* $\mathbf{X}^r(0)$.

Demonstração. Para $\overline{\sigma}_-(z)$ podemos ver facilmente que $\overline{\sigma}_-(z) X^0 = X^0$. Agora, supondo por indução que $\overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^{r-1}(0) = \mathbf{X}^{r-1}(0)$ para algum $r - 1 \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^r(0) &= \overline{\sigma}_-(z)(X^{r-1} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0)) \\
&= \overline{\sigma}_-(z) X^{r-1} \wedge \overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^{r-1}(0) \\
&= \left(X^{r-1} - \frac{1}{z} X^{r-2}\right) \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) \\
&= X^{r-1} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) - \frac{1}{z} X^{r-2} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) \\
&= \mathbf{X}^r(0).
\end{aligned}$$

Que $\sigma_-(z)\mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^r(0)$ segue do fato de $\sigma_-(z)$ e $\overline{\sigma}_-(z)$ serem inversas. ∎

Lema 2.7.1. *Para todo $r \geq 1$ e toda partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$, temos que*

$$\overline{\sigma}_{\pm r}\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda} \pm (1^r)).$$

Demonstração. De fato, por definição, $\overline{\sigma}_{\pm r}\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$ é o coeficiente do monômio $z^{\pm r}$ na expansão de

$$\overline{\sigma}_{\pm}(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \overline{\sigma}_{\pm}(z)(X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r}).$$

Como $\overline{\sigma}_{\pm}(z)$ é uma HS-derivação, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{\pm}(z)(X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r}) &= \overline{\sigma}_{\pm}(z)X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\sigma}_{\pm}(z)X^{\lambda_r} \\ &= (X^{r-1+\lambda_1} - X^{r-1+\lambda_1 \pm 1}z^{\pm 1}) \wedge \cdots \wedge (X^{\lambda_r} - X^{\lambda_r \pm 1}z^{\pm 1})\end{aligned}$$

e com isso vemos que o coeficiente de $z^{\pm r}$ é $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda} \pm (1^r))$, como queríamos. ∎

Teorema 2.7.1. [13, Teorema 5.2.2] *Vale a* fórmula de Pieri *para a derivação de Schubert $\sigma_+(z)$:*

$$\sigma_i\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_r(i,\boldsymbol{\lambda})} \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\mu}),$$

onde $\mathcal{P}_r(i,\boldsymbol{\lambda}) := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_r \mid |\boldsymbol{\mu}| = |\boldsymbol{\lambda}| + i \text{ e } \mu_1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \mu_r \geq \lambda_r\}$.

A estrutura de B_r-módulo de $\bigwedge^r V$. Para todo $\mathbf{u} \in \bigwedge^r V$, defina

$$e_i\mathbf{u} = \overline{\sigma}_i\mathbf{u} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad h_i\mathbf{u} = \sigma_i\mathbf{u}. \tag{2.25}$$

Em particular:

$$\overline{\sigma}_+(z)\mathbf{u} = E_r(z) \cdot \mathbf{u} \qquad \text{e} \qquad \sigma_+(z)\mathbf{u} := \frac{1}{E_r(z)}\mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \bigwedge^r V. \tag{2.26}$$

Veremos na proposição a seguir que esta estrutura de produto é compatível com o isomorfismo de espaços vetoriais $\phi_r : B_r \to \bigwedge^r V$ definido em (2.5).

Proposição 2.7.2. *Vale a* fórmula de Giambelli *para a derivação de Schubert $\sigma_+(z)$, a saber:*

$$\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma_+(z))\mathbf{X}^r(0) := \det(\sigma_{\lambda_j - j + i})_{1 \leq i,j \leq r}\mathbf{X}^r(0). \tag{2.27}$$

Portanto $\bigwedge^r V$ é um B_r-módulo livre de posto 1 gerado por $\mathbf{X}^r(0)$.

Demonstração. Para uma prova da fórmula (2.27) referimos [13, Corolário 5.8.2]. Agora notamos que pela definição $h_i\mathbf{u} = \sigma_i\mathbf{u}$ de (2.25), temos

$$\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\mathbf{X}^r(0) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma_+(z))\mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}),$$

o que prova a segunda parte da afirmação. ∎

Usando-se a estrutura de B_r-módulo de $\bigwedge^r V$, podemos definir $\sigma_-(z)$ e $\overline{\sigma}_-(z)$ como mapas $B_r \to B_r[z^{-1}]$ por meio das seguintes igualdades:

$$(\sigma_-(z)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r))\,\mathbf{X}^r(0) = \sigma_-(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \quad \text{e} \quad (\overline{\sigma}_-(z)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r))\,\mathbf{X}^r(0) = \overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}).$$

Proposição 2.7.3. *Para cada $r \geq 0$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$*

$$\sigma_-(z)h_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{h_{n-j}}{z^j} \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_-(z)h_n = h_n - \frac{h_{n-1}}{z}. \tag{2.28}$$

Demonstração. Observe que para $\boldsymbol{\lambda} = (0) \in \mathcal{P}_r$, temos $\mathcal{P}_r(n, \boldsymbol{\lambda}) = \{\boldsymbol{\mu} = (n, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{P}_r\}$. Assim, pela fórmula de Pieri

$$\sigma_n \mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\mu}) = X^{r-1+n} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
(\sigma_-(z)h_n)\, \mathbf{X}^r(0) &= \sigma_-(z)(h_n \mathbf{X}^r(0)) && \text{(Definição de } \sigma_-(z)h_n) \\
&= \sigma_-(z)(X^{r-1+n} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0)) \\
&= \sigma_-(z)X^{r-1+n} \wedge \sigma_-(z)\mathbf{X}^{r-1}(0) && (\sigma_-(z) \in HS(\textstyle\bigwedge V)) \\
&= \sum_{j=0}^{r-1+n} X^{r-1+n-j} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) z^{-j} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} h_{n-j} z^{-j} \right) \mathbf{X}^{r-1}(0).
\end{aligned}$$

A prova da segunda igualdade segue de modo análogo:

$$\begin{aligned}
(\overline{\sigma}_-(z)h_n)\, \mathbf{X}^r(0) &= \overline{\sigma}_-(z)(h_n \mathbf{X}^r(0)) && \text{(Definição de } \overline{\sigma}_-(z)h_n) \\
&= \overline{\sigma}_-(z)(X^{r-1+n} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0)) \\
&= \overline{\sigma}_-(z)X^{r-1+n} \wedge \overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^{r-1}(0) && (\overline{\sigma}_-(z) \in HS(\textstyle\bigwedge V)) \\
&= (X^{r-1+n} - X^{r-1+n-1} z^{-1}) \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) \\
&= (h_n - h_{n-1} z^{-1})\, \mathbf{X}^{r-1}(0).
\end{aligned}$$

∎

Proposição 2.7.4. [14, Teorema 5.7] *Para cada $r \geq 0$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$ os operadores $\sigma_-(z), \overline{\sigma}_-(z) : B_r \to B_r[z^{-1}]$ comutam com determinantes de Schur:*

$$\sigma_-(z)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma_-(z)H_r) \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_-(z)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\overline{\sigma}_-(z)H_r). \tag{2.29}$$

Observação 2.7.1. *A condição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$ é de fato necessária na Proposição 2.7.4, ou seja, se $\ell(\boldsymbol{\lambda}) > r$, então as igualdades em (2.29) não valem em geral. Por exemplo, considere $r = 1$ e $\boldsymbol{\lambda} = (1,1) \in \mathcal{P}_2 \setminus P_1$. No Exemplo 2.1.1 vimos que para $r = 1$, temos $h_i = e_1^i$. Com isso,*

$$\Delta_{(1,1)}(H_1) = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 \\ h_2 & h_1 \end{vmatrix} = e_1 e_1 - e_1^2 = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta_{(1,1)}(\overline{\sigma}_-(z)H_1) = \begin{vmatrix} \overline{\sigma}_-(z)h_1 & \overline{\sigma}_-(z)h_0 \\ \overline{\sigma}_-(z)h_2 & \overline{\sigma}_-(z)h_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} h_1 - z^{-1} & 1 \\ h_2 - h_1 z^{-1} & h_1 - z^{-1} \end{vmatrix}. \\ &= -h_1 z^{-1} + z^{-2}\end{aligned}$$

2.8 Algumas regras de comutação para derivações de Schubert

Para cada $k \geq 1$ denotaremos por $\mathbf{z}_k$ a k-upla ordenada $(z_1, \ldots, z_k)$ de indeterminadas formais. Similarmente, $\mathbf{z}_k^{-1}$ denota a k-upla das inversas formais $(z_1^{-1}, \ldots, z_k^{-1})$. Definimos os mapas $\sigma_\pm(\mathbf{z}_k), \overline{\sigma}_\pm(\mathbf{z}_k) : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k^{-1}]\!]$, respectivamente, por

$$\sigma_\pm(\mathbf{z}_k) := \sigma_\pm(z_1) \cdots \sigma_\pm(z_k) \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_\pm(\mathbf{z}_k) := \overline{\sigma}_\pm(z_1) \cdots \overline{\sigma}_\pm(z_k). \tag{2.30}$$

Os mapas ocorrendo nas fórmulas em (2.30) são HS-derivações multivariadas em $\bigwedge V$, no sentido de que, por exemplo, $\sigma_+(\mathbf{z}_k)(u \wedge v) = \sigma_+(\mathbf{z}_k)u \wedge \sigma_+(\mathbf{z}_k)v$, como é fácil verificar adotando-se a extensão linear das derivações de Schubert a coeficientes polinomiais de acordo com a Definição 2.6.1. O mesmo vale para $\sigma_-(\mathbf{z}_k)$ e $\overline{\sigma}_\pm(\mathbf{z}_k)$. Vale a pena ressaltar que as HS-derivações em (2.30) são simétricas nas indeterminadas z_i e z_i^{-1}.

Proposição 2.8.1. *Sejam z, w variáveis formais arbitrárias. As igualdades*

$$\overline{\sigma}_\pm(z)\overline{\sigma}_\pm(w) \quad = \quad \overline{\sigma}_\pm(w)\overline{\sigma}_\pm(z), \tag{2.31}$$

$$\sigma_\pm(z)\sigma_\pm(w) \quad = \quad \sigma_\pm(w)\sigma_\pm(z), \tag{2.32}$$

valem em $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)[\![z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]\!]$.

Na verdade, nós observamos que a comutatividade do produto das derivações de Schubert é garantida apenas se elas são do mesmo tipo (ambos subscritos "+" ou ambos subscritos "−"). Em geral, para $i, j > 0$, σ_i e σ_{-j} não comutam, visto que σ_{-j} é localmente nilpotente. O exemplo mais simples é: $\sigma_{-1}\sigma_1 X^0 = X^0 \neq 0 = \sigma_1\sigma_{-1}X^0$. O padrão geral é que a comutatividade sempre se mantém a menos de multiplicação por uma função racional.

Proposição 2.8.2.

i) Se $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r \setminus \mathcal{P}_{r-1}$ (i.e. $\ell(\boldsymbol{\lambda}) = r$)*, então $\overline{\sigma}_-(w)$ comuta com ambos $\sigma_+(z)$ e $\overline{\sigma}_+(z)$, ou seja,*

$$\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z) = \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w), \tag{2.33}$$

e

$$\overline{\sigma}_-(w)\overline{\sigma}_+(z) = \overline{\sigma}_+(z)\overline{\sigma}_-(w). \tag{2.34}$$

ii) Se $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{r-1}$*, isto é,* $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^{r-1})) \wedge X^0$*, então*

$$\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \left(1 - \frac{z}{w}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.35}$$

Demonstração. Observamos que $\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^\lambda = \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)X^\lambda$ se $\lambda > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^\lambda &= \overline{\sigma}_-(w)\left(\sum_{j\geq 0} X^{\lambda+j}z^j\right) && \text{(Definição de } \sigma_+(z)X^\lambda\text{)}\\
&= \sum_{j\geq 0}\left(X^{\lambda+j} - \frac{X^{\lambda+j-1}}{w}\right)z^j && \text{(Definição de } \overline{\sigma}_-(w)\text{)}\\
&= \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^\lambda.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\overline{\sigma}_-(w)\overline{\sigma}_+(z)X^\lambda = \overline{\sigma}_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^\lambda,$$

como um cálculo direto nos mostra. Portanto, sob a hipótese $\ell(\boldsymbol{\lambda}) = r$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^{\lambda_r}\\
&= \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^{\lambda_r}\\
&= \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}$$

e o mesmo pode ser argumentado para a comutação de $\overline{\sigma}_+(z)$ com $\overline{\sigma}_-(w)$.
Para provar a igualdade (2.35), observe que

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^0 &= \overline{\sigma}_-(w)\textstyle\sum_{j\geq 0} X^j z^j && \text{(Definição de } \sigma_+(z)X^0\text{)}\\
&= X^0 + \sum_{j\geq 1}\left(X^j - \frac{X^{j-1}}{w}\right)z^j && \text{(Definição de } \sigma_-(w)X^j\text{)}\\
&= X^0 + \sum_{j\geq 1} X^j z^j - \frac{z}{w}\sum_{j\geq 0} X^j z^j\\
&= \left(1 - \frac{z}{w}\right)\sigma_+(z)X^0\\
&= \left(1 - \frac{z}{w}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^0, && (2.36)
\end{aligned}$$

porque $\overline{\sigma}_-(w)$ age em $\mathbf{X}^r(0)$ como a identidade (Cf. Proposição 2.7.1). Agora, se $\ell(\boldsymbol{\lambda}) < r$, isto é, $\lambda_r = 0$, podemos escrever

$$\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^{r-1})) \wedge X^0$$

e, usando o fato de que $\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)$ é uma HS-derivação, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)\left(\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^{r-1})) \wedge X^0\right)\\
&= \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^{r-1})) \wedge \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(z)X^0
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a regra de comutação da fórmula (2.36), a última expressão acima resulta

$$\begin{aligned}&\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}+(1^{r-1}))\wedge\left(1-\frac{z}{w}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)X^0\\&=\left(1-\frac{z}{w}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(w)\wedge\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}$$

Lema 2.8.1. *Para todo* $\mathbf{u}\in\bigwedge^r V$ *temos a seguinte igualdade*

$$\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\lrcorner\mathbf{u}=\overline{\sigma}_-(w)(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\mathbf{u}). \tag{2.37}$$

Demonstração. Começamos observando que

$$\boldsymbol{\partial}(w^{-1})=\sigma_-(w)^T\partial^0 \tag{2.38}$$

De fato, escrevendo $\sigma_-(w)^T=\sum_{i\geq 0}\sigma_{-i}^T w^{-i}$, temos para cada $i\geq 0$:

$$(\sigma_{-i}^T\partial^0)(X^j)=\partial^0(\sigma_{-i}X^j)=\partial^0(X^{j-i})=\delta_{ij}.$$

Agora, para todo $\eta\in\bigwedge^r V$, temos

$$\begin{aligned}\eta(\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\lrcorner\mathbf{u}) &= (\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\wedge\eta)(\mathbf{u}) && \text{(Pela Equação 2.8)}\\
&= (\sigma_-(w)^T\partial^0\wedge\eta)(\mathbf{u}) && \text{(Pela Equação 2.38)}\\
&= \sigma_-(w)^T(\partial^0\wedge\overline{\sigma}_-(w)^T\eta)(\mathbf{u}) && \text{(Integração por partes)}\\
&= \partial^0\wedge\overline{\sigma}_-(w)^T\eta(\sigma_-(w)\mathbf{u}) && \text{(Definição de transposta)}\\
&= \overline{\sigma}_-(w)^T\eta(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\mathbf{u}) && \text{(Pela Equação 2.8)}\\
&= \eta(\overline{\sigma}_-(w)(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\mathbf{u})) && \text{(Definição de transposta).}\end{aligned}$$

A última igualdade prova (2.37), pelo fato de $\eta\in\bigwedge^{r-1}V^*\cong(\bigwedge^{r-1}V)^*$ ter sido escolhido arbitrariamente. ∎

Corolário 2.8.1. *Para cada* $r\geq 1$, *tem-se*

$$\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\lrcorner\sigma_+(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(0)=\overline{\sigma}_-(w)(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(0)).$$

Lema 2.8.2. *A função geradora da base* $(\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}))_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}$ *de* $\bigwedge^r V$ *é:*

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})=\sigma_+(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(0). \tag{2.39}$$

Demonstração. Explorando a estrutura de B_r-módulo de $\bigwedge^r V$, temos

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z}_r)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\mathbf{X}^r(0)$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z}_r)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right)\mathbf{X}^r(0)$$

$$= \prod_{j=1}^{r}(1 + h_1 z_j + h_2 z_j^2 + \cdots)\mathbf{X}^r(0)$$

$$= \frac{1}{E_r(z_1)}\cdot\frac{1}{E_r(z_2)}\cdots\frac{1}{E_r(z_r)}\mathbf{X}^r(0)$$

$$= \sigma_+(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(0).$$

■

Corolário 2.8.2. *Para cada $r \geq 1$ vale a seguinte igualdade:*

$$\Delta_0(\mathbf{z}_r)\sigma_+(\mathbf{z}_r)\mathbf{X}^r(0) = \sigma_+(z_1)X^0 \wedge \cdots \wedge \sigma_+(z_r)X^0.$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 2.8.2, multiplicando-se a Equação (2.39) por $\Delta_0(\mathbf{z}_r)$ e olhando para a Equação (2.7), desde que $\mathbf{X}(z_i) = \sigma_+(z_i)X^0$. ■

Lema 2.8.3. *Para cada $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$, vale a seguinte igualdade:*

$$X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = z^r\overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge X^0 \tag{2.40}$$

Demonstração. Vamos argumentar por indução em $r \geq 1$. Para $r = 1$, temos que:

$$X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)X^\lambda = X^0 \wedge (X^\lambda - X^{\lambda+1}z)$$

$$= -X^0 \wedge z(X^{\lambda+1} - X^\lambda z^{-1})$$

$$= z\,(X^{\lambda+1} - X^\lambda z^{-1}) \wedge X^0$$

$$= z\,\overline{\sigma}_-(z)X^{\lambda+1} \wedge X^0.$$

Agora vamos assumir que a Equação (2.40) seja válida para $r-1 \geq 1$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)(X^{\lambda_1+r-1} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}^{(1)})) \\
&= X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)X^{\lambda_1+r-1} \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}^{(1)}) \\
&= z\,\overline{\sigma}_-(z)X^{\lambda_1+r-1+1} \wedge X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}^{(1)})) \\
&= z\,\overline{\sigma}_-(z)X^{\lambda_1+r-1+1} \wedge z^{r-1}\,\overline{\sigma}_-(z)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}^{(1)} + (1^{r-1})) \wedge X^0 \\
&= z^r\,\overline{\sigma}_-(z)(\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge X^0).
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.8.3. *Para todo* $\mathbf{u} \in \bigwedge^r V$*, temos:*

$$\sigma_+(z)X^0 \wedge \mathbf{u} = z^r \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)(\overline{\sigma}_r \mathbf{u} \wedge X^0).$$

Demonstração. Pelo fato de $\overline{\sigma}_r$ ser um operador $\mathbb{Q}$-linear, podemos supor $\mathbf{u} = \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$. Com isso, temos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_+(z)X^0 \wedge \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \sigma_+(z)(X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})) && \text{(Integração por partes)} \\
&= \sigma_+(z)(z^r\,\overline{\sigma}_-(z)(\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge X^0) && \text{(Pelo Lema 2.8.3)} \\
&= z^r \sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)(\overline{\sigma}_r \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \wedge X^0).
\end{aligned}
$$

■

3 A $\mathrm{gl}(V)$ estrutura da álgebra polinomial B_r

O objetivo deste capítulo é obter uma descrição explícita da álgebra polinomial $B_r = \mathbb{Q}[e_1, \ldots, e_r]$ como uma representação da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(V) = \mathrm{gl}_\infty(\mathbb{Q})$.

Para isso vamos mostrar que B_r é um $\mathrm{gl}(V)$-módulo e em seguida calcular a função geradora da ação dos elementos da base de $\mathrm{gl}(V)$ sobre B_r.

Proposição 3.0.1. *Dados $X^i \otimes \partial^j \in \mathrm{gl}(V) = V \otimes V^*$ e $u \in \bigwedge V$. Temos que*

$$\delta(X^i \otimes \partial^j)(u) = X^i \wedge (\partial^j \lrcorner u), \tag{3.1}$$

onde δ é o mapa introduzido na Proposição 2.4.3.

Demonstração. Como $u \in \bigwedge V$ é combinação linear finita de elementos homogêneos e $\delta(X^i \otimes \partial^j)$ é um homomorfismo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in \bigwedge^r V$. Agora procedemos por indução em r. Para $r = 1$, ou seja, $u \in V$, temos que

$$\delta(X^i \otimes \partial^j)(u) = \partial^j(u) X^i = X^i(\partial^j \lrcorner u).$$

Suponha que (3.1) seja válida para cada $u \in \bigwedge^i V$, com $1 \leq i \leq r-1$. Note que todo elemento $v \in \bigwedge^r V$ é uma soma finita de elementos da forma $u \wedge w$ com $u \in V$ e $w \in \bigwedge^{r-1} V$, assim, é suficiente considerar $v = u \wedge w$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\delta(X^i \otimes \partial^j)(u \wedge w) &= \partial^j(u) X^i \wedge w + u \wedge (X^i \wedge \partial^j \lrcorner w) \\
&= X^i \wedge (\partial^j(u) w - u \wedge \partial^j \lrcorner w) \\
&= X^i \wedge (\partial^j \lrcorner (u \wedge w)).
\end{aligned}$$

∎

A Proposição 3.0.1 nos permite definir em $\bigwedge V$ uma estrutura de $\mathrm{gl}(V)$-módulo por meio do produto $\star : \mathrm{gl}(V) \times \bigwedge V \to \bigwedge V$ que, nos elementos da base de $\mathrm{gl}(V)$, é dado por

$$(X^i \otimes \partial^j) \star u = \delta(X^i \otimes \partial^j)(u) = X^i \wedge (\partial^j \lrcorner u).$$

O exemplo a seguir ilustra a referida estrutura nos casos em que $r = 1$ e $r = 2$.

Exemplo 3.0.1. Considerando-se $r = 1$, temos $B_1 = \mathbb{Q}[e_1]$ e $E_1(z) = 1 - e_1 z$. Assim, de

$$\frac{1}{E_1(z)} = \frac{1}{1 - e_1 z} = \exp\left(\sum_{i \geq 1} x_i z^i\right)$$

concluímos que $x_i = \dfrac{{e_1}^i}{i}$. Claramente V é um $\mathrm{gl}(V)$-módulo pelo produto $\varphi \cdot v := \varphi(v)$. Agora tornamos V em um B_1-módulo livre de posto 1 definindo

$$e_1^i \cdot X^j = X^{i+j},$$

em particular, $e_1^i \cdot X^0 = X^i$. Assim, a ação de um elemento $E_{ij} = X^i \otimes \partial^j$ da base de gl(V) é determinada como segue:

$$(E_{ij} \star e_1^k)X^0 = (X^i \otimes \partial^j)(e_1^k X^0) = (X^i \otimes \partial^j)X^k = \delta_{jk}X^i$$

Agora consideramos a série geradora da base de gl(V)

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \sum_{i,j \geq 0} E_{ij} z^i w^{-j}.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{E}(z, w^{-1}) \star e_1^k\right) X^0 &= \sum_{i,j\geq 0} (X^i \otimes \partial^j) z^i w^{-j} (e_1^k) X^0 \\
&= \sum_{i,j\geq 0} (X^i \otimes \partial^j)(X^k) z^i w^{-j} \\
&= w^{-k} \sum_{i\geq 0} X^i z^i \\
&= w^{-k} \sigma_+(z) X^0.
\end{aligned}$$

Neste exemplo podemos ver como a derivação de Schubert $\sigma_+(z)$ aparece de uma maneira bastante natural a partir da definição do produto $\star$ que fornece a gl(V)-estrutura de B_1.

3.1 A gl(V) estrutura de B_r revisitada

Nesta seção nós revisitamos [15, Teorema 4.3], obtendo uma expressão mais explícita e elegante para realizar a $\mathrm{gl}(V) := V \otimes V^*$ estrutura do anel B_r.

Na Seção 2.5 do Capítulo 2 aprendemos a expressar o endomorfismo usual de contração

$$\beta\lrcorner : \bigwedge V \to \bigwedge V, \quad \beta \in V^*$$

via o seguinte diagrama

$$\beta\lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) := \begin{vmatrix} \beta(X^{r-1+\lambda_1}) & \beta(X^{r-2+\lambda_2}) & \cdots & \beta(X^{\lambda_r}) \\ \\ X^{r-1+\lambda_1} & X^{r-2+\lambda_2} & \cdots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

que significa que o escalar $(-1)^{i+1}\beta(X^{r-i+\lambda_i})$ é o coeficiente do elemento de $\bigwedge^{r-1} V$ obtido removendo-se o i-ésimo fator exterior do produto wedge dos elementos da segunda linha, a saber $X^{r-1+\lambda_1} \wedge \cdots \wedge X^{\lambda_r} = \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$. Por exemplo, segue da definição (3.2) que

$$\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^r(0) = (-1)^{r-1}\mathbf{X}^{r-1}((1^{r-1})).$$

Usando a definição da derivação de Schubert $\sigma_+(z)$ como na Equação (2.23), a função geradora $\mathcal{E}(z, w^{-1})$ da base $(X^i \otimes \partial^j)_{i,j\geq 0}$ de gl(V) pode ser escrita como

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}) = \mathbf{X}(z) \otimes \boldsymbol{\partial}(w^{-1}) = \sigma_+(z)X^0 \otimes \boldsymbol{\partial}(w^{-1})$$

e age sobre $\bigwedge V$ como:

$$\mathcal{E}(z,w^{-1})\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_+(z)X^0 \wedge (\boldsymbol{\partial}(w^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})). \tag{3.3}$$

A seguinte proposição reformula de um modo mais elegante e transparente a descrição da gl(V) estrutura de $\bigwedge^r V$ proposta em [15, Teorema 4.3].

Proposição 3.1.1. *A seguinte igualdade vale:*

$$\mathcal{E}(z,w^{-1})\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{z^{r-1}}{w^{r-1}}\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)\left(\begin{vmatrix} w^{-\lambda_1} & w^{-\lambda_2+1} & \dots & w^{r-1-\lambda_r} & 0 \\ & & & & \\ X^{r+\lambda_1} & X^{r-1+\lambda_2} & \dots & X^{1+\lambda_r} & X^0 \end{vmatrix}\right). \tag{3.4}$$

Demonstração. Aplicando-se a equação (3.3) e o diagrama (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z,w^{-1})\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \sigma_+(z)X^0 \wedge (\boldsymbol{\partial}(w^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})) \\ &= \sigma_+(z)X^0 \wedge \begin{vmatrix} \boldsymbol{\partial}(w^{-1})X^{r-1+\lambda_1} & \dots & \boldsymbol{\partial}(w^{-1})X^{\lambda_r} \\ & & \\ X^{r-1+\lambda_1} & \dots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_+(z)X^0 \wedge \begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & \dots & w^{-\lambda_r} \\ & & \\ X^{r-1+\lambda_1} & \dots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Usando a integração por partes (2.16) para a derivação de Schubert $\sigma_+(z)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z,w^{-1})\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \sigma_+(z)\left(X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z)\begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & \dots & w^{-\lambda_r} \\ & & \\ X^{r-1+\lambda_1} & \dots & X^{\lambda_r} \end{vmatrix}\right) \\ &= \sigma_+(z)\left((-1)^{r-1}\begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & \dots & w^{-\lambda_r} \\ & & \\ \overline{\sigma}_+(z)X^{r-1+\lambda_1} & \dots & \overline{\sigma}_+(z)X^{\lambda_r} \end{vmatrix} \wedge X^0\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por (2.23) e (2.24) temos que $\overline{\sigma}_+(z)X^j = -z\,\overline{\sigma}_-(z)X^{j+1}$. Portanto (3.5) pode ser reescrita como

$$\sigma_+(z)\left((-1)^{r-1}\begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & \dots & w^{-\lambda_r} \\ & & \\ -z\overline{\sigma}_-(z)X^{r+\lambda_1} & \dots & -z\overline{\sigma}_-(z)X^{1+\lambda_r} \end{vmatrix} \wedge X^0\right)$$

$$= \sigma_+(z)\left(z^{r-1}\begin{vmatrix} w^{-r+1-\lambda_1} & \dots & w^{-\lambda_r} & 0 \\ & & & \\ \overline{\sigma}_-(z)X^{r+\lambda_1} & \dots & \overline{\sigma}_-(z)X^{1+\lambda_r} & X^0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{z^{r-1}}{w^{r-1}}\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)\begin{vmatrix} w^{-\lambda_1} & w^{-\lambda_2+1} & \dots & w^{r-1-\lambda_r} & 0 \\ & & & & \\ X^{r+\lambda_1} & X^{r-1+\lambda_2} & \dots & X^{1+\lambda_r} & X^0 \end{vmatrix}$$

que é a expressão desejada. ∎

Exemplo 3.1.1. *Vamos calcular*

$$(X^2 \otimes \partial^3)\mathbf{X}^2(2,1). \tag{3.6}$$

Usaremos a seguinte notação: se $f(z,w)$ é uma série de Laurent formal, vamos denotar por $[z^m w^n]f(z,w)$ o coeficiente do monômio $z^m w^n$. Primeiro calculamos (3.6) diretamente:

$$(X^2 \otimes \partial^3)\mathbf{X}^2(2,1) = X^2 \wedge \partial^3 \lrcorner (X^3 \wedge X^1) = X^2 \wedge \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \\ X^3 & X^1 \end{vmatrix} \right) = X^2 \wedge X^1.$$

Agora, usamos a fórmula (3.4). Assim, $(X^2 \otimes \partial^3)\mathbf{X}^2(2,1)$ é o coeficiente de $z^2 w^{-3}$ na expansão de $\mathcal{E}(z, w^{-1})\mathbf{X}^2(2,1)$:

$$\begin{aligned}
[z^2w^{-3}]\mathcal{E}(z,w^{-1})\mathbf{X}^2(2,1) &= [z^2w^{-3}]\frac{z}{w}\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z) \left(\begin{vmatrix} w^{-2} & 1 & 0 \\ \\ X^4 & X^2 & X^0 \end{vmatrix} \right) \\
&= [z^2w^{-3}]\frac{z}{w}\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z) \left(w^{-2}X^2 \wedge X^0 - X^4 \wedge X^0 \right) \\
&= [z^2w^{-3}]\frac{z}{w}\sigma_+(z) \left(w^{-2}\left(X^2 - \frac{X^1}{z}\right) \wedge X^0 - \left(X^4 - \frac{X^3}{z}\right) \wedge X^0 \right) \\
&= [z^2w^{-3}]\frac{z}{w^3}\sigma_+(z) \left(X^2 \wedge X^0 - \frac{1}{z} X^1 \wedge X^0 \right) \\
&= [z^2w^{-3}]\frac{1}{w^3}\sigma_+(z) \left(zX^2 \wedge X^0 - X^1 \wedge X^0 \right) \\
&= [z^2w^{-3}]\frac{z^2}{w^3} \left(X^2 \wedge X^1 + X^3 \wedge X^0 - X^1 \wedge X^2 - X^2 \wedge X^1 - X^3 \wedge X^0 \right) \\
&= X^2 \wedge X^1,
\end{aligned}$$

que coincide com o resultado que obtivemos por cálculo direto.

Observação 3.1.1. Apesar de a fórmula exibida na Proposição 3.1.1 ser bastante manuseável e explícita, existe ainda uma dependência sobre $\boldsymbol{\lambda}$ que desejamos remover. A ideia para fazer isso é somar todas as expressões acima para $\boldsymbol{\lambda}$ variando sobre todas as partições. Melhor dizendo, iremos aplicar $\mathcal{E}(z,w)$ para a série geradora $\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)$.

Pelo Lema 2.8.2 e usando uma notação exponencial para cada $\dfrac{1}{E_r(t_j)}$ vemos que essa série é

$$\exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i p_i(\mathbf{t}_r) \right) \mathbf{X}^r(0),$$

onde $p_i(\mathbf{t}_r) := t_1^i + \cdots + t_r^i$.

3.2 Uma nova expressão para a gl(V) estrutura de B_r

Lembremos que a estrutura de B_r-módulo de $\bigwedge^r V$, estabelecida na Proposição 2.7.2, mapeia séries de potências formais a coeficientes em B_r a séries de potências formais a coeficientes em $\bigwedge^r V$ via o mapa $\phi \mapsto \phi \cdot \mathbf{X}^r(0)$.

Além disso, definimos em B_r uma estrutura de gl(V)-módulo via o $\star$-produto, dado por

$$[(X^i \otimes \partial^j) \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)]\mathbf{X}^r(0) := X^i \wedge (\partial^j \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})).$$

Definição 3.2.1. *Denotamos por $\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r)$ a única série de potências formal nas indeterminadas $(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r)$ a coeficientes em B_r tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sum_{((i,j),\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{N}^2 \times \mathcal{P}_r} \left[X^i \otimes \partial^j \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r} \mathbf{X}(z) \wedge (\boldsymbol{\partial}(w^{-1}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Claramente $\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) \in B_r[\![z, w^{-1}, \mathbf{t}_r]\!]$, e o propósito desta seção é determinar uma expressão do tipo exponencial para

$$\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) := \sum_{((i,j),\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{N}^2 \times \mathcal{P}_r} \left[X^i \otimes \partial^j \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r) \in B_r[\![z, w^{-1}, \mathbf{t}_r]\!].$$

Agora algumas preliminares e resultados técnicos são necessários, iniciando-se com:

Lema 3.2.1. *Seja t uma variável formal sobre $\mathbb{Q}$. A seguinte igualdade vale para todo $r \geq 2$:*

$$\sigma_+(t)\mathbf{X}^r(0) = \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0).$$

Demonstração. Primeiro notamos que

$$\sigma_+(t)X^i = X^i + t\sigma_+(t)X^{i+1}. \tag{3.8}$$

A prova do lema segue por indução em r. Para $r = 2$ temos que

$$\sigma_+(t)(X^1 \wedge X^0) = \sigma_+(t)X^1 \wedge \sigma_+(t)X^0 = \sigma_+(t)X^1 \wedge (X^0 + t\sigma_+(t)X^1) = (\sigma_+(t)X^1) \wedge X^0.$$

Agora suponha que a propriedade seja válida para $r - 1 \geq 2$, então:

$$\begin{aligned} \sigma_+(t)\mathbf{X}^r(0) &= \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge \sigma_+(t)\mathbf{X}^{r-1}(0) \quad (\sigma_+(t) \in HS(\textstyle\bigwedge V)) \\ &= \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge (\sigma_+(t)X^{r-2} \wedge \mathbf{X}^{r-2}(0)) \quad \text{(hipótese de indução)} \\ &= \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge (\sigma_+(t)X^{r-2} \wedge X^{r-3} \wedge \cdots \wedge X^0) \\ &= \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge (X^{r-2} + t\sigma_+(t)X^{r-1}) \wedge X^{r-3} \wedge \cdots \wedge X^0 \quad \text{(Eq. (3.8))} \\ &= \sigma_+(t)X^{r-1} \wedge \mathbf{X}^{r-1}(0) \end{aligned}$$

como desejamos. ■

Proposição 3.2.1. *As derivações de Schubert multivariáveis satisfazem as seguintes igualdades:*

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 = X^0 + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_r)X^i \tag{3.9}$$

$$\sigma_+(\mathbf{t}_r)X^0 = X^0 + \sum_{i\geq 1} h_i(\mathbf{t}_r)X^i, \tag{3.10}$$

onde $e_i(\mathbf{t}_r)$ e $h_i(\mathbf{t}_r)$ são, respectivamente, os polinômios simétrico elementar e simétrico completo de grau i nas indeterminadas $t_1, \ldots, t_r$.

Demonstração. Vamos provar a Equação (3.9) por indução em r. O caso em que $r = 1$ é muito simples de verificar. Agora assuma que para $r - 1 \geq 1$ tenhamos

$$\overline{\sigma}_+(t_1)\cdots\overline{\sigma}_+(t_{r-1})X^0 = \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_{r-1})X^i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 = \overline{\sigma}_+(t_r)\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_{r-1})X^0 &= \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i(X^i - t_r X^{i+1})e_i(\mathbf{t}_{r-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_{r-1})X^i + \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i+1} t_r e_i(\mathbf{t}_{r-1})X^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_{r-1})X^i + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i t_r e_{i-1}(\mathbf{t}_{r-1})X^i \\
&= X^0 + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i\left(e_i(\mathbf{t}_{r-1}) + t_r e_{i-1}(\mathbf{t}_{r-1})\right)X^i + (-1)^r t_r e_{r-1}(\mathbf{t}_{r-1})X^r \\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_r)X^i.
\end{aligned}$$

A igualdade no item (3.10) é uma consequência de (3.9), uma vez que $\sigma_+(\mathbf{t}_r)$ e $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)$ são inversas uma da outra em $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge V)[\![\mathbf{t}_r]\!]$. ∎

Lema 3.2.2. *No anel de séries de potências formais $\mathbb{Q}[\![u]\!]$ a seguinte igualdade vale:*

$$1 - u = \exp\left(-\sum_{i\geq 1}\frac{u^i}{i}\right).$$

Demonstração. Isso é bem conhecido. Apenas escreva

$$\begin{aligned}
1 - u = \exp\left(\log(1-u)\right) = \exp\left(-\int\frac{du}{1-u}\right) &= \exp\left(-\int(1 + u + u^2 + \cdots)du\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{i\geq 1}\frac{u^i}{i}\right).
\end{aligned}$$

∎

Proposição 3.2.2. *As seguintes igualdades valem:*

$$\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0), \tag{3.11}$$

$$\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) = \exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0). \tag{3.12}$$

Demonstração. Vamos provar a Equação (3.11). Primeiros notamos que para uma única variável formal t temos:

$$\sigma_-(w)\sigma_+(t)X^0 = \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{t^i}{w^i}\right)\sigma_+(t)X^0$$

De fato, pela definição de $\sigma_+(t)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_-(w)\sigma_+(t)X^0 &= \sigma_-(w)\left(\sum_{i\geq 0}X^i t^i\right) = X^0 + \sigma_-(w)\left(\sum_{i\geq 0}X^{i+1}t^{i+1}\right) \\
&= \sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i}X^{i-j}\frac{t^i}{w^j} = \left(\sum_{i\geq 0}\frac{t^i}{w^i}\right)\sigma_+(t)X^0 \\
&= \frac{1}{1-\dfrac{t}{w}}\sigma_+(t)X^0 = \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{t^i}{w^i}\right)\sigma_+(t)X^0
\end{aligned}$$

onde na última igualdade nós usamos o Lema 3.2.2. Para $r > 1$, considerando o determinante de Vandermonde

$$\Delta_0(\mathbf{t}_r) = \prod_{1\leq i<j\leq r}(t_j - t_i), \tag{3.13}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\mathbf{t}_r)\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sigma_-(w)(\sigma_+(t_1)X^0\wedge\cdots\wedge\sigma_+(t_r)X^0) && \text{(Pelo Lema 2.8.2)} \\
&= \sigma_-(w)\sigma_+(t_1)X^0\wedge\cdots\wedge\sigma_-(w)\sigma_+(t_r)X^0 && (\sigma_-(w)\in HS(\textstyle\bigwedge V))
\end{aligned}$$

Agora, em virtude do Lema 3.2.2, a última expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t_1^n}{w^n}\right)\cdots\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t_r^n}{w^n}\right)\left(\sigma_+(t_1)X^0\wedge\cdots\wedge\sigma_+(t_r)X^0\right) \\
&= \Delta_0(\mathbf{t}_r)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0),
\end{aligned}$$

da qual segue (3.11), uma vez que $\Delta_0(\mathbf{t}_r)$ não é um divisor de zero em $\mathbb{Q}[\mathbf{t}_r]$. A prova de (3.12) é similar e nós iremos omiti-la. ∎

Lema 3.2.3. *Sejam ℓ um inteiro não-negativo e (ℓ^r) a partição com r partes iguais a ℓ. Para cada $r \geq 1$ temos as seguintes identidades:*

1. $\overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^r(\ell^r) = \mathbf{X}^r(\ell^r) + \sum_{i=1}^r (-1)^i z^i\, \mathbf{X}^r((\ell+1)^i \ell^{r-i})$ *e*
2. $e_i\mathbf{X}^r(\ell^r) := \overline{\sigma}_i\mathbf{X}^r(\ell^r) = \mathbf{X}^r((\ell+1)^i\ell^{r-i})$, *para* $0 \leq i \leq r$.

Demonstração. O segundo item é uma consequência direta do primeiro. Assumindo $r = 1$, o item (1) pode ser visto como segue

$$\overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^1(\ell) = \overline{\sigma}_+(z)X^\ell = X^\ell - zX^{\ell+1} = \mathbf{X}^1(\ell) - z\mathbf{X}^1(\ell+1).$$

Assumindo que a afirmação seja válida para algum $r \geq 1$, a prova segue por indução em r.

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^{r+1}(\ell^{r+1}) \\
&= \overline{\sigma}_+(z)(X^{\ell+r} \wedge \mathbf{X}^r(\ell^r)) \\
&= (X^{\ell+r} - zX^{\ell+r+1}) \wedge \overline{\sigma}_+(z)\mathbf{X}^r(\ell^r) && (\overline{\sigma}_+(z) \in HS(\textstyle\bigwedge V) \text{ e Equação } (2.23)) \\
&= (X^{\ell+r} - zX^{\ell+r+1}) \wedge \left(\mathbf{X}^r(\ell^r) + \sum_{i=1}^r (-1)^i z^i\, \mathbf{X}^r((\ell+1)^i\ell^{r-i})\right) && \text{(Hipótese de indução)} \\
&= X^{\ell+r} \wedge \mathbf{X}^r(\ell^r) - zX^{\ell+r+1} \wedge \mathbf{X}^r(\ell^r) + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} z^{i+1} \cdot X^{\ell+r+1} \wedge \mathbf{X}^r((\ell+1)^i\ell^{r-i}) \\
&= \mathbf{X}^{r+1}(\ell^{r+1}) - z\mathbf{X}^{r+1}((\ell+1)\ell^r) + \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^i z^i \cdot X^{\ell+r+1} \wedge \mathbf{X}^r((\ell+1)^{i-1}\ell^{r-(i-1)}) \\
&= \mathbf{X}^{r+1}(\ell^{r+1}) - z\mathbf{X}^{r+1}((\ell+1)\ell^r) + \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^i z^i \cdot \mathbf{X}^{r+1}((\ell+1)^i\ell^{r+1-i}) \\
&= \mathbf{X}^{r+1}(\ell^{r+1}) + \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i z^i \cdot \mathbf{X}^{r+1}((\ell+1)^i\ell^{r+1-i}).
\end{aligned}$$

∎

Lema 3.2.4. *As seguintes regras de comutação valem:*

1. $\partial^0 \lrcorner \sigma_+(t)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_+(t)(\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}))$;
2. $\partial^0 \lrcorner \overline{\sigma}_+(t)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \overline{\sigma}_+(t)(\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}))$.

Demonstração. Se o comprimento da partição é exatamente r, ou seja, $\lambda_r \neq 0$, então ambos os lados de (1) são iguais a zero. Por outro lado, se $\ell(\boldsymbol{\lambda}) < r$, então podemos escrever

$$\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge X^0.$$

Desse modo, o lado esquerdo de (1) é

$$\begin{aligned}
\partial^0 \lrcorner \sigma_+(t)(\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge X^0) &= \partial^0 \lrcorner (\sigma_+(t)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \wedge \sigma_+(t)X^0) \\
&= (-1)^{r-1}\sigma_+(t)\mathbf{X}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda} + (1^r)) \\
&= \sigma_+(t)(\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

A prova do item (2) é completamente análoga. ∎

Para o próximo lema vamos precisar dos dois seguintes polinômios:

$$E_r(w) = 1 - e_1 w + \cdots + (-1)^r e_r w^r \in B_r[w]$$

e

$$E_r\left(\mathbf{t}_r, \frac{1}{w}\right) = 1 - e_1(\mathbf{t}_r)w^{-1} + \cdots + (-1)^r e_r(\mathbf{t}_r)w^{-r} = \prod_{j=1}^{r}(1 - t_j w^{-1}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{t}_r, w^{-1}].$$

Lema 3.2.5. *Vale a seguinte identidade:*

$$\overline{\sigma}_+(w)\overline{\sigma}_{r-1}\mathbf{X}^{r-1}(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 = \left(E_r(w) + (-1)^{r+1}e_r w^r E_r\left(\mathbf{t}_r, \frac{1}{w}\right)\right)\mathbf{X}^r(0).$$

Demonstração. Primeiro notamos que $\overline{\sigma}_{r-1}\mathbf{X}^{r-1}(0) = \mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1})$ e, em virtude do item (1) do Lema 3.2.3, temos

$$\overline{\sigma}_+(w)\overline{\sigma}_{r-1}\mathbf{X}^{r-1}(0) = \mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i w^i\, \mathbf{X}^{r-1}(2^i 1^{r-1-i}).$$

A Proposição 3.2.1 nos diz que

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i e_i(\mathbf{t}_r)X^i,$$

com isso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 &= \mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge X^0 + (-1)^r e_r(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge X^r \\
&= \mathbf{X}^r(0) + (-1)^r(-1)^{r-1}e_r(\mathbf{t}_r)e_r\mathbf{X}^r(0) \\
&= \left(e_0 + (-1)^r e_r(-1)^{r-1}e_r(\mathbf{t}_r)\right)\mathbf{X}^r(0).
\end{aligned}$$

Agora, para cada $1 \leq i \leq r-1$ podemos escrever

$$\mathbf{X}^{r-1}(2^i 1^{r-1-i}) = X^r \wedge \cdots \wedge X^{r+1-i} \wedge X^{r-1-i} \wedge X^{r-2-i} \wedge \cdots \wedge X^1,$$

e com isso

$$\mathbf{X}^{r-1}(2^i 1^{r-1-i}) \wedge X^0 = \mathbf{X}^r(1^i 0^{r-i}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&(-1)^i w^i\, \mathbf{X}^{r-1}(2^i 1^{r-1-i}) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 \\
&= (-1)^i w^i\, \mathbf{X}^{r-1}(2^i 1^{r-1-i}) \wedge (X^0 + (-1)^{r-i}e_{r-i}(\mathbf{t}_r)X^{r-i}) \\
&= (-1)^i w^i\, \mathbf{X}^r(1^i 0^{r-i}) + (-1)^i(-1)^{r-i}(-1)^{r-i-1}w^i e_{r-i}(\mathbf{t}_r)X^r \wedge \cdots \wedge X^1 \\
&= \left((-1)^i e_i w^i + (-1)^r e_r \cdot (-1)^{r-i-1}e_{r-i}(\mathbf{t}_r)w^i\right)\mathbf{X}^r(0).
\end{aligned}$$

Adicionando-se todas as parcelas acima, obtemos o resultado desejado. ∎

Lema 3.2.6. *Para cada $n \geq 1$, temos que*

(i) $\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^j = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i e_i(\mathbf{y}_n)X^{j+i}$;

(ii) $\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)\mathbf{X}^r(0) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_{r,n}}(-1)^{|\boldsymbol{\lambda}|}e_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}_n)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$.

Demonstração. Vamos provar o item (i) por indução em n. Para $n = 1$, temos

$$\overline{\sigma}_+(y)X^j = X^j - yX^{j+1} = e_0X^j - e_1(y)X^{j+1}.$$

Supondo que a equação vale para $n-1 \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^j &= \overline{\sigma}_+(y_n)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i e_i(\mathbf{y}_{n-1})X^{j+i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i e_i(\mathbf{y}_{n-1})(X^{j+i} - y_nX^{j+i+1})\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i e_i(\mathbf{y}_{n-1})X^{j+i} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i y_n\, e_{i-1}(\mathbf{y}_{n-1})X^{j+i}\\
&= X^{j+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left[e_i(\mathbf{y}_{n-1}) + y_n\, e_{i-1}(\mathbf{y}_{n-1})\right]X^{j+i} + (-1)^n\, e_n(\mathbf{y}_n)X^{j+n}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i e_i(\mathbf{y}_n)X^{j+i}.
\end{aligned}$$

Para o item (ii) escrevemos os vetores $\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^{r-1}, \ldots, \overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^0$ com relação à base ordenada $(X^0, \ldots, X^{n+r-1})$, conforme a igualdade no item (i). O resultado segue da relação entre o produto exterior $\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^{r-1} \wedge \cdots \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^0$ e os menores de ordem r da matriz cujas colunas são os coeficientes de $\overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^{r-1}, \ldots, \overline{\sigma}_+(\mathbf{y}_n)X^0$. ∎

Agora vamos trabalhar a Definição 3.2.1 de $\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r)$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}\mathbf{X}(z) \wedge (\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\lrcorner\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r))\\
&= \mathbf{X}(z) \wedge (\boldsymbol{\partial}(w^{-1})\lrcorner\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)) && \text{(Eq. (2.39))}\\
&= \sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_-(w)\left(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\right). && \text{(Corolário 2.8.1)}
\end{aligned}$$

Pela Equação (3.11) da Proposição 3.2.2,

$$\sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_-(w)\left(\partial^0\lrcorner\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\right)$$

pode ser reescrita como

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_-(w)\left(\partial^0\lrcorner\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\right)$$

Pelo Lema 3.2.4 essa última expressão resulta em

$$\begin{aligned}&\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(z)X^0\wedge\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)(\partial^0\lrcorner\mathbf{X}^r(0))\\ &=(-1)^{r-1}\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(z)X^0\wedge\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Segue do item (1) da Proposição 2.8.2 que $\sigma_+(\mathbf{t}_r)$ comuta com $\overline{\sigma}_-(w)$ quando aplicado em $\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1})$. Além disso, um cálculo simples usando a igualdade $\overline{\sigma}_+(w)X^j = -w\,\overline{\sigma}_-(w)X^{j+1}$ nos mostra que

$$\overline{\sigma}_-(w)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1})=\left(\frac{-1}{w}\right)^{r-1}\overline{\sigma}_+(w)\mathbf{X}^{r-1}(0).\tag{3.15}$$

Com isso,

$$\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1})=\frac{(-1)^{r-1}}{w^{r-1}}\overline{\sigma}_+(w)\,\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(0).\tag{3.16}$$

Substituindo a expressão acima na Equação (3.14), obtemos

$$\frac{1}{w^{r-1}}\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)\right)\sigma_+(z)X^0\wedge\left(\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(0)\right).\tag{3.17}$$

Utilizando integração por partes e a segunda relação de (2.26), obtemos

$$\sigma_+(z)X^0\wedge\left(\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(0)\right)=\frac{1}{E_r(z)}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{E_r(t_i)}\left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)\mathbf{X}^{r-1}(0)\right).$$

Neste ponto introduzimos novas variáveis formais $(x_n)_{n\geq 1}$ por meio da igualdade

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1}x_nz^n\right)=\frac{1}{E_r(z)}$$

de modo que

$$\frac{1}{E_r(z)}\cdot\frac{1}{E_r(t_1)}\cdots\frac{1}{E_r(t_r)}=\exp\left(\sum_{n\geq 1}x_np_n(z,\mathbf{t}_r)\right).$$

Por conseguinte, nossa expressão (3.17) resulta em

$$\frac{1}{w^{r-1}}\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right)+x_np_n(z,\mathbf{t}_r)\right)\left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)\mathbf{X}^{r-1}(0)\right).\tag{3.18}$$

No que segue, apresentamos alguns exemplos que motivaram a dedução de uma fórmula determinantal para $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)\mathbf{X}^{r-1}(0)$.

Exemplo 3.2.1. Vamos considerar o caso $r=2$ e calcular $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_2)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)X^0$. Utilizando-se a Equação (3.9) e o Lema 3.2.6(i), temos

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_2)X^0=X^0-e_1(\mathbf{t}_2)X^1+e_2(\mathbf{t}_2)X^2$$

e

$$\overline{\sigma}_+(z,w)X^0=X^0-e_1(z,w)X^1+e_2(z,w)X^2.$$

Com isso,

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_2)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z,w)X^0 = (e_1(z,w) - e_1(\mathbf{t}_2))X^0 \wedge X^1 - (e_2(z,w) - e_2(\mathbf{t}_2))X^2 \wedge X^0$$

$$+ (e_2(z,w)e_1(\mathbf{t}_2) - e_2(\mathbf{t}_2)e_1(z,w))X^2 \wedge X^1$$

$$= \begin{vmatrix} -e_1(\mathbf{t}_2) & -e_1(z,w) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} X^1 \wedge X^0 + \begin{vmatrix} e_2(\mathbf{t}_2) & e_2(z,w) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} X^2 \wedge X^0$$

$$\begin{vmatrix} e_2(\mathbf{t}_2) & e_2(z,w) \\ -e_1(\mathbf{t}_2) & -e_1(z,w) \end{vmatrix} X^2 \wedge X^1.$$

A última expressão pode ser construída como a soma dos menores 2×2 da matriz

$$\begin{array}{c} X^2\wedge \\ X^1\wedge \\ X^0\wedge \end{array} \begin{pmatrix} e_2(\mathbf{t}_2) & e_2(z,w) \\ -e_1(\mathbf{t}_2) & -e_1(z,w) \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cujas colunas são os coeficientes dos vetores $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_2)X^0$ e $\overline{\sigma}_+(z,w)X^0$, respectivamente, com respeito a base (X^2, X^1, X^0) e cada menor é o coeficiente do correspondente $X^i \wedge X^j$ sempre que a k-ésima linha é suprimida. Agora, observamos que

$$\begin{aligned} X^1 \wedge X^0 &= \mathbf{X}^2(0) \\ X^2 \wedge X^0 &= e_1\mathbf{X}^2(0) \\ X^2 \wedge X^1 &= e_2\mathbf{X}^2(0) \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z,w)X^1 \wedge X^0 = \begin{vmatrix} e_2(\mathbf{t}_2) & e_2(z,w) & 1 \\ -e_1(\mathbf{t}_2) & -e_1(z,w) & -e_1 \\ 1 & 1 & e_2 \end{vmatrix} \mathbf{X}^2(0)$$

Exemplo 3.2.2. Neste exemplo assumimos $r = 3$ e procedemos do mesmo modo como no exemplo anterior. Pelo Lema 3.2.6 podemos escrever

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0 = X^0 - e_1(\mathbf{t}_3)X^1 + e_2(\mathbf{t}_3)X^2 - e_3(\mathbf{t}_3)X^3$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_+(z,w)X^1 \wedge X^0 = {}& e_{(2,2)}X^3 \wedge X^2 - e_{(2,1)}X^3 \wedge X^1 + e_2X^3 \wedge X^0 + \\ & e_{(1,1)}X^2 \wedge X^1 - e_1X^2 \wedge X^0 + X^1 \wedge X^0. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z,w)X^1 \wedge X^0 = {}& \\ & \Big(e_{(1,1)}(z,w) - e_1(z,w)e_1(\mathbf{t}_3) + e_2(\mathbf{t}_3)\Big) X^2 \wedge X^1 \wedge X^0 \\ & + \Big(e_2(z,w)e_1(\mathbf{t}_3) - e_{(2,1)}(z,w) - e_3(\mathbf{t}_3)\Big) X^3 \wedge X^1 \wedge X^0 \\ & + \Big(e_{(2,2)}(z,w) + e_3(\mathbf{t}_3)e_1(z,w) - e_2(z,w)e_2(\mathbf{t}_3)\Big) X^3 \wedge X^2 \wedge X^0 \\ & + \Big(e_{(2,1)}(z,w)e_2(\mathbf{t}_3) - e_{(2,2)}(z,w)e_1(\mathbf{t}_3) - e_{(1,1)}(z,w)e_3(\mathbf{t}_3)\Big) X^3 \wedge X^2 \wedge X^1. \end{aligned}$$

Agora, lembrando que $e_3(z,w)=0$, $e_0(z,w)=1$ e que

$$e_{(i,j)}(z,w)=\begin{vmatrix} e_i(z,w) & e_{j-1}(z,w) \\ e_{i+1}(z,w) & e_j(z,w) \end{vmatrix},$$

concluímos que a expressão acima é dada pela soma dos menores 3×3 da matriz

$$\begin{array}{c} X^3\wedge \\ X^2\wedge \\ X^1\wedge \\ X^0\wedge \end{array}\begin{pmatrix} -e_3(\mathbf{t}_3) & e_2(z,w) & 0 \\ e_2(\mathbf{t}_3) & -e_1(z,w) & e_2(z,w) \\ -e_1(\mathbf{t}_3) & 1 & -e_1(z,w) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelos vetores $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0$, $\overline{\sigma}_+(z,w)X^1$ e $\overline{\sigma}_+(z,w)X^0$, respectivamente, com respeito a base (X^3,X^2,X^1,X^0) e o coeficiente de $X^k\wedge X^j\wedge X^i$ é dado pelo menor obtido considerando-se apenas as linhas i,j e k.

Indo um pouco mais adiante com os cálculos, utilizando-se para isto o Lema 3.2.3, temos

$$\begin{aligned} X^3\wedge X^1\wedge X^0 &= e_1\mathbf{X}^3(0) \\ X^3\wedge X^2\wedge X^0 &= e_2\mathbf{X}^3(0) \\ X^3\wedge X^2\wedge X^1 &= e_2\mathbf{X}^3(0). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)X^1\wedge X^0=\det\begin{pmatrix} -e_3(\mathbf{t}_3) & e_2(z,w) & 0 & -1 \\ e_2(\mathbf{t}_3) & -e_1(z,w) & e_2(z,w) & e_1 \\ -e_1(\mathbf{t}_3) & 1 & -e_1(z,w) & -e_2 \\ 1 & 0 & 1 & e_3 \end{pmatrix}\mathbf{X}^3(0).$$

Com base nos exemplos acima, introduzimos a matriz $\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,z,w)$ que é uma matriz $(r+1)\times r$ cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas do vetor $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0$ e as próximas $r-1$ colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores $\overline{\sigma}_+(z,w)X^{r-1-i}$ para $i=1,\ldots,r-1$, com relação à base ordenada $(X^{r+k-1},\ldots,X^0)$. A saber,

$$\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,z,w)=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \\ \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r) & \overline{\sigma}_+(z,w)X^{r-2} & \ldots & \overline{\sigma}_+(z,w)X^0 \\ & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Em seguida, consideramos a matriz coluna $\mathrm{E}_{(r+1)\times 1}(\mathbf{e}):=\Big((-1)^{r+2-(i+j)}e_{i+j-2}\Big)$ e formamos a matriz $\mathrm{M}=\Big(\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,z,w)\ \ \mathrm{E}_{(r+1)\times 1}(\mathbf{e})\Big)$.

Com isso, os exemplos construídos acima são casos particulares do seguinte resultado geral:

Lema 3.2.7. *Para cada $r\geq 1$, temos*

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0\wedge\overline{\sigma}_+(z,w)\mathbf{X}^{r-1}(0)=\det(\mathrm{M})\mathbf{X}^r(0).$$

Substituindo a igualdade dada pelo lema anterior na expressão (3.18), obtemos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.2.1. *Seja*

$$\mathcal{E}_r(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) := \sum_{((i,j),\boldsymbol{\lambda})\in\mathbb{N}^2\times\mathcal{P}_r} \left[X^i \otimes \partial^j \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] z^i w^{-j} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)$$

a função geradora da constante de estrutura de B_r *como uma representação de* $\mathrm{gl}(V)$*. Então:*

$$\mathcal{E}_r(z, w, \mathbf{t}_r) = \frac{1}{w^{r-1}} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} p_n\left(\frac{\mathbf{t}_r}{w}\right) + x_n p_n(z, \mathbf{t}_r)\right) \det(\mathrm{M}).$$

4 A representação DJKM

Neste capítulo trabalhamos sobre o espaço vetorial $\mathcal{V} := \mathbb{Q}[X^{-1}, X]$ dos polinômios de Laurent na indeterminada X. Assim, uma base para $\mathcal{V}$ é naturalmente $\mathbf{X} := (X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. O dual restrito de $\mathcal{V}$ é

$$\mathcal{V}^* := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\cdot\partial^j,$$

onde $\partial^j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}, \mathbb{Q})$ é definido por $\partial^j(X^i) = \delta_{ij}$.

4.1 O espaço fermiônico de Fock

Nesta seção introduzimos a construção do espaço fermiônico de Fock como em [16]. O objetivo é dar formalização rigorosa para a ideia de um produto exterior infinito. Propomos aqui uma construção algébrica elementar, suficiente para os nossos propósitos.

Seja $[\mathcal{V}]$ uma cópia de $\mathcal{V}$. Denotamos por $[\mathbf{X}]^m$ os elementos da base de $[\mathcal{V}]$ para distingui-los dos elementos da base de $\mathcal{V}$. Assim, $[\mathcal{V}]$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial com base $([\mathbf{X}]^m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Identificamos $[\mathcal{V}]$ com um subespaço do produto tensorial $\bigwedge\mathcal{V}\otimes_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}]$ via o mapa

$$[\mathbf{X}]^m \mapsto 1\otimes[\mathbf{X}]^m.$$

Seja W o $\bigwedge\mathcal{V}$-subespaço vetorial de $\bigwedge\mathcal{V}\otimes_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}]$ gerado pelo subconjunto

$$\{X^m\otimes[\mathbf{X}]^{m-1} - [\mathbf{X}]^m, X^n\otimes[\mathbf{X}]^n\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Definição 4.1.1. *O* espaço fermiônico de Fock *é o* $\bigwedge V$*-módulo*

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}(V) := \frac{\bigwedge\mathcal{V}\otimes_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}]}{W}. \tag{4.1}$$

Seja $\bigwedge\mathcal{V}\otimes_{\mathbb{Q}}[\mathcal{V}]\to\mathcal{F}$ a projeção canônica. A classe de $u\otimes[\mathbf{X}]^m$ em $\mathcal{F}$ será denotada por $u\wedge[\mathbf{X}]^m$. Assim, as igualdades $X^m\wedge[\mathbf{X}]^m = 0$ e $X^m\wedge[\mathbf{X}]^{m-1} = [\mathbf{X}]^m$ valem em $\mathcal{F}$. Além disso, para todo $m\in\mathbb{Z}$ e $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}$, definimos

$$[\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}} := \mathbf{X}_r^{m+\boldsymbol{\lambda}}\wedge[\mathbf{X}]^{m-r} = X^{m+\lambda_1}\wedge X^{m-1+\lambda_2}\wedge\cdots\wedge X^{m-r+1+\lambda_r}\wedge[\mathbf{X}]^{m-r},$$

onde r é qualquer inteiro positivo tal que $\ell(\boldsymbol{\lambda})\le r$, o que define implicitamente $\mathbf{X}_r^{m+\boldsymbol{\lambda}}$ como um elemento de $\bigwedge^r\mathcal{V}_{\ge m-r+1}$, onde $\mathcal{V}_{\ge j} := \bigoplus_{i\ge j}\mathbb{Q}\cdot X^i$. Com isso, temos que $\mathcal{F}$ é um $\bigwedge\mathcal{V}$-módulo graduado:

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_m,$$

onde

$$\mathcal{F}_m := \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}}\mathbb{Q}[\mathbf{X}]^{m+\boldsymbol{\lambda}} = \bigoplus_{r\ge 0}\bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}\mathbf{X}_r^{m+\boldsymbol{\lambda}}\wedge[\mathbf{X}]^{m-r}$$

é o espaço fermiônico de Fock de carga m. Com isso, temos

$$\mathcal{F}_0 = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}\cdot[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}},$$

o espaço fermiônico de Fock de carga 0. Em particular,

$$[\mathbf{X}]^0 = X^0 \wedge X^{-1} \wedge \cdots = X^0 \wedge [\mathbf{X}]^{-1} = X^0 \wedge X^{-1} \wedge [\mathbf{X}]^{-2} = \cdots,$$

e para cada $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}_r$ tem-se

$$[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}} = X^{\lambda_1} \wedge X^{-1+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1+\lambda_r} \wedge [\mathbf{X}]^{-r}.$$

Definição 4.1.2. *As derivações de Schubert estendem-se a $\mathcal{F}_0$ como segue. Primeiro declaramos que*

$$\begin{aligned}
\sigma_+(z)[\mathbf{X}]^m &= \sigma_+(z)X^m \wedge [\mathbf{X}]^{m-1},\\
\overline{\sigma}_+(z)[\mathbf{X}]^m &= [\mathbf{X}]^m - z[\mathbf{X}]^{m+1} + z^2[\mathbf{X}]^{m+(1^2)} - z^3[\mathbf{X}]^{m+(1^3)} + \cdots,\\
\sigma_-(z)[\mathbf{X}]^m &= [\mathbf{X}]^m \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_-(z)[\mathbf{X}]^m = [\mathbf{X}]^m.
\end{aligned}$$

Então definimos:

$$\begin{aligned}
\sigma_\pm(z)[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}} &= \sigma_\pm(z)\left(X^{\lambda_1} \wedge X^{-1+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1+\lambda_r}\right) \wedge \sigma_\pm(z)[\mathbf{X}]^{-r},\\
\overline{\sigma}_\pm(z)[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}} &= \overline{\sigma}_\pm(z)\left(X^{\lambda_1} \wedge X^{-1+\lambda_2} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1+\lambda_r}\right) \wedge \overline{\sigma}_\pm(z)[\mathbf{X}]^{-r}.
\end{aligned}$$

As definições acima são o caso $m = 0$ em [16] onde se define a ação das derivações de Schubert em $\mathcal{F}$ definindo-se suas ações em $\mathcal{F}_m$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.1.1. *Temos a seguinte igualdade:*

$$\sigma_+(t_1)X^0 \wedge \cdots \wedge \sigma_+(t_r)X^0 \wedge [\mathbf{X}]^{-r} = \Delta_0(\mathbf{t}_r)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. Iniciando pelo lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
&\sigma_+(t_1)X^0 \wedge \cdots \wedge \sigma_+(t_r)X^0 \wedge [\mathbf{X}]^{-r}\\
&\qquad = \left(\sum_{i_1,\dots,i_r\geq 0} X^{i_1} \wedge \cdots \wedge X^{i_r} \cdot t_1^{i_1}\cdots t_r^{i_r}\right) \wedge [\mathbf{X}]^{-r}\\
&\qquad = \left(\sum_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathcal{P}_r} X^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1+\lambda_r} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\Delta_0(\mathbf{t}_r)\right) \wedge [\mathbf{X}]^{-r}\\
&\qquad = \Delta_0(\mathbf{t}_r)\cdot\sigma_+(t_1,\dots,t_r)(X^0 \wedge X^{-1} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1}) \wedge [\mathbf{X}]^{-r}\\
&\qquad = \Delta_0(\mathbf{t}_r)\sigma_+(\mathbf{t}_r)(X^0 \wedge X^{-1} \wedge \cdots \wedge X^{-r+1}) \wedge [\mathbf{X}]^{-r}\\
&\qquad = \Delta_0(\mathbf{t}_r)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0,
\end{aligned}$$

como desejado. ∎

Lema 4.1.2. *A seguinte igualdade é válida:*

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}}s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\wedge[\mathbf{X}]^{-r}=\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. Por [16, Proposition 5.12] o produto $\sigma_+(t_1)\cdots\sigma_+(t_r)$ de r derivações de Schubert age apenas nos r primeiros fatores exteriores de $[\mathbf{X}]^0$, a saber

$$\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0=\sigma_+(\mathbf{t}_r)(X^0\wedge\cdots\wedge X^{-r+1})\wedge[\mathbf{X}]^{-r}. \qquad \blacksquare$$

Lema 4.1.3. *Temos a seguinte regra de comutação:*

$$\sigma_-(z)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(t)\sigma_-(z)[\mathbf{X}]^0=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. Pela definição das derivações de Schubert em $\mathcal{F}_0$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_-(z)\left(\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0\right) &= \sigma_-(z)\left(\sigma_+(t)X^0\wedge[\mathbf{X}]^{-1}\right)\\
&= \sigma_-(z)\sigma_+(t)X^0\wedge[\mathbf{X}]^{-1}=\sigma_-(z)\left(\sum_{i\geq 0}X^it^i\right)\wedge[\mathbf{X}]^{-1}\\
&= \left[\left(X^0+\frac{X^{-1}}{z}+\frac{X^{-2}}{z^2}+\cdots\right)+\left(X^1+\frac{X^0}{z}+\frac{X^{-1}}{z^2}+\cdots\right)t\right.\\
&\quad\left.+\left(X^2+\frac{X^1}{z}+\frac{X^0}{z^2}+\cdots\right)t^2+\cdots\right]\wedge X^{-1}\wedge X^{-2}\wedge\cdots\\
&= \left[\left(X^0+X^1t+X^2t^2+\cdots\right)+\frac{t}{z}\left(X^0+X^1t+X^2t^2+\cdots\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{t^2}{z^2}\left(X^0+X^1t+X^2t^2+\cdots\right)+\cdots\right]\wedge[\mathbf{X}]^{-1}\\
&= \sigma_+(z)X^0\left(1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}+\cdots\right)\wedge[\mathbf{X}]^{-1}\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(z)X^0\wedge[\mathbf{X}]^{-1}\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(z)[\mathbf{X}]^0.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lema 4.1.4. *A seguinte regra de comutação vale:*

$$\overline{\sigma}_-(z)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0=\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(t)\overline{\sigma}_-(z)[\mathbf{X}]^0=\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. Primeiro nós escrevemos:

$$\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0=\overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(z)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0.$$

Agora usamos o Lema 4.1.3 para comutar $\sigma_-(z)$ e $\sigma_+(t)$, obtendo assim

$$\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0 \quad = \quad \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\overline{\sigma}_-(z)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0,$$

o que implica

$$\overline{\sigma}_-(z)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0 = \exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{z^n}\right)\sigma_+(t)[\mathbf{X}]^0.$$

∎

Corolário 4.1.1. *Para todo* $r \geq 1$,

$$\sigma_-(z)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0 = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\mathbf{t}_r)\sigma_-(z)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0 &= \sigma_-(z)\left(\sigma_+(t_1)X^0 \wedge \cdots \wedge \sigma_+(t_r)X^0\right) \wedge [\mathbf{X}]^{-r} \\
&= \sigma_-(z)\sigma_+(t_1)X^0 \wedge \cdots \wedge \sigma_-(z)\sigma_+(t_r)X^0 \wedge [\mathbf{X}]^{-r} \\
&= \Delta_0(\mathbf{t}_r)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t_1^n}{z^n}\right)\cdots\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{t_r^n}{z^n}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0 \\
&= \Delta_0(\mathbf{t}_r)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.
\end{aligned}$$

Agora, concluímos a prova cancelando-se o fator $\Delta_0(\mathbf{t}_r)$ no primeiro e no último membro do desenvolvimento acima. ∎

Corolário 4.1.2. *Para todo* $r \geq 1$,

$$\overline{\sigma}_-(z)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0 = \exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.$$

Demonstração. É uma consequência direta do Corolário 4.1.1, trabalhando-se com as inversas das derivações de Schubert. ∎

4.2 A representação DJKM revisitada

A correspondência bóson-férmion implica que $B = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$ é naturalmente isomorfo a $\mathcal{F}_0$ via a extensão $\mathbb{Q}$-linear do mapa de conjuntos

$$S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) \overset{\cong}{\longmapsto} [\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Gatto & Salehyan em [16] mostraram que

$$\left(\exp\left(\sum_{n\geq 1}(z^n - w^n)\right) S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\right)[\mathbf{X}]^0 = \sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}},$$

e que

$$\left(\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z^n}-\frac{1}{w^n}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\right) S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\right)[\mathbf{X}]^0 = \overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(w)[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Como no caso para r finito, $\mathrm{gl}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^*$ age em B como segue:

$$\left[\left(X^i\otimes\partial^j\right) S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\right][\mathbf{X}]^0 = X^i\wedge\partial^j\lrcorner[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Definindo, como usual

$$\mathcal{E}(z,w^{-1}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left(X^i\wedge\partial^j\lrcorner\right) z^i w^{-j}.$$

O resultado por DJKM [6] (veja também [21, Theorem 5.1]) afirma que:

$$\mathcal{E}(z,w^{-1}) = \frac{1}{1-\dfrac{w}{z}}\cdot\Gamma(z,w), \tag{4.2}$$

onde

$$\Gamma(z,w) = \exp\left(\sum_{n\geq 1}(z^n - w^n)\right)\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z^n}-\frac{1}{w^n}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Teorema 4.2.1. *Seja*

$$\mathcal{E}(z,w^{-1},\mathbf{t}_r) := \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}\Gamma(z,w)S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r) \in B[\![z,w,\mathbf{t}_r,z^{-1},w^{-1}]\!]$$

a série de potência estrutural formal da B-representação de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$*. Então*

$$\mathcal{E}(z,w^{-1},\mathbf{t}_r) = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{w^n}{z^n}-\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n}+\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{w^n}\right)+x_n\left(z^n-w^n+p_n(\mathbf{t}_r)\right)\right).$$

Demonstração. Primeiro utilizamos a expressão exponencial da série geométrica

$$\left(1-\frac{w}{z}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{w^n}{z^n}\right),$$

para substituir em (4.2). Agora observamos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}\Gamma(z,w)S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\right)[\mathbf{X}]^0 &= \sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)\overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(w)\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}[\mathbf{X}]^{\boldsymbol{\lambda}}s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\\ &= \sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)\overline{\sigma}_-(z)\sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0.\end{aligned}$$

Aplicando Lema 4.1.3 e Lema 4.1.4:

$$= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{w^n}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)\overline{\sigma}_-(z)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0$$

$$= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{w^n}\right)\exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{p_n(\mathbf{t}_r)}{z^n}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0. \tag{4.3}$$

Lembrando que $[\mathbf{X}]^0$ é autovalor de $\sigma_+(z), \overline{\sigma}_+(w)$ e $\sigma_+(\mathbf{t}_r)$, obtemos

$$\sigma_+(z)\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_r)[\mathbf{X}]^0 = \exp\left(\sum_{n\geq 1} x_n z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geq 1} x_n w^n\right)\exp\left(\sum_{n\geq 1} x_n p_n(\mathbf{t}_r)\right)[\mathbf{X}]^0.$$

Substituindo a equação anterior em (4.3) e simplificando, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_r) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r}\Gamma(z,w)S_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\\ &= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{t}_r)\left(\frac{1}{z^n}-\frac{1}{w^n}\right)+x_n\left(z^n-w^n+p_n(\mathbf{t}_r)\right)\right),\end{aligned}$$

como afirmado. ∎

5 Representação polinomial da álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\wedge V)$

O objetivo deste capítulo é fornecer uma fórmula explícita e bastante manuseável para a série geradora da $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ estrutura de B_r.

Para este propósito, descrevemos a estrutura de $\bigwedge V$-módulo sobre cada espaço vetorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\bigwedge^k V, \bigwedge^\ell V) \cong \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^\ell V^*$ para todo par de inteiros $k, \ell \geq 1$, o que fornece uma representação de endomorfismos de $\bigwedge V$ com um dado (qualquer) grau.

Para descrever a representação bosônica de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ de grau $k-\ell$ consideramos o mapa bilinear $\star : \mathrm{gl}(\bigwedge V) \times B_r \to B_{r-\ell+k}$ que age nos elementos das bases de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ e B_r do seguinte modo

$$\left(\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right) \mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right),$$

onde $\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}}$ denota o elemento

$$\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} := \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \otimes \boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \in \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^\ell V^*$$

e $\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \in \bigwedge^{r-\ell} V$ é a contração de $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \in \bigwedge^r V$ por $\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \in \bigwedge^\ell V^*$, determinada pelo diagrama (2.12). A fim de evitar trivialidades, assumiremos que $\ell \leq r$, caso contrário, a contração $\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$ é apenas o elemento nulo.

Nestas condições, a função geradora da representação bosônica de $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$ de grau $k-\ell$ é o mapa

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r) : B_r \longrightarrow B_{r-\ell+k}[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}^r]\!]$$

definido por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sum_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_\ell \times \mathcal{P}_r} \left[\epsilon^{k,\ell}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right] s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k) s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r) \mathbf{X}^r(0) \\
&= \sum_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_\ell \times \mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k) \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1}) \boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\right).
\end{aligned}$$

5.1 Resultados anteriores

Assumindo-se $k = \ell$, o mapa bilinear $\star : \mathrm{gl}(\bigwedge^k V) \times B_r \to B_r$ tal que

$$\left(\epsilon^{k}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}} \star \Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right) \mathbf{X}^r(0) = \mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu}) \wedge \left(\boldsymbol{\partial}^k(\boldsymbol{\eta}) \lrcorner \mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right),$$

define a representação bosônica de $\mathrm{gl}(\bigwedge^k V)$, isto é, a estrutura de $\mathrm{gl}(\bigwedge^r V)$-módulo de B_r. O principal resultado obtido em [3] foi uma fórmula compacta para esta representação em termos de um certo produto de operadores de vértice que resumimos a seguir.

Teorema 5.1.1. [3, Teorema 8.5] *A seguinte igualdade vale para todo par de inteiros $k, r \geq 0$ e todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$:*

$$\left(\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_k^{-1})\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)\right)\mathbf{X}^r(0) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{z_j}{w_j}\right)^{r-k} \cdot \Gamma(\mathbf{z}_k)\Gamma^*(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.1}$$

onde os operadores de vértice $\Gamma(\mathbf{z}_k), \Gamma^*(\mathbf{z}_k) : \bigwedge V \to \bigwedge V[\![\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k^{-1}]$ sobre a álgebra exterior $\bigwedge V$ são dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \sigma_+(\mathbf{z}_k)\overline{\sigma}_-(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^{r+k}(\boldsymbol{\lambda}),\\ \Gamma^*(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) &= \left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k)\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma_-(\mathbf{z}_k)H_{r-k})\right)\mathbf{X}^{r-k}(0).\end{aligned}$$

Além disso, eles são mapas $\mathbb{Q}[\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k^{-1}]$-lineares de graus 1 e -1 com respeito a graduação da álgebra exterior.

No caso em que $r \gg \ell(\boldsymbol{\lambda})$, os operadores de vértice na fórmula em (5.1) podem ser expressos como

$$\Gamma(\mathbf{z}_k) := \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{E_r(z_j)}\exp\left(-\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\delta(\sigma_{-1}^i)p_i(\mathbf{z}_k^{-1})\right)$$

e

$$\Gamma^*(\mathbf{w}_k) := \prod_{j=1}^{k}E_r(w_j)\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\delta(\sigma_{-1}^i)p_i(\mathbf{w}_k^{-1})\right).$$

O Teorema 5.1.1 garante que a imagem de $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(H_r)$ por $\epsilon_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}^k$ é o coeficiente de $s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)s_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{w}_k^{-1})$ no segundo membro da Equação (5.1). Isso pode parecer complicado de avaliar, mas coincide com o coeficiente de

$$z_1^{k-1+\mu_1}\cdots z_k^{\mu_k}\cdot w_1^{-k+1-\nu_1}\cdots w_1^{-\nu_k}$$

do segundo membro da Equação (5.1) multiplicado pelos determinantes de Vandermonde de $\mathbf{z}_k$ e $\mathbf{w}_k^{-1}$.

5.2 Lemas preliminares

Lema 5.2.1. *Para cada $k > 0$ e toda partição $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_r$ temos*

$$\left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\boldsymbol{\partial}^k(0)\right)\lrcorner\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)\left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\lrcorner\sigma_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right).$$

Demonstração. Primeiro notamos que para todo $\psi \in \bigwedge^{r-k}V^*$ a definição de contração implica que $\phi \circ \boldsymbol{\partial}^k(0)\lrcorner = \boldsymbol{\partial}^k(0) \wedge \psi$, onde $\boldsymbol{\partial}^k(0) \wedge \psi$ é o emparelhamento introduzido em (2.8). Agora, seja $\phi \in \bigwedge^{r-k}V^*$ e $\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) \in \bigwedge^r V$. Com isso,

$$\psi\left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\boldsymbol{\partial}^k(0)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right) = \left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\boldsymbol{\partial}^k(0) \wedge \psi\right)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}).$$

Integrando por partes o lado direito da igualdade acima, e usando a definição de transposta, ambas aplicadas a $\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)$, podemos escrever

$$\left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\boldsymbol{\partial}^k(0)\wedge\psi\right)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\wedge\overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi\right)\right)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})$$
$$= \left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\wedge\overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi\right)\sigma_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}).$$

Usando novamente o emparelhamento, temos que $\boldsymbol{\partial}^k(0)\wedge\overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi = \overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi(\boldsymbol{\partial}^k(0)\lrcorner)$. Deste modo,

$$\left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\wedge\overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi\right)\sigma_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda}) = \overline{\sigma}_-^T(\mathbf{w}_k)\psi\left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\sigma_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right).$$

Portanto, usando novamente a definição da transposta no lado esquerdo da equação acima, obtemos

$$\psi\left(\sigma_-^T(\mathbf{w}_k)\boldsymbol{\partial}^k(0)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right) = \psi\left(\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)\left(\boldsymbol{\partial}^k(0)\sigma_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right)\right),$$

o que conclui a prova. ■

Lema 5.2.2. *As seguintes expressões são válidas*

(i) $\sigma_-(\mathbf{w}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_k^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0);$

(ii) $\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) = \exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_k^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0).$

Demonstração. Vamos provar o item (i) por indução em k. O caso $k=1$ consiste da Equação (3.11) da Proposição 3.2.2. Suponha que o resultado seja válido para $k-1\geq 1$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma_-(\mathbf{w}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sigma_-(w_k)\sigma_-(\mathbf{w}_{k-1})\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\\
&= \sigma_-(w_k)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_{k-1}^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_{k-1}^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_-(w_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_{k-1}^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}w_k^{-n}p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_k^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0).
\end{aligned}$$

A prova do item (ii) segue de modo inteiramente análogo utilizando-se a Equação (3.12) da mesma proposição. ■

Lema 5.2.3. *Dados inteiros positivos k e r com $k\leq r$, valem as seguintes identidades.*

(i) $\boldsymbol{\partial}^k(0)\lrcorner\mathbf{X}^r(0) = (-1)^{rk-\frac{k(k+1)}{2}}\mathbf{X}^{r-k}(k^{r-k});$

(ii) $\boldsymbol{\partial}^k(0) \lrcorner (\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)) = \sigma_+(\mathbf{t}_r)\left(\boldsymbol{\partial}^k(0) \lrcorner \mathbf{X}^r(0)\right)$.

Demonstração. Para o item (i), olhamos para a matriz

$$\begin{pmatrix} \partial^{k-1}(X^{r-1}) & \cdots & \partial^{k-1}(X^{k-1}) & \cdots & \partial^{k-1}(X^0) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^0(X^{r-1}) & \cdots & \partial^0(X^{k-1}) & \cdots & \partial^0(X^0) \end{pmatrix},$$

cujo único menor $k \times k$ não-nulo é

$$\begin{vmatrix} \partial^{k-1}(X^{k-1}) & \cdots & \partial^{k-1}(X^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^0(X^{k-1}) & \cdots & \partial^0(X^0) \end{vmatrix} = 1.$$

Assim, pelo Lema 2.5.1, temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial}^k(0) \lrcorner \mathbf{X}^r(0) &= (-1)^{(r-(k-1))+1} \cdots (-1)^{r+1} X^{r-1} \wedge \cdots \wedge X^k \\ &= (-1)^{rk - \frac{k(k+1)}{2}} \mathbf{X}^{r-k}(k^{r-k}). \end{aligned}$$

Agora vamos provar o item (ii) por indução em k. Para $k = 1$, temos

$$\begin{aligned} \partial^0 \lrcorner (\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)) &= \partial^0 \lrcorner \left(\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge \sigma_+(\mathbf{t}_r)X^0\right) \\ &= \partial^0 \lrcorner \left(\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge (X^0 + \text{termos de grau} \geq 1 \text{ em } X)\right) \\ &= \partial^0 \lrcorner \left(\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \wedge X^0\right) \\ &= (-1)^{r-1}\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-1}(1^{r-1}) \\ &= \sigma_+(\mathbf{t}_r)(\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^r(0)). \end{aligned}$$

Suponha que a afirmação seja válida para algum k, com $1 \leq k \leq r$. Assim,

$$\begin{aligned} \partial^k \lrcorner \boldsymbol{\partial}^k(0) \lrcorner (\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)) &= \partial^k \lrcorner \sigma_+(\mathbf{t}_r)(\boldsymbol{\partial}^k(0) \lrcorner \mathbf{X}^r(0)) \\ &= (-1)^{rk - \frac{k(k+1)}{2}} \partial^k \lrcorner \sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-k}(k^{r-k}) \\ &= (-1)^{rk - \frac{k(k+1)}{2}} \partial^k \lrcorner \left(\sigma_+(\mathbf{t}_r)(X^{r-1} \wedge \cdots \wedge X^{k+1}) \wedge \sigma_+(\mathbf{t}_r)X^k\right) \\ &= (-1)^{rk - \frac{k(k+1)}{2}} \partial^k \lrcorner \left(\sigma_+(\mathbf{t}_r)(X^{r-1} \wedge \cdots \wedge X^{k+1}) \wedge X^k\right) \\ &= \sigma_+(\mathbf{t}_r)\left((-1)^{rk - \frac{k(k+1)}{2}}(-1)^{r-(k+1)} X^{r-1} \wedge \cdots \wedge X^{k+1}\right), \end{aligned}$$

ou seja, $\boldsymbol{\partial}^{k+1}(0) \lrcorner (\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)) = \sigma_+(\mathbf{t}_r)(\boldsymbol{\partial}^{k+1}(0) \lrcorner \mathbf{X}^r 0)$. ■

Lema 5.2.4. *Para todo par de inteiros positivos $r \geq k$, temos*

$$\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-k}(k^{r-k}) = \frac{(-1)^{k(r-k)}}{(w_1\cdots w_k)^{r-k}}\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-k}(0).$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^{r-k}(k^{r-k}) &= \overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)(X^{r-1}\wedge\cdots\wedge X^k)\\
&= \overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)X^{r-1}\wedge\cdots\wedge\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_k)X^k\\
&= \frac{(-1)^k}{w_1\cdots w_k}\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_k)X^{r-1-k}\wedge\cdots\wedge\frac{(-1)^k}{w_1\cdots w_k}\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_k)X^0\\
&= \frac{(-1)^{k(r-k)}}{(w_1\cdots w_k)^{r-k}}\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_k)\mathbf{X}^{r-k}(0).
\end{aligned}$$

Agora, aplicando $\sigma_+(\mathbf{t}_r)$ a ambos os membros da equação acima e usando as regras de comutação, obtemos o resultado desejado.

∎

5.3 Uma descrição para a $\mathrm{gl}(\wedge V)$ estrutura de B_r

Pela definição do operador $\mathcal{E}(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell^{-1},\mathbf{t}_r)$ e também da transposta $\sigma_-^T(\mathbf{w}_\ell)$, temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell^{-1},\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) &= \sum_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})\in\mathcal{P}_k\times\mathcal{P}_\ell\times\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu})\wedge\Big(s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1})\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta})\lrcorner\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\Big)\\
&= \left(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_k} s_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(\boldsymbol{\mu})\right)\wedge\left[\left(\sum_{\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{P}_\ell} s_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{w}_\ell^{-1})\boldsymbol{\partial}^\ell(\boldsymbol{\eta})\right)\lrcorner\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_r} s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(\boldsymbol{\lambda})\right)\right]\\
&= \sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0)\wedge\left[\Big(\sigma_-^T(\mathbf{w}_\ell)\boldsymbol{\partial}^\ell(0)\Big)\lrcorner\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)\right].
\end{aligned}$$

Aplicando-se os lemas 5.2.1 e 5.2.2(i), sucessivamente, vemos que $\mathcal{E}(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell^{-1},\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0)$ é igual a

$$\begin{aligned}
&\sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0)\wedge\Big(\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_\ell)(\boldsymbol{\partial}^\ell(0)\lrcorner\sigma_-(\mathbf{w}_\ell)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0))\Big)\\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0)\wedge\Big(\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_\ell)(\boldsymbol{\partial}^\ell(0)\lrcorner\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0))\Big)
\end{aligned}$$

Agora, usamos o Lema 5.2.3, obtendo:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0)\wedge\Big(\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_\ell)(\sigma_+(\mathbf{t}_r)\boldsymbol{\partial}^\ell(0)\lrcorner\mathbf{X}^r(0))\Big)\\
&= (-1)^{r\ell-\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)\right)\sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0)\wedge\Big(\overline{\sigma}_-(\mathbf{w}_\ell)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-\ell}(\ell^{r-\ell})\Big).
\end{aligned}$$

Em virtude do Lema 5.2.4 a última expressão acima pode ser escrita como

$$\prod_{j=1}^{\ell} w_j^{\ell-r} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})p_n(\mathbf{t}_r)}{n}\right) \sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0) \wedge \left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_\ell)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-\ell}(0)\right).$$

Agora vamos concentrar nossa atenção no produto

$$\sigma_+(\mathbf{z}_k)\mathbf{X}^k(0) \wedge \left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{w}_\ell)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^{r-\ell}(0)\right).$$

Integrando-o duas vezes por partes, obtemos

$$\sigma_+(\mathbf{z}_k)\sigma_+(\mathbf{t}_r)\left(\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0)\right).$$

Como cada coeficiente da expressão entre parêntesis pertence a $\bigwedge^{r+k-\ell} V$ e pelo fato de $\sigma_+(z)\mathbf{u} = E_{r+k-\ell}(z)^{-1}\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \bigwedge^{r+k-\ell} V$, podemos escrever a última expressão acima como

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{E_{r+k-\ell}(z_i)} \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{E_{r+k-\ell}(t_j)}\, \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0).$$

ou ainda

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} x_n(p_n(\mathbf{t}_r)+p_n(\mathbf{z}_k))\right) \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0).$$

Com isso, concluímos que

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell^{-1},\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^r(0) = \prod_{j=1}^{\ell} w_j^{\ell-r} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{p_n(\mathbf{t}_r)(p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1})+nx_n)}{n} + x_n p_n(\mathbf{z}_k)\right) \times$$
$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0).$$

Finalmente, queremos fornecer uma fórmula bastante calculável para

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0),$$

que é um produto exterior de um número finito de vetores. Assim, temos apenas que usar a bem conhecida fórmula determinantal para o produto exterior e o Lema 3.2.6(i) para obter o seguinte lema:

Lema 5.3.1. *Para inteiros positivos r,k,ℓ temos a seguinte igualdade*

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)\mathbf{X}^k(0) \wedge \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)\mathbf{X}^{r-\ell}(0) = \sum_{j_1>\cdots>j_{r-\ell+k}} \mathrm{A}(\mathbf{t}_r,\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)_{(j_1\cdots j_{r+k-\ell})} X^{j_1}\wedge\cdots\wedge X^{j_{r-\ell+k}},$$

onde a soma é tomada sobre os $(r+k-\ell)$-menores $\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)_{(j_1\cdots j_{r+k-\ell})}$ da matriz $\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)$ que é uma matriz $(r+k)\times(r+k-\ell)$ cujas k primeiras colunas são as coordenadas dos vetores $\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^{k-i}$, para $i=1,\ldots,k$, e as próximas $(r-\ell)$ colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores $\overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)X^{r-\ell-i}$ para $i=1,\ldots,r-\ell$, com relação à base ordenada $(X^{r+k-1},\ldots,X^0)$,

$$\mathrm{A}(\mathbf{t}_r,\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^{k-1} & \ldots & \overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_r)X^0 & \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)X^{r-\ell-1} & \ldots & \overline{\sigma}_+(\mathbf{z}_k,\mathbf{w}_\ell)X^0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.3.1. *A função geradora da representação bosônica de B_r como um $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$-módulo é dada por*

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell^{-1}, \mathbf{t}_r) = \prod_{j=1}^{\ell} w_j^{\ell-r} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{p_n(\mathbf{t}_r)(p_n(\mathbf{w}_\ell^{-1}) + nx_n)}{n} + x_n p_n(\mathbf{z}_k)\right) \det(\mathrm{M}),$$

onde $\mathrm{M} := \begin{pmatrix} \mathrm{A}(\mathbf{t}_r, \mathbf{z}_k, \mathbf{w}_\ell) & \mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e}) \end{pmatrix}$, *sendo* $\mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e})$ *é a matriz* $(r+k)\times\ell$ *definida como*

$$\mathrm{E}_{(r+k)\times\ell}(\mathbf{e}) := \left((-1)^{r+k-(i+j-1)} e_{i+j-\ell-1}\right)$$

cujas entradas são os operadores e_i em $B_{r+k-\ell}$, com $0 \leq i \leq r+k-\ell$ e assumimos que $e_j = 0$ sempre que $j < 0$ ou $j > r+k-\ell$.

Exemplo 5.3.1. *Assumindo que $k = 1$, $\ell = 2$ e $r = 3$, temos que*

$$\overline{\sigma}_+(\mathbf{t}_3)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(z, \mathbf{w}_2)\mathbf{X}^2(0) = \begin{array}{c} X^3\wedge \\ X^2\wedge \\ X^1\wedge \\ X^0\wedge \end{array} \begin{pmatrix} -e_3(\mathbf{t}_3) & -e_3(z, \mathbf{w}_2) \\ e_2(\mathbf{t}_3) & e_2(z, \mathbf{w}_2) \\ -e_1(\mathbf{t}_3) & -e_1(z, \mathbf{w}_2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$X^3 \wedge X^0 = h_2\mathbf{X}^2(0) = (e_1^2 - e_2)\mathbf{X}^2(0)$$

$$X^3 \wedge X^2 = \mathbf{X}^2(2,2) = e_2^2\mathbf{X}^2(0)$$

$$X^3 \wedge X^1 = \mathbf{X}^2(2,1) = e_1e_2\mathbf{X}^2(0)$$

$$X^2 \wedge X^1 = \mathbf{X}^2(1,1) = e_2\mathbf{X}^2(0)$$

$$X^2 \wedge X^0 = \mathbf{X}^2(1,0) = e_1\mathbf{X}^2(0)$$

$$X^1 \wedge X^0 = e_0\mathbf{X}^2(0) = 1 \cdot \mathbf{X}^2(0).$$

Com base nos cálculos acima, podemos concluir que

$$\mathcal{E}(z, \mathbf{w}_2^{-1}, \mathbf{t}_3)\mathbf{X}^3(0) =$$

$$(w_1w_2)^{-1} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{p_n(\mathbf{t}_3)(p_n(\mathbf{w}_2^{-1})+nx_n)}{n} + x_np_n(z)\right) \begin{vmatrix} -e_3(\mathbf{t}_3) & -e_3(z, \mathbf{w}_2) & 0 & 1 \\ e_2(\mathbf{t}_3) & e_2(z, \mathbf{w}_2) & 1 & -e_1 \\ -e_1(\mathbf{t}_3) & -e_1(z, \mathbf{w}_2) & -e_1 & e_2 \\ 1 & 1 & e_2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{X}^2(0).$$

5.4 Uma fórmula residual para a $\mathrm{gl}(V)$ estrutura de B_2

No exemplo a seguir, obtemos uma expressão residual para a função geradora da estrutura de $\mathrm{gl}(V)$-módulo de B_2.

Exemplo 5.4.1. Vamos assumir $k = 1$ e $r = 2$. Queremos encontrar uma elegante fórmula para

$$\sigma_+(z)X^0 \wedge \left(\sigma_-^T(w)\partial^0 \lrcorner \sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0)\right). \tag{5.2}$$

Pelo Lema 5.2.1, temos que

$$\sigma_+(z)X^0 \wedge \left(\sigma_-^T(w)\partial^0 \lrcorner \sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0)\right) = \sigma_+(z)X^0 \wedge \left(\overline{\sigma}_-(w)(\partial^0 \lrcorner \sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0))\right).$$

Como $\mathbf{X}^2(0)$ é um autovetor de $\sigma_+(\mathbf{t}_2)$ com autovalor $\frac{1}{E_2(t_1)}\frac{1}{E_2(t_2)}$, podemos escrever

$$\partial^0 \lrcorner \sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0) = \partial^0 \lrcorner \sigma_-(w)\frac{1}{E_2(t_1)}\frac{1}{E_2(t_2)}\mathbf{X}^2(0).$$

Pela definição da ação de $\sigma_-(w)$ em B_2, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma_-(w)\frac{1}{E_2(t_1)}\frac{1}{E_2(t_2)}\mathbf{X}^2(0) &= \sigma_-(w)\left(\frac{1}{E_2(t_1)}\right)\sigma_-(w)\left(\frac{1}{E_2(t_2)}\right)\mathbf{X}^2(0)\\
&= \frac{1}{E_2(t_1)}\left(1-\frac{t_1}{w}\right)^{-1}\frac{1}{E_2(t_1)}\left(1-\frac{t_2}{w}\right)^{-1}\mathbf{X}^2(0)\\
&= \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\frac{1}{E_2(t_1)}\frac{1}{E_2(t_2)}\mathbf{X}^2(0)\\
&= \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\partial^0 \lrcorner \sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0) &= \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\partial^0 \lrcorner \sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0)\\
&= \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\partial^0 \lrcorner \mathbf{X}^2(0)\\
&= -\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1.
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão original (5.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&\sigma_+(z)X^0 \wedge \left(\overline{\sigma}_-(w)(\partial^0 \lrcorner \sigma_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0))\right)\\
&= -\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1\\
&= \frac{1}{w}\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^0
\end{aligned}$$

Agora, podemos escrever

$$\sigma_+(z)X^0 \wedge \overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^0 = z\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)\left((\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1) \wedge X^0\right)$$

Portanto, a expressão que queremos calcular resulta em

$$\frac{z}{w}\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(z)\overline{\sigma}_-(z)\left((\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1) \wedge X^0\right) \tag{5.3}$$

Vamos focar nossa atenção no termo $(\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1) \wedge X^0$. Primeiro lembramos que

$$\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1 = X^1 + h_1(\mathbf{t}_2)X^2 + h_2(\mathbf{t}_2)X^3 + \cdots$$

onde $h_n(\mathbf{t}_2)$ é o polinômio simétrico completo de grau n nas variáveis t_1, t_2. Deste modo,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_-(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1 &= (X^1 - X^2 w) + h_1(\mathbf{t}_2)(X^2 - X^3 w) + h_2(\mathbf{t}_2)(X^3 - X^4 w) + \dots \\ &= X^1 + (h_1(\mathbf{t}_2) - w)X^2 + (h_2(\mathbf{t}_2) - wh_1(\mathbf{t}_2))X^3 + \\ &\quad (h_3(\mathbf{t}_2) - wh_2(\mathbf{t}_2))X^4 + \cdots\end{aligned}$$

Com isso, vemos que $(\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1) \wedge X^0$ é igual a

$$\begin{aligned}& X^1 \wedge X^0 + (h_1(\mathbf{t}_2) - w)X^2 \wedge X^0 + (h_2(\mathbf{t}_2) - wh_1(\mathbf{t}_2))X^3 \wedge X^0 + \cdots \\ &= X^1 \wedge X^0 + (h_1(\mathbf{t}_2) - w)h_1(X^1 \wedge X^0) + (h_2(\mathbf{t}_2) - wh_1(\mathbf{t}_2))h_2(X^1 \wedge X^0) + \cdots \\ &= (1 + [h_1(\mathbf{t}_2) - wh_0(\mathbf{t}_2)]\, h_1 + [h_2(\mathbf{t}_2) - wh_1(\mathbf{t}_2)]\, h_2 + \cdots)\, X^1 \wedge X^0 \\ &= \left(\sum_{i\geq 0} (h_i(\mathbf{t}_2) - h_{i-1}(\mathbf{t}_2)w)\, h_i\right) X^1 \wedge X^0,\end{aligned}$$

onde assumimos que $h_j(\mathbf{t}_2) = 0$ sempre que $j < 0$. Utilizando-se a ação de $\overline{\sigma}_-(z) : B_2 \to B_2$ em h_i, obtemos

$$\overline{\sigma}_-(z)\left((\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1) \wedge X^0\right) = \left(\sum_{i\geq 0} (h_i(\mathbf{t}_2) - h_{i-1}(\mathbf{t}_2)w)\, (h_i - h_{i-1}z^{-1})\right) \mathbf{X}^2(0). \tag{5.4}$$

Agora, vamos considerar algumas funções geradoras. Considerando uma indeterminada ζ, valem as seguintes igualdades

(i) $\dfrac{1 - w\zeta^{-1}}{1 - (t_1 + t_2)\zeta^{-1} + t_1 t_2 \zeta^{-2}} = \sum_{i\geq 0} (h_i(t_1, t_2) - h_{i-1}(t_1, t_2)w)\, \zeta^{-i}$,

(ii) $1 - w\zeta^{-1} = \exp\left(-\sum_{i\geq 1} \dfrac{1}{i} w^i \zeta^{-i}\right)$

(iii) $\dfrac{1}{1 - (t_1 + t_2)\zeta^{-1} + t_1 t_2 \zeta^{-2}} = \exp\left(\sum_{i\geq 1} \dfrac{1}{i} p_i(t_1, t_2)\zeta^{-i}\right)$.

Portanto,

$$\sum_{i\geq 0} (h_i(\mathbf{t}_2) - h_{i-1}(\mathbf{t}_2)w)\, \zeta^{-i} = \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}\left(p_i(\mathbf{t}_2) - w^i\right)\zeta^{-i}\right)$$

Por outro lado, podemos ver que

$$\sum_{i\geq 0}(h_i - h_{i-1}z^{-1})\zeta^i = \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)\exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i\zeta^i\right)$$

Agora, observamos que a expressão em (5.4) é dada pelo resíduo em ζ de uma função adequada, a saber, temos

$$\begin{aligned}&\overline{\sigma}_-(z)\left((\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1)\wedge X^0\right) = \\ &\mathrm{Res}_\zeta\left(\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\left(p_i(\mathbf{t}_2) - w^i\right)\zeta^{-i} + x_i\zeta^i\right)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z}\right)\right)X^1\wedge X^0\end{aligned} \tag{5.5}$$

Para ver a igualdade acima, basta tomar o termo constante de

$$\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)\exp\left(\sum_{i\geq 1} x_i\zeta^i\right)\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\left(p_i(\mathbf{t}_2) - w^i\right)\zeta^{-i}\right).$$

Substituindo a forma residual de $\overline{\sigma}_-(z)\left((\overline{\sigma}_+(w)\sigma_+(\mathbf{t}_2)X^1)\wedge X^0\right)$ obtida acima na Equação (5.3), concluímos que

$$\sigma_+(z)X^0\wedge\left(\sigma_-^T(w)\partial^0\lrcorner\sigma_+(\mathbf{t}_2)\mathbf{X}^2(0)\right)$$

é igual a

$$\frac{z}{w}\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\frac{p_i(\mathbf{t}_2)}{w^i}\right)\sigma_+(z)\mathrm{Res}_\zeta\left(\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\left(p_i(\mathbf{t}_2) - w^i\right)\zeta^{-i} + x_i\zeta^i\right)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z}\right)\right)\mathbf{X}^2(0).$$

Finalmente, usando que $\sigma_+(z)\mathbf{X}^2(0) = E_2(z)^{-1}\mathbf{X}^2(0)$ e juntando as exponenciais, concluímos que a função geradora da estrutura de $\mathrm{gl}(V)$-módulo de B_2 é dada por

$$\mathcal{E}(z, w^{-1}, \mathbf{t}_2) = \frac{z}{w}\mathrm{Res}_\zeta\left(\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}\left(p_i(\mathbf{t}_2)p_i(\zeta^{-1}, w^{-1}) - w^i\zeta^i\right) + x_ip_i(\zeta, z)\right)(\zeta^{-1} - z^{-1})\right).$$

Referências

[1] O. Behzad, A. Contiero, and D. Martins, *On the vertex operator representation of Lie algebras of matrices*, Journal of Algebra **597** (2022) 47–74, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.01.009.

[2] O. Behzad, A. Contiero, L. Gatto, and D. Martins, *Polynomial ring representations of* $\mathrm{gl}(\bigwedge V)$, *to appear.*

[3] O. Behzad, A. Contiero, L. Gatto, and R. Vidal Martins, *Polynomial representations of endomorphisms of exterior powers*, Collect. Math. **73**, 107–133 (2022), https://doi.org/10.1007/s13348-020-00310-5.

[4] O. Behzad and L. Gatto, *Bosonic and fermionic representations of endomorphisms of exterior algebras*, Fundamenta Mathematicae **256** (2022), 307–331, https://doi.org/10.4064/fm9-12-2020.

[5] A. Chapman, L. Gatto, and L. Rowen, *Clifford Semialgebras*, arXiv:2108.03617.pdf, 2021.

[6] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations. III. Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 3806–3812.

[7] W. Fulton, *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.

[8] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, 1998.

[9] L. Gatto, *Schubert calculus via Hasse-Schmidt derivations*, Asian J. Math. **9** (2005) 315–321.

[10] L. Gatto and D. Laksov, *From linear recurrence relations to linear ODEs with constant coefficients*, J. Algebra Appl. **15** (2016), https://doi.org/10.1142/S0219498816501097.

[11] L. Gatto and L. Rowen, *Grassmann semialgebras and the Cayley-Hamilton theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **7** (2020), 183–201.

[12] L. Gatto and P. Salehyan, *The boson-fermion correspondence from linear ODEs*, J. Algebra **415** (2014) 162–183.

[13] ———, *Hasse-Schmidt derivations on Grassmann algebras. With Applications to Vertex Operators*, IMPA Monographs, vol. 4, Springer Verlag, 2016.

[14] ———, *On Plücker equations characterizing Grassmann cones*, Schubert varieties, equivariant cohomology and characteristic classes — IMPANGA 15, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2018, pp. 97–125, https://doi.org/10.4171/182-1/5.

[15] ———, *The cohomology of the Grassmannian is a gl_n-module*, Comm. Algebra **48** (2020) 274–290.

[16] ———, *Schubert derivations on the infinite exterior power*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **52** (2021) 149–174.

[17] L. Gatto and T. Santiago, *Schubert Calculus on a Grassmann Algebra*, Canadian Mathematical Bulletin **52**(2) (2009): 200–212, https://doi.org/10.4153/CMB-2009-023-x.

[18] L. Gatto and T. Santiago, *Equivariant Schubert calculus*, Ark. Mat. **48**(1) 41–55 (2010), https://doi.org/10.1007/s11512-009-0093-5.

[19] L. Gatto and I. Scherbak, *"On one property of one solution of one equation" or linear ODE's, Wronskians and Schubert calculus*, Mosc. Math. J. **12** (2012) 275–291

[20] L. Gatto and I. Scherbak, *Hasse-Schmidt derivations and Cayley-Hamilton theorem for exterior algebras*, Contemp. Math. **733** (2019) 149–165.

[21] V. G. Kac, A. K. Raina, and N. Rozhkovskaya, *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, vol. 29, World Scientific Publishing, 2013.