

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antônio Marcos da Silva

**ANÁLISE MULTIESCALA DE CORREÇÕES DE
ORDEM SUPERIOR AO COMPORTAMENTO
ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO
DE BURGERS E DE SUAS EXTENSÕES**

Belo Horizonte
2020

Antônio Marcos da Silva

ANÁLISE MULTIESCALA DE CORREÇÕES DE ORDEM SUPERIOR AO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BURGERS E DE SUAS EXTENSÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Gastão de Almeida Braga

Coorientadora: Jussara de Matos
Moreira

Belo Horizonte
2020

Silva, Antônio Marcos da.

S586a Análise multiescala de correções de ordem superior ao comportamento assintótico de soluções da equação de Burgers e de suas extensões [manuscrito] / Antônio Marcos da Silva. – 2020.
91 f. il.

Orientador: Gastão de Almeida Braga.

Coorientadora: Jussara de Matos Moreira.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.86-88.

1. Matemática – Teses. 2. Burgers, Equação de – Teses. 3. Teoria assintótica– Teses. 4. Grupo de renormalização – Teses. I. Braga, Gastão de Almeida. II. Moreira, Jussara de Matos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

Análise multiescala das correções de ordem superior ao comportamento assintótico de soluções da Equação de Burgers e de suas extensões


ANTÔNIO MARCOS DA SILVA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:


Prof. Gastão de Almeida Braga
UFMG


Profa. Jussara de Matos Moreira
UFMG


Profa. Camila Ferreira de Souza
CEFET-MG


Prof. Frederico da Cunha Furtado
UWYO - EUA


Prof. Gustavo Barbagallo de Oliveira
UFMG


Prof. Paulo César Carrião
UFMG

“A lei da mente é implacável.
O que você pensa, você cria;
O que você sente, você atrai;
O que você acredita, torna-se realidade.”
(Buda)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e por ter me dado forças para realizar esse trabalho.

Ao meu orientador, professor Gastão. Um paizão que, com muita paciência e dedicação, se tornou para mim uma referência de educador, pesquisador e ser humano. Meu parceiro que, durante os quatro primeiros meses da quarentena, foi uma grande companhia através de nossas longas discussões via ligações, chamadas de vídeos e mensagens via WhatsApp. G, você não tem ideia do quanto isso foi importante para mim naquele momento. Obrigado!

À Jussara que também me coorientou desde o mestrado e se tornou uma pessoa muito importante para que eu conseguisse chegar até aqui.

Aos membros da banca examinadora, Camila Ferreira de Souza, Frederico Furtado, Gustavo Oliveira e Paulo César Carrião, pela avaliação e pelas sugestões de melhoria na minha tese.

Aos meus pais, Maria José e Antônio, pelo amor, carinho, dedicação e, principalmente, pela constante presença mesmo estando longe. Sem a compreensão de vocês em relação à minha ausência em alguns momentos importantes da nossa família e sem o apoio que sempre me deram, talvez, hoje, eu não tivesse nem terminado a graduação. Amo vocês.

Aos meus irmãos, Fábio e Flávia. À minha cunhada Dulcimar e aos meus sobrinhos (Gabriel, Geovane, João Lucas, Taís e Thalys) pelo companheirismo, apoio e momentos felizes em Araújo.

Ao Dr. Emerson e às terapeutas Cristiane Peretti e Carla Bonfim, por me ajudarem a evoluir e a lutar contra a minha (bendita) ansiedade.

Ao Demat/UFOP pela liberação de um ano e meio durante o doutorado.

Aos amigos e colegas de trabalho, em especial, aos professores Ana Cristina, Ed, Edney, Juliano, Monique, Thiago Moraes, Vinícius Vivaldino e Wenderson, que além de me apoiarem, deixaram minha caminhada mais leve através de conselhos, brincadeiras e orientações profissionais.

Aos amigos Carlinhos, Fernanda Veríssimo, Leandro e Wendell, pela amizade e pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos amigos que a pós-graduação me trouxe e que sempre me apoiaram mesmo com minha ausência em alguns momentos: Aislan, Alana, Carlos Cjanahuri, Carlos Mejía, Irene, Fernanda Roing, Michely, Moacir e Tauan. Vocês contribuíram muito para a minha formação e para a realização deste sonho.

Aos funcionários e professores do PPGMAT/UFMG pela dedicação e prontidão.

Por fim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para realização do presente trabalho, expresso minha sincera gratidão.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento assintótico, para tempos longos, de soluções da equação de Burgers e de algumas de suas extensões. Essa análise é feita através de um método multiescala dito *Grupo de Renormalização*. Inicialmente, introduzimos o problema de valor inicial analisado e enunciamos os resultados desta tese. A estrutura do método é estabelecida para o caso linear sob a condição de dado inicial de massa zero. Posteriormente, o método é generalizado e passamos ao estudo da equação de Burgers e de algumas de suas extensões utilizando o mesmo método.

Palavras-chave: comportamento assintótico; grupo de renormalização; equação de Burgers; dado inicial com massa zero.

Abstract

This work aims to analyze the long time asymptotic behavior of solutions to the Burgers equation and some of its extensions. This analysis is done through a multiscale method known as *Renormalization Group*. Initially, we introduce the initial value problem we have analyzed and state the results of this thesis. The method's structure is established for the linear case where the initial data has mass zero. Subsequently, the method is generalized and we move on to the study of Burger's equation and some of its extensions using the same method.

Keywords: asymptotic behavior; renormalization group; Burgers equation; initial data with mass zero.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Breve histórico do método e alguns resultados preliminares	11
1.2	A origem do problema tratado nesta tese	14
1.3	Descrição do resultados obtidos	16
2	O Operador RG e a Equação Linear	19
2.1	O argumento heurístico	19
2.2	Definição e propriedades do operador RG linear	21
2.3	O comportamento assintótico - Caso linear com dado inicial de massa zero	26
3	O grupo de renormalização para a Equação de Burgers	30
3.1	As classificações das não-linearidades	31
3.2	Existência e unicidade local	32
3.2.1	Resultados preliminares	34
3.2.2	O teorema da existência e unicidade local	43

3.3	Os primeiros passos do processo indutivo	43
3.4	O Lema da Renormalização para a Equação de Burgers	53
3.5	Processo indutivo	56
3.6	O comportamento assintótico	62
4	Não linearidades do tipo $u^{2m+1}u_x^n$	65
4.1	Resultados Preliminares	68
4.2	Existência e unicidade local	71
4.3	Renormalização e demonstração do Teorema 1.2	79
	Referências	86
	A Transformada de Fourier	89

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar, através do método do Grupo de Renormalização, as propriedades assintóticas, para tempos longos, da solução do seguinte problema de valor inicial (pvi)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = u_{xx} + \lambda F(u, u_x), x \in \mathbb{R}, t > 1, \\ u(x, 1) = f(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

O dado inicial $f(x)$, que será especificado posteriormente como elemento de um determinado espaço de Banach, deverá satisfazer uma das duas hipóteses a seguir:

1. $f(x)$ satisfaz à condição de *massa (ou média) zero*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0; \quad (1.2)$$

2. $f(x)$ é uma função *ímpar* de x . Em particular, f satisfaz à condição (1.2).

O parâmetro λ é um número real que, sem perda de generalidade, será tomado no intervalo $[-1, 1]$. $F(u, u_x)$ denota, genericamente, as não-linearidades da equação e estas serão, necessariamente, distintas de uu_x . Informalmente, podemos descrever o resultado principal deste trabalho da seguinte maneira:

se o dado inicial f for “pequeno” (em um certo sentido) e se uma das duas hipóteses a seguir for satisfeita:

H-1) $\lambda = 0$ e f satisfaz à condição de massa zero;

H-2) $\lambda \neq 0$, f é ímpar e o termo não-linear $F(u, u_x)$ é uma soma, a ser especificada posteriormente, de parcelas da forma $u^{2m+1}u_x^n$;

então a solução $u(x, t)$ do pvi (1.1) está definida para todo t e, para $t \gg 1$,

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t} f_1^* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad (1.3)$$

onde A é um pré-fator e

$$f_1^*(x) = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{4}}}{2 \sqrt{4\pi}}. \quad (1.4)$$

H-1 e H-2 estão ligadas, respectivamente, às hipóteses dos teoremas 1.1 e 1.2 que serão enunciados na Seção 1.3 e provados nos capítulos 3 e 4, respectivamente.

1.1 Breve histórico do método e alguns resultados preliminares

Para provar os teoremas 1.1 e 1.2, usaremos o método do *Grupo de Renormalização* (RG). Esse método foi muito bem sucedido na determinação da forma assintótica de soluções de equações de evolução não-lineares. O método se baseia na invariância por mudanças de escalas e na autossimilaridade de EDPs e de suas soluções. O mesmo foi formalmente desenvolvido, do ponto de vista das Equações Diferenciais, no início dos anos 90 por Goldenfeld, Oono e colaboradores [14, 16, 17]. Posteriormente, Bricmont et al. [10] desenvolveram rigorosamente esse método. Ainda nos anos 90, Chen e Goldenfeld [13] apresentaram uma versão numérica para a implementação do método do Grupo de Renormalização. Mais tarde, uma versão modificada desse método foi implementada numericamente por Braga, Furtado e Isaia [3] e, logo depois, Braga et al. [5], baseados nesses e em outros trabalhos, estudaram numericamente alguns problemas para a equação de difusão não-linear com coeficientes de difusão periódicos. Nessa mesma linha de estudo, vários outros trabalhos, tanto analíticos quanto numéricos, envolvendo equações diferenciais foram desenvolvidos utilizando-se o método do Grupo de Renormalização [2, 4, 6, 7, 8, 9, 12].

Para o trabalho desenvolvido nesta tese, cumpre ressaltar alguns dos resultados obtidos por Bricmont et al. em [10], onde os autores usaram o RG para estudar o comportamento assintótico das soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + G(u, u_x, u_{xx}), & x \in \mathbb{R}, t > 1, \\ u(x, 1) = f(x), \end{cases} \quad (1.5)$$

onde

$$G(u, v, w) = \sum_{\{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0\}} C_{a,b,c} u^a v^b w^c.$$

Dentre os vários resultados apresentados em [10], os dois a seguir são os que mais nos interessam:

1) sob a condição $a + 2b + 3c > 4$ nos expoentes da soma acima, a solução $u(x, t)$ do pvi (1.5), assintoticamente no tempo, se comporta como

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \text{quando } t \gg 1, \quad (1.6)$$

onde

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad (1.7)$$

isto é, $u(x, t)$ decai para zero e se espalha espacialmente com taxa \sqrt{t} , tendo como função perfil a distribuição gaussiana ϕ ;

2) se $G(u, v, w)$ é da forma

$$G(u, v, w) = -uu_x + \lambda \sum_{\{a+2b+3c>4\}} C_{a,b,c} u^a v^b w^c, \quad (1.8)$$

então, para $t \gg 1$, a solução $u(x, t)$ assintoticamente mantém as mesmas taxas de espalhamento e decaimento mas a função perfil é modificada, isto é

$$u(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{t}} f_B^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{quando } t \gg 1, \quad (1.9)$$

onde f_B^* representa a família de funções

$$f_B^*(x) = \frac{B\phi(x)}{1 + Be(x)}, \quad (1.10)$$

em que $\phi(x)$ é dado por (1.7), $e(x) = (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{4}} dy$ é a função-erro e o pré-fator B depende, dentre outras coisas, do dado inicial f . A segunda situação, descrita acima, é a que mais nos

interessa pois a não-linearidade G , dada por (1.8), é similar à não-linearidade $-uu_x + \lambda F$ do pvi (1.1). Sob a condição de massa zero (1.2), segue dos resultados de [10] que o pré-fator B se anula e, conseqüentemente, (1.9) não nos fornece nenhuma informação relevante sobre o comportamento assintótico da solução exceto que $u(x, t) \approx 0$ se $t \gg 1$. Se quisermos informações mais precisas então é necessário modificar o operador RG definido em [10] e é isto o que faremos neste trabalho. Mostraremos que é possível redefinir esse operador de maneira que o comportamento (1.3) prevaleça sobre (1.9).

Outros trabalhos importantes a serem ressaltados aqui são os estudos de Bona et al. em [11, 12]. Através do método do RG, eles analisaram o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + u^p u_x + u_{xxx} + M_\beta u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde M_β é um operador que, no espaço de Fourier, satisfaz a propriedade $\widehat{M_\beta}(\omega) = |\omega|^{2\beta}$, com $1/2 < \beta \leq 1$ e $2\beta \leq p$. Em [11] eles utilizaram o RG para mostrar que, se o dado inicial for suave e pequeno o suficiente, então o comportamento assintótico da solução do pvi (1.11) não depende da não-linearidade, da dispersão e nem mesmo do dado inicial (exceto pela sua massa). Em seguida, em [12], eles refinaram a análise assintótica para identificar os efeitos da não-linearidade e da dispersão no comportamento da solução em tempos longos. Bona et al. verificaram que, se o dado inicial for suficientemente pequeno e se $u(x, t)$ é a solução de (1.11), então,

$$u(x, t) \approx \frac{1}{t^{1/2\beta}} \Gamma_{A,B}(x, t), \text{ quando } t \gg 1,$$

com $\Gamma_{A,B}(x, t)$ definida no espaço de Fourier como

$$\widehat{\Gamma_{A,B}}(\omega, t) = A e^{-|\omega|^{2\beta t}} - [iAt\omega^3 - iB\omega] e^{-|\omega|^{2\beta t}} + \widehat{N}(\omega, t),$$

onde A é a massa do dado inicial f , B é uma constante dependente de f ,

$$\widehat{N}(\omega, t) = \frac{i\omega}{p+1} \int_1^t e^{-|\omega|^{2\beta(t-s)}} \mathcal{F} \left(\left[\frac{A}{s^{1/2\beta}} f^* (\cdot/s^{1/2\beta}) \right]^{p+1} \right) (\omega) ds \text{ e } f^*(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} e^{-|\omega|^{2\beta}} d\omega.$$

Dessa forma, eles mostraram que, enquanto a dissipação domina o decaimento, a dispersão e a não-linearidade são evidentes em termos de segunda ordem. Além disso, a dependência que é obtida dos dados iniciais, captura o termo predominante no comportamento assintótico quando a perturbação tem massa total zero. Apesar de Bona et al. terem obtido essa correção em [12],

lá ela não surge de maneira natural através da convergência das iteradas de um operador em torno de seu ponto fixo diferentemente do que apresentamos nesta tese. Além disso, embora não consideremos o termo dispersivo, trataremos de não-linearidades mais gerais que as tratadas em [12] e consideraremos o dado inicial com massa zero. Essa abordagem é possível pois, como ficará claro no Capítulo 2, não utilizamos o *scaling* canônico como feito nos trabalhos anteriores, inclusive em [12]. Essa nova mudança de escalas modifica a classe de perturbação à qual as perturbações da forma $u^p u_x$ pertencem (veja Seção 3.1) e, conseqüentemente, nos permite tal generalização.

1.2 A origem do problema tratado nesta tese

A motivação para este trabalho surgiu da nossa tentativa de compreender, dentro do contexto do método do Grupo de Renormalização, os resultados numéricos apresentados por Braga et. al. em [4] e relativos ao pvi (1.5) quando $G(u, v, w) = -uv$, veja (1.8) com $\lambda = 0$, e quando f tem massa zero. Como observamos no parágrafo anterior, sob estas hipóteses só é possível concluir de (1.9) que $u(x, t) \approx 0$ se $t \gg 1$, nada além disto. Em [4], usa-se o *Grupo de Renormalização Numérico* (NRG), um algoritmo multi-escala que é robusto o suficiente para fornecer todas as informações assintoticamente relevantes (taxas de decaimento e espalhamento temporais, além da função-perfil com que estas taxas ocorrem) de soluções de problemas de valor inicial para equações do tipo parabólicas. Em particular, na Seção 2.3 daquele trabalho, usa-se o NRG para estudar o seguinte pvi associado à *Equação de Burgers com viscosidade ν* :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.12)$$

em que o dado inicial f satisfaz à condição de massa zero (1.2). O procedimento em escalas múltiplas, numericamente implementado em [4] para o caso $\nu = 0.01$, indica que, para x fixo, a solução do pvi (1.12) sob a condição (1.2), decai para zero, como função do tempo t , da seguinte maneira

$$u(x, t) \approx \frac{\tilde{A}}{t} f_1^* \left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}} \right), \quad t \gg 1, \quad (1.13)$$

com f_1^* dado por (1.4). A menos de constantes multiplicativas, podemos reinterpretar o resultado numérico (1.13) da seguinte maneira:

sob a condição de massa zero (1.2), a solução $u(x, t)$ do pvi (1.12) decai para zero com taxa t , se espalha com taxa $t^{1/2}$ e tem $f_1^*(x/\sqrt{\nu})$ como função perfil, isto é,

$$tu(\sqrt{t}x, t) \approx \tilde{A}f_1^*\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right), \quad t \gg 1.$$

Como ressaltado em [4], o pvi (1.12) possui solução explícita. De fato, usando a transformação de Hopf-Cole, Whitham [23] obtém uma representação integral para a solução $u(x, t)$ e, desta representação, pode-se concluir que, sob a condição (1.2), o comportamento (1.13) está corretamente predito pelo NRG. A conclusão é que o algoritmo numérico multi-escala implementado em [4] prevê corretamente os expoentes de decaimento, $\alpha = 1$, de espalhamento, $\beta = 1/2$, e a função perfil $f_1^*(x)$, sendo estas informações um forte indício de que deveria ser possível estabelecer analiticamente um argumento multi-escala que nos forneça estes parâmetros por primeiros princípios.

Observe que o pvi (1.12), com $\nu = 1$, é um caso particular do pvi (1.1) com $\lambda = 0$ e que, neste caso, o comportamento dado por (1.13) é idêntico ao dado por (1.3). Portanto, podemos dizer que, nesta tese, nós estudaremos uma *equação generalizada de Burgers* com viscosidade fixada em $\nu = 1$. O nosso objetivo é explicar, usando um argumento analítico em escalas múltiplas, que o resultado numérico (1.13) para a solução do pvi (1.12) com dado inicial de massa zero, é uma manifestação da dinâmica associada às iteradas de um operador para o qual f_1^* é um ponto fixo. Mostraremos que, sob a hipótese H-2, este argumento se estende para a equação generalizada de Burgers (1.1), isto é, veremos que o comportamento (1.13) também se manifesta para as soluções do pvi (1.1) com $\lambda \neq 0$. Justificaremos, dentro do espírito do Grupo de Renormalização, que o comportamento assintótico numericamente predito (1.13) advém das iteradas de um operador de renormalização com expoentes α e β corretamente escolhidos ($\alpha = 1$ e $\beta = 1/2$) e para o qual f_1^* é um ponto fixo.

1.3 Descrição do resultados obtidos

Iremos agora descrever os resultados obtidos nesta tese. Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lebesgue integráveis, tais que a sua transformada de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ seja de classe C^2 . Para $q > 1$, defina

$$\|f\|_q = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (1 + |\omega|^q) \left(|\widehat{f}(\omega)| + |\widehat{f}'(\omega)| + |\widehat{f}''(\omega)| \right). \quad (1.14)$$

Também defina o seguinte subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$

$$B_q = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(\omega) \in C^2(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\|_q < +\infty \right\}. \quad (1.15)$$

De maneira similar ao que foi feito em [8], é possível mostrar que $\|\cdot\|_q$ é uma norma, que o par $(B_q, \|\cdot\|_q)$ é um espaço de Banach e que $B_q \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Diferentemente de todos os trabalhos anteriores sobre o RG analítico, a nossa definição (1.14) de norma inclui um termo de derivada segunda. Nos próximos capítulos ficará clara a importância desse termo nesse caso. Finalmente, definimos a seguir a classe das não-linearidades que serão abordadas neste trabalho:

$$F(u, v) = \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} c_{m,n} u^{2m+1} v^n. \quad (1.16)$$

No Capítulo 3 determinaremos a solução $u(x, t)$ do pvi (1.1) para o caso $\lambda = 0$, a qual será dada implicitamente em termos da não-linearidade uu_x . Neste sentido, para que possamos aplicar o método do RG precisamos garantir que, para todo $t \geq 1$ fixo, porém arbitrário, a derivada primeira com respeito a x de $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, esteja bem definida e seja um elemento de $L^2(\mathbb{R})$. Agora, lembrando que $\widehat{h_x}(\omega) = i\omega \widehat{h}(\omega)$ quando $h, h_x \in L^2(\mathbb{R})$, temos que $\omega \widehat{h}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ desde que, para $|\omega| \gg 1$, seja válida a condição $[\omega \widehat{h}(\omega)]^2 \approx C|\omega|^{-(1+\epsilon)}$, para algum $\epsilon > 0$, ou, equivalentemente, $\widehat{h}(\omega) \approx C|\omega|^{-(3/2+\epsilon)}$. Portanto, lembrando que a transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ temos que $h_x \in L^2(\mathbb{R})$ desde que $q > 3/2$. Devido a essa observação, no Capítulo 3 utilizaremos a restrição $q > 3/2$ e obteremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Dados $q > 3/2$ e $f \in B_q$ satisfazendo a condição de massa zero (1.2), considere o pvi (1.1) com $\lambda = 0$. Existem números $\epsilon > 0$ e $A = A(f, uu_x)$ tais que, se $\|f\|_q < \epsilon$, então o pvi (1.1) possui uma única solução $u(x, t)$ definida para todo $t > 1$ e o seguinte limite é válido*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|tu(t^{\frac{1}{2}} \cdot, t) - Af_1^*(\cdot)\|_q = 0, \quad (1.17)$$

onde $f_1^*(\cdot)$ é dado por (1.4).

Observação 1.1 O Teorema 1.1 se refere ao pvi (1.12) que foi estudado numericamente por Braga et. al. em [4]. Portanto, este teorema valida os resultados numéricos lá obtidos.

Observação 1.2 Ainda sob a hipótese de massa zero, o Teorema 1.1 pode ser generalizado para equações da forma

$$u_t + [h(u)]_x = u_{xx},$$

onde $h(u)$ é uma função analítica na origem. Isto ficará claro durante a prova do teorema no Capítulo 3.

No caso em que a não-linearidade da equação tem uma forma mais geral do que $[h(u)]_x$, ainda é possível generalizar o Teorema 1.1 e este é o conteúdo do Teorema 1.2. Contudo, foi necessário alterar a hipótese sobre o dado inicial e supor que ele fosse ímpar e que as não-linearidades da equação preservassem essa simetria. Em particular, esta é a razão porque $F(u, v)$ é da forma (1.16) já que somas dessa forma preservam a simetria ímpar da solução. Além disso, para analisar o problema mais geral (1.1) é necessária uma restrição adicional ao valor de q , para garantir a convergência das séries de potência que aparecerão nos cálculos devido à (1.16) (veja Proposição 4.2). Assim, no Capítulo 4, consideraremos $q > 2$ e mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1.2 Dados $q > 2$ e f ímpar em B_q , considere o pvi (1.1) com $|\lambda| \leq 1$ e F definida em (1.16). Existem números $\epsilon > 0$ e $\bar{A} = \bar{A}(f, F)$ tais que, se $\|f\|_q < \epsilon$, então o pvi (1.1) possui uma única solução $u(x, t)$ definida para todo $t > 1$ e o seguinte limite é válido

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|tu(t^{\frac{1}{2}}, t) - \bar{A}f_1^*(\cdot)\|_q = 0, \quad (1.18)$$

sendo $f_1^*(\cdot)$ dada por (1.4).

Ambos os resultados acima serão obtidos via técnica do Grupo de Renormalização e, dessa forma, devemos inicialmente estudar como o método funciona no caso do estudo assintótico da equação linear, com dado inicial de *massa zero* (1.2). Com isso, esta tese está assim dividida: no Capítulo

2, inicialmente damos um argumento heurístico, no caso da equação linear, para explicar porque a condição de média zero nos leva ao comportamento (1.3). Este argumento motiva a definição do operador Grupo de Renormalização para o caso linear, que tem como ponto fixo a função perfil dada por (1.4) e contrai, para valores de L suficientemente grandes, funções em B_q com média e primeiro momento nulos. Tais resultados são enunciados, demonstrados e utilizados em seguida para verificar que a solução do pvi no caso linear e com dado inicial de massa zero, se comporta, para tempos longos, como um múltiplo de f_1^* , isto é, se comporta como em (1.3). No Capítulo 3, classificamos as não-linearidades da equação de acordo com o *scaling* adotado para definir o operador RG e estudamos o comportamento assintótico da solução do pvi (1.1), com $\lambda = 0$, considerando novamente que o dado inicial tenha *massa zero*. Para isso, inicialmente demonstramos o Teorema de Existência e Unicidade Local para a solução desse pvi e definimos o operador Grupo de Renormalização para este caso. Posteriormente, explicitamos os primeiros passos do processo iterativo e os generalizamos indutivamente para, por fim, concluirmos a demonstração do Teorema 1.1. No Capítulo 4, os argumentos do Capítulo 3 são generalizados para o caso $\lambda \neq 0$ no pvi (1.1), com dado inicial *ímpar*, demonstrando com isso o Teorema 1.2.

Capítulo 2

O Operador RG e a Equação Linear

O principal objetivo desta tese é estabelecer uma versão analítica do RG que seja capaz de validar o resultado numérico (1.13) obtido via nRG, relativo ao pvi (1.1) com $\lambda = 0$ e sob a condição (1.2). Posteriormente, mostraremos que o método se aplica a problemas mais gerais.

Para a compreensão do método precisamos inicialmente estabelecê-lo no caso linear, o que faremos portanto neste capítulo. Dessa forma, na Seção 2.1, apresentaremos a heurística que nos levará à definição do operador RG. Na Seção 2.2, definiremos o operador linear e estudaremos as suas propriedades, sendo uma delas o Lema da Contração. Finalmente, na Seção 2.3, obteremos o limite (1.18) (veja Teorema 1.2) no caso da equação linear.

2.1 O argumento heurístico

A primeira coisa a fazer é entender, heurísticamente, qual é o mecanismo por trás da mudança de comportamento de (1.3) para (1.13) se f tem massa zero. Supondo que (1.13) esteja correto, fazendo $t = L^2$, $L > 1$, somos levados a definir o rescaling $L^2u(Lx, L^2)$ (ao invés do rescaling canônico $Lu(Lx, L^2)$, veja [8]). Sendo este o caso, continuando com o raciocínio, termos da forma $u^a u_x^b$, na EDP $u_t = u_{xx} + u^a u_x^b$, seriam contraídos por um fator de $L^{2a+3b-4}$ desde que $2a + 3b - 4 > 0$. Em particular, este seria o caso do termo de Burgers uu_x , isto é, este termo seria “irrelevante” no limite $L \gg 1$. Baseados nisto, iniciaremos a nossa análise com a EDP linear e,

a posteriori, mostraremos que o scaling correto é, realmente, o motivado pelo comportamento (1.13) se f tem massa zero. Portanto, considere o pvi

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

com $f \in B_q$, $q > 1$, cuja solução pode ser representada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (2.2)$$

em que $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx$ é a transformada de Fourier de $f(x)$. Para tempos longos, a contribuição mais importante, na integral acima, vem da região $\omega \approx 0$. Considerando, então, $|\omega| \leq \epsilon$, para $\epsilon > 0$ dado suficientemente pequeno, fazemos uma mudança de variáveis e expandimos $\hat{f}(\omega)$ em torno da origem para obter que

$$u(x, t) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{\left|\frac{\omega}{\sqrt{t}}\right| < \epsilon} e^{-\omega^2} e^{i\omega\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)} \left[\hat{f}(0) + \frac{\omega}{\sqrt{t}} \hat{f}'(0) + O\left(\left[\frac{\omega}{\sqrt{t}}\right]^2\right) \right] d\omega, \quad t \gg 1.$$

Segue desta aproximação que, se $\hat{f}(0) \neq 0$, então a contribuição mais importante, no limite $t \gg 1$, é

$$u(x, t) \approx \frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t \gg 1, \quad (2.3)$$

em que ϕ é a distribuição Gaussiana (1.7). Observe que $\hat{f}(0)$, dado pela integral $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$, é a média de f . Uma possível leitura da aproximação (2.3) é que

se f tem média não nula então a solução $u(x, t)$ decai para zero com taxa \sqrt{t} , especialmente se espalha com taxa \sqrt{t} , e mantém um perfil dado pela distribuição gaussiana ϕ .

Contudo, se o dado inicial tiver média zero, então (2.3) se reduz a $u(x, t) \approx 0$, não nos dando nenhuma informação quantitativa sobre a maneira como $u(x, t)$ se aproxima de zero. Por esta razão, temos que ver qual é a próxima contribuição na aproximação acima. Continuando, se $\hat{f}(0) = 0$, isto é, se a condição (1.2) é válida, então a aproximação acima se torna

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx \frac{\hat{f}'(0)}{2\pi t} \int_{\left|\frac{\omega}{\sqrt{t}}\right| < \epsilon} \omega e^{-\omega^2} e^{i\omega\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)} d\omega + e^{-t} O(t^{-1}), \quad t \gg 1, \\ &\approx \frac{-i\hat{f}'(0)}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}} i\omega e^{-\omega^2} e^{i\omega\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)} d\omega + e^{-t} O(t^{-1}), \quad t \gg 1, \\ &\approx \frac{A}{t} f_1^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t \gg 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo $A = -i\hat{f}'(0)$ e f_1^* definida em (1.4). Diferentemente de (2.3), onde as taxas de decaimento e espalhamento são dadas por \sqrt{t} e a função perfil é dada pela gaussiana $\phi(x)$, a aproximação (2.4) prevê um comportamento completamente diferente. Observando que $i\hat{f}'(0)$, dado pela integral $\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$, representa o “primeiro momento da distribuição f ” (no nosso caso, f não tem que ser necessariamente positiva e, por isto, não representa necessariamente uma distribuição de probabilidade), podemos concluir que

se o dado inicial tem média zero mas primeiro momento não-nulo então, para tempos longos, a solução do pvi (2.1) decai para zero com taxa t , se espalha com taxa \sqrt{t} e tem $f_1^(x)$ como função perfil.*

Observe que o comportamento (2.4) é similar ao predito numericamente (1.13) exceto pelo fato de que esse último se refere à equação de Burgers, $\lambda = 0$ em (1.1). Portanto, partindo da aproximação (2.4), definiremos o RG linear respeitando as taxas de decaimento e espalhamento dadas por esta aproximação. Mostraremos que $f_1^*(x)$ é ponto fixo do mesmo e, a partir das suas propriedades, provaremos que o resultado numérico (1.13) para a Equação de Burgers pode ser entendido como uma manifestação desta definição e das suas propriedades.

2.2 Definição e propriedades do operador RG linear

Nesta seção, e no resto deste trabalho, L^2 representará a escala de tempo no qual o procedimento de reescalonamento será realizado. A condição $L > 1$ deve ser satisfeita pois queremos que $(L^2)^n$ represente “tempos grandes”. Sendo assim, consideraremos que o dado inicial será sempre dado em $t = 1$. Dito isto, consideremos o seguinte pvi

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ u(x, 1) &= f(x), \quad f \in B_q, \quad q > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

É fácil verificar que uma solução desse pvi é dada pela integral

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-1)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-1)}} f(y) dy, \quad t > 1, \quad (2.6)$$

e pode-se provar que esta é a única solução em B_q pois $B_q \subset L^\infty(\mathbb{R})$, veja [8] ou [15]. Na Seção 2.3, nós provaremos o seguinte resultado:

Se o dado inicial f tem massa zero e se $u(x, t)$ é a solução do pvi (2.5), então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|tu(\sqrt{t}, t) - Af_1^*\|_q = 0$$

sendo $A = -i\widehat{f}'(0)$.

O limite acima justificará a aproximação (2.4). Observe que esse limite é a versão linear do limite (1.18), no Teorema 1.2. Obteremos esse limite usando o RG. Como argumentado na seção anterior, definiremos o operador RG linear como

$$(R_L f)(x) \equiv L^2 u(Lx, L^2 t), \quad (2.7)$$

em que $u(x, t)$ é a solução do pvi (2.5). A definição acima incorpora o seguinte procedimento:

utilizando a EDP associada ao pvi, evoluímos a condição inicial f do tempo 1 ao tempo L^2 , reescalamos a variável x por L e reescalamos a solução u por L^2 .

Como $v(x, t) \equiv L^2 u(Lx, L^2 t)$ é solução da equação do calor se $u(x, t)$ o é (equivalentemente, dizemos que a equação do calor é invariante pela mudança de escalas), podemos, ao invés de considerar o pvi (2.5) para $t > 1$, considerar cópias desse pvi com a restrição $t \in [1, L^2]$ mas variando a condição inicial

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [1, L^2], \\ u(x, 1) = f_n(x), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $f_0 \equiv f$ e $f_{n+1} \equiv R_L f_n$. Para que o pvi (2.8) faça sentido, temos que provar várias propriedades de R_L , o que faremos a seguir. Embora o enunciado destas propriedades sejam idênticas aos enunciados das propriedades da versão anterior do RG, veja [8], há uma diferença entre o que fazemos aqui e o que se faz lá: a definição (1.14) da norma $\|\cdot\|_q$ difere da definição anterior pela incorporação do termo de derivada segunda no lado direito da definição. Por isto se faz necessário provar, nesta nova norma, os mesmos resultados.

Proposição 2.1 *O operador R_L , definido por (2.7), é linear e leva B_q em B_q .*

Demonstração: Utilizando a representação integral da solução do pvi (2.5) dada por (2.6), é fácil ver que o operador R_L é linear. Vamos mostrar que, dada uma função $f \in B_q$, com $q > 1$, a imagem de f pelo operador RG também está em B_q .

Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da igualdade (2.7), obtemos:

$$\widehat{R_L f}(\omega) = L \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})}. \quad (2.9)$$

Observando que $f \in B_q$ implica em $\widehat{f}(\omega) \in C^2(\mathbb{R})$, segue que $\widehat{R_L f}(\omega) \in C^2(\mathbb{R})$. Falta mostrar que $\|R_L f\|_q < +\infty$. Segue de (2.9) que

$$\left| \widehat{R_L f}(\omega) \right| < L \left| \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right|.$$

Agora vamos estimar $\left| \widehat{R_L f}'(\omega) \right|$. Derivando ambos os lados de (2.9) em relação a ω , temos:

$$\widehat{R_L f}'(\omega) = \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})} - 2\omega L \left(1 - \frac{1}{L^2}\right) \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})}, \quad (2.10)$$

e usando que $x e^{-x^2} < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\left| \widehat{R_L f}'(\omega) \right| \leq \left| \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| + 2L \sqrt{1 - \frac{1}{L^2}} \left| \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| \leq \left| \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| + 2L \left| \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right|.$$

Agora, derivando ambos os lados de (2.10),

$$\begin{aligned} \widehat{R_L f}''(\omega) = & \left\{ \frac{1}{L} \widehat{f}''\left(\frac{\omega}{L}\right) - 4\omega \left(1 - \frac{1}{L^2}\right) \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) - 2L \left(1 - \frac{1}{L^2}\right) \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right. \\ & \left. + 4\omega^2 L \left(1 - \frac{1}{L^2}\right)^2 \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right\} e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, o lado direito de (2.11) pode ser limitado superiormente por

$$\left| \widehat{R_L f}''(\omega) \right| \leq \left| \widehat{f}''\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| + 4 \left| \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| + 6L \left| \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right|.$$

Da definição da norma (1.14), usando as cotas obtidas para $\left| \widehat{R_L f}(\omega) \right|$, $\left| \widehat{R_L f}'(\omega) \right|$ e $\left| \widehat{R_L f}''(\omega) \right|$, segue que

$$\|R_L f\|_q \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (1 + |\omega|^q) \left(9L \left| \widehat{f}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| \right) + 5 \left| \widehat{f}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| + \left| \widehat{f}''\left(\frac{\omega}{L}\right) \right|$$

Notando que $L > 1$ implica em $(1 + |\omega|^q) \leq L^q (1 + \left|\frac{\omega}{L}\right|^q)$, obtemos:

$$\|R_L f\|_q \leq 9L^{q+1} \|f\|_q$$

e, como $f \in B_q$, segue que $\|R_L f\|_q < +\infty$, o que conclui a prova do lema.

■

Uma das propriedades do operador RG que será importante para o desenvolvimento deste trabalho é a chamada *propriedade de semi-grupo*, apresentada na próxima proposição:

Proposição 2.2 *Se n é um número natural e $n \geq 2$ então a seguinte igualdade é válida:*

$$\underbrace{R_L \circ \cdots \circ R_L}_{(n-1) \text{ composições}} = R_L^n.$$

A demonstração desta proposição é similar a apresentada nas referências [8, 22], exceto pelo fato de que, neste trabalho, estamos considerando o *scaling* não canônico. O lema a seguir garante que o espaço B_q é não trivial, $B_q \neq \emptyset$, e que o operador RG possui um ponto fixo:

Lema 2.1 1. f_1^* , dado por (1.4), é um elemento de B_q , para todo inteiro $q > 1$;

2. f_1^* é ponto fixo do operador RG, isto é, $R_L f_1^* = f_1^*$;

3. se $g \in B_q$ e se $\widehat{g}(\omega) = \omega^p \widehat{f}_1^*(\omega)$, $p > 0$, então $R_L g = \frac{1}{L^p} g$, isto é, g é um autovetor de R_L com autovalor $1/L^p$.

Demonstração: Inicialmente, notemos que, de (1.4),

$$\widehat{f}_1^*(\omega) = i\omega e^{-\omega^2}, \widehat{f}_1^{*'}(\omega) = ie^{-\omega^2} - 2i\omega^2 e^{-\omega^2}, \widehat{f}_1^{*''}(\omega) = -6i\omega e^{-\omega^2} + 4i\omega^3 e^{-\omega^2}. \quad (2.12)$$

Logo, das identidades acima e da definição de norma em B_q temos que

$$\|f_1^*\|_q \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (1 + |\omega|^q) (1 + 7|\omega| + 2\omega^2 + 4|\omega^3|) e^{-\omega^2} \equiv k_q < \infty \quad (2.13)$$

e portanto $f_1^* \in B_q$. Agora, segue de (2.9) que

$$\widehat{R_L f_1^*}(\omega) = L \widehat{f}_1^* \left(\frac{\omega}{L} \right) e^{-\omega^2 (1 - \frac{1}{L^2})} = Li \left(\frac{\omega}{L} \right) e^{-\left(\frac{\omega}{L}\right)^2} e^{-\omega^2 (1 - \frac{1}{L^2})} = i\omega e^{-\omega^2} = \widehat{f}_1^*(\omega)$$

e, se $g \in B_q$, $q > 1$, tem representação $\widehat{g}(\omega) = \omega^p \widehat{f}_1^*(\omega)$, com $p > 0$, então,

$$\widehat{R_L g}(\omega) = \left(\frac{\omega}{L} \right)^p \widehat{f}_1^* \left(\frac{\omega}{L} \right) = \frac{1}{L^p} \widehat{g}(\omega).$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa em ambos os lados das igualdades acima, obtemos os itens 2 e 3, o que finaliza a demonstração do lema. ■

Uma última e importante propriedade do operador RG que mostraremos nesta seção e que será essencial para a determinação do comportamento assintótico, tanto no caso linear quanto posteriormente no problema não-linear, é o fato do operador contrair funções de média e de primeiro momento nulos, isto é, a norma de $R_L g$ será estritamente menor do que a norma de g se L for grande o suficiente e se g tem média e primeiro momento nulos. Este é o conteúdo do Lema da Contração que provaremos a seguir.

Lema 2.2 (Lema da Contração) *Dados $L > 1$ e $q > 1$, para toda função $g \in B_q$ satisfazendo $\widehat{g}(0) = \widehat{g}'(0) = 0$, existem duas constantes $C = C(q) > 0$ e $L_0 > 1$ tais que*

$$\|R_L g\|_q \leq \frac{C}{L} \|g\|_q,$$

para todo $L > L_0$.

Demonstração: Notemos inicialmente que, se $g \in B_q$ é tal que $\widehat{g}(0) = \widehat{g}'(0) = 0$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela definição de norma em B_q :

$$\left| \widehat{g}'\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| \leq \int_0^{|\frac{\omega}{L}|} |\widehat{g}''(t)| dt \leq \int_0^{|\frac{\omega}{L}|} \frac{\|g\|_q}{1 + |\omega|^q} dt \leq \left| \frac{\omega}{L} \right| \|g\|_q \quad (2.14)$$

e

$$\left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{L}\right) \right| \leq \int_0^{|\frac{\omega}{L}|} |\widehat{g}'(t)| dt \leq \left| \frac{\omega}{L} \right|^2 \|g\|_q, \quad (2.15)$$

sendo que na última desigualdade utilizamos (2.14).

Agora, de (2.9) e (2.15),

$$|\widehat{R_L g}(\omega)| \leq \omega^2 e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})} \frac{\|g\|_q}{L}.$$

De (2.10), (2.14) e (2.15), obtemos:

$$\left| \widehat{R_L g}'(\omega) \right| \leq [|\omega| + 2|\omega|^3] e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})} \frac{\|g\|_q}{L}.$$

De (2.11), (2.14) e (2.15), obtemos:

$$\left| \widehat{R_L g}''(\omega) \right| \leq (1 + 6\omega^2 + 4\omega^4) e^{-\omega^2(1-\frac{1}{L^2})} \frac{\|g\|_q}{L}.$$

Tomando $L > L_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e

$$C = C(q) \equiv \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (1 + |\omega|^q) (1 + |\omega| + 7\omega^2 + 2|\omega|^3 + 4\omega^4) e^{-\frac{\omega^2}{3}}, \quad (2.16)$$

concluimos que

$$\|R_L g\|_q \leq \frac{C}{L} \|g\|_q,$$

para todo $L > L_0$. ■

2.3 O comportamento assintótico - Caso linear com dado inicial de massa zero

Como anunciado na Seção 2.2, nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Se $u(x, t)$ é solução do pvi (2.5) com dado inicial f de massa zero, então, dado $\delta \in (0, 1)$, existem constantes $L_1 = L_1(\delta)$ e $\bar{C} = \bar{C}(q)$, tais que*

$$\|tu(\sqrt{t}, t) - Af_1^*\|_q \leq \frac{\bar{C}}{t^{\frac{1-\delta}{2}}} \|f\|_q, \quad (2.17)$$

com $A = -i\widehat{f}'(0)$, para todo $t > L_1^2$.

Para provar este teorema, usaremos o método do Grupo de Renormalização o qual passaremos a descrever. O método é iterativo e a ideia por trás do mesmo é decompor o dado inicial f em duas parcelas. Uma das parcelas estará na direção do ponto fixo f_1^* do operador R_L . Veremos que a outra parcela terá média e primeiro momento nulos, satisfazendo, portanto, as hipóteses do Lema da Contração. Ao atuar sobre esta decomposição, o operador R_L deixa fixa a primeira componente da decomposição mas contrai a segunda. Iterando este procedimento, veremos que a sequência assim formada convergirá e isto nos levará ao resultado do teorema acima.

Dado $f_0 \in B_q$ e $A \in \mathbb{R}$, definimos $g_0(x) \equiv f_0(x) - Af_1^*(x)$. Segue do Lema 2.1 que $f_1^* \in B_q$ e, portanto, $g_0 \in B_q$. Se f_0 tiver média zero, então, é claro que g_0 também terá média zero, independentemente da escolha de A , uma vez que f_1^* possui média zero. Contudo, para que g_0 tenha primeiro momento nulo, ou seja, para que $\widehat{g}_0'(0) = 0$, devemos tomar $A = -i\widehat{f}_0'(0)$. Assim, temos a seguinte conclusão:

Conclusão 0: se $f_0 \in B_q$ tem média zero e se $A = -i\widehat{f}_0'(0)$ então f_0 pode ser decomposto na soma $f_0(x) = Af_1^*(x) + g_0(x)$, sendo $g_0 \in B_q$ e $\widehat{g}_0(0) = \widehat{g}_0'(0) = 0$.

Vamos verificar que esta propriedade é preservada pela evolução do dado inicial pelo operador RG linear. Considere o pvi (2.5), restrinja a variável t ao intervalo $(1, L^2]$ e redefina o dado inicial f por f_0 . Como $f_0 \in B_q$ então o operador R_L , dado por (2.7), está bem definido. Pela Proposição 2.1, como $R_L f_0 \in B_q$ então $R_L f_0 \equiv f_1 \in B_q$. Ainda por esta proposição, R_L é linear. Além disto, pelo item 2 do Lema 2.1, f_1^* é ponto fixo de R_L . Estas duas informações nos levam a: $f_1 = R_L f_0 = R_L(Af_1^* + g_0) = Af_1^* + g_1$, onde $g_1 \equiv R_L g_0$. Sendo assim, se f_0 tem média zero e se $A = -i\widehat{f}_0'(0)$, segue de (2.9), (2.10) e da conclusão acima que $\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$ e, em particular, f_1 tem média zero. Portanto, obtemos a

Conclusão 1: $f_1 = R_L f_0 \in B_q$ tem média zero e pode ser decomposto na soma $f_1(x) = Af_1^*(x) + g_1(x)$, sendo $g_1 \in B_q$ e $\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$.

A ideia agora é usar f_1 como dado inicial de um novo pvi de modo que a conclusão acima seja preservada quando a evolução de f_1 for feita pelo R_L . Considere novamente o pvi (2.5) e agora restrinja a variável t ao intervalo $(1, L^4]$. Como $(1, L^4] = (1, L^2] \cup (L^2, L^4]$, podemos ver esse pvi como a superposição de dois pvís: o primeiro, com $t \in (1, L^2]$, foi analisado acima; o segundo, com $t \in (L^2, L^4]$ e dado inicial $u(x, L^2)$, pode ser reinterpretado usando-se o reescalonamento $u_1(x, t) \equiv L^2 u(Lx, L^2 t)$, onde $u(x, t)$ é solução no intervalo $(1, L^4]$. De fato, é fácil verificar que $u_1(x, t)$ satisfaz ao pvi

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, \quad t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) &= f_1(x) = R_L f_0. \end{cases}$$

Como $f_1 \in B_q$, então $f_2 \equiv R_L f_1$ está bem definida e pertence a B_q . Além disso, usando a conclusão 1, $f_2 = R_L(Af_1^* + g_1) = Af_1^* + g_2$, em que $g_2 \equiv R_L g_1$ e, novamente, segue de (2.9) e de (2.10) que $\widehat{g}_2(0) = \widehat{g}_2'(0) = 0$. Em particular, f_2 tem média zero e, portanto:

Conclusão 2: $f_2 = R_L f_1 \in B_q$ tem média zero e pode ser decomposto na soma $f_2(x) = Af_1^*(x) + g_2(x)$, sendo $g_2 \in B_q$ e $\widehat{g_2}(0) = \widehat{g_2}'(0) = 0$.

Considere agora, para $n \geq 2$, o pvi (2.8) e suponha que $f_{n-1} \in B_q$ tenha média zero e $f_{n-1}(x) = Af_1^*(x) + g_{n-1}(x)$, sendo $g_{n-1} \in B_q$ e $\widehat{g_{n-1}}(0) = \widehat{g_{n-1}}'(0) = 0$. Então, com os mesmos argumentos anteriores podemos obter a

Conclusão n: $f_n = R_L f_{n-1} \in B_q$ tem média zero e pode ser decomposto na soma $f_n(x) = Af_1^*(x) + g_n(x)$, sendo $g_n \in B_q$ e $\widehat{g_n}(0) = \widehat{g_n}'(0) = 0$.

Com isso, estabelecemos o seguinte:

Lema 2.3 Considere o pvi (2.8) com $n \geq 1$ e suponha que $f_{n-1} \in B_q$ tenha média zero e possa ser decomposto como $f_{n-1}(x) = Af_1^*(x) + g_{n-1}(x)$, sendo $g_{n-1} \in B_q$ e $\widehat{g_{n-1}}'(0) = 0$. Então $f_n \equiv R_L f_{n-1} \in B_q$ tem média zero e pode ser decomposto como $f_n(x) = Af_1^*(x) + g_n(x)$, sendo $g_n \in B_q$ e $\widehat{g_n}(0) = \widehat{g_n}'(0) = 0$.

A importância da decomposição $f_n = Af_1^* + g_n$ é que o Lema da Contração poderá ser aplicado à g_n , para todo $n \geq 1$ e assim,

$$\|g_n\|_q = \|R_L g_{n-1}\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_{n-1}\|_q \leq \left(\frac{C}{L}\right)^2 \|g_{n-2}\|_q \leq \dots \leq \left(\frac{C}{L}\right)^n \|g_0\|_q.$$

Logo, se L é tal que $C/L < 1$ então

$$\|f_n - Af_1^*\|_q \leq \left(\frac{C}{L}\right)^n \|g_0\|_q \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como veremos, o limite acima será essencial na prova do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1: Vamos provar o teorema, inicialmente, para uma sequência $t_n = L^{2n}$. Fixe $n = k$ e seja $u(x, t)$ a solução do pvi (2.5) com $t \in (1, L^{2k}]$ e com dado inicial $f_0 \in B_q$ de massa zero. Como vimos acima, este pvi é equivalente a k cópias do mesmo, veja o pvi (2.8) com $n = 0, 1, \dots, k-1$. Como f_0 possui massa zero, para cada pvi podemos aplicar o Lema 2.3. Pela propriedade de semi-grupo, veja Proposição 2.2, e pelo Lema 2.3 temos que $L^{2n}u(L^n x, L^{2n}) = R_{L^n} f_0 = R_L^n f_0$. Portanto $\|L^{2n}u(L \cdot, L^{2n}) - Af_1^*\|_q = \|g_n\|_q$ e, a partir daí,

usamos o Lema da Contração n vezes para concluir que

$$\|L^{2n}u_0(L, L^{2n}) - Af_1^*\|_q \leq \left(\frac{C}{L}\right)^n \|g_0\|_q, \quad (2.18)$$

Tomando $L > \max\{C, L_0\}$, onde C e L_0 são dados pelo Lema da Contração, concluímos de (2.18) que $\|L^{2n}u_0(L, L^{2n}) - Af_1^*\|_q \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Obviamente, podemos melhorar esta estimativa pois a desigualdade (2.18) contém um pouco mais de informação. Dado $\delta \in (0, 1)$, tome $L_1 > L_0$ de forma que $\frac{C}{L_1^\delta} < 1$, para todo $L > L_1$. Então

$$\left(\frac{C}{L}\right)^n = \left(\frac{C}{L_1^\delta}\right)^n \left(\frac{1}{L^{1-\delta}}\right)^n < \frac{1}{L^{n(1-\delta)}}.$$

Usando a cota acima em (2.18) e fazendo $t = L^{2n}$, obtemos (2.17), sendo $\bar{C} = 1 + k_q$, onde usamos que $\|g_0\|_q \leq (1 + k_q)\|f_0\|_q$ e $f_0 = f$. Por fim, para estendermos o resultado para todos os intervalos (L^{2n}, L^{2n+1}) , dado $\tau \in (1, L^2)$, com $L > L_1$, basta tomarmos $t = \tau L^{2n}$ e trocar L por $\tau^{\frac{1}{2n}}L$ em (2.18). Como C e L_0 independem de L , a desigualdade (2.17) é válida para todo $t > L_1^2$. ■

Capítulo 3

O grupo de renormalização para a Equação de Burgers

Os resultados numéricos e o algoritmo gerador do nRG em [4] são fortes indícios de que o método do Grupo de Renormalização poderia ser implementado analiticamente para estudar o problema de valor inicial associado à Equação de Burgers. Neste capítulo, mostraremos rigorosamente que é este o caso. Em particular, mostraremos que o resultado numérico (1.13) corresponde à dinâmica das iteradas do RG, definido por (2.7), na vizinhança de seu ponto crítico. Em outras palavras, veremos que:

para o pvi (1.1) com $\lambda = 0$ e com dado inicial de massa zero, a solução $u(x,t)$ se comporta, para tempos longos, de maneira similar ao comportamento da solução do pvi linear (2.5), veja o Teorema 2.1, diferindo basicamente pelo pré-fator A que, no caso tratado neste capítulo, dependerá não só do dado inicial como também da não-linearidade uu_x .

A descrição acima é o conteúdo do Teorema 1.1 enunciado na Seção 1.3. Para prová-lo, usaremos argumentos semelhantes aos apresentados no Capítulo 2. Entretanto, como a equação a ser tratada neste capítulo é não-linear, devemos entender como o processo de *rescaling* $L^2u(Lx, L^2t)$ afeta a não-linearidade da equação. Esta questão já foi adiantada na Seção 2.1. Na Seção 3.1, a seguir, classificaremos os termos não-lineares da equação seguindo as ideias de Bricmont et al. em [10] e veremos que a não-linearidade de Burgers uu_x será classificada como “irrelevante”, sendo contraída no processo iterativo ditado pelo rescaling $L^2u(Lx, L^2t)$.

Na Seção 3.2, mostraremos que o pvi (1.1), com $\lambda = 0$, possui uma única solução *local no tempo*, isto é, mostraremos a existência e a unicidade de soluções sob a hipótese $t \in [1, L^2]$, onde $L > 1$ é dado de antemão. Feito isso, iniciaremos, na Seção 3.3, a construção do processo iterativo que dá origem ao que chamamos de *método do Grupo de Renormalização*. Em consonância com a Seção 2.3, onde o método foi usado para estudar o problema linear, faremos os três primeiros passos deste processo iterativo mostrando como o rescaling $L^2u(Lx, L^2t)$ gera novas equações com novos dados iniciais, mantido o intervalo de tempo $[1, L^2]$ para todos os novos pvi's assim gerados. De maneira similar à decomposição do dado inicial feita na Seção 2.3, sob a hipótese de massa zero (1.2) também faremos a decomposição $f = Af_0^* + g$ de modo que g satisfaça a hipótese do Lema da Contração 2.2. Diferentemente do caso linear, em cada etapa do processo iterativo a não-linearidade uu_x forçará uma definição do pré-fator A de modo que, no n -ésimo passo, teremos construído uma sequência de dados iniciais f_n , de pré-fatores A_n e de “restos” g_n . Baseados nos padrões obtidos nas primeiras iterações do método, na Seção 3.4 será enunciado e demonstrado o *Lema da Renormalização*. Na Seção 3.5, mostaremos indutivamente que $g_n \rightarrow 0$ e que $A_n \rightarrow A$ e isto nos levará ao resultado $f_n \rightarrow Af_0^*$, que é, basicamente, o conteúdo do Teorema 1.1.

Por fim, de posse dos resultados obtidos nas seções anteriores, mostraremos na Seção 3.6 a existência e unicidade global da solução do pvi para a Equação de Burgers com dado inicial de massa zero e, posteriormente, que a convergência da sequência de dados iniciais obtida nas seções anteriores nos fornecerá o limite (1.17) como desejado.

3.1 As classificações das não-linearidades

Em [10], Bricmont et al. introduziram uma classificação para as não-linearidades adicionadas à equação do calor linear. De acordo com esta classificação, existem três classes às quais um termo não-linear poderá pertencer. Para darmos continuidade a este trabalho, precisamos verificar a qual destas classes a não-linearidade uu_x , presente na equação de Burgers, pertence. Para isso, consideremos o seguinte pvi não-linear:

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^a u_x^b,$$

com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dado $L > 0$, defina a função $v(x, t) = L^2 u(Lx, L^2 t)$, onde $u(x, t)$ é solução da equação acima. É fácil verificar que $v(x, t)$ satisfaz à equação:

$$v_t = v_{xx} + \frac{\lambda}{L^{2a+3b-4}} v^a v_x^b.$$

Observe que se $L > 1$ e se $2a+3b-4 > 0$ então $|\lambda|L^{-(2a+3b-4)} < |\lambda|$. Intuitivamente, o termo não-linear da equação acima é “contraído” sob a ação do scaling adotado enquanto a parte linear se mantém inalterada. Da mesma maneira, podemos analisar o que acontece quando $2a+3b-4 \leq 0$ e isto nos leva à seguinte classificação: o termo $u^a u_x^b$ será *irrelevante* se $2a+3b-4 > 0$; será *marginal* se $2a+3b-4 = 0$; e será *relevante*, se $2a+3b-4 < 0$.

Nesta tese, estudaremos como as perturbações irrelevantes afetam o comportamento assintótico da solução do pvi em questão. Neste capítulo, trataremos especificamente do caso mais importante uu_x , construindo com cuidado o método do Grupo de Renormalização de forma que possamos, no próximo capítulo, usar os resultados aqui apresentados para estudar o caso geral $u^a u_x^b$ com expoentes tais que $2a+3b-4 > 0$.

Observação: Sob a ação do scaling canônico $v(x, t) = Lu(Lx, L^2 t)$, usado nos trabalhos anteriores sobre o RG, o termo de Burgers uu_x é classificado como marginal. Neste caso, a não-linearidade pode afetar fundamentalmente o comportamento assintótico, veja a Seção 1.1 onde descrevemos os resultados da referência [10], em particular veja as equações (1.9) e (1.10).

3.2 Existência e unicidade local

Para provar o Teorema 1.1, temos que estudar o pvi (1.1) com $\lambda = 0$, reproduzido a seguir

$$\begin{cases} u_t + uu_x = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 1, \\ u(x, 1) = f(x), & f \in B_q. \end{cases}$$

Neste capítulo, estudaremos um problema um pouco mais geral do que o acima, qual seja

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} + \lambda uu_x, & x \in \mathbb{R}, t > 1, \\ u(x, 1) & = f(x), & f \in B_q, \end{cases} \quad (3.1)$$

com $\lambda \in [-1, 1]$. No decorrer da exposição, mostraremos que a condição $q > \frac{3}{2}$ é suficiente para provar as afirmações deste capítulo. Para estudar o comportamento assintótico das soluções do

pvi acima, temos primeiro que provar que o mesmo possui soluções globais. Para isto, usaremos um argumento similar ao argumento usado no capítulo anterior: primeiro provaremos a existência e unicidade de soluções do pvi acima com a restrição $t \in [1, L^2]$, isto é

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + \lambda uu_x, & x \in \mathbb{R}, t \in [1, L^2], \\ u(x, 1) &= f(x), & f \in B_q. \end{cases} \quad (3.2)$$

Feito isto, este teorema será usado para obter a solução renormalizada em cada faixa de tempo $[L^n, L^{n+1}]$. Finalmente, “colaremos” as soluções em cada faixa para gerar a solução do pvi no intervalo de tempo $[1, L^n]$. A renormalização ocorrerá naturalmente neste processo de colagem, como explicaremos na Seção 3.5 e isto nos levará à prova do Teorema 1.1.

Nesta seção provaremos portanto que, dados $L > 1$, $q > \frac{3}{2}$ e $\lambda \in [-1, 1]$, se o dado inicial f for suficientemente “pequeno” em B_q , então o pvi (3.2) possui uma solução única local, no tempo $[1, L^2]$ (veja Teorema 3.1).

Para isso, dados $q > \frac{3}{2}$ e $L > 1$, definiremos primeiramente o espaço vetorial

$$B = \{u : \mathbb{R} \times [1, L^2] \longrightarrow \mathbb{R}; u(\cdot, t) \in B_q, \forall t \in [1, L^2]\}, \quad (3.3)$$

com a norma

$$\|u\| = \sup_{t \in [1, L^2]} \|u(\cdot, t)\|_q. \quad (3.4)$$

Dada $f \in B_q$, seja u_f a solução da equação linear associada à equação de Burgers cuja representação integral é dada por (2.6) e considere a bola

$$B_f = \{u \in B / \|u - u_f\| \leq \|f\|_q\}. \quad (3.5)$$

Nosso objetivo nessa seção é portanto provar o seguinte:

Teorema 3.1 *Dados $L > 1$, $q > \frac{3}{2}$ e $\lambda \in [-1, 1]$, existe $\epsilon = \epsilon(L, q) > 0$ tal que, se $f \in B_q$ e $\|f\|_q < \epsilon$, então o pvi (3.2) possui uma única solução na bola B_f definida por (3.5).*

Observação: É importante ressaltar que os resultados obtidos nesta e nas próximas seções são semelhantes, em espírito, aos resultados apresentados em [8] mas eles se diferem no que concerne às definições das normas utilizadas em ambos. Como explicado na Seção 1.3, na nossa definição,

veja (1.14), é necessário acrescentar o termo de derivada segunda. Consequentemente, os espaços de Banach utilizados seguem modificados. Sendo assim, faz-se necessário a demonstração dos resultados aqui apresentados. Obviamente, a outra diferença entre os dois trabalhos é a hipótese de média zero sobre o dado inicial sem a qual não seria possível provar a convergência das iteradas do operador RG como definido nesta tese. Sob este ponto de vista, a nossa contribuição é original.

3.2.1 Resultados preliminares

Provaremos o Teorema 3.1 utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach [20]. Assim, primeiramente observamos que, como colocado na Seção 1.3, dado $q > \frac{3}{2}$, o espaço B_q , definido em (1.15), é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_q$, dada por (1.14) e, como $B \subset B_q$, é possível verificar a proposição a seguir cuja a demonstração pode ser encontrada na referência [8].

Proposição 3.1

(a) a função $\|\cdot\| : B \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por (3.4), define uma norma em B ;

(b) $(B, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Definiremos em seguida o operador

$$\begin{aligned} T : B &\longrightarrow B \\ u &\mapsto u_f + \lambda N(u), \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que

$$N(u)(x, t) = \int_0^{t-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}} \cdot \frac{(u^2)_x}{2}(y, t-s-1) dy ds, \tag{3.7}$$

lembrando que u_f é dada por (2.6). Pelo Princípio de Duhamel (veja [15]), um ponto fixo do operador T é também solução do pvi (3.2). Nosso objetivo será portanto mostrar a existência desse ponto fixo, o que faremos mostrando que $T(B_f) \subset B_f$ (veja Lema 3.3) e que T é uma contração em B_f (veja Lema 3.4). Para provar tais lemas, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Proposição 3.2 *Dada $f \in B_q$, existe uma constante positiva \bar{C}_L , que depende de L , tal que*

$$\|u\| \leq \bar{C}_L \|f\|_q \quad \forall u \in B_f.$$

Demonstração: Dado $q > \frac{3}{2}$, sejam u_f a solução da equação do calor linear com dado inicial $f \in B_q$ e $u \in B_f$, onde B_q e B_f são dados, respectivamente, por (2.6) e (3.5). Inicialmente iremos cotar $\|u_f(\cdot, t)\|_q$ uniformemente para $t \in [1, L^2]$.

Como $\widehat{u}_f(\omega, t) = e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}(\omega)$ então

$$|\widehat{u}_f(\omega, t)| \leq |\widehat{f}(\omega)|.$$

Derivando $\widehat{u}_f(\omega, t)$ com relação à variável ω , obtemos

$$\partial_\omega \widehat{u}_f(\omega, t) = -2\omega(t-1)e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}(\omega) + e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}'(\omega),$$

e usando novamente o fato de que $|e^{-\omega^2(t-1)}| \leq 1$ e que a função $|x|e^{-x^2}$ também é limitada superiormente por 1, obtemos:

$$|\partial_\omega \widehat{u}_f(\omega, t)| \leq 2\sqrt{t-1} |\widehat{f}(\omega)| + |\widehat{f}'(\omega)|.$$

Agora, como $|xe^{-x}| \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \partial_\omega^2 \widehat{u}_f(\omega, t) &= -2(t-1)e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}(\omega) + 4\omega^2(t-1)^2 e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}(\omega) \\ &\quad - 2\omega(t-1)e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}'(\omega) - 2\omega(t-1)e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}'(\omega) + e^{-\omega^2(t-1)} \widehat{f}''(\omega), \end{aligned}$$

segue que

$$|\partial_\omega^2 \widehat{u}_f(\omega, t)| \leq 6(t-1) |\widehat{f}(\omega)| + 4\sqrt{t-1} |\widehat{f}'(\omega)| + |\widehat{f}''(\omega)|.$$

Dessa forma, somando as cotas obtidas acima e usando a definição de norma em B_q , obtemos

$$\|u_f(\cdot, t)\|_q \leq (6t + 6\sqrt{t-1} - 5) \|f\|_q,$$

para todo $t \in [1, L^2]$, concluindo que

$$\|u_f\| = \sup_{t \in [1, L^2]} \|u_f(\cdot, t)\|_q \leq (6L^2 + 6\sqrt{L^2 - 1} - 5) \|f\|_q.$$

Por fim, como $u \in B_f$, temos que

$$\|u\| \leq \|u - u_f\| + \|u_f\| \leq (6L^2 + 4\sqrt{L^2 - 1} - 4)\|f\|_q.$$

Portanto, $\|u\| \leq \bar{C}_L\|f\|_q$, em que

$$\bar{C}_L = \bar{C}(L) \equiv 6L^2 + 4\sqrt{L^2 - 1} - 4. \quad (3.8)$$

■

O próximo lema contém estimativas que serão utilizadas neste capítulo e no próximo.

Lema 3.1 *Dados $\omega \in \mathbb{R}$ e $t > 1$, são válidas as seguintes estimativas:*

$$(a) \ I_1^i(\omega; t) \equiv \int_0^{t-1} |\omega|^i e^{-\omega^2 s} ds \leq t, \text{ para } i \in \{0, 1, 2\};$$

$$(b) \ I_2^i(\omega; t) \equiv \int_0^{t-1} |\omega|^i s e^{-\omega^2 s} ds \leq \frac{t^2 - 2t + 7}{2}, \text{ para } i \in \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$(c) \ I_3^i(\omega; t) \equiv \int_0^{t-1} |\omega|^i s^2 e^{-\omega^2 s} ds \leq \frac{(t-1)^3}{3} + 2, \text{ para } i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Demonstração: Para mostrar o item (a), basta observar que, se $|\omega| < 1$, diretamente temos $I_1^i(\omega; t) \leq t - 1$. Por outro lado, se $|\omega| \geq 1$, calculando a integral temos que $I_1^i(\omega; t) < |\omega|^{i-2} \leq 1$, para todo $t > 1$ e $i = 0, 1, 2$. Somando essas duas cotas obtemos a desigualdade desejada.

Para mostrar o item (b), integrando por partes, obtemos

$$I_2^i(\omega; t) = \frac{e^{-\omega^2(t-1)}}{|\omega|^{4-i}} \left[e^{\omega^2(t-1)} - 1 - \omega^2(t-1) \right].$$

Note que, se $|w| < 1$, expandindo $e^{\omega^2(t-1)}$ em série de Taylor em torno de $\omega = 0$, chegamos a $I_2^i(\omega; t) < (t-1)^2/2$ para todo $i \geq 0$. Se $|w| \geq 1$, $I_2^i(\omega; t) \leq 3/|\omega|^{4-i} \leq 3$, para $i \leq 4$. Somando as estimativas obtidas temos provado o item (b).

Por fim, para demonstrar o item (c), fazemos duas integrações por partes para obter

$$I_3^i(\omega; t) = 2 \frac{e^{-\omega^2(t-1)}}{|\omega|^{6-i}} \left[e^{\omega^2(t-1)} - 1 - \omega^2(t-1) - \frac{w^4(t-1)^2}{2} \right].$$

Assim, se $|\omega| < 1$, expandindo a exponencial no colchete obtemos $I_3^i(\omega; t) < (t-1)^3/3$, para $i \geq 0$. Agora, se $|\omega| \geq 1$, observando a função $f(x) = 1 - e^{-x} - e^{-x}x - (e^{-x}x^2)/2$ é limitada superiormente por 1 para $x \geq 0$, fazendo $x \equiv \omega^2(t-1)$ com $\omega \in \mathbb{R}$ e $t > 1$, obtemos que $I_3^i(\omega; t) \leq 2/|\omega|^{6-i} \leq 2$, para todo $i \leq 6$. Dessas duas últimas cotas segue o item (c) e o lema está demonstrado. ■

O lema a seguir também é de grande importância neste trabalho e sua prova é similar a encontrada em [8].

Lema 3.2 *Dado $q > 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-\omega|^q} dx \leq \frac{G_q}{1+|\omega|^q},$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$, onde

$$G_q = G(q) \equiv (2^{q+1} + 3) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx. \quad (3.9)$$

Mostraremos agora que se o dado inicial da equação do calor linear f é suficientemente pequeno, então, a imagem da bola B_f pelo operador T definido em (3.6) está contida nela mesma. Esse fato será de fundamental importância uma vez que pretendemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para garantir que existe uma única função $u \in B_f$ solução do pvi (3.2).

Lema 3.3 *Dados $L > 1$ e $q > \frac{3}{2}$, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(L, q) > 0$ tal que $\|N(u)\| < \|f\|_q$, para quaisquer $u \in B_f$ e $f \in B_q$ desde que $\|f\|_q < \epsilon_1$.*

Demonstração: Para provarmos esse lema, procederemos como na demonstração da Proposição 3.2. Isto é, primeiro limitaremos superiormente os termos $|\widehat{N(u)}(\omega, t)|$, $|\partial_\omega \widehat{N(u)}(\omega, t)|$ e $|\partial_\omega^2 \widehat{N(u)}(\omega, t)|$, para depois determinarmos uma cota superior para $\|N(u)\|$.

Como $\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{4\pi s}} \right\} = e^{-\omega^2 s}$ e lembrando que $q > 3/2$ implica em $(u^2)_x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, veja Seção 1.3, a função $\mathcal{F} \{(u^2)_x\}(\omega)$ está bem definida e $\mathcal{F} \{(u^2)_x\}(\omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \widehat{u} * \widehat{u}(\omega)$. Assim sendo,

aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados de (3.7), obtemos a igualdade

$$\widehat{N(u)}(\omega, t) = \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy \right) ds, \quad (3.10)$$

na qual estamos usando a notação $\widehat{u}(\omega) = \widehat{u}(\omega, t - s - 1)$ no integrando de (3.10).

Assim, tomando o módulo em ambos os lados de (3.10) e usando o fato de que $|\widehat{u}(\omega, t)| \leq \|u\|(1 + |\omega|^q)^{-1}$, segue que

$$\left| \widehat{N(u)}(\omega, t) \right| \leq \frac{\|u\|^2}{4\pi} \int_0^{t-1} |\omega| e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\omega - y|^q} \cdot \frac{1}{1 + |y|^q} dy \right) ds.$$

Usando os Lemas 3.1 e 3.2, obtemos

$$\left| \widehat{N(u)}(\omega, t) \right| \leq \frac{G_q t}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2, \quad (3.11)$$

onde G_q é a constante dada por (3.9).

Agora, derivando ambos os lados da igualdade (3.10) em relação à variável ω ,

$$\begin{aligned} \partial_\omega \widehat{N(u)}(\omega, t) &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy \right) ds \\ &\quad - \frac{2i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^2 s e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy \right) ds \\ &\quad + \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}'(\omega - y) \widehat{u}(y) dy \right) ds = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Observando que $\int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} ds \leq t - 1$ para quaisquer $\omega \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1$, obtemos a seguinte cota superior para I_1 :

$$|I_1| \leq \frac{(t-1)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy \leq \frac{G_q(t-1)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2,$$

sendo que na última desigualdade usamos novamente o fato de que $|\widehat{u}(\omega, t)| \leq \|u\|(1 + |\omega|^q)^{-1}$ e o Lema 3.2.

Lembrando que $|\widehat{u}'(\omega, t)| \leq \|u\|(1 + |\omega|^q)^{-1}$, de forma análoga obtemos

$$|I_2| \leq \frac{G_q(t^2 - 2t + 7)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2 \quad \text{e} \quad |I_3| \leq \frac{G_q t}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2.$$

Logo, somando as cotas obtidas acima, temos que

$$|\partial_\omega \widehat{N(u)}(\omega, t)| \leq \frac{G_q(t^2 + 6)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2. \quad (3.13)$$

Agora, derivando (3.12) com relação à variável ω , obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_\omega^2 \widehat{N}(u)(\omega, t) &= -\frac{6i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega s e^{-\omega^2 s} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy ds \\
&+ \frac{2i}{4\pi} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}'(\omega - y) \widehat{u}(y) dy ds \\
&+ \frac{4i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^3 s^2 e^{-\omega^2 s} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega - y) \widehat{u}(y) dy ds \\
&- \frac{4i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^2 s e^{-\omega^2 s} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}'(\omega - y) \widehat{u}(y) dy ds \\
&+ \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}''(\omega - y) \widehat{u}(y) dy ds.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Para facilitar a leitura vamos usar a identidade

$$\partial_\omega^2 \widehat{N}(u)(\omega, t) \equiv \sum_{n=1}^5 J_n(\omega, t),$$

onde $J_n(\omega, t)$ representa o n -ésimo termo da soma do lado direito da igualdade (3.14).

Observando novamente que $|\widehat{u}'(\omega, t)|, |\widehat{u}''(\omega, t)| \leq \|u\|(1 + |\omega|^q)^{-1}$ e procedendo de forma análoga aos cálculos feitos para determinar a cota superior de $|\partial_\omega \widehat{N}(u)(\omega, t)|$ e usando os Lemas 3.1 e 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned}
|J_1(\omega, t)| &\leq \frac{3G_q(t^2 - 2t + 7)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2; \quad |J_2(\omega, t)| \leq \frac{2G_q(t - 1)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2; \\
|J_3(\omega, t)| &\leq \frac{4G_q(t^3 - 3t^2 + 3t + 5)}{12\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2; \quad |J_4(\omega, t)| \leq \frac{2G_q(t^2 - 2t + 7)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2; \\
|J_5(\omega, t)| &\leq \frac{G_q t}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Somando as cotas acima podemos limitar (3.14) superiormente por

$$|\partial_\omega^2 \widehat{N}(u)(\omega, t)| \leq \frac{G_q(4t^3 + 3t^2 - 9t + 119)}{12\pi(1 + |\omega|^q)} \|u\|^2. \tag{3.15}$$

Dessa forma, segue de (3.11), (3.13), (3.15), e das definições das normas em B e B_q , que

$$\|N(u)\| = \sup_{t \in [1, L^2]} \|(Nu)(\cdot, t)\|_q \leq \frac{G_q(4L^6 + 6L^4 - 6L^2 + 137)}{12\pi} \|u\|^2.$$

Por fim, como $f \in B_q$, com $q > \frac{3}{2}$, e $u \in B_f$ segue da Proposição 3.2 e da desigualdade acima que

$$\|N(u)\| \leq G_{L,q} \|f\|_q^2, \tag{3.16}$$

em que

$$G_{L,q} = G(L, q) \equiv \frac{G_q(4L^6 + 6L^4 - 6L^2 + 137)\bar{C}_L^2}{12\pi}, \quad (3.17)$$

sendo \bar{C}_L dada por (3.8). Tomando $\epsilon_1 \equiv G_{L,q}^{-1}$, temos de (3.16) que

$$\|N(u)\| < \|f\|_q,$$

sempre que $\|f\|_q < \epsilon_1$. ■

O lema a seguir nos mostrará que, sob certas condições sobre o dado inicial $f \in B_q$, com $q > \frac{3}{2}$, o operador T definido em (3.6) é uma contração em B_f . Assim, juntamente com o lema anterior, poderemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach [20] para demonstrar que o pvi (3.2) possui uma única solução em B_f .

Lema 3.4 *Sob as hipóteses do Lema 3.3, existe $\epsilon_2 = \epsilon_2(L, q) > 0$ tal que, se $f \in B_q$ e $\|f\|_q < \epsilon_2$ então*

$$\|N(u) - N(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in B_f$.

Demonstração: Para mostrar esse lema usaremos argumentos semelhantes aos da demonstração do Lema 3.3. De (3.10) e da linearidade da integral, temos que dados $u, v \in B_f$,

$$\left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) = \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \widehat{u} - \widehat{v} * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds.$$

Somando e subtraindo $\widehat{v} * \widehat{u}$ no integrando, podemos escrever a integral acima como

$$\frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} [(\widehat{u} - \widehat{v}) * \widehat{u}] (\omega, t - s - 1) ds + \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} [(\widehat{u} - \widehat{v}) * \widehat{v}] (\omega, t - s - 1) ds.$$

Observando que $u, v \in B_f \subset B$ implica em $|\widehat{u}(\omega) - \widehat{v}(\omega)| \leq \|u - v\| (1 + |\omega|^q)^{-1}$, usando o Lema 3.2 e o item (a) do Lema 3.1, obtemos a seguinte estimativa

$$\left| \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right| \leq \frac{G_q t}{4\pi(1 + |\omega|^q)} (\|u\| + \|v\|) \|u - v\|.$$

Como $u, v \in B_f$, podemos aplicar a Proposição 3.2 e da desigualdade acima,

$$\left| \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right| \leq \frac{2G_q \bar{C}_L t}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|f\|_q \|u - v\|, \quad (3.18)$$

com as constantes \bar{C}_L e G_q dadas, respectivamente, por (3.8) e (3.9).

Agora note que $\partial_\omega \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) = I_1 + I_2 + I_3$, em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \widehat{u} - \widehat{v} * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds, \\ I_2 &= -\frac{2i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^2 s e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \widehat{u} - \widehat{v} * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds, \\ I_3 &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} (\widehat{u}' * \widehat{u} - \widehat{v}' * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\widehat{v} * \widehat{u}$ nos integrandos de I_1 e I_2 , $\widehat{u}' * \widehat{v}$ no integrando de I_3 , observando que $|\widehat{u}(\omega, t)|, |\widehat{u}'(\omega, t)| \leq \|u\|(1 + |\omega|^q)^{-1}$ e usando os Lemas 3.1 e 3.2, obtemos, como em (3.13),

$$\left| \partial_\omega \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right| \leq \frac{G_q(t^2 + 6)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} (\|u\| + \|v\|) \|u - v\|.$$

E, pela Proposição 3.2,

$$\left| \partial_\omega \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right| \leq \frac{2G_q \bar{C}_L (t^2 + 6)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|f\|_q \|u - v\|. \quad (3.19)$$

Para estimar $\left| \partial_\omega^2 \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right|$, notemos que, de (3.14), temos

$$\partial_\omega^2 \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) = \sum_{n=1}^5 \bar{J}_n(\omega, t), \quad (3.20)$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1 &= -\frac{6i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega s e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \widehat{u} - \widehat{v} * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds \\
\bar{J}_2 &= \frac{2i}{4\pi} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} (\widehat{u}' * \widehat{u} - \widehat{v}' * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds \\
\bar{J}_3 &= \frac{4i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^3 s^2 e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \widehat{u} - \widehat{v} * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds \\
\bar{J}_4 &= -\frac{4i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega^2 s e^{-\omega^2 s} (\widehat{u}' * \widehat{u} - \widehat{v}' * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds \\
\bar{J}_5 &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{t-1} \omega e^{-\omega^2 s} (\widehat{u}'' * \widehat{u} - \widehat{v}'' * \widehat{v}) (\omega, t - s - 1) ds.
\end{aligned}$$

Procedendo como anteriormente, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
|\bar{J}_1(\omega, t)| &\leq \frac{3G_q(t^2 - 2t + 7)(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|}{4\pi(1 + |\omega|^q)}; \\
|\bar{J}_2(\omega, t)| &\leq \frac{2G_q(t - 1)(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|}{4\pi(1 + |\omega|^q)}; \\
|\bar{J}_3(\omega, t)| &\leq \frac{4G_q(t^3 - 3t^2 + 3t + 5)(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|}{12\pi(1 + |\omega|^q)}; \\
|\bar{J}_4(\omega, t)| &\leq \frac{2G_q(t^2 - 2t + 7)(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|}{4\pi(1 + |\omega|^q)}; \\
|\bar{J}_5(\omega, t)| &\leq \frac{G_q t (\|u\| + \|v\|)\|u - v\|}{4\pi(1 + |\omega|^q)}.
\end{aligned}$$

Somando as cotas acima temos que

$$\partial_\omega^2 \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \leq \frac{G_q(4t^3 + 3t^2 - 9t + 119)}{12\pi(1 + |\omega|^q)} (\|u\| + \|v\|)\|u - v\|$$

e usando novamente a Proposição 3.2,

$$\partial_\omega^2 \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \leq \frac{2G_q \bar{C}_L (4t^3 + 3t^2 - 9t + 119)}{12\pi(1 + |\omega|^q)} \|f\|_q \|u - v\|. \quad (3.21)$$

Logo, segue de (3.18), (3.19) e (3.21), que

$$\|N(u) - N(v)\| \leq \frac{2\bar{C}_L G_q (4L^6 + 6L^4 - 6L^2 + 137)}{12\pi} \|f\|_q \|u - v\|,$$

ou seja,

$$\|N(u) - N(v)\| \leq \frac{2G_{L,q}}{\bar{C}_L} \|f\|_q \|u - v\|,$$

com a constante $G_{L,q}$ dada por (3.17). Portanto, tomando $\epsilon_2 \equiv \frac{\bar{C}_L}{4G_{L,q}}$, temos que

$$\|N(u) - N(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in B_f$ desde que $\|f\|_q < \epsilon_2$.

■

3.2.2 O teorema da existência e unicidade local

Tendo em mãos os resultados obtidos na seção anterior podemos finalmente provar a existência e a unicidade local da solução do pvi (3.2) na bola B_f .

Demonstração do Teorema 3.1: Sejam $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ dados, respectivamente, pelos lemas 3.3 e 3.4, e defina $\epsilon \equiv \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Dados $q > \frac{3}{2}$, $f \in B_q$ e $\lambda \in [-1, 1]$, se $\|f\|_q < \epsilon$, segue do Lema 3.3 e da definição do operador T , que

$$\|T(u) - u_f\| = \|N(u)\| < \|f\|_q,$$

para toda função $u \in B_f$. Além do mais, pelo Lema 3.4,

$$\|T(u) - T(v)\| = \|N(u) - N(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in B_f$. Assim, temos que $T(B_f) \subset B_f$ e T é uma contração. Portanto, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach [20] segue que existe uma única função $u \in B_f$ tal que $T(u) = u$, donde concluímos pelo Princípio de Duhamel [15] que o pvi (3.2) possui uma única solução em B_f .

■

3.3 Os primeiros passos do processo indutivo

O método do Grupo de Renormalização para o pvi linear pode ser adaptado, com algumas modificações, ao caso não-linear. Nesta seção repetiremos, para a Equação de Burgers (3.1), os

primeiros passos do processo iterativo explicado, para o pvi linear, da Seção 2.3. Os ingredientes básicos deste processo serão descritos a seguir.

Para $\epsilon > 0$ dado pelo Teorema 3.1, defina

$$B_\epsilon = \{f \in B_q : \|f\|_q < \epsilon\}. \quad (3.22)$$

Consideremos o seguinte procedimento que chamaremos de *algoritmo gerador do Grupo de Renormalização*, ou simplesmente por ARG:

1. queremos $f \in B_q$ de modo que f pertença à bola B_ϵ e que tenha massa zero pois ele será o dado inicial de um pvi para a Equação de Burgers;
2. decomposmos f em duas componentes, sendo uma delas na direção do ponto fixo f_1^* . A outra componente, dada pela diferença $f - Af_1^* = g$, depende da escolha de A . Escolhemos o pré-fator A de maneira que o “resto” g satisfaça as hipóteses do Lema da Contração pois queremos que ele seja contraído sob a ação do RG linear;
3. consideramos o pvi (3.2) com parâmetro λ , em que o dado inicial é a função f acima. Como $f \in B_\epsilon$, pelo Teorema 3.1 o pvi tem uma única solução u em B_f de modo que $L^2u(Lx, L^2)$ está bem definida e é um elemento de B_q ;
4. o rescalonamento $L^2u(Lx, L^2)$ define o novo dado inicial \bar{f} para a nova EDP, que chamamos de \overline{EDP} ou EDP renormalizada. A \overline{EDP} difere da EDP inicial pelo parâmetro $\bar{\lambda} = \lambda L^{-1}$. Pela simetria da EDP, \bar{f} tem média zero se f o tem. Contudo, temos que tomar cuidado neste ponto pois é preciso ter certeza de que \bar{f} também pertencerá à bola B_ϵ para que o novo pvi esteja bem colocado e talvez tenhamos que fazer um ajuste na norma de f para que isto seja verdadeiro;
5. para voltar ao item 1 do algoritmo e iterar o processo, temos que estimar $\|\bar{f}\|_q$ e garantir que $\bar{f} \in B_\epsilon$ se $f \in B_\epsilon$ for bem escolhido. Esta etapa será concluída com a antecipação do item 2, isto é, faremos a decomposição de \bar{f} para então estimar a sua norma. Mas, como a EDP é não-linear, o novo pré-fator na decomposição de \bar{f} , \bar{A} , deve ser cuidadosamente escolhido para que o novo resto, \bar{g} , satisfaça as hipóteses do Lema da Contração.

Observação: Supondo que o ARG possa ser iterado, teremos uma sequência de problemas de valor inicial (EDP_n, f_n) , f_n tendo massa zero e a EDP_n tendo parâmetro $\lambda_n = \lambda L^{-n}$. Além disto, f_n admitirá a decomposição desejada e estará dentro da bola B_ϵ . A expectativa é que sejamos capazes de provar que, quando $n \rightarrow \infty$, g_n convirja para zero e que A_n convirja para algum valor A de modo que $f_n \rightarrow Af_1^*$. Portanto, se quisermos ver estas convergências então temos que adicionar mais um passo no ARG e incluir nele estimativas sobre os A 's e sobre os g 's.

6. estimativa da distância entre \bar{A} e A e estimativa de quão grande é a norma de \bar{g} em comparação com as normas de g e f .

A seguir, vamos aplicar o algoritmo descrito acima para gerar os três primeiros passos do processo iterativo associado ao pvi (3.1). Determinaremos os pré-fatores e os restos em cada caso e obteremos padrões nas estimativas sobre a taxa de aproximação dos primeiros e sobre o comprimento dos segundos. Como no processo iterativo apresentado para o caso linear (veja Seção 2.3), consideremos inicialmente o pvi (3.2) que reproduzimos a seguir:

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + \lambda_0 u u_x, & x \in \mathbb{R}, & t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) &= f_0(x), & f_0 \in B_q, & q > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (3.23)$$

em que f_0 e λ_0 são, respectivamente, o dado inicial f e o parâmetro λ do pvi (3.1). A hipótese inicial é que f_0 tem massa zero e que $f_0 \in B_\epsilon$, com B_ϵ dada por (3.22), de forma que o primeiro passo do ARG está preenchido de antemão. Para o segundo passo, assim como no caso linear, seja $A_0 = -i\hat{f}'_0(0)$ e defina g_0 pela relação

$$g_0 \equiv f_0 - A_0 f_1^*, \quad (3.24)$$

em que f_1^* é o ponto fixo do operador RG linear dado por (1.4). Observe que, como f_0 tem massa zero, temos também $\hat{g}_0(0) = \hat{g}'_0(0) = 0$ e, portanto, g_0 satisfaz as hipóteses do Lema da Contração. O terceiro passo do ARG é trivialmente verificado pois, como $f_0 \in B_\epsilon$, podemos usar o Teorema 3.1 para concluir que o pvi (3.23) possui apenas uma solução u_0 na bola B_{f_0} e a mesma tem a seguinte representação:

$$u_0(x, t) = u_{f_0}(x, t) + \nu_0(x, t), \quad (3.25)$$

onde $\nu_0(x, t) = \lambda_0 N(u_0)(x, t)$. Em particular, $u_0(x, L^2)$ está bem definido. O quarto passo do ARG é o rescalonamento, isto é, como $L^2 u_0(Lx, L^2)$ está bem definido, então, de maneira análoga

a (2.7), definimos o operador Grupo de Renormalização para o pvi (3.23), que denotaremos por $R_{L,0}$, por

$$R_{L,0}f_0 \equiv L^2u_0(L\cdot, L^2) \quad (3.26)$$

e definimos $f_1 \equiv R_{L,0}f_0$. f_1 será o dado inicial do próximo pvi, aquele cujo parâmetro é $\lambda_1 = \lambda_0 L^{-1}$. Pela simetria da equação, f_1 tem massa zero pois f_0 o tem.

Para voltar ao primeiro passo do ARG e iterar o procedimento, temos que preencher o quinto passo. É fácil concluir que $f_1 \in B_\epsilon$ se a norma $\|f_0\|_q$ for suficientemente pequena. Resta garantir que f_1 admite a decomposição desejada. Segue da representação (3.25) para u_0 que

$$R_{L,0}f_0 = L^2u_{f_0}(L\cdot, L^2) + L^2\nu_0(L\cdot, L^2) = R_L f_0 + L^2\nu_0(L\cdot), \quad (3.27)$$

onde R_L é o operador RG linear dado por (2.7). Como $f_0 = A_0 f_1^* + g_0$, segue de (3.27) e da linearidade do operador R_L que

$$f_1 = R_L(A_0 f_1^* + g_0) + L^2\nu_0(L\cdot) = A_0 f_1^* + R_L g_0 + L^2\nu_0(L\cdot),$$

onde usamos que f_1^* é o ponto fixo do operador RG linear dado por (1.4). Como feito para f_0 , para que possamos utilizar o Lema da Contração (2.2), gostaríamos que $f_1 = A_1 f_1^* + g_1$, com $\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$. Entretanto, diferentemente do caso linear, veja Seção 2.3, não basta tomarmos $A_1 = A_0$ e $g_1 = R_L g_0 + L^2\nu_0(L\cdot)$, já que com essa decomposição teríamos $\widehat{g}_1'(0) = \widehat{\nu}_0'(0)$, pois $\widehat{g}_0(0) = \widehat{g}_0'(0) = 0$ o que implica em $\widehat{R}_L g_0(0) = \widehat{R}_L g_0'(0) = \widehat{\nu}_0(0) = 0$, veja (2.9), (2.10) e (3.10). Para corrigir esse fato, uma vez que $\widehat{f}_1'(0) = i$ (veja (2.12)), vamos somar e subtrair $i\widehat{\nu}_0'(0)f_1^*(x)$ ao lado direito da última equação para f_1 , obtendo

$$f_1 = A_1 f_1^* + g_1, \quad (3.28)$$

sendo $A_1 = A_0 - i\widehat{\nu}_0'(0)$ e $g_1 = R_L g_0 + L^2\nu_0(L\cdot) + i\widehat{\nu}_0'(0)f_1^*$. Como B_q é um espaço vetorial, A_1 é uma constante e $f_1, f_1^* \in B_q$, segue que $g_1 \in B_q$. Além disso, $\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$. Em particular, f_1 possui massa zero. Isto termina o quinto passo e nos permite voltar ao primeiro desde que tomemos a norma de f_0 pequena o suficiente para garantir que $f_1 \in B_\epsilon$. Contudo, de acordo com a Observação logo abaixo do quinto passo do ARG, se quisermos fazer isto de maneira sistemática então temos que preencher o sexto passo do algoritmo e estimar as grandezas lá mencionadas.

Lembrando que $|\lambda_0| \leq 1$, $A_1 = A_0 - i\widehat{\nu}_0'(0)$ e $\nu_0(x, t) = \lambda_0 N(u_0)(x, t)$, com $N(u_0)$ dado por (3.7), segue de (3.16) que

$$|A_1 - A_0| \leq |\lambda_0| \|N(u_0)\| \leq G_{L,q} \|f_0\|_q^2, \quad (3.29)$$

com $G_{L,q}$ dada por (3.17).

Lembrando também que $g_1 = R_L g_0 + L^2 \nu_0(L \cdot) + i\widehat{\nu}_0'(0) f_1^*$, vamos estimar a norma $\|g_1\|_q$ estimando separadamente cada parcela $\|R_L g_0\|_q$, $\|i\widehat{\nu}_0'(0) f_1^*\|_q$ e $\|L^2 \nu_0(L \cdot)\|_q$, e, posteriormente, somando estas estimativas. Como $\widehat{g}_0(0) = \widehat{g}_0'(0) = 0$ e $L > L_0$, então, pelo Lema da Contração:

$$\|R_L g_0\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_0\|_q.$$

Agora, como $\|f_1^*\|_q \leq k_q$, com k_q dada por (2.13), segue novamente de (3.16) que

$$\|i\widehat{\nu}_0'(0) f_1^*\|_q \leq G_{L,q} k_q |\lambda_0| \|f_0\|_q^2.$$

Para terminar a estimativa de $\|g_1\|_q$, vamos estimar a parcela $\|L^2 \nu_0(L \cdot)\|_q$. Usando o fato de que $L > L_0 > 1$ juntamente com a definição de $\nu_0(L \cdot)$ e a desigualdade (3.11), temos que

$$|\widehat{L^2 \nu_0(L \cdot)}(\omega)| = L \left| \widehat{\nu}_0 \left(\frac{\omega}{L} \right) \right| \leq \frac{L^{q+1} |\lambda_0| G_q L^2}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u_0\|^2.$$

De forma análoga, mas agora usando a desigualdade (3.13), obtemos que:

$$|\widehat{L^2 \nu_0(L \cdot)}'(\omega)| = \left| \widehat{\nu}_0' \left(\frac{\omega}{L} \right) \right| \leq \frac{L^q |\lambda_0| G_q (L^4 + 6)}{4\pi(1 + |\omega|^q)} \|u_0\|^2$$

e de (3.15)

$$|\widehat{L^2 \nu_0(L \cdot)}''(\omega)| = L^{-1} \left| \widehat{\nu}_0'' \left(\frac{\omega}{L} \right) \right| \leq \frac{L^{q-1} |\lambda_0| G_q (4L^6 + 3L^4 - 9L^2 + 119)}{12\pi(1 + |\omega|^q)} \|u_0\|^2.$$

Segue das três últimas desigualdades e da definição de norma em B_q que

$$\|L^2 \nu_0(L \cdot)\|_q \leq \frac{L^{q+1} G_q (4L^6 + 6L^4 - 6L^2 + 137)}{12\pi} |\lambda_0| \|u_0\|^2.$$

Assim, pela Proposição 3.2,

$$\|L^2 \nu_0(L \cdot)\|_q \leq L^{q+1} G_{L,q} |\lambda_0| \|f_0\|_q^2,$$

com $G_{L,q}$ dada por (3.17). Definindo

$$E_{L,q} = G_{L,q} (L^{q+1} + k_q), \quad (3.30)$$

segue da decomposição $g_1 = R_L g_0 + L^2 \nu_0(L \cdot) + i \widehat{\nu}_0'(0) f_1^*$ e das cotas obtidas acima que

$$\|g_1\|_q \leq \|R_L g_0\|_q + \|L^2 \nu_0(L \cdot)\|_q + \|i \widehat{\nu}_0'(0) f_1^*\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_0\|_q + |\lambda_0| E_{L,q} \|f_0\|_q^2, \quad (3.31)$$

As desigualdades (3.29) e (3.31) são as que nos interessam. Mostraremos que elas têm análogos à medida que iteramos o procedimento. Além disto, elas nos fornecem uma estimativa para a norma $\|f_1\|_q$, veja a desigualdade (3.37), que é o que faremos a seguir. Dado $\delta \in (0, 1)$, podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\|g_1\|_q \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \left[\frac{C}{L^\delta} \|g_0\|_q + L^{(1-\delta)} E_{L,q} |\lambda_0| \|f_0\|_q^2 \right],$$

e como $|\lambda_0| \leq 1$ e $\|g_0\|_q = \|f_0 - A_0 f_1^*\|_q \leq (1 + k_q) \|f_0\|_q$, com k_q dada por (2.13), obtemos

$$\|g_1\|_q \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \left[\frac{C}{L^\delta} (1 + k_q) + L^{(1-\delta)} E_{L,q} \|f_0\|_q \right] \|f_0\|_q.$$

Defina

$$L_\delta = L(\delta, q) \equiv \max\{L_0, [2C(1 + k_q)]^{\frac{1}{\delta}}\}, \quad (3.32)$$

onde L_0 e C são dadas pelo Lema da Contração e k_q por (2.13). Tomando $L > L_\delta$, como $|\lambda_0| \leq 1$, se $\|f_0\|_q < (2L^{(1-\delta)} E_{L,q})^{-1}$, obtemos da última desigualdade para $\|g_1\|_q$ que

$$\|g_1\|_q \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \|f_0\|_q. \quad (3.33)$$

Assim, considere

$$\|f_0\|_q < \min \left\{ \frac{1}{2L^{(1-\delta)} E_{L,q}}, \epsilon \right\} \quad (3.34)$$

com $L > L_\delta$, sendo $E_{L,q}$ e L_δ dadas, respectivamente, por (3.30) e (3.32).

Agora, somando e subtraindo $A_0 f_1^*$ ao lado direito de (3.28), segue da desigualdade triangular que

$$\|f_1\|_q \leq [|A_1 - A_0| + |A_0|] \|f_1^*\|_q + \|g_1\|_q.$$

Da desigualdade acima, somos levados a avaliar a soma $|A_1 - A_0| + |A_0|$. Como $|A_0| \leq \|f_0\|_q$, usamos (3.29) para estimar $|A_1 - A_0|$ e obter

$$|A_1 - A_0| + |A_0| < (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q, \quad (3.35)$$

onde $G_{L,q}$ é dada por (3.17). Substituindo (3.35) na desigualdade de cima, obtemos

$$\|f_1\|_q \leq [(G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q] \|f_1^*\|_q + \|g_1\|_q.$$

Lembrando que $\|f_1^*\|_q \leq k_q$, com k_q dada por (2.13), de (3.33), obtemos:

$$\|f_1\|_q \leq \left[k_q (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) + \frac{1}{L^{1-\delta}} \right] \|f_0\|_q.$$

Definindo

$$D_1 \equiv k_q (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) + \frac{1}{L^{1-\delta}}, \quad (3.36)$$

segue que

$$\|f_1\|_q \leq D_1 \|f_0\|_q. \quad (3.37)$$

Resumindo o que fizemos acima, a conclusão é a seguinte: dado $\delta \in (0, 1)$, se $L > L_\delta$, onde L_δ é dado por (3.32), e se o dado inicial f_0 satisfizer (3.34), então as desigualdades (3.33), (3.35) e (3.37) são válidas. Com esta escolha de f_0 , completamos o sexto passo do ARG.

Para voltar ao primeiro passo do ARG e iterar o procedimento, temos que garantir que $\|f_1\|_q < \epsilon$. Usando (3.37), definimos

$$\bar{\epsilon}_1 \equiv \min \left\{ \frac{1}{2L^{(1-\delta)} E_{L,q}}, \frac{\epsilon}{D_1} \right\} \quad (3.38)$$

e fazemos uma nova escolha do dado inicial f_0 de maneira que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$. Observe, da definição acima, que $\bar{\epsilon}_1 \leq \epsilon D_1^{-1} < \epsilon$ pois $D_1 > 1$ (veja (3.36) e note, de (2.13), que $k_q > 1$). Sob a condição $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$, não só as desigualdades (3.33), (3.35) e (3.37) são válidas como também segue de (3.37) que $f_1 \in B_\epsilon$, dada por (3.22), o que nos permite iterar o ARG.

Assim, tomando $L > L_\delta$ e $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$, consideremos o pvi (3.2) renormalizado, que chamaremos de PVI_1 :

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + \lambda_1 u u_x, & x \in \mathbb{R}, & t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) &= f_1(x), & f_1 \in B_q, & q > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (3.39)$$

em que o dado inicial $f_1 = L^2 u_0(L \cdot, L^2) = R_{L,0} f_0$ e $\lambda_1 = \lambda_0 L^{-1}$. Note que, se estivéssemos usando o *scaling canônico* $Lu(Lx, L^2t)$, a não-linearidade $u u_x$ seria marginal, ou seja, a equação seria invariante com relação a essa mudança de escalas e portanto teríamos $|\lambda_1| = |\lambda_0|$. Entretanto, como estamos usando a condição de massa zero do dado inicial, é necessária a alteração no scaling para que possamos recuperar a informação do decaimento da solução através do RG.

Agora temos o par (PVI_1, f_1) , que deve ser comparado com o primeiro pvi (PVI_0, f_0) . Dos cálculos apresentados nas páginas anteriores, os dois primeiros passos da iteração já estão concluídos. De fato, lembremos que é válida a decomposição $f_1 = A_1 f_1^* + g_1$, veja (3.28), onde

$\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$ e o pré-fator A_1 depende de f_0 e da não-linearidade da equação. Em particular, f_1 tem massa zero. Além disso, como visto acima, f_1 é um elemento de B_ϵ , com B_ϵ dada por (3.22), desde que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$, com $\bar{\epsilon}_1$ dado por (3.38). Portanto, concluímos que os dois primeiros passos estão, de fato, preenchidos.

Para o terceiro passo, como $f_1 \in B_\epsilon$ então o pvi (3.39) está bem colocado e, pelo Teorema 3.1, possui apenas uma solução na bola B_{f_1} com representação

$$u_1(x, t) = u_{f_1}(x, t) + \nu_1(x, t), \quad (3.40)$$

onde $\nu_1(x, t) = \lambda_1 N(u_1)(x, t)$. Com isso, $u_1(x, L^2)$ e $L^2 u_1(Lx, L^2)$ estão bem definidos. Isto termina o terceiro passo e nos permite, como na primeira aplicação do algoritmo, passar para o quarto passo do ARG e definir o operador Grupo de Renormalização para o pvi (3.39), o qual denotaremos agora por $R_{L,1}$, como a seguir:

$$R_{L,1} f_1 \equiv L^2 u_1(L\cdot, L^2). \quad (3.41)$$

Definimos também $f_2 \equiv R_{L,1} f_1$ que será o dado inicial de um novo pvi o qual terá $\lambda_0 L^{-2}$ como parâmetro. Como f_1 tem massa zero segue novamente da simetria da equação que f_2 também possui massa zero.

Passemos agora para o quinto passo. Devemos decompor f_2 como a soma descrita no algoritmo e, através de estimativas obtidas para a norma de f_2 , garantir que $f_2 \in B_\epsilon$. Usando mais uma vez a linearidade do operador R_L , dado por (2.7), a representação (3.40) para u_1 e a decomposição (3.28) de f_1 , podemos proceder como anteriormente obtendo:

$$f_2 = A_2 f_1^* + g_2, \quad (3.42)$$

onde $A_2 = A_1 - i\widehat{\nu}_1'(0)$ e $g_2 = R_L g_1 + L^2 \nu_1(L\cdot) + i\widehat{\nu}_1'(0) f_1^*$. Como B_q , com $q > \frac{3}{2}$, é um espaço vetorial, A_2 é uma constante e $f_2, f_1^* \in B_q$, da decomposição (3.42), temos que $g_2 \in B_q$. Perceba também que g_2 satisfaz as hipóteses do Lema da Contração. De fato, como $\widehat{g}_1(0) = 0$, $\widehat{f}_1^*(0) = 0$ e $\widehat{\nu}_1(0) = \lambda_1 \widehat{N}(u_1)(0, L^2) = 0$, veja (3.10), segue que $\widehat{g}_2(0) = 0$. Da mesma maneira, como $\widehat{g}_1'(0) = 0$, $\widehat{f}_1^*(0) = i$ e $L^2 \widehat{\nu}_1(L\cdot)'(\omega) = \widehat{\nu}_1'(\frac{\omega}{L})$, temos $\widehat{g}_2'(0) = L^2 \widehat{\nu}_1(L\cdot)'(0) - \widehat{\nu}_1'(0) = 0$.

Gostaríamos de voltar ao primeiro passo do ARG e iterar o procedimento mas, assim como na iteração anterior, ainda temos que executar o sexto passo. Neste último passo, obteremos

estimativas para medir a distância entre A_1 e A_2 e para medir quão grande é $\|g_2\|_q$ quando comparada com $\|g_1\|_q$ (e, conseqüentemente, com $\|g_0\|_q$). Terminaremos o raciocínio obtendo uma cota superior para $\|f_2\|_q$ em termos de $\|f_1\|_q$ e, conseqüentemente, em termos de $\|f_0\|_q$, de onde tiraremos condições necessárias para que possamos escolher f_0 tão pequeno de forma que a nova EDP reescalada, a EDP₂, juntamente com o dado inicial $\|f_2\|_q$, gere um pvi que esteja bem colocado. Lembrando que $A_2 = A_1 - i\widehat{\nu}_1'(0)$ e $\nu_1(x, t) = \lambda_1 N(u_1)(x, t)$, com $N(u_1)$ dado por (3.7), e utilizando os mesmos cálculos feitos para obter (3.29) e (3.31) mas trocando $A_0, \lambda_0, u_0, g_0, g_1$ e f_0 , respectivamente, por $A_2, \lambda_1, u_1, g_1, g_2$ e f_1 , obtemos as seguintes cotas:

$$|A_2 - A_1| \leq |\lambda_1| G_{L,q} \|f_1\|_q^2 \leq G_{L,q} \|f_1\|_q^2, \quad (3.43)$$

uma vez que $|\lambda_1| = |\lambda_0 L^{-1}| \leq 1$, sendo $G_{L,q}$ dada por (3.17) e

$$\|g_2\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_1\|_q + E_{L,q} |\lambda_1| \|f_1\|_q^2, \quad (3.44)$$

em que $E_{L,q}$ é constante dada por (3.30). Agora, como f_0 satisfaz (3.34) então são válidas as desigualdades (3.33) e (3.37). Substituindo-as em (3.44), obtemos:

$$\|g_2\|_q \leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} \left[\frac{C}{L^\delta} + L^{1-2\delta} E_{L,q} D_1^2 \|f_0\|_q \right] \|f_0\|_q.$$

já que $|\lambda_1| = |\lambda_0 L^{-1}| \leq L^{-1}$. Observando que $L > L_\delta$ implica em $\frac{C}{L^\delta} < \frac{1}{2}$, onde C é a constante dada pelo Lema da Contração e L_δ dada por (3.32), temos então:

$$\|g_2\|_q \leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} \|f_0\|_q, \quad (3.45)$$

desde que $\|f_0\|_q < (2L^{1-2\delta} E_{L,q} D_1^2)^{-1}$. Note que, como $L > 1$ e $\delta \in (0, 1)$, então $L^{-2\delta} < L^{-\delta}$ e a estimativa (3.45) continua válida se considerarmos $\|f_0\|_q < (2L^{(1-\delta)} E_{L,q} D_1^2)^{-1}$. Note ainda que, se

$$\|f_0\|_q < \min \left\{ \frac{1}{2L^{1-\delta} E_{L,q} D_1^2}, \frac{\epsilon}{D_1} \right\}, \quad (3.46)$$

então, $\|f_0\| < \bar{\epsilon}_1$. Com a estimativa acima para o dado inicial f_0 vamos obter uma cota para $\|f_2\|_q$ similar à (3.37). Somando e subtraindo $A_1 f_1^*$ e $A_0 f_1^*$ ao lado direito da decomposição de f_2 , dada em (3.42), segue da desigualdade triangular que

$$\|f_2\|_q \leq [|A_2 - A_1| + |A_1 - A_0| + |A_0|] \|f_1^*\|_q + \|g_2\|_q,$$

Agora vamos determinar uma cota superior para a soma $|A_2 - A_1| + |A_1 - A_0| + |A_0|$, que aparece na desigualdade acima, em termos da norma de f_0 . Inicialmente, lembrando que $D_1 > 1$, se f_0 satisfaz a condição (3.46), diretamente temos que f_0 também satisfaz (3.34) e, assim, são válidas as desigualdades (3.37) para a norma de f_1 , e (3.43), para $|A_2 - A_1|$. Combinando essas duas cotas obtemos

$$|A_2 - A_1| \leq |\lambda_1| G_{L,q} D_1^2 \|f_0\|_q^2.$$

Da estimativa acima e de (3.35), segue que

$$|A_2 - A_1| + |A_1 - A_0| + |A_0| < (|\lambda_1| G_{L,q} D_1^2 \|f_0\|_q + G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q. \quad (3.47)$$

Lembrando que $|\lambda_1| \leq L^{-1}$ e $\|f_1^*\|_q \leq k_q$, substituindo (3.45) e (3.47) na última desigualdade para a norma de f_2 :

$$\|f_2\|_q \leq \left[\left(\frac{1}{L} G_{L,q} D_1^2 \|f_0\|_q + G_{L,q} \|f_0\|_q + 1 \right) k_q + \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} \right] \|f_0\|_q.$$

Definindo

$$D_2 \equiv k_q \left(\frac{1}{L} G_{L,q} D_1^2 \|f_0\|_q + G_{L,q} \|f_0\|_q + 1 \right) + \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}, \quad (3.48)$$

obtemos

$$\|f_2\|_q \leq D_2 \|f_0\|_q. \quad (3.49)$$

O que fizemos até aqui, para a segunda iteração, pode ser resumido da seguinte forma: dado $\delta \in (0, 1)$, se $L > L_\delta$, onde L_δ é dado por (3.32), e se o dado inicial f_0 satisfizer a condição (3.46) então as desigualdades (3.45), (3.47) e (3.49) são válidas como também o são as desigualdades (3.33), (3.35) e (3.37). Com esta nova escolha de f_0 , completamos o último passo do ARG na segunda iteração. Para iterarmos mais uma vez o processo acima, temos que garantir que $f_2 \in B_\epsilon$ e, como veremos abaixo, temos que fazer uma nova escolha de f_0 . Definimos

$$\bar{\epsilon}_2 \equiv \min \left\{ \frac{1}{2L^{1-\delta} E_{L,q} D_1^2}, \frac{\epsilon}{D_1}, \frac{\epsilon}{D_2} \right\}. \quad (3.50)$$

Observe que, fazendo a escolha $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_2$, teremos $\|f_2\|_q < \bar{\epsilon}_1 < \epsilon$, isto é, $f_2 \in B_\epsilon$.

Como f_2 tem média zero e como $f_2 \in B_\epsilon$, podemos voltar ao primeiro passo do ARG e considerar o novo pvi:

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + \lambda_2 u u_x, & x \in \mathbb{R}, & t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) &= f_2(x), & f_2 \in B_q, & q > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (3.51)$$

em que $\lambda_2 = \lambda_0 L^{-2}$. O pvi acima é o nosso (PVI_2, f_2) . Como f_2 admite a decomposição desejada, dada por (3.42), podemos ir em frente, definir f_3 , decompô-lo como $f_3 = A_3 f_0^* + g_3$ e obter as estimativas referentes $|A_3 - A_2|$ e $\|g_3\|_q$. Não faremos isto aqui pois o nosso objetivo, nesta seção, é preparar o leitor para a próxima seção explicando como as cotas superiores, dependentes de n , do Lema da Renormalização, têm a sua origem. Neste lema, as decomposições (3.24), (3.28) e (3.42) para f_0, f_1 e f_2 , respectivamente, serão generalizadas para f_{n+1} , as desigualdades (3.29) e (3.43) serão generalizadas para o caso $|A_{n+1} - A_n|$ e as desigualdades (3.31) e (3.44) serão generalizadas para o caso de se medir quão grande é a norma $\|g_{n+1}\|_q$ em comparação com $\|g_0\|_q$.

Observação: As soluções u_0, u_1 e u_2 dos pvi's $(PVI_0, f_0), (PVI_1, f_1)$ e (PVI_2, f_2) , respectivamente, quando apropriadamente superpostas, geram a solução do pvi (3.1) no intervalo de tempo $t \in [1, L^6]$.

3.4 O Lema da Renormalização para a Equação de Burgers

Na seção anterior, fizemos as duas primeiras iterações do algoritmo do Grupo de Renormalização. Vimos que, à medida que se itera o procedimento, condições cada vez mais restritivas na norma do dado inicial $\|f_0\|_q$ têm que ser satisfeitas para que as iterações procedam. Nesta e na próxima seção, nós faremos, de maneira genérica, uma iterada do algoritmo. Começaremos com um pvi em que os três primeiros passos do ARG já estejam contemplados. Nesta seção, preencheremos os passos 4, 5 e 6, sendo este o conteúdo do Lema 3.5, às vezes conhecido como *Lema da Renormalização*. Para iterar o procedimento, no caso genérico, ainda temos que preencher o passo 1, o que faremos na próxima seção (o passo 2 é uma consequência do Lema 3.5).

Continuando o raciocínio da seção anterior, agora vamos considerar o n -ésimo pvi (PVI_n, f_n) , $n \geq 1$

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + \lambda_n u u_x, & x \in \mathbb{R}, & t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) &= f_n(x), & f_n \in B_q, & q > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (3.52)$$

sendo $\lambda_n = \lambda_0 L^{-n}$ e $f_n \in B_\epsilon$.

A seguir, faremos o passo 4 do ARG. Como $f_n \in B_\epsilon$ então segue do Teorema 3.1 que o pvi (3.52)

possui uma única solução na bola B_{f_n} com representação

$$u_n(x, t) = u_{f_n}(x, t) + \nu_n(x, t), \quad (3.53)$$

onde $u_{f_n}(x, t)$ é a solução do pvi associado à equação do calor linear com dado inicial $f_n(x)$, veja (2.8), e $\nu_n(x, t) = \lambda_n N(u_n)(x, t)$, com $N(u_n)$ dada por (3.7). Segue, então, que o operador Grupo de Renormalização para o pvi (3.52) está bem definido:

$$(R_{L,n}f_n)(x) \equiv L^2 u_n(Lx, L^2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.54)$$

e, portanto, definimos

$$f_{n+1} \equiv R_{L,n}f_n. \quad (3.55)$$

Isto termina o passo 4 do ARG pois $f_{n+1} \in B_q$ e, conseqüentemente, o pvi (PVI_{n+1}, f_{n+1}) está bem definido (em (3.52), substitua n por $n+1$) a menos do fato de que, como mostraremos na próxima seção, $f_{n+1} \in B_\epsilon$. Para completar os passos 5 e 6, lançaremos mão do lema a seguir. Antes de enunciá-lo, lembramos que L_0 é a constante determinada pelo Lema da Contração 2.2.

Lema 3.5 *Dado $L > L_0$, considere o pvi (3.52) com dado inicial $f_n \in B_\epsilon$ de massa zero e tal que*

$$f_n = A_n f_1^* + g_n, \quad (3.56)$$

onde A_n é uma constante, f_1^* é o ponto fixo do operador RG linear, veja (1.4), e g_n é uma função pertencente a B_q com $\widehat{g}_n(0) = \widehat{g}_n'(0) = 0$. Então:

(a) f_{n+1} , dado por (3.55), admite a decomposição

$$f_{n+1} = A_{n+1} f_1^* + g_{n+1}, \quad (3.57)$$

em que

$$A_{n+1} = A_n - i\widehat{\nu}_n'(0), \quad (3.58)$$

$$g_{n+1} = R_L g_n + L^2 \nu_n(L \cdot) + i\widehat{\nu}_n'(0) f_1^* \quad (3.59)$$

e $\nu_n = \lambda_n N(u_n)$, com $N(u_n)$ dado por (3.7). Além disto, $g_{n+1} \in B_q$ e é tal que $\widehat{g}_{n+1}(0) = \widehat{g}_{n+1}'(0) = 0$. Em particular, f_{n+1} tem massa zero;

(b) $|A_{n+1} - A_n| \leq |\lambda_n| G_{L,q} \|f_n\|_q^2$, onde $G_{L,q}$ é dada por (3.17);

(c) $\|g_{n+1}\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_n\|_q + |\lambda_n| E_{L,q} \|f_n\|_q^2$, onde $E_{L,q}$ é dada por (3.30) e C é a constante dada pelo Lema da Contração.

Demonstração: Como $\|f_n\|_q < \epsilon$, segue de (3.53), (3.54), (3.55) e da decomposição (3.56), que

$$f_{n+1}(x) = A_n f_1^*(x) + R_L g_n(x) + L^2 \nu_n(Lx),$$

onde usamos que f_1^* é ponto fixo do RG linear R_L e onde usamos a notação $\nu_n(L \cdot) = \nu_n(L \cdot, L^2)$. Dessa forma, somando e subtraindo $i \widehat{\nu}_n'(0) f_1^*(x)$ ao lado direito da equação anterior, obtemos

$$f_{n+1} = A_{n+1} f_1^* + g_{n+1},$$

sendo $A_{n+1} = A_n - i \widehat{\nu}_n'(0)$ e $g_{n+1} = R_L g_n + L^2 \nu_n(L \cdot) + i \widehat{\nu}_n'(0) f_1^*$. Como B_q é um espaço vetorial, A_{n+1} é uma constante e $f_{n+1}, f_1^* \in B_q$, segue que $g_{n+1} \in B_q$.

Agora, por hipótese, $\widehat{g}_n(0) = 0$. Além disto, $\widehat{f}_1^*(0) = 0$ e $\widehat{\nu}_n(0) = \lambda_n \widehat{N}(u_n)(0, L^2) = 0$, veja (3.7). Estas identidades, junto com a definição de g_{n+1} , fornecem que $\widehat{g}_{n+1}(0) = 0$. Da mesma maneira, por hipótese, $\widehat{g}_n'(0) = 0$. Assim, como $\widehat{f}_1^*(0) = i$, derivando $\widehat{g}_{n+1}(\omega)$ nós obtemos que $\widehat{g}_{n+1}'(0) = \widehat{L^2 \nu_n}'(0) - \widehat{\nu}_n'(0) = 0$, já que $\widehat{L^2 \nu_n}(L \cdot)'(\omega) = \widehat{\nu}_n'(\frac{\omega}{L})$, o que demonstra o item (a).

Para provar o item (b), basta observar que, da definição de A_{n+1} e da desigualdade (3.16),

$$|A_{n+1} - A_n| \leq |\widehat{\nu}_n'(0)| \leq \|\nu_n\|_q \leq |\lambda_n| \|N(u_n)\| \leq |\lambda_n| G_{L,q} \|f_n\|_q^2,$$

sendo $G_{L,q}$ a constante dada por (3.17).

Para demonstrar o item (c) iremos estimar $\|g_{n+1}\|_q$. Como, neste capítulo, $L > L_0$, utilizamos o Lema da Contração e os mesmos cálculos apresentados na seção anterior para obter (3.31), mas trocando $g_0, g_1, \nu_0, \lambda_0$ e f_0 , respectivamente, por $g_n, g_{n+1}, \nu_n, \lambda_n$ e f_n , obtemos:

$$\|g_{n+1}\| \leq \|R_L g_n\|_q + \|L^2 \nu_n(L \cdot)\|_q + \|i \widehat{\nu}_n'(0) f_1^*\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_n\|_q + |\lambda_n| E_{L,q} \|f_n\|_q^2,$$

onde $E_{L,q}$ dada por (3.30), o que finaliza a demonstração do lema. ■

3.5 Processo indutivo

Como observado na seção anterior, para completar, de maneira genérica, o ciclo do ARG lá iniciado, ainda temos que fazer o primeiro passo. Nesta seção, faremos o passo 1 e o faremos de maneira indutiva. Na Seção 3.3, vimos que, à medida que iteramos os procedimentos, surgem naturalmente números $\bar{\epsilon}$'s, veja (3.38) e (3.50), e D 's, veja (3.36) e (3.48), os quais nos trazem informações necessárias para que sejam válidas as estimativas (3.33) e (3.45) para as normas de g_1 e g_2 , para que sejam válidas as estimativas (3.37) e (3.49), para as normas de f_1 e f_2 e para que sejam válidas as estimativas (3.35) e (3.47) para a soma das diferenças dos A 's. Dessa forma, para que possamos continuar com o raciocínio da seção anterior e generalizar essas estimativas, devemos escolher adequadamente um $\bar{\epsilon}$ (independente de n) que nos permita chegar à seguinte conclusão:

se $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$, o dado inicial f_n do pvi (3.52) pertence à bola B_ϵ dada por (3.22).

Porém, de (3.38) e (3.50), vemos que, para que possamos fazer essa escolha, precisamos que a sequência $(D_n)_n$ obtida através das iterações seja limitada superiormente. De fato, suponha que exista tal $\bar{\epsilon}$ de forma que as estimativas (3.37) e (3.49) valham e possam ser generalizadas, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, suponha que tenhamos $\|f_n\|_q \leq D_n \|f_0\|_q$. Então, se existir um número D de forma que $D_n < D$ para todo natural n , definindo $\bar{\epsilon} = \epsilon/D$ e tomando $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, teremos $f_n \in B_\epsilon$, como desejado. Nesta seção, seguiremos esta linha de raciocínio. Por isto, necessitamos de alguns resultados preliminares como descreveremos a seguir.

Lema 3.6 *Dados $\delta \in (0, 1)$ e $L > L_\delta$, com L_δ dado por (3.32), defina*

$$D \equiv 1 + k_q \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{L^{j(1-\delta)}}, \quad (3.60)$$

onde k_q é a constante dada por (2.13). Se f_0 satisfaz à desigualdade

$$\|f_0\|_q < \frac{1}{2L^{1-\delta} E_{L,q} D^2}, \quad (3.61)$$

com $E_{L,q}$ dada por (3.30), então,

$$\frac{E_{L,q} D^2 \|f_0\|_q}{L^n} < \frac{1}{2L^{(1-\delta)(n+1)}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração: O resultado segue diretamente da hipótese (3.61) e do fato de que $L^n \geq L^{n(1-\delta)}$ para quaisquer $\delta \in (0, 1)$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

O lema a seguir nos mostra que, desde que a norma de f_0 satisfaça à condição (3.61), a sequência numérica $(D_n)_n$, obtida durante o processo iterativo, é limitada superiormente. Como ressaltado na introdução desta seção, esse fato será fundamental para concluirmos o passo 1 do ARG.

Lema 3.7 *Suponha válida a desigualdade (3.61) e defina $D_1 = \frac{1}{L^{1-\delta}} + k_q(1 + G_{L,q}\|f_0\|_q)$ e*

$$D_{n+1} = \frac{1}{L^{(1-\delta)(n+1)}} + k_q \left(1 + G_{L,q}\|f_0\|_q + G_{L,q}\|f_0\|_q \sum_{j=1}^n \frac{D_j^2}{L^j} \right), \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad (3.62)$$

com k_q e $G_{L,q}$ dadas, respectivamente, por (2.13) e (3.17).

Então,

$$D_{n+1} < D,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, onde D é a constante dada em (3.60).

Demonstração: Para demonstrar esse lema aplicaremos indução sobre o índice n . Como $E_{L,q} > G_{L,q}$ e $D > 1$, veja (3.30) e (3.60), segue de (3.61) e da definição de D_1 que

$$D_1 < \frac{1}{L^{1-\delta}} + k_q \left(1 + \frac{1}{2D^2 L^{1-\delta}} \right) < \frac{1}{L^{1-\delta}} + k_q \left(1 + \frac{1}{L^{1-\delta}} \right) < D.$$

Suponhamos agora que $D_n < D$ para todo $n \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$, com n_0 inteiro positivo maior ou igual a 2. Como

$$D_{n_0} = \frac{1}{L^{(1-\delta)n_0}} + k_q \left(1 + G_{L,q}\|f_0\|_q + G_{L,q}\|f_0\|_q \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{D_j^2}{L^j} \right),$$

segue da hipótese de indução, do Lema 3.6 e do fato de que $E_{L,q} > G_{L,q}$, que

$$D_{n_0} \leq 1 + k_q \left(1 + \frac{1}{2L^{1-\delta}} + \frac{1}{2L^{2(1-\delta)}} + \dots + \frac{1}{2L^{(n_0-1)(1-\delta)}} + \frac{1}{2L^{n_0(1-\delta)}} \right) < D,$$

o que finaliza a demonstração do lema. ■

De posse desses dois lemas, poderemos agora completar o passo 1 do ARG, garantindo que se tomarmos a norma de f_0 suficientemente pequena, teremos, para cada natural n , $f_n \in B_\epsilon$. Além disso, estimaremos a norma de g_n em termos de $\|f_0\|_q$ como fizemos nas primeiras iterações, veja (3.33) e (3.45). Para isso, utilizaremos os passos 2, 3, 4, 5 e 6, dados pelo Lema 3.5 como na demonstração do teorema a seguir:

Teorema 3.2 *Dados $\delta \in (0, 1)$ e $L > L_\delta$, com L_δ dada por (3.32), existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que, se $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ e se f_0 tem massa zero então, para todo $n = 1, 2, \dots$, f_n dada por (3.55) e (3.54) está bem definida, tem massa zero e admite a representação (3.56), em que g_n tem média e primeiro momento nulos e satisfaz*

$$\|g_n\|_q \leq \frac{1}{L^{n(1-\delta)}} \|f_0\|_q. \quad (3.63)$$

Além disso, f_n satisfaz

$$\|f_n\|_q \leq D_n \|f_0\|_q, \quad (3.64)$$

em que D_n é dada por (3.62) e, em particular, $\|f_n\|_q < \epsilon$.

Demonstração: Defina

$$\bar{\epsilon} \equiv \min \left\{ \frac{1}{2L^{(1-\delta)} E_{L,q} D^2}, \frac{\epsilon}{D} \right\}, \quad (3.65)$$

em que $\epsilon > 0$ é dado pelo Teorema 3.1 e as constantes $E_{L,q}$ e D são dadas, respectivamente, por (3.30) e (3.60).

Iremos demonstrar o teorema aplicando indução sobre n . Como, por hipótese, $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, segue da definição de $\bar{\epsilon}$ que a desigualdade (3.61) está satisfeita e isso nos permite usar o Lema 3.7 para concluir que $D_1 < D$. Portanto, como $D_1 > 1$, veja (3.36), e como $D > D_1$, segue que $\bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_1 \leq \epsilon$, com $\bar{\epsilon}_1$ dado por (3.38), de onde concluímos que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ implica que $f_0 \in B_\epsilon$. Além disto, como visto na Seção 3.3, f_0 admite a decomposição $f_0 = A_0 f_1^* + g_0$, veja (3.24), com $\hat{g}_0(0) = \hat{g}'_0(0) = 0$ pois, também por hipótese, f_0 tem massa zero. Segue, então, que as hipóteses do Lema 3.5 estão verificadas e podemos usá-lo para concluir que $R_{L,0} f_0 = f_1 \in B_q$ e que f_1 satisfaz às seguintes condições:

- (a) $f_1 = A_1 f_0^* + g_1$, onde $A_1 = A_0 - i\widehat{\nu}_0'(0)$, $g_1 = R_L g_0 + L^2 \nu_0(L \cdot) + i\widehat{\nu}_0'(0) f_1^*$ e $\nu_0 = \lambda_0 N(u_0)$, com $N(u_0)$ dado por (3.7). Além disto, $g_1 \in B_q$ e é tal que $\widehat{g}_1(0) = \widehat{g}_1'(0) = 0$. Em particular, f_1 tem massa zero;
- (b) $|A_1 - A_0| \leq |\lambda_0| G_{L,q} \|f_0\|_q^2$;
- (c) $\|g_1\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_0\|_q + |\lambda_0| E_{L,q} \|f_0\|_q^2$.

Note que a desigualdade no item (c) é a desigualdade (3.31) e ela nos leva, sob as hipóteses $L > L_\delta$ e $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$, a (3.33), que é (3.63) para $n = 1$. Lembrando que $\bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_1$, concluímos que (3.63) está provada para $n = 1$ sob a hipótese inicial $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$. Segue do item (b) e de $|\lambda_0| \leq 1$ que $|A_1 - A_0| + |A_0| \leq (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q$ e, da decomposição de f_1 dada pelo item (a) e de (3.63) para $n = 1$ que acabamos de provar, (3.64) vale para $n = 1$ (veja (3.37)), desde que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}_1$, condição essa que está satisfeita. Finalmente, como $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, pela desigualdade (3.64) com $n = 1$, e do fato de que $D_1 < D$, então $f_1 \in B_\epsilon$. Portanto, acabamos de provar o primeiro passo da indução.

Suponhamos agora que, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, com $n_0 \in \mathbb{Z}_*^+$, $f_n = R_{L,n-1} f_{n-1}$ em B_q tenha massa zero, admita a decomposição (3.56) em que g_n tem média e primeiro momento nulos, e que sejam válidas as desigualdades (3.63) e (3.64).

Usando novamente o Lema 3.7, temos que $D_n < D$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$. Portanto, pela hipótese de indução, $\|f_n\| \leq D_n \|f_0\|_q < D \|f_0\|_q < \epsilon$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$. Isso nos permite usar o Lema 3.5 para concluir $R_{L,n} f_n = f_{n+1} \in B_q$ satisfazendo (a), (b) e (c) do Lema, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$. Vamos agora demonstrar a desigualdade (3.63). Substituindo, as hipóteses de indução, (3.63) e (3.64) no item (c) do Lema 3.5, com $n = n_0$, e lembrando que $|\lambda_{n_0}| \leq L^{-n_0}$, obtemos

$$\|g_{n_0+1}\|_q \leq \frac{C}{L^{n_0(1-\delta)+1}} \|f_0\|_q + \frac{E_{L,q} D_{n_0}^2}{L^{n_0}} \|f_0\|_q^2.$$

Novamente iremos usar o Lema 3.7 para concluir que $D_{n_0} < D$, o que nos leva à estimativa:

$$\|g_{n_0+1}\|_q \leq \frac{1}{L^{(n_0+1)(1-\delta)}} \left[\frac{C}{L^\delta} + L^{-n_0\delta+(1-\delta)} E_{L,q} D^2 \|f_0\|_q \right] \|f_0\|_q.$$

Lembrando que $L > L_\delta$ implica em $\frac{C}{L^\delta} < \frac{1}{2}$, que $L^{-n_0\delta} < 1$, pois $\delta \in (0, 1)$, e que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, obtemos:

$$\|g_{n_0+1}\|_q \leq \frac{1}{L^{(n_0+1)(1-\delta)}} \|f_0\|_q,$$

o que prova (3.63).

Para provar (3.64), utilizamos (3.63), com $n = n_0 + 1$, a decomposição $f_{n_0+1} = A_{n_0+1}f_1^* + g_{n_0+1}$, dada no item (a) acima e o fato de $A_{n_0+1} = \sum_{i=0}^{n_0} (A_{i+1} - A_i) + A_0$, para obter:

$$\|f_{n_0+1}\|_q \leq \frac{1}{L^{(n_0+1)(1-\delta)}} \|f_0\|_q + k_q \left| \sum_{i=0}^{n_0} (A_{i+1} - A_i) + A_0 \right|.$$

já que $\|f_1^*\|_q \leq k_q$, com k_q dada por (2.13). Agora note que, do item (b) do Lema 3.5 com $n = 1, 2, \dots, n_0$, e do primeiro passo (veja (3.35)), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n_0} |A_{i+1} - A_i| + |A_0| &= \sum_{i=1}^{n_0} |A_{i+1} - A_i| + |A_1 - A_0| + |A_0| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_0} |\lambda_i| G_{L,q} \|f_i\|_q^2 + (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q \end{aligned}$$

Usando que $\|f_n\|_q \leq D_n \|f_0\|_q$ e $|\lambda_n| \leq L^{-n}$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, então

$$\sum_{i=0}^{n_0} |A_{i+1} - A_i| + |A_0| \leq G_{L,q} \|f_0\|_q^2 \sum_{i=1}^{n_0} \frac{D_i^2}{L^i} + (G_{L,q} \|f_0\|_q + 1) \|f_0\|_q.$$

Assim, substituindo essa cota na última desigualdade para $\|f_{n_0+1}\|_q$, obtemos:

$$\|f_{n_0+1}\|_q \leq \left\{ \frac{1}{L^{(n_0+1)(1-\delta)}} + k_q \left[G_{L,q} \|f_0\|_q \sum_{i=1}^{n_0} \frac{D_i^2}{L^i} + G_{L,q} \|f_0\|_q + 1 \right] \right\} \|f_0\|_q = D_{n_0+1} \|f_0\|_q,$$

e a desigualdade (3.64) está provada (veja definição (3.62) de D_{n_0+1}). Note ainda que, pelo Lema 3.7, $\|f_{n_0+1}\|_q \leq D_{n_0+1} \|f_0\|_q < D \|f_0\|_q < \epsilon$, desde que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon}$ dado por (3.65), o que finaliza a demonstração do teorema. \blacksquare

Observação: A definição de $\bar{\epsilon}$ no teorema anterior se baseia em nossos resultados sobre as duas primeiras iteradas do RG que foram realizadas na Seção 3.3 (veja as definições (3.38) e (3.50) de $\bar{\epsilon}_1$ e $\bar{\epsilon}_2$, respectivamente). De fato, a generalização destes $\bar{\epsilon}$'s, para $n = 0, 1, 2, \dots$, pode ser dada recursivamente por

$$\bar{\epsilon}_{n+1} \equiv \min \left\{ \frac{1}{2L^{(1-\delta)} E_{L,q} D_n^2}, \bar{\epsilon}_n, \frac{\epsilon}{D_{n+1}} \right\} \quad (3.66)$$

com as definições $\bar{\epsilon}_0 \equiv \epsilon$, $D_0 \equiv 1$, D_1 dado por (3.36) e D_n , $n \geq 2$, dado por (3.62). Mais do que isto, temos que, para todo $n \geq 0$, $\bar{\epsilon}_{n+1} \leq \bar{\epsilon}_n \leq \bar{\epsilon}_0 = \epsilon$. Por outro lado, é fácil ver que, se (3.61) for satisfeita, então $\bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_n$, para todo $n \geq 0$. Assim, $f_n \in B_\epsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, desde que $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$. Com isso, preenchemos o passo 1 do ARG para a n -ésima iterada do processo e, conseqüentemente, todos os outros passos do algoritmo também estão preenchidos.

O próximo resultado garante que a seqüência A_n é convergente:

Corolário 3.1 *Sob as hipóteses do Teorema 3.2, a seqüência $(A_n)_n$ formada pelas contantes dadas por (3.58) é de Cauchy. Mais especificamente, existe uma constante A tal que*

$$|A_n - A| < \frac{L^{-n}}{2L^{1-\delta}(1-L^{-1})} \|f_0\|_q,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração: Como f_0 tem massa zero, $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon} > 0$ dado por (3.65), e $D_n < D$, para todo $n \in \mathbb{Z}_*^+$, segue do Lema 3.5 e da estimativa (3.64), do Teorema 3.2, que

$$|A_{n+1} - A_n| \leq \frac{G_{L,q}}{L^n} \|f_n\|_q^2 < \frac{G_{L,q}D^2}{L^n} \|f_0\|_q^2,$$

o que nos garante que $(A_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy e, portanto, existe uma constante A tal que $(A_n)_n \rightarrow A$ quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, dado $m \in \mathbb{Z}^+$, como $A_n - A_{n+m} = \sum_{i=0}^{m-1} (A_{n+i} - A_{n+i+1})$,

$$|A_n - A| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} |A_{n+i+1} - A_{n+i}| \right) \leq G_{L,q}D^2 \|f_0\|_q^2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{L} \right)^{n+i}.$$

Como $L > 1$, $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ e $E_{L,q} > G_{L,q}$, com $E_{L,q}$ dado por (3.30), obtemos

$$|A_n - A| \leq \frac{1}{2L^{1-\delta}} \cdot \frac{L^{-n}}{1-L^{-1}} \|f_0\|_q,$$

o que demonstra o corolário. ■

3.6 O comportamento assintótico

Nas seções anteriores, vimos que, para cada iteração do ARG, todos os passos do processo estarão satisfeitos desde que tomemos a norma do dado inicial f_0 suficientemente pequena. Em particular, do Teorema 3.2, se o dado inicial f_0 da primeira iteração do processo satisfizer $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, então $f_n \in B_\epsilon$, para todo inteiro positivo n . Com isso, o Teorema 3.1 nos garante que o pvi (3.52), obtido na n -ésima iteração, possui uma única solução $u_n(x, t)$ na bola B_{f_n} , para todo $t \in [1, L^2]$. Nesta seção, iremos mostrar inicialmente que é possível estender a solução local, no tempo, para todo $t > 1$ unindo as soluções u_n dos pvis (3.52). Feito isso, mostraremos que o operador RG não-linear $R_{L,n}$ definido em (3.54), assim como o operador linear R_L , satisfaz à propriedade de semi-grupo. De posse desses resultados, estaremos aptos a provar o Teorema 1.1, que é o principal objetivo deste capítulo.

Para isso, consideremos $\bar{\epsilon} > 0$ dado por (3.65). Se $\|f\|_q < \bar{\epsilon}$ e se $f \equiv f_0$ tem massa zero, segue do Teorema 3.2, que f_n dada por (3.55) e (3.54) está bem definida, tem massa zero e $\|f_n\|_q < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Assim, o Teorema 3.1 nos garante que o pvi (3.52) tem uma única solução u_n na bola B_{f_n} representada por

$$u_n(x, t) = u_{f_n}(x, t) + \lambda N(u_n)(x, t), \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \in [1, L^2],$$

em que u_{f_n} é a solução do pvi linear com dado inicial f_n (veja (2.6)) e $N(u)$ é dado por (3.7).

Lembrando que $\widehat{u_{f_n}}(\omega, t) = e^{-\omega^2 t} \widehat{f_n}(\omega)$ e aplicando a Transformada de Fourier na igualdade acima para $u_n(x, t)$, segue que $\widehat{u_n}(0, t) = 0$, para todo $t \in [1, L^2]$, já que $\widehat{f_n}(0) = 0$ e $\widehat{N(u_n)}(0, t) = 0$, veja (3.10). Logo, $u_n(x, t)$ possui massa zero para todo $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Assim, definindo

$$u(\cdot, t) \equiv L^{-2n} u_n(L^{-n} \cdot, L^{-2n} t), \quad t \in [L^{2n}, L^{2(n+1)}] \text{ e } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.67)$$

onde $u_n(\cdot, t)$ é solução do pvi (3.52) podemos concluir que $u(\cdot, t)$ possui massa zero para todo $t \geq 1$. Fazendo $y = L^{-n}x$ e $s = L^{-2n}t$, temos que $u_n(y, s)$ é a única solução do pvi (3.52) para $s \in [1, L^2]$ e, portanto, $u(x, t)$ é a única solução de massa zero do pvi (3.1) definida para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $t > 1$.

Tendo em mãos a existência global da solução para o pvi (3.1), bem como, os resultados obtidos nas seções anteriores, podemos mostrar o seguinte lema:

Lema 3.8 *Sob as hipóteses do Teorema 3.2, para todo $n \in \mathbb{Z}_*^+$,*

(a) *o operador RG não-linear definido em (3.54) satisfaz à Propriedade de Semi-grupo, isto é,*

$$R_{L^n,0} = R_{L,n-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}; \quad (3.68)$$

e

(b) *existe uma constante $C_{L,q,\delta} \equiv C(L, q, \delta) > 0$ tal que*

$$\|L^{2n}u(L^n \cdot, L^{2n}) - Af_1^*\|_q \leq \frac{C_{L,q,\delta}}{L^{n(1-\delta)}} \|f_0\|_q, \quad (3.69)$$

sendo A a constante do Corolário 3.1.

Demonstração: Para provar o item (a) aplicaremos indução sobre n . Se $n = 2$, como $\|f_0\|_q < \bar{c}$, pelo que vimos no início desta seção o pvi (3.2) possui solução única definida para todo $t \geq 1$. Fazendo $u_1(x, t) = L^2u(Lx, L^2t)$, obtemos portanto que u_1 está bem definida para todo $t \in [1, L^2]$ e satisfaz o pvi (3.39) com dado inicial $u_1(x, 1) = L^2u(Lx, L^2)$. Da definição do operador RG não-linear dada por (3.54), obtemos:

$$\begin{aligned} R_{L^2,0}f(x) &= L^4u(L^2x, L^4) = L^2u_1(Lx, L^2) = R_{L,1}(u_1(x, 1)) \\ &= R_{L,1}(L^2u(Lx, L^2)) = R_{L,1} \circ R_{L,0}f(x). \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a igualdade (3.68) seja válida para algum inteiro $n_0 > 2$, isto é, suponha que

$$R_{L^{n_0},0}f(x) = L^{2n_0}u(L^{n_0}x, L^{2n_0}) = R_{L,n_0-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}f(x).$$

Então, segue da definição do operador RG não-linear e de (3.67) que

$$\begin{aligned} R_{L^{n_0+1},0}f(x) &= L^{2(n_0+1)}u(L^{n_0+1}x, L^{2(n_0+1)}) = L^2u_{n_0}(Lx, L^2) = R_{L,n_0}u_{n_0}(x, 1) \\ &= R_{L,n_0}L^{2n_0}u(L^{n_0}x, L^{2n_0}) = R_{L,n_0} \circ R_{L,n_0-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}f(x), \end{aligned}$$

sendo que na última igualdade usamos a hipótese de indução. Portanto, (3.68) é válida para todo inteiro positivo, o que mostra o item (a).

Agora, dado $n \geq 1$, da definição (3.55) e da propriedade de semi-grupo, temos que

$$f_n(x) = R_{L,n-1}f_{n-1}(x) = R_{L,n-1} \circ R_{L,n} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}f(x) = R_{L^n,0}f(x) = L^{2n}u(L^n x, L^{2n})$$

Por outro lado, como $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon}$ dado por (3.65), temos a representação $f_n = A_n f_1^* + g_n$ e vale (3.63). Portanto,

$$\|L^{2n}u(L^n \cdot, L^{2n}) - A_n f_1^*\|_q = \|g_n\|_q \leq \frac{\|f_0\|_q}{L^{n(1-\delta)}}.$$

Utilizando a desigualdade acima juntamente com o Corolário 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \|L^{2n}u(L^n \cdot, L^{2n}) - A f_1^*\|_q &\leq \|L^{2n}u(L^n \cdot, L^{2n}) - A_n f_1^*\|_q + |A_n - A| \|f_1^*\|_q \\ &\leq \frac{1}{L^{n(1-\delta)}} \left[1 + k_q \frac{L^{n(1-\delta)} L^{-n}}{2L^{1-\delta}(1-L^{-1})} \right] \|f_0\|_q. \end{aligned}$$

Observando que $\delta \in (0, 1)$ e $L > 1$ implicam em $L^{-\delta n} < 1$, obtemos (3.69), sendo $C_{L,q,\delta} = 1 + \frac{k_q}{2L^{1-\delta}(1-L^{-1})}$. ■

Demonstração do Teorema 1.1: Nos cálculos anteriores provamos que a estimativa

$$\|tu(\sqrt{t} \cdot, t) - A f_1^*\|_q \leq \frac{C_{L,q,\delta}}{t^{\frac{(1-\delta)}{2}}} \|f_0\|_q, \quad (3.70)$$

é válida para todo $t_n = L^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, desde que $L > L_\delta$ e o dado inicial f do pvi (3.1) seja suficientemente pequeno, isto é, $\|f\|_q < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon}$ dado por (3.65).

Procedendo como na demonstração do Teorema 2.1 provaremos que a desigualdade (3.70) também é válida para todo $t \in (L^{2n_0}, L^{2(n_0+1)})$, com $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ e $L > L_\delta$.

Para isso, tomemos $\tau \in (1, L^2)$ e $n_0 \in \mathbb{Z}^+$. Então, $t = \tau L^{2n_0} \in (L^{2n_0}, L^{2(n_0+1)})$ e definindo $L_1 = \tau^{\frac{1}{2}} L^{n_0}$, temos que $L_1 > L > L_\delta$. Assim, todos os cálculos apresentados nas seções anteriores permanecem válidos considerando-se a escala L_1 no lugar de L . Em particular, de (3.69) com $n = 1$, obtemos

$$\|\tau L^{2n_0} u(\sqrt{\tau} L^{n_0} \cdot, \tau L^{2n_0}) - A f_1^*\|_q \leq \frac{C_{L,q,\delta}}{(\sqrt{\tau} L^{n_0})^{(1-\delta)}} \|f_0\|_q,$$

o que mostra que a desigualdade (3.70) é válida para todo $t \in (L^{2n}, L^{2(n+1)})$ sempre que $L > L_\delta$ e isso implica na validade da mesma para todo $t > L_\delta^2$. Portanto, tomando o limite de ambos os lados de (3.70) quando t tende ao infinito temos o resultado desejado. ■

Capítulo 4

Não linearidades do tipo $u^{2m+1}u_x^n$

Neste capítulo, utilizando os procedimentos do ARG que foram descritos na Seção 3.3, estudaremos o pvi (1.1) sob as condições dadas em H-2 no Capítulo 1. Para esse estudo consideraremos o pvi

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda F(u, u_x), & x \in \mathbb{R}, \lambda \in [-1, 1] \\ u(x, 1) = f(x), & x \in \mathbb{R}, f(x) \in B_q, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde o dado inicial $f(x)$ agora é uma função ímpar (em particular, possui massa zero) e o termo não-linear $F(u, v)$ é uma função analítica na origem $u = v = 0$ que admite a representação em série de potências

$$F(u, v) = \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} c_{m,n} u^{2m+1} v^n. \quad (4.2)$$

e tem raio de convergência $r = \min\{r_u, r_v\} > 0$, sendo r_u e r_v os raios de convergência das somas sobre as variáveis u e v , respectivamente. Observe que, quando os valores $a = 0$, $b = 1$, $c_{0,1} = 1$ e $c_{m,n} = 0$ para todo $m \geq 1$ são substituídos no lado direito de (4.2), temos exatamente a não-linearidade da equação associada ao pvi (3.2), de forma que, neste capítulo, nós generalizamos os resultados do capítulo anterior para não-linearidades da forma (4.2).

Utilizando argumentos similares aos apresentados na Seção 3.2 verificaremos, na Seção 4.2, a existência de um número positivo ϵ tal que se $f \in B_q \cap B_\epsilon$ então a solução do pvi (4.1) no intervalo de tempo $[1, L^2]$, com $L > 1$, é dada por $u(x, t) = u_f(x, t) + \lambda N(u)(x, t)$, onde $u_f(x, t)$

é a solução do pvi linear com dado inicial f (veja (2.6)) e $N(u)$ é dado por

$$N(u)(x, t) = \int_0^{t-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}} F(u, u_x)(y, t-s-1) dy \right) ds, \quad (4.3)$$

sendo $F(u, u_x)$ a soma dada por (4.2). Também na Seção 4.2 veremos que $N(u)$ estará bem definido desde que $u(x, t)$ esteja dentro da região de analiticidade da função $F(u, u_x)$.

Note que se a não-linearidade $F(u, u_x)$ do pvi (4.1) possuir expoente fixo $n = 1$ na segunda variável, isto é, se $F(u, u_x)$ for da forma $[h(u)]_x$, sendo $h(u)$ uma função analítica em $u = 0$, então, $\mathcal{F}\{[h(u)]_x\}(\omega, t) = i\omega \widehat{h(u)}(\omega, t)$ o que implica em $\mathcal{F}\{[h(u)]_x\}(0, t) = 0$ e assim o termo não linear $N(u)(x, t)$ da solução $u(x, t)$ dado por (4.3) terá massa zero (lembre que o mesmo ocorre, em particular, para a equação de Burgers estudada no capítulo anterior, veja (3.10)). Com isso, como no capítulo anterior, se supormos que $f(x)$ tenha massa zero e lembrando que esse fato implica em $\widehat{u}_f(0, t) = 0$, podemos concluir que:

se $h(u)$ é uma função analítica na origem $u = 0$ e se o dado inicial $f(x)$ tem massa zero então a solução $u(x, t)$ do pvi (4.1) com não-linearidade $[h(u)]_x$ e dado inicial $f(x)$ também tem massa zero.

Contudo, no caso agora tratado, estamos considerando que a potência da segunda variável da representação (4.2) pode assumir valor maior do que 1 e isso não nos permite extrair uma informação adequada (e necessária) sobre a massa da solução $u(x, t)$ como fizemos no caso citado acima para perturbações do tipo $[h(u)]_x$. Nesse sentido, foi necessário que restringíssemos o conjunto dos dados iniciais à classe de funções que são ímpares e estão em $B_q \cap B_\epsilon$ e, para garantir que a solução do pvi (4.1) tenha a mesma paridade do dado inicial $f(x)$ incluímos condições sobre as potências da soma (4.2). O argumento formal a seguir justifica a necessidade dessas restrições sobre as potências na soma (4.2).

Para simplificar, consideraremos a seguinte equação do calor não-linear:

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^a u_x^b, \quad (4.4)$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Supondo que $u(x, t)$ seja uma solução de (4.4) e definindo $v(x, t) = -u(-x, t)$ é fácil verificar que

$v(x, t)$ satisfaz à equação

$$u_t = u_{xx} + (-1)^{a+1} \lambda u^a u_x^b,$$

o que nos permite concluir que a solução de (4.4) será invariante por simetria desde que o expoente a seja ímpar e $b \in \mathbb{Z}^+$ e isso justifica o fato de que as potências na representação de $F(u, u_x)$ devem ser da forma $u^{2m+1} u_x^n$, com $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Consideremos agora que o dado inicial $f(x)$ do pvi (4.1) seja uma função ímpar e suponhamos que $u(x, t)$ seja a solução desse problema na faixa de tempo $[1, L^2]$, com $L > 1$. Assim, a função $v(x, t) = -u(-x, t)$ também será solução do pvi (4.1), já que $v(x, 1) = f(x)$ (pois, $f(x)$ é ímpar). Com isso, utilizando o teorema da existência e unicidade local (que será provado na Seção 4.2), concluímos que:

se o dado inicial $f(x)$ do pvi (4.1) for ímpar então a solução $u(x, t)$ desse problema também será ímpar na variável x para todo $t \in [1, L^2]$.

Em particular, como $u(x, t)$ é uma função ímpar na variável x temos que $\mathcal{F}\{F(u, u_x)\}(0, t) = 0$ para todo $t \in [1, L^2]$. Esta propriedade é essencial para que possamos completar o passo 4 do ARG (veja Seção 3.3) e fechar o ciclo da primeira (e, conseqüentemente, da n -ésima) iteração do algoritmo.

Outra restrição nos valores das potências de u e u_x explícita na soma (4.2) é que $m \geq a$ e $n \geq b$, com $a, b \in \mathbb{Z}^+$ satisfazendo a desigualdade $4a + 3b - 2 > 0$. Observe que essa condição, $4a + 3b - 2 > 0$, é satisfeita sempre que os índices a e b forem números inteiros tais que $a \geq 0$ e $b > 0$ ou $a > 0$ e $b \geq 0$. Dessa forma, assumindo que o pvi (4.1) tenha solução $u(x, t)$ bem definida para todo $t > 1$ e considerando, como na Seção 3.1, o *scaling* não canônico $L^2 u(Lx, L^2 t)$, podemos proceder de forma similar aos cálculos lá apresentados e, seguindo a nomenclatura introduzida por Bricmont et al., em [10], concluir que a perturbação $F(u, u_x)$ dada em (4.2) pertence à classe de não-linearidades dita *irrelevante* no sentido do RG. Isso justifica a necessidade da condição $4a + 3b - 2 > 0$ pois, assim como no Capítulo 3, nosso interesse neste capítulo é analisar o pvi (4.1) considerando a irrelevância (no sentido do RG) da não-linearidade da equação.

O estudo do comportamento assintótico, para $t \gg 1$, da solução do pvi (4.1) será feito com base no ARG (veja Seção 3.3) e, por isso, os argumentos utilizados neste capítulo serão similares

ao do Capítulo 3. Entretanto, nesse novo caso, devemos tomar os devidos cuidados para que os valores assumidos pela solução $u(x, t)$ e sua derivada $u_x(x, t)$ estejam dentro da região de analiticidade da função $F(u, u_x)$ para garantirmos a sua boa definição como faremos na Seção 4.2. Para que possamos desenvolver a Seção 4.2, precisaremos de alguns resultados técnicos que serão apresentados na Seção 4.1. Também na Seção 4.2, usaremos novamente o Teorema do Ponto Fixo de Banach [20] para demonstrar o teorema da existência e unicidade da solução do pvi (4.1) no intervalo de tempo $[1, L^2]$, sendo $L > 1$. Na Seção 4.3, com as devidas modificações, apresentaremos uma versão adaptada para o Lema da Renormalização (Lema 3.5) e para o Teorema 3.2 mostrando, de forma genérica, que os passos do ARG, descrito na Seção 3.3, também estão todos preenchidos no caso aqui tratado desde que o dado inicial f seja ímpar, seja suficientemente pequeno e aceite a decomposição descrita no passo 2 do algoritmo. Na sequência, usando esses resultados, demonstraremos o Teorema 1.2.

4.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados técnicos que serão fundamentais para demonstrar a existência e unicidade local da solução para o pvi (4.1) e, conseqüentemente, dar continuidade aos procedimentos necessários para demonstrar o Teorema 1.2.

Como na demonstração do Lema 3.3 da Seção 3.2, precisaremos obter uma cota superior para a transformada de Fourier da não-linearidade da equação estudada. Diferentemente dos cálculos lá apresentados, onde a transformada de Fourier do termo não-linear é $\mathcal{F}\{[u^2]_x\}(\omega, t) = \frac{i\omega}{2\pi} \widehat{u} * \widehat{u}$ e podemos limitá-la uniformemente em cada instante $t \in [1, L^2]$ por $|\widehat{u}(\omega, t)| \leq (1 + |\omega|^q)^{-1} \|u(\cdot, t)\|_q$, agora o termo não-linear pode não ser da forma $[h(u)]_x$ e precisamos também cotar superiormente a função $\widehat{u}_x(\omega, t)$.

Lembrando que $\widehat{u}_x(\omega, t) = i\omega \widehat{u}(\omega, t)$ e usando a estimativa $|\widehat{u}(\omega, t)| \leq (1 + |\omega|^q)^{-1} \|u(\cdot, t)\|_q$, obtemos que

$$|\widehat{u}_x(\omega, t)| \leq \frac{|\omega|}{1 + |\omega|^q} \|u(\cdot, t)\|_q,$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$ e $t \in [1, L^2]$ fixo mas arbitrário.

Podemos observar na desigualdade acima que o termo $\widehat{u}_x(\omega, t)$ decai com um fator de $|\omega|^{q-1}$ enquanto $\widehat{u}(\omega, t)$ decai com $|\omega|^q$. Entretanto, gostaríamos de usar novamente o Lema 3.2, como fizemos na demonstração do Lema 3.3, para obter uma cota superior para a transformada de Fourier da soma (4.2). Para que isso seja possível, é necessário que $|\widehat{u}_x(\omega, t)|$ e o módulo das derivadas com respeito à variável ω , $|\partial_\omega^i \widehat{u}(\omega, t)|$, com $i = 0, 1, 2$, tenham decaimentos similares. Tendo em vista essa necessidade, lançaremos mão do resultado abaixo, cuja demonstração, com as devidas modificações, é análoga à apresentada em [22] (veja Proposição 2.1 em [22]).

Proposição 4.1 *Dados $q > 3/2$ e uma função u pertencente ao espaço B , dado por (3.3), valem as seguintes desigualdades:*

$$|\partial_\omega^i \widehat{u}(\omega, t)|, |\widehat{u}_x(\omega, t)| \leq \frac{2\|u\|}{1 + |\omega|^{q-1}}, \quad i = 0, 1, 2,$$

para quaisquer $\omega \in \mathbb{R}$ e $t > 1$.

O próximo resultado será útil para garantirmos a convergência das séries de potência que aparecerão no decorrer deste capítulo.

Proposição 4.2 *Se $f \in B_q$, $q > 2$, e $u \in B_f$, com B_q e B_f dados, respectivamente, por (1.15) e (3.5), então existem constantes $k_1 = k_1(q)$ e $k_2 = k_2(q)$ tais que*

$$|u(x, t)| < k_1 \|u\| \quad \text{e} \quad |u_x(x, t)| < k_2 \|u\|,$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [1, L^2]$. Em particular, existe $K > 0$ tal que $|u(x, t)|, |u_x(x, t)| < K \|u\|$.

Demonstração: Iremos provar a segunda desigualdade. A demonstração da primeira pode ser encontrada em [21]. Lá, Souza et al. obtiveram o seguinte valor para a constante k_1 :

$$k_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\omega|^q} d\omega.$$

Inicialmente, notemos que $u \in B_f$ implica em $u(\cdot, t) \in B_q$, $q > 2$, para todo $t \in [1, L^2]$. Tomando $t \in [1, L^2]$ fixo porém arbitrário, como $B_q \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, podemos obter, através da Transformada de Fourier inversa, a seguinte representação integral para $u_x(x, t)$:

$$u_x(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega e^{i\omega x} \widehat{u}(\omega, t) d\omega.$$

Assim,

$$|u_x(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega| |\widehat{u}(\omega, t)| d\omega.$$

Se $|\omega| < 1$,

$$|u_x(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|u\|}{1 + |\omega|^q} d\omega.$$

Se $|\omega| \geq 1$, como $q > 2$,

$$\frac{|\omega| + |\omega|^q}{1 + |\omega|^q} \leq \frac{2|\omega|^q}{1 + |\omega|^q} < 2.$$

Usando a desigualdade acima e o fato de que $|\widehat{u}(\omega, t)| \leq \|u\| (1 + |\omega|^q)^{-1}$ quando $t \in [1, L^2]$, obtemos

$$|u_x(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\|u\|}{1 + |\omega|^{q-1}} d\omega.$$

Observe que a integral do lado direito da desigualdade acima converge, pois $q > 2$ e $\|u\| < \infty$. Portanto, tomando

$$k_2 = \min \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\omega|^q} d\omega, \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\omega|^{q-1}} d\omega \right\},$$

temos $|u_x(x, t)| \leq k_2 \|u\|$. Para finalizar, definindo

$$K = \min\{k_1, k_2\}, \tag{4.5}$$

segue que $|u(x, t)|, |u_x(x, t)| \leq K \|u\|$ e a proposição está demonstrada. \blacksquare

A proposição a seguir nos fornece algumas estimativas que serão necessárias para a continuação desse capítulo.

Proposição 4.3 *Se $q > 1$ e $t \geq 1$ então*

$$\frac{1}{1 + |\omega|^{q-1}} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} ds < \frac{2t-1}{1 + |\omega|^q}, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{1 + |\omega|^{q-1}} \int_0^{t-1} |\omega|^i s e^{-\omega^2 s} ds < \frac{t^2 - 2t + 4}{1 + |\omega|^q}, \quad i = 0, 1, \tag{4.7}$$

e,

$$\frac{1}{1 + |\omega|^{q-1}} \int_0^{t-1} \omega^2 s^2 e^{-\omega^2 s} ds < \frac{2(t-1)^3/3 + 2}{1 + |\omega|^q}, \tag{4.8}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Primeiro, iremos analisar as integrais que aparecem no lado esquerdo das desigualdades acima.

Calculando as integrais acima, veja demonstração do Lema 3.1, obtemos

$$\int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} ds \leq F_{w,t} \equiv \begin{cases} t-1, & \text{se } |\omega| < 1, \\ 1/|\omega|^2, & \text{se } |\omega| \geq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\int_0^{t-1} |\omega|^i s e^{-\omega^2 s} ds \leq M_{w,t} \equiv \begin{cases} (t-1)^2/2, & \text{se } |\omega| < 1, \\ 3/|\omega|^{3-i}, & \text{se } |\omega| \geq 1, i = 0, 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\int_0^{t-1} |\omega|^2 s^2 e^{-\omega^2 s} ds \leq T_{w,t} \equiv \begin{cases} (t-1)^3/3, & \text{se } |\omega| < 1, \\ 2/|\omega|^4, & \text{se } |\omega| \geq 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Agora estimaremos as cotas acima considerando os casos: $|\omega| < 1$ e $|\omega| \geq 1$.

Como $q > 1$, se $|\omega| < 1$ então $1 + |\omega|^q < 2(1 + |\omega|^{q-1})$ e, como $t \geq 1$, segue que

$$\frac{t-1}{1 + |\omega|^{q-1}} < \frac{2t-2}{1 + |\omega|^q}, \quad \frac{(t-1)^2/2}{1 + |\omega|^{q-1}} < \frac{(t-1)^2}{1 + |\omega|^q}, \quad \text{e}, \quad \frac{(t-1)^3/3}{1 + |\omega|^{q-1}} < \frac{2(t-1)^3/3}{1 + |\omega|^q}.$$

Por outro lado, se $|\omega| \geq 1$ então $[|\omega|^i(1 + |\omega|^{q-1})]^{-1} \leq (1 + |\omega|^q)^{-1}$, para todo inteiro $i \geq 1$.

Usando essa última estimativa, as cotas obtidas no caso $|\omega| < 1$ e as definições das funções $F_{w,t}$, $M_{w,t}$ e $T_{w,t}$, segue o resultado desejado. \blacksquare

4.2 Existência e unicidade local

Nesta seção, provaremos um teorema similar ao Teorema 3.1, da Seção 3.2, que nos garantirá a existência e unicidade da solução do pvi (4.1) na faixa de tempo $[1, L^2]$. Como feito lá, inicialmente, consideramos o espaço de Banach $(B, \|\cdot\|)$, dado por (3.3) e (3.4), e definimos o operador T , como em (3.6), que atuará sobre as funções $u : \mathbb{R} \times [1, L^2] \rightarrow \mathbb{R}$ desse espaço da seguinte forma: $T(u) = u_f + \lambda N(u)$, onde $u_f(x, t)$ é a solução do pvi linear com dado inicial $f(x)$, veja (2.6), e $N(u)$ é o operador dado por (4.3).

Antes de prosseguirmos, precisamos garantir a boa definição dos operadores $T(u)$ e $N(u)$ acima. Observe que para fazermos isto basta garantirmos que, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [1, L^2]$, os valores

$u(x, t)$ e $u_x(x, t)$ pertençam à região de analiticidade da função $F(u, u_x)$ definida em (4.2). Pela Proposição 4.2, se $f \in B_q$, $q > 2$, e $u \in B_f$, então, $|u(x, t)|, |u_x(x, t)| < K\|u\|$, onde K é a constante dada por (4.5). Lembrando que $F(u, u_x)$ tem raios de convergência $r_u, r_v > 0$, se tomarmos f suficientemente pequeno de forma que $\|f\|_q < r (K\bar{C}_L)^{-1}$, onde $r = \min\{r_u, r_v\}$ e \bar{C}_L é dada por (3.8), utilizando a Proposição 3.2 temos $|u(x, t)|, |u_x(x, t)| < K\|u\| \leq K\bar{C}_L\|f\|_q < r$. Portanto, sob essas condições, $F(u, u_x)$ está bem definida e, conseqüentemente, os operadores $T(u)$ e $N(u)$ também estão. No decorrer desta seção, tomaremos o cuidado de tomar a norma de f satisfazendo a condição acima. Entretanto, como veremos nas demonstrações dos Lemas 4.1 e 4.2, precisaremos impor mais condições sobre a norma de f para garantir a convergência de outras séries de potências que surgirão ao longo da seção.

Também na Seção 3.2, vimos que se $B_f \subset B$ é a bola fechada de centro u_f e raio $\|f\|_q$, dada por (3.5), se $u \in B_f$ for um ponto fixo do operador $T(\cdot)$ e se $T(\cdot)$ for uma contração que leva B_f em B_f , então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, veja [20], $u(x, t)$ será a única solução local do pvi (4.1) na faixa de tempo $[1, L^2]$. Assim, obtemos a seguinte versão do Teorema 3.1 para o problema (4.1) tratado neste capítulo:

Teorema 4.1 *Suponha que $F(u, v)$, dada pela soma (4.2) com índices sujeitos à restrição $4a + 3b - 2 > 0$, tenha raios de convergência r_u e r_v positivos e seja $r = \min\{r_u, r_v\}$. Dados $q > 2$, $L > 1$ e $\lambda \in [-1, 1]$, existe um número positivo $\epsilon = \epsilon(L, q, r, F) > 0$ tal que se $f \in B_q$ e $\|f\|_q < \epsilon$ então o pvi (4.1), com t restrito ao intervalo $[1, L^2]$, possui uma única solução em B_f .*

Para a demonstração do Teorema 4.1, iremos mostrar a seguir dois lemas, semelhantes aos Lemas 3.3 e 3.4, sendo que o primeiro deles nos garantirá que se o dado inicial f for suficientemente pequeno então o operador $T(u)$ mapeia a bola B_f nela mesma e, o segundo, nos mostrará que $T(u)$ é uma contração em B_f .

Observação: Ressaltamos que as demonstrações apresentadas no restante deste capítulo são similares às do Capítulo 3 e, por isso, não repetiremos todos os cálculos lá apresentados. Seguiremos a mesma lógica do capítulo anterior, entretanto, evidenciaremos apenas as diferenças entre os resultados apresentados.

Lema 4.1 *Suponha que $F(u, v)$, dada pela soma (4.2) com índices a e b tais que $4a + 3b - 2 > 0$ e raios de convergência positivos r_u e r_v , $L > 1$ e $q > 2$, se $f \in B_q$ e $r = \min\{r_u, r_v\}$ então existe um número $\epsilon_1 = \epsilon_1(L, q, r, F) > 0$ de forma que*

$$\|N(u)\| < \|f\|_q,$$

para toda função $u \in B_f$ desde que $\|f\|_q < \epsilon_1$.

Demonstração: Dados $q > 2$, $f \in B_q$, $u \in B_f$ e $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tais que $m \geq a$, $n \geq b$ e $4a + 3b - 2 > 0$, defina

$$H_{m,n}(u)(x, t) = c_{m,n} \int_0^{t-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}} u^{2m+1} u_x^n(y, t-s-1) dy \right) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [1, L^2]. \quad (4.12)$$

Observe que o operador $N(u)$, definido em (4.3), pode ser reescrito como:

$$N(u) \equiv \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} H_{m,n}(u), \quad (4.13)$$

desde que $\|f\|_q < r(K\bar{C}_L)^{-1}$, onde $r = \min\{r_u, r_v\} > 0$ e as constantes \bar{C}_L e K são dadas, respectivamente, por (3.8) e (4.5).

Tendo em vista a identidade acima, iremos avaliar separadamente cada $H_{m,n}(u)$ e depois somar as conas obtidas para estimar a norma de $N(u)$.

Como $q > 2$, então, $u^{2m+1}u_x^n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e podemos aplicar a transformada de Fourier nesse produto. Assim, lembrando que $\mathcal{F}\{f_1 * f_2\}(\omega) = \widehat{f}_1(\omega)\widehat{f}_2(\omega)$ e $\mathcal{F}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}}\right\} = e^{-\omega^2 s}$, segue de (4.12) que

$$\widehat{H_{m,n}(u)}(\omega, t) = c_{m,n} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} \widehat{u^{2m+1}u_x^n}(\omega, t-s-1) ds.$$

Mas

$$\widehat{u^{2m+1}u_x^n}(\omega, t) = \frac{1}{(2\pi)^{2m+n}} \int_{\mathbb{R}^{2m+n}} \widehat{u}(\omega - p_1) \cdots \widehat{u}(p_{2m} - r_1) \cdots \widehat{u}_x(r_{n-1} - r_n) \widehat{u}_x(r_n) dp dr,$$

onde estamos usando as notações: $dp = dp_1 dp_2 \cdots dp_{2m}$ e $dr = dr_1 dr_2 \cdots dr_n$. Assim, podemos reescrever $\widehat{H_{m,n}(u)}(\omega, t)$:

$$\frac{c_{m,n}}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} \left(\int_{\mathbb{R}^{2m+n}} \widehat{u}(\omega - p_1) \cdots \widehat{u}(p_{2m} - r_1) \cdots \widehat{u}_x(r_{n-1} - r_n) \widehat{u}_x(r_n) dp dr \right) ds. \quad (4.14)$$

Veja que na representação acima temos $2m$ convoluções de \widehat{u} com \widehat{u} , uma convolução de \widehat{u} com \widehat{u}_x e $n - 1$ convoluções de \widehat{u}_x com \widehat{u}_x .

Como na demonstração do Lema 3.3 gostaríamos de usar o Lema 3.2 para estimar o módulo de (4.14). Observe que, para que possamos usar esse lema, agora não basta considerarmos $q > 3/2$ como no capítulo anterior. De fato, da Proposição 4.1, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\omega - p_1)| |\widehat{u}(p_1)| dp_1 \leq 2^2 \|u\|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\omega - p_1|^{q-1}} \cdot \frac{1}{1 + |p_1|^{q-1}} dp_1.$$

Para que a integral do lado direito da desigualdade acima seja convergente e, conseqüentemente, possamos usar o Lema 3.2, é necessário que $q - 1 > 1$, isto é, $q > 2$.

Com isso, como $L > 1$, $q > 2$, $f \in B_q$ e $u \in B_f$, podemos proceder de forma semelhante à demonstração do Lema 3.3 da seguinte forma: em (4.14), aplicamos $2m + n + 1$ vezes a Proposição 4.1 e, em seguida, $2m + n$ vezes o Lema 3.2, obtendo:

$$\left| \widehat{H_{m,n}(u)}(\omega, t) \right| < 2 |c_{m,n}| \frac{F_{\omega,t}}{1 + |\omega|^{q-1}} \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1},$$

onde $F_{\omega,t}$ é dada por (4.9).

Da Proposição 4.3, para quaisquer $\omega \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1$, vale $F_{\omega,t}(1 + |\omega|^{q-1})^{-1} < (2t - 1)(1 + |\omega|^q)^{-1}$, pois $q > 2$, e assim temos a seguinte cota superior:

$$\left| \widehat{H_{m,n}(u)}(\omega, t) \right| < |c_{m,n}| \frac{(4t - 2)}{1 + |\omega|^q} \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1},$$

onde G_q é a constante dada por (3.9).

Usando a estimativa acima em cada parcela da soma do lado direito da representação do operador $N(u)$, dada por (4.13), temos

$$\left| \widehat{N(u)}(\omega, t) \right| < \frac{(4t - 2)}{1 + |\omega|^q} \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a + 3b - 2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1}. \quad (4.15)$$

Precisamos garantir a convergência da série acima. Para isso, lembrando que a soma (4.2) possui raios de convergência r_u e r_v e que $r \equiv \min\{r_u, r_v\} > 0$, defina

$$r_0 = \min \left\{ \frac{r}{K}, \frac{\pi r}{G_q} \right\},$$

onde G_q e K são dadas, respectivamente, por (3.9) e (4.5). De forma semelhante ao que fizemos no início desta seção, tomando $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$, segue da Proposição 3.2 que $\|u\| < r_0$, garantindo assim, a convergência da soma que aparece no lado direito de (4.15).

Agora iremos determinar uma cota superior para $|\partial_\omega \widehat{N}(u)(\omega, t)|$. Na definição de $F(u, u_x)$ (veja (4.2)) temos potências da forma $u^{2m+1} u_x^n$ com $m \geq a$ e $n \geq b$ tais que $4a+3b-2 > 0$. Observe que essa condições sobre os índices m e n nos mostra que, na representação de $F(u, u_x)$, temos pelo menos um fator de u dentro do somatório e portanto podemos derivar ambos os lados de (4.14) com respeito à variável ω e usar a estimativa $|\widehat{u}'(\omega, t)| \leq 2\|u\|(1 + |\omega|^{q-1})^{-1}$, veja Proposição 4.1. Caso pudesse ocorrer de na soma (4.2) não termos fatores de u , isto é, termos apenas fatores de u_x , precisaríamos obter estimativas para as derivadas com relação à omega de \widehat{u}_x . Assim, procedendo de forma análoga aos cálculos feitos para obter a estimativa do módulo de $\widehat{H}_{m,n}(u)$, usamos o Lema 3.2 e a Proposição 4.3, para obter:

$$\left| \partial_\omega \widehat{H}_{m,n}(u)(\omega, t) \right| < \frac{(4t^2 - 2t + 14)}{1 + |\omega|^q} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1}.$$

Tendo em vista a representação (4.13) para o operador $N(u)$, a desigualdade acima implica em

$$\left| \partial_\omega \widehat{N}(u)(\omega, t) \right| < \frac{(4t^2 - 2t + 14)}{1 + |\omega|^q} \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1}, \quad (4.16)$$

desde que $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$.

Por fim, para avaliar $|\partial_\omega^2 \widehat{N}(u)(\omega, t)|$, usamos mais uma vez o fato de que a soma (4.2) possui pelo menos um fator de u para estimar a derivada segunda de $\widehat{H}_{m,n}(u)(\omega, t)$ com respeito à variável ω , pois assim poderemos usar a estimativa $|\widehat{u}''(\omega, t)| \leq 2\|u\|(1 + |\omega|^{q-1})^{-1}$, veja Proposição 4.1. Com isso, já que $q > 2$, usando novamente o Lema 3.2 e a Proposição 4.3, obtemos:

$$\left| \partial_\omega^2 \widehat{H}_{m,n}(u)(\omega, t) \right| < \frac{(16t^3 - 12t^2 - 12t + 170)}{1 + |\omega|^q} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1}.$$

Segue da desigualdade acima juntamente com a representação (4.13) para $N(u)$ que

$$\left| \partial_\omega^2 \widehat{N}(u)(\omega, t) \right| < \frac{(16t^3 - 12t^2 - 12t + 170)}{1 + |\omega|^q} \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1}, \quad (4.17)$$

desde que $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$.

Dessa forma, observando que o polinômio $16t^3 - 8t^2 - 10t + 182$ é crescente para $t \in [1, L^2]$, somando as cotas (4.15), (4.16) e (4.17), e usando as definições (1.14) e (3.4) para as normas $\|\cdot\|_q$ e $\|\cdot\|$, obtemos a seguinte cota superior

$$\|N(u)\| < (16L^6 - 8L^4 - 10L^2 + 182) \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n+1},$$

quando $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$.

Notando que as desigualdades $m \geq a$, $n \geq b$ e $4a + 3b - 2 > 0$ implicam em $2m + n + 1 \geq 2$, se $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$ temos $\|u\| < r_0 < r$ e

$$\|u\|^2 \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \|u\|^{2m+n-1} < +\infty.$$

Assim, sob essas condições, segue da Proposição 3.2 que

$$\|N(u)\| < K_{L,q} \bar{C}_L^2 \|f\|_q^2,$$

onde

$$K_{L,q} = (16L^6 - 8L^4 - 10L^2 + 182) \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} r_0^{2m+n-1}. \quad (4.18)$$

Portanto, definindo $\epsilon_1 = \epsilon_1(L, q, r, F) \equiv \min \{(K_{L,q} \bar{C}_L^2)^{-1}, \bar{C}_L^{-1} r_0\}$, obtemos

$$\|N(u)\| < \|f\|_q,$$

para qualquer $u \in B_f$, sempre que $\|f\|_q < \epsilon_1$. ■

Lema 4.2 *Sob as hipóteses do Lema 4.1, existe um número $\epsilon_2 = \epsilon_2(L, q, r, F) > 0$ de forma que, se $f \in B_q$ e $\|f\|_q < \epsilon_2$, então*

$$\|N(u) - N(v)\| < \frac{1}{2} \|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in B_f$.

Demonstração: Dados $q > 2$ e $f \in B_q$, sejam u e v duas funções de B_f e $H_{m,n}(u)$ a função representada em (4.12) onde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ são tais que $m \geq a$, $n \geq b$ com $4a + 3b - 2 > 0$. Temos que $\left[\widehat{H_{m,n}(u)} - \widehat{H_{m,n}(v)} \right](\omega, t)$ é dado por

$$\frac{c_{m,n}}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} (\widehat{u} * \cdots * \widehat{u}_x - \widehat{v} * \cdots * \widehat{v}_x)(\omega, t - s - 1) ds, \quad (4.19)$$

sendo que no integrando acima temos $2m$ convoluções de \widehat{u} com \widehat{u} e $n - 1$ convoluções de \widehat{u}_x com \widehat{u}_x subtraído da mesma quantidade com relação as funções \widehat{v} e \widehat{v}_x . Como na demonstração do lema anterior, para garantirmos as convergências das séries que aparecem nos cálculos a seguir, iremos considerar mais uma vez que $\|f\|_q \leq \bar{C}_L^{-1} r_0$, o que, pela Proposição 3.2, implica em $\|u\|, \|v\| < r_0$, pois $u, v \in B_f$.

Usaremos agora os mesmos procedimentos da demonstração do Lema 3.4, isto é, inicialmente iremos somar e subtrair $\widehat{v} * \widehat{u} * \cdots * \widehat{u} * \widehat{u}_x * \cdots * \widehat{u}_x$ (convolução de \widehat{v} com $2m - 1$ convoluções de \widehat{u} com \widehat{u} e de $n - 1$ convoluções de \widehat{u}_x com \widehat{u}_x) no integrando do lado direito de (4.19), obtendo

$$\left[\widehat{H_{m,n}(u)} - \widehat{H_{m,n}(v)} \right](\omega, t) = I_1 + I_2,$$

onde

$$I_1 = \frac{c_{m,n}}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} [(\widehat{u} - \widehat{v}) * \widehat{u} * \cdots * \widehat{u} * \widehat{u}_x * \cdots * \widehat{u}_x](\omega, s) ds$$

e

$$I_2 = \frac{c_{m,n}}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{t-1} e^{-\omega^2 s} (\widehat{v} * \widehat{u} * \cdots * \widehat{u} * \widehat{u}_x * \cdots * \widehat{u}_x - \widehat{v} * \cdots * \widehat{v} * \widehat{v}_x * \cdots * \widehat{v}_x)(\omega, s) ds.$$

Observando que a representação de I_1 é igual a de $\widehat{H_{m,n}(u)}$ trocando-se uma das funções u em (4.12) por $u - v$, e repetindo os mesmos cálculos do Lema 3.3, obtemos uma cota superior semelhante a (4.2) para $|I_1|$, isto é,

$$|I_1| < |c_{m,n}| \frac{(4t - 2)}{1 + |\omega|^q} \left(\frac{G_q}{\pi} \right)^{2m+n} \|u - v\| \|u\|^{2m+n},$$

onde G_q é a constante dada por (3.9).

Para estimar $|I_2|$ iremos agora somar e subtrair $\widehat{v} * \widehat{v} * \widehat{u} * \cdots * \widehat{u} * \widehat{u}_x * \cdots * \widehat{u}_x$ ao integrando de I_2 , isto é, uma convolução de \widehat{v} com \widehat{v} , $2m - 2$ convoluções de \widehat{u} com \widehat{v} e $n - 1$ convoluções

de \widehat{u}_x com \widehat{u}_x , com isso obtemos duas novas integrais, digamos I_3 e I_4 , sendo que $|I_3|$ é limitado superiormente por

$$|c_{m,n}| \frac{(4t-2)}{1+|\omega|^q} \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \|u-v\| \|u\|^{2m+n-1} \|v\|,$$

e I_4 pode ser decomposta em outras duas integrais somando e subtraído ao seu integrando $\widehat{v} * \widehat{v} * \widehat{v} * \widehat{u} * \dots * \widehat{u} * \widehat{u}_x * \dots * \widehat{u}_x$. Lembrando que $|\widehat{u}_x(\omega, t) - \widehat{v}_x(\omega, t)| \leq 2\|\widehat{u} - \widehat{v}\|(1+|\omega|^{q-1})^{-1}$, veja Proposição 4.1, repetindo o processo acima mais $2m+n-3$ vezes e usando a definição de $N(u)$, obtemos

$$\left| \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right| < \frac{(4t-2)}{1+|\omega|^q} \|u-v\| \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} \left[|c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \left(\sum_{i=0}^{2m+n} \|u\|^{2m+n-i} \|v\|^i \right) \right].$$

Note que a soma do lado direito da desigualdade acima é convergente. De fato, como $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$ e $u, v \in B_f$, pela Proposição 3.2, temos $\|u\|, \|v\| < r_0$ o que implica em

$$\sum_{i=0}^{2m+n} \|u\|^{2m+n-i} \|v\|^i < (2m+n+1)r_0^{2m+n}$$

e, portanto, a série é convergente já que $r_0 < r \equiv \min\{r_u, r_v\}$, sendo r_u e r_v os raios de convergência da soma (4.2).

De forma similar, obtemos, respectivamente, as seguintes estimativas para os módulos das derivadas $\left| \partial_\omega \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right|$ e $\left| \partial_\omega^2 \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right|$:

$$\frac{(4t^2 - 2t + 14)}{1+|\omega|^q} \|u-v\| \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} \left[|c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \left(\sum_{i=0}^{2m+n} \|u\|^{2m+n-i} \|v\|^i \right) \right],$$

e

$$\frac{(16t^3 - 12t^2 - 12t + 170)}{1+|\omega|^q} \|u-v\| \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} \left[|c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} \left(\sum_{i=0}^{2m+n} \|u\|^{2m+n-i} \|v\|^i \right) \right],$$

sendo G_q a constante dada por (3.9).

Observe que a soma do lado direito das desigualdades acima é a mesma que aparece na estimativa de $\left| \left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (\omega, t) \right|$, a qual é convergente desde que $\|f\|_q < \bar{C}_L^{-1} r_0$ e $u, v \in B_f$, como visto acima.

Assim, usando a definição da norma $\|\cdot\|$ em B juntamente com a Proposição 3.2, segue que

$$\|N(u) - N(v)\| < \bar{K}_{L,q} \|f\|_q \|u - v\|,$$

onde

$$\bar{K}_{L,q} = (16L^6 - 8L^4 - 10L^2 + 182) \bar{C}_L \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} \left[(2m+n+1) |c_{m,n}| \left(\frac{G_q}{\pi}\right)^{2m+n} r_0^{2m+n-1} \right].$$

Portanto, definindo $\epsilon_2 = \epsilon_2(L, q, r, F) \equiv \min \{(2\bar{K}_{L,q})^{-1}, \bar{C}_L^{-1} r_0\}$ e tomando $\|f\|_q < \epsilon_2$ obtemos o resultado desejado. ■

Demonstração do Teorema 4.1: Como na demonstração do Teorema 3.1, da Seção 3.2, vamos definir $\epsilon \equiv \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, com ϵ_1 e ϵ_2 dados, respectivamente, pelos Lemas 4.1 e 4.2. Assim, segue diretamente desses dois lemas que $T(B_f) \subset B_f$ e que $T(u)$ é uma contração em B_f . Portanto, do Teorema do Ponto Fixo de Banach [20] e do Princípio de Duhamel [15], o pvi (4.1), com $t \in [1, L^2]$, possui uma única solução em B_f . ■

4.3 Renormalização e demonstração do Teorema 1.2

Nas Seções 3.4 e 3.5, generalizamos os passos do ARG que foram explicitados nas primeiras iterações feitas na Seção 3.3 e mostramos que desde que o primeiro elemento, f_0 , da sequência de dados iniciais para o pvi (3.2) esteja em $B_q \cap B_\epsilon$, sendo $q > \frac{3}{2}$ e ϵ dado pelo Teorema 3.1, e além disso, puder ser decomposto em duas componentes sendo uma na direção do ponto fixo f_1^* do operador RG linear e, a outra, na direção *irrelevante* (no sentido do RG) satisfazendo as hipóteses do Lema da Contração 2.2, então a imagem de f_0 pelo operador RG não-linear nos fornece uma outra função que será o dado inicial de um novo pvi. Além disso, esse novo dado inicial satisfaz as mesmas propriedades de f_0 , em particular, também admite uma decomposição semelhante a de f_0 e possui massa zero, e sua norma pode ser estimada em termos de $\|f_0\|_q$. Também podemos obter estimativas em termos da norma de f_0 para a componente irrelevante da decomposição e para a diferença das constantes A 's que aparecem nas decomposições dos f 's

multiplicando o ponto fixo f_1^* . Com isso, verificamos que, desde que possamos realizar a primeira iteração do ARG, todos os passos da n -ésima iteração também estarão satisfeitos para qualquer inteiro positivo n .

O processo resumido no parágrafo anterior e explicitado na Seção 3.3, aplica-se também a pvi's mais gerais como, por exemplo, ao pvi (4.1) com dado inicial f ímpar (em particular, com massa zero), que é o objeto de estudo deste capítulo. Assim, a análise do pvi (4.1) pode ser feita lançando mão do ARG e, uma vez que, os cálculos para o caso aqui estudado são similares aos lá apresentados, para a leitura não ficar cansativa e repetitiva iremos agora omitir as primeiras iterações e passaremos diretamente para a generalização e adequação do ARG para o caso estudado neste capítulo como a seguir:

A partir de agora consideraremos, até o final deste capítulo, que $L > L_0$, onde L_0 é dado pelo Lema da Contração. Além disso, quando nos referirmos à bola B_ϵ , dada por (3.5), estaremos considerando agora o número positivo ϵ dado pelo Teorema 4.1.

Sendo assim, dados $q > 2$ e $\lambda \in [-1, 1]$, para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, consideremos o pvi (PVI_k, f_k) , obtido através da k -ésima iteração do ARG,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda_k F_{L,k}(u, u_x), & x \in \mathbb{R}, t \in (1, L^2], \\ u(x, 1) = f_k(x), & f_k \in B_q, \end{cases} \quad (4.20)$$

onde $f_k \in B_\epsilon$, com B_ϵ dada por (3.5), é uma função ímpar que será definida a seguir,

$$\lambda_k = \lambda L^{-k(4a+3b-2)} \text{ e } F_{L,k}(u, u_x) = \sum_{\substack{m \geq a, n \geq b \\ 4a+3b-2 > 0}} c_{m,n} L^{k[4(a-m)+3(b-n)]} u^{2m+1} u_x^n.$$

Pelo Teorema 4.1, como $\|f_k\|_q < \epsilon \leq \bar{C}_L^{-1} r_0$, veja demonstração do Teorema 4.1, e $L^{k[4(a-m)+3(b-n)]} \leq 1$ pois $k \geq 0$, $m \geq a$ e $n \geq b$, com $4a + 3b - 2 > 0$, então, $F_{L,k}$ está bem definida, veja a observação abaixo, e existe uma única solução (local no tempo) para o pvi (4.20) na bola B_{f_k} cuja representação é dada por

$$u_k(x, t) = u_{f_k}(x, t) + \nu_k(x, t) \quad (4.21)$$

sendo u_{f_k} a solução do pvi associado à equação do calor linear com dado inicial f_k , veja (2.6), e $\nu_k = \lambda_k N(u_k)$, com $N(u_k)$ é dada por (4.3). Isto nos garante a boa definição de $L^2 u_k(Lx, L^2)$.

Observação: Como $u_k \in B_{f_k}$, da Proposição 4.2, temos $|u_k(x, t)|, |\partial_x u_k(x, t)| < K\|u_k\|$, onde K é dada por (4.5). Assim, da Proposição 3.2, temos $|u_k(x, t)|, |\partial_x u_k(x, t)| < K\bar{C}_L\|f_k\|_q$ e, como $\|f_k\|_q < \epsilon \leq \bar{C}_L^{-1}r_0$, veja a definição de ϵ na demonstração do Teorema 4.1, e $r_0 = \min\left\{\frac{r}{K}, \frac{\pi r}{G_q}\right\}$, então, $|u_k(x, t)|, |\partial_x u_k(x, t)| < r$, onde $r > 0$ é o raio de convergência de $F(u, u_x)$ dada pela soma (4.2). Com isso, concluímos que a não-linearidade renormalizada $F_{L,k}$ está bem definida para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Como em (3.54) e em (3.55), na Seção 3.4, para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, o operador Grupo de Renormalização não-linear e a sequência de dados iniciais $(f_k)_k$ são definidos, respectivamente, por:

$$R_{L,k}f_k(x) \equiv L^2u_k(Lx, L^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

e

$$f_0(x) = f(x) \text{ e } f_{k+1}(x) = R_{L,k}f_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Lembrando que no caso da Equação de Burgers, no Capítulo 3, incluímos um índice a mais na definição do RG não-linear devido ao fato de que essa definição depende do pvi em questão, como visto acima, aqui faremos o mesmo, porém, para não confundir o leitor usaremos o índice k na definição já que agora o número n representa uma potência de u_x e não o número da iteração do ARG como no capítulo anterior. Ressaltamos ainda que o algoritmo aqui utilizado é o mesmo descrito na Seção 3.3, porém, agora, estamos considerando que o dado inicial f do pvi estudado seja ímpar, em particular, possui massa zero.

Com as definições acima, assim como na Seção 3.4, veja Lema 3.5, iremos enunciar e provar a seguinte versão do *Lema da Renormalização*:

Lema 4.3 *Considere o pvi (4.20) no intervalo de tempo $[1, L^2]$ e com dado inicial $f_k \in B_\epsilon$ ímpar e tal que f_k admite a decomposição*

$$f_k = A_k f_1^* + g_k, \quad (4.24)$$

sendo A_k uma constante, f_1^ o ponto fixo do operador RG linear, veja (1.4), e g_k uma função pertencente a B_q com $\widehat{g}_k(0) = \widehat{g}_k'(0) = 0$. Então:*

- (a) f_{k+1} , dado por (4.23), também admite a decomposição (4.24), isto é, $f_{k+1} = A_{k+1}f_1^* + g_{k+1}$, onde $A_{k+1} = A_k - i\widehat{\nu}_k'(0)$, $g_{k+1} = R_L g_k + L^2\nu_k(L\cdot) + i\widehat{\nu}_k'(0)f_1^*$ e $\nu_k = \lambda_k N(u_k)$, com $N(u_k)$

dado por (4.3). Além disto, $g_{k+1} \in B_q$ e é tal que $\widehat{g_{k+1}}(0) = \widehat{g_{k+1}}'(0) = 0$. Em particular, f_{k+1} também é uma função ímpar;

(b) $|A_{k+1} - A_k| \leq |\lambda_k| K_{L,q} \bar{C}_L^2 \|f_k\|_q^2$, onde \bar{C}_L e $K_{L,q}$, são dadas, respectivamente, por (3.8) e (4.18).

(c) $\|g_{k+1}\|_q \leq \frac{C}{L} \|g_k\|_q + |\lambda_k| \bar{E}_{L,q} \|f_k\|_q^2$, onde C é a constante dada pelo Lema da Contração e

$$\bar{E}_{L,q} = (k_q + L^{q+1}) K_{L,q} \bar{C}_L^2, \quad (4.25)$$

com k_q dada por (2.13).

Demonstração: Como visto anteriormente, para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, temos $\|f_k\|_q < \epsilon \leq \bar{C}_L^{-1} r_0$, o que garante a boa definição da não-linearidade renormalizada $F_{L,k}(u, u_x)$. Com isso, a demonstração desse lema é exatamente a mesma apresentada no Lema 3.5, exceto, no que diz respeito a paridade do dado inicial $f_{k+1} = R_{L,k} f_k$. Logo, para demonstrar esse lema, basta mostrar que: se f_k é ímpar então $f_{k+1} = R_{L,k} f_k$ também é ímpar.

Para isso, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, suponhamos que o dado inicial do pvi (4.20), f_k , seja uma função ímpar pertencente a $B_q \cap B_\epsilon$, $q > 2$. Segue do Teorema 4.1 que existe uma única solução $u_k(x, t)$, local no tempo, na bola B_{f_k} para o pvi (4.20) com dado inicial f_k e, como demonstrado na introdução deste capítulo, podemos concluir que $u_k(x, t)$ também é uma função ímpar na variável x .

Portanto, se f_{k+1} é dado por (4.23), isto é, $f_{k+1} = R_{L,k} f_k$, usando a definição (4.22) do operador não-linear $R_{L,k}$, obtemos

$$f_{k+1}(x) = L^2 u_k(Lx, L^2) = L^2 [-u_k(-Lx, L^2)] = -L^2 u_k(-Lx, L^2) = -f_{k+1}(-x),$$

e o lema está demonstrado. ■

Observação: A partir de agora consideraremos $L > L_\delta$, com L_δ dado por (3.32), até o final desta tese.

Para evitar argumentos repetitivos desnecessários, omitiremos nesse capítulo os passos das iterações do algoritmo que fizemos na Seção 3.3. Mostraremos aqui entretanto, que os mesmos procedimentos do ARG lá descritos podem ser aplicados neste caso mais geral. Seguindo os

mesmos argumentos do Capítulo anterior, como fizemos para obter (3.62), estabelecemos a seguinte relação de recorrência:

$$D_1 = \frac{1}{L^{1-\delta}} + k_q (1 + K_{L,q} \bar{C}_L^2 \|f_0\|_q) \quad (4.26)$$

e, para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$,

$$D_{k+1} = \frac{1}{L^{(k+1)(1-\delta)}} + k_q \left(1 + K_{L,q} \bar{C}_L^2 \|f_0\|_q + K_{L,q} \bar{C}_L^2 \|f_0\|_q \sum_{j=1}^k \frac{D_j^2}{L^{j(4a+3b-2)}} \right), \quad (4.27)$$

onde k_q , \bar{C}_L e $K_{L,q}$ são dadas, respectivamente, por (2.13), (3.8) e (4.18) e $4a + 3b - 2 > 0$.

Com isso, de forma similar à demonstração do Lema 3.7, desde que

$$\|f_0\|_q < \frac{1}{2L^{1-\delta} \bar{E}_{L,q} D^2},$$

com $\bar{E}_{L,q}$ dada por (4.25), é possível mostrar que $D_k < D$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, sendo D e D_k dadas, respectivamente, por (3.60) e (4.27).

Novamente, sendo $\epsilon > 0$ dado pelo Teorema 4.1, iniciamos com um dado inicial $f = f_0$ tal que $\|f_0\|_q < \epsilon$, garantindo a existência e unicidade da solução do pvi (4.1) e permitindo a iteração do procedimento e, a cada etapa do algoritmo, precisamos manter o dado inicial suficientemente pequeno. Nesse caso, obtemos, na k -ésima iteração do ARG, que, se $\|f_0\|_q < \bar{c}_k$, então $f_k \in B_\epsilon$, sendo

$$\bar{c}_0 \equiv \epsilon \text{ e } \bar{c}_{k+1} = \min \left\{ \frac{1}{2L^{k(4a+3b-2)(1-\delta)} \bar{E}_{L,q} D_k^2}, \bar{c}_k, \frac{\epsilon}{D_{k+1}} \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+,$$

onde $\bar{E}_{L,q}$ é a constante dada por (4.25), $D_0 \equiv 1$ e D_k dada por (4.26) e (4.27). Entretanto, observando que $L^{k(4a+3b-2)(1-\delta)} > L^{k(1-\delta)}$, pois $4a + 3b - 2 \geq 1$ e $\delta \in (0, 1)$, concluímos que podemos considerar a sequência \bar{c}_k usando a mesma definição dada em (3.66) (trocando $E_{L,q}$ por $\bar{E}_{L,q}$, veja Seção 3.5), ou seja,

$$\bar{c}_0 \equiv \epsilon \text{ e } \bar{c}_{k+1} = \min \left\{ \frac{1}{2L^{k(1-\delta)} \bar{E}_{L,q} D_k^2}, \bar{c}_k, \frac{\epsilon}{D_{k+1}} \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+,$$

onde $\bar{E}_{L,q}$ é a constante dada por (4.25), $D_0 \equiv 1$ e D_k é dada por (4.27).

Os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 3.2, na Seção 3.5, se aplicam nesse caso, uma vez que, dado $\delta \in (0, 1)$, a condição $4a + 3b - 2 > 0$ implica em $L^{-(4a+3b-2)} < L^{-(1-\delta)}$

e, portanto, substituindo $E_{L,q}$ por $\bar{E}_{L,q}$ na definição de $\bar{\epsilon}$ dada em (3.65), isto é,

$$\bar{\epsilon} = \min \left\{ \frac{1}{2L^{1-\delta}\bar{E}_{L,q}D^2}, \frac{\epsilon}{D} \right\}, \quad (4.28)$$

obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Dados $\delta \in (0, 1)$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tais que $4a + 3b - 2 > 0$ e $L > L_\delta$, com L_δ dada por (3.32), existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que, se $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ e se f_0 é ímpar então, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, f_{k+1} dada por (4.23) e (4.22) está bem definida, é ímpar e admite a representação (4.24), em que g_k tem média e primeiro momento nulos e satisfaz*

$$\|g_k\|_q \leq \frac{1}{L^{k(1-\delta)}} \|f_0\|_q. \quad (4.29)$$

Além disso, f_k satisfaz

$$\|f_k\|_q \leq D_k \|f_0\|_q, \quad (4.30)$$

em que D_k é dada por (4.27) e, em particular, $\|f_k\|_q < \epsilon$.

De posse do Lema 4.3 e do Teorema 4.2, o ciclo da k -ésima iteração do ARG está completo para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Assim, utilizando os resultados acima, passaremos agora finalmente à demonstração do Teorema 1.2.

Demonstração do Teorema 1.2: Primeiramente observamos que, também neste caso, o operador RG não-linear $R_{L,k}$ definido em (4.23) satisfaz à propriedade de semi-grupo (3.68), ou seja, $R_{L^k,0} = R_{L,k-1} \circ \dots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}$, para todo $k \in \{1, 2, \dots\}$.

Como $\|f_0\|_q < \bar{\epsilon}$ e f_0 é uma função ímpar de B_q , $q > 2$, então, segue do Teorema 4.2 que, para todo $k = 1, 2, \dots$, f_k admite a decomposição $f_k = A_k f_1^* + g_k$, veja (4.24), onde A_k é uma constante e $g_k \in B_q$, $q > 2$, possui massa e primeiro momento nulos, e é válida a desigualdade (4.29). Com isso, utilizando (4.23) e a propriedade de semi-grupo, obtemos:

$$\|L^{2k} u(L^k \cdot, L^{2k}) - A_k f_1^*\|_q = \|g_k\|_q \leq \frac{\|f_0\|_q}{L^{k(1-\delta)}}.$$

Com argumentos similares aos utilizados na demonstração do Corolário 3.1, é possível mostrar que a sequência $(A_k)_k$ em (4.24) é de Cauchy e

$$|A_k - \bar{A}| \leq \frac{L^{-k(4a+3b-2)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(4a+3b-2)})} \|f_0\|_q,$$

sendo \bar{A} uma constante dependente do dado inicial f e da não-linearidade F . Como $\delta \in (0, 1)$, $L > 1$ e $4a + 3b - 2 > 0$, segue que $L^{1-\delta}L^{-(4a+3b-2)} < 1$. Com isso, lembrando que $\|f_1^*\|_q < k_q$, com k_q dada por (2.13), da desigualdade triangular e das duas desigualdades anteriores, obtemos:

$$\|L^{2k}u(L^k \cdot, L^{2k}) - \bar{A}f_1^*\|_q \leq \frac{\bar{C}}{L^{k(1-\delta)}} \|f_0\|_q, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots\},$$

onde $\bar{C} = \bar{C}(L, q, a, b, \delta) \equiv 1 + k_q \frac{1}{2L^{(1-\delta)}(1-L^{-(4a+3b-2)})}$.

Para terminar essa demonstração basta observar que a desigualdade acima é válida para todo $t_k = L^{2k}$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e $L > L_\delta$, e que podemos estendê-la para todo $t \geq 1$ tomando $t = \tau L^{2k_0}$ com $\tau \in (1, L^2)$ e $k_0 \in \mathbb{Z}^+$. Portanto,

$$\|tu(\sqrt{t} \cdot, t) - \bar{A}f_1^*\|_q \leq \frac{\bar{C}}{t^{(1-\delta)/2}} \|f_0\|_q$$

e, tomando o limite em ambos os lados da desigualdade acima com t tendendo ao infinito, concluímos a demonstração do Teorema 1.2. ■

Referências

- [1] R. G. Bartle, *Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley-Interscience Publication; 1^a edition, 1995.
- [2] G. A. Braga and W. R. P. Conti. A Multiscale Asymptotic Analysis of Time Evolution Equations on the Complex Plane, *Journal of Mathematical Physics*, **57**, p. 073504, 2016.
- [3] G. A. Braga, F. C. Furtado, and V. Isaia. Smoothing of Barenblatt Equation Singularity: a Numerical and Analytical Renormalization Group Study, In *Anais do I Encontro LNCC/IPRJ em Modelagem Computacional Multi-Escala de Sistemas Heterogêneos*, Nova Friburgo: IPRJ - UERJ, 2000.
- [4] G. A. Braga, F. C. Furtado, V. Isaia, and L. Lee. Numerical Renormalization Group Algorithms for Self-Similar Asymptotics of Partial Differential Equations. *Multiscale Modeling and Simulation*, SIAM, **18**, p. 131-162, 2020.
- [5] G. A. Braga, F. C. Furtado, J. M. Moreira and L. T. Rolla. Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations with Periodic Coefficients, *Multiscale Modeling and Simulation*, SIAM, 2003.
- [6] G. A. Braga and J. M. Moreira. Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations with Time Dependent Coefficients and Marginal Perturbations, *Journal of Statistical Physics*, **148**, 280-295, 2012.
- [7] G. A. Braga, J. M. Moreira and Camila F. Souza. *Asymptotics for Nonlinear Integral Equations with Generalized Heat Kernel and Time Dependent Coefficients Using*

Renormalization Group Technique. Journal of Mathematical Physics, **60**, Issue 1, 013507, 2019.

- [8] G. A. Braga, L. T. Rolla e J. M. Moreira. Análise Assintótica de Soluções de EDP's via Grupos de Renormalização. In *Anais do 57º Seminário Brasileiro de Análise*, Editora da UFV, pages 215-282, 2003.
- [9] J. Bricmont and A. Kupiainen. Renormalizing Partial Differential Equations. *Constructive Physics*, **446**, 83 -115, Springer, Berlin, 1995.
- [10] J. Bricmont, A. Kupiainen and G. Lin. Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **47**, 893-922, 1994.
- [11] J. L. Bona, K. S. Promislow and G. Wayne. On the Asymptotic Behavior Of Solutions to Nonlinear, Dispersive, Dissipative Wave Equations. *Math. Comput. Simulation*, **37**, 265-277, 1994.
- [12] J. L. Bona, K. S. Promislow and C. E. Wayne. Higher-order asymptotics of decaying solutions of some nonlinear, dispersive, dissipative wave equations. *Nonlinearity*, **8**, 1179-1206, 1995.
- [13] L. Chen and N. Goldenfeld. Numerical renormalization group calculations for similarity solutions and travelling waves, *Physical Review E*, **51**, 5577-5581, 1995.
- [14] L. Chen N. Goldenfeld and Y. Oono. Renormalization group and singular perturbations: multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory. *Physical Review E*, **54**, 376-394, 1996.
- [15] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. In Graduate studies in mathematics. AMS, 1998.
- [16] N. Goldenfeld, O. Martin and Y. Oono. Asymptotics of partial differential equations and the renormalization group. In *S. Tanveer, editor, Proc. NATO Advanced Research Workshop on Asymptotics Beyond All Orders*, New York, 1992.

- [17] N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono and F. Liu. Anomalous dimensions and the renormalization group in a nonlinear diffusion process. *Physical Review E*, **64**,1361-1364, 1990.
- [18] R. I. Junior e V. M. Iório, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2013
- [19] E. L. Lima. *Curso de Análise*, vol. 1. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.
- [20] E. L. Lima. *Espaços Métricos*, SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- [21] C. F. Souza. *Análise Assintótica de Equações Integrais via Grupos de Renormalização*. PhD thesis, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2017.
- [22] C. F. Souza. *O Método do Grupo de Renormalização para Equações de Evolução com Termos Não-lineares Dependentes de Derivadas*. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2011.
- [23] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics. New York: Wiley-Interscience Publication, 1999.

Apêndice A

Transformada de Fourier

Sendo uma das principais ferramentas utilizadas no desenvolvimento desta tese, neste apêndice, trataremos da transformada de Fourier definindo-a e apresentando algumas de suas propriedades.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Definimos

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{esssup}\{|f|; x \in \mathbb{R}\}, & \text{se } p = \infty. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

em que $\text{esssup}\{|f|; x \in \mathbb{R}\} = \inf_x \{\sup_g \{|g(x)|; g(x) = f(x) \text{ q.t.p.}\}\}$ (veja [1]).

Denotaremos por $L^p(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\|f\|_p < \infty$. Pode-se mostrar que $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach e que a norma (A.1) satisfaz a desigualdade de Hölder (veja [1], [15] ou [18])

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (\text{A.2})$$

com $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definição A.1 *Se $u \in L^1(\mathbb{R})$, definimos a sua transformada de Fourier como sendo*

$$\mathcal{F}\{u(\cdot)\}(w) \equiv \hat{u}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot w} u(x) dx, w \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.3})$$

e sua transformada inversa por

$$\mathcal{F}^{-1}\{u(\cdot)\}(\omega) \equiv \check{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \omega} u(x) dx, \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

Note que, como $|e^{\pm ix \cdot w}| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R})$ as integrais acima convergem para cada $\omega \in \mathbb{R}$.

Gostaríamos de saber quando f pode ser obtida de \hat{f} , isto é, quando $\check{u} = u$. Para isso, iremos estender as definições (A.3) e (A.4) para $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema A.1 (Teorema de Plancherel) *Se $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ e vale a igualdade*

$$\|\hat{u}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2.$$

Demonstração: Veja referência [15].

Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, através do Teorema de Plancherel é possível definir, por um processo de limite, a transformada de Fourier (e sua inversa) em $L^2(\mathbb{R})$ (veja [15]). Assim, mostraremos a seguir algumas propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$.

Antes disso, definiremos a convolução entre duas funções e apresentaremos algumas das propriedades.

Definição A.2 *Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, definimos a convolução de f com g , como sendo*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - w)g(w)dw.$$

Lema A.1 *A convolução satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$;
2. $f * g = g * f$;
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
4. $(f + g) * h = (f * h) + (g * h)$.

Demonstração: Veja referência [18], página 181.

Teorema A.2 *Se $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, então*

1. $\widehat{(D^n u)}(w) = (iw)^n \hat{u}(w)$ para cada número inteiro $n \geq 0$ tal que $D^n u \in L^2(\mathbb{R})$.
2. $\widehat{(u * v)} = \hat{u} \hat{v}$.

Demonstração: Veja [15] ou [18].

Dado $a > 0$, defina $\phi_a(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{4\pi a}}$. Então $\hat{\phi}_a(\omega) = e^{-\omega^2 a}$, veja [8] ou [15]. Segue do item 1 do teorema anterior que $\widehat{(D^1 \phi_a)}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2 a}$.

Outra propriedade importante da transformada de Fourier é dada pelo teorema abaixo. Sua demonstração pode ser encontrada em [18].

Teorema A.3 *A Transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.*

O lema abaixo nos mostrará que a transformada de Fourier do produto de n funções em $L^2(\mathbb{R})$ é dada por $n - 1$ convoluções da transformada dessas funções multiplicado por $(2\pi)^{-(n-1)}$. Essa propriedade será fundamental para a obtenção da existência e unicidade de soluções que será apresentada tanto nas seções 3.2 e 4.2.

Lema A.2 *Dadas $f_1, \dots, f_n \in L^2(\mathbb{R})$, temos que*

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdots f_n\}(w) = (2\pi)^{-(n-1)} \left(\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n \right) (w). \quad (\text{A.5})$$