UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Ariel dos Santos Santiago

MULTI-IDEAIS SIMÉTRICOS E REPRESENTAÇÃO DE CLASSES DE SEQUÊNCIAS POR IDEAIS DE OPERADORES

Belo Horizonte
2024

Ariel dos Santos Santiago

MULTI-IDEAIS SIMÉTRICOS E REPRESENTAÇÃO DE CLASSES DE SEQUÊNCIAS POR IDEAIS DE OPERADORES

Versão final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Belo Horizonte
2024

Santiago, Ariel dos Santos.

S235m Multi-ideais simétricos e representação de classes de sequências por ideais de operadores. [recurso eletrônico] / Ariel dos Santos Santiago. – 2024
1 recurso online (143 f. il.) : pdf.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 130-133.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de. - Teses. 3. Operadores lineares – Teses. 4. Seqüências (Matemática) – Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Multi-ideais simétricos e representação de classes de sequências por ideais de operadores

ARIEL DOS SANTOS SANTIAGO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU

Prof. Jamilson Ramos Campos
UFPb

Prof. Luis Alberto Garcia Santisteban
UFMG

Prof. Luiz Gustavo Farah Dias
UFMG

Prof. Nacib André Gurgel e Albuquerque
UFPb

Belo Horizonte, 29 de fevereiro de 2024.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Dedico a Ademar Felipe Santiago *(in memoriam)* e Marilza dos Santos.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a minha mãe Marilza dos Santos, meu pai Ademar Felipe Santiago (in memoriam) e minha esposa Lucelma Pinto de Almeida por todo o apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho que tornou este trabalho possível. Por me guiar nos últimos 6 anos com paciência e dedicação.

Aos professores membros da banca examinadora, pelo apoio e contribuições valorosas a este trabalho.

À UFMG e todos os seus membros, pela oportunidade e acolhimento. Finalmente, agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – (FAPEMIG) pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

Sejam $X_1, \ldots, X_n, X, Y$ classes de sequências. Um operador n-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, onde $E_1, \ldots, E_n, F$ são espaços de Banach, pertence ao ideal dos operadores $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-somantes se $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ sempre que $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in X_k(E_k), k = 1, \ldots, n$. Nesta tese comparamos os ideais de operadores multilineares gerados por esta técnica com ideais gerados por outros métodos canônicos, tais como os métodos da linearização e da fatoração. Também desenvolvemos técnicas para gerar ideais simétricos não triviais de operadores multilineares do tipo somante. A representação de classes de sequências por ideais de operadores lineares também é desenvolvida. Dizemos que uma classe de sequências X é ideal-representável se existe um ideal de Banach $\mathcal{I}$ e um espaço de Banach λ de sequências escalares tais que a aplicação $u \in \mathcal{I}(\lambda; E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ é um isomorfismo isométrico para todo espaço de Banach E. Identificamos condições para que X seja ideal-representável e, neste caso, exibimos explicitamente um ideal que representa X. Exemplos ilustrativos e aplicações adicionais das técnicas desenvolvidas também são apresentados.

Palavras-chave: espaços de Banach; ideais de operadores; multi-ideais; classes de sequências.

Abstract

Let $X_1, \ldots, X_n, X, Y$ be sequences classes. An n-linear operator $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, where $E_1, \ldots, E_n, F$ are Banach spaces, belongs to the ideal of $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-summing multilinear operators if $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ whenever $(x_j^k)_{j=1}^\infty \in X_k(E_k), k = 1, \ldots, n$. In this thesis we compare the ideals of multilinear operators generated by this technique with the ideals generated by other canonical methods, such as the linearization and the factorization methods. We also develop techniques to generate non trivial symmetric ideals of the summing type. The representation of sequence classes by (linear) operator ideals is developed. We say that a sequence class X is ideal-representable if there is an Banach ideal $\mathcal{I}$ and a Banach space λ of scalar-valued sequences such that the map $u \in \mathcal{I}(\lambda; E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$ is an isometric isomorphism for every Banach space E. We find conditions for X to be ideal-representable and, in this case, we find explicitly an ideal that represents X. Illustrative examples and additional applications of the techniques are provided.

Keywords: Banach spaces; operator ideals; multi-ideals; sequence classes.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	corpo dos escalares $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
p^*	o conjugado no número real $1 < p < \infty$, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Também definimos $p^* = \infty$ como conjugado de $p = 1$
E, F, G, H	espaços vetoriais e/ou normados e/ou Banach
B_E	bola unitária fechada do espaço normado E
E^*	dual topológico do espaço normado E
J_E	mergulho canônico do espaço normado E em seu bidual E^{**}
$\sigma(E, E^*)$ ou w	topologia fraca do espaço normado E
$x_n \overset{w}{\to} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca para x
$\sigma(E^*, E)$ ou w^*	topologia fraca-estrela do espaço dual E^*
$\varphi_n \overset{w^*}{\to} \varphi$	a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na topologia fraca-estrela para φ
$\ell_p(E)$	espaço das sequências absolutamente p-somáveis a valores em E
$\ell_p^w(E)$	espaço das sequências fracamente p-somáveis a valores em E
$\ell_p^u(E)$	subespaço de $\ell_p^w(E)$ formado pelas sequências incondicionalmente p-somáveis
$\ell_\infty(E)$	espaço das sequências limitadas em E
$c_0(E)$	subespaço de $\ell_\infty(E)$ formado pelas sequências que convergem para zero
$c_{00}(E)$	espaço das sequências em E eventualmente nulas
$\mathrm{Rad}(E)$	espaço das sequências quase incondicionalmente somáveis em E
$\ell_p\langle E\rangle$	espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis em E
X, Y, Z, W	representam classes de sequências
λ	espaço de sequências escalares

$(x_j)_{j=1}^{\infty}$	sequência em E
$(x_j)_{j=1}^{n}$	representa a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$
$(x_j)_{j=n}^{\infty}$	representa a sequência $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$
$x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_n$	representa a lista $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$
e_n	sequência em $\mathbb{K}$ onde aparece 1 na n-ésima coordenada e zero em todas as outras
$E \overset{1}{=} F$	os espaços E e F são iguais e $\\|\cdot\\|_E = \\|\cdot\\|_F$
$E \overset{1}{\hookrightarrow} F$	inclusão contínua de E em F, isto é, $E \subseteq F$ e $\\|x\\|_F \leq \\|x\\|_E$ para todos $x \in E$
$X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$	significa que $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(E)$ para todo espaço de Banach E
$L(E;F)$	espaço dos operadores lineares de E em F
$\mathcal{L}(E;F)$	espaço dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados E e F
$E_1 \times \cdots \times E_n$	produto cartesiano dos espaços $E_1, \ldots, E_n$. Quando $E = E_1 = \cdots = E_n$ escrevemos ${}^nE$
$L(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço dos operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F. Se $E = E_1 = \cdots = E_n$ escrevemos $L({}^nE; F)$
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço dos operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F. Se $E = E_1 = \cdots = E_n$ escrevemos $\mathcal{L}({}^nE; F)$
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$	$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$
$L^s({}^nE; F)$	subespaço vetorial de $L({}^nE; F)$ das aplicações multilineares simétricas
$\mathcal{L}^s({}^nE; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}({}^nE; F)$ das aplicações multilineares simétricas contínuas
$Id_{\mathbb{K}}$	operador identidade em $\mathbb{K}$
$\varphi \otimes y$	operador linear de tipo finito de E em F dado por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$, $\varphi \in E^*$ e $y \in F$
$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y$	operador multilinear de tipo finito de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F dado por $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)y$, $\varphi_1 \in E_1^*, \ldots, \varphi_n \in E_n^*$ e $y \in F$
$\mathcal{F}$	classe dos operadores lineares de tipo finito
$\mathcal{L}_f$	classe dos operadores multilineares de tipo finito
$\mathcal{I}, \mathcal{J}$	ideais de operadores lineares
$\mathcal{N}$	ideal dos operadores lineares nucleares
$\mathcal{N}_p$	ideal dos operadores lineares p-nucleares
$\mathcal{K}$	ideal dos operadores lineares compactos
$\mathcal{W}$	ideal dos operadores lineares fracamente compactos
$\overline{\mathcal{F}}$	ideal dos operadores lineares aproximáveis
Π_p	ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes

D_p	ideal dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes
N_p	ideal dos operadores lineares Cohen fortemente p-nucleares
$\mathcal{U}^{(p,q)}$	ideal dos operadores lineares incondicionalmente (p,q)-somantes
$\mathcal{C}^p$	ideal dos operadores lineares p-convergentes
$\Pi_{X;Y}$	ideal dos operadores (X,Y)-somantes
$\mathcal{M}_n$	ideal de operadores n-lineares
$\mathcal{M}$	ideal de operadores multilineares ou multi-ideal
$\mathcal{L}$	classe dos operadores multilineares contínuos
$\mathcal{L}_n$	classe dos operadores n-lineares contínuos
$\Pi_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}$	ideal dos operadores n-lineares absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somantes
$\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$	ideal dos operadores n-lineares $(X_1,\ldots,X_n;Y)$-somantes
$\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_n)$	classe dos operadores n-lineares obtida pelo método da fatoração
$[\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_n]$	classe dos operadores n-lineares obtida pelo método da linearização
$\mathcal{I}\circ\mathcal{L}$	classe dos operadores multilineares obtida pelo método da composição
$\mathcal{I}\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{J}$	significa que $\mathcal{I}(E;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{J}(E;F)$ para todos E e F Banach
$\mathcal{M}_n\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{M}_n'$	significa que $\mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{M}_n'(E_1,\ldots,E_n;F)$ para todos $E_1,\ldots,E_n$ e F espaços de Banach
$\mathcal{M}\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{M}'$	significa que $\mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{M}'(E_1,\ldots,E_n;F)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todos $E_1,\ldots,E_n$ e F espaços de Banach
$\mathcal{I}(\lambda;E)\approx X(E)$	significa que o espaço $\mathcal{I}(\lambda;E)$ e o espaço de sequências $X(E)$ são isomorfos isometricamente pela aplicação $u\mapsto(u(e_j))_{j=1}^{\infty}$
$\mathcal{I}(\lambda,\cdot)\approx X$	$\mathcal{I}(\lambda;E)\approx X(E)$ para todo espaço de Banach E

Sumário

Introdução

Em 1970, A. Pietsch [44] formalizou a teoria de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach. Nesta subárea são estudadas as classes de operadores lineares entre espaços de Banach que se comportam como os ideais da álgebra em relação à composição de operadores. Mais precisamente, na seguinte cadeia de operadores lineares contínuos

$$H \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{t} G,$$

se u pertence à classe, então $t \circ u \circ v$ também pertence à classe. Logo em seguida, A. Pietsch em [45] também generaliza a teoria para o contexto multilinear e polinomial.

Inicialmente, classes que satisfazem essa propriedade, denominada propriedade de ideal, eram estudadas isoladamente. Dentre as classes com propriedade de ideal são exemplos clássicos os operadores compactos $\mathcal{K}$, operadores fracamente compactos $\mathcal{W}$, operadores nucleares $\mathcal{N}$ e os operadores absolutamente p-somantes Π_p. O estudo sistematizado dessas classes gerou a teoria dos ideais de operadores lineares entre espaços de Banach, que foi concebida e formalizada por A. Pietsch em [44].

Na teoria dos ideais de operadores lineares, destacam-se aqueles definidos, ou caracterizados, por transformações de sequências vetoriais, como por exemplo o ideal Π_p formado por operadores que transformam sequências fracamente p-somáveis em sequências p-somáveis. Em [7], G. Botelho e J. Campos introduziram o conceito de classes de sequências e ideais de operadores multilineares, chamados de multi-ideais do tipo somante, que são caracterizados por transformações de sequências. Esse método recupera vários dos ideais de operadores lineares e multilineares estudados na literatura e tem fomentado o estudo de novos ideais.

No contexto de multi-ideais, dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, várias técnicas foram desenvolvidas no sentido de gerar multi-ideais que generalizam $\mathcal{I}$, isto é, cujas componentes lineares coincidem com $\mathcal{I}$. Algumas delas são: métodos da fatoração e da linearização [15, 31, 45] e ideais de composição [11, 28]. Um dos capítulos desta tese trata das relações entre essas várias formas de se criar ideais de operadores multilineares.

Ideais simétricos de operadores multilineares foram introduzidos em [29] e têm sido estudados desde então. Um ideal $\mathcal{M}$ de operadores multilineares é simétrico se $\mathcal{M}$ contêm a simetrização de cada um de seus operadores. Muitos dos recentes desenvolvimentos de ideais simétricos podem ser encontrados em [10, 14, 46]. Em um dos capítulos desta tese daremos contribuições no sentido de construir técnicas para gerar ideais simétricos de operadores multilineares de tipo somante.

É bem conhecido na literatura que a correspondência $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}; E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ define um isomorfismo isométrico, para cada espaço de Banach E e para todo $1 < p < \infty$, onde p^* denota o conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p^* = 1$, (veja, por exemplo, [22, p. 92]). Este fato se repete em vários outros casos entre ideais de operadores clássicos e espaços usuais de sequências. Para o caso do isomorfismo inicial, entre $\mathcal{L}(\ell_{p^*}; E)$ e $\ell_p^w(E)$, podemos observar que $\mathcal{L}$ é um ideal de operadores e que ℓ_{p^*} é o pré-dual da componente escalar $\ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p$. Surge então o seguinte questionamento: se X é uma classe de sequências qualquer de modo que a componente $X(\mathbb{K})$ admite um pré-dual, digamos ${}^*X(\mathbb{K})$, existe um ideal de operadores $\mathcal{I}$ de modo que a correspondência $u \in \mathcal{I}({}^*X(\mathbb{K}); E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$ está bem definida e é um isomorfismo isométrico para todo E? Veremos, no capítulo final da tese, que nem sempre isso é verdade. Desenvolveremos uma técnica que permite identificar quando uma determinada classe pode ser representada por um ideal de operadores na forma descrita acima. Isso nos permitirá concluir, para cada uma das classes usuais na área, se a classe é representável ou não. Mais ainda, para cada classe representável seremos capazes de identificar o ideal que a representa.

Esta tese se encontra dividida em 4 capítulos e 3 apêncides, cujos conteúdos descrevemos a seguir. O Capítulo 1 contém definições e resultados preliminares sobre a teoria dos operadores lineares, dos operadores multilineares, classes de sequências e dos ideais de operadores. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo das técnicas de geração de ideais de operadores multilineares, comparando-as entre si por meio de inclusões contínuas, tendo como linha mestra a comparação dos multi-ideais gerados por classes de sequências com os ideais gerados pelas outras técnicas. O Capítulo 3 foca no desenvolvimento de técnicas para obtenção de exemplos de ideais simétricos não triviais de operadores multilineares do tipo somante. O Capítulo 4 trata da representação de classes de sequências por ideais de operadores. Consequências inesperadas sobre classes de sequências serão obtidas, por exemplo a identificação de duas novas classes de sequências não triviais que têm ℓ_∞ como componente escalar.

Como apoio à leitura, incluímos três apêndices. O Apêndice A contêm demostrações não triviais de algumas propriedades das classes de sequências Rad e RAD. Por não se tratarem de propriedades essenciais ao desenvolvimento da tese, optamos por apresentá-las em forma de apêndice. Ao longo da tese, um número grande de propriedades especiais de classes de sequências são investigadas. Para comodidade do leitor, as definições de todas essas propriedades estão compiladas no Apêndice B. No Apêndice C provamos algumas propriedades do procedimento $X \mapsto X^u$, explorado nos Capítulos 3 e 4. Tais propriedades não são usadas ao longo da tese; foram incluídas como apêndice para a eventualidade de serem úteis no futuro.

As referências básicas dos assuntos tratados na tese são as seguintes:

• Teoria dos Espaços de Banach: [36, 37].
• Ideais de operadores: [22, 25, 44].
• Operadores multilineares e polinômios homogêneos: [23, 38].
• Multi-ideais e ideais de polinômios: [6, 11, 15].

Os resultados provados no Capítulo 3 estão aceitos para publicação no seguinte artigo:
• G. Botelho, A. S. Santiago, *Symmetric ideals of generalized summing multilinear operators*, Linear and Multilinear Algebra (para consulta, veja arXiv:2306.11860v1[math.FA], 2023).

Artigos com os resultados dos demais capítulos estão em fase de redação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos clássicos e resultados básicos da Álgebra Linear, da Análise Funcional e da Teoria dos Espaços de Banach, que podem ser encontrados em [12,24,36,37], e que serão utilizados ao longo deste trabalho. Trataremos também de conceitos e resultados da teoria de ideais operadores, para os quais nos referenciamos em [22,26,44]. Por serem resultados conhecidos, muitos desses resultados serão apresentados sem demonstrações e, nesses casos, referências para as demonstrações serão fornecidas. Alguns poucos resultados, cujas demonstrações não encontramos na literatura, serão demonstrados.

1.1 Operadores lineares contínuos

Sempre que considerarmos um espaço vetorial, digamos E, o corpo de escalares será denotado por $\mathbb{K}$ e representará o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 1.1.1. Seja $0 < p \leq 1$. Uma *p-norma* sobre o espaço vetorial E é uma função

$$\|\cdot\|_E \colon E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$.

(ii) $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(iii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ para todo escalar λ e para todo $x \in E$.

(iv) $\|x+y\|_E^p \leq \|x\|_E^p + \|y\|_E^p$ para todos $x, y \in E$ (desigualdade p-triangular).

Quando $p = 1$, a função $\|\cdot\|_E$ é dita ser uma *norma*.

O par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial p-normado*, ou simplesmente, *espaço p-normado* (*espaço vetorial normado* ou *espaço normado*, quando $p = 1$). Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$.

Denota-se por $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária fechada em E. É bem conhecido que a expressão

$$d(x, y) = \|x - y\|^p, \; x, y \in E,$$

define uma métrica em E, chamada de métrica induzida pela p-norma (norma). Um espaço p-normado (normado) E é chamado de *espaço p-Banach* (*espaço de Banach*) quando for completo na métrica induzida pela p-norma (norma). Um espaço E é dito *quasi-normado (quasi-Banach)* se for p-normado (p-Banach) para algum $0 < p \leq 1$. Ao longo desta tese, a menos que se diga o contrário, os espaços $E_1, \ldots, E_n, E, F, G, H$ serão sempre espaços de Banach.

Teorema 1.1.2. [12, Teorema 2.1.1] *Sejam E e F espaços normados e $u\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

i) u é lipschitziano.

ii) u é uniformemente contínuo.

iii) u é contínuo.

iv) u é contínuo em algum ponto de E.

v) u é contínuo na origem.

vi) $\|u\| := \sup\{\|u(x)\| : \; x \in B_E\} < +\infty$.

vii) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|u(x)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$.

O conjunto dos operadores lineares contínuos definidos no espaço normado E a valores no espaço normado F será denotado por $\mathcal{L}(E; F)$, o qual vem a ser um espaço normado, que é completo caso F seja completo, com a norma usual de operadores:

$$\begin{aligned}\|u\| &:= \sup\{\|u(x)\| : x \in B_E\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|u(x)\| \leq c \cdot \|x\| \text{ para todo } x \in E\},\end{aligned}$$

para cada operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$. Quando $F = \mathbb{K}$ denota-se E^* o espaço $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$. O espaço E^* é chamado de *dual topológico* de E e seus elementos são chamados de *funcionais lineares contínuos*. Por simplicidade, algumas vezes diremos apenas *dual de E* e *funcionais lineares*. Ao espaço $E^{**} := (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{K})$, nos referimos como sendo o *bidual* de E. Caso exista um espaço normado de modo que seu dual venha a ser o espaço

E, dizemos que tal espaço é o pré-dual de E e escreveremos ${}^*E$, isto é, $({}^*E)^* = E$. Neste caso dizemos também que E é um *espaço dual*. Nem todo espaço de Banach é um espaço dual. Por exemplo, o espaço c_0 formado pelas sequências de escalares que convergem para zero, munido com a norma do supremo, não é um espaço dual (veja [18, Theorem 6.13]).

Definição 1.1.3. [44, B.1.3] Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é dito ter *posto finito* se sua imagem $u(E)$ é subespaço de F de dimensão finita, ou equivalentemente, se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$ e $y_1, \dots, y_n \in F$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes y_j,$$

isto é $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes y_j\right)(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) y_j$ para todo $x \in E$.

O conjunto de todos os operadores de posto finito de E em F, que claramente é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$, será denotado por $\mathcal{F}(E;F)$. Não é difícil ver que operadores de posto finito são contínuos e que $\|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\| \cdot \|y\|$ para todos $\varphi \in E^*$ e $y \in F$.

Teorema 1.1.4. (Teorema de Hahn-Banach). [12, Corolário 3.1.3] *Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Corolário 1.1.5. [12, Corolário 3.1.4] *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Corolário 1.1.6. [12, Corolário 3.1.5] *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^* \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Teorema 1.1.7. (Teorema de Banach-Steinhaus). [12, Teorema 2.3.2] *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(u_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E;F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x > 0$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < C_x.$$

Então $\sup\limits_{i\in I} \|u_i\| < +\infty$.

As definições acerca de operadores bilineares contínuos, dos quais trata o corolário a seguir, serão fornecidas ainda neste capítulo.

Corolário 1.1.8. [12, Corolário 2.3.5] *Sejam E_1, E_2 e F espaços vetoriais normados, E_2 completo e $B\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ um operador bilinear. Suponha que B seja separadamente contínuo, isto é, $B(x,\cdot)\colon E_2 \longrightarrow F$ e $B(\cdot,y)\colon E_1 \longrightarrow F$ são operadores lineares contínuos para quaisquer $x \in E_1$ e $y \in E_2$ fixados. Então B é um operador bilinear contínuo.*

Teorema 1.1.9. (Teorema do Gráfico Fechado). [12, Teorema 2.5.1] *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, o gráfico de T é um subconjunto fechado em $E \times F$.*

Definição 1.1.10. Dois espaços normados E e F são *isomorfos topologicamente*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear bijetor e contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $u^{-1}\colon F \longrightarrow E$ também é contínuo. Tal operador u é chamado de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*. Um operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ tal que $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamado de *injeção métrica*. Também é usado o termo *imersão isométrica*. Por ser mais comum na teoria de operadores lineares, usaremos o termo *injeção métrica*. Um isomorfismo que é uma injeção métrica é chamado de *isomorfismo isométrico*.

Proposição 1.1.11. [12, Proposição 4.3.1] *Para cada espaço normado E, o operador linear*

$$J_E\colon E \longrightarrow E^{**}, \ \ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

é uma injeção métrica. O operador J_E é chamado de mergulho canônico de E em E^{**}.

Um espaço normado E é dito ser *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E\colon E \to E^{**}$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E^{**}$.

Definição 1.1.12. [12, Definição 4.3.9] Sejam E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$ um operador linear contínuo. Define-se o operador $u^*\colon F^* \longrightarrow E^*$ por

$$u^*(\varphi)(x) = \varphi(u(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F^*.$$

O operador u^* é chamado de *adjunto* de u.

Proposição 1.1.13. [12, Proposição 4.3.11] *Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então $u^* \in \mathcal{L}(F^*;E^*)$ e $\|u^*\| = \|u\|$. Mais ainda, se u é um isomorfismo (isométrico), então u^* também é um isomorfismo (isométrico).*

Lema 1.1.14. [42, Lema 3.1.7] *Sejam E,F espaços de Banach e $v \in \mathcal{L}(F^*;E^*)$. O operador v é w^*-w^*-contínuo se, e somente se, existe $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que $u^* = v$.*

Relembre que uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço normado E é:

(i) *absolutamente convergente* se a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente;

(ii) *incondicionalmente convergente* se, para toda bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente em E.

Vale o Critério de Cauchy: Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço de Banach é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum\limits_{j=n}^{m} x_j\right\| < \varepsilon$ sempre que $m > n \geq n_0$.

Teorema 1.1.15. [12, Proposição 10.1.4] *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado E:*

(i) Toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.

(ii) Toda série absolutamente convergente em E é convergente.

(iii) E é um espaço de Banach.

Definição 1.1.16. [12, Definição 10.3.2] Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada de *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j,$$

onde $a_j \in \mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^* \colon E \longrightarrow \mathbb{K}, \ x_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$, que são chamados de *funcionais coeficientes*.

Teorema 1.1.17. [12, Teorema 10.3.6] *Os funcionais coeficientes associados a uma base de Schauder de um espaço de Banach sempre são contínuos.*

1.2 Espaços de sequências

Espaços formados por sequências que tomam valores em espaços de Banach desempenham papel central em nossa pequisa e por isso introduziremos nesta seção alguns destes espaços, os quais serão novamente abordados quando for conveniente.

Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência no espaço normado E, isto é, $x_j \in E$ para todo $j \in \mathbb{N}$, escreveremos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ ou $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$. Diremos que um espaço de Banach E é *subespaço fechado* do espaço de Banach F se E for subespaço vetorial de F e $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F$ em E.

Definição 1.2.1. Para cada espaço normado E, consideremos os espaços

$$\ell_\infty(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| < +\infty\right\},$$

$$c_0(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \lim_{j\to\infty} \|x_j\| = 0\right\},$$

e

$$c_{00}(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \text{existe } j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0 \text{ para todo } j \geq j_0\right\}.$$

Os elementos desses espaços são chamados, respectivamente, de *sequências limitadas, sequências nulas em norma e sequências eventualmente nulas.*

Para cada espaço normado E valem as inclusões $c_{00}(E) \subseteq c_0(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e além disso, se E for um espaço de Banach, então a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|$$

torna $\ell_\infty(E)$ e $c_0(E)$ espaços de Banach. Em particular, $c_0(E)$ é subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$. Vale ressaltar que a expressão $\|\cdot\|_\infty$, também conhecida como *norma do sup*, define uma norma em $c_{00}(E)$ mas não o torna Banach. Quando $E = \mathbb{K}$ escrevemos ℓ_∞, c_0 e c_{00}, ao invés de $\ell_\infty(\mathbb{K})$, $c_0(\mathbb{K})$ e $c_{00}(\mathbb{K})$ respectivamente.

Definição 1.2.2. Sejam E um espaço normado e $1 \leq p < \infty$. Define-se

$$\ell_p(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < +\infty \right\}.$$

Os elementos de $\ell_p(E)$ são chamados de *sequências absolutamente p-somáveis.*

Quando E for um espaço de Banach, a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $\ell_p(E)$ que a torna um espaço de Banach. Quando $E = \mathbb{K}$ escreve-se apenas ℓ_p. Por p^* nos referimos ao conjugado de $p \in (1, \infty)$, isto é, $1/p + 1/p^* = 1$. De acordo com a notação já introduzida anteriormente, $(\ell_p)^*$ e ${}^*\ell_p$ representam o dual e o pré-dual de ℓ_p, respectivamente. As seguintes relações são satisfeitas:

(a) Se $p \neq 1$ então $(\ell_p)^* = {}^*\ell_p = \ell_{p^*}$,

(b) Se $p = 1$ então ${}^*\ell_1 = c_0$ e $(\ell_1)^* = \ell_\infty$.

Dessa forma, faz sentido escrever $p^* = \infty$ quando $p = 1$. Para esses espaços tem-se o seguinte teorema, cuja demostração pode ser encontrada em [3, Proposição 2.1.6],

Teorema 1.2.3. (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Se $n \in \mathbb{N}$ e $p, q_1, \ldots, q_n \geq 1$ são tais que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha_j^1 \cdots \alpha_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha_j^1|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha_j^n|^{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

sempre que $(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty \in \ell_{q_1}, \ldots, (\alpha_j^n)_{j=1}^\infty \in \ell_{q_n}$.

Dados E e F espaços normados, a notação $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ significa que $E \subseteq F$ e que $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$. Neste caso, dizemos que E está contido continuamente em F. Escreveremos $E \overset{1}{=} F$ quando $E = F$ e $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F$.

Segue como caso particular do Teorema 1.2.3 que $\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$ para todo espaço normado E e para todos $1 \leq p < q < \infty$.

Definição 1.2.4. Sejam E um espaço normado e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se os conjuntos

$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p \text{ para todo } \varphi \in E^* \right\}$$

e

$$c_0^w(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0 \text{ para todo } \varphi \in E^* \right\}.$$

Os elementos de $\ell_p^w(E)$ são chamados de *sequências fracamente p-somáveis* e aos elementos de $c_0^w(E)$ nos referimos como *sequências fracamente nulas*.

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_p$$

define uma norma em $\ell_p^w(E)$ tornando-o um espaço de Banach, sempre que E for Banach. Munido da norma do sup, $c_0^w(E)$ é subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$ e $c_0(E) \subseteq c_0^w(E)$. Outro espaço importante é o espaço das *sequências incondicionalmente p-somáveis*, definido por

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) : \lim_{n \to \infty} \|(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{w,p} = 0 \right\},$$

munido da norma $\|\cdot\|_{w,p}$ (veja [22]). O espaço $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Quando $E = \mathbb{K}$ e $p \neq \infty$ então $\ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p^u(\mathbb{K}) = \ell_p$ e $c_0^w(\mathbb{K}) = c_0$.

Definição 1.2.5. [21] Seja $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em um espaço normado E é *Cohen fortemente p-somável* se a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j)$ for convergente sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E^*)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

O espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis de E é usualmente denotado por $\ell_p\langle E\rangle$ e a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) \right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)|$$

define uma norma em $\ell_p\langle E\rangle$ (veja [21, Theorem 1.1.2]). Quando E é um espaço de Banach, a norma $\|\cdot\|_{C,p}$ é completa em $\ell_p\langle E\rangle$; a demonstração desse fato pode ser vista em [34, Lemma 1.1, Theorem 1.2].

Teorema 1.2.6. [21, Theorem 1.1.3] *Seja E um espaço de Banach.*

(i) Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$.

(ii) Para $p = 1$, $\ell_1\langle E\rangle \overset{1}{=} \ell_1(E)$.

(iii) Para $p = \infty$, $\ell_\infty(E) \overset{1}{=} \ell_\infty^w(E)$.

Além disso, os Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers (veja [26, Theorem 2.18] e [17, Teorema 1.1.8]) garantem que, para $1 < p < \infty$,

$$\ell_p(E) = \ell_p^w(E) \Longleftrightarrow \dim(E) < +\infty \Longleftrightarrow \ell_p\langle E\rangle = \ell_p(E).$$

Outro importante espaço de sequências é construído usando as funções de Rademacher $(r_j)_{j=1}^{\infty}$, isto é, para $j \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$, $r_j(t) = \operatorname{sign}(\operatorname{sen}(2^j\pi t))$, da seguinte forma: Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é *quase-incondicionalmente somável* se a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ for convergente em $L_p([0,1];E)$ para algum, e então para todo, $0 < p < \infty$. O espaço das sequências quase incondicionalmente somáveis de E é denotado por $\operatorname{Rad}(E)$, o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\operatorname{Rad}(E)} := \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} = \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para mais detalhes veja [26, p. 231] ou [51, p. 320]. Também importante para o nosso estudo é o espaço

$$\operatorname{RAD}(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{\operatorname{Rad}(E)} < +\infty\right\}.$$

A função

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\operatorname{RAD}(E)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{\operatorname{Rad}(E)}$$

faz de $\operatorname{RAD}(E)$ um espaço de Banach. Mais ainda, $\operatorname{Rad}(E)$ é subespaço fechado de $\operatorname{RAD}(E)$, com igualdade de normas em $\operatorname{Rad}(E)$ (veja [51, Chapter V.5.]). A igualdade $\operatorname{Rad}(E) = \operatorname{RAD}(E)$ ocorre se, e somente se, E não contém subespaço isomorfo a c_0 (veja [51, Theorem 6.1]).

Teorema 1.2.7. (Princípio da Contração de Kahane). [26, Chapter 12.2] *Sejam $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j(t) x_j\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{k\leq n} |a_k| \cdot \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A igualdade

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|^p dt = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1} \frac{1}{2^n} \cdot \left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^p \tag{1.1}$$

é usada na demostração do Princípio de Contração e nos será muito útil mais adiante.

Definição 1.2.8. [36, Proposition 4.a.2] Uma *função de Orlicz* $M\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não decrescente e convexa definida para $t \geq 0$ tal que $M(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Se $M(t) = 0$ para algum $t > 0$, então M é chamada de *função de Orlicz degenerada*.

Para cada função de Orlicz M associa-se o espaço ℓ_M de todas as sequências $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(|\alpha_j|/\rho\right) < +\infty$$

para algum $\rho > 0$. O espaço ℓ_M equipado com a norma

$$\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_M := \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} M\left(|\alpha_j|/\rho\right) \leq 1\right\}$$

é um espaço de Banach, chamado de *espaço de sequências de Orlicz*. Define-se também o conjunto h_M das sequências $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(|\alpha_j|/\rho\right) < +\infty$$

para todo $\rho > 0$.

A partir agora, $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ denotará a sequência formada pelos vetores canônicos dos espaços de sequências escalares, isto é, cada e_j tem j-ésima coordenada igual a 1 e todas as demais coordenadas são nulas.

Proposição 1.2.9. [36, Proposition 4.a.2] *Seja M uma função de Orlicz. Então h_M é subespaço fechado de ℓ_M e a sequência $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ forma uma base de Schauder para h_M.*

Quando M é uma função de Orlicz degenerada obtemos $\ell_M = \ell_\infty$ e $h_M = c_0$. Os espaços de sequências de Orlicz recuperam como casos particulares os espaços ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. De fato, basta considerar $M(t) = |t|^p$ para obter $\ell_M = \ell_p$.

Seja M uma função de Orlicz não-degenerada e cuja função derivada à esquerda p satisfaz $p(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \infty$. Essas hipóteses excluem apenas o caso particular onde $M(t) = t$, ou seja, $\ell_M = \ell_1$. Considere a função $q\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(s) = \sup\{t : p(t) \leq s\},$$

a qual é contínua à direita, é não decrescente, $q(0) = 0$ e $q(s) > 0$ para todo $s > 0$. A função de Orlicz não-degenerada M^* é definida por

$$M^*(s) = \int_0^s q(r)dr, \text{ para todo } s \geq 0.$$

A função M^* é chamada de *função complementar de M*.

Proposição 1.2.10. [36, Proposition 4.b.1] *Sejam M e M^* funções de Orlicz complementares. Então o espaço dual $h_M^* := (h_M)^*$ é isomorfo isometricamente a ℓ_{M^*} por meio da correspondência $\varphi \mapsto (\varphi(e_j))_{j=1}^{\infty}$.*

1.3 Ideais de operadores lineares

Para os conceitos e resultados desta seção, nos referimos aos livros [22, 26, 44].

Definição 1.3.1. Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, a componente $\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E;F)$ satisfaz:

(i) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores de posto finito.

(ii) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então a composição $t \circ v \circ u$ pertence $\mathcal{I}(E;H)$.

Além disso, se existir uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \colon \mathcal{I} \to [0,\infty)$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma (ou quasi-norma) para todos espaços de Banach E e F,

(b) $\|\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, onde $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ é o operador identidade em $\mathbb{K}$,

(c) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$ então

$$\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \cdot \|v\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u\|,$$

então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é chamado de *ideal normado de operadores* (ou *ideal quasi-normado de operadores*). Mais ainda, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach* (ou *ideal quasi-Banach*) se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ forem espaços completos com relação à norma (respectivamente, completo com respeito à quasi-norma) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$. O ideal $\mathcal{I}$ é dito *fechado* se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ forem subespaços fechados em $\mathcal{L}(E;F)$ com relação à norma usual de operadores.

Alguns dos ideais de operadores mais estudados na literatura são os seguintes: operadores de posto finito $\mathcal{F}$, operadores compactos $\mathcal{K}$, operadores aproximáveis na norma usual por operadores de posto finito $\overline{\mathcal{F}}$, operadores fracamente compactos $\mathcal{W}$, operadores completamente contínuos $\mathcal{CC}$, operadores absolutamente p-somantes Π_p e operadores nucleares $\mathcal{N}$. Dentre os ideais citados, são exemplos de ideais fechados os ideais $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{CC}$ e $\overline{\mathcal{F}}$. As definições de todos estes ideais, e outros mais, podem ser encontradas em [44]. Além disso, oportunamente transcreveremos as definições de todos os ideais que serão estudados, ou citados como exemplos, neste trabalho.

Segue de imediato da Definição 1.3.1 que a classe dos operadores lineares contínuos $\mathcal{L}$ é um ideal de Banach, mais ainda, o Lema a seguir nos fornece uma importante desigualdade.

Lema 1.3.2. [44, Proposition 6.1.4] *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal quasi-normado, E, F espaços de Banach e $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Então $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$.*

Exemplo 1.3.3. [44, Theorem 1.2.2 e Theorem 1.3.2] Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é dito ser *aproximável* se existir uma sequência de operadores de posto finito $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}(E;F)$ tal que $\|u_j - u\| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. A classe dos operadores aproximáveis é denotada por $\overline{\mathcal{F}}$. A classe dos operadores lineares de posto finito $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores e a classe dos operadores aproximáveis $\overline{\mathcal{F}}$ é um ideal fechado. Mais ainda, $\mathcal{F}$ é o menor ideal de operadores e $\overline{\mathcal{F}}$ é o menor ideal fechado.

Definição 1.3.4. [26, Chapter 5] Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é dito ser *nuclear* se existem sequências $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E^*$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq F$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \otimes y_j \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j\| \cdot \|y_j\| < +\infty.$$

Neste caso, escrevemos $u \in \mathcal{N}(E;F)$ e dizemos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j \otimes y_j$ é uma *representação nuclear* de u. Define-se também

$$\|u\|_{\mathcal{N}} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j\| \cdot \|y_j\| \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações nucleares de u.

Dados $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais normados, escreveremos $\mathcal{I}_1 \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{I}_2$ sempre que $\mathcal{I}_1(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{I}_2(E;F)$ para todos E, F.

Teorema 1.3.5. [44, Theorem 6.3.2 e Theorem 6.7.2] *A classe dos operadores nucleares $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é o menor ideal de Banach, isto é, $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é um ideal de Banach e $\mathcal{N} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{I}$ para todo ideal de Banach $\mathcal{I}$.*

De acordo com o Lema 1.3.2 e o Teorema 1.3.5 podemos dizer que os ideais $\mathcal{L}$ e $\mathcal{N}$ são o "maior" e o "menor" ideal de Banach, respectivamente. Em outras palavras, todo ideal de Banach $\mathcal{I}$ satisfaz; $\mathcal{N} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{I} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}$.

Definição 1.3.6. Dados E e F espaços de Banach, um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é dito ser:

(i) *Compacto* se $u(B_E)$ é relativamente compacto em F, isto é, $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F. Neste caso, escrevemos $u \in \mathcal{K}(E;F)$.

(ii) *Fracamente compacto* se $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F, isto é, $\overline{u(B_E)}^{w}$ é fracamente compacto em F. Neste caso, escrevemos $u \in \mathcal{W}(E;F)$.

Teorema 1.3.7. ([27, VI.4 Corollary 4 e Theorem 5; VI.5 Lemma 3 e Theorem 4] e [44, Proposition 1.11.3]) *A classe dos operadores compactos $\mathcal{K}$ e a classe dos operadores fracamente compactos $\mathcal{W}$ são ambas ideais de operadores. A norma usual de operadores torna $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ ideais de Banach. Além disso, $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{W}$.*

Definição 1.3.8. [26, 43] Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é chamado de *absolutamente p-somante* se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$. O espaço de todos os operadores p-somantes de E em F é usualmente denotado por $\Pi_p(E;F)$. Para cada $u \in \Pi_p(E;F)$ define-se $\pi_p(u)$ como o ínfimo de todas as constantes que satisfazem (1.2).

Teorema 1.3.9. [43, Satz 1,3 e 4] *A função $\pi_p(\cdot)$ define uma norma em $\Pi_p(E;F)$. Além disso, se F for Banach, então a norma π_p é completa em $\Pi_p(E;F)$. A classe (Π_p, π_p) é um ideal de Banach.*

Definição 1.3.10. [21] Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$, entre espaços normados, é chamado de

(i) *Cohen fortemente p-somante*, $1 < p \leq \infty$, se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(F^*)}} \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u(x_j))\right| \leq C \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

(ii) *Cohen p-nuclear*, $1 \leq p < \infty$, se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(F^*)}} \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u(x_j))\right| \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Os espaço dos operadores Cohen fortemente p-somantes e Cohen p-nucleares são denotados por $D_p(E;F)$ e $N_p(E;F)$, respectivamente. Definimos as funções

$$d_p(\cdot) \colon D_p(E;F) \longrightarrow [0, \infty)$$

e

$$n_p(\cdot) \colon N_p(E;F) \longrightarrow [0, \infty)$$

como sendo o ínfimo sobre as constantes que satisfazem as desigualdades (1.3) e (1.4), respectivamente.

Teorema 1.3.11. [21, Theorem 2.1.1] *$(D_p(E;F), d_p)$ e $(N_p(E;F), n_p)$ são espaços vetoriais normados, além disso, se F for completo então ambos os espaços também o são. As classes D_p e N_p são ambas ideais de Banach.*

1.4 Ideais de operadores n-lineares e multi-ideais

Começamos esta seção apresentando a definição de operador multilinear bem como algumas equivalências sobre sua continuidade e resultados iniciais. Para a teoria básica de operadores multilineares nos referimos aos livros [23, 38].

Definição 1.4.1. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um operador $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é dito ser *n-linear*, em símbolos $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, se for linear em cada uma de suas coordenadas, isto é, se

$$A(x_1, \ldots, \alpha x_j' + x_j'', \ldots, x_n) = \alpha A(x_1, \ldots, x_j', \ldots, x_n) + A(x_1, \ldots, x_j'', \ldots, x_n),$$

para quaisquer $1 \leq j \leq n$, $x_j', x_j'' \in E_j$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dados $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais normados e $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, as expressões

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &:= \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|, \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &:= (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e} \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &:= \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}
\end{aligned}$$

definem normas equivalentes em $E_1 \times \cdots \times E_n$. Trabalhando com qualquer uma dessas normas, podemos considerar operadores n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são contínuos.

Proposição 1.4.2. [48, Proposição 2.7] *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

i) A é contínuo.

ii) A é contínuo na origem.

iii) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todos $x_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$.

iv) $\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| :\ x_1 \in B_{E_1}, \ldots, x_n \in B_{E_n}\} < +\infty$.

O conjunto de todos os operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $E = E_1 = \cdots = E_n$ escreveremos $\mathcal{L}(^nE; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$ escrevemos apenas $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ ao invés de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$.

Proposição 1.4.3. [48, Proposição 2.8 e Proposição 2.10] *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então:*

i) $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

ii) $\|A\| = \inf\{C \geq 0 : \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

iii) $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *é um subespaço vetorial de* $L(E_1, \ldots, E_n\ ; F)$.

iv) A função $A \mapsto \|A\|$ *define uma norma em* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

v) Se F *é um espaço de Banach, então* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*, com a norma do item iv), também é um espaço de Banach.*

Exemplo 1.4.4. Dados espaços normados $E_1, \ldots, E_n, F$, funcionais lineares contínuos $\varphi_1 \in E_1^*, \ldots, \varphi_{n-1} \in E_{n-1}^*$ e um operador $u \in \mathcal{L}(E_n; F)$, o operador $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ definido por

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \cdot u(x_n),$$

é um operador n-linear contínuo com $\|A\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_{n-1}\| \cdot \|u\|$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, denota-se por S_m o conjunto de todas as bijeções do conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ sobre si mesmo.

Proposição 1.4.5. [47, Teorema 2.2.1] *Sejam* $E_1, \ldots, E_m$ *e* F *espaços normados. Então para cada* $n \in \{1, \ldots, (m-1)\}$ *e cada permutação* $\sigma \in S_m$*, o operador*

$$\psi\colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F) \to \mathcal{L}(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}; \mathcal{L}(E_{\sigma(n+1)}, \ldots, E_{\sigma(m)}; F)),$$

$$\psi(A)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})(x_{\sigma(n+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \ldots, x_m),$$

é um isomorfismo isométrico.

Teorema 1.4.6. [47, Teorema 3.1.9] *Sejam* $E_1, \ldots, E_n$ *espaços normados,* F *um espaço de Banach e* G_i *um subespaço de* $E_i, i = 1, \ldots, n$*. Para todo operador* $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ *existe um único operador* $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n; F)$ *que estende* A *e* $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

Definição 1.4.7. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $\varphi_1 \in E_1^*, \ldots, \varphi_n \in E_n^*$ e $y \in F$. Define-se o operador n-linear contínuo $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ por

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) y.$$

É fácil verificar que $\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \|y\|$. Os operadores n-lineares em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que são combinações lineares de operadores deste tipo são chamados de *operadores n-lineares de tipo finito*. É claro que o conjunto formado pelos operadores de tipo finito é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, que será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Definição 1.4.8. Seja $n \in \mathbb{N}$. Um *ideal de operadores n-lineares*, ou *n-ideal*, $\mathcal{M}_n$ é uma subclasse da classe de todos os operadores n-lineares contínuos entre espaços de Banach tal que para todos espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e F, a componente $\mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{M}_n \cap \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ que contém os operadores de tipo finito, isto é, para todos $\varphi_1 \in E_1^*,\ldots,\varphi_n \in E_n^*$ e $y \in F$,

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F).$$

(ii) Propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$, $u_1 \in \mathcal{L}(G_1;E_1),\ldots,u_n \in \mathcal{L}(G_n;E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então $t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)$ pertence a $\mathcal{M}_n(G_1,\ldots,G_n;H)$.

Se existir uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n} : \mathcal{M}_n \to [0,\infty)$ satisfazendo:

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n}$ restrita à componente $\mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ é uma norma para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n$ e F,

(b) $\|A\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} : A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) := \alpha_1\cdots\alpha_n\|_{\mathcal{M}_n} = 1$,

(c) Se $A \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$, $u_1 \in \mathcal{L}(G_1;E_1)$, $\ldots$, $u_n \in \mathcal{L}(G_n;E_n)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{M}_n} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}_n} \cdot \|u_1\|\cdots\|u_n\|,$$

então $(\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})$ é chamado de *ideal normado de operadores n-lineares*, ou simplesmente *n-ideal normado*. Analogamente ao caso de ideal de operadores, pode-se introduzir os conceitos de *ideal de Banach de operadores n-lineares* (ou *n-ideal de Banach*) e *ideal fechado de operadores n-lineares* (ou *n-ideal fechado*).

Na definição de ideal de operadores n-lineares, temos $n \in \mathbb{N}$ fixado. Se as condições (i),(ii),(a),(b) e (c) forem válidas para todo $n \in \mathbb{N}$, então obtemos a definição *ideal de operadores multilineares* (ou *multi-ideal*) $\mathcal{M}$. Os conceitos de *ideal de Banach de operadores multilineares* (ou *multi-ideal de Banach*) e de *ideal fechado de operadores multilineares* (ou *multi-ideal fechado*), são definidos da maneira óbvia.

Chame de $\mathcal{L}_n$ a classe dos operadores n-lineares contínuos. É imediato que se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal, então a classe $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_n$ é um ideal de operadores n-lineares.

Exemplo 1.4.9. A classe dos operadores multilineares continuos $\mathcal{L}$ é um multi-ideal de Banach e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a classe dos operadores n-lineares contínuos $\mathcal{L}_n$ é um n-ideal de Banach.

Exemplo 1.4.10. [45] A classe dos operadores multilineares de tipo finito $\mathcal{L}_f$ e seu fecho $\overline{\mathcal{L}_f}$, isto é, operadores que podem ser aproximados, na norma usual, por operadores de tipo finito, são exemplos de multi-ideais.

Definição 1.4.11. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p, q_1,\ldots,q_n \in (0,\infty]$ tais que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$. Um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é dito ser *absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somante* se existir $C \geq 0$ tal que

$$\|(A(x_1^j,\ldots,x_n^j))_{j=1}^m\|_p \leq C \cdot \prod_{i=1}^n \|(x_i^j)_{j=1}^m\|_{w,q_i}, \tag{1.5}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^j \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Neste caso escrevemos $A \in \Pi_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e define-se $\|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}$ como sendo o ínfimo das constantes C que satisfazem (1.5).

Exemplo 1.4.12. Para $p \geq 1$, a classe, de todos os operadores multilineares absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_n)$-somantes, $\Pi_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}$ é um n-ideal de Banach (veja [2]).

1.5 Classes de sequências

Para cada espaço vetorial E associa-se o espaço vetorial $E^{\mathbb{N}}$ formado por todas as sequências em E munido das operações algébricas de soma e de produto por escalar feitos coordenada a coordenada, isto é,

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} + \alpha\cdot(y_j)_{j=1}^{\infty} := (x_j + \alpha y_j)_{j=1}^{\infty},$$

para todos $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$. No caso particular onde $E = \mathbb{K}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, conforme dito antes, definimos os vetores canônicos

$$e_n := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, 1, 0, 0, \ldots),$$

onde a unidade aparece na n-ésima coordenada. O conceito de *classe de sequências*, que é um dos objetos centrais da nossa pesquisa, foi introduzido em [7].

Definição 1.5.1. Uma *classe de sequências* X é uma regra $E \mapsto X(E)$ que associa a cada espaço de Banach E um espaço de Banach $X(E)$ formado por sequências em E, isto é, $X(E)$ é subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações coordenada a coordenada, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $c_{00}(E) \subseteq X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$.

(ii) $\|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Usando os espaços de sequências introduzidos anteriormente, as seguintes correspondências são classes de sequências: $E \mapsto \ell_\infty(E)$, $E \mapsto c_0(E)$, $E \mapsto c_0^w(E)$, $E \mapsto \ell_p(E)$, $E \mapsto \ell_p^w(E)$, $E \mapsto \ell_p^u(E)$, $E \mapsto \mathrm{Rad}(E)$, $E \mapsto \mathrm{RAD}(E)$ e $E \mapsto \ell_p\langle E\rangle$ $(1 \leq p < \infty$).

Denotaremos uma classe de sequências $E \mapsto X(E)$ por $X(\cdot)$ ou simplesmente X. Quando não houver ambiguidade com as notações usuais dos espaços clássicos, usaremos a notação X. Quando houver, usaremos $X(\cdot)$. Por exemplo, por um lado escreveremos $\ell_\infty(\cdot), c_0(\cdot), \ell_p(\cdot)$; por outro lado escreveremos simplesmente $c_0^w, \ell_p^w, \ell_p^u$, Rad e RAD. O mesmo *modus operandi* será aplicado para outras classes de sequências com as quais trabalharemos ao longo do trabalho.

Dados vetores $x_1, \ldots, x_k$ em um espaço normado, a sequência $(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, 0, \ldots)$ será denotada simplesmente por $(x_j)_{j=1}^k$. O leitor deve estar atento ao fato de que, apesar da notação, $(x_j)_{j=1}^k$ é uma sequência, e portanto tem infinitas coordenadas.

Definição 1.5.2. Uma classe de sequências X é *finitamente determinada* se para todo espaço de Banach E e para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ se, e somente se, $\sup\limits_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < +\infty$ e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

As classes de sequências $\ell_p(\cdot), \ell_p^w, \ell_\infty(\cdot), \mathrm{RAD}$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $1 \leq p < \infty$, são exemplos conhecidos de classes finitamente determinadas. Já as classes $c_0(\cdot), c_0^w, \ell_p^u$ e Rad não são finitamente determinadas.

Proposição 1.5.3. [7, Proposition 2.4] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências. Para cada operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ são equivalentes:*

(i) $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ *sempre que* $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \in X_1(E_1), \ldots, (x_j^n)_{j=1}^{\infty} \in X_n(E_n)$.

(ii) O operador

$$\widehat{A}\colon X_1(E_1) \times \cdots \times X_n(E_n) \to Y(F),\ \ \widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^n)_{j=1}^{\infty}\right) := (A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$$

está bem definido, é linear e contínuo.

As condições acima implicam na condição (iii) abaixo, e todas elas são equivalentes se as classes de sequências $X_1, \ldots, X_n$ e Y forem finitamente determinadas.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^k\|_{X_i(E_i)}, \tag{1.6}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todos $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1 \ldots, n$. Neste caso,

$$\|\widehat{A}\| = \inf\{C : (1.6) \text{ ocorre}\}.$$

Definição 1.5.4. [7, Definition 3.1] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências. Um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dito ser $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-*somante* se as condições equivalentes da Proposição 1.5.3 ocorrem para A, isto é, $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ sempre que $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \in X_1(E_1), \ldots, (x_j^n)_{j=1}^{\infty} \in X_n(E_n)$. Neste caso, escreve-se $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e define-se

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} := \|\widehat{A}\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_n(E_n);Y(F))}.$$

No caso em que $X_1 = \cdots = X_n = X$ escreve-se apenas $\Pi_{{}^nX;Y}$ e $\|\cdot\|_{{}^nX;Y}$. No caso linear, quando $n = 1$, escreve-se $\Pi_{X;Y}$ e $\|\cdot\|_{X;Y}$.

O teorema a seguir determina condições suficientes para que $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ seja um n-ideal de Banach, e o Lema que o antecede também será enunciado pois nos será de grande utilidade. Mas antes de enunciá-los, precisaremos de alguns preparativos.

Definição 1.5.5. Uma classe de sequências X é dita ser *linearmente estável* se para todos E, F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ tem-se que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$ e $\|\widehat{u}\colon X(E) \to X(F)\| = \|u\|$.

Todas as classes de sequências citadas até o momento são linearmente estáveis.

O conceito a seguir é claramente inspirado na desigualdade de Hölder generalizada (Teorema 1.2.3).

Definição 1.5.6. Sejam $X_1, \ldots, X_n, X$ classes de sequências quaisquer. Escrevemos

$$X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} X(\mathbb{K})$$

se $(\alpha_j^1 \cdots \alpha_j^n)_{j=1}^{\infty} \in X(\mathbb{K})$ e

$$\left\|(\alpha_j^1 \cdots \alpha_j^n)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(\mathbb{K})} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\|(\alpha_j^i)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X_i(\mathbb{K})}$$

sempre que $(\alpha_j^i)_{j=1}^{\infty} \in X_i(\mathbb{K}),\ i = 1, \ldots, n$.

Lema 1.5.7. [7, Lemma 3.4] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências linearmente estáveis.*

(i) Para todo espaço de Banach E,

$$\|(0, 0, \ldots, 0, x, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} = \|x\|_E$$

independente de $x \in E$ e da posição em que x aparece na sequência.

(ii) Para $k \in \mathbb{N}$ e para quaisquer sequências $(x_1^m)_{m=1}^{\infty}, \ldots, (x_k^m)_{m=1}^{\infty}$ em E, se $\lim\limits_m x_j^m = x_j$ para $j = 1, \ldots, k$, então

$$\lim_m (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_k^m, 0, 0, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \text{ em } X(E).$$

(iii) $\|A\| \leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ para todo $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Teorema 1.5.8. [7, Theorem 3.6] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências linearmente estáveis tais que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$. Então $(\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}, \|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_n;Y})$ é um n-ideal de Banach.*

O método do resultado acima para construir ideais de Banach de operadores multilineares recupera muitos ideais de operadores lineares e multilineares como casos particulares. Citamos apenas alguns exemplos lineares, usando os ideais de operadores lineares introduzidos anteriormente:

$$\Pi_{\ell_p(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle} \overset{1}{=} D_p,\ 1 < p \leq \infty,$$

$$\Pi_{\ell_p^w;\ell_p\langle\cdot\rangle} \overset{1}{=} N_p,\ 1 \leq p < \infty,$$

veja [21, Theorem 2.1.1], e

$$\Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)} \overset{1}{=} \Pi_p,\ 1 \leq p < \infty,$$

veja [26, Proposition 2.1]. Para $1 \leq q \leq p < \infty$, os seguintes ideais de operadores também são casos particulares da construção do teorema acima: o ideal $\mathcal{U}^{(p,q)}$ dos operadores incondicionalmente (p,q)-somantes ([33, Definition 1.4]), o ideal $\mathcal{C}^p$ dos operadores p-convergentes introduzido em [19] (para um desenvolvimento recente veja [20]), e o ideal Π_{as} dos operadores quase-somantes ([26, p. 234]). De fato,

$$\Pi_{\ell_q^w;\ell_p^u} \overset{1}{=} \mathcal{U}^{(p,q)},\ \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)} \overset{1}{=} \mathcal{C}^p, \quad \text{e } \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}} \overset{1}{=} \Pi_{as}.$$

Vejamos um exemplo multilinear: para $p, q_1, \ldots, q_n \geq 1$ com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$ temos

$$\Pi_{as(p;q_1,\ldots,q_n)} \overset{1}{=} \Pi_{\ell_{q_1}^w,\ldots,\ell_{q_n}^w;\ell_p(\cdot)}.$$

De forma análoga às definições dadas em [44, p. 63] para ideais de operadores, dizemos que uma regra

$$\mathrm{new}\colon X \longrightarrow X^{\mathrm{new}}$$

que define uma nova classe de sequências X^{new} para cada classe de sequências X dada é chamada de *procedimento*. Um procedimento é dito ser *monótono* se $X^{\mathrm{new}} \subseteq Y^{\mathrm{new}}$ sempre que $X \subseteq Y$. Também dizemos que um procedimento é *idempotente* se $(X^{\mathrm{new}})^{\mathrm{new}} = X^{\mathrm{new}}$. Um procedimento monótono e idempotente é chamado de *procedimento de envoltória* se $X \subseteq X^{\mathrm{new}}$, e de *procedimento de núcleo* se $X^{\mathrm{new}} \subseteq X$.

1.5.1 O procedimento $X \mapsto X^{\mathrm{dual}}$

Apresentaremos nesta seção um procedimento introduzido em [8]. Todos os resultados e exemplos desta seção estão demonstrados nessa referência.

Definição 1.5.9. O *dual* de uma classe de sequências X é a regra que associa a cada espaço de Banach E o seguinte espaço

$$X^{\mathrm{dual}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \text{ converge para todo } (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E^*) \right\}.$$

Exemplo 1.5.10. Para $1 \leq p < \infty$, é fácil ver que $\ell_\infty^{\mathrm{dual}}(\cdot) = \ell_1(\cdot)$ e $(\ell_p^w)^{\mathrm{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}\langle\cdot\rangle$.

O conceito de classe de sequências esfericamente completa foi introduzido em [8] para fazer de X^{dual} uma classe de sequências. Utilizaremos aqui um conceito com uma pequena alteração em relação ao conceito original.

Para um espaço de Banach E, seja $S(E)$ um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações coordenada-a-coordenada. Se existir uma função $\|\cdot\|_{S(E)}\colon S(E) \longrightarrow [0,\infty)$

que faz de $(S(E), \|\cdot\|_{S(E)})$ um espaço vetorial normado, chamaremos $S(E)$ de *espaço normado de sequências*. Note que toda classe de sequências X satisfaz essa condição em cada componente $X(E)$.

Definição 1.5.11. Seja E um espaço de Banach. Um espaço normado de sequências $S(E)$ é dito ser *esfericamente completo* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \text{ e } \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

Dizemos que uma classe de sequências X é *esfericamente completa* se a componente $X(E)$ for esfericamente completa para todo espaço de Banach E.

Observação 1.5.12. Na Definição 1.5.11 pede-se a igualdade de normas; no entanto, vejamos que é suficiente pedir que apenas uma das desigualdades, qualquer uma, seja válida. Para isso, suponha que

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \text{ e } (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ com } |\alpha_j| = 1 \text{ para todo } j \Longrightarrow (\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E).$$

Provemos que, neste caso, são equivalentes:

(1) $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}$ para todos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(2) $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}$ para todos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Já sabemos que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$, e como $\left|\frac{1}{\alpha_j}\right| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela hipótese do item (1) temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \left\| \left(\frac{1}{\alpha_j} \alpha_j x_j \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{S(E)} \leq \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Novamente, temos $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e $\left|\frac{1}{\alpha_j}\right| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela hipótese do item (2),

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \left\| \left(\frac{1}{\alpha_j} \alpha_j x_j \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

Proposição 1.5.13. *Se X é uma classe de sequências esfericamente completa, então a expressão*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E^*)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E^*)}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) \right|$$

define uma norma completa em $X^{\text{dual}}(E)$.

Proposição 1.5.14. *Seja X uma classe de sequências esfericamente completa. Então:*

(i) X^{dual} *é uma classe de sequências finitamente determinada e esfericamente completa.*

(ii) Se X é linearmente estável, então X^{dual} *também é linearmente estável.*

Definição 1.5.15. Uma classe de sequências é dita ser *finitamente injetiva* se

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \|(i(x_j))_{j=1}^n\|_{X(F)}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$ e para toda injeção métrica $i\colon E \longrightarrow F$.

São exemplos de classes finitamente injetivas: $c_0(\cdot), \ell_\infty(\cdot), \ell_p(\cdot), \ell_p^u$ e ℓ_p^w, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.5.16. *Sejam E um espaço de Banach e X uma classe de sequências linearmente estável, finitamente determinada e esfericamente completa. Então*

(i) O operador

$$J\colon X^{\text{dual}}(E^*) \longrightarrow X(E)^*,\ J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j), \tag{1.7}$$

está bem definido e é linear contínuo.

(ii) Se X for finitamente injetiva, então J é um isomorfismo isométrico se, e somente se, $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$.

Exemplo 1.5.17. Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$ e $(\ell_p^u)^{\text{dual}}(E^*) = \ell_{p^*}\langle E^*\rangle = (\ell_p^w)^{\text{dual}}(E^*)$ para todo espaço de Banach E.

1.6 Métodos para gerar multi-ideais

Vimos na seção anterior uma maneira de gerar ideais de operadores n-lineares usando classes de sequências. Veremos nesta seção outras técnicas, que remontam ao início da teoria em [45], que geram multi-ideais a partir de ideais de operadores fixados:

• **Método da fatoração.** Dados um número natural $n \in \mathbb{N}$ e ideais de operadores $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$, um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dito ser de tipo $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$, em símbolos $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)(E_1, \ldots, E_n; F)$, se existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}_j(E_j; G_j), j = 1, \ldots, n$, e um operador n-linear contínuo $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que, para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$,

$$A(x_1, \ldots, x_n) = B(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)).$$

Neste caso escrevemos $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$. Em diagrama,

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "u_1"] & \times & E_2 \arrow[d, "u_2"] & \times \cdots \times & E_n \arrow[d, "u_n"] \arrow[drr, "A=B\circ(u_1,\ldots,u_n)"] & & \\
G_1 & \times & G_2 & \times \cdots \times & G_n \arrow[rr, "B"] & & F
\end{tikzcd}$$

A classe $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$ é um ideal de operadores n-lineares (veja, por exemplo, [15,31]). Se os ideais de operadores $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ são normados, então

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_n)} := \inf\{\|B\| \cdot \|u_1\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|u_n\|_{\mathcal{I}_n}\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis fatorações $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$ descritas acima, define uma quasi-norma em $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $\mathcal{I}_1 = \cdots = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(^n\mathcal{I})$.

• **Método da linearização.** Dados espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$, para cada $i = 1, \ldots, n$, o operador

$$I_i \colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F))$$

definido por

$$I_i(A)(x_i)(x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_n) := A(x_1, \ldots, x_n),$$

é um isomorfismo isométrico (veja [23, Proposition 1.1]). O símbolo $\overset{[i]}{\ldots}$ significa que a i-ésima coordenada foi omitida. Dados um número natural $n \in \mathbb{N}$ e ideais de operadores $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$, um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dito de tipo $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]$, em símbolos $A \in [\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n](E_1, \ldots, E_n; F)$, se para todo $i = 1, \ldots, n$, tem-se $I_i(A) \in \mathcal{I}_i(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F))$. Então $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]$ é um ideal de operadores n-lineares (veja, por exemplo, [15,31]). Se $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ são ideais normados de operadores, então

$$\|A\|_{[\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_n]} := \max\{\|I_1(A)\|_{\mathcal{I}_1} \cdots \|I_n(A)\|_{\mathcal{I}_n}\}$$

define uma norma completa em $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n](E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $\mathcal{I}_1 = \cdots = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}$, escrevemos simplesmente $[^n\mathcal{I}]$.

Além dos métodos vistos acima, um ideal de operadores $\mathcal{I}$ pode ser estendido ao caso multilinear pela transposição da propriedade dos operadores pertencentes a $\mathcal{I}$, quando isso for possível, é claro.

Vejamos um exemplo que ilustra as diferentes possíveis formas de se transpor um ideal de operadores para o caso multilinear. Um operador linear $u \colon E \longrightarrow F$ é *completamente contínuo* se u transforma sequências fracamente convergentes em E em sequências convergentes em norma em F, isto é:

$$x_j \xrightarrow{w} x \text{ em } E \Longrightarrow u(x_j) \longrightarrow u(x) \text{ em } F.$$

O ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos é um dos ideais fechados clássicos da teoria linear (veja, por exemplo, [26, p. 49]). Na notação estabelecida na seção anterior, é claro que $\mathcal{CC} = \Pi_{c_0^w;c_0(\cdot)}$. Podemos considerar então:

• O multi-ideal $\Pi_{c_0^w,\ldots,c_0^w;c_0(\cdot)}$ gerado pelo método das classes de sequências.

• O multi-ideal $\mathcal{L}(\mathcal{CC})$ gerado pelo método da fatoração.

• O multi-ideal $[\mathcal{CC}]$ gerado pelo método da linearização.

• O seguinte ideal gerado pela transposição da propriedade dos operadores em $\mathcal{CC}$. Dizemos que um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *fracamente sequencialmente contínuo* se

$$x_j^k \xrightarrow{w} x_k \text{ em } E_k,\ k = 1, \ldots, n \Longrightarrow A(x_j^1, \ldots, x_j^n) \longrightarrow A(x_1, \ldots, x_n) \text{ em } F.$$

O ideal dos operadores multilineares fracamente sequencialmente contínuos tem sido largamente estudado (veja, por exemplo, [23, Chapter 2]).

Na verdade, conforme veremos no início do próximo capítulo, $\mathcal{L}(\mathcal{CC}) = [\mathcal{CC}]$ (veja Teorema 2.0.3). Os demais ideais são todos distintos.

Capítulo 2

Um comparativo das técnicas para geração de multi-ideais em espaços de Banach

Na Seção 1.6 vimos que um mesmo ideal de operadores lineares pode gerar vários n-ideais. Um dos objetivos deste trabalho é fazer um estudo comparativo entre os vários ideais de operadores n-lineares gerados a partir de um mesmo ideal de operadores lineares.

Neste capítulo pretende-se esclarecer quando um determinado n-ideal gerado por um ideal de operadores $\mathcal{I}$ está contido em um outro n-ideal também gerado por $\mathcal{I}$.

Em relação aos ideais gerados pelos métodos da fatoração e da linearização, é bem conhecido que, para quaisquer ideais de operadores $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$, vale a inclusão

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n) \subseteq [\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n],$$

e que, além disso, vale a igualdade nos seguintes casos particulares:

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}, \ldots, \mathcal{K}) = [\mathcal{K}, \ldots, \mathcal{K}] \text{ e } \mathcal{L}(\mathcal{W}, \ldots, \mathcal{W}) = [\mathcal{W}, \ldots, \mathcal{W}]$$

(veja [32] e [4], respectivamente). Essas duas igualdades são casos particulares de um resultado geral, de demonstração muito difícil, obtido por H. A. Braunss e H. Junek em [16]. Antes de enunciar este resultado, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.0.1. Um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$ é dito ser *injetivo* se para todos E, F e G espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e uma injeção métrica $v \in \mathcal{L}(F; G)$ tais que $v \circ u \in \mathcal{I}(E; G)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E; F)$.

Exemplo 2.0.2. [44, Proposition 4.6.12 e Proposition 4.6.13] Dentre os ideais vistos até agora, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$ e $\mathcal{CC}$ são exemplos de ideais injetivos. O ideal dos operadores aproximáveis $\overline{\mathcal{F}}$ não é injetivo.

Teorema 2.0.3. [16, Theorem 3.4] *Para todos ideais de operadores fechados injetivos $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$, tem-se $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n) = [\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]$.*

Estenderemos essa linha de pesquisa no sentido de buscar subconjuntos de $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]$ que estejam contidos em $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$, ou seja, ao invés de buscar condições sobre os ideais envolvidos, buscaremos condições sobre os operadores multilineares.

Em relação aos ideais de operadores gerados por classes de sequências, temos, em particular, que se $X_1, \ldots, X_n, Y$ são classes de sequências tais que $\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}$ são ideais fechados e injetivos, então $\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}) = [\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}]$ pelo teorema acima. Procuraremos condições sobre as classes de sequências que garantam a validade dessa igualdade.

Procuraremos também condições sobre as classes de sequências que garantam inclusões ou igualdades envolvendo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ e os multi-ideais gerados pelos respectivos ideais de operadores, a saber,

$$\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}) \text{ e } [\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}].$$

Para que estejamos sempre trabalhando com ideais de operadores multilineares, conforme nos ensina o Teorema 1.5.8, neste capítulo, a menos que se diga o contrário, todas as classes de sequências são linearmente estáveis e sempre que considerarmos $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ estará subentendido que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$.

2.1 Sobre a inclusão $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n] \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$

Essa inclusão tem se mostrado ser um problema de difícil investigação, basta ver que nenhum novo resultado nesta direção apareceu desde [16]. Diante dessa dificuldade, torna-se natural buscar subconjuntos de $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]$ que estejam contidos em $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$. Os principais resultados desta seção são o Teorema 2.1.5 e a Proposição 2.1.10.

Definição 2.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Dizemos que um operador n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *quase fechado*, e neste caso escrevemos $A \in \mathcal{L}_{qf}(E_1, \ldots, E_n; F)$, se o conjunto

$$\left\{ i \in \{1, \ldots, n\} : I_i(A)(E_i) \text{ é fechado em } \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F) \right\}$$

tem pelo menos $(n-1)$ elementos, ou seja, $I_i(A)(E_i)$ não é fechado em $\mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F)$ para no máximo um elemento $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplo 2.1.2. Seja E um espaço de Banach. O operador bilinear contínuo

$$A \colon E \times E^* \longrightarrow \mathbb{K}, \;\; A(x, \varphi) = \varphi(x),$$

é quase fechado. De fato, o operador $I_1(A) \colon E \longrightarrow \mathcal{L}(E^*; \mathbb{K}) = E^{**}$ satisfaz

$$I_1(A)(x)(\varphi) = A(x, \varphi) = \varphi(x) = J_E(x)(\varphi)$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E^*$. Segue que $I_1(A) = J_E$, onde J_E é o mergulho canônico, o qual sabemos ser uma injeção métrica. Portanto $I_1(A)(E)$ é fechado em E^{**}.

Por outro lado, o operador $I_2(A)\colon E^* \longrightarrow \mathcal{L}(E;\mathbb{K}) = E^*$ satisfaz

$$I_2(A)(\varphi)(x) = A(x,\varphi) = \varphi(x)$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E^*$. Segue que $I_2(A)(\varphi) = \varphi$ para todo $\varphi \in E^*$, o que implica $I_2(A) = Id_{E^*}$, e portanto $I_2(A)(E^*) = E^*$ é fechado em E^*.

Exemplo 2.1.3. Sejam E_1, E_2, F espaços de Banach, $0 \neq \varphi \in E_1^*$ e $0 \neq v \in \mathcal{L}(E_2;F)$. Considere o operador bilinear contínuo

$$A\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F,\ A(x,y) = \varphi(x)v(y).$$

Vejamos que $I_1(A)(E_1)$ é fechado em $\mathcal{L}(E_2;F)$. Para isso seja $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq E_1$ tal que $I_1(A)(x_j) \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E_2;F)$. Então

$$\varphi(x_j)v(y) = I_1(A)(x_j)(y) \longrightarrow u(y)$$

para todo $y \in E_2$. Como $v \neq 0$, existe $y_0 \in E_2$ de modo que $v(y_0) \neq 0$. Da igualdade na linha acima segue que

$$\varphi(x_j)v(y_0) \longrightarrow u(y_0).$$

Note que

$$(\varphi(x_j)v(y_0))_{j=1}^\infty \subseteq \operatorname{span}\{v(y_0)\},$$

e que $\operatorname{span}\{v(y_0)\}$ é fechado pois tem dimensão finita. Portanto $u(y_0) \in \operatorname{span}\{v(y_0)\}$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u(y_0) = \alpha v(y_0)$. Assim,

$$\varphi(x_j)v(y_0) \longrightarrow \alpha v(y_0)$$

e

$$|\varphi(x_j) - \alpha| \cdot \|v(y_0)\| = \|\varphi(x_j)v(y_0) - \alpha v(y_0)\| \longrightarrow 0.$$

Como $v(y_0) \neq 0$ podemos concluir que $\varphi(x_j) \longrightarrow \alpha$. Por ser um funcional linear contínuo não nulo, φ é sobrejetor, logo existe $x_0 \in E_1$ tal que $\varphi(x_0) = \alpha$. Daí,

$$\begin{aligned} u(y) &= \lim_{j\to\infty} I_1(A)(x_j)(y) = \lim_{j\to\infty} \varphi(x_j)v(y) \\ &= \alpha v(y) = \varphi(x_0)v(y) = I_1(A)(x_0)(y) \end{aligned}$$

para todo $y \in E_2$. Segue que $u = I_1(A)(x_0) \in I_1(A)(E_1)$, o que completa a demonstração de que $I_1(A)(E_1)$ é fechado em $\mathcal{L}(E_2;F)$.

Para provar o primeiro resultado geral desta seção, necessitamos do lema a seguir. A definição de operador n-linear separadamente contínuo é feita de modo análogo ao caso bilinear, que está definido no enunciado do Corolário 1.1.8. O lema abaixo é certamente conhecido na área, mas como não encontramos nenhuma referência para citar, preferimos demonstrá-lo. Relembre que S_n é o conjunto das permutações do conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

Lema 2.1.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$, $E_2, \ldots, E_n$ espaços de Banach e E_1 e F espaços normados. Se um operador n-linear*

$$A\colon E_{\sigma(1)} \times \cdots \times E_{\sigma(n)} \longrightarrow F$$

é separadamente contínuo, então A é contínuo.

Demonstração. Usaremos o princípio de indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 2$, dados $\sigma \in S_2$, E_2 Banach, E_1 e F normados e $A\colon E_{\sigma(1)} \times E_{\sigma(2)} \longrightarrow F$ um operador bilinear separadamente contínuo, segue do Corolário 1.1.8 que o operador bilinear

$$B\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F\ ,\ B(x_1, x_2) := A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}),$$

que é claramente separadamente contínuo, é contínuo. Pela Proposição 1.4.5, e usando a notação dessa proposição, segue que $A = \psi^{-1}(B)$ também é contínuo.

Suponhamos agora que o resultado desejado seja verdadeiro para $n = k$. Sejam $E_2, \ldots, E_{k+1}$ espaços de Banach, $\sigma \in S_{k+1}$, E_1 e F espaços normados e $A\colon E_{\sigma(1)} \times \cdots \times E_{\sigma(k+1)} \longrightarrow F$ um operador $(k+1)$-linear separadamente contínuo. Considere o operador $(k+1)$-linear $B\colon E_1 \times \cdots \times E_{k+1} \longrightarrow F$ dado por

$$B(x_1, \ldots, x_{k+1}) := A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k+1)}).$$

Na notação da Proposição 1.4.5, $\psi(A) = B$; logo, para mostrar que A é contínuo basta mostrar que B é contínuo. É imediato que B é separadamente contínuo, em particular é contínuo na $(k+1)$-ésima coordenada. Segue que, para todos $x_i \in E_i,\ i, = 1, \ldots, k$, o operador linear

$$B(x_1, \ldots, x_k, \cdot)\colon E_{k+1} \longrightarrow F\ ,\ x_{k+1} \in E_{k+1} \mapsto B(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in F,$$

pertence a $\mathcal{L}(E_{k+1}, F)$. Em particular, a família

$$\mathcal{F} := \{B(x_1, \ldots, x_k, \cdot) : x_i \in B_{E_i}, i = 1, \ldots, k\}$$

está contida em $\mathcal{L}(E_{k+1}; F)$. Vejamos que esta família é pontualmente limitada. Para cada $x_{k+1} \in E_{k+1}$, o operador $B_{x_{k+1}}\colon E_1 \times \cdots \times E_k \longrightarrow F$ dado por

$$B_{x_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k) := B(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}),$$

é claramente k-linear e separadamente contínuo. A hipótese de indução nos permite concluir que o operador k-linear $B_{x_{k+1}}$ é contínuo. Temos então $B_{x_{k+1}} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ para todo $x_{k+1} \in E_{k+1}$. Segue que, para todo $x_{k+1} \in E_{k+1}$ e todos $x_i \in B_{E_i}$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned}\|B(x_1, \ldots, x_k, \cdot)(x_{k+1})\| = \|B(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\| &= \|B_{x_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k)\| \\ &\le \|B_{x_{k+1}}\|_{\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)} =: C_{x_{k+1}}.\end{aligned}$$

Isso prova que a família $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, a família é uniformemente limitada, isto é, existe uma constante C tal que

$$\sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ 1 \leq i \leq k}} \sup_{x_{k+1} \in B_{E_{k+1}}} \|B(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\| < C.$$

Segue imediatamente da $(k+1)$-linearidade de B que $\|B(x_1, \ldots, x_{k+1})\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_{k+1}\|$ para todos $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, k+1$. Isso prova que B é contínuo e completa a demonstração. $\square$

Teorema 2.1.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ ideais injetivos de operadores lineares. Então*

$$([\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n] \cap \mathcal{L}_{qf}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n).$$

Demonstração. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $A \in [\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n]\,(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{L}_{qf}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, temos $I_i(A) \in \mathcal{I}_i(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F))$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, considere o operador linear contínuo

$$u_i \colon E_i \longrightarrow \overline{I_i(A)(E_i)},\ u_i(x_i) = I_i(A)(x_i).$$

Chamando de v_i a inclusão de $\overline{I_i(A)(E_i)}$ em $\mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F)$, temos

$$v_i \circ u_i = I_i(A) \in \mathcal{I}_i(E_i; \mathcal{L}(E_1, \overset{[i]}{\ldots}, E_n; F)).$$

Como v_i é uma injeção métrica entre espaços de Banach e o ideal $\mathcal{I}_i$ é injetor, segue que $u_i \in \mathcal{I}_i\left(E_i; \overline{I_i(A)(E_i)}\right)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Vejamos que o operador

$$B \colon I_1(A)(E_1) \times \cdots \times I_n(A)(E_n) \longrightarrow F,$$

$$B\left(I_1(A)(x_1), \ldots, I_n(A)(x_n)\right) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

está bem definido. Sejam $y_1 \in E_1, \ldots, y_n \in E_n$ tais que $I_i(A)(x_i) = I_i(A)(y_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Usando essas igualdades que acabamos de escrever e as definições dos operadores I_i, temos

$$\begin{aligned}
A(x_1, \ldots, x_n) &= I_1(A)(x_1)(x_2, \ldots, x_n) = I_1(A)(y_1)(x_2, \ldots, x_n) \\
&= I_2(A)(x_2)(y_1, x_3, \ldots, x_n) = I_2(A)(y_2)(y_1, x_3, \ldots, x_n) \\
&= I_3(A)(x_3)(y_1, y_2, x_4, \ldots, x_n) = I_3(A)(y_3)(y_1, y_2, x_4, \ldots, x_n) \\
&\ \vdots \\
&= I_n(A)(x_n)(y_1, \ldots, y_{n-1}) = I_n(A)(y_n)(y_1, \ldots, y_{n-1}) = A(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

Isso prova que B está bem definido. A n-linearidade de B segue imediatamente da linearidade dos operadores $I_i(A)$ e da n-linearidade do operador A. Fixando $i \in \{1, \ldots, n\}$

e $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots, x_n \in E_n$, temos, para todo $x_i \in E_i$,

$$\begin{aligned} \|B\left(I_1(A)(x_1), \ldots, I_i(A)(x_i), \ldots, I_n(A)(x_n)\right)\| &= \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \\ &= \|I_i(A)(x_i)(x_1, \overset{[i]}{\ldots}, x_n)\| \\ &\leq \|I_i(A)(x_i)\| \cdot \|x_1\| \overset{[i]}{\cdots} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Segue que B é separadamente contínuo. Por A ser quase fechado, sabemos que B está definido em um produto de n espaços normados sendo pelos menos $(n-1)$ espaços de Banach. Segue do Lema 2.1.4 que o operador n-linear B é contínuo e pelo Teorema 1.4.6 podemos considerar a extensão n-linear contínua de B:

$$\widetilde{B} \colon \overline{I_1(A)(E_1)} \times \cdots \times \overline{I_n(A)(E_n)} \longrightarrow F.$$

Como

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{B}\left(I_1(A)(x_1), \ldots, I_n(A)(x_n)\right) = \widetilde{B}\left(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)\right)$$

para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, temos $A = \widetilde{B} \circ (u_1, \ldots, u_n)$. Do fato de que $\widetilde{B}$ é n-linear contínuo e u_i pertence a $\mathcal{I}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, concluímos que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$. □

Nosso próximo objetivo é aplicar o teorema acima para ideais de operadores do tipo $\Pi_{X;Y}$. Para isso precisaremos de propriedades sobre as classes de sequências envolvidas.

Definição 2.1.6. Dizemos que uma classe de sequências X é *injetiva* se dados E, F espaços de Banach e $v \in \mathcal{L}(E; F)$ uma injeção métrica, tem-se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq \|(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(F)}$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ e $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$.

Exemplo 2.1.7. Vejamos que, para $1 \leq p < \infty$, as seguintes classes de sequências são injetivas: $\ell_\infty(\cdot), c_0(\cdot), c_0^w, \ell_p(\cdot), \ell_p^w$, ℓ_p^u, Rad e RAD.

Para isso sejam $v \colon E \longrightarrow F$ uma injeção métrica e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ tais que $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$. Para:

- $X = \ell_\infty(\cdot)$ temos $(v(x_j))_{j=1}^{\infty}$ limitada e
$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|v(x_j)\| < +\infty,$$
logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \|(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_\infty$.

- $X = c_0(\cdot)$ temos $v(x_j) \longrightarrow 0$, logo
$$\|x_j\| = \|v(x_j)\| \longrightarrow 0$$
e portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(E)$. A igualdade de normas segue como no item anterior.

- $X = \ell_p(\cdot)$ temos $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$, logo
$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \|v(x_j)\|^p < +\infty$$
e portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \|(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p$.

- $X = \ell_p^w$ temos $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F)$. Para cada $\varphi \in E^*$ considere
$$\overline{\varphi}\colon v(E) \subseteq F \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \overline{\varphi}(v(x)) := \varphi(x).$$
A boa definição de $\overline{\varphi}$ segue da injetividade de v (toda injeção métrica é injetora), e a linearidade de $\overline{\varphi}$ segue das linearidades de v e de φ. Usando uma vez mais que v é injeção métrica,
$$\|\overline{\varphi}(v(x))\| = \|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| = \|\varphi\| \cdot \|v(x)\|,$$
o que prova a continuidade de $\overline{\varphi}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\widetilde{\varphi} \in F^*$ que estende $\overline{\varphi}$ a F de forma linear e mantendo a norma. De
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(v(x_j))|^p < +\infty,$$
segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e como
$$\|\widetilde{\varphi}\| = \|\overline{\varphi}\| = \sup_{x \in B_E} \|\overline{\varphi}(v(x))\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(x)\| = \|\varphi\|,$$
segue que $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \leq \|(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}$.

- Para $X = c_0^w$ temos $v(x_j) \xrightarrow{w} 0$. Argumento análogo ao caso de ℓ_p^w mostra que $x_j \xrightarrow{w} 0$, e o mesmo cálculo do caso $\ell_\infty(\cdot)$ fornece a igualdade de normas.

- $X = \mathrm{RAD}$ temos $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{RAD}(F)$, isto é, $\sup\limits_k \|(v(x_j))_{j=1}^{k}\|_{\mathrm{Rad}} < \infty$. Para todo $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{\mathrm{Rad}}^2 &= \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j(t) x_j\right\|^2 dt = \int_0^1 \left\|v\left(\sum_{j=1}^{k} r_j(t) x_j\right)\right\|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j(t) v(x_j)\right\|^2 dt = \|(v(x_j))_{j=1}^{k}\|_{\mathrm{Rad}}^2.\end{aligned}$$
Disso, segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{RAD}(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{RAD}} = \|(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{RAD}}$.

- X=Rad temos $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(F)$, isto é, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j v(x_j)$ converge em $L_2([0,1],F)$. Pelo critério de Cauchy para séries, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq m > n_0 \Longrightarrow \left\|\sum_{j=n}^{m} r_j v(x_j)\right\|_{L_2([0,1],F)} < \varepsilon.$$

Como v é injeção métrica, o mesmo cálculo feito no caso de RAD mostra que

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1],E)} = \left\|\sum_{j=n}^{m} r_j v(x_j)\right\|_{L_2([0,1],F)} < \varepsilon$$

para todos $n \geq m > n_0$, e portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$. Como as normas RAD e Rad coincidem em Rad, a igualdade das normas segue do caso anterior.

Exemplo 2.1.8. Para todo $1 < p < \infty$, a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ não é injetiva. Isso está provado em [41, Proposição 4.4.17]. No caso $p = 1$ tem-se $\ell_1\langle\cdot\rangle = \ell_1(\cdot)$, que, conforme vimos acima, é uma classe injetiva.

Lema 2.1.9. *Sejam X e Y classes de sequências com Y injetiva. Então o ideal de operadores $\Pi_{X;Y}$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $v\colon F \longrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $v \circ u \in \Pi_{X;Y}(E;G)$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, então

$$(v(u(x_j)))_{j=1}^{\infty} = ((v \circ u)(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(G).$$

Além disso, como $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \subseteq F$, v é injeção métrica e Y é injetiva concluímos que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$, logo $u \in \Pi_{X;Y}(E;F)$. □

Proposição 2.1.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências com Y injetiva. Então*

$$([\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}] \cap \mathcal{L}_{qf}) \subset \mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}).$$

Demonstração. Basta combinar o Lema 2.1.9 com o Teorema 2.1.5. □

2.2 Ideais fechados do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$

Conforme já mencionado mais de uma vez, a igualdade $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n] = \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$ vale se os ideais de operadores $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ são fechados e injetivos. A dificuldade em aplicar este resultado para ideais de operadores do tipo $\Pi_{X;Y}$ é que esses ideais, na maioria dos casos, não são fechados. Nesta seção, primeiro provaremos que, sob certas condições, esses ideais de operadores são fechados (veja Proposição 2.2.1), e então aplicaremos este resultado para obter coincidências do tipo $[\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}] = \mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y})$ (veja Proposição 2.2.8).

Apesar de nosso interesse imediato estar focado em ideais lineares fechados do tipo $\Pi_{X;Y}$, provaremos o resultado para n-ideais do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$, do qual o caso linear decorre tomando-se $n = 1$.

Proposição 2.2.1. *Sejam $X_1,\ldots,X_n$ classes de sequências quaisquer e Y uma classe de sequências cuja norma é $\|\cdot\|_\infty$ a norma do sup. Para todos os espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n$ e F, a componente $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ com igualdade de normas. Em particular, se $X_1,\ldots,X_n$ e Y forem classes linearmente estáveis com $X_1(\mathbb{K})\cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$, então $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é um ideal fechado de operadores e a norma $\|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ coincide com a norma usual de operadores.*

Demonstração. Seja $(A_m)_{m=1}^\infty$ uma sequência de operadores em $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1,\ldots,E_n;F)$ tal que $A_m \longrightarrow A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ na norma usual de operadores. Tome $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i)$, $i=1,\ldots,n$. Temos então $(A_m(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ para cada $m\in\mathbb{N}$. Note que, como $X_i(E_i) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ para qualquer operador n-linear $B\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e todo $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|B(x_k^1,\ldots,x_k^n)\|_F &\le \|B\|\cdot\|x_k^1\|\cdots\|x_k^n\| \le \|B\|\cdot\|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_\infty\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_\infty\\ &\le \|B\|\cdot\|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)}\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_{X_n(E_n)}.\end{aligned}$$

Segue que $(B(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(F)$. Em particular, $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty\in\ell_\infty(F)$. Dado $\varepsilon>0$ tome $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $m>m_0$ implica em

$$\|A_m - A\| < \frac{\varepsilon}{\|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)}\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_{X_n(E_n)}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\|(A_m(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty - (A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(F)}\\ &\quad= \|\left((A_m-A)(x_j^1,\ldots,x_j^n)\right)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(F)}\\ &\quad= \sup_j \|(A_m-A)(x_j^1,\ldots,x_j^n)\| \le \sup_j \|A_m-A\|\cdot\prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{X_i(E_i)}\\ &\quad\le \frac{\varepsilon}{\|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(E_1)}\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_{X_n(E_n)}}\cdot\prod_{i=1}^n\|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{X_i(E_i)} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $m>m_0$. Logo $(A_m(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty \xrightarrow{m} (A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty$ em $\ell_\infty(F)$, e portanto $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty\in Y(F)$ pois $Y(F)$ é fechado em $\ell_\infty(F)$. Isso prova que $A\in\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e, consequentemente, tem-se $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1,\ldots,E_n;F)$ fechado em $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Suponha que $X_1,\ldots,X_n$ e Y sejam linearmente estáveis e que $X_1(\mathbb{K})\cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$, ou seja, $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é um n-ideal de Banach. Pelo Lema 1.5.7 sabemos que $\|A\|\le$

$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}$. Para a desigualdade inversa, veja que

$$\begin{aligned}
\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} &= \sup\left\{\|(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty\|_{Y(F)} : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&= \sup\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}}\|A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\| : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&\leq \sup\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}}\|A\|\cdot\|x_j^1\|\cdots\|x_j^n\| : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&= \|A\|\cdot\sup\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}}\|x_j^1\|\cdots\|x_j^n\| : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&\leq \|A\|\cdot\sup\left\{\prod_{i=1}^n\left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\|x_j^i\|\right) : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&= \|A\|\cdot\sup\left\{\prod_{i=1}^n\|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(E_i)} : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\}\\
&\leq \|A\|\cdot\sup\left\{\prod_{i=1}^n\|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{X_i(E_i)} : (x_j^i)_{j=1}^\infty \in B_{X_i(E_i)},\ i=1,\ldots,n\right\} = \|A\|.
\end{aligned}$$

□

Antes de prosseguir, vejamos que o resultado acima recupera alguns casos conhecidos de ideais fechados do tipo $\Pi_{X;Y}$.

Exemplo 2.2.2. Da Proposição 2.2.1 decorre que o ideal $\mathcal{CC} = \Pi_{c_0^w;c_0}$ dos operadores lineares completamente contínuos é fechado. E, para $1 \leq p < \infty$, decorre que o ideal $\mathcal{C}_p = \Pi_{\ell_p^w;c_0}$ dos operadores lineares p-convergentes é fechado.

A seguir estudaremos uma classe de sequências que, apesar de ser muito natural, ainda não havia sido investigada neste contexto. Por não haver referências para citar, provaremos todos os resultados.

Definição 2.2.3. Para cada espaço de Banach E definimos

$$c(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : (x_j)_{j=1}^\infty \text{ é convergente em } E\right\}.$$

Lema 2.2.4. [12, Proposição 1.1.1] *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E.*

Proposição 2.2.5. *A correspondência $E \mapsto (c(E), \|\cdot\|_\infty)$ define uma classe de sequências linearmente estável.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach qualquer. É imediato que $c(E)$ é subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$, $c_{00}(E) \subseteq c(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ e $\|e_j\|_{c(\mathbb{K})} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Resta mostrar que $c(E)$ é espaço de Banach. Para isso mostraremos que $c(E)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$ e a conclusão se dará pelo Lema 2.2.4.

Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq c(E)$ com $x_n \longrightarrow y \in \ell_\infty(E)$, $x_n = (x_{n,j})_{j=1}^\infty$ para todo n e $y = (y_j)_{j=1}^\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{n,i} - y_i\| \leq \sup_j \|x_{n,j} - y_j\| = \|(x_{n,j})_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(E)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todos $i \in \mathbb{N}$ e $n \geq k_0$. Cada $x_n \in c(E)$, digamos $x_{n,j} \xrightarrow{j\to\infty} a_n \in E$ para todo n. Temos então:

- Como $((x_{n,j})_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\ell_\infty(E)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|(x_{n,j})_{j=1}^\infty - (x_{m,j})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(E)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$
- Para cada $n, m \geq n_0$ considere $j_n, j_m \in \mathbb{N}$ tais que
$$\|a_n - x_{n,j}\| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall j \geq j_n, \text{ e } \|a_m - x_{m,j}\| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall j \geq j_m.$$
- Considere $j_{n,m} = \max\{j_n, j_m\}$.

Daí, para todos $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\|a_n - a_m\| &= \|a_n - x_{n,j_{n,m}} + x_{n,j_{n,m}} - x_{m,j_{n,m}} + x_{m,j_{n,m}} - a_m\| \\
&\leq \|a_n - x_{n,j_{n,m}}\| + \|x_{n,j_{n,m}} - x_{m,j_{n,m}}\| + \|x_{m,j_{n,m}} - a_m\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \|(x_{n,j} - x_{m,j})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty(E)} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso prova que a sequência $(a_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em E, e portanto convergente, digamos $a_n \longrightarrow a \in E$.

Tome agora $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq k_0$, tal que $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \geq k_1$. Como $x_{n,j} \xrightarrow{j} a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{k_1,j} - a_{k_1}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $j \geq j_0$.

Daí, para todo $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned}
\|y_j - a\| &= \|y_j - x_{k_1,j} + x_{k_1,j} - a_{k_1} + a_{k_1} - a\| \\
&\leq \|y_j - x_{k_1,j}\| + \|x_{k_1,j} - a_{k_1}\| + \|a_{k_1} - a\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo $y_j \longrightarrow a$, e disso segue que $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$. Está provado que $c(E)$ é um espaço de Banach.

Vejamos agora a estabilidade linear. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$. Da continuidade de u segue que $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c(F)$, e portanto $\Pi_{c(\cdot);c(\cdot)}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$. Para a igualdade de normas, por um lado,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{c(\cdot);c(\cdot)} &= \sup\left\{\|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{c(F)} : (x_j)_{j=1}^\infty \in B_{c(E)}\right\} \\
&= \sup\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(x_j)\| : (x_j)_{j=1}^\infty \in B_{c(E)}\right\} \\
&\leq \|u\| \sup\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| : (x_j)_{j=1}^\infty \in B_{c(E)}\right\} = \|u\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $x \in B_E$, como $\|(x, 0, 0, \ldots)\|_{\ell_\infty(E)} = \|x\| \leq 1$ e $\|(u(x), 0, 0, \ldots)\|_{\ell_\infty(F)} = \|u(x)\|$, temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{c(\cdot);c(\cdot)} &= \sup\left\{\|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{c(F)} : (x_j)_{j=1}^\infty \in B_{c(E)}\right\}\\ &\geq \sup\{\|(u(x), 0, 0, \ldots)\|_{c(F)} : x \in B_E\} = \sup\{\|u(x)\| : x \in B_E\} = \|u\|.\end{aligned}$$

□

O conceito a seguir também foi introduzido em [7].

Definição 2.2.6. Dado $n \in \mathbb{N}$, uma classe de sequências X é dita ser *n-linearmente estável* se para todos espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e F tem-se

$$\Pi^n{}_{X;X}(E_1, \ldots, E_n; F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Em outras palavras, dadas sequência $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X(E_1), \ldots, (x_j^n)_{j=1}^\infty \in X(E_n)$ e um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, tem-se

$$\left(A(x_j^1, \ldots, x_j^n)\right)_{j=1}^\infty \in X(F)$$

e

$$\|\widehat{A}\colon X(E_1) \times \cdots \times X(E_n) \longrightarrow X(F)\| = \|A\|.$$

X é dita ser *multilinearmente estável* se for n-linearmente estável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.7. As seguintes classes são multilinearmente estáveis: $\ell_\infty(\cdot), c_0(\cdot), \ell_1^w, \ell_1^u$, Rad, RAD, $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ para $1 \leq p < \infty$. As seguintes classes não são multilinearmente estáveis: $c_0^w, \ell_p^w, \ell_p^u$ para $1 < p < \infty$. Tudo isso pode ser encontrado em [7].

Podemos agora provar o resultado principal da seção, que estabelece, em particular, igualdades da forma $[\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n] = \mathcal{L}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n)$ para ideais de operadores do tipo $\Pi_{X;Y}$.

Proposição 2.2.8. (a) $\Pi_{X;c_0(\cdot)} = \Pi_{X;c(\cdot)}$ *para toda classe de sequência X tal que $X \subseteq c_0^w$.*
(b) *Para $n \in \mathbb{N}$, $\Pi^n{}_{X;c_0(\cdot)} = \Pi^n{}_{X;c(\cdot)}$ para toda classe de sequências n-linearmente estável X tal que $X \subseteq c_0^w$.*
(c) *Se $X_1, \ldots, X_n$ são classes de sequências linearmente estáveis com $X_1, \ldots, X_n \subseteq c_0^w$ e $X_i(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} c_0$, $i = 1, \ldots, n$, então*

$$\begin{aligned}[\Pi_{X_1;c(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c(\cdot)}] = [\Pi_{X_1;c_0(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c_0(\cdot)}] &= \mathcal{L}(\Pi_{X_1;c_0(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c_0(\cdot)})\\ &= \mathcal{L}(\Pi_{X_1;c(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c(\cdot)}).\end{aligned}$$

Demonstração. (a) A inclusão $\Pi_{X;c_0(\cdot)}(E; F) \subseteq \Pi_{X;c(\cdot)}(E; F)$ é imediata pois $c_0(F) \subseteq c(F)$. Resta então mostrar a inclusão contrária. Para isso, sejam $u \in \Pi_{X;c(\cdot)}(E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Então $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c(F)$, isto é, a sequência $(u(x_j))_{j=1}^\infty$ é convergente em F, digamos $u(x_j) \longrightarrow y \in F$. Em particular, $u(x_j) \overset{w}{\longrightarrow} y$ em F. Por outro lado, $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$

pois $X(E) \subseteq c_0^w(E)$, e como c_0^w é linearmente estável, temos $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0^w(F)$, isto é, $u(x_j) \xrightarrow{w} 0$. Como a topologia fraca é de Hausdorff, segue que $y = 0$. Isso prova que $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(F)$ e, portanto, $u \in \Pi_{X;c_0(\cdot)}(E;F)$.

(b) Assim como no item (a), basta mostrar que $\Pi^n{}_{X;c(\cdot)} \subseteq \Pi^n{}_{X;c_0(\cdot)}$. Então sejam $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X(E_1), \ldots, (x_j^n)_{j=1}^\infty \in X(E_n)$ e $A \in \Pi^n{}_{X;c(\cdot)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Por um lado, $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in c(F)$, isto é, a sequência $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty$ é convergente em F, digamos $A(x_j^1, \ldots, x_j^n) \longrightarrow y \in F$. Em particular, $A(x_j^1, \ldots, x_j^n) \xrightarrow{w} y$ em F. Por outro lado, da n-estabilidade de X segue que $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in X(F) \subseteq c_0^w(F)$, portanto $A(x_j^1, \ldots, x_j^n) \xrightarrow{w} 0$. Concluímos assim, que $y = 0$. Isso prova que $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in c_0(F)$ e logo $A \in \Pi^n{}_{X;c_0(\cdot)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(c) Sabemos do Lema 2.1.9 e da Proposição 2.2.1 que os ideais $\Pi_{X_i;c_0(\cdot)}$, $i = 1, \ldots, n$, são injetivos e fechados. O Teorema 2.0.3 nos fornece a igualdade $[\Pi_{X_1;c_0(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c_0(\cdot)}] = \mathcal{L}(\Pi_{X_1;c_0(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;c_0(\cdot)})$. As demais igualdades seguem do item (a). □

Para aplicações concretas do teorema acima pode-se tomar $X_i = \ell_p^w$ ou $X_i = \ell_p^u$ para $i = 1, \ldots, n$, e $1 \leq p < \infty$.

2.3 Sobre a inclusão $\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}) \subseteq \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$

Dados dois ideais de operadores n-lineares $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ escrevemos $\mathcal{N} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{M}$ se $\mathcal{N}(E_1, \ldots, E_n; F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $E_1, \ldots, E_n, F$. O principal resultado desta seção é a Proposição 2.3.1.

Proposição 2.3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências. Se Y for n-linearmente estável então*

$$\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y}) \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}.$$

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y}, \ldots, \Pi_{X_n;Y})(E_1, \ldots, E_n; F)$, existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, operadores $u_i \in \Pi_{X_i;Y}(E_i; G_i)$, $i = 1, \ldots, n$, e $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$. Assim, dadas sequências $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, temos $\left(u_i(x_j^i)\right)_{j=1}^\infty \in Y(G_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\left(A(x_j^1, \ldots, x_j^n)\right)_{j=1}^\infty = \left(B(u_1(x_j^1), \ldots, u_n(x_j^n))\right)_{j=1}^\infty \in Y(F)$$

pois Y é n-linearmente estável. Isso prova que $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Além disso, da estabilidade n-linear de Y e da continuidade de B segue que

$$\begin{aligned} \left\| \left(A(x_j^1, \ldots, x_j^n)\right)_{j=1}^\infty \right\|_{Y(F)} &= \left\| \left(B(u_1(x_j^1), \ldots, u_n(x_j^n))\right)_{j=1}^\infty \right\|_{Y(F)} \\ &\leq \|B\| \cdot \left\| \left(u_1(x_j^1)\right)_{j=1}^\infty \right\|_{Y(G_1)} \cdots \left\| \left(u_1(x_j^1)\right)_{j=1}^\infty \right\|_{Y(G_n)}. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $(x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_i(E_i)}, i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \leq \|B\| \cdot \|u_1\|_{X_1;Y} \cdots \|u_n\|_{X_n;Y}$$

e tomando agora o ínfimo sobre todas as possíveis fatorações $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$ com u_i pertencente a $\Pi_{X_i;Y}(E_i; G_i)$ concluímos que

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y},\ldots,\Pi_{X_n;Y})}.$$

□

No caso particular em que $Y = \ell_p(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$, segue da estabilidade multilinear de $\ell_p(\cdot)$ e da proposição acima que $\mathcal{L}(\Pi_{X_1;\ell_p(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;\ell_p(\cdot)}) \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X_1,\ldots,X_n;\ell_p(\cdot)}$. No entanto, é possível melhorar ainda mais esta inclusão.

Proposição 2.3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}, n \leq p < \infty$ e $X_1, \ldots, X_n$ classes de sequências. Então*

$$\mathcal{L}(\Pi_{X_1;\ell_p(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;\ell_p(\cdot)}) \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X_1,\ldots,X_n;\ell_{\frac{p}{n}}(\cdot)}.$$

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}(\Pi_{X_1;\ell_p(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;\ell_p(\cdot)})(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $(x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in X_i(E_i), i = 1, \ldots, n$. Considere $B \circ (u_1, \ldots, u_n)$ uma fatoração de A com cada $u_i \in \Pi_{X_i;\ell_p(\cdot)}$. Temos $p/n \geq 1$ e $\frac{1}{p/n} = \frac{n}{p} = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}$. Assim, usando a Desigualdade de Hölder Generalizada,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|A(x_j^1, \ldots, x_j^n)\|^{p/n}\right)^{n/p} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|B\left(u_1(x_j^1), \ldots, u_n(x_j^n)\right)\|^{p/n}\right)^{n/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|B\|^{p/n} \left(\|(u_1(x_j^1)\| \cdots \|u_n(x_j^n))\|\right)^{p/n}\right)^{n/p} \\
&= \|B\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\|(u_1(x_j^1)\| \cdots \|u_n(x_j^n))\|)^{p/n}\right)^{n/p} \\
&\leq \|B\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(u_1(x_j^1)\|^p\right)^{1/p} \cdots \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(u_n(x_j^n)\|^p\right)^{1/p} < +\infty,
\end{aligned}$$

logo $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;\ell_{p/n}(\cdot)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Tomando o supremo sobre $(x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in B_{X_i(E_i)}, i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;\ell_{p/n}(\cdot)} \leq \|B\| \cdot \|u_1\|_{X_1;\ell_p(\cdot)} \cdots \|u_n\|_{X_n;\ell_p(\cdot)}$$

e tomando o ínfimo sobre todas as possíveis fatorações $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$ com u_i pertencente a $\Pi_{X_i;\ell_p(\cdot)}$ tem-se

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;\ell_{p/n}(\cdot)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\Pi_{X_1;\ell_p(\cdot)},\ldots,\Pi_{X_n;\ell_p(\cdot)})}.$$

□

2.4 Sobre a inclusão $[\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}] \subseteq \Pi_{X_1,\dots,X_n;Y}$

Um primeiro resultado sobre essa inclusão segue imediatamente de resultados vistos anteriormente:

Proposição 2.4.1. *Sejam $X_1,\dots,X_n,Y$ classes de sequências.*

(i) Se Y for injetiva e n-linearmente estável, então

$$([\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}] \cap \mathcal{L}_{qf}) \subseteq \Pi_{X_1,\dots,X_n;Y}.$$

(ii) Se Y for injetiva e n-linearmente estável com $\Pi_{X_i;Y}$ ideal fechado para todo $i = 1,\dots,n$, então

$$[\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}] \subseteq \Pi_{X_1,\dots,X_n;Y}.$$

Demonstração. (i) Basta combinar as Proposições 2.1.10 e 2.3.1.

(ii) Das hipóteses de injetividade e do ideal ser fechado tem-se

$$\mathcal{L}(\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}) = [\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}]\,.$$

O resultado segue da Proposição 2.3.1. □

Por um lado, é imediato que se X é uma classe de sequências linearmente estável e n-linearmente estável, então

$$[\Pi_{X;X},\dots,\Pi_{X;X}] = \Pi_{{}^nX;X} = \mathcal{L}.$$

Por outro lado, se X é linearmente estável mas não n-linearmente estável, por exemplo ℓ_p^w para $p > 1$, então

$$\Pi_{{}^nX;X} \subsetneq [\Pi_{X;X},\dots,\Pi_{X;X}] = \mathcal{L}.$$

Isso quer dizer que a estabilidade linear e a estabilidade n-linear de Y são condições necessárias para que valha a inclusão $[\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}] \subseteq \Pi_{X_1,\dots,X_n;Y}$. O exemplo a seguir mostra que essas duas estabilidades de Y não são condições suficientes para que se tenha a igualdade $[\Pi_{X_1;Y},\dots,\Pi_{X_n;Y}] = \Pi_{X_1,\dots,X_n;Y}$.

Exemplo 2.4.2. Considere as classes de sequências ℓ_1^w e $\ell_1(\cdot)$. Sabemos que ambas são multilinearmente estáveis (veja [7, Theorem 4.3]) e que, pelo Teorema de Defant-Voigt [2, Theorem 3.10],

$$\Pi_{{}^n\ell_1^w;\ell_1}(E_1,\dots,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;\mathbb{K})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos espaços de Banach $E_1,\dots,E_n$. Para o operador bilinear contínuo

$$A\colon E \times E^* \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \ A(x,\varphi) = \varphi(x),$$

vimos no Exemplo 2.1.2 que $I_2(A) = Id_{E^*}$. No entanto, $Id_{E^*} \notin \Pi_{\ell_1^w;\ell_1}(E^*;\mathcal{L}(E;\mathbb{K}))$ (veja [26, Theorem 2.18]), o que implica $A \notin [\Pi_{\ell_1^w;\ell_1},\Pi_{\ell_1^w;\ell_1}](E,E^*;\mathbb{K})$. Por outro lado, $A \in \mathcal{L}(E,E^*;\mathbb{K}) = \Pi_{\ell_1^w,\ell_1^w;\ell_1}(E,E^*;\mathbb{K})$.

Concluiremos este capítulo com dois resultados que mostram a validade da inclusão buscada nesta seção em casos bem particulares.

Proposição 2.4.3. *Sejam $r, s, n \in \mathbb{N}, r+s+1=n, 1 \leq p \leq \infty$ e X uma classe de sequências. Então*

$$[\underbrace{\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L}}_{r-\text{vezes}}, \Pi_{X;\ell_p(\cdot)}, \underbrace{\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L}}_{s-\text{vezes}}] \subseteq \Pi_{{}^r\ell_\infty(\cdot),X,{}^s\ell_\infty(\cdot);\ell_p(\cdot)}.$$

Demonstração. Sejam $A \in [\underbrace{\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L}}_{r-\text{vezes}}, \Pi_{X;\ell_p(\cdot)}, \underbrace{\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L}}_{s-\text{vezes}}](E_1,\ldots,E_n;F)$ e considere as sequências $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E_1), \overset{[r+1]}{\ldots}, (x_j^n)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E_n)$ e $(x_j^{r+1})_{j=1}^\infty \in X(E_{r+1})$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty \|A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\|^p &= \sum_{j=1}^\infty \|I_{r+1}(A)(x_j^{r+1})(x_j^1, \overset{[r+1]}{\ldots}, x_j^n)\|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^\infty \|I_{r+1}(A)(x_j^{r+1})\|^p \cdot \|x_j^1\|^p \overset{[r+1]}{\cdots} \|x_j^n\|^p \\
&\leq \|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_\infty^p \overset{[r+1]}{\cdots} \|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_\infty^p \cdot \sum_{j=1}^\infty \|I_{r+1}(A)(x_j^{r+1})\|^p < +\infty.
\end{aligned}$$

Isso prova que $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$, e portanto $A \in \Pi_{{}^r\ell_\infty(\cdot),X,{}^s\ell_\infty(\cdot);\ell_p(\cdot)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. $\square$

Proposição 2.4.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, p_1, \ldots, p_n < \infty$ e $X_1, \ldots, X_n$ classes de sequências. Se $1/p \leq 1/p_1 + \cdots + 1/p_n$, então*

$$[\Pi_{X_1;\ell_{p_1}(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;\ell_{p_n}(\cdot)}] \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X_1,\ldots,X_n;\ell_{np}(\cdot)}.$$

Demonstração. Dados $A \in [\Pi_{X_1;\ell_{p_1}(\cdot)}, \ldots, \Pi_{X_n;\ell_{p_n}(\cdot)}](E_1,\ldots,E_n;F)$ e $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i)$, $i = 1,\ldots,n$, temos $(I_i(A)(x_j^i) \in \ell_{p_i}(E_i)$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Da Desigualdade Generalizada de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty \|A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\|^{np} &= \sum_{j=1}^\infty \Bigg(\underbrace{\|A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\|\cdots\|A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\|}_{n-\text{vezes}}\Bigg)^p \\
&= \sum_{j=1}^\infty \left(\|I_1(A)(x_j^1)(x_j^2,\ldots,x_j^n)\|\cdots\|I_n(A)(x_j^n)(x_j^2,\ldots,x_j^{n-1})\|\right)^p \\
&\leq \|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_\infty^{p(n-1)}\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_\infty^{p(n-1)} \cdot \sum_{j=1}^\infty \left(\|I_1(A)(x_j^1)\|\cdots\|I_n(A)(x_j^n)\|\right)^p \\
&\leq \|(x_j^1)_{j=1}^\infty\|_\infty^{p(n-1)}\cdots\|(x_j^n)_{j=1}^\infty\|_\infty^{p(n-1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty \|I_1(A)(x_j^1)\|^{p_1}\right)^{\frac{p}{p_1}} \cdots \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty \|I_n(A)(x_j^1)\|^{p_n}\right)^{\frac{p}{p_n}} < \infty.
\end{aligned}$$

Isso prova que $(A(x_j^1,\ldots,x_j^n))_{j=1}^\infty \in \ell_{np}(F)$ e completa a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Multi-ideais simétricos

Assim como no capítulo anterior, todas as classes de sequências envolvidas neste capítulo são linearmente estáveis e sempre que considerarmos $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ estará subentendido que $X_1(\mathbb{K})\cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$.

Definição 3.0.1. Dados um operador $A \in \mathcal{L}(^nE;F)$ e uma permutação $\sigma \in S_n$, define-se $A_\sigma \in \mathcal{L}(^nE;F)$ por

$$A_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) := A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

O operador A é dito ser *simétrico* se $A_\sigma = A$ para todo $\sigma \in S_n$. O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^nE;F)$ dos operadores n-lineares simétricos de ^nE em F é denotado por $\mathcal{L}_s(^nE;F)$. O operador definido por

$$A_s := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma,$$

é dito ser a *simetrização* do operador n-linear $A \in \mathcal{L}(^nE;F)$.

O conceito de ideal simétrico de operadores multilineares, apresentado a seguir, foi introduzido por Floret e García em [29]. Desenvolvimentos recentes podem ser encontrados em [10, 14, 46].

Definição 3.0.2. [29] Um ideal de operadores n-lineares $\mathcal{M}_n$ é dito ser *simétrico* se, para quaisquer espaços de Banach E e F, $\sigma \in S_n$ e $A \in \mathcal{M}_n(^nE;F)$ tem-se que $A_\sigma \in \mathcal{M}_n(^nE;F)$.

Proposição 3.0.3. [29, Proposition 1.6] *Um ideal de operadores n-lineares $\mathcal{M}_n$ é simétrico se, e somente se, $A_s \in \mathcal{M}_n(^nE;F)$ para todos E, F Banach e todo $A \in \mathcal{M}_n(^nE;F)$.*

Antes de apresentar os resultados deste capítulo, mostraremos ao leitor uma situação em que os multi-ideais simétricos são relevantes. Denotamos por $\widetilde{A}$ o polinômio homogêneo determinado pelo operador multilinear A, e por $\check{P}$ o operador multilinear simétrico associado ao polinômio homogêneo P. Um ideal de operadores multilineares $\mathcal{M}$ induz dois ideais de polinômios, a saber,

$$\mathcal{M}^{\sim} = \{\widetilde{A} : A \in \mathcal{M}\} \text{ e } \mathcal{M}^{\vee} = \{P : \check{P} \in \mathcal{M}\}.$$

Muitas vezes é necessário que esses dois ideais de polinômios coincidam e, como se sabe, $\mathcal{M}^{\sim} = \mathcal{M}^{\vee}$ se, e somente se, o ideal de operadores multilineares $\mathcal{M}$ é simétrico.

O objetivo deste capítulo é estudar ideais simétricos do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$. Começamos enunciando um resultado conhecido neste sentido.

Proposição 3.0.4. [14, Proposition 2.4] *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todas classes de sequências X e Y, $\Pi_{{}^{n}X;Y}$ é um ideal simétrico de operadores n-lineares.*

Além disso, vemos facilmente que para quaisquer classes de sequências $X_1, \ldots, X_n$, o ideal $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;\ell_\infty(\cdot)}$ coincide com a classe de todos os operadores n-lineares contínuos e portanto é trivialmente simétrico. Sendo assim, buscaremos ideais simétricos do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ tais que $X_i \neq X_j$ para algum $i \neq j$ e $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$. Chamaremos esses ideais de ideais simétricos não triviais.

Para este capítulo, precisaremos de algumas notações e definições que serão fornecidas ao longo do texto e que também podem ser encontradas no Apêndice B. Dados E um espaço vetorial e $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, adotaremos as seguintes notações:

- $x^0 := (x_j^0)_{j=1}^{\infty}$, onde x_j^0 é a j-ésima coordenada não nula de x se esse termo existir, e $x_j^0 = 0$ caso contrário,
- $(x_j)_{j=1}^{n} := (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$,
- $(x_j)_{j=n}^{\infty} := (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$,
- $(x_j)_{j\neq n} := (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots)$.

Iremos nos referir à sequência $(x_j)_{j\neq n}$ como sendo a contração da sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ na n-ésima coordenada.

3.1 Ideais não simétricos

Nesta seção mostraremos que, embora não sejam tão fáceis de serem construídos, existem muitos ideais não simétricos do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$. Abordaremos primeiramente os ideais de operadores bilineares e, no final da seção, mostraremos como ideais bilineares não simétricos geram ideais n-lineares não simétricos, para todo $n \geq 2$.

No caso particular dos ideais de operadores bilineares, dado $A \in \mathcal{M}(^2E; F)$ tem-se que $A_s \in \mathcal{M}(^2E; F)$ se, e somente se, $A^t \in \mathcal{M}(^2E; F)$, onde A^t é a transposta do operador A. Isso segue imediatamente da fórmula $A_s = \frac{A+A^t}{2}$.

Definição 3.1.1. Seja $S(E)$ um espaço normado de sequências. Dizemos que $S(E)$ é:

(i) *Invariante por subsequências* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência crescente $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in S(E) \ \text{ e } \ \|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(ii) *Finitamente contrátil* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_j)_{j\neq n} \in S(E) \ \text{ e } \ \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

Definição 3.1.2. Seja X uma classe de sequências.

(i) X é *invariante por subsequências* se $X(E)$ for invariante por subsequências para todo espaço de Banach E.

(ii) X é *finitamente contrátil* se $X(E)$ for finitamente contrátil para todo espaço de Banach E.

(iii) Dado P um subconjunto qualquer de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dizemos que X é *P-completa* se $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in P$, para todo espaço de Banach E.

Invariância por subsequências é um conceito que foi introduzido em [39, Definição 2.1.1] para classes de sequências. Não é difícil perceber que todo espaço invariante por subsequências é também finitamente contrátil.

Exemplo 3.1.3. Para $1 \leq p < \infty$, $c_0(\cdot)$, $c(\cdot)$, c_0^w, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p(\cdot)$, ℓ_p^u, ℓ_p^w e $\ell_\infty(\cdot)$ são todos exemplos de classes invariantes por subsequências. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ crescente. Para:

- $X = c_0(\cdot)$, a subsequência $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ é convergente e $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_{k_j}\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|x_j\| = 0$, logo

$$(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in c_0(E) \text{ e } \|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_{k_j}\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty.$$

  Os casos de $X = c(\cdot)$, $X = c_0^w(\cdot)$ e $X = \ell_\infty(\cdot)$ seguem de forma análoga.

- $X = \ell_p(\cdot)$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{k_j}\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < +\infty,$$

  logo

$$(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \text{ e } \|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{k_j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

- $X = \ell_p^w$. Dado $\varphi \in E^*$ temos $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, e como $\ell_p(\cdot)$ é invariante por subsequências segue que $(\varphi(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ com $\|(\varphi(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p$. Portanto $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e

$$\|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \|(\varphi(x_{k_j}))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

- $X = \ell_p^u$. Da invariância por subsequências de ℓ_p^w segue, em particular, que $(x_j)_{j=n}^\infty \in \ell_p^w(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Como $(k_j)_{j=1}^\infty$ é crescente então $k_n \geq k_{n_0} \geq n_0$ e então, para cada $n \geq n_0$, $(x_{k_j})_{j=n}^\infty$ é uma subsequência de $(x_j)_{j=n_0}^\infty$. Daí, como ℓ_p^w é invariante por subsequências, temos
$$\|(x_{k_j})_{j=n}^\infty\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=n_0}^\infty\|_{w,p} < \varepsilon$$
para todo $n \geq n_0$. Isso prova que $(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Como a norma em ℓ_p^u é a mesma de ℓ_p^w, a desigualdade de normas segue do item anterior.

- $X = \ell_p\langle\cdot\rangle$. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E^*)$. Considere a sequência $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ dada por $\phi_{k_i} := \varphi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi_i := 0$ se $i \notin \{k_j; j \in \mathbb{N}\}$. Para cada $\psi \in E^{**}$, temos
$$\sum_{j=1}^\infty |\psi(\phi_j)|^{p^*} = \sum_{j=1}^\infty |\psi(\varphi_j)|^{p^*}$$
se $p \neq 1$ e
$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\phi_j\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\varphi_j\|$$
se $p = 1$. Logo $(\phi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E)$ com $\|(\phi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p^*} = \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p^*}$. Segue que
$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^\infty |\phi_{k_j}(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^\infty |\phi_j(x_j)| < +\infty,$$
o que prova que $(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$. Além disso,
$$\|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{C},p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_{k_j})| \leq \sup_{(\phi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^\infty |\phi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{C},p}.$$

Proposição 3.1.4. *Sejam X, Y, W classes de sequências tais que X é invariante por subsequências e $W(\mathbb{K})$-completa, W é ℓ_∞-completa e o ideal de operadores bilineares $\Pi_{W,X;Y}$ é simétrico. Então $\Pi_{X;Y}(E;F) \subseteq \Pi_{W;Y}(E;F)$ para todo espaço de Banach F e todo espaço de Banach E tal que $X(E) \not\subseteq c_0^w(E)$.*

Demonstração. Sejam E, F espaços de Banach com $X(E) \not\subseteq c_0^w(E)$. Então podemos escolher uma sequência $(y_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e um funcional $\varphi \in E^*$ tais que $\varphi(y_j) \not\longrightarrow 0$. Como X é invariante por subsequências, podemos supor, sem perda de generalidade (ou seja, a menos de passar para uma subsequência) que $|\varphi(y_j)| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e algum $\varepsilon > 0$. Dado $u \in \Pi_{X;Y}(E;F)$, vejamos que o operador bilinear contínuo
$$A\colon E \times E \to F\ ,\ A(x,y) = \varphi(x)u(y),$$
é $(W, X; Y)$-somante. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $(w_j)_{j=1}^\infty \in W(E)$. Temos $(\varphi(w_j))_{j=1}^\infty \in W(\mathbb{K})$ pois W é linearmente estável e então $(\varphi(w_j)x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ pela $W(\mathbb{K})$-completude de X. Como u é $(X;Y)$-somante, temos
$$(A(w_j, x_j))_{j=1}^\infty = (\varphi(w_j)u(x_j))_{j=1}^\infty = (u(\varphi(w_j)x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F),$$

provando que $A \in \Pi_{W,X;Y}(E,E;F)$. Logo $A^t \in \Pi_{W,X;Y}(E,E;F)$ pela simetria de $\Pi_{W,X;Y}$. Para provar que u é $(W;Y)$-somante, seja $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in W(E)$. Como $\left(\frac{1}{\varphi(y_j)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ (lembre-se que $\left|\frac{1}{\varphi(y_j)}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para todo j), segue da ℓ_∞-completude de W que $\left(\frac{1}{\varphi(y_j)}w_j\right)_{j=1}^{\infty} \in W(E)$. Usando que $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, finalizamos a demonstração:

$$\begin{aligned}(u(w_j))_{j=1}^{\infty} &= \left(\frac{1}{\varphi(y_j)}\varphi(y_j)u(w_j)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{\varphi(y_j)}A(y_j,w_j)\right)_{j=1}^{\infty} \\ &= \left(\frac{1}{\varphi(y_j)}A^t(w_j,y_j)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(A^t\left(\frac{1}{\varphi(y_j)}w_j,y_j\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(F).\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.1.5. Vejamos que o ideal de operadores bilineares $\Pi_{\ell_p^w,c(\cdot);c(\cdot)}$, $1 \leq p < \infty$, não é simétrico. Considere $W = \ell_p^w$ e $X = Y = c(\cdot)$. Da Proposição 2.2.5, $c(\cdot)$ é uma classe de sequências linearmente estável, ou seja, $\Pi_{c(\cdot);c(\cdot)}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ para todos E e F. Além disso, $c(\cdot)$ é invariante por subsequências e ℓ_p-completa. Para cada espaço de Banach E, temos que $c(E) \nsubseteq c_0^w(E)$ – basta ter em mente as sequências constantes. Sabemos também que a classe ℓ_p^w é ℓ_∞-completa. Consideremos o ideal $\mathcal{C}^p$ do operadores p-convergentes (veja os exemplos descritos após o Teorema 1.5.8). Podemos tomar espaços E e F tais que

$$\Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(E;F) = \mathcal{C}^p(E;F) \neq \mathcal{L}(E;F),$$

já que, por exemplo, o operador identidade em c_0 não é p-convergente. Da Proposição 2.2.8 sabemos que

$$\Pi_{\ell_p^w;c(\cdot)}(E;F) = \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(E;F),$$

ou seja, $\Pi_{c(\cdot);c(\cdot)}(E;F) \nsubseteq \Pi_{\ell_p^w;c(\cdot)}(E;F)$. Portanto, o ideal de operadores bilineares $\Pi_{\ell_p^w,c(\cdot);c(\cdot)}$ não é simétrico pela Proposição 3.1.4.

Desenvolveremos a seguir uma segunda forma de gerar ideais não simétricos.

Proposição 3.1.6. *Seja X uma classe de sequências invariante por subsequências e suponha que exista E tal que $X(E) \nsubseteq c_0^w(E)$. Então, para qualquer $1 \leq p < \infty$, o ideal $\Pi_{\ell_p^w,X;\ell_p(\cdot)}$ não é simétrico.*

Demonstração. Vejamos primeiramente, que $\ell_p \cdot X(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p$. Dados $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in X(\mathbb{K})$, como $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\cdot)$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j\beta_j|^p \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p = \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty^p \cdot \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^p \leq \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(\mathbb{K})}^p \cdot \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^p,$$

logo $(\alpha_j\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $\|(\alpha_j\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(\mathbb{K})} \cdot \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_p$. Isso prova que $\Pi_{\ell_p^w,X;\ell_p(\cdot)}$ é um ideal de operadores bilineares, de acordo com o Teorema 1.5.8.

Como $X(E) \nsubseteq c_0^w(E)$, existe uma sequência $(z_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ que não converge fracamente para zero, digamos $\varphi(z_j) \not\longrightarrow 0$, $\varphi \in E^*$. Vejamos que podemos supor que E tem dimensão infinita. Caso contrário, defina $w_j = (z_j, 0, 0, \ldots) \in \ell_1(E)$ para cada j. Considerando a inclusão $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \ldots) \in \ell_1(E)$, a estabilidade linear de X fornece $(w_j)_{j=1}^\infty \in X(\ell_1(E))$. De [52, II.B.21], $\psi := (\varphi, 0, 0, \ldots) \in \ell_\infty(E^*) = [\ell_1(E)]^*$ e $\psi(w_j) = \varphi(z_j) \not\longrightarrow 0$. Assim, $(w_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência no espaço de dimensão infinita $\ell_1(E)$ que não converge fracamente para zero e que pertence a $X(\ell_1(E))$. Suponhamos então que $(z_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ é uma sequência em um espaço de Banach de dimensão infinita E que não converge fracamente para zero.

Como X é invariante por subsequências, podemos tomar, sem perda de generalidade (ou seja, a menos de passar para uma subsequência) $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in E^*$ tais que $|\varphi(z_j)| \geq \varepsilon$ para todo j. Usando que $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$, é fácil mostrar que

$$A\colon E \times E \to E\ ,\ A(x,y) = \varphi(x)y,$$

é um operador bilinear $(\ell_p^w, X; \ell_p(\cdot))$-somante, isto é, $A \in \Pi_{\ell_p^w, X; \ell_p(\cdot)}(E, E; E)$. Como E tem dimensão infinita, segue de [26, Theorem 2.18] que existe $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) \setminus \ell_p(E)$. Daí,

$$\sum_{j=1}^\infty \|A^t(x_j, z_j)\|^p = \sum_{j=1}^\infty \|A(z_j, x_j)\|^p = \sum_{j=1}^\infty |\varphi(z_j)|^p \cdot \|x_j\|^p \geq \varepsilon^p \cdot \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p = +\infty,$$

provando que $A^t \notin \Pi_{\ell_p^w, X; \ell_p(\cdot)}(E, E; E)$. □

Exemplo 3.1.7. Para $1 \leq p < \infty$, os ideais $\Pi_{\ell_p^w, c(\cdot); \ell_p(\cdot)}$ e $\Pi_{\ell_p^w, \ell_\infty(\cdot); \ell_p(\cdot)}$ não são simétricos pela proposição anterior.

Finalizaremos o caso bilinear com um exemplo concreto que não pode ser recuperado por nenhum dos dois resultados desta seção.

Exemplo 3.1.8. Sejam $1 \leq p < q < \infty$. Como vimos no Exemplo 3.1.5, podemos tomar um espaço de Banach E de dimensão infinita e uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq E$ tal que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) \setminus c_0(E)$. A menos de passar para uma subsequência, podemos supor que $\|x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e algum $\varepsilon > 0$. Tome um funcional não nulo $\varphi \in E^*$ e considere o operador bilinear

$$A\colon E \times E \to E\ ,\ A(x,y) = \varphi(x)y.$$

De um lado, é fácil verificar que A é $(\ell_p^w, \ell_q^w; \ell_p(\cdot))$-somante. Por outro lado, seja $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ de modo que $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$, e tome $z \in E$ tal que $\varphi(z) \neq 0$. Definindo $z_j = \alpha_j z$ para todo j, é imediato que $(z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$ e $(\varphi(z_j))_{j=1}^\infty \notin \ell_p$. Daí, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E), (z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$ e

$$\sum_{j=1}^\infty \|A^t(x_j, z_j)\|^p = \sum_{j=1}^\infty \|A(z_j, x_j)\|^p = \sum_{j=1}^\infty |\varphi(z_j)|^p \cdot \|x_j\|^p \geq \varepsilon^p \cdot \sum_{j=1}^\infty |\varphi(z_j)|^p = +\infty,$$

donde segue que A^t não é $(\ell_p^w, \ell_q^w; \ell_p(\cdot))$-somante. Concluímos então que o ideal $\Pi_{\ell_p^w, \ell_q^w; \ell_p(\cdot)}$ não é simétrico.

Veremos agora como ideais não simétricos de operadores bilineares geram ideais não simétricos de operadores n-lineares para todo $n > 2$. Para isso, trabalharemos com classes de sequências Y que satisfazem a seguinte condição:

$$(y_j)_{j=1}^\infty \in Y(F), (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty \Longrightarrow (\alpha_j y_j)_{j=1}^\infty \in Y(F) \text{ e} \tag{3.1}$$
$$\|(\alpha_j y_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(F)} \le \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(F)} \cdot \sup_j |\alpha_j|.$$

Veja que estamos pedindo um pouco mais do que ser ℓ_∞-completa.

Por exemplo, as classes $c_0(\cdot), c_0^w, \ell_p(\cdot), \ell_p^u, \ell_p^w$, $1 \le p \le \infty$, claramente satisfazem (3.1). A classe $c(\cdot)$ não satisfaz (3.1) pois nem ao menos é ℓ_∞-completa.

Proposição 3.1.9. *Sejam X_1, X_2, Y classes de sequências tais que $\Pi_{X_1,X_2;Y}$ seja um ideal não simétrico de operadores bilineares com Y satisfazendo (3.1). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \ldots, Z_n \in \{c(\cdot), \ell_\infty(\cdot)\}$. Então $\Pi_{X_1,X_2,Z_1,\ldots,Z_n;Y}$ é um ideal não simétrico de operadores $(n+2)$-lineares.*

Demonstração. Provemos primeiro que $\Pi_{X_1,X_2,Z_1,\ldots,Z_n;Y}$ é ideal, sendo para isso suficiente mostrar que

$$X_1(\mathbb{K}) \cdot X_2(\mathbb{K}) \cdot Z_1(\mathbb{K}) \cdots Z_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow Y(\mathbb{K}). \tag{3.2}$$

Note que cada $Z_k(\mathbb{K})$ é igual a c ou ℓ_∞, logo $Z_k(\mathbb{K}) \subseteq \ell_\infty$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Sejam $(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(\mathbb{K}), (\alpha_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(\mathbb{K})$ e $(\theta_j^k)_{j=1}^\infty \in Z_k(\mathbb{K})$, $k = 1, \ldots, n$. Em particular, $(\theta_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, $k = 1, \ldots, n$. Como $\Pi_{X_1,X_2;Y}$ é ideal de operadores bilineares, sabemos que

$$(\alpha_j^1\alpha_j^2)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K}) \text{ e } \|(\alpha_j^1\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{Y(\mathbb{K})} \le \|(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(\mathbb{K})} \cdot \|(\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{X_2(\mathbb{K})}.$$

É claro que $(\theta_1^1 \cdots \theta_1^n)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$. Combinando com $(\alpha_j^1\alpha_j^2)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K})$, o fato de Y satisfazer (3.1) implica que $(\alpha_j^1\alpha_j^2\theta_j^1 \cdots \theta_j^n)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K})$ e

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_j^1\alpha_j^2\theta_j^1 \cdots \theta_j^n)_{j=1}^\infty\|_{Y(\mathbb{K})} &\le \|(\alpha_j^1\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{Y(\mathbb{K})} \cdot \sup_j |\theta_j^1 \cdots \theta_j^n| \\
&\le \|(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(\mathbb{K})} \cdot \|(\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{X_2(\mathbb{K})} \cdot \sup_j |\theta_j^1 \cdots \theta_j^n| \\
&\le \|(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(\mathbb{K})} \cdot \|(\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{X_2(\mathbb{K})} \cdot \sup_j |\theta_j^1| \overset{(n)}{\cdots} \sup_j |\theta_j^n| \\
&= \|(\alpha_j^1)_{j=1}^\infty\|_{X_1(\mathbb{K})} \cdot \|(\alpha_j^2)_{j=1}^\infty\|_{X_2(\mathbb{K})} \cdot \|(\theta_j^1)_{j=1}^\infty\|_{Z_1(\mathbb{K})} \cdots \|(\theta_j^n)_{j=1}^\infty\|_{Z_n(\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Isso prova (3.2) e portanto $\Pi_{X_1,X_2,Z_1,\ldots,Z_n;Y}$ é um ideal de operadores $(n+2)$-lineares.

Provemos agora que não é simétrico. Como $\Pi_{X_1,X_2;Y}$ não é simétrico, podemos tomar $A \in \Pi_{X_1,X_2;Y}(E,E;F)$ tal que $A^t \notin \Pi_{X_1,X_2;Y}(E,E;F)$. Escolha $0 \neq x^* \in E^*$ e defina

$$B\colon E^{n+2} \longrightarrow F \ , \ B(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_n) = x^*(y_1) \cdots x^*(y_n) A(x_1, x_2).$$

É claro que B é $(n+2)$-linear e contínuo. Dadas $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(E), (x_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(E)$, $(y_j^k)_{j=1}^\infty \in Z_k(E) \subseteq \ell_\infty(E), k = 1, \dots, n$, temos $(A(x_j^1, x_j^2))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ pois A é $(X_1, X_2; Y)$-somante, e também $(x^*(y_j^k))_{j=1}^\infty \in Z_k(\mathbb{K}) \subseteq \ell_\infty$, $j = 1, \dots, k$, pois Z_k é linearmente estável. Segue imediatamente que $(x^*(y_j^1) \cdots x^*(y_j^n))_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$. Por Y satisfazer (3.1) podemos concluir que

$$(B(x_j^1, x_j^2, y_j^1, \dots, y_j^n))_{j=1}^\infty = ((x^*(y_j^1) \cdots x^*(y_j^n)A(x_j^1, x_j^2))_{j=1}^\infty \in Y(F).$$

Isso prova que $B \in \Pi_{X_1, X_2, Z_1, \dots, Z_n; Y}({}^nE; F)$.

Considere agora a seguinte permutação σ do conjunto $\{1, \dots, n+2\}$:

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(k) = k \text{ para } k = 3, \dots n+2.$$

O operador B_σ é dado por

$$B_\sigma(x_1, x_2, y_1, \dots, y_n) = x^*(y_1) \cdots x^*(y_n)A(x_2, x_1).$$

Como $A^t \notin \Pi_{X_1, X_2; Y}(E, E; F)$, existem sequências $(x_j^1)_{j=1}^\infty \in X_1(E)$ e $(x_j^2)_{j=1}^\infty \in X_2(E)$ tais que $(A^t(x_j^1, x_j^2))_{j=1}^\infty \notin Y(F)$. Como $x^* \neq 0$, podemos tomar $x \in E$ tal que $x^*(x) = 1$ e é claro que a sequência $(z_j)_{n=1}^\infty = (x, x, x, \dots) \in Z_k(E)$ para todo $k = 1, \dots, n$. De

$$\begin{aligned}(B_\sigma(x_j^1, x_j^2, z_j, \dots, z_j))_{j=1}^\infty &= (x^*(z_j) \cdots x^*(z_j)A(x_2^j, x_1^j))_{j=1}^\infty = (x^*(x) \cdots x^*(x)A(x_2^j, x_1^j))_{j=1}^\infty \\ &= (A(x_2^j, x_1^j))_{j=1}^\infty = (A^t(x_1^j, x_2^j))_{j=1}^\infty \notin Y(F),\end{aligned}$$

segue que $B_\sigma \notin \Pi_{X_1, X_2, Z_1, \dots, Z_n; Y}({}^nE; F)$. Concluímos então que o ideal $\Pi_{X_1, X_2, Z_1, \dots, Z_n; Y}$ não é simétrico. □

Exemplo 3.1.10. Seja $1 \leq p < \infty$. Do Exemplo 3.1.7 sabemos que, para $Z \in \{\ell_\infty(\cdot), c(\cdot)\}$, $\Pi_{\ell_p^w, Z; \ell_p(\cdot)}$ é um ideal não simétrico de operadores bilineares. Como $\ell_p(\cdot)$ satisfaz (3.1), da proposição acima segue que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \dots, Z_n \in \{\ell_\infty(\cdot), c(\cdot)\}$, $\Pi_{\ell_p^w, Z_1, \dots, Z_n; \ell_p(\cdot)}$ é um ideal não simétrico de operadores $(n+1)$-lineares.

Exemplo 3.1.11. Seja $1 \leq p < q < \infty$. Do Exemplo 3.1.8 sabemos que o ideal $\Pi_{\ell_p^w, \ell_q^w; \ell_p(\cdot)}$ de operadores bilineares não é simétrico. Como $\ell_p(\cdot)$ satisfaz (3.1), da proposição acima segue que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \dots, Z_n \in \{\ell_\infty(\cdot), c(\cdot)\}$, $\Pi_{\ell_p^w, \ell_q^w, Z_1, \dots, Z_n; \ell_p(\cdot)}$ é um ideal não simétrico de operadores $(n+2)$-lineares.

3.2 O procedimento $X \mapsto X^u$

O objetivo desta seção e da próxima não é apenas de fornecer exemplos de ideais simétricos não triviais do tipo $\Pi_{X_1, \dots, X_n; Y}$, mas também mostrar como construir tais ideais. Os principais resultados desta seção são o Teorema 3.2.2 e o Corolário 3.2.16. Dadas X e Y classes de sequências, a notação $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$ significa que $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(E)$ para todo E. Em breve veremos exemplos de classes de sequências satisfazendo as condições definidas abaixo.

Definição 3.2.1. (i) Dadas classes de sequências X e Y, escrevemos $X \overset{\text{fin}}{\leq} Y$ se, para todo espaço de Banach E, $\|\cdot\|_{X(E)} \leq \|\cdot\|_{Y(E)}$ em $c_{00}(E)$. Se as normas forem iguais, escrevemos $X \overset{\text{fin}}{=} Y$.

(ii) As classes de sequências $X_1, \ldots, X_n$ são ditas *conjuntamente dominadas* se existir uma classe de sequências finitamente determinada X tal que $X_i \overset{1}{\hookrightarrow} X$ e $X_i \overset{\text{fin}}{\leq} X$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 3.2.2. *Se as classe de sequências $X_1, \ldots, X_n$ forem conjuntamente dominadas, então o ideal $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é simétrico para toda classe finitamente determinada Y.*

Demonstração. Sejam X e Y classes de sequências finitamente determinadas com $X_i \overset{1}{\hookrightarrow} X$ e $X_i \overset{\text{fin}}{\leq} X$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Basta mostrar que $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} \overset{1}{=} \Pi_{{}^nX;Y}$ e aplicar a Proposição 3.0.4. Por um lado, como $X_i \overset{1}{\hookrightarrow} X, i = 1, \ldots, n$, temos $\Pi_{{}^nX;Y} \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$. Por outro lado, dados $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $k \in \mathbb{N}$ e $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$, a condição $X_i \overset{\text{fin}}{\leq} X$ para todo $i = 1, \ldots, n$, nos permite concluir que

$$\begin{aligned}\|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^k\|_{Y(F)} &\leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \cdot \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^k\|_{X_i(E_i)} \\ &\leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \cdot \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^k\|_{X(E_i)}.\end{aligned}$$

Como X e Y são finitamente determinadas, tomando o supremo sobre k na expressão acima, segue que $A \in \Pi_{{}^nX;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|A\|_{{}^nX;Y} \leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}$. Logo, $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{{}^nX;Y}$. □

O Teorema 3.2.2 surge como nossa primeira tentativa em obter ideais simétricos do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$, mas para aplicá-lo devemos ser capazes de obter exemplos não triviais de classes conjuntamente dominadas. Faremos isso a seguir.

Dados E um espaço normado e $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, relembre que definimos a sequência $(x_j)_{j=n}^\infty$ como sendo $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

Definição 3.2.3. Seja X uma classe de sequências.

(i) Para cada espaço de Banach E, definimos $\overline{c_{00}}^X(E)$ como sendo o fecho de $c_{00}(E)$ em $X(E)$.

(ii) Suponha que X seja finitamente contrátil. Para cada espaço de Banach E, definimos

$$X^u(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) : \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} = 0\right\}.$$

Note que a hipótese de X ser finitamente contrátil foi essencial para definir X^u, pois a expressão $\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)}$ só faz sentido se a sequência $(x_j)_{j=n}^\infty$ estiver em $X(E)$. O procedimento $X \mapsto X^u$ foi inicialmente estudado em [39, p. 31].

Exemplo 3.2.4. Para $1 \leq p < \infty$. Prova-se facilmente que

$$\overline{c_{00}}^{\ell_p^w} = (\ell_p^w)^u = \ell_p^u,\ \overline{c_{00}}^{\ell_p(\cdot)} = (\ell_p(\cdot))^u = \ell_p(\cdot) \text{ e } \overline{c_{00}}^{\ell_\infty(\cdot)} = (\ell_\infty(\cdot))^u = c_0(\cdot).$$

E usando [30, Theorem 3.10] obtemos $\overline{c_{00}}^{\ell_p\langle\cdot\rangle} = (\ell_p\langle\cdot\rangle)^u = \ell_p\langle\cdot\rangle$. Exemplos adicionais serão dados em breve.

Dadas duas classes de sequências X e Y, dizemos que X é *subclasse fechada* de Y se $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$, com igualdade de normas em $X(E)$, para todo espaço de Banach E. Por exemplo, ℓ_p^u é subclasse fechada de ℓ_p^w e $c_0(\cdot)$ é subclasse fechada de $\ell_\infty(\cdot)$. A proposição a seguir fornece uma grande quantidade de exemplos de outras subclasses.

Proposição 3.2.5. *Seja X uma classe de sequências linearmente estável. A relação $E \mapsto \left(\overline{c_{00}}^X(E), \|\cdot\|_X\right)$ define uma classe de sequências linearmente estável. Em particular, $\overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de X.*

Demonstração. Dados $x, y \in \overline{c_{00}}^X(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, existem $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \subseteq c_{00}(E)$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em $X(E)$. Temos $x + \alpha y \in X(E)$ e

$$\lim_{n\to\infty} [x_n + \alpha y_n] = \lim_{n\to\infty} x_n + \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = x + \alpha y,$$

onde $(x_n + \alpha y_n)_{n=1}^\infty \subseteq c_{00}(E)$. Segue que $x + \alpha y \in \overline{c_{00}}^X(E)$ e então $\overline{c_{00}}^X(E)$ é subespaço vetorial de $X(E)$, ou seja, $\left(\overline{c_{00}}^X(E), \|\cdot\|_X\right)$ é um espaço vetorial normado. Segue do Lema 2.2.4 que $\overline{c_{00}}^X(E)$ é completo. Temos também

$$c_{00}(E) \subseteq \overline{c_{00}}^X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$$

e, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\|e_j\|_{\overline{c_{00}}^X(\mathbb{K})} = \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$. Portanto a regra $E \mapsto \overline{c_{00}}^X(E)$ define uma classe de sequências. Mostraremos agora a estabilidade linear. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^X(E)$. Então, existe $((y_j^n)_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty \subseteq c_{00}(E)$ tal que

$$(y_j^n)_{j=1}^\infty \overset{n}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^\infty \text{ em } \overline{c_{00}}^X(E).$$

Em particular,

$$(y_j^n)_{j=1}^\infty \overset{n}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^\infty \text{ em } X(E).$$

Como X é linearmente estável temos $\widehat{u} \in \mathcal{L}(X(E); X(F))$ com $\|u\|_{X;X} = \|u\|$. Da continuidade do operador $\widehat{u}$ temos

$$\widehat{u}\left((y_j^n)_{j=1}^\infty\right) \overset{n}{\longrightarrow} \widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) \text{ em } X(F),$$

onde $\widehat{u}\left((y_j^n)_{j=1}^\infty\right) = (u(y_j^n))_{j=1}^\infty \in c_{00}(F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = (u(x_j))_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^X(F),$$

ou seja, $u \in \Pi_{\overline{c_{00}}X;\overline{c_{00}}X}(E;F)$. Mais ainda, a desigualdade

$$\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(F)} \leq \|u\|_{X;X} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$$

garante que $\|u\|_{\overline{c_{00}}X;\overline{c_{00}}X} \leq \|u\|_{X;X} = \|u\|$. Por outro lado, para todo $x \in E$, aplicando o Lema 1.5.7,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_F &= \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X(F)} = \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{\overline{c_{00}}X(F)} \\
&= \|\widehat{u}\left((x,0,0,\ldots)\right)\|_{\overline{c_{00}}X(F)} \leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}\left(\overline{c_{00}}X(E),\overline{c_{00}}X(F)\right)} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{\overline{c_{00}}X(E)} \\
&= \|u\|_{\overline{c_{00}}X;\overline{c_{00}}X} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|u\|_{\overline{c_{00}}X;\overline{c_{00}}X} \cdot \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Provamos que $\|u\| \leq \|u\|_{\overline{c_{00}}X;\overline{c_{00}}X}$, e portanto vale a igualdade das normas. □

Definição 3.2.6. Um espaço normado de sequências $S(E)$ é dito ser:

(i) *Zero substituível* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tem-se

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \ \text{ e } \ \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(ii) *Finitamente zero substituível* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots)\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

Todo espaço zero substituível é finitamente zero substituível.

Definição 3.2.7. Uma classe de sequências X é:

(i) *Zero substituível* se $X(E)$ for zero substituível para todo E.

(ii) *finitamente zero substituível* se $X(E)$ for finitamente zero substituível para todo E.

Exemplo 3.2.8. Para $1 \leq p < \infty$, temos $c_0(\cdot)$, c_0^w, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p(\cdot)$, ℓ_p^u, ℓ_p^w e $\ell_\infty(\cdot)$ como exemplos de classes zero substituíveis, em particular, finitamente zero substituíveis. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Para:

- $X = c_0(\cdot)$, temos

$$\|\alpha_j x_j\| = |\alpha_j| \cdot \|x_j\| \leq \|x_j\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

logo $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(E)$ e

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\alpha_j x_j\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Os casos de $X = c_0^w(\cdot)$ e $X = \ell_\infty(\cdot)$ seguem analogamente.

- $X = \ell_p(\cdot)$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha_j x_j\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \cdot \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < +\infty,$$

logo

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \text{ e } \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

- $X = \ell_p^w$. Para cada $\varphi \in E^*$ temos $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e, como $\ell_p(\cdot)$ é zero substituível, segue que $(\varphi(\alpha_j x_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha_j \varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ com $\|(\varphi(\alpha_j x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p = \|(\alpha_j \varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p$, logo $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(\alpha_j x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

- $X = \ell_p^u$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $(x_j)_{j=n}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e, portanto, como ℓ_p^w é zero substituível, temos $(\alpha_j x_j)_{j=n}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Segue que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. A desigualdade de normas segue do caso de ℓ_p^w.

- $X = \ell_p\langle\cdot\rangle$. Note que para $p = 1$ temos $\ell_1\langle\cdot\rangle = \ell_1(\cdot)$ que é zero substituível. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E^*)$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(\alpha_j x_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \cdot |\varphi_j(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| < +\infty,$$

logo $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ e

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{C,p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(\alpha_j x_j)| \leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{C,p}.$$

Proposição 3.2.9. *Se X for finitamente zero substituível, então $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{c_{00}}^X(E)$ se, e somente se, $\|(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots)\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Demonstração. Seja X uma classe de sequências finitamente zero substituível.

($\Leftarrow$) Dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ com $\|(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots)\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty} - (x_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E)} = \|(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{c_{00}}^X(E)$.

($\Rightarrow$) No caso em que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$ não há o que fazer. Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{c_{00}}^X(E) \setminus c_{00}(E)$. Neste caso existe $((x_j^n)_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \subseteq c_{00}(E)$ tal que $\|(x_j)_{j=1}^{\infty} - (x_j^n)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \overset{n}{\longrightarrow}$

0. Considere $(m_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ de modo que $(x_j^n)_{j=1}^\infty = (x_j^n)_{j=1}^{m_n}$. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \notin c_{00}(E)$, $m_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Vejamos que $(x_j)_{j=1}^{m_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^\infty$. Temos,

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} &= \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j^n)_{j=1}^\infty + (x_j^n)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j^n)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} + \|(x_j^n)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)},\end{aligned}$$

onde $\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j^n)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \overset{n}{\longrightarrow} 0$. Usando a hipótese de X ser finitamente zero substituível, temos

$$\begin{aligned}&\|(x_j^n)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} \\ &\qquad = \|(x_j^n)_{j=1}^{m_n} - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} = \|(x_j^n - x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} \\ &\qquad = \|(x_j^n - x_j)_{j=1}^\infty - (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m_n-\text{vezes}}, x_{m_n+1}^n - x_{m_n+1}, x_{m_n+2}^n - x_{m_n+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &\qquad \leq \|(x_j^n - x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} + \|(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m_n-\text{vezes}}, x_{m_n+1}^n - x_{m_n+1}, x_{m_n+2}^n - x_{m_n+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &\qquad \leq 2\|(x_j^n - x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \overset{n}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto $(x_j)_{j=1}^{m_n} \overset{n}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_n}\|_{X(E)} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Daí, para todo $k \geq m_{n_0} + 1$, usando novamente que X é finitamente zero substituível,

$$\begin{aligned}\|(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{(k-1)-\text{vezes}}, x_k, x_{k+1}, \ldots)\|_{X(E)} &\leq \|(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m_{n_0}-\text{vezes}}, x_{m_{n_0}+1}, x_{m_{n_0}+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{m_{n_0}}\|_{X(E)} < \varepsilon,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Relembre que para $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ definimos $x^0 := (x_j^0)_{j=1}^\infty$, onde x_j^0 é a j-ésima coordenada não nula de x se esse termo existir, e $x_j^0 = 0$ caso contrário.

Definição 3.2.10. Dizemos que um espaço normado de sequências $S(E)$ é:

(i) *Zero invariante* se $(x_j)_{j=1}^\infty \in S(E) \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^\infty \in S(E)$ e, neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}$.

(ii) *Finitamente zero invariante* se para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, tem-se $(x_j)_{j=1}^\infty \in S(E) \Leftrightarrow (x_j)_{j\neq n} \in S(E)$ e, neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)}$.

Definição 3.2.11. Uma classe de sequências X é dita ser:

(i) *Zero invariante* se $X(E)$ for zero invariante para todo E.

(ii) *Finitamente zero invariante* se $X(E)$ for finitamente zero invariante para todo E.

O conceito de zero invariância foi introduzido em [39, Definição 2.1.1] para classes de sequências. Algumas observações importantes:

• $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$ se, e somente se, $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$. Neste caso, resta apenas verificar se vale a igualdade de normas.

• Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$, então existem $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{N}$ tais que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{n}$.

• Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_{00}(E)$, então podemos tomar uma sequência $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ crescente tal que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Neste caso, $x_i = 0$ sempre que $i \notin \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 3.2.12. Para $1 \leq p < \infty$, $c_0(\cdot)$, c_0^w, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p(\cdot)$, ℓ_p^u, ℓ_p^w e $\ell_\infty(\cdot)$ são todos exemplos de classes zero invariantes, em particular, finitamente zero invariantes. Os casos $c_0(\cdot)$, c_0^w, e $\ell_\infty(\cdot)$ são imediatos. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$. Para:

• $X = \ell_p(\cdot)$, temos
$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^0\|^p,$$
logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e, neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_p$.

• $X = \ell_p^w$. Para cada $\varphi \in E^*$ temos
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^0)|^p,$$
logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e, neste caso,
$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^0)|^p = \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

• $X = \ell_p^u$. Como ℓ_p^w é zero invariante, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $(x_j)_{j=n}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e
$$\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = \|(x_j^0)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p},$$
logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ se, e somente se, $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$.

• $X = \ell_p\langle\cdot\rangle$. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in (E^*)^{\mathbb{N}}$. Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_{00}(E)$. Podemos então, tomar uma sequência $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ crescente tal que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Considere a sequência $(\phi_j)_{j=1}^{\infty}$ dada por $\phi_{k_i} := \varphi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi_i := 0$ se $i \notin \{k_j; j \in \mathbb{N}\}$. Note que, $(\varphi_j^0)_{j=1}^{\infty} = (\phi_j^0)_{j=1}^{\infty}$ e
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^0)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^{\infty} |\phi_{k_j}(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j(x_j)|.$$
Além disso, como $\ell_{p^*}^w$ é zero invariante,
$$(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E^*) \Leftrightarrow (\varphi_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E^*) \Leftrightarrow (\phi_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E^*) \Leftrightarrow (\phi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E^*),$$

com igualdade de normas. Logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$ e

$$\|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{C},p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j^0)| = \sup_{(\phi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E^*)}} \sum_{j=1}^\infty |\phi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{C},p}.$$

Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$ então existem $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{N}$ tais que $(x_j^0)_{j=1}^\infty = (x_{k_j})_{j=1}^n$. Neste caso, consideramos a sequência $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ dada por $\phi_{k_i} := \varphi_i$ para todo $i \leq n$, $\phi_i := 0$ se $i \leq k_n$ e $i \notin \{k_j; j \leq n\}$, e $\phi_{k_n+i} := \varphi_{n+i}$ para todo $i \geq 1$. Dessa forma, $(\varphi_j^0)_{j=1}^\infty = (\phi_j^0)_{j=1}^\infty$ e

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j^0)| = \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^n |\phi_{k_j}(x_{k_j})| = \sum_{j=1}^{k_n} |\phi_j(x_j)| = \sum_{j=1}^\infty |\phi_j(x_j)|.$$

O restante da argumentação é feita de forma análoga à do caso anterior.

Exemplo 3.2.13. A classe $c(\cdot)$ das sequências convergentes não é zero invariante e nem zero substituível, no entanto, é finitamente zero invariante e finitamente zero substituível. De fato, tome x um elemento não nulo de um espaço de Banach E qualquer e considere a sequência $x_j := x$ para todo $j \in \mathbb{N}$, nesse caso, vemos facilmente que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$. Considere agora, $(y_j)_{j=1}^\infty := (x, 0, x, 0, x, 0, x, 0, \ldots)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty := (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$. Temos $(y_j^0)_{j=1}^\infty = (x_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$ e

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty = (x, 0, x, 0, x, 0, x, 0, \ldots) \notin c(E),$$

portanto, $c(\cdot)$ não é zero invariante e nem zero substituível. Suponha agora, que tenhamos $(x_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$ com $x_k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, a sequência $(y_j)_{j=1}^\infty := (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots)$ é convergente e portanto está em $c(E)$. Além disso, é fácil ver que $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty$ pois $x_k = 0$. Então $c(\cdot)$ é finitamente zero invariante. Por último, dados $(x_j)_{j=1}^\infty \in c(E)$ e $k \in \mathbb{N}$, $(y_j)_{j=1}^\infty := (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots)$ é convergente, logo pertence a $c(E)$; e $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty$. Concluímos então que $c(\cdot)$ é finitamente zero substituível.

Em [39, Proposição 2.1.8] também foi provado que se X for invariante por subsequências e zero invariante, então X^u é subclasse fechada de X. No entanto podemos melhorar esta implicação, enfraquecendo as hipóteses da seguinte forma.

Proposição 3.2.14. *Seja X uma classe de sequências qualquer. Se X for finitamente contrátil, então a regra $E \mapsto (X^u(E), \|\cdot\|_X)$ define uma classe de sequências. Em particular, X^u é subclasse fechada de X. Além disso, se X também for finitamente zero invariante, então $X^u = \overline{c_{00}}^X$.*

Demonstração. Dados $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty + \alpha(y_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} + |\alpha| \cdot \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

provando que $X^u(E)$ é subespaço vetorial de $X(E)$, ou seja, $(X^u(E), \|\cdot\|_X)$ é um espaço vetorial normado. Vejamos que $X^u(E)$ é subespaço fechado de $X(E)$. Seja $((x_j^k)_{j=1}^\infty)_{k=1}^\infty \subseteq X^u(E)$ com $(x_j^k)_{j=1}^\infty \xrightarrow{k} (x_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|(x_j^k)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} = 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_{0,k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_{0,k} \Rightarrow \|(x_j^k)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $(x_j^k)_{j=1}^\infty \xrightarrow{k} (x_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j^k)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e como X é finitamente contrátil segue que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|(x_j - x_j^k)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \leq \|(x_j - x_j^k)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $n \geq n_{0,k_0}$, temos

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \leq \|(x_j - x_j^{k_0})_{j=n}^\infty\|_{X(E)} + \|(x_j^{k_0})_{j=n}^\infty\|_{X(E)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isso prova que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. Do Lema 2.2.4 segue que $X^u(E)$ é um espaço de Banach. Temos também

$$c_{00}(E) \subseteq X^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$$

e, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\|e_j\|_{X^u(\mathbb{K})} = \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$. Portanto a regra $E \mapsto X^u(E)$ define uma classe de sequências. Suponha agora que X seja finitamente zero invariante. Como $c_{00}(E) \subseteq X^u(E)$ e, como acabamos de ver, $X^u(E)$ é fechado em $X(E)$, temos $\overline{c_{00}(E)}^X \subseteq X^u(E)$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. De

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} &= \|(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &= \|(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

segue que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}(E)}^X$. $\square$

Vejamos agora algumas propriedades de X^u.

Proposição 3.2.15. *Seja X uma classe de sequências finitamente contrátil. Então:*

(i) *X^u é finitamente contrátil,*

(ii) *$(X^u)^u = X^u$ (idempotência),*

(iii) *Se Y é finitamente contrátil e $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$, então $X^u \overset{1}{\hookrightarrow} Y^u$ (monotonicidade),*

(iv) *$X^u \overset{1}{\hookrightarrow} c_0(\cdot)$,*

(v) *Se X for linearmente estável, então X^u é linearmente estável,*

(vi) *Se X for finitamente zero invariante, então $X^u = X \Leftrightarrow \overline{c_{00}}^X = X$.*

Demonstração. (i) Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$ e $k \in \mathbb{N}$. Como X é finitamente contrátil, $(x_j)_{j\neq k} \in X(E)$ e $\|(x_j)_{j\neq k}\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}$. Resta então verificar que $(x_j)_{j\neq k} \in X^u(E)$. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Tomando $n_1 = \max\{n_0, k\}$ segue facilmente que $(x_j)_{j\neq k} \in X^u(E)$.

(ii) Do item (i) e da Proposição 3.2.14 segue que $(X^u)^u$ é subclasse fechada de X^u. Por outro lado, dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$, como X^u é finitamente contrátil, $(x_j)_{j=n}^\infty \in X^u(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X^u(E)} = \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova que $(x_j)_{j=1}^\infty \in (X^u)^u(E)$.

(iii) Suponha que Y seja finitamente contrátil e $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$, isto é, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \overset{n}{\longrightarrow} 0$. Por hipótese, $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$ e

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{Y(E)} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

portanto $X^u \overset{1}{\hookrightarrow} Y^u$.

(iv) Da definição de classe de sequências e do item (iii),

$$X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\cdot) \Rightarrow X^u \overset{1}{\hookrightarrow} (\ell_\infty)^u(\cdot) = c_0(\cdot).$$

(v) Suponha que X seja linearmente estável. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F) \overset{1}{=} \Pi_{X;X}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. Como X é finitamente contrátil, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $(x_j)_{j=n}^\infty \in X(E)$ e da estabilidade linear segue que $(u(x_j))_{j=n}^\infty \in X(F)$. Daí,

$$\|(u(x_j))_{j=n}^\infty\|_{X(F)} \leq \|u\|_{X;X}\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

provando que $u \in \Pi_{X^u;X^u}(E;F)$. Mais ainda, a desigualdade

$$\|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X(F)} \leq \|u\|_{X;X} \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}$$

mostra que $\|u\|_{X^u;X^u} \leq \|u\|_{X;X} = \|u\|$. Por outro lado, para todo $x \in E$, usando o Lema 1.5.7, temos

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_F &= \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X(F)} = \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X^u(F)} \\ &= \|\widehat{u}\left((x,0,0,\ldots)\right)\|_{X^u(F)} \leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X^u(E);X^u(F))} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{X^u(E)} \\ &= \|u\|_{X^u;X^u} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|u\|_{X^u;X^u} \cdot \|x\|_E.\end{aligned}$$

Isso prova que $\|u\| \leq \|u\|_{X^u;X^u}$ e nos permite concluir que a classe X^u é linearmente estável.

(vi) Basta aplicar a Proposição 3.2.14. $\square$

Os itens (ii) e (iii) da Proposição 3.2.15, aplicados em conjunto com a inclusão $X^u \subseteq X$, fazem da regra $X \mapsto X^u$ um procedimento de núcleo (ver seção 1.5).

O próximo resultado mostra como o procedimento $X \mapsto X^u$ nos auxilia na obtenção de ideais simétricos não triviais.

Corolário 3.2.16. *Sejam X e Y classes de sequências finitamente determinadas com X finitamente contrátil. O ideal $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é simétrico para todo $n \geq 2$ e todas as classes de sequências $X_i \in \{\overline{c_{00}}^X, X^u, X\}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Das Proposições 3.2.5 e 3.2.14 sabemos que $X_1, \ldots, X_n$ são conjuntamente dominadas por X. O resultado segue do Teorema 3.2.2. □

Apresentamos agora os primeiros exemplos de ideais simétricos não triviais do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$.

Exemplo 3.2.17. Seja $1 \leq p < \infty$. Como ℓ_p^w é finitamente determinada e $(\ell_p^w)^u = \ell_p^u \neq \ell_p^w$, $\Pi_{\ell_p^{\theta_1},\ldots,\ell_p^{\theta_n};Y}$ é um ideal simétrico não trivial de operadores n-lineares para todo $n \geq 2$, todos $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \{u, w\}$ com $\theta_i = u$ e $\theta_j = w$ para alguns i e j, e qualquer classe de sequências finitamente determinada $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$.

Algumas preparações são necessárias para apresentarmos mais aplicações concretas do Corolário 3.2.16.

Proposição 3.2.18. *Sejam E um espaço de Banach, X uma classe de sequências finitamente determinada e $S(E)$ um espaço normado de sequências.*

(i) *Suponha que $S(E)$ seja finitamente zero invariante. Então $S(E)$ é finitamente contrátil se, e somente se, for finitamente zero substituível.*

(ii) *Suponha que $S(E)$ seja zero invariante e zero substituível. Então $S(E)$ é invariante por subsequências.*

(iii) *Suponha que*

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{X(E)} = \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{X(E)}$$

para todos $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $x_1, \ldots, x_n \in E$. Então $X(E)$ é zero invariante.

Demonstração. (i) Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in S(E)$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $S(E)$ seja finitamente contrátil. Neste caso, $(x_j)_{j\neq n} \in S(E)$ e $\|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}$. Da hipótese de zero invariância finita, obtemos

$$\|(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \ldots)\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}.$$

Suponha agora, que $S(E)$ seja finitamente zero substituível. Neste caso vale a desigualdade $\|(x_1,\ldots,x_{n-1},0,x_{n+1},\ldots)\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}$. Da hipótese de zero invariância finita, contraindo a sequência $(x_1,\ldots,x_{n-1},0,x_{n+1},\ldots) \in S(E)$ na n-ésima coordenada obtemos

$$(x_j)_{j\neq n} \in S(E) \text{ e } \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)} = \|(x_1,\ldots,x_{n-1},0,x_{n+1},\ldots)\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}.$$

(ii) Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in S(E)$ e $(k_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ uma sequência crescente. Tome $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por $\alpha_l = 1$ se $l = k_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, e $\alpha_l = 0$ caso contrário. Como $S(E)$ é zero substituível, $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in S(E)$ e $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)}$. Da hipótese de zero invariância podemos contrair a sequência $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty$ em todas as j-ésimas coordenadas satisfazendo $\alpha_j = 0$. Fazendo isso obtemos

$$(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in S(E) \text{ e } \|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_{S(E)} = \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

(iii) Tome $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Note que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$ se, e somente se, $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$ e, neste caso, por hipótese, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}$. Vamos supor então $(x_j)_{j=1}^\infty \notin c_{00}(E)$, isto é, existe uma subsequência $(k_j)_{j=1}^\infty$ de $\mathbb{N}$ de modo que $(x_j^0)_{j=1}^\infty = (x_{k_j})_{j=1}^\infty$. Como a classe X é finitamente determinada,

$$\|(y_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \sup_{1\leq i\leq m} \|(y_j)_{j=1}^i\|_{X(E)} = \|(y_j)_{j=1}^m\|_{X(E)}$$

para todos $n < m$ e $y_1,\ldots,y_m \in E$. Temos também $n \leq k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daí

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{k_n}\|_{X(E)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)},$$

valendo portanto a igualdade. Logo

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j^0)_{j=1}^n\|_{X(E)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_{k_j})_{j=1}^n\|_{X(E)} \overset{(*)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{k_n}\|_{X(E)} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)},\end{aligned}$$

onde a igualdade em $(*)$ vem da hipótese de zero invariância finita de X sobre as sequências finitas. Segue que $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $\|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}$. Por outro lado, dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} \setminus c_{00}(E)$ com $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in X(E)$, considere $(k_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ de modo que $(x_j^0)_{j=1}^\infty = (x_{k_j})_{j=1}^\infty$. Usando as hipóteses temos

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{k_n}\|_{X(E)} \overset{(*)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_{k_j})_{j=1}^n\|_{X(E)} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j^0)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.19. *As classes* Rad *e* RAD *são finitamente zero invariantes, finitamente zero substituíveis e finitamente contráteis.*

Demonstração. Considere $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Usando a igualdade vista em (1.1),

$$
\begin{aligned}
&\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|^2_{\text{Rad}(E)} \\
&= \int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_{k-1}(t)x_{k-1} + r_k(t)x_{k+1} + r_{k+1}(t)x_{k+2} + \cdots + r_{n-1}(t)x_n\|^2 dt \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_k x_{k+1} + \varepsilon_{k+1}x_{k+2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}x_n\|^2 \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\varepsilon_1, \overset{[k]}{\ldots}, \varepsilon_n = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_{k+1}x_{k+1} + \varepsilon_{k+2}x_{k+2} + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \overset{[k]}{\ldots}, \varepsilon_n = \pm 1} 2\|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_{k+1}x_{k+1} + \varepsilon_{k+2}x_{k+2} + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \overset{[k]}{\ldots}, \varepsilon_n = \pm 1} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_k \cdot 0 + \varepsilon_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_k \cdot 0 + \varepsilon_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 \\
&= \int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_{k-1}(t)x_{k-1} + r_k(t) \cdot 0 + r_{k+1}(t)x_{k+1} + \cdots + r_n(t)x_n\|^2 dt \\
&= \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|^2_{\text{Rad}(E)}
\end{aligned}
$$

e segue que

$$
\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} = \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)}. \tag{3.3}
$$

Temos também, usando o Princípio de Contração 1.2.7,

$$
\begin{aligned}
&\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|^2_{\text{Rad}(E)} \\
&= \int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_{k-1}(t)x_{k-1} + r_k(t) \cdot 0 + r_{k+1}(t)x_{k+1} + \cdots + r_n(t)x_n\|^2 dt \\
&= \int_0^1 \|1 \cdot r_1(t)x_1 + \cdots + 1 \cdot r_{k-1}(t)x_{k-1} + 0 \cdot r_k(t)x_k + 1 \cdot r_{k+1}(t)x_{k+1} + \cdots + 1 \cdot r_n(t)x_n\|^2 dt \\
&\leq \max\{0, 1\} \int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_{k-1}(t)x_{k-1} + r_k(t)x_k + r_{k+1}(t)x_{k+1} + \cdots + r_n(t)x_n\|^2 dt \\
&\leq \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|^2_{\text{Rad}(E)},
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$
\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \leq \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)}. \tag{3.4}
$$

Como RAD é finitamente determinada e vale a igualdade (3.3), podemos aplicar o item (iii) da Proposição 3.2.18 para concluir que RAD é zero invariante, em particular, finitamente zero invariante.

Tome $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$ satisfazendo $x_k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ como sendo a contração de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ na k-ésima coordenada, isto é, $(y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j \neq k}$, em outras palavras, $y_j = x_j$ se $j \leq k-1$ e $y_j = x_{j+1}$ se $j \geq k$. Pela definição de Rad, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ é convergente em $L_2([0,1]; E)$. Em particular,

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j \text{ em } L_2([0,1]; E)$$

e a sequência das somas parciais $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} r_j x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $L_2([0,1]; E)$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon$$

e para $m > n > \max\{n_0, k\}$ temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=n}^{m} r_j y_j \right\|_{L_2([0,1];E)} &= \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\
&= \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{m+1}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\
&\overset{(3.3)}{=} \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{m+1}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\
&= \left\| \sum_{j=n+1}^{m+1} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1],E)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $(y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j \neq k} \in \mathrm{Rad}(E)$. Por outro lado, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ com $x_k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j \neq k} \in \mathrm{Rad}(E)$. Note que, para todo $j \geq k$, o elemento x_{j+1} se encontra na j-ésima coordenada da sequência $(x_j)_{j \neq k}$. Então, da definição de Rad, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > k$, tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_{j+1} \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon.$$

Assim, para todos $m > n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=n+1}^{m+1} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} &= \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{m+1}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\
&\overset{(3.3)}{=} \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{m+1}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\
&= \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_{j+1} \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$. A igualdade de normas vem do fato de Rad ser subclasse fechada de RAD (veja [51, V.5.]), que por sua vez já mostramos ser finitamente zero invariante. Portanto Rad também é finitamente zero invariante.

Vejamos que RAD e Rad são finitamente zero substituíveis. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{RAD}(E)$ e $k \in \mathbb{N}$. Temos

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots) = (x_j)_{j=1}^{\infty} - (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-1)-\text{vezes}}, x_k, 0, 0, \ldots) \in \mathrm{RAD}(E),$$

e combinando (3.3) com (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\mathrm{RAD}(E)} &\overset{(3.3)}{=} \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{\mathrm{RAD}(E)} \\ &\overset{(3.4)}{\leq} \|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{\mathrm{RAD}(E)}\end{aligned}$$

para todo $n \geq k+1$. Tomando o supremo sobre n em ambas as igualdades concluímos que

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)\|_{\mathrm{RAD}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{RAD}(E)},$$

provando que RAD é finitamente zero substituível. Dados $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$ e $k \in \mathbb{N}$, tem-se $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots) \in \mathrm{Rad}(E)$ com

$$\begin{aligned}\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} &= \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)\|_{\mathrm{RAD}(E)} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{RAD}(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{Rad}(E)},\end{aligned}$$

e portanto Rad também é finitamente zero substituível. Por fim, segue do item (i) da Proposição 3.2.18 que RAD e Rad são finitamente contráteis. $\square$

Apresentamos agora uma classe de sequências introduzida em [49] (veja também [9]). Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ é dita ser mid p-somável se $((\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)$ para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*)$. Denota-se por $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências em E que são mid p-somáveis. A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{mid},p} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{1/p}$$

define uma norma completa em $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$. Sabemos que $E \mapsto \ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ é uma classe de sequências finitamente determinada, linearmente estável, que $\ell_p(\cdot) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^{\mathrm{mid}} \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e que as classes ℓ_p^{mid} e ℓ_p^u são incomparáveis em geral (veja [9]).

Exemplo 3.2.20. A classe ℓ_p^{mid} é zero invariante, zero substituível e invariante por subsequências. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in (E^*)^{\mathbb{N}}$. Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_{00}(E)$. Neste caso podemos tomar uma sequência $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ crescente tal que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} =$

$(x_{k_j})_{j=1}^\infty$. Considere a sequência $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ dada por $\phi_{k_i} := \varphi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi_i := 0$ se $i \notin \{k_j; j \in \mathbb{N}\}$. Temos $(\varphi_j^0)_{j=1}^\infty = (\phi_j^0)_{j=1}^\infty$ e, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j^0)|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_{k_j})|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\phi_{k_n}(x_{k_j})|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\phi_n(x_j)|^p.$$

Além disso, como ℓ_p^w é zero invariante,

$$(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E^*) \Leftrightarrow (\varphi_n^0)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E^*) \Leftrightarrow (\phi_n^0)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E^*) \Leftrightarrow (\phi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E^*),$$

com igualdade de normas. Logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E) \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{1/p} \\
&= \sup_{(\phi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\phi_n(x_j^0)|^p \right)^{1/p} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p}.
\end{aligned}$$

Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$, então existem $k_1 < k_2 < \cdots < k_m \in \mathbb{N}$ tais que $(x_j^0)_{j=1}^\infty = (x_{k_j})_{j=1}^m$. Neste caso, consideramos a sequência $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ dada por $\phi_{k_i} := \varphi_i$ para todo $i \leq m$, $\phi_i := 0$ se $i \leq k_m$ e $i \notin \{k_j; j \leq m\}$, e $\phi_{k_m+i} := \varphi_{m+i}$ para todo $i \geq 1$. Dessa forma, $(\varphi_j^0)_{j=1}^\infty = (\phi_j^0)_{j=1}^\infty$ e, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m+i} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j^0)|^p &= \sum_{n=1}^{m+i} \sum_{j=1}^m |\varphi_n(x_{k_j})|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^m |\varphi_n(x_{k_j})|^p + \sum_{n=m+1}^{m+i} \sum_{j=1}^m |\varphi_n(x_{k_j})|^p \\
&= \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^m |\phi_{k_n}(x_{k_j})|^p + \sum_{n=1}^i \sum_{j=1}^m |\varphi_{m+n}(x_{k_j})|^p \\
&= \sum_{n=1}^{k_m} \sum_{j=1}^{k_m} |\phi_n(x_j)|^p + \sum_{n=1}^i \sum_{j=1}^{k_m} |\phi_{k_m+n}(x_j)|^p \\
&= \sum_{n=1}^{k_m+i} \sum_{j=1}^{k_m} |\phi_n(x_j)|^p = \sum_{n=1}^{k_m+i} \sum_{j=1}^\infty |\phi_n(x_j)|^p.
\end{aligned}$$

O restante da argumentação é análoga ao caso acima. Portanto ℓ_p^{mid} é zero invariante.

Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$, uma sequência $(k_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ crescente, $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E^*)$. Usando que ℓ_p é invariante por subsequência, temos

$$\sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_{k_j})|^p \leq \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \text{ e}$$

$$\sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(\alpha_j x_j)|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j \varphi_n(x_j)|^p = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j| \cdot |\varphi_n(x_j)|^p \leq \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ e $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty$ pertencem a $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ e

$$\|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p}, \ \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p}.$$

Está provado que ℓ_p^{mid} é invariante por subsequências e zero substituível.

Dadas classes de sequências X e Y a notação $X \subseteq Y$ significa que $X(E) \subseteq Y(E)$ para todo E.

Proposição 3.2.21. *Seja* $1 \leq p < \infty$.

(i) $\mathrm{RAD}^u = \overline{c_{00}}^{\mathrm{RAD}} = \mathrm{Rad} = \mathrm{Rad}^u$.

(ii) $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \neq \ell_p^{\mathrm{mid}}$ *e* $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \neq \ell_p^u$.

Demonstração. (i) Temos

$$\mathrm{RAD}^u = \overline{c_{00}}^{\mathrm{RAD}} = \ \mathrm{Rad} = \mathrm{RAD}^u = (\mathrm{RAD}^u)^u = \ \mathrm{Rad}^u,$$

onde a primeira igualdade segue da combinação do Lema 3.2.19 juntamente com a Proposição 3.2.14, a segunda vem de [51, Proposition 5.1(b)], a terceira acabou de ser demonstrada, a quarta segue da Proposição 3.2.15(ii) e a última é consequência da igualdade já mostrada $\mathrm{RAD}^u = \ \mathrm{Rad}$.
(ii) Como $\ell_p^{\mathrm{mid}} \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$, pela Proposição 3.2.15(iii) temos $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \overset{1}{\hookrightarrow} (\ell_p^w)^u = \ell_p^u$. Supondo que $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u = \ell_p^{\mathrm{mid}}$ ou $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u = \ell_p^u$, teríamos $\ell_p^{\mathrm{mid}} = (\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \subseteq \ell_p^u$ ou $\ell_p^u = (\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \subseteq \ell_p^{\mathrm{mid}}$, mas isso não pode ocorrer pois ℓ_p^{mid} e ℓ_p^u são incomparáveis [9, Example 1.7]. □

Os exemplos a seguir são obtidos da proposição acima juntamente com o Corolário 3.2.16.

Exemplo 3.2.22. Como RAD é finitamente determinado e finitamente contrátil, para todo $n \geq 2$, toda classe de sequências finitamente determinada $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$ e todas classes de sequências $X_1, \ldots, X_n \in \{\mathrm{RAD}, \mathrm{Rad}\}$ com $X_i = \ \mathrm{RAD}$ e $X_j = \ \mathrm{Rad}$ para alguns i e j, tem-se que $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é um ideal simétrico não trivial de operadores n-lineares.

Exemplo 3.2.23. Seja $1 \leq p < \infty$. Como ℓ_p^{mid} é finitamente determinado e finitamente contrátil, então $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é um ideal simétrico não trivial de operadores n-lineares para todo $n \geq 2$, todos $X_1, \ldots, X_n \in \{\ell_p^{\mathrm{mid}}, (\ell_p^{\mathrm{mid}})^u\}$ com $X_i = \ell_p^{\mathrm{mid}}$ e $X_j = (\ell_p^{\mathrm{mid}})^u$ para alguns i e j, e toda classe de sequências finitamente determinada $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$.

3.3 O procedimento $X \mapsto X^{\mathrm{fd}}$

Os ideais simétricos construídos na seção anterior são todos do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ onde Y é sempre finitamente determinada. A boa notícia é que existem várias classes de sequências finitamente determinadas, como $\ell_p(\cdot)$, ℓ_p^w, $\ell_\infty(\cdot)$, RAD, $\ell_p\langle\cdot\rangle$ e ℓ_p^{mid}; e a má notícia é que algumas não são, como $c_0(\cdot)$, c_0^w, $c(\cdot)$, ℓ_p^u, Rad e $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u$. O objetivo desta seção é mostrar como construir ideais simétricos não triviais do tipo $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ para Y não necessariamente finitamente determinada e o principal resultado é o Teorema 3.3.6.

Proposição 3.3.1. *Sejam $X_1, \ldots, X_n, Y, Z, W$ classes de sequências tais que Z e W são finitamente determinadas e finitamente contráteis. Suponha também que $W \overset{fin}{\leq} Y$, $X_i \subseteq Z$ e $X_i \overset{\text{fin}}{\leq} Z$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $X_k \subseteq Z^u$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $W^u \subseteq Y$. Então $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} = \Pi_{^nZ;W}$.*

Demonstração. Seja $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $W \overset{\text{fin}}{\leq} Y$ e $X_i \overset{\text{fin}}{\leq} Z$, para $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^m\|_{W(F)} \leq \|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^m\|_{Y(F)} \leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^m\|_{X_i(E_i)}$$
$$\leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=1}^m\|_{Z(E_i)}.$$

Como Z e W são finitamente determinadas, $A \in \Pi_{^nZ;W}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|A\|_{^nZ;W} \leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}$.

Suponha agora que $A \in \Pi_{^nZ;W}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Sejam $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i) \subseteq Z(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Como Z é finitamente contrátil, $(x_j^i)_{j=m}^\infty \in Z(E_i)$ e $\|(x_j^i)_{j=m}^\infty\|_{Z(E_i)} \leq \|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{Z(E_i)}$ para todos $m \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, n$. Então, $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=m}^\infty \in W(F)$ e, como $(x_j^k)_{j=1}^\infty \in X_k(E_k) \subseteq Z^u(E_k)$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\lim_{m\to\infty} \|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=m}^\infty\|_{W(F)} \leq \lim_{m\to\infty} \|A\|_{^nZ;W} \cdot \prod_{i=1}^n \|(x_j^i)_{j=m}^\infty\|_{Z(E_i)}$$
$$= \|A\|_{^nZ;W} \cdot \lim_{m\to\infty} \left[\left(\prod_{i=1, i\neq k}^n \|(x_j^i)_{j=1}^\infty\|_{Z(E_i)} \right) \cdot \|(x_j^k)_{j=m}^\infty\|_{Z(E_k)} \right] = 0.$$

Logo $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in W^u(F) \subseteq Y(F)$, e daí $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$. □

Em breve mostraremos como a proposição acima pode ser usada para fornecer exemplos concretos de ideais simétricos não triviais do tipo somante. Para isso precisamos introduzir um novo procedimento no ambiente de classes de sequências.

Definição 3.3.2. Seja X uma classe de sequências qualquer. Para cada espaço de Banach E, definimos

$$X^{\mathrm{fd}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < +\infty \right\}.$$

Exemplo 3.3.3. Seja $1 \leq p < \infty$. Os seguintes exemplos podem ser facilmente verificados:

$$(\ell_p^u)^{\mathrm{fd}} = \ell_p^w, \quad \ell_p(\cdot)^{\mathrm{fd}} = \ell_p(\cdot), \quad c_0(\cdot)^{\mathrm{fd}} = (c_0^w)^{\mathrm{fd}} = c(\cdot)^{\mathrm{fd}} = \ell_\infty(\cdot), \quad \mathrm{Rad}^{\mathrm{fd}} = \mathrm{RAD}.$$

Naturalmente, pode-se questionar se os procedimentos $X \mapsto X^u$ e $X \mapsto X^{\mathrm{fd}}$ geram exemplos da forma $X^u \subsetneqq X \subsetneqq X^{\mathrm{fd}}$. A resposta é positiva, por exemplo, para a classe $X = c_0^w$:

$$(c_0^w)^u = c_0(\cdot) \subsetneqq c_0^w \subsetneqq \ell_\infty(\cdot) = (c_0^w)^{\mathrm{fd}}.$$

Proposição 3.3.4. *Para cada espaço de Banach E, $X^{\mathrm{fd}}(E)$ é um espaço vetorial e a função $\|\cdot\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}\colon X^{\mathrm{fd}}(E)\to[0,\infty)$ dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} := \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}$$

define uma norma em $X^{\mathrm{fd}}(E)$. Além disso, se X é linearmente estável, então a regra $E\mapsto X^{\mathrm{fd}}(E)$ define uma classe de sequências linearmente estável.

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty},(y_j)_{j=1}^{\infty}\in X^{\mathrm{fd}}(E)$ e $\alpha\in\mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}\sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}+\alpha(y_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)} &\le \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}+\sup_k\|\alpha(y_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}\\ &= \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}+|\alpha|\cdot\sup_k\|(y_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}<+\infty.\end{aligned}$$

Isso prova que $(x_j)_{j=1}^{\infty}+\alpha(y_j)_{j=1}^{\infty}\in X^{\mathrm{fd}}(E)$, fazendo de $X^{\mathrm{fd}}(E)$ um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$. Temos ainda:

(i)

$$\begin{array}{ccccc}\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}=0 & \Leftrightarrow & \sup_k\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}=0 & \Leftrightarrow & \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}\\ & & & & \Updownarrow\\ (x_j)_{j=1}^{\infty}=0 & \Leftrightarrow & x_k=0,\ \forall k\in\mathbb{N} & \Leftrightarrow & (x_j)_{j=1}^{k}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}\end{array}$$

(ii)

$$\|\alpha(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}=\sup_k\|\alpha(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}=|\alpha|\cdot\sup_k\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}=|\alpha|\cdot\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^{\infty}+(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} &= \sup_k\|(x_j)_{j=1}^{k}+(y_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}\\ &\le \sup_k\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}+\sup_k\|(y_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}\\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}+\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.\end{aligned}$$

Está provado que $\left(X^{\mathrm{fd}}(E),\|\cdot\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}\right)$ é um espaço vetorial normado. Vejamos agora, que $X^{\mathrm{fd}}(E)$ é completo. Seja $((x_j^n)_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $X^{\mathrm{fd}}(E)$. Dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$m,n\ge n_0\Rightarrow \|(x_j^n)_{j=1}^{\infty}-(x_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}<\varepsilon. \tag{3.5}$$

Dessa forma, fixado $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|x_k^n-x_k^m\| &\le \|(x_j^n-x_j^m)_{j=1}^{k}\|_{\ell_\infty(E)}\le\|(x_j^n-x_j^m)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}\\ &= \|(x_j^n)_{j=1}^{k}-(x_j^m)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}\le\sup_i\|(x_j^n)_{j=1}^{i}-(x_j^m)_{j=1}^{i}\|_{X(E)}\\ &= \|(x_j^n)_{j=1}^{\infty}-(x_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}<\varepsilon\end{aligned}$$

para todos $m, n \geq n_0$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, logo convergente, digamos $x_k^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k \in E$. Do Lema 1.5.7, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} (x_j^n)_{j=1}^k = (x_j)_{j=1}^k \text{ em } X(E)$$

e então $(x_j^n)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k$ em $X(E)$. Segue da continuidade da norma que

$$\|(x_j^n)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)},$$

em outras palavras,

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_j^n)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} &= \|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k + (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} \\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} + \|(x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(x_j^n)_{j=1}^k - (x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} + \|(x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} \overset{(3.5)}{\leq} \varepsilon + \|(x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)}
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \varepsilon + \sup_k \|(x_j^{n_0})_{j=1}^k\|_{X(E)} < +\infty$$

e portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathrm{fd}}(E)$. Analogamente ao que foi feito acima,

$$\|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^m)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \lim_{n\to\infty} \|(x_j^n)_{j=1}^k - (x_j^m)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \varepsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq n_0$, e isso implica que

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty} - (x_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k - (x_j^m)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \varepsilon$$

para todo $m \geq n_0$. Portanto $(x_j^n)_{j=1}^{\infty} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $X^{\mathrm{fd}}(E)$.

Para concluir que X^{fd} é uma classe de sequências resta mostrar que

$$c_{00}(E) \subseteq X^{\mathrm{fd}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{\infty}(E) \text{ e que } \|e_j\|_{X^{\mathrm{fd}}(\mathbb{K})} = 1 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, temos

$$\sup_{k\leq n} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \text{máx}\{\|(x_j)_{j=1}^1\|_{X(E)}, \|(x_j)_{j=1}^2\|_{X(E)}, \ldots, \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}\} < +\infty,$$

logo $c_{00}(E) \subseteq X^{\mathrm{fd}}(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\|e_j\|_{X^{\mathrm{fd}}(\mathbb{K})} = \max\{0, \|e_j\|_{X(E)}\} = 1.$$

Por último, dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E)$,

$$\|x_k\| \leq \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\ell_\infty(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde segue que

$$\sup_k \|x_k\| \leq \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} < +\infty,$$

o que prova que $X^{\mathrm{fd}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$.

Para verificar a estabilidade linear de X^{fd}, sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E)$. Como X é linearmente estável, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|(u(x_j))_{j=1}^k\|_{X(F)} \leq \|u\|_{X;X} \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}$$

e segue que

$$\sup_k \|(u(x_j))_{j=1}^k\|_{X(F)} \leq \|u\| \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(F)},$$

ou seja, $u \in \Pi_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}}(E;F)$ e $\|u\|_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}} \leq \|u\|$. Para a desigualdade inversa, note que, dado $x \in E$, a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty = (x,0,0,\ldots)$ é um elemento de $X(E)$ e de $X^{\mathrm{fd}}(E)$, e que

$$\|(x,0,0,\ldots)\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \sup_k \|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)}.$$

Usando a estabilidade linear de X uma vez mais e aplicando o Lema 1.5.7, para cada $x \in E$

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_F = \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X(F)} &= \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X^{\mathrm{fd}}(F)} \\ &\leq \|u\|_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} \\ &= \|u\|_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}} \cdot \|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|u\|_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}} \cdot \|x\|_E\end{aligned}$$

e portanto $\|u\| \leq \|u\|_{X^{\mathrm{fd}};X^{\mathrm{fd}}}$. Está provada a igualdade das normas. □

Proposição 3.3.5. *Seja X uma classe de sequências linearmente estável. Então*

(i) *Se X é finitamente contrátil, então X^{fd} é finitamente contrátil e finitamente determinada.*

(ii) *Se X é finitamente zero invariante, então X^{fd} é finitamente zero invariante.*

(iii) *Se X é finitamente contrátil e finitamente zero substituível, então $\overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de X^{fd}.*

(iv) *Se X é finitamente contrátil e finitamente zero invariante, então $\overline{c_{00}}^X \overset{1}{=} X^u \overset{1}{=} (X^{\mathrm{fd}})^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^{X^{\mathrm{fd}}}$. Em particular, $\overline{c_{00}}^X = X^u$ é uma subclasse fechada de X^{fd}.*

Demonstração. (i) Da Proposição 3.3.4, X^{fd} é uma classe de sequências linearmente estável. Como X é finitamente contrátil, dados E Banach, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, temos

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \quad \text{e} \tag{3.6}$$

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}. \tag{3.7}$$

Dessa forma,

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \text{máx}\left\{\|(x_j)_{j=1}^1\|_{X(E)}, \|(x_j)_{j=1}^2\|_{X(E)}, \ldots, \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}\right\} \overset{(3.7)}{=} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}$$

e então

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E) \Leftrightarrow \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} < +\infty \Leftrightarrow \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} < +\infty$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.$$

Isso prova que X^{fd} é finitamente determinada. Por último, para cada $k \in \mathbb{N}$, escrevendo $(y_j)_{j=1}^\infty = (x_j)_{j \neq k}$,

$$\begin{aligned}
\sup_n \|(y_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} &\overset{(3.7)}{=} \sup_{n \geq k} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \\
&= \sup_{n \geq k} \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} \\
&\overset{(3.6)}{\leq} \sup_{n \geq k} \|(x_j)_{j=1}^{n+1}\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.
\end{aligned}$$

Logo X^{fd} é finitamente contrátil.

(ii) Como X é finitamente zero invariante,

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} \tag{3.8}$$

para todo $k \leq n$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $x_k = 0$. Daí, dados $k \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ satisfazendo $x_k = 0$, considere a sequência $(y_j)_{j=1}^\infty$ dada por

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{se} \quad j < k \\ x_{j+1} & \text{se} \quad j \geq k \end{cases},$$

em outras palavras, $(y_j)_{j=1}^\infty$ é a contração de $(x_j)_{j=1}^\infty$ na k-ésima coordenada, ou ainda, $(y_j)_{j=1}^\infty = (x_j)_{j \neq k}$. Note que, se $k \geq n$, então contrair a sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ na k-ésima coordenada não altera a pertinência ao espaço. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
&\sup_n \|(y_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}\\
&\quad = \sup\big\{\|(y_1,0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(y_1,y_2,0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots,\|(y_1,\ldots,y_{k-1},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\\
&\qquad \|(y_1,\ldots,y_{k-1},y_k,0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(y_1,\ldots,y_{k-1},y_k,y_{k+1},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots\big\}\\
&\quad = \sup\big\{\|(x_1,0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(x_1,x_2,0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots,\|(x_1,\ldots,x_{k-1},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\\
&\qquad \|(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},x_{k+2},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots\big\}\\
&\quad \overset{(3.8)}{=} \sup\big\{\|(x_1,0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(x_1,x_2,0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots,\|(x_1,\ldots,x_{k-1},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\\
&\qquad \|(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},0,0,\ldots)\|_{X(E)}, \|(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},0,0,\ldots)\|_{X(E)},\ldots\big\}\\
&\quad = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}.
\end{aligned}
$$

Note que a expressão $\|(x_1,\ldots,x_k,0,0,\ldots)\|_{X(E)}$ não aparece explicitamente, no entanto

$$\|(x_1,\ldots,x_{k-1},0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,0,0,\ldots)\|_{X(E)}$$

pois $x_k = 0$ por hipótese. Concluímos então que $(y_j)_{j=1}^\infty = (x_j)_{j\neq k} \in X^{\mathrm{fd}}(E)$ se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E)$ e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \|(x_j)_{j\neq k}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.$$

(iii) Por hipótese, X é finitamente contrátil e finitamente zero substituível. Tome $(x_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^X(E)$. Pela Proposição 3.2.9, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1},\ldots)\|_{X(E)} < \varepsilon.$$

E como X é finitamente contrátil,

$$
\begin{aligned}
\sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} &\overset{(3.7)}{=} \sup_{n>n_0} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}\\
&= \sup_{n>n_0} \|(x_j)_{j=1}^\infty - (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2},\ldots)\|_{X(E)}\\
&\leq \sup_{n>n_0}\left(\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} + \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2},\ldots)\|_{X(E)}\right)\\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} &= \|(x_j)_{j=1}^{n_0} + (\underbrace{0,\ldots,0}_{n_0-\text{vezes}}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2},\ldots)\|_{X(E)}\\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^{n_0}\|_{X(E)} + \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{n_0-\text{vezes}}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2},\ldots)\|_{X(E)}\\
&< \|(x_j)_{j=1}^{n_0}\|_{X(E)} + \varepsilon \leq \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\rm fd}(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\overline{c_{00}}^X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\rm fd}(E)}$. Do Lema 2.2.4, $\overline{c_{00}}^X(E)$ é subespaço fechado de $X^{\rm fd}(E)$ para todo E.

(iv) Por hipótese, X é finitamente contrátil e finitamente zero invariante. Da Proposição 3.2.14 segue que $X^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^X$. De acordo com o que acabamos de ver, $X^{\rm fd}$ também é finitamente contrátil e finitamente zero invariante, portanto, pela mesma proposição citada, $(X^{\rm fd})^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^{X^{\rm fd}}$. De acordo com o item (iii), $X^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de $X^{\rm fd}$. Combinando os itens (ii) e (iii) da Proposição 3.2.15 com a inclusão $X^u \overset{1}{\hookrightarrow} X^{\rm fd}$ (veja a frase anterior), obtemos

$$\overline{c_{00}}^X \overset{1}{=} X^u \overset{1}{=} (X^u)^u \overset{1}{\hookrightarrow} (X^{\rm fd})^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^{X^{\rm fd}},$$

onde a inclusão ocorre com igualdade de normas pois, como visto acima, X^u é subclasse fechada de $X^{\rm fd}$. Devemos então, mostrar que vale a inclusão contrária. Para isso seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^{X^{\rm fd}}(E)$. Então, como $X^{\rm fd}$ é finitamente zero invariante,

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\rm fd}(E)} &= \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-\text{vezes}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{X^{\rm fd}(E)} \\ &= \|(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{X^{\rm fd}(E)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$ pois $(X^{\rm fd})^u(E) = \overline{c_{00}}^{X^{\rm fd}}(E)$. Temos então $(x_j)_{j=1}^n \longrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty$ em $X^{\rm fd}(E)$, em particular a sequência $((x_j)_{j=1}^n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $X^{\rm fd}(E)$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, como as normas $\|\cdot\|_{X^{\rm fd}}$ e $\|\cdot\|_X$ coincidem em $c_{00}(\cdot)$ – veja o item (iii) –,

$$\|(x_j)_{j=1}^m - (x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^m - (x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\rm fd}(E)} \longrightarrow 0$$

quando $n, m \longrightarrow \infty$. Isso mostra que $((x_j)_{j=1}^n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $X(E)$, e portanto convergente, digamos $(x_j)_{j=1}^n \longrightarrow (y_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$. Como $\overline{c_{00}}^X(E)$ é fechado em $X(E)$, temos $(y_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^X(E)$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^n \longrightarrow (y_j)_{j=1}^\infty$ em $\overline{c_{00}}^X(E)$. Mas $\overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de $X^{\rm fd}$, logo $(x_j)_{j=1}^n \longrightarrow (y_j)_{j=1}^\infty$ em $X^{\rm fd}(E)$. Da unicidade do limite segue que $(y_j)_{j=1}^\infty = (x_j)_{j=1}^\infty$, e portanto

$$(x_j)_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty \in \overline{c_{00}}^X(E).$$

□

Propriedades adicionais do procedimento $X \mapsto X^{\rm fd}$, que não serão necessárias para a continuidade da tese, serão apresentadas no Apêndice C. No momento estamos interessados em usar este procedimento para construir ideais simétricos não triviais.

Teorema 3.3.6. *Sejam X e Y classes de sequências finitamente contráteis e finitamente zero invariantes. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o ideal $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é simétrico sempre que $X_i \in \{X^u, X, X^{\rm fd}\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, e $X_k = X^u$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$. Neste caso, $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} = \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y^u}$.*

Demonstração. Sejam $X_1, \ldots, X_n, Y$ classes de sequências como no enunciado. Dados um espaço de Banach E e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, como X é finitamente contrátil e finitamente zero invariante, portanto finitamente zero substituível, temos, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^{m}\|_{X(E)} &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty} - (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-\text{vezes}}, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} + \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-\text{vezes}}, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)\|_{X(E)} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} + \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = 2\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}. \end{aligned}$$

Segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{fd}}(E)$, e portanto $X \subseteq X^{\text{fd}}$. Da Proposição 3.3.5, X^{fd} e Y^{fd} são finitamente contráteis e finitamente determinadas, $\overline{c_{00}}^{X} = X^u$ é subclasse fechada de X^{fd} e $\overline{c_{00}}^{Y} = Y^u$ é subclasse fechada de Y^{fd}. Em particular, $X \overset{\text{fin}}{=} X^{\text{fd}}$ e $Y^u \overset{\text{fin}}{=} Y^{\text{fd}}$. Ainda da Proposição 3.3.5, $X^u = (X^{\text{fd}})^u$ e $Y^u = (Y^{\text{fd}})^u$. Vamos aplicar a Proposição 3.3.1 para concluir que

$$\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y^u} = \Pi_{{}^nX^{\text{fd}};Y^{\text{fd}}}. \tag{3.9}$$

Para isso, verificaremos que as hipóteses da Proposição 3.3.1 estão todas satisfeitas neste caso:

(a) X^{fd} e Y^{fd} são finitamente contráteis e finitamente determinadas (Proposição 3.3.5(i)).

(b) $Y^u \overset{\text{fin}}{=} Y^{\text{fd}}$ (isso foi verificado acima).

(c) $X^u \subseteq X$ (óbvio) e $X \subseteq X^{\text{fd}}$ (verificado acima).

(d) $X^u \overset{\text{fin}}{=} X$ (óbvio) e $X \overset{\text{fin}}{=} X^{\text{fd}}$ (verificado acima).

(e) $X^u = (X^{\text{fd}})^u$ (Proposição 3.3.5(iv)), logo $X_k = (X^{\text{fd}})^u$ para algum k.

(f) $(Y^{\text{fd}})^u = Y^u$ (Proposição 3.3.5(iv)).

Vale então a igualdade (3.9). Dado $A \in \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$, usando novamente que $Y^u \overset{\text{fin}}{=} Y^{\text{fd}}$ e $X_i \overset{\text{fin}}{=} X^{\text{fd}}$, temos

$$\begin{aligned} \|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{k}\|_{Y^{\text{fd}}(F)} &= \|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{k}\|_{Y^u(F)} = \|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{k}\|_{Y(F)} \\ &\leq \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \cdot \prod_{i=1}^{n} \|(x_j^i)_{j=1}^{k}\|_{X_i(E_i)} = \|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} \cdot \prod_{i=1}^{n} \|(x_j^i)_{j=1}^{k}\|_{X^{\text{fd}}(E_i)} \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todos $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$. Como X^{fd} e Y^{fd} são finitamente determinadas, $A \in \Pi_{{}^nX^{\text{fd}};Y^{\text{fd}}}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Isso prova que $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} \subseteq \Pi_{{}^nX^{\text{fd}};Y^{\text{fd}}}$. Daí,

$$\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y^u} \subseteq \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} \subseteq \Pi_{{}^nX^{\text{fd}};Y^{\text{fd}}} = \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y^u},$$

o que nos permite concluir que $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y} = \Pi_{{}^nX^{\text{fd}};Y^{\text{fd}}}$ é um ideal simétrico não trivial. $\square$

Exemplo 3.3.7. Seja $1 \leq p < \infty$. Como ℓ_p^w e $\ell_p^{\rm mid}$ são finitamente determinadas e finitamente zero invariantes, $(\ell_p^w)^u = \ell_p^u \neq \ell_p^w$ e $\ell_p^{\rm mid} \neq (\ell_p^{\rm mid})^u$. Portanto, pelo teorema acima,

$$\Pi_{\ell_p^{\theta_1},\ldots,\ell_p^{\theta_n};Y} \;\text{ e }\; \Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$$

são ideais simétricos não triviais para todo $n \geq 2$, todos $\theta_1,\ldots,\theta_n \in \{u,w\}$ com $\theta_i = u$ e $\theta_j = w$ para alguns i e j, todas $X_1,\ldots,X_n \in \{\ell_p^{\rm mid}, (\ell_p^{\rm mid})^u\}$ com $X_i = \ell_p^{\rm mid}$ e $X_j = (\ell_p^{\rm mid})^u$ para alguns i e j, e toda classe de sequências finitamente contrátil e finitamente zero invariante $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$.

Em particular, $\Pi_{\ell_2^w,\ell_2^u;{\rm Rad}}$ é um ideal simétrico não trivial de operadores bilineares, exemplo este que não pode ser obtido pelos resultados do capítulo anterior.

Exemplo 3.3.8. Como RAD é finitamente contrátil e finitamente zero invariante, para todo $n \geq 2$, o ideal $\Pi_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ é simétrico sempre que $X_i \in \{{\rm RAD}, {\rm Rad}\}$ com $X_i = {\rm RAD}$ e $X_j = {\rm Rad}$ para alguns i e j, e $Y \neq \ell_\infty(\cdot)$ finitamente contrátil e finitamente zero invariante.

3.4 Aplicações

O objetivo desta seção é mostrar que os procedimentos $X \mapsto X^u$ e $X \mapsto X^{\rm fd}$, assim como os resultados provados nas seções anteriores, podem ser úteis além do âmbito dos ideais simétricos de operadores multilineares.

Conforme mencionado na Introdução, a classe que originou esta linha de pesquisa é o ideal $\Pi_p = \Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)}$ dos operadores lineares absolutamente p-somantes. É bem conhecido que $\Pi_p = \Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)} = \Pi_{\ell_p^u;\ell_p(\cdot)}$. A primeira aplicação mostra que essa igualdade é um caso particular de algo muito mais geral.

Proposição 3.4.1. *Seja X uma classe de sequências finitamente determinada e finitamente contrátil. Então são válidos:*

(i) $\Pi_{X;Y} \stackrel{1}{=} \Pi_{X^u;Y}$ *para toda classe de sequências Y finitamente determinada.*

(ii) $\Pi_{X;Y} \stackrel{1}{=} \Pi_{X^u;Y^u}$ *para toda classe de sequências Y finitamente determinada e finitamente contrátil*

(iii) $\Pi_{X^u;Y^u} = \Pi_{X;Y^{fd}} \stackrel{1}{=} \Pi_{X^u;Y^{fd}}$ *para toda classe de sequências Y finitamente contrátil e finitamente zero invariante.*

Demonstração. (i) Como X^u é uma subclasse fechada de X, a igualdade desejada foi obtida na demonstração do Teorema 3.2.2.

(ii) Sejam $u \in \Pi_{X^u;Y}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(x_j)_{j=n}^\infty \in X(E)$ e $(u(x_j))_{j=n}^\infty \in Y(F)$ pois X e Y são finitamente contráteis. Temos também

$$\|(u(x_j))_{j=n}^\infty\|_{Y(F)} \leq \|u\|_{X^u;Y} \cdot \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} \xrightarrow{n} 0,$$

o que mostra que $\Pi_{X^u;Y} \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X^u;Y^u}$. A inclusão $\Pi_{X^u;Y^u} \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{X^u;Y}$ é óbvia pois Y^u é subclasse fechada de Y. Isso nos fornece a igualdade $\Pi_{X^u;Y^u} \overset{1}{=} \Pi_{X^u;Y}$. Para concluir, basta aplicar o item (i).

(iii) Pela Proposição 3.3.5(i), a classe Y^{fd} é finitamente determinada. Segue do item (i) que $\Pi_{X;Y^{\text{fd}}} \overset{1}{=} \Pi_{X^u;Y^{\text{fd}}}$. E também sabemos pela Proposição 3.3.5(i) que Y^{fd} é finitamente contrátil e pela Proposição 3.3.5(iv) que $(Y^{\text{fd}})^u = Y^u$. Portanto, a igualdade $\Pi_{X;Y^{\text{fd}}} = \Pi_{X^u;Y^u}$ segue da Proposição 3.3.1. $\square$

Exemplo 3.4.2. Seja $1 \leq p < \infty$. Tomando primeiramente $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_p(\cdot)$ recuperamos a igualdade já conhecida $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)} = \Pi_{\ell_p^u;\ell_p(\cdot)}$. E tomando $X = \ell_p^w$ e $Y = \text{RAD}$ obtemos

$$\Pi_{\ell_p^u;\text{Rad}} = \Pi_{\ell_p^w;\text{RAD}} = \Pi_{\ell_p^u;\text{RAD}}. \tag{3.10}$$

Como $\text{Rad}(\mathbb{K}) = \text{RAD}(\mathbb{K}) = \ell_2$, a classe dos operadores em (3.10) é interessante, no sentido de ser um ideal de operadores, apenas nos casos em que $1 \leq p \leq 2$.

Passamos agora para a segunda aplicação. Seja $1 \leq p < \infty$. Todas as classes de sequências X que têm ℓ_p como componente escalar, isto é, $X(\mathbb{K}) = \ell_p$, com as quais trabalhamos nesta tese satisfazem as inclusões

$$\ell_p\langle\cdot\rangle \subseteq X \subseteq \ell_p^w.$$

A pergunta é inevitável: será que toda classe de sequências X com $X(\mathbb{K}) = \ell_p$ está entre $\ell_p\langle\cdot\rangle$ e ℓ_p^w?

Uma parte da pergunta tem resposta fácil, precisando apenas pedir que a classe seja linearmente estável. Mais precisamente, vejamos que se X é uma classe de sequências linearmente estável com $X(\mathbb{K}) = \ell_p$, então $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$. De fato, dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$, segue da estabilidade linear que

$$(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in X(\mathbb{K}) = \ell_p$$

para todo funcional $\varphi \in E^*$. Portanto, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ e

$$\|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_p = \|\widehat{\varphi}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_p \leq \|\widehat{\varphi}\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|\varphi\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

Tomando o supremo sobre $\varphi \in B_{E^*}$, obtemos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}$. Está provado que $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$, isto é, a classe ℓ_p^w é a "maior" dentre todas as classes de sequências linearmente estáveis que têm ℓ_p como componente escalar.

Já o outro lado da pergunta é mais difícil. Provaremos a seguir que a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é minimal dentre todas as classes de sequências satisfazendo certas condições que têm ℓ_p como componente escalar. O leitor deve observar que usaremos os procedimentos $X \mapsto \overline{c_{00}}^X$, $X \mapsto X^u$, $X \mapsto X^{\text{fd}}$ e $X \mapsto X^{\text{dual}}$, bem como vários resultados provados anteriormente.

Proposição 3.4.3. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X uma classe de sequências finitamente injetiva, finitamente contrátil , finitamente zero invariante e esfericamente completa. Se $X(\mathbb{K}) = \ell_p$ e $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p\langle\cdot\rangle$, então $X \overset{1}{=} \ell_p\langle\cdot\rangle$.*

Demonstração. Segue das Proposições 3.2.14 e 3.2.15 que $X^u = \overline{c_{00}}^X$ é uma classe de sequências linearmente estável. Vejamos que a hipótese de X ser finitamente contrátil e esfericamente completa garante que X^u também é esfericamente completa. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como X é finitamente contrátil e esfericamente completa, para cada $n \in \mathbb{N}$;

$$(x_j)_{j=n}^\infty \in X(E) \Rightarrow (\alpha_j x_j)_{j=n}^\infty \in X(E) \text{ e } \|(\alpha_j x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{X(E)},$$

portanto $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. Podemos então considerar a classe $(X^u)^{\text{dual}}$. É imediato que $X^u(\mathbb{K}) = \ell_p$. Daí,

$$(X^u)^{\text{dual}}(\mathbb{K}) = \left\{ (\beta_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty \alpha_j\beta_j \text{ converge para toda } (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in X^u(\mathbb{K}) = \ell_p \right\} = \ell_{p^*},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Dados $\varphi \in E^*$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in (X^u)^{\text{dual}}(E)$, temos $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in (X^u)^{\text{dual}}(\mathbb{K}) = \ell_{p^*}$ pois X linearmente estável implica em X^u linearmente estável. Isso, por sua vez, implica que $(X^u)^{\text{dual}}$ é linearmente estável. Assim, $(X^u)^{\text{dual}}$ é uma classe linearmente estável tal que $(X^u)^{\text{dual}}(\mathbb{K}) = \ell_{p^*}$. Pelo que fizemos no parágrafo anterior a esta proposição, segue que $(X^u)^{\text{dual}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{p^*}^w(E)$, e portanto $B_{(X^u)^{\text{dual}}(E)} \subseteq B_{\ell_{p^*}^w(E)}$. Da Proposição 3.3.5 sabemos que X^{fd} é finitamente determinada, $X^u = \overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de X^{fd} e que $X^u \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^X \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^{X^{\text{fd}}} \overset{1}{=} (X^{\text{fd}})^u$. De acordo com a terminologia em [8], isso implica que X^u é uma classe finitamente dominada. Por último, não é difícil verificar que X^u é uma classe finitamente injetiva, pois as normas $\|\cdot\|_{X^u}$ e $\|\cdot\|_X$ são iguais em $c_{00}(E)$ para todo E e toda classe X finitamente injetiva. Temos então todas as condições para usar o Teorema 1.5.16 para a classe X^u, isto é, $(X^u)^{\text{dual}}(E^*)$ e $[X^u(E)]^*$ são isomorfos isometricamente por meio do operador descrito em (1.7). Aplicando o Teorema de Hahn-Banach, para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$ temos

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^u(E)} &= \sup_{\varphi \in B_{[X^u(E)]^*}} \left|\varphi((x_j)_{j=1}^\infty)\right| \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{(X^u)^{\text{dual}}(E^*)}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \\
&\leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E)}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p\langle E\rangle}.
\end{aligned}$$

Como $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p\langle\cdot\rangle$ segue do Lema 2.2.4 que X^u é subclasse fechada de $\ell_p\langle\cdot\rangle$, e portanto

$$\overline{c_{00}}^{\ell_p\langle\cdot\rangle}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p\langle E\rangle \overset{1}{=} \overline{c_{00}}^{\ell_p\langle\cdot\rangle}(E),$$

donde obtemos $X \overset{1}{=} \ell_p\langle\cdot\rangle$. ☐

No Capítulo 4 provaremos um resultado mais geral que a proposição acima. Optamos por manter este resultado na tese por dois motivos: (i) O resultado mais geral apareceu após termos submetido um artigo com os resultados deste capítulo, incluindo a proposição acima. Como este artigo foi aceito para publicação, o resultado acima aparecerá na literatura, por isso achamos melhor mantê-lo na tese. (ii) Apesar de ser menos geral, a demonstração da proposição acima não necessita das construções que faremos no capítulo seguinte. Sendo assim, a proposição pode ser mais atraente no caso de classes que satisfazem as suas hipóteses.

Capítulo 4

Classes de sequências e ideais de operadores

É fato bem conhecido na área de Ideais de Operadores que muitas das classes de sequências X com as quais estamos trabalhando podem ser representadas por ideais de operadores no seguinte sentido: para todo espaço de Banach E, $X(E)$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{I}({}^*X(\mathbb{K});E)$, onde $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores e ${}^*X(\mathbb{K})$ é um pré-dual da componente escalar de X, isto é, $({}^*X(\mathbb{K}))^* = X(\mathbb{K})$. Vários casos conhecidos serão apresentados no Exemplo 4.0.1. Mais ainda, essas representações têm sido muito úteis, pois a identificação de uma sequência com um operador linear contínuo permite a aplicação dos teoremas clássicos da Análise Funcional, que versam sobre operadores, no estudo das classes de sequências.

Neste capítulo estudaremos quando determinada classe de sequências pode ser representada por um ideal de operadores e, no caso positivo, descobrir qual ideal representa a classe. Os resultados que obtivemos são muito satisfatórios, no sentido de que conseguimos decidir, entre todas as classes com as quais vimos trabalhando, quais são representáveis e quais não são. Mais ainda, para cada classe que é representável, identificamos qual ideal de operadores a representa. Aplicações dessas representações também serão obtidas.

No exemplo a seguir veremos vários casos conhecidos e teremos um primeiro contato com o isomorfismo que possibilita essas representações.

Exemplo 4.0.1. O exemplo mais conhecido é o seguinte: para $1 < p < \infty$, a seguinte correspondência é um isomorfismo isométrico para todo espaço de Banach E:

$$u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E).$$

No caso $p = 1$, a representação funciona da seguinte forma:

$$u \in \mathcal{L}(c_0, E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E).$$

Relembre que $\mathcal{K}$ é o ideal dos operadores compactos e $\mathcal{N}$ é o ideal dos operadores nucleares. Essa mesma correspondência $u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty}$ também é um isomorfismo isométrico entre os seguintes espaços:

$$\mathcal{L}(\ell_1; E) \mapsto \ell_\infty(E), \quad \mathcal{K}(\ell_{p^*}; E) \mapsto \ell_p^u(E), \quad \mathcal{K}(c_0; E) \mapsto \ell_1^u(E), \quad \mathcal{N}(\ell_{p^*}; E) \mapsto \ell_p\langle E\rangle.$$

Estes isomorfismos são bem conhecidos na literatura e podem ser encontrados em [22, p. 92], exceto o último deles, cuja referência é [30, Corollary 3.7].

Esses exemplos têm muitas coisas em comum: a correspondência é sempre $u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty$, o espaço no domínio é um pré-dual de $X(\mathbb{K})$ e o espaço de operadores é sempre uma componente de um ideal de operadores. Parece claro que todos esses isomorfismos são casos particulares de algo muito mais geral. O objetivo deste capítulo é exatamente construir este caso geral, que recupera todos os casos conhecidos como casos particulares.

Em resumo, queremos saber se dada uma classe de sequências X e um pré-dual ${}^*X(\mathbb{K})$ de $X(\mathbb{K})$ formado por sequências escalares, existe um ideal de operadores $\mathcal{I}$ tal que a correspondência

$$u \in \mathcal{I}({}^*X(\mathbb{K}), E) \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E),$$

está bem definida e é um isomorfismo isométrico para todo espaço de Banach E. Muitas perguntas são naturais: Isso é verdade para toda classe X? Se não, para quais classes isso é verdade? Para as classes em que isso é verdade, qual é o ideal $\mathcal{I}$? É único? Neste capítulo responderemos a todas essas perguntas. Para cada uma das classes com as quais trabalhamos até agora, decidiremos quais são representáveis e quais não são. Mais ainda, identificaremos o ideal que representa cada uma das classes que são representáveis.

Para atingir esses objetivos, construiremos a seguir algumas definições e provaremos alguns resultados preliminares.

Definição 4.0.2. Um *espaço de sequências escalares* é um espaço de Banach $\lambda \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{N}$, isto é, é um espaço de Banach formado por sequências escalares com as operações usuais de sequências, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $c_{00} \subseteq \lambda \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$.

(ii) $(e_j)_{j=1}^\infty$ é base de Schauder para λ.

(iii) $\|e_j\|_\lambda = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Definimos também

$$\lambda_* := \{(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty : \varphi \in \lambda^*\} \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{N}.$$

Exemplo 4.0.3. São exemplos de espaços de sequências escalares

(a) $\lambda = \ell_p$ com $\lambda_* = \ell_{p^*}$ para todo $1 < p < \infty$.

(b) $\lambda = c_0$ com $\lambda_* = \ell_1$.

(c) $\lambda = \ell_1$ com $\lambda_* = \ell_\infty$.

(d) $\lambda = h_M$ com $\lambda_* = \ell_{M^*}$, onde M é uma função de Orlicz tal que $M(1) = 1$.

Os itens (a), (b) e (c) são exemplos bem conhecidos da Análise Funcional. Para o caso das sequências de Orlicz, seja M uma função de Orlicz tal que $M(1) = 1$ e considere $\lambda = h_M$. A inclusão $c_{00} \subseteq h_M$ é imediata pois $M(0) = 0$. Dados $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in h_M$, $\rho > 0$ tal que $\sum\limits_{j=1}^\infty M(|\alpha_j|/\rho) \leq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$M(|\alpha_k|/\rho) \leq \sum_{j=1}^\infty M(|\alpha_j|/\rho) \leq 1 = M(1).$$

E como M é não-decrescente segue que $|\alpha_k|/\rho \leq 1$. Daí, $|\alpha_k| \leq \rho$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $\rho > 0$ com $\sum\limits_{j=1}^\infty M(|\alpha_j|/\rho) \leq 1$. Segue que $\sup\limits_k |\alpha_k| \leq \|(\alpha_j)_{j=1}^\infty\|_M$, e portanto $h_M(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$. Mostraremos agora que $\|e_j\|_M = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Do que acabamos de verificar segue que $1 = \|e_j\|_\infty \leq \|e_j\|_M$. Por outro lado, escrevendo $e_j = (e_{j,i})_{i=1}^\infty$, temos

$$\sum_{i=1}^\infty M(|e_{j,i}|/1) = M(1) = 1,$$

logo $\|e_j\|_M \leq 1$. As Proposições 1.2.9 e 1.2.10 completam o exemplo.

Proposição 4.0.4. *Se λ é um espaço de sequências escalares, então λ_* é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências, a função*

$$\|\cdot\|_{\lambda_*} \colon \lambda_* \to [0, \infty)\ ,\ \|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \|\varphi\|,$$

define uma norma em λ_* e a correspondência $\varphi \mapsto (\varphi(e_j))_{j=1}^\infty$ define um isomorfismo isométrico entre λ^* e λ_*. Em particular, λ_* é espaço de Banach.

Demonstração. Sejam $\varphi, \phi \in \lambda^*$, $x := (\varphi(e_j))_{j=1}^\infty$, $y := (\phi(e_j))_{j=1}^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por definição, $x, y \in \lambda_*$ e daí,

$$x + \alpha y = (\varphi(e_j))_{j=1}^\infty + \alpha(\phi(e_j))_{j=1}^\infty = (\varphi(e_j) + \alpha\phi(e_j))_{j=1}^\infty = ((\varphi + \alpha\phi)(e_j))_{j=1}^\infty,$$

onde $\varphi + \alpha\phi \in \lambda^*$. Logo $x + \alpha y \in \lambda_*$ e portanto λ_* é subespaço vetorial de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

Vejamos agora que os elementos de λ_* são unicamente representados por funcionais em λ^*. Sejam $(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty, (\phi(e_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*$ tais que $\varphi(e_j) = \phi(e_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(e_j)_{j=1}^\infty$ é uma base de Schauder para λ, todo elemento em λ se escreve de forma única como $\sum\limits_{j=1}^\infty \alpha_j e_j$. Da continuidade e da linearidade dos funcionais φ e ϕ obtemos

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \phi(e_j) = \phi\left(\sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j\right),$$

portanto $\varphi = \phi$. Isso prova que a função $\|\cdot\|_{\lambda_*}$ está bem definida. Mais ainda:

(i) $\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \|\varphi\| \geq 0$.

(ii) $\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = 0 \Leftrightarrow \|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(e_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\varphi(e_j))_{j=1}^\infty = 0$, onde a penúltima equivalência vem do fato de $(e_j)_{j=1}^\infty$ ser uma base de Schauder para λ.

(iii) $\left\|\alpha(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*} = \left\|((\alpha\varphi)(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*} = \|\alpha\varphi\| = |\alpha| \cdot \|\varphi\| = |\alpha| \cdot \left\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*}$.

(iv)

$$\begin{aligned}\left\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty + (\phi(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*} &= \left\|((\varphi+\phi)(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*} = \|\varphi+\phi\| \leq \|\varphi\| + \|\phi\| \\ &= \left\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*} + \left\|(\phi(e_j))_{j=1}^\infty\right\|_{\lambda_*}.\end{aligned}$$

Está provado que a função $\|\cdot\|_{\lambda_*}$ é uma norma em λ_*.

A correspondência $\varphi \mapsto (\varphi(e_j))_{j=1}^\infty$ é claramente linear e a injetividade segue do fato de $(e_j)_{j=1}^\infty$ ser uma base de Schauder para λ. A sobrejetividade e a isometria seguem diretamente das definições de λ_* e de $\|\cdot\|_{\lambda_*}$. □

Proposição 4.0.5. *Seja λ um espaço de sequências escalares.*

(i) *Todo elemento $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$ se escreve da forma $(\alpha_j)_{j=1}^\infty = \sum\limits_{j=1}^\infty \alpha_j e_j$.*

(ii) $c_{00} \subseteq \lambda_* \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$.

(iii) $\|e_j\|_{\lambda_*} = 1$ *para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (i) Sejam $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$ e $(\beta_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ a representação única de $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ com relação à base de Schauder $(e_j)_{j=1}^\infty$, isto é,

$$(\alpha_j)_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty \beta_j e_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \beta_j e_j = \lim_{n\to\infty} (\beta_j)_{j=1}^n.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\|(\alpha_j)_{j=1}^\infty - (\beta_j)_{j=1}^n\right\|_\lambda < \varepsilon.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ e considere $n_1 = \max\{k, n_0\}$ e $(\widetilde{\beta}_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ dada por

$$\widetilde{\beta}_j = \begin{cases} \beta_j & \text{se} \quad j \leq n_1 \\ 0 & \text{se} \quad j > n_1. \end{cases}$$

Daí, como $k \leq n_1$,

$$\begin{aligned}|\alpha_k - \beta_k| = |\alpha_k - \widetilde{\beta}_k| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j - \widetilde{\beta}_j| &= \|(\alpha_j - \widetilde{\beta}_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq \|(\alpha_j - \widetilde{\beta}_j)_{j=1}^\infty\|_\lambda \\ = \|(\alpha_j)_{j=1}^\infty - (\widetilde{\beta}_j)_{j=1}^\infty\|_\lambda &= \left\|(\alpha_j)_{j=1}^\infty - (\beta_j)_{j=1}^{n_1}\right\|_\lambda < \varepsilon.\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos $\alpha_k = \beta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O item (i) está provado.

Sabemos que os funcionais coeficientes $(e_j^*)_{j=1}^{\infty}$ associados à base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ de λ são todos contínuos (Teorema 1.1.17). Mostraremos primeiramente que $\|e_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do item (i) segue que

$$\left|e_n^*\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right| = \left|e_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j\right)\right| = |\alpha_n| \leq \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \leq \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda},$$

logo $\|e_n^*\| \leq 1$. Por outro lado,

$$\|e_n^*\| = \sup_{(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in B_\lambda} \left|e_n^*\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right| = \sup_{(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in B_\lambda} \left|e_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j\right)\right| = \sup_{(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in B_\lambda} |\alpha_n|.$$

Tomando $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} = e_n \in B_\lambda$ segue que $\|e_n^*\| \geq 1$. Portanto $\|e_n^*\| = 1$.

(ii) Vejamos agora que $c_{00} \subseteq \lambda_*$. Tome $n \in \mathbb{N}$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}$. Vimos que os funcionais $e_1^*, \ldots, e_n^*$ são todos contínuos com norma 1. Considerando $\varphi := \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j^*$, temos

$$\varphi \in \lambda^* \quad \text{ e } \quad \varphi(e_i) = \begin{cases} \alpha_i & \text{se} \quad i \leq n \\ 0 & \text{se} \quad i > n. \end{cases}$$

Portanto $(\alpha_j)_{j=1}^{n} = (\varphi(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*$. Tome agora $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*$. Por definição, existe $\varphi \in \lambda^*$ tal que $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} = (\varphi(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} &= \|(\varphi(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \|\varphi\| \\ &= \sup_{(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in B_\lambda} \left|\varphi\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right| \geq |\varphi(e_n)| = |\alpha_n| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \leq \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*}$. Concluímos então que $\lambda_* \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$.

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $e_n = (e_n^*(e_j))_{j=1}^{\infty}$ com

$$\|e_n\|_{\lambda_*} = \|\left(e_n^*(e_j)\right)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \|e_n^*\| = 1.$$

$\square$

4.1 Classes de sequências ideal-representáveis

A definição a seguir formaliza o que dissemos sobre uma classe de sequências ser representada por um ideal de operadores e o principal resultado desta seção é o Teorema 4.1.10.

Definição 4.1.1. Dizemos que uma classe de sequências X é *ideal-representável* se existir um espaço de sequências escalares λ e um ideal de Banach $\mathcal{I}$ de modo que, para cada espaço de Banach E, o operador

$$\Psi\colon \mathcal{I}(\lambda; E) \longrightarrow X(E), \;\; \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido e é um isomorfismo isométrico. Neste caso, denotaremos este fato pelo símbolo $\mathcal{I}(\lambda, \cdot) \approx X$ e dizemos que X é $(\mathcal{I}, \lambda)$-representável ou $\mathcal{I}$-representável ou que o ideal $\mathcal{I}$ representa X.

Com relação à Definição 4.1.1, observamos:

• O operador Ψ está sempre relacionado a um espaço de Banach E, mas por simplicidade de notação usaremos apenas Ψ.

• Fixado um espaço E, usaremos a notação $\mathcal{I}(\lambda; E) \approx X(E)$ quando as componentes $\mathcal{I}(\lambda; E)$ e $X(E)$ forem isomorfas isometricamente por meio da correspondência $u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Dessa forma, $\mathcal{I}(\lambda, \cdot) \approx X$ se, e somente se, $\mathcal{I}(\lambda; E) \approx X(E)$ para todo espaço de Banach E.

• A linearidade do operador Ψ é sempre verificada quando esta estiver bem definida. Neste caso, verifica-se também a injetividade pois $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para λ e os operadores do domínio de Ψ são todos contínuos. Em resumo, uma vez provada a boa definição de Ψ, sua linearidade e sua injetividade são automáticas.

Exemplo 4.1.2. Seja $1 < p < \infty$. De acordo com o Exemplo 4.0.1, as classes de sequências ℓ_p^w, ℓ_1^w, $\ell_\infty(\cdot)$, ℓ_p^u, ℓ_1^u e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ são todas ideal-representáveis. E, para cada uma dessas classes, no exemplo está dito qual é o ideal que representa a classe.

Provaremos agora algumas propriedades de classes ideal-representáveis que, num curto prazo, nos servirão para exibir alguns exemplos de classes que não são ideal-representáveis.

Lema 4.1.3. *Sejam E, F espaços de Banach, $\varphi \in E^*$ e $y \in F$. Considere o operador de posto finito $\varphi \otimes y \colon E \longrightarrow F$ dado por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$. Para cada ideal de operadores quasi-normado $\mathcal{I}$, vale que $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E; F)$ e $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$. Em particular, tomando $F = \mathbb{K}$ e $y = 1$ tem-se $\mathcal{I}(E; \mathbb{K}) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$.*

Demonstração. Sabemos que operadores de tipo finito são contínuos e, neste caso particular, $\|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\| \cdot \|y\|$. Além disso, ideais de operadores contém operadores de posto finito por definição. Também sabemos do Lema 1.3.2 que

$$\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} \geq \|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\| \cdot \|y\|.$$

Para mostrar a desigualdade contrária, considere o operador $\phi \colon \mathbb{K} \longrightarrow F$ dado por $\phi(\alpha) = \alpha \cdot y$, o qual é linear contínuo com $\|\phi\| = \|y\|$. Temos então $\varphi \otimes y = \phi \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$, e da propriedade de ideal segue que

$$\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\phi \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|\phi\| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|\varphi\| = \|y\| \cdot \|\varphi\|.$$

□

Proposição 4.1.4. *Seja X uma classe de sequências $(\mathcal{I}, \lambda)$-representável. Então X é linearmente estável e $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_* \overset{1}{=} \lambda^*$. Em particular, se X é ideal-representável, então $X(\mathbb{K})$ é um espaço dual.*

Demonstração. Note que a última igualdade isométrica do enunciado foi provada na Proposição 4.0.4. Sejam E, F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Da sobrejetividade de Ψ existe $u_x \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ tal que $(u_x(e_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Como X é $\mathcal{I}$-representável então $u \circ u_x \in \mathcal{I}(\lambda; F)$ e, da propriedade de ideal,

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} = (u \circ u_x(e_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F).$$

Isso prova que $\Pi_{X;X}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$. Para a igualdade das normas,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X;X} &= \sup_{x=(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(F)} = \sup_{x \in B_{X(E)}} \|(u \circ u_x(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(F)} \\
&= \sup_{x \in B_{X(E)}} \|u \circ u_x\|_{\mathcal{I}} \leq \sup_{x \in B_{X(E)}} \|u\| \cdot \|u_x\|_{\mathcal{I}} \\
&= \|u\| \cdot \sup_{x \in B_{X(E)}} \|(u_x(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|u\| \cdot \sup_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|u\|.
\end{aligned}$$

Antes de mostrar a desigualdade contrária, vejamos primeiramente que

$$\|(x, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} \leq \|x\|,$$

para todo $x \in E$ (a igualdade é conhecida para classes linearmente estáveis, mas estamos exatamente provando que X é linearmente estável). Note que $(x, 0, 0, \ldots) \in c_{00}(E) \subseteq X(E)$. Como X é $\mathcal{I}$-representável, existe $u_x \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ de modo que

$$u_x(e_j) = \begin{cases} x & \text{se} \quad j = 1 \\ 0 & \text{se} \quad j > 1, \end{cases}$$

e $\|(x, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} = \|u_x\|_{\mathcal{I}}$. Considere os seguintes operadores lineares

$$\varphi\colon \lambda \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \varphi((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) := \beta_1, \quad \text{e} \quad \phi\colon \mathbb{K} \longrightarrow E\ ,\ \phi(\alpha) := \alpha x.$$

De

$$|\varphi((\beta_j)_{j=1}^{\infty})| = |\beta_1| \leq \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \leq \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda} \quad \text{e}$$
$$\|\phi(\alpha)\| = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

temos $\|\varphi\| \leq 1$ e $\|\phi\| = \|x\|$. Mais ainda,

$$(\phi \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi)((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\phi \circ Id_{\mathbb{K}})(\beta_1) = \phi(\beta_1) = \beta_1 x = u_x((\beta_j)_{j=1}^{\infty}),$$

ou seja, $u_x = \phi \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Daí,

$$\|(x, 0, 0, \ldots)\|_{X(E)} = \|u_x\|_{\mathcal{I}} = \|\phi \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|\phi\| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|\varphi\| \leq \|x\|$$

e então, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|u(x)\| = \|(u(x),0,0,\ldots)\|_\infty &\leq \|(u(x),0,0,\ldots)\|_{X(F)} \\ &\leq \|u\|_{X;X}\|(x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} \leq \|u\|_{X;X}\|x\|,\end{aligned}$$

o que prova que $\|u\| \leq \|u\|_{X;X}$ e estabelece a estabilidade linear de X.

Por último, como X é $(\mathcal{I},\lambda)$-representável, os espaços $\mathcal{I}(\lambda;E)$ e $X(E)$ são isomorfos isometricamente, via $u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^\infty$, para todo espaço de Banach E. Em particular, tomando $E = \mathbb{K}$ e usando o Lema 4.1.3,

$$\begin{aligned}X(\mathbb{K}) = \Psi\left(\mathcal{I}(\lambda;\mathbb{K})\right) &= \left\{(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty : \varphi \in \mathcal{I}(\lambda;\mathbb{K})\right\} = \left\{(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty : \varphi \in \mathcal{L}(\lambda;\mathbb{K})\right\} \\ &= \left\{(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty : \varphi \in \lambda^*\right\} = \lambda_*.\end{aligned}$$

Para a igualdade de normas,

$$\|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(\mathbb{K})} = \|\varphi\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| = \|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*}.$$

□

Exemplo 4.1.5. Como consequência da Proposição 4.1.4, as classes $c_0(\cdot)$ e c_0^w são exemplos de classes que não são ideal-representáveis pois, conforme já mencionado antes, $c_0 = c_0(\mathbb{K}) = c_0^w(\mathbb{K})$ não admite pré-dual.

Precisamos de mais um ingrediente, uma desigualdade Do Tipo Hölder, para a construção do ideal que representa uma classe representável.

Lema 4.1.6. *Seja λ um espaço de sequências escalares. Se $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$ e $(\beta_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*$, então a série $\sum\limits_{j=1}^\infty \alpha_j\beta_j$ é convergente e*

$$\left|\sum_{j=1}^\infty \alpha_j\beta_j\right| \leq \|(\alpha_j)_{j=1}^\infty\|_\lambda \cdot \|(\beta_j)_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*}.$$

Em particular, $\left|\sum\limits_{j=n}^m \alpha_j\beta_j\right| \leq \left\|\sum\limits_{j=n}^m \alpha_j e_j\right\|_\lambda \cdot \|(\beta_j)_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*}$ para todos $m,n \in \mathbb{N}, m > n$.

Demonstração. Como $(\beta_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*$, podemos então, tomar um funcional $\varphi \in \lambda^*$ tal que $(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty = (\beta_j)_{j=1}^\infty$ e $\|\varphi\| = \|(\beta_j)_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*}$. Como $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$, da Proposição 4.0.5(i) e da continuidade do funcional φ, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi\left((\alpha_j)_{j=1}^\infty\right) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j\right) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\varphi\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k \alpha_j\varphi(e_j) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k \alpha_j\beta_j.\end{aligned}$$

Isso prova a convergência da série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\beta_j$. Além disso,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\beta_j\right| = \left|\varphi\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right| \le \|\varphi\| \cdot \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_\lambda = \|(\beta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} \cdot \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_\lambda.$$

Dados $m > n \in \mathbb{N}$, basta considerar $(\widetilde{\alpha}_j)_{j=1}^{\infty}$ dada por $\widetilde{\alpha}_j = \alpha_j$ se $n \le j \le m$ e $\widetilde{\alpha}_j = 0$ se $j \notin \{n, \ldots, m\}$, e aplicar a desigualdade que acabamos de demonstrar. $\square$

Proposição 4.1.7. *Seja λ um espaço de sequências escalares. Para cada espaço de Banach E, definimos*

$$\lambda_*^w(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \lambda_* \text{ para todo } \varphi \in E^*\right\}.$$

Então:

(i) $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} := \sup\limits_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} < +\infty$ *para toda* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*^w(E)$.

(ii) $\lambda_*^w(E)$ *é subespaço vetorial de* $E^{\mathbb{N}}$ *no qual a função* $\|\cdot\|_{w,\lambda_*} \colon \lambda_*^w(E) \longrightarrow [0,\infty)$ *define uma norma.*

(iii) *O operador*

$$\Psi \colon \mathcal{L}(\lambda; E) \longrightarrow \lambda_*^w(E)\ ,\ \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido e é um isomorfismo isométrico. Em particular, $(\lambda_*^w(E), \|\cdot\|_{w,\lambda_*})$ *é espaço de Banach.*

(iv) *A regra* $E \mapsto \lambda_*^w(E)$ *define uma classe de sequências* $(\mathcal{L}, \lambda)$*-representável satisfazendo* $\lambda_*^w(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. *Em particular, a classe* λ_*^w *é linearmente estável.*

(v) *Se* X *é uma classe de sequências linearmente estável com* $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$, *então* $X \overset{1}{\hookrightarrow} \lambda_*^w$.

(vi) *Suponha que* λ_* *tenha a seguinte propriedade: Para cada* $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*$ *se, e somente se,* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(\alpha_j)_{j=1}^{n}\|_{\lambda_*} < +\infty$ *e, neste caso,* $\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(\alpha_j)_{j=1}^{n}\|_{\lambda_*}$. *Então a classe* λ_*^w *é finitamente determinada.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach qualquer, $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*^w(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Para cada $\varphi \in E^*$,

$$(\varphi(x_j + \alpha y_j))_{j=1}^{\infty} = (\varphi(x_j) + \alpha\varphi(y_j))_{j=1}^{\infty} = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} + \alpha\,(\varphi(y_j))_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*,$$

provando que $\lambda_*^w(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$.

(i) Considere o operador $u \colon E^* \longrightarrow \lambda_*$ dado por $u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Da definição de $\lambda_*^w(E)$ segue que u está bem definido e é claramente linear. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E^*$ com

$\varphi_j \xrightarrow{j} \varphi \in$ em E^* e suponha que $u(\varphi_j) \xrightarrow{j} (\alpha_i)_{i=1}^\infty$ em λ_*. Vimos na Proposição 4.0.5(ii) que $\lambda_* \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x_k) - \alpha_k| &\leq \|(\varphi_j(x_i) - \alpha_i)_{i=1}^\infty\|_\infty \leq \|(\varphi_j(x_i) - \alpha_i)_{i=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &= \|(\varphi_j(x_i))_{i=1}^\infty - (\alpha_i)_{i=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \|u(\varphi_j) - (\alpha_i)_{i=1}^\infty\|_{\lambda_*} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

provando que $\varphi_j(x_k) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_k$. Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_j(x_k) - \varphi(x_k)\| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \cdot \|x_k\| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova que $\varphi_j(x_k) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x_k)$. Pela unicidade do limite segue que $\varphi(x_k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto $(\alpha_i)_{i=1}^\infty = (\varphi(x_i))_{i=1}^\infty = u(\varphi)$. Pelo Teorema 1.1.9 concluímos que u é contínuo. Neste caso,

$$\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|u(\varphi)\|_{\lambda_*} = \|u\| < +\infty.$$

(ii) Verifiquemos os axiomas de norma:

- $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = \sup\limits_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_i))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \geq 0.$
- Aplicando o Teorema de Hahn-Banach na forma do Corolário 1.1.6,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = 0 &\Leftrightarrow \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = 0 \; \forall \varphi \in B_{E^*} \Leftrightarrow (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = 0 \; \forall \varphi \in B_{E^*} \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_j) = 0 \; \forall \varphi \in B_{E^*} \; \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_j = 0 \; \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty = 0. \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \left\|\alpha(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,\lambda_*} &= \left\|(\alpha x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(\alpha x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|\alpha \cdot (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\alpha| \cdot \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &= |\alpha| \cdot \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = |\alpha| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*}. \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \left\|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,\lambda_*} &= \left\|(x_j + y_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j + y_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty + (\varphi(y_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} + \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(y_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*}. \end{aligned}$$

(iii) Dados $u \in \mathcal{L}(\lambda; E)$ e $\varphi \in E^*$, temos $\varphi \circ u \in \mathcal{L}(\lambda; \mathbb{K}) = \lambda^*$. Da definição de λ_*,

$$(\varphi(u(e_j)))_{j=1}^\infty = (\varphi \circ u(e_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*,$$

logo $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*^w(E)$ e o operador Ψ está bem definido. Dados $u, v \in \mathcal{L}(\lambda; E)$,

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha u + v) &= ((\alpha u + v)(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((\alpha u(e_j) + v(e_j))_{j=1}^{\infty} \\ &= \alpha(u(e_j))_{j=1}^{\infty} + (v(e_j))_{j=1}^{\infty} = \alpha\Psi(u) + \Psi(v),\end{aligned}$$

logo Ψ é linear. Temos também,

$$\begin{aligned}\|\Psi(u)\|_{w,\lambda_*} &= \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(u(e_j)))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi \circ u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|\varphi \circ u\| \leq \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|\varphi\| \cdot \|u\| = \|u\|,\end{aligned}$$

o que prova a continuidade de Ψ. Mais ainda, como o operador u é contínuo e $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para λ, $u = 0 \Leftrightarrow u(e_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Disso segue que

$$\Psi(u) = 0 \Leftrightarrow (u(e_j))_{j=1}^{\infty} = 0 \Leftrightarrow u(e_j) = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u = 0.$$

Isso mostra que Ψ é injetora. Resta mostrar a sobrejetividade e a desigualdade $\|u\| \leq \|\Psi(u)\|_{w,\lambda_*}$. Considere o operador

$$u \colon \lambda \longrightarrow E \ , \ u((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j.$$

Vejamos que u está bem definido. Dado $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda$, como $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é base de Schauder para λ, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ é convergente em λ e portanto dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|_{\lambda} < \frac{\varepsilon}{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}}.$$

Aplicando o Lema 4.1.6, obtemos

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j x_j \right\| &= \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|_{\lambda} \cdot \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} \\ &= \left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|_{\lambda} \cdot \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|_{\lambda} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} < \varepsilon\end{aligned}$$

para todos $m > n \geq n_0$. O Critério de Cauchy garante que a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$ é convergente, o que significa que o operador u está bem definido. O operador u é linear, já que

$$\begin{aligned}u(\beta(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} + (\theta_j)_{j=1}^{\infty}) &= u((\beta\alpha_j + \theta_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\alpha_j + \theta_j) x_j \\ &= \beta \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j x_j = \beta \cdot u((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}) + u((\theta_j)_{j=1}^{\infty}),\end{aligned}$$

e também $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Aplicando novamente o Lema 4.1.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|u((\alpha_j)_{j=1}^{\infty})\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j\right\| = \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\varphi(x_j)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda}\cdot\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} \\
&= \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda}\cdot\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} = \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda}\cdot\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}.
\end{aligned}$$

Provamos que u é contínuo com $\|u\| \leq \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} = \|\Psi(u)\|_{w,\lambda_*}$. Com isso, concluímos que Ψ é um isomorfismo isométrico.

(iv) Sejam $n\in\mathbb{N}$, $z_1,\ldots,z_n\in E$ e $\varphi\in E^*$. Relembre da Proposição 4.0.5(ii) que $c_{00}\subseteq\lambda_*\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty$. Logo $(\varphi(z_j))_{j=1}^{n}\in\lambda_*$, e portanto $c_{00}(E)\subseteq\lambda_*^w(E)$. Por outro lado, como $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\in\lambda_*$,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|\varphi(x_k)| \leq \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*}.$$

Segue que, para todo $k\in\mathbb{N}$, usando o Teorema de Hahn-Banach na forma do Corolário 1.1.6,

$$\|x_k\| = \sup_{\varphi\in B_{E^*}}|\varphi(x_k)| \leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sup_{j\in\mathbb{N}}|\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}.$$

Tomando o supremo sobre $k\in\mathbb{N}$ obtemos $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}\leq\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}$, o que nos permite concluir que $\lambda_*^w(E)\overset{1}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E)$.

Combinando o isomorfismo obtido no item (iii) com o isomorfismo da Proposição 4.0.4, obtemos $\lambda_*^w(\mathbb{K})\overset{1}{=}\lambda_*$. Portanto,

$$\|e_j\|_{w,\lambda_*} = \|e_j\|_{\lambda_*} = 1$$

para todo $j\in\mathbb{N}$, onde a última igualdade vem da Proposição 4.0.5(iii). Aplicando novamente o item (iii) segue que a regra $E\mapsto\lambda_*^w(E)$ define uma classe de sequências $(\mathcal{L},\lambda)$-representável. Da Proposição 4.1.4 segue que λ_*^w é linearmente estável.

(v) Seja X linearmente estável com $X(\mathbb{K})\overset{1}{=}\lambda_*$. Dados $(z_j)_{j=1}^{\infty}\in X(E)$ e $\varphi\in E^*$, segue da estabilidade linear de X que $(\varphi(z_j))_{j=1}^{\infty}\in X(\mathbb{K})=\lambda_*$, logo $(z_j)_{j=1}^{\infty}\in\lambda_*^w(E)$. Além disso,

$$\|(\varphi(z_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \|(\varphi(z_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(\mathbb{K})} \leq \|\varphi\|_{X;X}\cdot\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|\varphi\|\cdot\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$$

e tomando o supremo sobre os funcionais $\varphi\in B_{E^*}$ obtemos $\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}\leq\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$.

(vi) Para cada $n\in\mathbb{N}$, usando a propriedade que λ_* goza neste item,

$$\|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{n}\|_{\lambda_*} \leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\lambda_*} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*}.$$

Logo $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} < +\infty$. Por outro lado, tome $(z_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(z_j)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*} < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\phi \in E^*$,

$$\|(\phi(z_j))_{j=1}^n\|_{\lambda_*} = \|\phi\| \cdot \left\| \left(\frac{\phi}{\|\phi\|}(z_j) \right)_{j=1}^n \right\|_{\lambda_*} \leq \|\phi\| \cdot \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \|(\varphi(z_j))_{j=1}^n\|_{\lambda_*} = \|\phi\| \cdot \|(z_j)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*}.$$

Segue que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\phi(z_j))_{j=1}^n\|_{\lambda_*} < +\infty$. Usando mais uma vez a hipótese sobre λ_*, temos $(\phi(z_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*$, e portanto $(z_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(E)$. Disso segue que

$$\begin{aligned}\|(z_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} &= \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \|(\varphi(z_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\varphi(z_j))_{j=1}^n\|_{\lambda_*} \\ &\leq \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi\| \cdot \|(z_j)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(z_j)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*},\end{aligned}$$

provando que a classe λ_*^w é finitamente determinada. □

Exemplo 4.1.8. Segue como caso particular da Proposição 4.1.7, tomando $\lambda = h_M$ onde M é uma função de Orlicz tal que $M(1) = 1$, que a correspondência

$$E \mapsto \ell_{M^*}^w(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{M^*} \text{ para todo } \varphi \in E^*\right\},$$

é uma classe de sequências linearmente estável e $\mathcal{L}$-representável, isto é, $\mathcal{L}(h_M, \cdot) \approx \ell_{M^*}^w$.

Estudaremos agora o ideal de operadores que, conforme provaremos adiante, é universal para representação de classes de sequências, no sentido de que se uma classe for ideal-representável, então este é um ideal que a representa.

Proposição 4.1.9. *Sejam λ um espaço de sequências escalares e X uma classe de sequências linearmente estável com $X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$. Então $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é um ideal de Banach e, para todo espaço de Banach F, o operador*

$$\Psi \colon \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; F) \longrightarrow X(F)\ ,\ \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^\infty,$$

está bem definido, é linear, injetor e contínuo com $\|\Psi\| \leq 1$.

Demonstração. As classes X e λ_*^w são linearmente estáveis pela Proposição 4.1.7(iv) com $\lambda_*^w(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_* \stackrel{1}{=} X(\mathbb{K})$, portanto o Teorema 1.5.8 garante que $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é um ideal de Banach. Sejam F um espaço de Banach e $u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; F)$. Para provar que $(u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(F)$, basta mostrar que $(e_j)_{j=1}^\infty$ está em $\lambda_*^w(\lambda)$; ou seja, se $\varphi \in \lambda^*$, então $(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*$. Por definição, $\lambda_* = \{(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty : \varphi \in \lambda^*\}$, logo $(e_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(\lambda)$. E também,

$$\|(e_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\varphi\in B_{\lambda^*}} \|(\varphi(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\lambda_*} = \sup_{\varphi\in B_{\lambda^*}} \|\varphi\| = 1.$$

A linearidade e a injetividade de Ψ são óbvias pois é a restrição de um operador que já provamos ser linear e injetor. Daí,

$$\|\Psi(u)\|_{X(F)} = \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(F)} \leq \|u\|_{\lambda_*^w;X} \cdot \|(e_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = \|u\|_{\lambda_*^w;X},$$

o que prova que $\|\Psi\| \leq 1$. □

Temos agora todos os preparativos necessários para enunciar o principal resultado deste capítulo. O teorema a seguir caracteriza classes de sequências que são ideal-representáveis, fornece um método direto para determinar se a classe é ideal-representável e, por fim, exibe um ideal que a representa.

Teorema 4.1.10. *Sejam X uma classe de sequências linearmente estável e λ um espaço de sequências escalares tal que $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. São equivalentes:*

(i) *X é ideal-representável.*

(ii) *Se E é um espaço de Banach, $v \in \mathcal{L}(\lambda;\lambda)$ e $u \in \mathcal{L}(\lambda;E)$ com $(u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$, então*

$$(u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E) \quad e \quad \|(u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \leq \|v\| \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

(iii) *Existe um espaço de sequências escalares λ tal que $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$ e para todo espaço de Banach E, dados $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(\lambda)$ tem-se*

$$\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^\infty \in X(E) \text{ e}$$

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)} \leq \left\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty\right\|_{w,\lambda_*} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

(iv) *X é $\Pi_{\lambda_*^w;X}$-representável.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach qualquer.

(i)$\Rightarrow$ (ii) Suponha que X seja $(\mathcal{I},\lambda)$-representável. Segue da Proposição 4.1.4 que $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. Sejam $v \in \mathcal{L}(\lambda;\lambda)$ e $u \in \mathcal{L}(\lambda;E)$ tais que $(u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$. Como $\mathcal{I}(\lambda,\cdot) \approx X$ e $(u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$, temos $u \in \mathcal{I}(\lambda;E)$. Da propriedade de ideal segue que $u \circ v \in \mathcal{I}(\lambda;E)$. Usando novamente a identificação $\mathcal{I}(\lambda,\cdot) \approx X$, temos $(u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$ e, além disso,

$$\|(u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|u \circ v\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} = \|v\| \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) e (ii) $\Rightarrow$ (iv) Suponha que a classe X satisfaz o item (ii). Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(\lambda)$. Como X é linearmente estável e $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$, segue da Proposição 4.1.7(v) que $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \lambda_*^w(E)$. E, pelo item (iii) dessa mesma proposição, existem $u \in \mathcal{L}(\lambda;E)$ e $v \in \mathcal{L}(\lambda;\lambda)$ tais que $(u(e_j))_{j=1}^\infty = (x_j)_{j=1}^\infty$ e $(v(e_j))_{j=1}^\infty = ((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty$. Daí,

$$\begin{aligned}(u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty &= (u\,(v(e_j)))_{j=1}^\infty = (u\,((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty))_{j=1}^\infty \\ &= \left(u\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}e_i\right)\right)_{j=1}^\infty = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}u(e_i)\right)_{j=1}^\infty = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^\infty.\end{aligned}$$

Segue da hipótese dada que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty} = (u \circ v(e_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} &= \|(u \circ v(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq \|v\| \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \\ &= \left\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}.\end{aligned}$$

Isso prova (iii).

Pela Proposição 4.1.9 sabemos que $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é um ideal de Banach e que o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E) \longrightarrow X(E)\ ,\ \ \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

é linear, injetor e contínuo com $\|\Psi(u)\| = \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq \|u\|_{\lambda_*^w;X}$. Por outro lado, vimos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \lambda_*^w(E)$ e que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ para algum $u \in \mathcal{L}(\lambda; E)$. Devemos mostrar que $u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E)$. Para isso tome $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*^w(\lambda)$. Usando novamente a Proposição 4.1.7, podemos considerar o operador $v \in \mathcal{L}(\lambda; \lambda)$ dado por $(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$. Usando novamente que a classe X satisfaz o item (ii), temos

$$(u(\alpha_j))_{j=1}^{\infty} = (u \circ v(e_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E),$$

o que implica que $u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E)$ e

$$\begin{aligned}\|(u(\alpha_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} &= \|(u \circ v(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq \|v\| \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \\ &= \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}.\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\lambda_*^w(\lambda)}$ obtemos

$$\|u\|_{\lambda_*^w;X} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$$

e concluímos assim que Ψ é isomorfismo isométrico. Como começamos com um espaço de Banach E qualquer, segue que X é $\Pi_{\lambda_*^w;X}$-representável e está provado (iv).

(iv)$\Rightarrow$ (i) Essa implicação é imediata.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sejam $v \in \mathcal{L}(\lambda; \lambda)$ e $u \in \mathcal{L}(\lambda; E)$ com $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Pela Proposição 4.1.7(iii) temos $(v(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \lambda_*^w(\lambda)$ com $\|(v(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} = \|v\|$. Digamos $(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}$. Por hipótese,

$$(u \circ v(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}))_{j=1}^{\infty} = \left(u\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} e_i\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} u(e_i)\right)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$$

e

$$\|(u\circ v(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}u(e_i)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \leq \left\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,\lambda_*} \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$$
$$= \left\|(v(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|v\| \cdot \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}.$$

□

Vejamos algumas aplicações imediatas do teorema acima.

Exemplo 4.1.11. Sejam $1 < p < \infty$ e M uma função de Orlicz tal que $M(1) = 1$. As seguintes representações seguem dos Exemplos 4.1.2, 4.1.8 e do Teorema 4.1.10:

(i) $\Pi_{\ell_{M^*}^w;\ell_{M^*}^w}(h_M,\cdot) \approx \ell_{M^*}^w$.

(ii) $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p^w}(\ell_{p^*},\cdot) \approx \ell_p^w$.

(iii) $\Pi_{\ell_1^w;\ell_1^w}(c_0,\cdot) \approx \ell_1^w$.

(iv) $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(\ell_{p^*},\cdot) \approx \ell_p^u$ e, portanto, $\mathcal{K}(\ell_{p^*},\cdot) \stackrel{1}{=} \Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(\ell_{p^*},\cdot)$.

(v) $\Pi_{\ell_1^w;\ell_1^u}(c_0,\cdot) \approx \ell_1^u$ e, portanto, $\mathcal{K}(c_0,\cdot) \stackrel{1}{=} \Pi_{\ell_1^w;\ell_1^u}(c_0,\cdot)$.

(vi) $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p\langle\cdot\rangle}(\ell_{p^*},\cdot) \approx \ell_p\langle\cdot\rangle$ e, portanto, $\mathcal{N}(\ell_{p^*},\cdot) \stackrel{1}{=} \Pi_{\ell_p^w;\ell_p\langle\cdot\rangle}(\ell_{p^*},\cdot)$.

As representações dos itens (i), (ii) e (iii) são triviais no sentido de que $\Pi_{\ell_{M^*}^w;\ell_{M^*}^w} = \Pi_{\ell_p^w;\ell_p^w} = \Pi_{\ell_1^w;\ell_1^w} = \mathcal{L}$, igualdades essas que seguem da estabilidade linear das classes $\ell_{M^*}^w$, ℓ_p^w e ℓ_1^w.

As representações do exemplo acima ou são conhecidas ou são esperadas. Vejamos agora algumas consequências inesperadas do Teorema 4.1.10. Alguns casos serão chamados de corolário e outros de exemplo, mas todos são consequências, nem sempre diretas, do Teorema 4.1.10. Começaremos usando o teorema para provar que as classes Rad, RAD e $\ell_p(\cdot)$, $1 < p < \infty$, não podem ser representadas por nenhum ideal de Banach.

Para o caso de Rad precisaremos de um conceito bem conhecido e de um resultado já provado. Um espaço de Banach E tem *cotipo* p, $2 \leq p < \infty$, se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vale a seguinte equivalência: E tem cotipo p se, e somente se, $\text{Rad}(E) \subseteq \ell_p(E)$ (veja [26, Proposition 12.4]). Se E tem algum cotipo $p \in [2, +\infty)$, diz-se que E tem *cotipo finito*.

Relembre do Capítulo 1 que um operador que pertence ao ideal $\Pi_{\ell_2^w;\text{Rad}}$ é chamado de quase-somante.

Proposição 4.1.12. [40, Proposition 2] *Sejam E um espaço de Banach, H um espaço de Hilbert e $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de H. São equivalentes:*

(i) *E tem cotipo finito.*

(ii) *Para $u \in \mathcal{L}(H; E)$, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j u(h_j)$ converge quase-sempre em E se, e somente se, u é quase-somante.*

Corolário 4.1.13. *A classe de sequências* Rad *não é ideal-representável.*

Demonstração. Seja E um espaço que não tem cotipo finito, por exemplo, $E = c_0$. Aplicando o Teorema 4.1.12 para $H = \ell_2$ e $(h_j)_{j=1}^{\infty} = (e_j)_{j=1}^{\infty}$, existe um operador $u \in \mathcal{L}(\ell_2, E)$ para o qual não vale a equivalência:

$$\text{A série } \sum_{j=1}^{\infty} r_j u(e_j) \text{ converge quase-sempre em } E \Longleftrightarrow u \text{ é quase-somante.}$$

Traduzindo os termos para a nossa linguagem de espaços de sequências, não vale a equivalência

$$(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E) \Longleftrightarrow u \in \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E).$$

Como $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^w(\ell_2)$, a implicação $(\Longleftarrow)$ acima é verdadeira, logo é a implicação $(\Longrightarrow)$ que falha. Temos então $u \in \mathcal{L}(\ell_2, E)$ tal que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$ e $u \notin \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2, E)$.

Suponha que Rad seja ideal-representável. Como $\mathrm{Rad}(\mathbb{K}) = \ell_2$, pelo Teorema 4.1.10, o ideal $\Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}$ a representa, isto é, o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E) \longrightarrow \mathrm{Rad}(E)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

é um isomorfismo isométrico, em particular é sobrejetor. Como $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$, existe $v \in \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E)$ tal que

$$(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = \Psi(v) = (v(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

onde a última igualdade vem da definição de Ψ. Segue que $u(e_j) = v(e_j)$ para todo j. O fato de $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ser uma base de Schauder para ℓ_2 implica que $u = v \in \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E)$. Isso é um absurdo pois $u \notin \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E)$. Está provado que Rad não é ideal-representável. □

Para o caso de RAD, precisaremos do lema a seguir, que, apesar de sua demonstração ser simples, é bastante útil quando queremos mostrar que uma determinada classe não é ideal-representável.

Lema 4.1.14. *Sejam X e Y classes de sequências e λ um espaço de sequências escalares tais que $X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} Y(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$. Suponha que exista um espaço de Banach E tal que $X(E) = Y(E)$ e*

$$\Psi\colon \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E) \longrightarrow X(E)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

não é sobrejetor. Então Y não é ideal-representável.

Demonstração. Suponha que Y seja ideal-representável e seja E como no enunciado. Como $Y(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$, $\Pi_{\lambda_*^w;Y}$ é um ideal de Banach e $X(E) = Y(E)$, segue que $\Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E) = \Pi_{\lambda_*^w;Y}(\lambda; E)$. Como Y é $\Pi_{\lambda_*^w;Y}$-representável, pelo Teorema 4.1.10, o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\lambda_*^w;Y}(\lambda; F) \longrightarrow Y(F)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

é sobrejetor para todo F. Tomando $F = E$ obtemos uma contradição pois, por hipótese, o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda; E) = \Pi_{\lambda_*^w;Y}(\lambda; E) \longrightarrow Y(E) = X(E)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

não é sobrejetor. Está provado que Y não é ideal-representável. $\square$

Corolário 4.1.15. *A classe* RAD *não é ideal-representável.*

Demonstração. Temos $\mathrm{Rad}(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \mathrm{RAD}(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \ell_2$ e, conforme provado no Corolário 4.1.13, o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}(\ell_2; E) \to \mathrm{Rad}(E),\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

não é sobrejetor para todo espaço de Banach E que não tem cotipo finito. Vejamos que existem espaços de Banach E que não têm cotipo finito e tais que $\mathrm{Rad}(E) = \mathrm{RAD}(E)$. Por um lado, $\mathrm{Rad}(E) = \mathrm{RAD}(E)$ se, e somente se, E não contém subespaço isomorfo a c_0 (veja [51, Theorem 6.1]). Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $1 < p < \infty$ tais que $n < p$, o espaço de Banach $\mathcal{L}(^n\ell_p)$ é reflexivo, em particular não contém subespaço isomorfo a c_0 (veja [1, Proposition 4.1]). Mais ainda, o espaço $\mathcal{L}(^n\ell_p)$ não tem cotipo finito para todo $n \geq 2$ (veja [5, Proposition 1.4]). Assim, fixando $n \geq 2$ e $p > n$, o espaço $\mathcal{L}(^n\ell_p)$ não tem cotipo finito e $\mathrm{Rad}(\mathcal{L}(^n\ell_p)) = \mathrm{RAD}(\mathcal{L}(^n\ell_p))$. Assim, o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\ell_2^w;\mathrm{Rad}}\left(\ell_2; \mathcal{L}(^n\ell_p)\right) \longrightarrow \mathrm{Rad}\left(\mathcal{L}(^n\ell_p)\right)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

não é sobrejetor e $\mathrm{Rad}\left(\mathcal{L}(^n\ell_p)\right) = \mathrm{RAD}\left(\mathcal{L}(^n\ell_p)\right)$. Segue do Lema 4.1.14 que a classe de sequências RAD não é ideal-representável. $\square$

Para a classe $\ell_p(\cdot)$ também precisaremos de um conceito já estudado e de um resultado conhecido. Seja $1 \leq p < \infty$. De acordo com [35, 50], um espaço de Banach E é de tipo QS_p se E é isomorfo a um quociente de um subespaço de algum espaço L_p. O espaço E é de tipo SQ_p se E é isomorfo a um subespaço de um quociente de algum espaço L_p. Relembre que Π_p denota o ideal dos operadores absolutamente p-somantes, isto é, $\Pi_p = \Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)}$.

Teorema 4.1.16. [50, Theorem 3.1] *Para $1 < p < \infty$ e E um espaço de Banach, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *E é de tipo QS_p.*

(ii) *E é de tipo SQ_p.*

(iii) *Para $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}; E)$, $u \in \Pi_p(\ell_{p^*}; E)$ se, e somente se, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|u(e_j)\|^p < +\infty$.*

Corolário 4.1.17. *Para $1 < p < \infty$, a classe de sequências $\ell_p(\cdot)$ não é ideal-representável.*

Demonstração. Como $1 < p < \infty$, todo espaço L_p é reflexivo. Como subespaço de espaço reflexivo é reflexivo [37, Theorem 1.11.16] e, também, quociente de espaço reflexivo é reflexivo [37, Corollary 1.11.18], segue que todo espaço de tipo QS_p é reflexivo. Seja E um espaço não reflexivo, por exemplo, $E = c_0$; logo E não é de tipo QS_p. Pelo Teorema 4.1.16 existe um operador $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ para o qual não vale a equivalência:

$$u \in \Pi_p(\ell_{p^*}; E) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|u(e_j)\|^p < +\infty.$$

Como $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$, a implicação $(\Longrightarrow)$ acima é verdadeira, logo é a implicação $(\Longleftarrow)$ que falha. Temos então $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ tal que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $u \notin \Pi_p(\ell_{p^*}; E)$.

Suponha que $\ell_p(\cdot)$ seja ideal-representável. Como $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$, pelo Teorema 4.1.10, o ideal $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)} = \Pi_p$ a representa, isto é, o operador

$$\Psi\colon \Pi_p(\ell_{p^*}; E) \longrightarrow \ell_p(E)\ ,\ u \mapsto (u(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

é um isomorfismo isométrico, em particular é sobrejetor. Como $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, existe $v \in \Pi_p(\ell_{p^*}; E)$ tal que

$$(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = \Psi(v) = (v(e_j))_{j=1}^{\infty},$$

onde a última igualdade vem da definição de Ψ. Segue que $u(e_j) = v(e_j)$ para todo j. O fato de $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ser uma base de Schauder para ℓ_{p^*} implica que $u = v \in \Pi_p(\ell_{p^*}; E)$. Isso é um absurdo, pois $u \notin \Pi_p(\ell_{p^*}; E)$. Está provado que $\ell_p(\cdot)$ não é ideal-representável. $\square$

Exemplo 4.1.18. Seja $1 < p < \infty$. Vimos no corolário anterior que não é verdade que $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)}(\ell_{p^*}, \cdot) \approx \ell_p(\cdot)$. Vejamos que, apesar disso, vale o caso particular

$$\Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)}(\ell_{p^*}; \ell_p) \approx \ell_p(\ell_p).$$

Este resultado também pode ser encontrado em [49]. Seja $(\theta_i)_{i=1}^{\infty} = ((\theta_{i,k})_{k=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)$. Precisamos mostrar que o operador $u \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}; \ell_p)$ dado por $u(e_i) = \theta_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, é absolutamente p-somante, isto é, $u \in \Pi_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)}(\ell_{p^*}; \ell_p)$. Dada $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$, precisamos mostrar que

$$(u((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}))_{j=1}^{\infty} = \left(u\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} e_i\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} u(e_i)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} \theta_i\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}\theta_i\right\|_p^p &= \sum_{j=1}^{n}\left\|\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{j,i}\theta_i\right\|_p^p = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{j,i}(\theta_{i,k})_{k=1}^{\infty}\right\|_p^p \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left\|\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{j,i}\theta_{i,k}\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_p^p = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{j,i}\theta_{i,k}\right|^p \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}|\langle(\theta_{i,k})_{i=1}^{m},(\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\rangle|^p \\
&\leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|(\theta_{i,k})_{i=1}^{m}\|_p^p\cdot\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p \\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p\cdot\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}|\theta_{i,k}|^p \\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p\cdot\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}|\theta_{i,k}|^p \\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p\cdot\|((\theta_{i,k})_{k=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p(\ell_p)}^p \\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p\cdot\|(\theta_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p(\ell_p)}^p.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\left(u\left((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}\theta_i\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p) \text{ e}$$

$$\left\|\left(u\left((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\ell_p(\ell_p)} \leq \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\|(\theta_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p(\ell_p)},$$

ou seja, $\|u\|_{\ell_p^w;\ell_p(\cdot)} \leq \|(\theta_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p(\ell_p)} = \|(u(e_i))_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p(\ell_p)}$, donde segue o resultado.

Exemplo 4.1.19. Vejamos que, para cada $1 \leq p < \infty$, a classe de sequências ℓ_p^{mid} é ideal-representável. Provaremos isso mostrando que ℓ_p^{mid} satisfaz o item (iii) do Teorema 4.1.10. Tome E Banach, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w({}^*\ell_p)$. Devemos mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(E).$$

Dado $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*)$, por definição,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_n(x_i)|^p\right)^{1/p} \leq \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\text{mid},p}. \tag{4.1}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}x_i\right)\right|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}\varphi_n(x_i)\right|^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\langle(\varphi_n(x_i))_{i=1}^{\infty},(\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\rangle|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|(\varphi_n(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p^p\cdot\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}^p\right)^{1/p}\\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|(\varphi_n(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p^p\right)^{1/p}\\
&= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_n(x_i)|^p\right)^{1/p}\\
&\overset{(4.1)}{\leq} \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{mid},p}\end{aligned}$$

e isso prova que $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p^{\text{mid}}(E)$. Tomando o supremo sobre $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E^*)}$ obtemos

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\text{mid},p}\leq\|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}\cdot\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{mid},p}.$$

Corolário 4.1.20. *Sejam $1\leq p<\infty$ e $X=\ell_p^u,\ell_p^{\text{mid}}$ ou $\ell_p\langle\cdot\rangle$ (neste último caso para $p\neq 1$). Se $u\colon {}^*\ell_p\to E$ é um operador linear contínuo tal que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\in X(E)$, então $(u\circ v(e_j))_{j=1}^{\infty}\in X(E)$ para todo $v\in\mathcal{L}({}^*\ell_p;{}^*\ell_p)$.*

Demonstração. Dos Exemplos 4.1.2 e 4.1.19, as classes $\ell_p^u,\ell_p^{\text{mid}}$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ $(p\neq 1)$ são todas ideal-representáveis. Por fim, basta usar a equivalência (ii) do Teorema 4.1.10, e o resultado segue. □

É natural nos perguntarmos se os procedimentos $X\mapsto X^u, X\mapsto X^{\text{fd}}$ e $X\mapsto X^{\text{dual}}$ preservam a representação por ideais. De fato, todos esses procedimentos têm essa propriedade. Mostraremos, ainda nesta seção, que os procedimentos $X\mapsto X^{\text{fd}}$ e $X\mapsto X^{\text{dual}}$, sob condições pouco restritivas, preservam ideal-representabilidade. Já o procedimento $X\mapsto X^u$ será tratado na seção seguinte.

Proposição 4.1.21. *Seja X uma classe de sequências ideal-representável tal que $X^{\text{fd}}(\mathbb{K})\overset{1}{=}X(\mathbb{K})$. Então a classe X^{fd} também é ideal-representável.*

Demonstração. Como X é ideal-representável, segue da Proposição 4.1.4 que X é linearmente estável e $X(\mathbb{K})\overset{1}{=}\lambda_*$ para algum espaço de sequências escalares λ. Sabemos pela Proposição 3.3.4 que X^{fd} é uma classe de sequências linearmente estável. Para provar que a classe $X^{\rm fd}$ é ideal-representável, mostraremos que ela satisfaz o item (iii) do Teorema 4.1.10. Primeiramente, temos $X^{\rm fd}(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$, donde podemos concluir pela Proposição 4.1.7(vi) que λ_*^w é finitamente determinada. Sejam E um espaço de Banach, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\rm fd}(E)$, $((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(\lambda)$ e $n \in \mathbb{N}$. Do Lema 1.5.7(ii),

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n \quad \text{em } X(E).$$

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{i=k+1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} = \left\|\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n - \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} < \varepsilon$$

para todo $k \geq k_0$. Daí

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n + \left(\sum_{i=k_0+1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \\ &\leq \left\|\left(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} + \left\|\left(\sum_{i=k_0+1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \\ &< \left\|\left(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Chame $(y_j)_{j=1}^\infty := (x_j)_{j=1}^{k_0} \in X(E)$ e $((\beta_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty := ((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^n \in \lambda_*^w(\lambda)$. Usando que X satisfaz o item (iii) do Teorema 4.1.10, temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_{j,i}y_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} = \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i}y_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \\ &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{j,i}y_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} = \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{j,i}y_i\right)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)} \\ &\leq \|((\beta_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \\ &= \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{k_0}\|_{X(E)}\end{aligned}$$

e portanto, como λ_*^w é finitamente determinada, temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_{j,i}x_i\right)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} &\leq \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^n\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{k_0}\|_{X(E)} + \varepsilon \\ &\leq \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^\infty)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\rm fd}(E)} + \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathrm{fd}}(E)$ e

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} \leq \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,\lambda_*} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}.$$

□

Para o procedimento $X \mapsto X^{\mathrm{dual}}$ precisaremos de mais alguns preparativos.

Lema 4.1.22. *Se E é reflexivo, então os espaços $\mathcal{L}(E;E)$ e $\mathcal{L}(E^*;E^*)$ são isomorfos isometricamente por meio da correspondência $T \mapsto T^*$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.13 basta mostrar que o operador $T \mapsto T^*$ é sobrejetivo. Tome $U \in \mathcal{L}(E^*;E^*)$. Como E é reflexivo, as topologias fraca $\sigma(E^* : E^{**})$ e fraca-estrela $\sigma(E^* : E)$ coincidem em E^* [12, Proposição 6.3.8]. Como todo operador linear contínuo é w-w contínuo [12, Proposição 6.2.9], segue que U é w^*-w^*-contínuo. O Lema 1.1.14 garante a existência de um operador $u \in \mathcal{L}(E;E)$ de modo que $u^* = U$. □

Proposição 4.1.23. *Para $1 < p < \infty$, os espaços $\ell_{p^*}^w(\ell_p)$ e $\ell_p^w(\ell_{p^*})$ são isomorfos isometricamente por meio do operador $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \mapsto ((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}$.*

Demonstração. Cálculos rotineiros mostram que

$$\psi\colon \ell_{p^*}^w(\ell_p) \to \ell_p^w(\ell_{p^*}) \ , \ \psi\left(((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\right) = ((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty},$$

é um operador bem definido e linear. Considere os seguintes isomorfismos isométricos

$$\begin{aligned} \psi_{p^*}\colon \ell_{p^*}^w(\ell_p) \to \mathcal{L}(\ell_p;\ell_p), &\qquad (u(e_j))_{j=1}^{\infty} \mapsto u, \\ \psi_*\colon \mathcal{L}(\ell_p;\ell_p) \to \mathcal{L}(\ell_{p^*};\ell_{p^*}), &\qquad u \mapsto u^*, \\ \psi_p\colon \mathcal{L}(\ell_{p^*};\ell_{p^*}) \to \ell_p^w(\ell_{p^*}), &\qquad u^* \mapsto (u^*(e_j))_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro são isomorfismos isométricos por causa da representação $\mathcal{L}(\ell_p,\cdot) \approx \ell_p^w$, e o fato de ψ_* ser isomorfismo isométrico vem do Lema 4.1.22 pois ℓ_p é reflexivo para todo $1 < p < \infty$. Dada $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(\ell_p)$ podemos tomar $u \in \mathcal{L}(\ell_p;\ell_p)$ com $u(e_j) = (\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Vejamos que $u^*(e_k) = (\alpha_{j,k})_{j=1}^{\infty}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, para o funcional $u^*(e_k)\colon \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} u^*(e_k)\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right) &= \left\langle e_k, u\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\rangle = \left\langle e_k, u\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle e_k, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u(e_j)\right\rangle = \left\langle e_k, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left\langle e_k, (\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty}\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \alpha_{j,k} = \left\langle (\alpha_{j,k})_{j=1}^{\infty}, (\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right\rangle \end{aligned}$$

para toda $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}(\psi_p \circ \psi_* \circ \psi_{p^*})\left(((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\right) &= (\psi_p \circ \psi_* \circ \psi_{p^*})\left((u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right) = (\psi_p \circ \psi_*)(u) = \psi_p(u^*) \\ &= (u^*(e_i))_{i=1}^{\infty} = ((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty} = \psi\left(((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\right)\end{aligned}$$

e segue que $\psi = \psi_p \circ \psi_* \circ \psi_{p^*}$ é um isomorfismo isométrico. □

Proposição 4.1.24. *Sejam X uma classe de sequências esfericamente completa com $X(\mathbb{K}) = \ell_p$, $1 < p < \infty$, e E um espaço de Banach. Se $\Pi_{\ell_p^w;X}(\ell_{p^*};E^*) \approx X(E^*)$ com $X(E^*)$ zero substituível, então $\Pi_{\ell_{p^*}^w;X^{\text{dual}}}(\ell_p;E) \approx X^{\text{dual}}(E)$. Em particular, se X for ideal-representável, esfericamente completa e zero substituível, então X^{dual} também será ideal-representável.*

Demonstração. Por hipótese, $\Pi_{\ell_p^w;X}(\ell_{p^*};E^*) \approx X(E^*)$. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E)$ e $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(\ell_p)$. Devemos mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E)$$

com

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X^{\text{dual}}(E)} \leq \left\| ((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)},$$

pois neste caso o resultado seguirá do Teorema 4.1.10. Note que, dados $(\theta_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E^*)$ e $n \in \mathbb{N}$ temos:

• Como $(\theta_j)_{j=1}^{n} \in X(E^*)$, existe um operador $u_n \in \Pi_{\ell_p^w;X}(\ell_{p^*};E^*)$ tal que $(u_n(e_j))_{j=1}^{n} = (\theta_j)_{j=1}^{n}$ e $\|u_n\|_{\ell_p^w;X} = \|(\theta_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E^*)}$. Além disso, $\|(\theta_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E^*)} \leq \|(\theta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E^*)}$ pois $X(E^*)$ é zero substituível.

• De acordo com a Proposição 4.1.23, $((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(\ell_p)$ implica $((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ e $\|((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} = \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}$.

• Temos $\left(u_n\left((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty}\right)\right)_{i=1}^{\infty} = \left(u_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j,i} e_j\right)\right)_{i=1}^{\infty} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,i}\theta_j\right)_{i=1}^{\infty} \in X(E^*)$ pelos itens anteriores e também

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,i}\theta_j\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{X(E^*)} &\leq \|u_n\|_{\ell_p^w;X} \cdot \|((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \\ &= \|(\theta_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E^*)} \cdot \|((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \\ &\leq \|(\theta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E^*)} \cdot \|((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}.\end{aligned}$$

Dada $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E^*)$, considere a sequência $(s_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i)\right| = s_j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i)$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Isso pode ser feito da seguinte forma: escrevendo $z_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i)$, tome $s_j = \frac{\overline{z_j}}{|z_j|}$ se $z_j \neq 0$ e $s_j = 1$ caso $z_j = 0$. Daí, como $X(E^*)$ é esfericamente completa, temos $(s_j\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E^*)$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left| \varphi_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i \right) \right| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i) \right| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} s_j \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} s_j \alpha_{j,i}\varphi_j(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j \alpha_{j,i}\varphi_j \right)(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,i} s_j \varphi_j \right)(x_i) \\
&\leq \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,i} s_j \varphi_j \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{X(E^*)} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)} \\
&\leq \|(s_j\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E^*)} \cdot \|((\alpha_{j,i})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)} \\
&= \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E^*)} \cdot \|((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo n, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i \right)$ é (absolutamente) convergente, o que implica que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i \right)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E).$$

Tomando o supremo sobre $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E^*)}$ obtemos

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,i} x_i \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X^{\text{dual}}(E)} \leq \left\| ((\alpha_{j,i})_{i=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E)}.$$

□

Exemplo 4.1.25. Em [8, Example 2.6] é mencionada uma nova classe de sequências finitamente determinada, esfericamente completa e linearmente estável $\ell_p^{\text{mid}}\langle\cdot\rangle$, definida por $\ell_p^{\text{mid}}\langle E\rangle := (\ell_p^{\text{mid}})^{\text{dual}}(E)$ e que satisfaz $\ell_p\langle\cdot\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^{\text{mid}}\langle\cdot\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(\cdot)$. Em particular, $\ell_p^{\text{mid}}\langle\cdot\rangle \neq \ell_p^{\text{mid}}$. Segue do Exemplo 4.1.19 juntamente com a Proposição 4.1.24 que $\ell_p^{\text{mid}}\langle\cdot\rangle$ é ideal-representável para todo $1 < p < \infty$.

4.2 A classe $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$

Na seção anterior, dada uma classe de sequências, procuramos um ideal de operadores que a representa. Nesta seção vamos fazer o caminho inverso: dados um ideal de operador e um espaço de sequências escalares, definiremos uma classe de sequências que depende, de forma muito natural tendo em vista o que fizemos na seção anterior, do ideal e do espaço de sequências. Destacamos as Proposições 4.2.4 e 4.2.8 como sendo os principais resultados desta seção. O objetivo desta seção é comprovar que essa abordagem também rende bons frutos.

No que segue, um ideal de Banach $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ será denotado simplesmente por $\mathcal{I}$.

Definição 4.2.1. Dados um ideal de Banach $\mathcal{I}$ e um espaço de sequências escalares λ, para cada espaço de Banach E definimos

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E) := \left\{(u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : u \in \mathcal{I}(\lambda; E)\right\}.$$

Teorema 4.2.2. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de Banach, λ um espaço de sequências e E um espaço de Banach.*

(i) *$\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ e o operador*

$$\Psi\colon \mathcal{I}(\lambda; E) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)\ ,\ \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^{\infty}$$

está bem definido e é linear.

(ii) *A função*

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}\colon \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E) \to [0,\infty)\ ,\ \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} := \|u\|_{\mathcal{I}},$$

está bem definida e é uma norma em $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$.

(iii) *O operador Ψ do item* (i) *é um isomorfismo isométrico, e portanto o espaço normado $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ do item* (ii) *é um espaço de Banach.*

Demonstração. (i) Dados $u, v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(u(e_j))_{j=1}^{\infty} + \alpha \cdot (v(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((u + \alpha v)(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$$

pois $(u + \alpha v) \in \mathcal{I}(\lambda; E)$. Isso prova que $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$. Por definição, cada elemento de $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ é da forma $(u(e_j))_{j=1}^{\infty}$ onde u está em $\mathcal{I}(\lambda; E)$, portanto Ψ está bem definido. Sua linearidade segue de

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha u + v) &= ((\alpha u + v)(e_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha u(e_j) + v(e_j))_{j=1}^{\infty}\\ &= \alpha(u(e_j))_{j=1}^{\infty} + (v(e_j))_{j=1}^{\infty} = \alpha\Psi(u) + \Psi(v).\end{aligned}$$

(ii) Sejam $u, v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ tais que $u(e_j) = v(e_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda$,

$$u((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = u\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j v(e_j) = v\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j e_j\right) = v((\beta_j)_{j=1}^{\infty}),$$

provando que $u = v$. Segue que a função $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}$ está bem definida. Quanto aos axiomas de norma:

(a) $\left\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|u\|_{\mathcal{I}} \geq 0$.

(b) $\left\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = 0 \Leftrightarrow \|u\|_{\mathcal{I}} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow u(e_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = 0$.

(c)

$$\begin{aligned}\left\|\alpha(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} &= \left\|((\alpha u)(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|\alpha u\|_{\mathcal{I}} = |\alpha| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \\ &= |\alpha| \cdot \left\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}+(v(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} &= \left\|((u+v)(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|u+v\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{I}} + \|v\|_{\mathcal{I}} = \left\|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} + \left\|(v(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.\end{aligned}$$

(iii) Vimos no item (i) que Ψ é linear e vimos no item (ii) que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (v(e_j))_{j=1}^{\infty}$ implica $u = v$, ou seja, Ψ também é injetora. A sobrejeção vem da definição de $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. Temos então uma bijeção com

$$\|\Psi(u)\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|(u(e_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Portanto, Ψ é um isomorfismo isométrico. Isso implica que $\left(\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}\right)$ é espaço de Banach. $\square$

Proposição 4.2.3. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de Banach e λ um espaço de sequências escalares. A relação $E \mapsto \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ define uma classe de sequências $(\mathcal{I},\lambda)$-representável satisfazendo $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$. Em particular, $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é linearmente estável.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach. Pelo Teorema 4.2.2(iii) já sabemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ é espaço de Banach. Verifiquemos os axiomas de classes de sequências:

(i) $c_{00}(E) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$: Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, considere o operador $u\colon \lambda \to E$ dado por $u((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$. Note que $u = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j^* \otimes x_j$ é um operador de posto finito, portanto $u \in \mathcal{F}(\lambda; E) \subseteq \mathcal{I}(\lambda; E)$. Como $u(e_j) = x_j$ para $j \leq n$ e $u(e_j) = 0$ para $j > n$, temos $(x_j)_{j=1}^{n} = (u(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$.

(ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E) \stackrel{1}{\hookrightarrow} \ell_{\infty}(E)$: Dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$, existe $u \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ tal que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Usando o Lema 1.3.2,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(e_j)\| \leq \|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

(iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$ e $\|e_j\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K})} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$: De acordo com a definição do isomorfismo isométrico Ψ do Teorema 4.2.2(iii), da definição do espaço de sequências escalar λ e do Lema 4.1.3 segue que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K}) = \Psi\left(\mathcal{I}(\lambda;\mathbb{K})\right) = \Psi\left(\mathcal{L}(\lambda;\mathbb{K})\right) = \Psi(\lambda^*) = \lambda_*$$

isometricamente. Da Proposição 4.0.5 segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\|e_j\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K})} = \|e_j\|_{\lambda_*} = 1$.

Está provado que $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é uma classe de sequências com $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. Note que, de acordo com o do Teorema 4.2.2(iii), $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é uma classe de sequências $(\mathcal{I},\lambda)$-representável, e portanto a Proposição 4.1.4 garante sua estabilidade linear. $\square$

Em resumo, para cada ideal de Banach $\mathcal{I}$ e para cada espaço de sequências escalares λ, $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é uma classe de sequências $(\mathcal{I},\lambda)$-representável que satisfaz $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. Em símbolos,

$$\mathcal{I}(\lambda,\cdot) \approx \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}.$$

Note que, no caso particular em que $\mathcal{I} = \mathcal{L}$, segue da Proposição 4.1.7 que $\mathcal{C}_{\mathcal{L},\lambda_*} \overset{1}{=} \lambda_*^w$.

O resultado abaixo mostra que, no universo das classes de sequências ideal-representáveis, o procedimento que acabamos de construir é o inverso do procedimento da seção anterior.

Proposição 4.2.4. *Seja X uma classe de sequências linearmente estável com $X(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. Então $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}$ é uma classe de sequências ideal-representável tal que $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$ e $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*} \overset{1}{\hookrightarrow} X$. Mais ainda, se X for ideal-representável, então $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*} \overset{1}{=} X$.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach. Da Proposição 4.1.9, $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é um ideal de Banach e o operador

$$\Psi\colon \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;E) \to X(E),\ \ \Psi(u) = (u(e_j))_{j=1}^\infty,$$

está bem definido, é linear, injetor e contínuo com $\|\Psi\| \leq 1$. Da Proposição 4.2.3, $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}$ define uma classe de sequências ideal-representável com $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \lambda_*$. Daí, dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}(E)$ existe $u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;E)$ tal que $(u(e_j))_{j=1}^\infty = (x_j)_{j=1}^\infty$. Neste caso,

$$(x_j)_{j=1}^\infty = (u(e_j))_{j=1}^\infty = \Psi(u) \in X(E) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} &= \|\Psi(u)\|_{X(F)} \leq \|\Psi\| \cdot \|u\|_{\lambda_*^w;X} \\ &\leq \|u\|_{\lambda_*^w;X} = \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}}.\end{aligned}$$

Por último, supondo X ideal-representável, do Teorema 4.1.10 segue que

$$\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X};\lambda_*}(E) \approx \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;E) \approx X(E).$$

$\square$

Em seguida obteremos informações que não havíamos conseguido com o procedimento anterior. Começamos resolvendo uma pendência da seção anterior, com respeito à estabilidade do procedimento $X \mapsto X^u$ em relação à ideal-representabilidade.

Proposição 4.2.5. *Seja X uma classe de sequências ideal-representável com $\overline{c_{00}}^X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} X(\mathbb{K})$. Então a classe $\overline{c_{00}}^X$ é ideal-representável. Em particular, se X é finitamente contrátil e finitamente zero invariante, então X^u é ideal-representável.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach. Como X é ideal-representável, existe uma classe de sequências escalares λ de modo que $X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \lambda_*$. Como $\overline{c_{00}}^X(\mathbb{K}) \stackrel{1}{=} X(\mathbb{K})$, segue da Proposição 4.2.4 que $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}$ é ideal-representável e

$$\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*} \stackrel{1}{\hookrightarrow} \overline{c_{00}}^X.$$

Por outro lado, como $\overline{c_{00}}^X$ é subclasse fechada de X, segue que $\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X}(\lambda;E) \subseteq \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;E)$ com igualdade de normas. Portanto $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}(E) \subseteq \mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*}(E)$ também com igualdade de normas. Usando novamente a Proposição 4.2.4 e a hipótese de X ser ideal-representável, temos $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;X},\lambda_*} \stackrel{1}{=} X$, o que implica que $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}$ é subclasse fechada de X. Como $\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}(E)$ contém $c_{00}(E)$ e

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\overline{c_{00}}^X(E)}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$, segue que $\overline{c_{00}}^X(E) \subseteq \mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*}(E)$ isometricamente. Decorre que

$$\overline{c_{00}}^X \stackrel{1}{=} \mathcal{C}_{\Pi_{\lambda_*^w;\overline{c_{00}}^X},\lambda_*},$$

e portanto $\overline{c_{00}}^X$ é ideal-representável. Supondo X finitamente contrátil e finitamente zero invariante, da Proposição 3.2.14 segue ue $X^u = \overline{c_{00}}^X$ é ideal-representável. □

Apresentamos a seguir um novo exemplo concreto de classe ideal-representável.

Exemplo 4.2.6. Vimos no Exemplo 4.1.19 que a classe ℓ_p^{mid} é ideal-representável. Aplicando a Proposição 4.2.5 concluímos que $(\ell_p^{\mathrm{mid}})^u$ também é ideal-representável para todo $1 \leq p < \infty$. Lembre-se que provamos na Proposição 3.2.21 que $\ell_p^{\mathrm{mid}} \neq (\ell_p^{\mathrm{mid}})^u \neq \ell_p^u$.

Exemplo 4.2.7. Vejamos que a Proposição 4.2.5 nos entrega uma outra forma de mostrar que a classe RAD não é ideal-representável a partir da não-representabilidade de Rad. Da Proposição 3.2.21, $\mathrm{RAD}^u = \overline{c_{00}}^{\mathrm{RAD}} = \mathrm{Rad}$. Se RAD fosse ideal-representável, teríamos então, pela Proposição 4.2.5, que $\overline{c_{00}}^{\mathrm{RAD}} = \mathrm{Rad}$ seria ideal-representável; absurdo este que prova que RAD não é ideal-representável..

A proposição a seguir mostra como algumas das propriedades do espaço de sequências escalares λ são refletidas na classe $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$. Também dessas propriedades obteremos informações interessantes em seguida.

Proposição 4.2.8. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de Banach e λ um espaço de sequências escalares.*

(i) *Se λ é esfericamente completo, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é esfericamente completa.*

(ii) *Se λ é finitamente zero invariante, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente contrátil.*

(iii) *Se λ é finitamente zero substituível, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente zero substituível.*

(iv) *Se λ é finitamente zero invariante e finitamente contrátil, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente zero invariante.*

(v) *Se λ é zero invariante, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é invariante por subsequências.*

(vi) *Se λ é zero substituível, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é zero substituível.*

(vii) *Se λ é zero invariante e invariante por subsequências, então $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é zero invariante.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. Por definição podemos tomar $u \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ de modo que $(u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$.

(i) Por hipótese, λ é esfericamente completo. Seja $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ onde $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Considere o operador $s \colon \lambda \to \lambda$ dado por

$$s((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\alpha_j \beta_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Como λ é esfericamente completa, segue que s está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e uma injeção métrica. Defina $v \colon \lambda \longrightarrow E$ por $v := u \circ s$. Da propriedade de ideal, $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\|v\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ s\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|s\| = \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Além disso,

$$(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((u \circ s)(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u(\alpha_j e_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Logo, $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ com

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Portanto $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é esfericamente completa.

(ii) Por hipótese, λ é finitamente zero invariante. Dado $k \in \mathbb{N}$ considere o operador $g_k \colon \lambda \to \lambda$ dado por

$$g_k((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots).$$

Como λ é finitamente zero invariante, g_k está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e é uma injeção métrica. Defina $v \colon \lambda \to E$, $v := u \circ g_k$. Da propriedade de ideal, $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\|v\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ g_k\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|g_k\| = \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Temos ainda,

$$g_k(e_1) = e_1,\ g_k(e_2) = e_2,\ \ldots,\ g_k(e_{k-1}) = e_{k-1},\ g_k(e_k) = e_{k+1},\ g_k(e_{k+1}) = e_{k+2},\ \ldots$$

donde segue que

$$(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((u \circ g_k)(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_{k-1}), u(e_{k+1}), u(e_{k+2}), \ldots) = (x_j)_{j \neq k}.$$

Concluímos que $(x_j)_{j\neq k} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ com $\|(x_j)_{j\neq k}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}$. Isso prova que a classe $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente contrátil.

(iii) Por hipótese, λ é finitamente zero substituível. Dado $k \in \mathbb{N}$ considere o operador $h_k \colon \lambda \longrightarrow \lambda$ dado por

$$h_k((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots).$$

Como λ é finitamente zero substituível, h_k está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e é contínuo com $\|h_k\| \leq 1$. Defina $v := u \circ h_k$. Da propriedade de ideal, $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\|v\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ h_k\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|h_k\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}(v(e_j))_{j=1}^{\infty} &= ((u \circ h_k)(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u(e_1), \ldots, u(e_{k-1}), 0, u(e_{k+1}), u(e_{k+2}), \ldots)\\ &= (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),\end{aligned}$$

onde

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Portanto, a classe $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente zero substituível.

(iv) Por hipótese, λ é finitamente zero invariante e finitamente contrátil. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o operador $f_k \colon \lambda \longrightarrow \lambda$ dado por

$$f_k((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots).$$

Como λ é finitamente contrátil, f_k está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e é contínuo com $\|v_k\| \leq 1$.

• Tome $k \in \mathbb{N}$ e suponha que $x_k = 0$. Como λ é finitamente zero invariante, de acordo com o item (ii) temos

$$(x_j)_{j\neq k} = ((u \circ g_k)(e_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E) \ \text{ e } \ \|(x_j)_{j\neq k}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)},$$

onde $g_k\colon \lambda \longrightarrow \lambda$ é dado por $g_k((\beta_j)_{j=1}^\infty) = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_k, \beta_{k+1}, \ldots)$. Por outro lado, usando que $u(e_k) = x_k = 0$,

$$\begin{aligned}(u \circ g_k \circ f_k)\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) &= (u \circ g_k)\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)\right)\\ &= u\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)\right)\\ &= u\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)\right) + \beta_k u(e_k)\\ &= u\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots) + \beta_k e_k\right)\\ &= u\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)\right) = u\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right),\end{aligned}$$

logo $u = u \circ g_k \circ f_k$. Segue que

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} &= \|u\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ g_k \circ f_k\|_{\mathcal{I}} \leq \|u \circ g_k\|_{\mathcal{I}} \cdot \|f_k\| \leq \|u \circ g_k\|_{\mathcal{I}}\\ &= \|(x_j)_{j\neq k}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.\end{aligned}$$

• Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ com $y_k = 0$ e $(y_j)_{j\neq k} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. Por definição, podemos tomar $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ com $(v(e_j))_{j=1}^\infty = (y_j)_{j\neq k}$. Considere $t := v \circ f_k$. Da propriedade de ideal, $t \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\begin{aligned}t\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) &= (v \circ f_k)\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) = v\left((\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)\right)\\ &= v\left(\sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \cdot e_j + \sum_{j=k}^{\infty} \beta_{j+1} \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \cdot y_j + \sum_{j=k}^{\infty} \beta_{j+1} \cdot y_{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \cdot y_j,\end{aligned}$$

logo $t(e_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto $(y_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$.

Com isso concluímos que $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente zero invariante.

(v) Por hipótese, λ é zero invariante. Seja $(k_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência crescente em $\mathbb{N}$. Precisamos mostrar que $(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. Vejamos que o operador $g\colon \lambda \longrightarrow \lambda$ dado por $g((\beta_j)_{j=1}^\infty) = (z_j)_{j=1}^\infty$, onde

$$\begin{cases} z_{k_j} = \beta_j & \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N} \\ z_j = 0 & \text{se} \quad j \notin \{k_1, k_2, \ldots\} \end{cases},$$

está bem definido. De fato, como λ é zero invariante,

$$g\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) \in \lambda \Leftrightarrow (z_j^0)_{j=1}^\infty = (\beta_j^0)_{j=1}^\infty \in \lambda \Leftrightarrow (\beta_j)_{j=1}^\infty \in \lambda \text{ e}$$

$$\|g\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right)\|_\lambda = \|(z_j^0)_{j=1}^\infty\|_\lambda = \|(\beta_j^0)_{j=1}^\infty\|_\lambda = \|(\beta_j)_{j=1}^\infty\|_\lambda.$$

De

$$g\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) = (z_j)_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty z_j e_j = \sum_{j=1}^\infty z_{k_j} e_{k_j} = \sum_{j=1}^\infty \beta_j e_{k_j},$$

segue facilmente a linearidade de g (omitiremos os detalhes). Em resumo, o operador

$$g\colon \lambda \longrightarrow \lambda\ ,\ g\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \beta_j e_{k_j},$$

está bem definido, é linear e uma injeção métrica. Temos também $g(e_j) = e_{k_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Defina $v\colon \lambda \longrightarrow E$ por $v := u \circ g$. Da propriedade de ideal, $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\|v\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ g\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|g\| = \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Segue que

$$(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = ((u \circ g)(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u(e_{k_j}))_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{\infty},$$

isto é, $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ e

$$\|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Portanto a classe de sequências $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é invariante por subsequências.

(vi) Por hipótese, λ é zero substituível. Seja $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Devemos mostrar que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ e que

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Podemos supor $\alpha_j = 0$ para um número infinito de índices e $\alpha_j = 1$ no restante, pois caso contrário bastaria recorrer ao item (iii) uma vez que finitamente zero substituível é caso particular de zero substituível. Considere o operador

$$h\colon \lambda \longrightarrow \lambda\ ,\ h((\beta_j)_{j=1}^{\infty}) = (\alpha_j \beta_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Como λ é zero substituível, h está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e é contínuo com $\|h\| \leq 1$. Defina $v := u \circ h$. Da propriedade de ideal, $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e

$$\|v\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ h\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|h\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Temos então

$$(v(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u \circ h(e_j))_{j=1}^{\infty} = (u(\alpha_j e_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha_j u(e_j))_{j=1}^{\infty} = (\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty},$$

logo $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ e

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Isso prova que $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é zero substituível.

(vii) Por hipótese, λ é zero invariante e invariante por subsequências. Para cada sequência crescente $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ considere os operadores $g_{(k_j)_{j=1}^{\infty}}, f_{(k_j)_{j=1}^{\infty}}\colon \lambda \to \lambda$ dados por

$$g_{(k_j)_{j=1}^{\infty}}\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_{k_j}\ ,\ f_{(k_j)_{j=1}^{\infty}}\left((\beta_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (\beta_{k_j})_{j=1}^{\infty}.$$

Da hipótese de λ ser zero invariante segue que $g_{(k_j)_{j=1}^{\infty}}$ está bem definido, é linear e uma injeção métrica (veja o item (v)). A hipótese de λ ser invariante por subsequências garante que $f_{(k_j)_{j=1}^\infty}$ está bem definido, é linear (omitiremos os detalhes) e contínuo com $\|f_{(k_j)_{j=1}^\infty}\| \leq 1$.

Como λ é zero invariante e invariante por subsequências, em particular, λ é finitamente zero invariante e finitamente contrátil. Pelo item (iv), a classe $\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}$ é finitamente zero invariante. Logo, aplicando o item (iv) repetidas vezes, temos $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$ se, e somente se, $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$, e neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}$. Vamos dividr a análise em dois casos:

- Suponha que $(x_j)_{j=1}^\infty \notin c_{00}(E)$. Neste caso podemos tomar uma sequência crescente $(k_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(x_j^0)_{j=1}^\infty = (x_{k_j})_{j=1}^\infty$, isto é, $x_{k_j} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $x_n = 0$ se n não pertencer à sequência $(k_j)_{j=1}^\infty$. Defina $v := u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty}$. Da propriedade de ideal segue que $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ e $\|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$. Além disso,

$$v(e_j) = \left(u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty}\right)(e_j) = u(e_{k_j}) = x_{k_j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Segue que $(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$ e

$$\|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} = \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) &= u\left(\sum_{j=1}^\infty \beta_j e_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \beta_j x_j = \sum_{j=1}^\infty \beta_{k_j} x_{k_j} = u\left(\sum_{j=1}^\infty \beta_{k_j} e_{k_j}\right) \\ &= \left(u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty}\right)\left((\beta_{k_j})_{j=1}^\infty\right) = \left(u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty} \circ f_{(k_j)_{j=1}^\infty}\right)\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right), \end{aligned}$$

logo $u = u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty} \circ f_{(k_j)_{j=1}^\infty}$ e

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)} &= \|u\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty} \circ f_{(k_j)_{j=1}^\infty}\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|u \circ g_{(k_j)_{j=1}^\infty}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|f_{(k_j)_{j=1}^\infty}\| \leq \|v\|_{\mathcal{I}} = \|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)}. \end{aligned}$$

- Seja $(y_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} \setminus c_{00}(E)$ com $(y_j^0)_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. Como $(y_j)_{j=1}^\infty \notin c_{00}(E)$, podemos tomar uma sequência crescente $(k_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(y_j^0)_{j=1}^\infty = (y_{k_j})_{j=1}^\infty$, novamente, $y_{k_j} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $y_n = 0$ se n não pertencer à sequência $(k_j)_{j=1}^\infty$. Por definição podemos tomar $v \in \mathcal{I}(\lambda; E)$ tal que $(v(e_j))_{j=1}^\infty = (y_{k_j})_{j=1}^\infty$. Defina $t := v \circ f_{(k_j)_{j=1}^\infty}$. Então

$$\begin{aligned} t\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) &= \left(v \circ f_{(k_j)_{j=1}^\infty}\right)\left((\beta_j)_{j=1}^\infty\right) = v\left((\beta_{k_j})_{j=1}^\infty\right) = v\left(\sum_{j=1}^\infty \beta_{k_j} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \beta_{k_j} y_{k_j} = \sum_{j=1}^\infty \beta_j y_j, \end{aligned}$$

logo $t(e_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e portanto $(y_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{C}_{\mathcal{I},\lambda_*}(E)$. $\square$

Em todos os trabalhos que tratam de classes de sequências, até agora a única classe X tal que $X(\mathbb{K}) = \ell_\infty$ que foi considerada é $\ell_\infty(\cdot)$. No próximo exemplo exibiremos, tanto quanto sabemos pela primeira vez, duas outras classes, distintas de $\ell_\infty(\cdot)$ e distintas entre si, que têm ℓ_∞ como componente escalar e gozam de várias propriedades interessantes. Para isso usaremos os ideais clássicos $\mathcal{K}$ dos operadores compactos e $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos.

Exemplo 4.2.9. Mostraremos que $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}$ são classes de sequências linearmente estáveis, esfericamente completas, zero invariantes, invariante por subsequências e zero substituíveis tais que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty} \subsetneqq \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty} \subsetneqq \ell_\infty(\cdot) \ \text{ e } \ \mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\mathbb{K}) = \ell_\infty.$$

Mostraremos também que é possível descrever explicitamente as sequências que pertencem a essas classes, a saber: para todo espaço de Banach E,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}(E) = \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ é relativamente compacto em } E\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(E) = \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ é relativamente fracamente compacto em } E\}.$$

De fato, tomando $\lambda = \ell_1$, a Proposição 4.2.3 nos garante que $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}$ são classes de sequências linearmente estáveis tais que $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\mathbb{K}) \overset{1}{=} \ell_\infty$. Como ℓ_1 é esfericamente completo, zero invariante, invariante por subsequências e zero substituível então, segue da Proposição 4.2.8 que as classes $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}$ são ambas esfericamente completas, zero invariantes, invariante por subsequências e zero substituíveis. Do Teorema 1.3.7 temos $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{W}$, em particular, $\mathcal{K}(\ell_1; E) \subseteq \mathcal{W}(\ell_1; E)$ para todo espaço de Banach E e portanto $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}$. O operador identidade $Id\colon \ell_1 \to \ell_1$ é contínuo mas não é fracamente compacto, muito menos compacto. De fato, pelo Teorema de Kakutani (veja [12, Proposição 6.4.5]), como ℓ_1 não é reflexivo então a bola unitária fechada $B_{\ell_1} = \overline{B_{\ell_1}}^w = \overline{Id(B_{\ell_1})}^w$ não é compacta na topologia fraca. Logo

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\ell_1) \approx \ \mathcal{W}(\ell_1; \ell_1) \subsetneqq \mathcal{L}(\ell_1; \ell_1) \approx \ell_\infty(\ell_1),$$

donde concluímos que $\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\ell_1) \subsetneqq \ell_\infty(\ell_1)$. Vejamos que a inclusão contínua $\ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ não é compacta. Lembre-se que um operador $u\colon E \to F$ é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E, a sequência $(u(x_j))_{j=1}^\infty$ tem subsequência convergente em F (veja [12, Proposição 7.2.3]). A sequência canônica $(e_j)_{j=1}^\infty$ é limitada em ℓ_1 e para toda subsequência $(e_{k_j})_{j=1}^\infty$ e todos $j > l$ tem-se

$$\|e_{k_j} - e_{k_l}\|_2 = 2^{\frac{1}{2}},$$

logo $(e_j)_{j=1}^\infty$ não possui subsequência convergente em ℓ_2, provando que o operador inclusão $\ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ não é compacto. Por outro lado, como ℓ_2 é reflexivo, temos $\mathcal{W}(\ell_1; \ell_2) = \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2)$. Segue que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}(\ell_2) \approx \ \mathcal{K}(\ell_1; \ell_2) \subsetneqq \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2) = \mathcal{W}(\ell_1; \ell_2) \approx \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\ell_2),$$

donde concluímos que $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}(\ell_2) \subsetneq \mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}(\ell_2)$. Para as caracterizações das sequências pertencentes a essas classes, para qualquer espaço de Banach E,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty} &= \{(u(e_j))_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : u \in \mathcal{K}(\ell_1, E)\}\\ &= \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ é relativamente compacto em } E\} \quad \text{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty} &= \{(u(e_j))_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : u \in \mathcal{W}(\ell_1, E)\}\\ &= \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ é relativamente fracamente compacto em } E\},\end{aligned}$$

onde, em ambos os casos, a primeira igualdade segue das definições de $\mathcal{C}_{\mathcal{K},\ell_\infty}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{W},\ell_\infty}$ e a segunda igualdade segue das seguintes caracterizações, que podem ser encontradas, por exemplo, em [24, p. 114]:

- Um operador linear contínuo $u\colon \ell_1 \longrightarrow E$ é compacto se, e somente se, o conjunto $\{u(e_j) : j \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em E,
- Um operador linear contínuo $u\colon \ell_1 \longrightarrow E$ é fracamente compacto se, e somente se, o conjunto $\{u(e_j) : j \in \mathbb{N}\}$ é relativamente fracamente compacto em E.

O isomorfismo isométrico

$$\mathcal{K}(\ell_1; E) \approx \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ é relativamente compacto em } E\}$$

também pode ser encontrado em [22, p. 92].

Exemplo 4.2.10. No Apêndice A mostraremos que, para o caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, as classes Rad e RAD são esfericamente completas. Para o caso complexo, combinando o item (i) da Proposição 4.2.8 com o Corolário 4.1.13 podemos afirmar o seguinte: se E tem cotipo finito então a componente $\mathrm{Rad}(E)$ é parcialmente esfericamente completa, isto é, dados $(x_j)_{j=1}^\infty \in \mathrm{Rad}(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in \mathrm{Rad}(E)$. Neste caso, não sabemos se vale a igualdade $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{Rad}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{Rad}}$.

4.3 Aplicações

Provaremos nesta seção algumas consequências, interessantes no nosso entender, dos resultados sobre classes ideal-representáveis.

Em [33, Theorem 1.7], Junek e Matos provaram que, para $1 \leq p < \infty$, o ideal $\mathcal{U}^{(p,p)}$ dos operadores incondicionalmente (p,p)-somantes e o ideal $\mathcal{C}^p$ dos operadores p-convergentes são iguais. Traduzindo para a nossa linguagem de espaços de sequências, o que Junek e Matos provaram é o seguinte:

$$\Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u} = \mathcal{U}^{(p,p)} = \mathcal{C}^p = \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}. \tag{4.2}$$

O próximo resultado é uma generalização dessa igualdade.

Proposição 4.3.1. *Sejam X uma classe de sequências com $X(\mathbb{K}) = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, e E um espaço de Banach. Se $\Pi_{\ell_p^w;X}(^*\ell_p; E) \approx X(E)$, então*

$$\Pi_{X;\ell_p^u}(E;F) = \Pi_{X;c_0(\cdot)}(E;F).$$

para todo espaço de Banach F. Em particular, se X é ideal-representável, então $\Pi_{X;\ell_p^u} = \Pi_{X;c_0(\cdot)}$.

Demonstração. Tome F um espaço de Banach qualquer. A demostração dessa proposição depende da seguinte igualdade

$$\Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(^*\ell_p; F) = \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(^*\ell_p; F). \tag{4.3}$$

É claro que essa igualdade segue de (4.2), mas como queremos generalizar esse resultado, vamos obter (4.3) sem usar (4.2). Faremos isso aplicando o seguinte resultado que pode ser encontrado em [19]: As seguintes condições são equivalentes para um operador linear contínuo $u \colon E \longrightarrow F$:

(i) u é p-convergente, isto é, $u \in \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(E;F)$.

(ii) $u \circ v$ é compacto, isto é, $u \circ v \in \mathcal{K}(^*\ell_p; F)$, para todo $v \in \mathcal{L}(^*\ell_p; E)$.

Voltando à demonstração de (4.3), é trivial que $\Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(^*\ell_p; F) \subseteq \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(^*\ell_p; F)$ pois $\ell_p^u(F) \subseteq c_0(F)$. Por outro lado, dado $u \in \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(^*\ell_p; F)$, tome o operador identidade $\mathrm{id} \colon {}^*\ell_p \to {}^*\ell_p$. Da implicação (i)⇒(ii) temos $u = u \circ \mathrm{id} \in \mathcal{K}(^*\ell_p; F)$. No Exemplo 4.1.11 vimos que ℓ_p^u é $\mathcal{K}$-representável, logo $u \in \mathcal{K}(^*\ell_p; F) = \Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(^*\ell_p; F)$. A igualdade (4.3) está provada.

Por hipótese, $\Pi_{\ell_p^w;X}(^*\ell_p; E) \approx X(E)$. Novamente, a inclusão $\Pi_{X;\ell_p^u}(E;F) \subseteq \Pi_{X;c_0(\cdot)}(E;F)$ é trivial pois $\ell_p^u(F) \subseteq c_0(F)$. Para a inclusão inversa, tome $u \in \Pi_{X;c_0(\cdot)}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Por hipótese, podemos tomar $v \in \Pi_{\ell_p^w;X}(^*\ell_p; E)$ tal que $(v(e_j))_{j=1}^\infty = (x_j)_{j=1}^\infty$. Note que

$$u \circ v \in \Pi_{\ell_p^w;c_0(\cdot)}(^*\ell_p; F) \overset{(4.3)}{=} \Pi_{\ell_p^w;\ell_p^u}(^*\ell_p; F) \approx \ell_p^u(F),$$

logo $(u(x_j))_{j=1}^\infty = (u \circ v(e_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(F)$. Portanto $u \in \Pi_{X;\ell_p^u}(E;F)$. $\square$

O exemplo a seguir mostra como pode-se obter igualdades originais usando a proposição acima.

Exemplo 4.3.2. Seja $1 \leq p < \infty$. No Exemplo 4.1.19 vimos que a classe de sequências ℓ_p^{mid} é ideal-representável. Da Proposição 4.3.1 segue que

$$\Pi_{\ell_p^{\mathrm{mid}};c_0(\cdot)} = \Pi_{\ell_p^{\mathrm{mid}};\ell_p^u}.$$

A proposição a seguir versa sobre a injetividade de classes ideal-representáveis.

Proposição 4.3.3. *Seja X uma classe de sequências $(\mathcal{I},\lambda)$-representável. Então:*

(i) *A classe de sequências λ_*^w é injetiva.*

(ii) *Se o ideal $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ for injetivo, então a classe X é injetiva.*

Demonstração. Sejam E,F espaços de Banach, $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ e $v \in \mathcal{L}(E;F)$ uma injeção métrica.

(i) Suponha que $(v(x_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(F)$. Para cada $\varphi \in E^*$, o funcional linear contínuo

$$\overline{\varphi}\colon v(E) \subseteq F \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \overline{\varphi}(v(x)) = \varphi(x),$$

está bem definido pois v é injetora por ser injeção métrica. Chame de $\widetilde{\varphi} \in F^*$ uma extensão de Hahn-Banach (logo linear contínua) de $\overline{\varphi}$ a F. Temos

$$\|\widetilde{\varphi}\| = \|\overline{\varphi}\| = \sup_{v(x)\in B_F} \|\overline{\varphi}(v(x))\| = \sup_{x\in B_F} \|\varphi(x)\| = \|\varphi\|.$$

Como $(v(x_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(F)$ e $\widetilde{\varphi} \in F^*$,

$$(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = (\widetilde{\varphi}\circ v(x_j))_{j=1}^\infty \in \lambda_*.$$

Segue que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(E)$ e

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} &= \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = \sup_{\widetilde{\varphi}\in B_{F^*}} \|(\widetilde{\varphi}\circ v(x_j))_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*}\\ &\leq \sup_{\psi\in B_{F^*}} \|(\psi(v(x_j)))_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*} = \|(v(x_j))_{j=1}^\infty\|_{w,\lambda_*}.\end{aligned}$$

(ii) Por hipótese, o ideal $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é injetivo. Seja $(v(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F)$. Como a classe de sequências λ_*^w é injetiva, pelo item (i) e $X(F) \overset{1}{\hookrightarrow} \lambda_*^w(F)$, temos $(x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_*^w(E)$. Podemos então tomar $u \in \mathcal{L}(\lambda;E)$ tal que $u(e_j) = x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando a hipótese de X ser ideal-representável e

$$(v\circ u(e_j))_{j=1}^\infty = (v(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F),$$

obtemos $v\circ u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;F)$. Como $\Pi_{\lambda_*^w;X}$ é injetivo por hipótese, concluímos que $u \in \Pi_{\lambda_*^w;X}(\lambda;E)$, $\|u\|_{\lambda_*^w;X} \leq \|v\circ u\|_{\lambda_*^w;X}$, e portanto $(x_j)_{j=1}^\infty = (u(e_j))_{j=1}^\infty \in X(E)$ e

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} &= \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|u\|_{\lambda_*^w;X} \leq \|v\circ u\|_{\lambda_*^w;X}\\ &= \|(v\circ u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(F)} = \|(v(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X(F)}.\end{aligned}$$

□

Conforme prometido, provaremos agora uma versão mais geral da Proposição 3.4.3, que estabelece que toda classe linearmente estável com componente escalar ℓ_p se situa entre $\ell_p\langle\cdot\rangle$ e ℓ_p^w. É interessante notar que, além de ser muito mais geral, a demonstração é bem mais curta que a anterior. Isso se deve ao estudo da ideal-representabilidade.

Proposição 4.3.4. *Seja $1 < p < \infty$. Se X é uma classe de sequências linearmente estável tal que $X(\mathbb{K}) = \ell_p$, então $\ell_p\langle\cdot\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$.*

Demonstração. Já vimos a segunda inclusão, portanto basta provar a primeira. Sabemos do Exemplo 4.0.1 que a classe de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é representada pelo ideal dos operadores nucleares $\mathcal{N}$ que, por sua vez, é o menor ideal de Banach (Teorema 1.3.5). Assim, dados um espaço de Banach E e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$, existe um operador $u \in \mathcal{N}({}^*\ell_p; E) \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_{\ell_p^w;X}({}^*\ell_p; E)$ de modo que $(x_j)_{j=1}^\infty = (u(e_j))_{j=1}^\infty$. Pela Proposição 4.1.9 podemos concluir que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ pois $u \in \Pi_{\ell_p^w;X}({}^*\ell_p; E)$. Além disso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(u(e_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \leq \|u\|_{\Pi_{\ell_p^w;X}} \leq \|u\|_{\mathcal{N}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p\langle E\rangle}.$$

$\square$

Referências

[1] R. Alencar and K. Floret, *Weak-strong continuity of multilinear mappings and the Pełczyński-Pitt theorem*, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), no. 2, 532–546.

[2] R. Alencar and M. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. Analisis Matematico **12** (1989), no. 2, 1–34.

[3] T. R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, FAMAT, UFU (2011).

[4] R. M. Aron and P. Galindo, *Weakly compact multilinear mappings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **40** (1997), no. 1, 181–192.

[5] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **97** (1997), no. 2, 145–153.

[6] ______, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2006), no. 1, 69–102.

[7] G. Botelho and J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math. **183** (2017), no. 3, 415–435.

[8] ______, *Duality theory for generalized summing linear operators*, Collect. Math. **74** (2023), no. 2, 457–472.

[9] G. Botelho, J. R. Campos, and J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 1–17.

[10] G. Botelho, V. V. Fávaro, and S. A. Pérez, *Uncomplemented subspaces in operator and polynomial ideals*, Rev. Mat. Complut. **35** (2022), no. 3, 851–869.

[11] G. Botelho, D. Pellegrino, and P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1139–1155.

[12] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, 3a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática (2023).

[13] G. Botelho and A. S. Santiago, *Symmetric ideals of generalized summing multilinear operators*, Linear and Multilinear Algebra (2024), 17.

[14] G. Botelho and R. Wood, *Hyper-ideals of multilinear operators and two-sided polynomial ideals generated by sequence classes*, Mediterr. J. Math. **20** (2023), no. 1, Paper No. 35, 16.

[15] H. A. Braunss, *Multi-ideals with special properties*, Blatter Potsdamer Forschungen **1** (1987), 87.

[16] H. A. Braunss and H. Junek, *Factorization of injective ideals by interpolation*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), no. 2, 740–750.

[17] J. R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de Doutorado, UFPB-UFCG (2013).

[18] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press (2005).

[19] J. M. F. Castillo and F. Sanchez, *Dunford-Pettis-like properties of continuous vector function spaces*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6** (1993), no. 1, 43–59.

[20] D. Chen, J. Alejandro Chávez-Domínguez, and L. Li, *p-converging operators and Dunford-Pettis property of order p*, J. Math. Anal. Appl. **461** (2018), no. 2, 1053–1066.

[21] J. S. Cohen, *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. **201** (1973), 177–200.

[22] A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Mathematics Studies **176** (1993).

[23] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer London (1999).

[24] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (1984).

[25] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Pietsch, *Operator ideals*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1 (2001), 437–496.

[26] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge university press **43** (1995).

[27] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley & Sons **10** (1988), no. 43, 872.

[28] K. Floret, *Minimal ideals of n-homogeneous polynomials on Banach spaces*, Results Math. **39** (2001), no. 3-4, 201–217.

[29] K. Floret and D. García, *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), no. 3, 300–308.

[30] J. H. Fourie and I. M. Röntgen, *Banach space sequences and projective tensor products*, J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), no. 2, 629–644.

[31] S. Geiss, *Ein Faktorisierungssatz für multilineare Funktionale*, Math. Nachr. **134** (1987), no. 2, 149–159.

[32] M. González and J. M. Gutiérrez, *Injective factorization of holomorphic mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 6, 1715–1721.

[33] H. Junek and M. C. Matos, *On unconditionally p-summing and weakly p-convergent polynomials*, Arch. Math. (Basel) **70** (1998), no. 1, 41–51.

[34] R. Khalil, *On some Banach space sequences*, Bull. Austral. Math. Soc. **25** (1982), no. 2, 231–241.

[35] S. Kwapień, *On operators factorizable through L_p space*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971), Supplément au Bull. Soc. Math. France, vol. Tome 100, Soc. Math. France, Paris, 1972, pp. 215–225.

[36] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer (1977).

[37] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York **183** (1998).

[38] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications (2010).

[39] L. Nascimento, *Quasi-normas tensoriais e operadores associados no ambiente de classes de sequências*, Tese de Doutorado, CCEN-UFPB (2021).

[40] D. T. Nguyen and V. V. Ricardo, *Convergence of the Rademacher series in a Banach space*, Vietnam J. Math. **26** (1998), no. 1, 71–85.

[41] D. F. Nogueira, *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU (2016).

[42] G. M. Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU (2012).

[43] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. **28** (1966/67), 333–353.

[44] ______, *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company (1980).

[45] ______, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983), Teubner-Texte Math., vol. 67, Teubner, Leipzig, 1984, pp. 185–199.

[46] J. Ribeiro, F. Santos, and E. R. Torres, *Coherence and compatibility: a stronger approach*, Linear Multilinear Algebra **70** (2022), no. 1, 66–80.

[47] L. G. Santisteban, *Técnicas de extensão de operadores multilineares em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU (2019).

[48] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU (2010).

[49] D. P. Sinha and A. K. Karn, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of ℓ_p*, Studia Math. **150** (2002), no. 1, 17–33.

[50] Y. Takahashi and Y. Okazaki, *Characterizations of subspaces, quotients and subspaces of quotients of L_p*, Hokkaido Math. J. **15** (1986), no. 2, 233–241.

[51] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, and S. A. Chobanyan, *Probability Distributions on Banach Spaces*, Springer Science & Business Media **14** (1987).

[52] P. Woytaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press **25** (1996).

Apêndices

Apêndice A

Propriedades adicionais de Rad e RAD

Vimos no Lema 3.2.19 da Seção 3.2 que as classes Rad e RAD são finitamente zero invariantes, finitamente zero substituíveis e finitamente contráteis. Veremos neste apêndice que essas classes também gozam de outras propriedades.

Proposição A.0.1. *As classes* Rad *e* RAD *são zero invariantes, zero substituíveis, invariantes por subsequência e, no caso real* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, esfericamente completas.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$. Do fato de Rad ser finitamente zero invariante (Lema 3.2.19) segue facilmente que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$ se, e somente se, $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$ e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{Rad}}(E) = \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{Rad}}(E).$$

Suponhamos agora que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E) \setminus c_{00}(E)$. Neste caso, podemos tomar uma sequência $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ crescente de modo que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ é convergente em $L_2([0,1];E)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon.$$

Tomando $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_{j_0} > n_0$, se $j \geq j_0$ então $k_j \geq k_{j_0} > n_0$. Daí, dados $m > n > j_0$, usando que Rad é finitamente zero invariante,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=n}^{m} r_j x_j^0\right\|_{L_2([0,1];E)} &= \left\|\sum_{j=n}^{m} r_j x_{k_j}\right\|_{L_2([0,1];E)} \\ &= \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_{k_n}, x_{k_{n+1}}, x_{k_{n+2}}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\ &= \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_n-1)-\text{vezes}}, x_{k_n}, x_{k_n+1}, x_{k_n+2}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \\ &= \left\|\sum_{k_n}^{k_m} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Isso prova que a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j x_j^0$ converge em $L_2([0,1];E)$, isto é, $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$. Por outro lado, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} \setminus c_{00}(E)$ com $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$, considere $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ crescente de modo que $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Então $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(E)$ e dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left\|\sum_{n}^{m} r_j x_{k_j}\right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon.$$

Assim, para $m > n > k_{n_0}$ temos $k_{n_0} < n$ e $m \leq k_m$. Como Rad é finitamente contrátil podemos contrair a sequência

$$(\underbrace{0,\ldots,0,}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}\ x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)$$

nas coordenadas $k_{n_0}, k_{n_0}+1, \ldots, n-1, x_m+1, \ldots, x_{k_m}-1$ e x_{k_m}, obtendo assim a sequência

$$(\underbrace{0,\ldots,0,}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}\ x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$$

e a desigualdade

$$\|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} \leq \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, \ldots, x_{k_m}, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)}. \tag{A.1}$$

Além disso, como $k_{n_0} - 1 < n - 1$ e Rad é finitamente zero invariante, podemos incluir zeros na sequência $(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$ repetidas vezes até obtermos a sequência

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots),$$

para a qual vale a igualdade

$$\|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)} = \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(n-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots)\|_{\mathrm{Rad}(E)}. \tag{A.2}$$

Do conjunto ordenado

$$L := \{x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, x_{k_{n_0}+2}, \ldots, x_{k_m-1}, x_{k_m}\},$$

podemos extrair o subconjunto ordenado

$$\{x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0+1}}, x_{k_{n_0+2}}, \ldots, x_{k_{m-1}}, x_{k_m}\}$$

formada pelos elementos da subsequência $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ que estão entre a k_{n_0}-ésima e a k_m-ésima coordenada. Como $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} = (x_j^0)_{j=1}^{\infty}$, qualquer elemento de L que não seja da forma x_{k_i}, para algum $n_0 \leq i \leq m$, é igual a zero. Usando novamente o fato de Rad ser finitamente zero invariante segue que

$$\begin{aligned} &\|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, x_{k_{n_0}+2}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \\ &= \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0+1}}, x_{k_{n_0+2}}, \ldots, x_{k_{m-1}}, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j=n}^{m} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} &= \|(\underbrace{0,\ldots,0,}_{(n-1)-\text{vezes}}\ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \\ &\overset{(A.2)}{=} \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \\ &\overset{(A.1)}{\leq} \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, x_{k_{n_0}+2}, \ldots, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \\ &\overset{(A.3)}{=} \|(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k_{n_0}-1)-\text{vezes}}, x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0+1}}, x_{k_{n_0+2}}, \ldots, x_{k_{m-1}}, x_{k_m}, 0, 0, \ldots)\|_{\text{Rad}(E)} \\ &= \left\|\sum_{n_0}^{m} r_j x_{k_j}\right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon \end{aligned}$$

e assim $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{Rad}(E)$. Isso prova que Rad também é zero invariante.

Provemos agora que RAD e Rad são zero substituíveis e, no caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esfericamente completas. Comecemos com $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in E$ e $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \{1, 0, -1\}$. Pelo Princípio da Contração de Kahane (Teorema 1.2.7),

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} \leq \left(\max_{j=1,\ldots,k} |\theta_j|\right) \cdot \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} \leq \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)}.$$

Em resumo, para todo k, todos $x_1, \ldots, x_k \in E$ e todos $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \{1, 0, -1\}$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)} \leq \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j x_j\right\|_{L_2([0,1];E)}. \tag{A.4}$$

Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{RAD}(E)$, $(\theta_j)_{j=1}^{\infty} \subset \{1, -1\}$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \subset \{1, 0\}$. Aplicando a definição de RAD e (A.4), temos

$$\sup_k \left\| \sum_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \leq \sup_k \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < +\infty$$

e

$$\sup_k \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \leq \sup_k \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < +\infty,$$

o que mostra que $(\theta_j x_j)_{j=1}^{\infty}, (\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{RAD}(E)$, $\|(\theta_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{RAD}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{RAD}(E)}$ e $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{RAD}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{RAD}(E)}$. Isso mostra que RAD é esfericamente completa e zero substituível.

Sejam agora $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{Rad}(E)$, $(\theta_j)_{j=1}^{\infty} \subset \{1, -1\}$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \subset \{1, 0\}$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} \theta_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \overset{(A.4)}{\leq} \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon$$

e

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \overset{(A.4)}{\leq} \left\| \sum_{j=n}^{m} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} < \varepsilon$$

para todos $m > n \geq n_0$. Isso prova que $(\theta_j x_j)_{j=1}^{\infty}, (\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \text{Rad}(E)$. A convergência $\sum\limits_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j r_j x_j$ em $L_2([0,1], E)$ implica que

$$\begin{aligned}
\|(\theta_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} = \left\| \lim_k \sum_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \\
&= \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{k} \theta_j r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \overset{(A.4)}{\leq} \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} \\
&= \left\| \lim_k \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j \right\|_{L_2([0,1];E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)}
\end{aligned}$$

e assim $\|(\theta_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)}$ e de forma análoga obtemos $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\text{Rad}(E)}$. Logo Rad também é esfericamente completa e zero substituível.

Por fim, segue do item (ii) da Proposição 3.2.18 que RAD e Rad são invariantes por subsequência. $\square$

Apêndice B

Algumas definições a respeito de classes de sequências

Para comodidade do leitor, apresentamos neste apêndice uma compilação das definições das propriedades de classes de sequências utilizadas na tese. Exemplos e um resultado adicional também serão apresentados.

Definição B.0.1. Sejam E um espaço de Banach e $S(E)$ um subespaço vetorial normado de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações coordenada-a-coordenada. O espaço $S(E)$ é dito ser:

(i) *Invariante por subsequências* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência crescente $(k_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_{k_j})_{j=1}^{\infty} \in S(E) \;\text{ e }\; \|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(ii) *Finitamente contrátil* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_j)_{j\neq n} \in S(E) \;\text{ e }\; \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(iii) *Zero invariante* se valem as implicações

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \Leftrightarrow (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$$

e, neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}$.

(iv) *Finitamente zero invariante* se para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, valem as implicações

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \Leftrightarrow (x_j)_{j\neq n} \in S(E)$$

e, neste caso, $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j\neq n}\|_{S(E)}$.

(v) *Zero substituível* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tem-se

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \quad \text{e} \quad \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(vi) *Finitamente zero substituível* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots)\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(vii) *Esfericamente completo* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e, neste caso, $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}$.

Definição B.0.2. Uma classe de sequências X é dita ser:

(i) *Invariante por subsequência* se $X(E)$ for invariante por subsequência para todo espaço de Banach E.

(ii) *Finitamente contrátil* se $X(E)$ for finitamente contrátil para todo espaço de Banach E.

(iii) *Zero invariante* se $X(E)$ for zero invariante para todo espaço de Banach E.

(iv) *Finitamente zero invariante* se $X(E)$ for finitamente zero invariante para todo espaço de Banach E.

(v) *Zero substituível* se $X(E)$ for zero substituível para todo espaço de Banach E.

(vi) *Finitamente zero substituível* se $X(E)$ for finitamente zero substituível para todo espaço de Banach E.

(vii) *Esfericamente completa* se $X(E)$ for esfericamente completo para todo espaço de Banach E.

para todo espaço de Banach E.

Exemplo B.0.3. Para $1 \leq p < \infty$, $c_0(\cdot)$, c_0^w, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p(\cdot)$, ℓ_p^u, ℓ_p^{mid}, ℓ_p^w, Rad, RAD e $\ell_\infty(\cdot)$ são todos exemplos de classes zero invariantes, zero substituíveis e invariantes por subsequências. Para mais propriedades veja o Apêndice A e os Exemplos 3.1.3, 3.2.8, 3.2.12 e 3.2.20.

Exemplo B.0.4. A classe $c(\cdot)$ das sequências convergentes não é zero invariante e nem zero substituível, no entanto, é finitamente zero invariante, finitamente zero substituível e invariante por subsequências. Veja os Exemplos 3.1.3 e 3.2.13.

A Proposição a seguir mostra como alguns destes conceitos se relacionam entre si.

Proposição B.0.5. *Sejam E um espaço de Banach, X uma classe de sequências finitamente determinada e $S(E)$ um espaço de sequências.*

(i) *Suponha que $S(E)$ seja finitamente zero invariante. Então $S(E)$ é finitamente contrátil se, e somente, for finitamente zero substituível.*

(ii) *Se $S(E)$ é zero invariante e zero substituível, então também é invariante por subsequências.*

(iii) *Se X é finitamente zero invariante e finitamente contrátil, então X é zero substituível.*

(iv) *Suponha que*

$$\|(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{X(E)} = \|(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_{X(E)}$$

para todos $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $x_1, \ldots, x_n \in E$. Então $X(E)$ é zero invariante.

Demonstração. Para os itens (i), (ii) e (iv) veja a Proposição 3.2.18.

(iii) Suponha X seja finitamente zero invariante e finitamente contrátil. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Segue do item (i) que X é finitamente zero substituível, ou seja, $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^{n}\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}.$$

Portanto $(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$. $\square$

Apêndice C

Propriedades adicionais do procedimento $X \mapsto X^{\mathrm{fd}}$

O objetivo deste apêndice é avançar um pouco mais no estudo do procedimento $X \mapsto X^{\mathrm{fd}}$. A definição e os resultados aqui apresentados não foram utilizados em nenhum momento no desenvolvimento da tese.

Definição C.0.1. Dizemos que uma classe de sequências X é *parcialmente determinada* se vale a seguinte implicação

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \Rightarrow \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}$$

para todo espaço de Banach E.

Veja que a propriedade de ser parcialmente determinada é mais fraca do que ser finitamente determinada.

Proposição C.0.2. *Seja X uma classe de sequências linearmente estável. Então*

(i) *Se X é parcialmente determinada, então X é subclasse fechada de X^{fd}.*

(ii) *X é finitamente determinada se, e somente se, $X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{=} X$.*

(iii) *(Idempotência) Se X é finitamente contrátil, então*

$$(\overline{c_{00}}^X)^{\mathrm{fd}} \overset{1}{=} (X^u)^{\mathrm{fd}} \overset{1}{=} X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{=} (X^{\mathrm{fd}})^{\mathrm{fd}}.$$

(iv) *(Monotonicidade) Se Y é uma classe de sequências tal que $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$, então $X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{\hookrightarrow} Y^{\mathrm{fd}}$.*

(v) *Se X é subclasse fechada de uma classe de sequências finitamente determinada Y, então $Y = X^{\mathrm{fd}}$.*

Veja que, para classes de sequências finitamente contráteis e parcialmente determinadas, os itens (i), (iii) e (iv) acima fazem da relação $X \mapsto X^{\mathrm{fd}}$ um procedimento de envoltória.

Demonstração. (i) Por hipótese, X é parcialmente determinada. Dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$,

$$\sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} < +\infty,$$

logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}$. Portanto $X(E)$ é subespaço fechado de $X^{\mathrm{fd}}(E)$.

(ii) Por hipótese, X é finitamente determinada. Então,

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E) \Leftrightarrow \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} < +\infty \Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

Reciprocamente, se $X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{=} X$, então

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E) \Leftrightarrow \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} < +\infty$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}.$$

(iii) Por hipótese, X é finitamente contrátil. Isso garante a validade da primeira igualdade abaixo, e portanto todas as outras também valem: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)} = \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X^u(E)} = \|(x_j)_{j=1}^n\|_{\overline{c_{00}}^X(E)}.$$

Isso é suficiente para concluir todas as igualdades do enunciado.

(iv) De $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathrm{fd}}(E)$, temos

$$\sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{Y(E)} \le \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} < +\infty,$$

logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y^{\mathrm{fd}}(E)$. Mais ainda,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Y^{\mathrm{fd}}(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{Y(E)} \le \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\mathrm{fd}}(E)}$$

e portanto $X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{\hookrightarrow} Y^{\mathrm{fd}}$.

(v) Por hipótese, a classe de sequências X é subclasse fechada de uma classe finitamente determinada Y. Dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$

$$\sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} = \sup_n \|(x_j)_{j=1}^n\|_{Y(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(E)}.$$

Isso prova que $Y(E) \subseteq X^{\mathrm{fd}}(E)$ com igualdade de normas em $Y(E)$. Dos itens (ii) e (iv) segue

$$X^{\mathrm{fd}} \overset{1}{\hookrightarrow} Y^{\mathrm{fd}} = Y,$$

e portanto $Y \overset{1}{=} X^{\mathrm{fd}}$. □