UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Matheus Johnny Caetano

MATEMÁTICA CONDENSADA

Belo Horizonte
2024

Matheus Johnny Caetano

MATEMÁTICA CONDENSADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: John William MacQuarrie

Belo Horizonte
2024

Caetano, Matheus Johnny.

C128m Matemática condensada [recurso eletrônico] / Matheus Johnny Caetano – 2024.
138 f. il.

Orientador: John William MacQuarrie.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.136-138.

1. Matemática – Teses. 2. Categorias (Matemática) – Teses. 3. Grupos abelianos – Teses. I. MacQuarrie, John William. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Matemática Condensada

MATHEUS JOHNNY CAETANO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. John William MacQuarrie
UFMG

Documento assinado digitalmente
Abdelmoubine Amar Henni
Data: 08/02/2024 16:14:04-0300
CPF: ***.237.458-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Abdelmoubini Amar Henni
UFSC

Profa. Aline Vilela Andrade
UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br
CSABA SCHNEIDER
Data: 05/02/2024 15:11:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Csaba Schneider
UFMG

Belo Horizonte, 29 de janeiro de 2024.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

À Lele e Aninha,
meus amores!

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha esposa, Leticia, que me apoiou emocionalmente e matematicamente durante o mestrado, me incentivou e me fez sentir a pessoa mais sortuda do mundo. Também gostaria de agradecer à minha família de modo geral: meus pais, irmãos, sogros e cunhados, pois cada um, à sua maneira, me deu a possibilidade de estudar por todos esses anos. Gostaria de agradecer aos meus amigos, em especial, Bryant, Matheus e, mais uma vez, Leticia, pois tivemos momentos de desabafos e conselhos sobre os perrengues da pós-graduação.

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu orientador, John William MacQuarrie, pela sua paciência, seus ensinamentos e encorajamentos. Além disso, gostaria de agradecer a todos os colegas e professores que participaram do Seminário *Matemática Condensada* do departamento de Matemática da UFMG, pois a realização desta dissertação foi um processo coletivo, fundamentado em discussões realizadas ao longo de dois semestres.

Por fim, gostaria de agradecer aos professores Abdelmoubine Amar Henni, Aline Vilela Andrade e Csaba Schneider por comporem a banca; e ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A matemática condensada é uma nova teoria desenvolvida por Dustin Clausen e Peter Scholze que tem como propósito fornecer uma maneira mais conveniente de tratar objetos algébricos equipados com uma topologia. Nesta dissertação, visamos discorrer sobre os conceitos fundamentais da matemática condensada. Nosso objetivo é destacar as principais propriedades da categoria de conjuntos condensados e demonstrar que a categoria de grupos abelianos condensados compartilha todas as boas características da categoria de grupos abelianos. Com esse propósito, abordaremos conceitos preliminares sobre topologia, teoria de categorias e teoria de feixes.

Palavras-chave: categorias; categorias abelianas; feixes; conjuntos condensados; grupos abelianos condensados; grupos abelianos localmente compactos.

Abstract

Condensed mathematics is a new theory developed by Dustin Clausen and Peter Scholze that aims to provide a more convenient way of treating algebraic objects equipped with a topology. In this dissertation, we aim to discuss the fundamental concepts of condensed mathematics. Our goal is to highlight the main properties of the category of condensed sets and demonstrate that the category of condensed abelian groups shares all the good properties of the category of abelian groups. For this purpose, we will cover preliminary concepts about topology, category theory and sheaf theory.

Keywords: categories; abelian categories; sheaves; condensed sets; condensed abelian groups; locally compact abelian groups.

Lista de Categorias

AbGrp	Categoria dos grupos abelianos e homomorfismos de grupos abelianos.
AbGrTop^{disc}	Categoria dos grupos abelianos discretos e homomorfismos de grupos abelianos.
AbGrpTop	Categoria dos grupos abelianos topológicos e homomorfismos contínuos.
CGTop	Categoria dos espaços topológicos compactamente gerados e mapas contínuos.
CHAbTop	Categoria dos grupos abelianos Hausdorff compactos e homomorfismos contínuos.
CHTop	Categoria dos espaços Hausdorff compactos e mapas contínuos.
Cond$(\mathcal{C})$	Categoria dos objetos κ-condensados e transformações naturais.
EDSet	Categoria dos conjuntos extremamente desconexos e mapas contínuos.
FinSet	Categoria dos conjuntos finitos e funções.
Func$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$	Categoria de funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ e transformações naturais.
Grp	Categoria dos grupos e homomorfismos de grupos.
HTop	Categoria dos espaços Hausdorff e mapas contínuos.
LCA	Categoria dos grupos abelianos localmente compactos e homomorfismos contínuos.
ProFinSet	Categoria dos conjuntos profinitos e mapas contínuos.
PSh$(\mathcal{C}$, **Set**$)$	Categoria de pré-feixes de $\mathcal{C}$ para **Set** e transformações naturais.
Ring	Categoria dos anéis comutativos com unidade e homomorfismo de anéis.
Set	Categoria dos conjuntos e mapas entre esses.
Sh$(\mathcal{C}$, **Set**$)$	Categoria de feixes de $\mathcal{C}$ para **Set** e transformações naturais.
Stone	Categoria dos espaços Hausdorff compactos totalmente desconexos e mapas contínuos.
TFinSet	Categoria dos conjuntos finitos com topologia discreta e funções.
Top	Categoria dos espaços topológicos e funções contínuas.
k-**Vec**	Categoria dos espaços vetorias sobre o corpo k e transformações lineares.

Lista de Símbolos

$\widehat{A}$	Grupo dual do LCA-grupo A.
$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$	Categorias arbitrárias.
$\mathcal{C}^{op}$	Categoria dual de $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$	Classe de objetos da categoria $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$	Classe de morfismos da categoria $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$	Conjunto de morfismos de C para D em $\mathcal{C}$.
$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$	Funtores arbitrários.
$\mathbf{U}$	Funtor de esquecimento.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$	Funtor representável
$1_A, 1_{\mathcal{C}}$	Mapas identidade do objeto A e da categoria $\mathcal{C}$, respectivamente.
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Feixes e pré-feixes.
$\alpha, \beta, \gamma, \upsilon$	Transformações naturais arbitrárias.
$\mathrm{Nat}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$	Conjunto das transformações naturas de $\mathbf{F}$ para $\mathbf{G}$.
$\theta_{\mathbf{F},C}$	Bijeção do Lema de Yoneda.
$\tau_{(C)}$	Inversa de $\theta_{\mathbf{F},C}$.
$(C \times D, \pi_C, \pi_D)$	Produto de C e D.
$(C \coprod D, \iota_C, \iota_D)$	Coproduto de C e D.
$(A \times_C B, \rho_1, \rho_2)$	Pullback dos mapas $f : A \to C$ e $g : B \to C$.
$(\mathrm{Eq}(f, g), k)$	Equalizador dos mapas f e g.
$(\mathrm{Coeq}(f, g), q)$	Coequalizador dos mapas f e g.
$\mathfrak{o}$	Objeto inicial
$*$	Objeto terminal.
$\mathbf{0}$	Objeto zero.
$\lim \mathbf{F}(C)$	Limite de $\mathbf{F}$.
$\mathrm{colim}\mathbf{F}(C)$	Colimite de $\mathbf{F}$.
η	Unidade da adjunção.
ε	Counidade da adjunção.
$\Upsilon_{C,D}$	Bijeção da adjunção.
$\mathrm{Cl}_X(Y)$	Fecho de Y em X.
$\varprojlim \mathbf{F}(C)$	Limite inverso de $\mathbf{F}(C)$.
$(\beta X, b)$	Compactificação de Stone-Čech de X.
$\mathbb{R}^{dis}$	Conjunto dos números reais com a topologia discreta.
$0_{A,B}$	Morfismo zero de A para B.
$\ker(f)$	Núcleo de f
$\mathrm{coker}(f)$	Conúcleo de f.

$\mathcal{O}(X)$	Poset de todos os subconjuntos abertos de U.
$\mathrm{Cov}(\mathcal{C})$	Pré-topologia de Grothendieck de $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Cov}(U)$	Conjunto de coberturas de U na pré-topologia de Grothendieck.
$\mathcal{C}_{/X}$	Categoria slice de $\mathcal{C}$ sobre X.
$S_{\mathcal{C}}(X)$	Crivo em X.
$f^*S_{\mathcal{C}}(X)$	Pullback do crivo $S_{\mathcal{C}}(X)$.
$J(X)$	Coleção de crivos de cobertura de uma topologia de Grothendieck.
$[\{f_i\}_{i\in I}]$	Crivo gerado por uma família de morfismos.
$\mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}$	Extensão de Kan à direita de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$.
$(\mathcal{F}^{sh}, \varsigma)$	Feixificaçãod o pré-feixe $\mathcal{F}$.
$\underline{X}$	Conjunto condensado associado ao espaço topológico X.
$T(*)$	Conjunto subjacente do conjunto condensado T.
$T(*)_{top}$	$T(*)$ com a topologia quociente $\bigsqcup S \to T(*)$ com S profinito.
$\mathbb{L}(K, U)$	Abertos da subbase da topologia compacto-aberta.
$\Re(z)$	Parte real de z
$\mathrm{Map}(A, B)$	Conjunto de todos os mapas de A para B.
$\mathrm{BiLin(A, B)}$	Conjunto de mapas bilineares de A para B.
$\mathbb{Z}[S]$	Grupo abeliano livre.
$\mathcal{F}_{M,N}$	Pré-feixe de κ-$\mathfrak{EDSet}$ para $\mathfrak{AbGrp}$, cuja feixificação é o produto tensorial $M \otimes N$ de grupos abelianos condensados.
P_T	Pré-feixe de κ-$\mathfrak{EDSet}$ para $\mathfrak{AbGrp}$, cuja feixificação é o grupo abeliano livre condensado $\mathbb{Z}[T]$.
$\underline{\mathrm{Hom}(M, -)}$	Funtor Hom-interno da categoria de grupos abelianos condensados.
$(A_\bullet, d_\bullet)$	Complexo de cadeias de grupos abelianos.
$\mathfrak{P}(X)$	Conjunto das partes de X.
$\mathfrak{F}$	Filtro.
$\mathrm{Ult}(X)$	Conjunto dos ultrafiltros de X.
$\mathfrak{F}_x$	Ultrafiltro principal.

Sumário

Introdução

A *Matemática Condensada* é uma nova teoria, introduzida pelo matemático estadunidense Dustin Clausen e pelo medalhista Fields alemão Peter Scholze na década passada. Essa teoria visa unificar vários subcampos matemáticos, incluindo topologia, geometria complexa e geometria algébrica.

Em 2013, Scholze e o matemático indiano-estadunidense Bhargav Bhatt introduziram uma noção geral de site pró-étale associado a um esquema arbitrário. Em 2018, agora com a colaboração de Clausen, os pesquisadores concluíram que o site pró-étale de um único ponto, isomorfo ao site de conjuntos profinitos equipado com a topologia de Grothendieck dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, possui uma estrutura suficientemente rica para realizar grandes classes de espaços topológicos como feixes sobre ele. Desenvolvimentos subsequentes resultaram em uma teoria de *conjuntos condensados* e *grupos abelianos sólidos*, permitindo a incorporação da geometria não arquimediana na teoria.

Em 2020, Scholze apresentou uma prova que permitiria a integração de análise funcional e geometria complexa na teoria, utilizando a abordagem de *espaços vetoriais líquidos*. Dada a complexidade do argumento, o autor solicitou a outros matemáticos que fornecessem uma prova formalizada e verificada para validar o resultado. Um grupo liderado por Johan Commelin levou seis meses para verificar a parte central da prova usando o assistente de prova Lean, finalizando o processo em 14 de julho de 2022. Coincidentemente, em 2019, Barwick e Haine introduziram uma teoria semelhante de *objetos picnóticos*, relacionada aos conjuntos condensados, com diferenças teóricas de conjuntos

Todo este desenvolvimento teórico teve como motivação a necessidade de resolver problemas fundamentais em álgebra quando as estruturas algébricas em questão estão equipadas com uma topologia. Um dos principais desafios reside no fato de que a categoria dos grupos abelianos topológicos $\mathsf{AbGrpTop}$ não é uma categoria abeliana. De fato, o exemplo a seguir ilustra um caso de um homomorfismo de grupos contínuo que é tanto monomorfismo quanto epimorfismo, porém não é isomorfismo:

Exemplo 1. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual e $\mathbb{R}^{dis}$ o grupo aditivo dos números reais com a topologia discreta, isto é, a topologia em que todo subconjunto é aberto. É interessante notar que embora $\mathbb{R}^{dis}$ seja isomorfo a $\mathbb{R}$ como grupos, eles não são homeomorfos como espaços topológicos. Isso ocorre porque $\mathbb{R}^{dis}$ possui abertos na forma $\{x\}$, enquanto $\mathbb{R}$ não os possui.

No entanto, mesmo que não haja um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{dis}$ e $\mathbb{R}$, existe uma bijeção contínua entre eles. Por exemplo, o mapa:

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \mathbb{R}^{dis} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é um monomorfismo e epimorfismo, mas não é um isomorfismo, pois seu inverso não é contínuo. Portanto, o Teorema de Isomorfismo falha, como podemos ver pois:

$$\mathbb{R}^{dis}/\ker(\Theta) = \mathbb{R}^{dis} \ncong \mathbb{R} = \operatorname{Im}(\Theta).$$

A ideia fundamental no desenvolvimento da teoria se dá pela substituição de espaços topológicos por conjuntos condensados que são feixes de um determinado site de conjuntos profinitos. Similarmente, definimos grupos abelianos, anéis, módulos, ..., condensados. Com isso, pode-se mostrar que a categoria dos conjuntos condensados incluem espaços topológicos do melhor tipo, os espaços compactamente gerados. Ademais, os grupos abelianos condensados não apenas formam uma categoria abeliana, como satisfazem os mesmos axiomas de Grothendieck que a categoria AbGrp de grupos abelianos.

Nesse contexto, esta dissertação tem como propósito apresentar os conceitos iniciais de matemática condensada. Para isso, serão utilizados como principais literaturas o texto *Lectures on Condensed Mathematics* de Scholze (Referência [30]) e as notas dos seminários de Matemática Condensada da UFMG (Referência [1]). Ademais, faremos uma abordagem mais detalhada e apresentaremos os conceitos preliminares essenciais para esta teoria.

Em vista disso, iniciamos o primeiro Capítulo abordando os fundamentos da teoria de categorias, fornecendo os requisitos necessários para enunciar resultados como o Teorema do Funtor Adjunto. Para isso, usamos como principal referência o livro *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory* de Francis Borceaux (Referência [5]).

Em seguida, abordamos no segundo Capítulo as noções básicas de topologia importantes para matemática condensada. Em particular, introduzimos as categorias $\mathsf{ProFinSet}$ de conjuntos profinitos e EDSet de conjuntos profinitos extremamente desconexos. Finalmente, discorremos sobre a compactificação de Stone-Čech e algumas de suas propriedades aplicáveis na resolução de problemas da matemática condensada. Devido a diversidade de assuntos, utilizamos múltiplas referências.

No terceiro Capítulo, retomamos a discussão sobre a teoria de categorias, abordando as categorias abelianas e os Axiomas de Grothendieck. Este Capítulo é dedicado à contextualização e apresentação de exemplos, com o objetivo de proporcionar uma maior familiaridade com as categorias abelianas e suas características. Desta vez, utilizamos como referência o livro *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures* de Borceaux (Referência [6]) e *O Teorema 2.2* apresentado por Igor Martins Silva no Seminário *Matemática Condensada* do departamento de Matemática da UFMG (Referência [1]).

Posteriormente, no quarto Capítulo, introduzimos a teoria de feixes, de extrema importância, uma vez que um objeto condensado é um feixe. Apresentamos os conceitos de pré-topologia e topologia de Grothendieck, explorando suas relações e as caracterizações de feixes em ambos contextos. Além disso, demonstramos um resultado de equivalência de categorias de feixes, utilizando o conceito de base de um site. Por fim, abordamos brevemente alguns resultados complementares da teoria de feixes, como a feixificação de um pré-feixe. Assim, usamos como principal referencial os apêndices A e B do texto *Ultracategories* de Jacob Lurie (Referência [21]).

Por fim, no Capítulo 5, efetivamente introduzimos a matemática condensada. Abordamos o conceito de conjuntos, grupos, anéis, ..., condensados e apresentamos uma abordagem distinta para sua caracterização utilizando equivalência de feixes. Discutimos a adjunção entre conjuntos condensados e espaços topológicos compactamente gerados, apresentamos as excelentes propriedades dos grupos abelianos condensados. Em particular, na Seção 5.4 estudamos a categoria $\mathfrak{LCA}$, dos grupos abelianos localmente compactos e homomorfismos contínuos, e vemos que esta categoria interage extremamente bem com a categoria condensada (Teorema 5.4.11). Para este fim, utilizamos como principal referência as notas de Scholze e, como literatura complementar as dissertações de Catrin Mair (Referência [22]) e Dagur Ásgeirsson (Referência [3]), as notas de Frédéric Déglise (Referência [8]) sobre o workshop ministrado por Scholze, e as notas do Seminário *Matemática Condensada* do departamento de Matemática da UFMG (Referência [1]).

Adicionalmente, apresentamos dois Capítulos nos apêndices com resultados complementares sobre grupos abelianos e sobre compactificação de Stone-Čech. Por fim, as demais referências foram utilizadas como apoio, para contextualização de conceitos específicos ou resultados pontuais.

Capítulo 1

Introdução à teoria das categorias

A teoria das categorias é uma teoria geral de estruturas matemáticas e suas relações que foi introduzida por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane no artigo *General theory of natural equivalences* publicado na revista *Transactions of the American Mathematical Society* [13] em 1945. Essa teoria é usada em quase todas as áreas da matemática e desempenha um papel essencial ao caracterizar objetos especiais, como o conjunto vazio ou a topologia produto. O desafio reside em definir esses objetos sem fazer referência às suas estruturas internas, e a solução é encontrada ao descrevê-los em termos de suas relações com outros objetos, conforme indicado pelos morfismos dentro de suas categorias. O objetivo final é identificar *propriedades universais* que permitam uma distinção exclusiva desses objetos de interesse.

Este capítulo introduzirá os conceitos de limites e funtores adjuntos, apresentando uma visão geral dos princípios básicos mais importantes da teoria de categorias para matemática condensada. Assim, presume-se que o leitor já possua familiaridade com conceitos essenciais, tais como categorias, funtores e transformações naturais. Por fim, para prosseguirmos, enunciaremos um importante teorema:

Teorema 1.0.1 (Lema de Yoneda)**.** [5, Teorema 1.3.3] *Considere um funtor* $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \textbf{\textit{Set}}$ *em que* $\mathcal{C}$ *é uma uma categoria arbitrária, um objeto* $C \in \mathcal{C}$ *e o funtor representável correspondente* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \to \textbf{\textit{Set}}$. *Existe uma correspondência bijetiva:*

$$\begin{array}{rccc} \theta_{\mathbf{F},C} : & \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-),\mathbf{F}) & \to & \mathbf{F}(C) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha_C(1_C) \end{array}$$

entre as transformações naturais de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ *para* $\mathbf{F}$ *e os elementos do conjunto* $\mathbf{F}(C)$. *As bijeções* $\theta_{\mathbf{F},C}$ *representam uma transformação natural na variável* C. *Ademais, quando* $\mathcal{C}$ *é uma categoria pequena, as bijeções também constituem uma transformação natural na variável* $\mathbf{F}$. □

Para mais detalhes o leitor pode consultar [5].

Observação 1.0.2. A inversa da bijeção $\theta_{\mathbf{F},C}$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \tau_{(C)}: & \mathbf{F}(C) & \to & \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-),\mathbf{F}) \\ & x & \mapsto & \tau_{(C)}(x) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-) \to \mathbf{F} \end{array}$$

definida na componente D como:

$$\begin{array}{rccc} \tau_{(C)_D}(x) = \mathbf{F}(-)(x): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) & \to & \mathbf{F}(D) \\ & f & \mapsto & \mathbf{F}(f)(x) \end{array}$$

para todo $x \in \mathbf{F}(C)$ e todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

1.1 Limites e colimites

A noção de limite em teoria de categorias generaliza vários tipos de construções universais que ocorrem em diversas áreas da matemática. Tendo isto em vista, iniciaremos esta seção com exemplos importantes de objetos limites e, em seguida, veremos a definição formal de limite e colimite.

Definição 1.1.1. [5, Definição 2.1.1] Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Definimos o *produto* de C e D como uma tripla $(C \times D, \pi_C, \pi_D)$ onde:

(1) $C \times D$ é um objeto de $\mathcal{C}$;

(2) $\pi_C : C \times D \to C$ e $\pi_D : C \times D \to D$ são morfismos;

e para toda tripla (Q, q_A, q_B) onde:

(1) Q é um objeto de $\mathcal{C}$;

(2) $q_C : Q \to C$ e $q_D : Q \to D$ são morfismos;

existe único morfismo $q : Q \to C \times D$ tal que $q_C = \pi_C \circ q$ e $q_D = \pi_D \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[d, dashed, "\exists! q"] \arrow[ddl, bend right, "q_C"'] \arrow[ddr, bend left, "q_D"] & \\
& C \times D \arrow[dl, "\pi_C"] \arrow[dr, "\pi_D"'] & \\
C & & D
\end{tikzcd}$$

Também podemos definir o produto de uma família de objetos. Considere I um conjunto e $\{C_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$. Um produto desta família é um par $\left(\prod_{i\in I} C_i, \{\pi_i\}_{i\in I}\right)$ em que $\prod_{i\in I} C_i$ é um objeto da categoria e para cada $i \in I$, $\pi_i : \prod_{i\in I} C_i \to C_i$ é um morfismo de $\mathcal{C}$. Além disso, para todo par $(Q, \{q_i\}_{i\in I})$ em que Q é um objeto de $\mathcal{C}$ e para todo $i \in I$, $q_i : Q \to C_i$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, existe único morfismo $q : Q \to \prod_{i\in I} C_i$ tal que para todo i, $q_i = \pi_i \circ q$.

Nas categorias **Grp**, **AbGrp** e **Ring**, por exemplo, o produto de uma família de objetos é o seu produto cartesiano equipado com operações por componentes. Já na categoria **FinSet**, de conjuntos finitos com a topologia discreta e mapas entre eles, não é fechada para o produto, pois o o produto de conjuntos finitos pode não ser finito.

A noção dual do produto de uma família de objetos é o coproduto, em que o coproduto de dois objetos C e D é denotado por $(C \coprod D, \iota_C, \iota_D)$. Vejamos alguns exemplos. Em **Set**, o coproduto de uma família $\{C_i\}_{i\in I}$ é a união disjunta destes objetos. Quando temos conjuntos C_i's que não são disjuntos, substituímos eles por conjuntos disjuntos isomorfos $C_i' = C_i \times \{i\}$ e realizamos a união destes novos conjuntos, ou seja,

$$\bigsqcup_{i\in I} C_i = \{(x, i) \mid i \in I, x \in C_i\}.$$

Os mapas canônicos são as inclusões $\iota_i : C_i \to \coprod_{i\in I} C_i$ tal que $\iota_i(x) = (x, i)$. Já em **AbGrp**, o coproduto de uma família de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ é a soma direta:

$$\coprod_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in I} G_i.$$

Quando consideramos uma família vazia de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$, o seu produto deve ser um par $(*, \{\}_{i\in\varnothing})$ tal que para cada outro par $(C, \{\}_{i\in\varnothing})$ existe único morfismo $C \to *$, satisfazendo uma condição vazia. Dualmente para um coproduto vazio. Assim, temos as seguintes definições:

Definição 1.1.2. [5, Definição 2.3.1] Um objeto $*$ de uma categoria é dito *terminal*, ou final, quando todo objeto C possui exatamente um morfismo $C \to *$. Já um objeto o de uma categoria é dito *inicial* quando todo objeto C possui exatamente um morfismo $\mathsf{o} \to C$.

Na categoria **Set**, o conjunto vazio é o objeto inicial e um conjunto de um elemento é um objeto terminal. O mesmo vale na categoria **Top**. Já nas categorias **Grp**, **AbGrp** e k-**Vec**, o objeto $\{0\}$ é tanto terminal quanto inicial. Por fim, na categoria **Ring** de anéis comutativos com unidade, $\{0\}$ é o objeto terminal e $\mathbb{Z}$ é o objeto inicial.

A noção de produto define um objeto limite a partir de uma família de objetos. Iremos agora, definir objetos limites a partir de objetos e morfismos.

Definição 1.1.3. [5, Definição 2.4.1] Considere dois morfismos $f, g : C \to D$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um *equalizador* de f, g é um par $(\mathrm{Eq}(f,g), k)$ onde

(1) $\mathrm{Eq}(f,g)$ é um objeto de $\mathcal{C}$,

(2) $k : \mathrm{Eq}(f,g) \to C$ é um morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = g \circ k$,

e para todo par (M, m) onde

(1) M é um objeto de $\mathcal{C}$,

(2) $m : M \to C$ é um morfismo de $\mathcal{C}$ tal que que $f \circ m = g \circ m$,

existe único morfismo $n : M \to \mathrm{Eq}(f,g)$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \\
M \arrow[u, "\exists! n"] \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.1.4. [5, Proposição 2.4.3] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $f, g : C \rightrightarrows D$ dois morfismos de $\mathcal{C}$ que possuem um equalizador $(\mathrm{Eq}(f,g), k)$. Então, o morfismo $k : \mathrm{Eq}(f,g) \to C$ é um monomorfismo.*

Demonstração. Considere $u, v : M \to \mathrm{Eq}(f,g)$ tais que $k \circ u = k \circ v$. Vamos verificar que k possui a propriedade de cancelamento à esquerda. Tomando $w = k \circ u$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \\
M \arrow[u, shift left, "u"] \arrow[u, shift right, "v"'] \arrow[ur, "w"'] & &
\end{tikzcd}$$

Segue que $f \circ w = g \circ w$. Como k é um equalizador, existe único morfismo:

$$m : M \to \mathrm{Eq}(f,g)$$

tal que $w = k \circ m$. Logo, $u = m = v$ e, portanto, k é monomorfismo. $\square$

Por dualidade, definimos o *coequalizador* $(\mathrm{Coeq}(f,g), q)$ de dois morfismos $f, g : C \rightrightarrows D$ e, quando existe, é um epimorfismo.

Definição 1.1.5. [5, Definição 2.5.1] Considere dois morfismos $f : C \to D$ e $g : C' \to D$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um *pullback* de (f, g) é uma tripla $(C \times_D C', \rho_1, \rho_2)$ onde:

(1) $C \times_D C'$ é um objeto de $\mathcal{C}$;

(2) $\rho_1 : C \times_D C' \to C$ e $\rho_2 : C \times_D C' \to C'$ são morfismos de $\mathcal{C}$ tais que $f \circ \rho_1 = g \circ \rho_2$,

e para toda tripla (Q, q_1, q_2) onde

(1) Q é um objeto de $\mathcal{C}$;

(2) $q_1 : Q \to C$ e $q_2 : Q \to C'$ tais que $f \circ q_1 = g \circ q_2$,

existe único morfismo $q : Q \to C \times_D C'$ tal que $q_1 = p_1 \circ q$ e $q_2 = p_2 \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[dr, dashed, "\exists! q"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& C \times_D C' \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_2"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& C' \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

Observação 1.1.6. Na categoria **Set**, o pullback $C \times_D C'$ é um subconjunto do produto cartesiano $C \times C'$.

Agora, introduziremos a definição geral de limite de um funtor. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena, $\mathcal{D}$ uma categoria e $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Um *cone* em $\mathbf{F}$ consiste de um par $(D, \{d_C\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})})$ em que D é um objeto de $\mathcal{D}$ e para cada $C \in \mathcal{C}$ d_C é um morfismo

$$d_C : D \to \mathbf{F}(C)$$

em $\mathcal{D}$, de modo que para cada morfismo $f : C \to C'$ em $\mathcal{C}$, temos $d_{C'} = \mathbf{F}(f) \circ d_C$, isto é, todos os diagramas da seguinte forma comutam:

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "d_C"'] \arrow[dr, "d_{C'}"] & \\
\mathbf{F}(C) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"'] & & \mathbf{F}(C')
\end{tikzcd}$$

Um *cocone*, por sua vez, consiste de um par $(B, \{b_C\}_{C\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})})$ em que B é um objeto de $\mathcal{D}$ e para cada $C \in \mathcal{C}$ b_C é um morfismo $b_C : \mathbf{F}(C) \to B$ em $\mathcal{D}$, de modo que para cada morfismo $f : C \to C'$ em $\mathcal{C}$, temos $b_C = b_{C'} \circ \mathbf{F}(f)$, isto é, todos os diagramas da seguinte forma comutam:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, "b_C"'] & & \mathbf{F}(C') \arrow[dl, "b_{C'}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Definição 1.1.7. [5, Definições 2.6.2 e 2.6.6] Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena, $\mathcal{D}$ uma categoria e $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Um *limite* de $\mathbf{F}$ é um cone $\left(L, \{l_C\}_{C\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}\right)$ em $\mathbf{F}$ tal que, para todo cone $(M, \{m_C\}_{C\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})})$ em $\mathbf{F}$, existe único morfismo $\phi : M \to L$ tal que para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $m_C = l_C \circ \phi$, ou seja, todos os diagramas da seguinte forma comutam.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, dashed, "\exists! \phi"] \arrow[dr, "m_C"'] & & L \arrow[dl, "l_C"] \\
& \mathbf{F}(C) &
\end{tikzcd}$$

O *colimite* é o conceito dual do limite.

Proposição 1.1.8. [5, Proposição 2.6.3] *Se um funtor* $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *admite (co)limite. Então, este (co)limite é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Seja $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor que admite limites e suponha que:

$$(L, \{l_C\}_{C\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}) \text{ e } (M, \{m_C\}_{C\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})})$$

sejam dois limites de $\mathbf{F}$. Dado um mapa arbitrário $f : C \to C'$ em $\mathcal{C}$, temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "l_C"'] \arrow[dr, "l_{C'}"] & \\
\mathbf{F}(C) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"'] & & \mathbf{F}(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "m_C"'] \arrow[dr, "m_{C'}"] & \\
\mathbf{F}(C) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"'] & & \mathbf{F}(C')
\end{tikzcd}$$

Temos pela propriedade universal do limite L que existe único morfismo $\phi_L : M \to L$ tal que $m_C = \phi_L \circ l_C$ e $m_{C'} = \phi_L \circ l_{C'}$. Analogamente, segue da propriedade do limite M que existe único morfismo $\phi_M : L \to M$ tal que $l_C = \phi_M \circ m_C$ e $l_{C'} = \phi_M \circ m_{C'}$. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, bend right, "m_C"'] \arrow[dr, bend left, "m_{C'}"] \arrow[d, dashed, shift right, "\exists! \phi_L"'] & \\
 & L \arrow[dl, "l_C"'] \arrow[dr, "l_{C'}"] \arrow[u, dashed, shift right, "\exists! \phi_M"'] & \\
\mathbf{F}(C) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"'] & & \mathbf{F}(C')
\end{tikzcd}$$

Agora, analisando $(L, \{l_C\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})})$ como limite e como outro cone que comuta os diagramas, temos que existe único morfismo $\psi : L \to L$ tal que $l_C = l_C \circ \psi$ e $l_{C'} = l_{C'} \circ \psi$. É claro, que $\psi = 1_L$, porém, as equações:

$$\begin{array}{rcccl} l_C & = & m_C \circ \phi_M & = & l_C \circ \phi_L \circ \phi_M \\ l'_C & = & m'_C \circ \phi_M & = & l'_C \circ \phi_L \circ \phi_M \end{array}$$

indicam que $\psi = \phi_L \circ \phi_M$. Assim, pela unicidade de ψ, segue que $\phi_L \circ \phi_M = 1_L$. Analogamente, $\phi_M \circ \phi_L = 1_M$.

Por fim, devido à unicidade do limite, denotaremos o limite de $\mathbf{F}$ por $\lim\limits_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathbf{F}(C)$. □

Observação 1.1.9. Pela proposição anterior, concluímos que (co)produtos, (co)equalizadores e pullbacks, caso existam, são únicos a menos de isomorfismo, pois podem ser vistos como limites.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é *completa* se todo funtor $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, em que $\mathcal{D}$ é uma categoria pequena, possui limite. Por dualidade, definimos uma categoria *cocompleta*.

Teorema 1.1.10. [5, Teorema 2.8.1] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Se cada família de objetos em $\mathcal{C}$ possui produto e cada par de morfismos paralelos possui um equalizador. Então, $\mathcal{C}$ é completa.* □

Exemplo 1.1.11. Considere a categoria **Set**. Temos que o produto nesta categoria é dado pelo produto cartesiano de conjuntos e dadas duas funções $f, g : X \rightrightarrows Y$, o equalizador de f e g é o subconjunto:

$$\mathrm{Eq}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X.$$

Portanto **Set** é completa (Teorema 1.1.10). Outro exemplo de categoria completa é a categoria **Top** de espaços topológicos e funções contínuas. De fato, dada uma coleção de espaços topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$, definimos o produto como sendo o conjunto $\prod\limits_{i \in I} X_i$ equipado com a topologia produto. Ademais, o equalizador de duas funções contínuas $f, g : X \rightrightarrows Y$ é o conjunto $\mathrm{Eq}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ equipado com a topologia subespaço.

1.2 Funtores adjuntos

Na teoria das categorias, adjunção é uma relação que dois functores podem exibir, correspondendo intuitivamente a uma forma fraca de equivalência entre duas categorias relacionadas. Os dois funtores que participam dessa relação são denominados funtores adjuntos, com um sendo o adjunto à esquerda e o outro o adjunto à direita. Ademais, pares de funtores adjuntos são uma presença comum na matemática, inclusive, o slogan do livro *Categories for the Working Mathematician* [23] de Saunders Mac Lane é:

Adjoint functors arise everywhere.

Funtores adjuntos frequentemente surgem a partir de construções que visam encontrar soluções ótimas para determinados problemas. Isso inclui a construção de objetos com propriedades universais específicas como a formação de um grupo abeliano livre a partir de um conjunto na álgebra (Apendice A.1).

Definição 1.2.1. [5, Definição 3.3.1] Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e D um objeto de $\mathcal{D}$. A *reflexão* de D sobre $\mathbf{F}$ é um par (L_D, η_D) onde

(1) L_D é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\eta_D : D \to \mathbf{F}(R_D)$ é um morfismo de $\mathcal{D}$,

(2) se $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $d : D \to \mathbf{F}(C)$ é um morfismo de $\mathcal{D}$. Então, existe único morfismo $c : L_D \to C$ tal que $\mathbf{F}(c) \circ \eta_D = d$.

$$\begin{tikzcd} L_D \arrow[d, "c"] \\ C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "d"'] & \mathbf{F}(L_D) \arrow[dl, "\mathbf{F}(c)"] \\ \mathbf{F}(C) & \end{tikzcd}$$

Proposição 1.2.2. [5, Proposição 3.1.2] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e D um objeto de $\mathcal{D}$. Quando a reflexão de D sobre $\mathbf{F}$ existe, é única a menos de isomorfismos.*

Demonstração. Considere duas reflexões (L_D, η_D) e (L'_D, η'_D) de D. Por definição, existe único morfismo $c : L_D \to L'_D$ e único morfismo $c' : L'_D \to L_D$ tais que:

$$\mathbf{F}(c) \circ \eta_D = \eta'_D \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(c') \circ \eta'_D = \eta_D.$$

A partir disso, deduzimos que:

$$\mathbf{F}(c \circ c') \circ \eta'_D = \mathbf{F}(c) \circ \eta_D = \eta'_D = \mathbf{F}(1_{L'_D}) \circ \eta'_D$$

e, pela unicidade da fatorização, $c \circ c' = 1_{L'_D}$. Analogamente, temos que $c' \circ c = 1_{L_D}$. □

Definição 1.2.3. [5, Definição 3.1.4] Um funtor $\mathbf{L} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é um *adjunto à esquerda* do funtor $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ quando existe uma transformação natural $\eta : 1_{\mathcal{D}} \to \mathbf{F} \circ \mathbf{L}$ tal que para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $(\mathbf{L}(D), \eta_D)$ é uma reflexão de D sobre $\mathbf{F}$.

Observação 1.2.4. Por consequência da Proposição 1.2.2, tanto $\mathbf{L}$ quanto η da definição 1.2.3 são únicos a menos de isomorfismo.

Dualmente, definimos a *co-reflexão* de $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ sobre $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ como um par (R_B, ε_B), em que $\varepsilon_B : \mathbf{F}(R_B) \to B$ e para todo par (C, c) com $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $a : \mathbf{F}(A) \to B$, existe único morfismo $b : C \to R_B$ tal que $\varepsilon_B \circ \mathbf{F}(b) = c$.

$$\begin{tikzcd} R_B \\ C \arrow[u, "b"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{F}(R_B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B \\ \mathbf{F}(C) \arrow[u, "\mathbf{F}(b)"] \arrow[ur, "c"'] \end{tikzcd}$$

De forma análoga, $\mathbf{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é *adjunto à direita* de $\mathbf{F}$ quando existe uma transformação natural $\varepsilon : \mathbf{F} \circ \mathbf{R} \to 1_{\mathcal{D}}$ tal que para cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $(\mathbf{R}(B), \varepsilon_B)$ é uma co-reflexão de B sobre $\mathbf{F}$.

Teorema 1.2.5. [5, Teorema 3.1.5] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *$\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$;*

(2) *existem bijeções:*

$$\Upsilon_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{G}(D), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathbf{F}(C))$$

para todos objetos C em $\mathcal{C}$ e D em $\mathcal{D}$ e, estas bijeções são naturais em C e em D;

(3) *$\mathbf{F}$ é adjunto à direita de $\mathbf{G}$.* □

Observação 1.2.6. A naturalidade das bijeções do Item (2) do Teorema 1.2.5, tem o seguinte significado: Sejam $C, C' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $D, D' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $f : C \to C'$ e $g : D \to D'$ morfismos.

Então, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}(D)) \arrow[d, "{(C,\mathbf{G}(g))}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(C), D) \arrow[l, "\Upsilon_{D,C}"'] \arrow[d, "{(\mathbf{F}(C),g)}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}(D')) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(C), D') \arrow[l, "\Upsilon_{D',C}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{G}(D), C) \arrow[r, "\Upsilon_{C,D}"] \arrow[d, "{(\mathbf{G}(D),f)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathbf{F}(C)) \arrow[d, "{(D,\mathbf{F}(f))}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{G}(D), C') \arrow[r, "\Upsilon_{C',D}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathbf{F}(C'))
\end{tikzcd}$$

em que $(C, \mathbf{G}(g))(-) = \mathbf{G}(g) \circ (-)$, $(\mathbf{F}(C), g)(-) = g \circ (-)$, $(\mathbf{G}(D), f) = f \circ (-)$ e $(D, \mathbf{F}(f))(-) = \mathbf{F}(f) \circ (-)$.

Definição 1.2.7. [20, Definição 2.1.1] Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que $\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$. Definimos uma *adjunção* entre $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ como sendo uma escolha de isomorfismos naturais $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{G}(D), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathbf{F}(C))$.

Podemos modificar a definição de adjunção, reformulando-a em termos de unidades e counidades, a fim de torná-la mais útil para fins teóricos. Suponha que $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é um adjunto à esquerda do funtor $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Assim, as composições $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ e $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ são funtores de $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, respectivamente. Seja C um objeto em $\mathcal{C}$. Então, o morfismo $1_{\mathbf{F}(C)} : \mathbf{F}(C) \to \mathbf{F}(C)$ corresponde a um morfismo $\eta_C = \Upsilon_{C,D}(1_{\mathbf{F}(C)}) : C \to \mathbf{G} \circ \mathbf{F}(C)$. Da mesma forma, se D é um objeto em $\mathcal{D}$. Então, $\varepsilon_D = \Upsilon_{D,C}(1_{\mathbf{G}(D)}) : \mathbf{F} \circ \mathbf{G}(D) \to D$. Estes mapas, definem transformações naturais:

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \to \mathbf{G} \circ \mathbf{F} \ \text{ e } \ \varepsilon : \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \to 1_{\mathcal{D}},$$

chamadas de *unidade* e *counidade* da adjunção, respectivamente.

Lema 1.2.8. [20, Lema 2.2.2] *Seja $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um adjunto à esquerda do funtor $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ com unidade η e counidade ε. Então, os triângulos:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[r, "\mathbf{F}\eta"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{F}}"'] & \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{F} \arrow[d, "\varepsilon\mathbf{F}"] \\
& \mathbf{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \arrow[r, "\eta\mathbf{G}"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{G}}"'] & \mathbf{G} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \arrow[d, "\mathbf{G}\varepsilon"] \\
& \mathbf{G}
\end{tikzcd}$$

comutam. □

Observação 1.2.9. Os diagramas acima são chamados de *identidades triangulares*. Estes são diagramas comutativos nas categorias de funtores $\mathfrak{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e $\mathfrak{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, respectivamente. Uma declaração equivalente é que os triângulos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C) \arrow[r, "\mathbf{F}(\eta_C)"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{F}(C)}"'] & \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{F}(C) \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{F}(C)}"] \\
& \mathbf{F}(C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(D) \arrow[r, "\eta_{\mathbf{G}(D)}"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{G}(D)}"'] & \mathbf{G} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{G}(D) \arrow[d, "\mathbf{G}(\varepsilon_D)"] \\
& \mathbf{G}(D)
\end{tikzcd}
$$

comutam para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$.

Teorema 1.2.10. [20, Teorema 2.2.5] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Então, existe uma correspondência bijetiva entre:*

(1) *adjunções (Definição 1.2.7) entre $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, em que $\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$;*

(2) *pares $(1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} \mathbf{G} \circ \mathbf{F}, \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{D}})$ de transformações naturais satisfazendo as identidades triangulares.* □

Corolário 1.2.11. [20, Corolário 2.2.6] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Então, $\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$ se, e somente se, existem transformações naturais:*

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \to \mathbf{G} \circ \mathbf{F} \quad e \quad \varepsilon : \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \to 1_{\mathcal{D}}$$

satisfazendo as identidades triangulares. □

Proposição 1.2.12. [5, Proposição 3.4.1] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores em que $\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$. Considere $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ e $\varepsilon : \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \to 1_{\mathcal{D}}$ a unidade e a counidade da adjunção respectivamente. Então, $\mathbf{F}$ é plenamente fiel se, e somente se, ε é um isomorfismo.* □

Exemplo 1.2.13. Funtores de esquecimento entre categorias algébricas geralmente possuem adjuntos à esquerda. Por exemplo, considere um corpo k. Existe uma adjunção:

$$k\text{-}\mathbf{Vec} \underset{\mathbf{G}}{\overset{\mathbf{U}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Set}$$

em que $\mathbf{U}$ é o funtor de esquecimento e $\mathbf{G}$ é o funtor que mapeia um conjunto S no espaço vetorial $\mathbf{G}(S)$ com base S. A adjunção estabelece que dados um conjunto S e um espaço vetorial V, uma aplicação linear $\mathbf{G}(S) \to V$ é essencialmente a mesma coisa que uma função $S \to \mathbf{U}(V)$. Considere um conjunto S e um espaço vetorial V. Dada uma transformação linear $g : \mathbf{G}(S) \to V$, podemos definir uma função, denotada por $\Upsilon_{S,V}(g) : S \to \mathbf{U}(V)$, em que $\Upsilon_{S,V}(g)(s) = g(s)$ para todo $s \in S$. Isso resulta em uma função:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathfrak{Vec}}(\mathbf{G}(S), V) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Set}}(S, \mathbf{U}(V)) \\ g & \mapsto & \Upsilon_{S,V}(g). \end{array}$$

Por outro lado, dado um mapa $f : S \to \mathbf{U}(V)$, podemos definir uma aplicação linear:

$$\begin{array}{cccc} \Upsilon_{V,S}(f): & \mathbf{F}(S) & \to & V \\ & \sum\limits_{s\in S} \lambda_s S & \mapsto & \sum\limits_{s\in S} \lambda_s f(S). \end{array}$$

Isso nos dá uma função:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Set}}(S, \mathbf{U}(V)) & \to & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathfrak{Vec}}(\mathbf{F}(S), V) \\ f & \mapsto & \Upsilon_{V,S}(f). \end{array}$$

Afirmamos que as funções $\Upsilon_{S,V}$ e $\Upsilon_{V,S}$ são mutualmente inversas. De fato, para todo mapa linear $g : \mathbf{F}(S) \to V$, temos:

$$\Upsilon_{V,S} \circ \Upsilon_{S,V}(g)\left(\sum_{s\in S} \lambda_s s\right) = \sum_{s\in S} \lambda_s \Upsilon_{S,V}(g)(s) = \sum_{s\in S} \lambda_s g(s) = g\left(\sum_{s\in S} \lambda_s s\right).$$

para todo $\sum_{s\in S} \lambda_s s \in \mathbf{G}(S)$. Então, $\Upsilon_{V,S} \circ \Upsilon_{S,V}(g) = g$. Ademais, para todo morfismo $f : S \to \mathbf{U}(V)$ em $\mathfrak{Set}$, temos:

$$\Upsilon_{S,V} \circ \Upsilon_{V,S}(f)(s) = \Upsilon_{V,S}(f)(s) = f(s)$$

para todo $s \in S$. Então, $\Upsilon_{S,V}(\Upsilon_{V,S})(f) = f$. Portanto, temos uma bijeção canônica entre $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathfrak{Vec}}(\mathbf{F}(S), V)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Set}}(S, \mathbf{U}(V))$ para cada $S \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Set})$ e $V \in \mathrm{Obj}(k\text{-}\mathfrak{Vec})$, como desejado.

Definição 1.2.14. [20, Definição 1.3.15] Uma equivalência entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consiste de um par de funtores junto com isomorfismos naturais

$$\alpha : 1_{\mathcal{C}} \to \mathbf{G} \circ \mathbf{F}, \ \ \beta : \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \to 1_{\mathcal{D}}.$$

Se existir uma equivalência entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes, e escrevemos $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$. Também dizemos que os funtores $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são equivalentes.

$$\mathcal{C} \underset{\mathbf{G}}{\overset{\mathbf{F}}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

O Teorema 1.2.10 afirma que uma adjunção pode ser expressa como uma quadrupla

$(\mathbf{F};\mathbf{G};\eta,\varepsilon)$ de funtores e transformações naturais satisfazendo as identidades triangulares. Uma equivalência $(\mathbf{F};\mathbf{G};\alpha,\beta)$ de categorias não necessariamente é uma adjunção. Temos que $\mathbf{F}$ é um adjunto à esquerda de $\mathbf{G}$, mas não necessariamente α e β são a unidade e a conunidade, pois não há motivos para que satisfaçam as identidades triangulares. No entanto, uma equivalência de categorias pode ser expressa em termos de funtores adjuntos, como afirma a proposição a seguir:

Proposição 1.2.15. [5, Proposição 3.4.3] *Dado um funtor $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *$\mathbf{F}$ é pleno e fiel e possui um adjunto à esquerda $\mathbf{G}$ pleno e fiel;*

(2) *$\mathbf{F}$ possui um adjunto à esquerda $\mathbf{G}$ e as duas transformações naturais canônicas da adjunção $\eta:1_{\mathcal{C}}\to\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ e $\varepsilon:\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\to 1_{\mathcal{D}}$ são isomorfismos;*

(3) *existem um funtor $\mathbf{G}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ e dois isomorfismos naturais arbitrários $1_{\mathcal{C}}\cong\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\cong 1_{\mathcal{D}}$;*

(4) *$\mathbf{F}$ é pleno, fiel e essencialmente sobrejetivo, isto é, cada objeto D de $\mathcal{D}$ é isomorfo a um objeto $\mathbf{F}(C)$ com $C\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$;*

(5) *o dual da condição* (1)*;*

(6) *o dual da condição* (2). □

Agora, veremos um importante resultado da teoria de categorias: *O Teorema do Funtor Adjunto*. Para isso, precisamos da seguinte definição: um funtor $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ satisfaz a *condição do conjunto de soluções* com respeito a um objeto D em $\mathcal{D}$ quando existe um conjunto $X_D\subset\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que:

$$\forall C\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\ \ \forall d:D\to\mathbf{F}(C)\ \ \exists C'\in X_D\ \ \exists c:C'\to C\ \ \exists d':D\to\mathbf{F}(C')\ \ \mathbf{F}(c)\circ d'=d.$$

Teorema 1.2.16 (Teorema do Funtor Adjunto)**.** [5, Teorema 3.3.3] *Considere uma categoria completa $\mathcal{C}$ e um funtor $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *$\mathbf{F}$ possui um funtor adjunto à esquerda.*

(2) *As seguintes condições são satisfeitas*

 (a) *$\mathbf{F}$ preserva limites pequenos;*

 (b) *$\mathbf{F}$ satisfaz a condição de conjunto solução para todo objeto D em $\mathcal{D}$.* □

Observação 1.2.17. No Teorema do Funtor Adjunto, o item (2) subitem (b) é sempre satisfeito, visto que estamos trabalhando apenas com categorias pequenas. De fato, basta tomarmos o conjunto $S_D = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $C' = C$, $c = 1_C$ e $d' = d$.

Lema 1.2.18. [31, Lema 4.24.5.] *Seja* $\mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *o funtor adjunto à esquerda de* $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$*. Seja* $\mathbf{M} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ *um funtor tal que* $\mathrm{colim}(\mathbf{M}) \in \mathcal{C}$ *exista. Então:*

$$\mathbf{G}(\mathrm{colim}(\mathbf{M})) = \mathrm{colim}(\mathbf{G} \circ \mathbf{M}),$$

ou seja, $\mathbf{G}$ *comuta com colimites.* $\square$

Capítulo 2

Preliminares Topológicas

A categoria de espaços Hausdorff compactos e mapas contínuos CHTop, bem como suas subcategorias de espaços totalmente desconexos, Stone (equivalente à categoria $\mathsf{ProFinSet}$), e espaços extremamente desconexos, EDSet, desempenham um papel importante na definição de conjuntos condensados. Este Capítulo tem como objetivo oferecer uma visão geral desses conceitos e reunir todos os resultados topológicos necessários para uma compreensão sólida da definição de conjuntos condensados.

2.1 Espaços Hausdorff compactos

Esta seção se inicia com a apresentação de resultados bem conhecidos na área da topologia. Em seguida, exploraremos resultados relevantes para o restante do texto e introduziremos os conceitos de espaços localmente compactos e espaços compactamente gerados.

Teorema 2.1.1. [24, Teoremas 26.2, 26.3 e 26.5]

(1) *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto;*

(2) *Todo subespaço compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*

(3) *A imagem de um espaço compacto sob um mapa contínuo é compacta.* □

Teorema 2.1.2. [24, Teorema 31.2]

(1) *Um subespaço de um espaço Hausdorff é Hausdorff;*

(2) *Um produto de espaços Hausdorff é Hausdorff.* □

Definição 2.1.3. [24, p. 137] Sejam X e Y espaços topológicos e seja $p : X \to Y$ um mapa sobrejetivo. Dizemos que p é um *mapa quociente* se satisfaz a seguinte condição: um subconjunto U de Y é aberto em Y se e somente se $p^{-1}(U)$ é aberto em X.

Outra forma de descrever um mapa quociente é utilizando o conceito de subconjunto saturado. Dizemos que um subconjunto C de X é *saturado*, com respeito à sobrejeção $p : X \to Y$, se C contém todo conjunto $p^{-1}(y)$ que ele intercepta. Dizer que p é um mapa quociente é equivalente a dizer que p é contínuo e mapeia conjuntos saturados abertos de X para conjuntos abertos de Y, ou conjuntos saturados fechados de X para conjuntos fechados de Y.

Dois tipos especiais de mapa quociente são os mapas abertos e os mapas fechados. Um mapa $f : X \to Y$ é dito *aberto* se para cada subconjunto aberto U de X, o conjunto $f(U)$ é aberto em Y. Por outro lado, f é dito *fechado* se para cada conjunto fechado A de X, o conjunto $f(A)$ é fechado em Y. Assim, segue da definição que se $p : X \to Y$ é um mapa contínuo sobrejetivo que é ou aberto ou fechado. Então, p é um mapa quociente.

Proposição 2.1.4. [22, Proposição 1.1.1] *Toda sobrejeção de um espaço Hausdorff compacto é um mapa quociente.*

Demonstração. Afirmamos que mapas de espaços compactos para espaços Hausdorff são fechados. De fato, todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto e sua imagem sob um mapa contínuo também é compacta. Visto que conjuntos compactos em espaços Hausdorff são fechados, a imagem é fechada. Como mapas sobrejetivos fechados são automaticamente mapas quocientes, segue o resultado. □

Um resultado importante, que será utilizado na Subseção 5.4.1 é o Lema do Tubo:

Lema 2.1.5 (Lema do tubo)**.** [24, Lema 26.8] *Considere o espaço produto $X \times Y$, em que Y é compacto. Se N é um conjunto aberto de $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset N$. Então, existe um conjunto aberto W tal que $x_0 \in W$ e $W \times Y \subset N$. O conjunto $W \times Y$ é frequentemente chamado de tubo sobre $\{x_0\} \times Y$.* □

Além disso, o Lema do Tubo é utilizado na demonstração do resultado que afirma que o produto finito de espaços compactos é compacto. No entanto, há um resultado mais geral sobre o produto de espaços compactos:

Teorema 2.1.6 (Teorema de Tychonoff)**.** [24, Teorema 37.3] *Um produto arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto.* □

É importante observar que todo espaço Hausdorff compacto X é *regular*, isto é, para cada par consistindo de um ponto $x \in X$ e um conjunto fechado $B \subset X$ tal que $x \notin B$, existem conjuntos abertos disjuntos U e V contendo x e B respectivamente. De fato, considere x e B como os descritos acima. Para cada $b \in B$, existem U_b e V_b vizinhanças abertas disjuntas de x e b respectivamente, pois X é Hausdorff. Além disso, $B \subset \bigcup_{b \in B} V_b$ e, por compacidade, existem $b_1, \ldots, b_n \in B$ tais que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}.$$

Sejam

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i} \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i},$$

então U e V são abertos disjuntos em X tal que $x \in U$ e $B \subset V$.

Ademais, existem outras formas de caracterizar espaços regulares, dentre elas podemos destacar o seguinte lema:

Lema 2.1.7. [24, Lema 31.1] *Seja X um espaço topológico tal que conjuntos de um ponto são fechados. Então, X é regular se, e somente se, dados $x \in X$ e $U \subset X$ vizinhança aberta de x, existe $V \subset X$ vizinhança aberta de X tal que* $\mathrm{Cl}_X(V) \subset U$.

Demonstração. Suponha que X é regular e que x e U são dados. Seja $B = X - U$. Então, B é um conjunto fechado. Por hipótese, existem vizinhanças abertas disjuntas V e W contendo x e B respectivamente. O conjunto $\mathrm{Cl}_X(V)$ é disjunto de B, visto que se $b \in B$, o conjunto W é uma vizinhança de b disjunta de V. Portanto, $\mathrm{Cl}_X(V) \subset U$, como desejado.

Por outro lado, suponha que o ponto x e o conjunto fechado B tal que $x \notin B$ são dados. Seja $U = X - B$. Por hipótese, existe uma vizinhança V de x tal que $\mathrm{Cl}_X(V) \subset U$. Os conjuntos V e $X - \mathrm{Cl}_X(V)$ são abertos, disjuntos e contêm x e B respectivamente. Portanto, X é regular. □

Também é de nosso interesse estudar a compacidade local de um espaço topológico, visto que na Seção 5.4 abordaremos grupos topológicos localmente compactos e faremos uma análise do ponto de vista condensado.

Definição 2.1.8. [30, p. 23] Um espaço topológico X é *localmente compacto* se cada ponto $x \in X$ possui uma base de vizinhanças Hausdorff compactas, ou seja, para cada $x \in X$, toda vizinhança aberta U_x contém uma vizinhança compacta $K_x \subset U_x$.

Lema 2.1.9. [24, Demonstração do Teorema 46.10] *Considere $f : X \to Y$ contínua, em que X é localmente compacto, e seja $V \subset Y$ um subconjunto aberto. Então, dado $x \in X$ podemos escolher uma vizinhança aberta U de x com fecho $\mathrm{Cl}_X(U)$ compacto tal que $f(\mathrm{Cl}_X(U)) \subset V$.*

Demonstração. Pela continuidade de f, existe U' vizinhança aberta de x tal que $f(U') \subset V$. Além disso, como X é localmente compacto, existe uma vizinhança compacta $K \subset U'$ de x, ou seja, existe U aberto tal que $x \in U \subset K \subset U'$ com K compacto. Temos que K é fechado, pois é subespaço compacto de um espaço Hausdorff, assim, $\mathrm{Cl}_X(U) \subset K$. Logo, $\mathrm{Cl}_X(U)$ é compacto e $f(\mathrm{Cl}_X(U)) \subset V$. □

Definição 2.1.10. [3, p. 74] Um espaço topológico X é *compactamente gerado* se as aplicações contínuas $X \to Y$, em que Y é outro espaço topológico, são precisamente aquelas que fazem a composição $S \to X \to Y$ contínuo para todo espaço Hausdorff compacto S mapeando continuamente para X.

Proposição 2.1.11. [3, Proposição 4.1.17] *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Então, X é compactamente gerado.*

Demonstração. Sejam X um espaço Hausdorff localmente compacto e Y um espaço topológico qualquer. Suponha que $f : X \to Y$ é um mapa tal que para todo espaço Hausdorff compacto S com um mapa $S \to X$, a composição $S \to X \to Y$ é contínua. Em particular, dado $x \in X$ e uma vizinhança compacta S de x, temos $S \hookrightarrow X \to Y$ é contínua. Como X é localmente compacto, todo elemento x possui uma vizinhança compacta e, portanto, X é compactamente gerado. $\square$

Por fim, considere CGTop como sendo a categoria dos espaços topológicos compactamente gerados e mapas contínuos. Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.12. [3, Lema 4.1.3] *A inclusão da categoria de espaços compactamente gerados na categoria dos espaços topológicos admite um adjunto à direita*

$$(-)^{cg} : \begin{array}{ccc} \mathsf{Top} & \to & \mathsf{CGTop} \\ X & \mapsto & X^{cg} \end{array},$$

em que X^{cg} é o conjunto X com a topologia quociente para o mapa:

$$\bigsqcup_{S \to X} S \to X$$

em que a união disjunta percorre todos os espaços Hausdorff compactos S mapeados continuamente para X. $\square$

2.2 Conexidade

Como mencionado anteriormente, as subcategorias de CHTop dos espaços Hausdorff compactos totalmente desconexos e dos espaços Hausdorff compactos extremamente desconexos são fundamentais para o estudo da matemática condensada. Portanto, nesta seção, exploraremos os conceitos relacionados à conexidade e algumas de suas propriedades.

Seja X um espaço topológico. Uma *separação* de X é um par U, V de subconjuntos abertos não vazios e disjuntos cuja união é X. O espaço X é dito *conexo* se não admite uma separação além da trivial. Caso contrário, X é dito *desconexo*.

Lema 2.2.1. [24, p. 148] *Um espaço X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X são o conjunto vazio $\varnothing$ e o próprio X.*

Demonstração. Assuma que X é um espaço conexo e suponha, por absurdo, que $U \neq \varnothing$ é um subconjunto próprio de X que é aberto e fechado. Então, $V = X - U$ também é aberto e fechado e o par U, V forma uma separação de X, uma contradição. Por outro lado, se U e V formam uma separação de X, então $\varnothing \neq U \neq X$ e é aberto e fechado. □

Ademais, temos as seguintes definições referentes à conexidade de um espaço topológico:

Definição 2.2.2. [22, Definição 1.1.5] Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é:

(1) *totalmente desconexo* se seus únicos subespaços conexos são os conjuntos de um ponto;

(2) *extremamente desconexo* se o fecho de todo conjunto aberto é aberto.

Com isso, definimos a categoria **Stone** como sendo a subcategoria de **CHTop** em que os objetos são espaços Hausdorff compactos totalmente desconexos.

Lema 2.2.3. [22, Observação 1.1.6] *Seja X um espaço Hausdorff extremamente desconexo. Então, X é totalmente desconexo.*

Demonstração. Sejam X um espaço extremamente desconexo e Y um subespaço conexo de X. Suponha, por absurdo, que Y possui mais que um ponto. Assim, podemos tomar dois pontos quaisquer $y_1, y_2 \in Y$ e encontrar vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de y_1 e y_2 respectivamente. Observe que $y_1 \notin X - U_1$ que é fechado e contém U_2, logo, $y_1 \notin \mathrm{Cl}_X(U_2)$. Similarmente, $y_2 \notin \mathrm{Cl}_X(U_1)$. Ademais, $\mathrm{Cl}_X(U_1)$ e $\mathrm{Cl}_X(U_2)$ são subconjuntos próprios abertos e fechados, o que contradiz a conexidade de Y (Lema 2.2.1). Portanto, Y não pode conter mais de um ponto, ou seja, X é totalmente desconexo. □

Agora, faremos uma caracterização dos espaços Hausdorff compactos extremamente desconexos e, para isso, apresentaremos alguns resultados preliminares:

Lema 2.2.4. [31, Lema 5.26.4] *Seja $f : X \to Y$ um mapa contínuo entre espaços Hausdorff compactos. Se Y é extremamente desconexo, f é sobrejetiva, e $f(Z) \neq Y$ para todo subconjunto fechado próprio $Z \subset X$. Então, f é um homeomorfismo.* □

Lema 2.2.5. [31, Lema 5.26.5] *Seja $f : X \to Y$ uma sobrejeção contínua entre espaços Hausdorff compactos. Existe um subconjunto $E \subset X$ compacto tal que $f(E) = Y$, mas $f(E') \neq Y$ para todo subconjunto fechado próprio $E' \subset E$.* □

Por fim, o resultado a seguir apresenta formas equivalentes de representar um espaço Hausdorff compacto extremamente desconexo:

Proposição 2.2.6. [31, Proposição 5.26.6] *Seja X um espaço Hausdorff compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *X é extremamente desconexo;*

(2) *Para toda sobrejeção contínua $f : Y \to X$ existe $g : X \to Y$ contínua tal que $f \circ g = 1_X$. Nestas condições, dizemos que g é uma* seção *de f e f é uma* retração *de g.*

(3) *Para qualquer mapa $X \to Z$ e sobrejeção $Y \to Z$ de espaços Hausdorff compactos, existe um mapa contínuo $X \to Y$ que comuta o diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ Y \arrow[r, two heads] & Z \end{tikzcd}$$

Demonstração. Assuma X extremamente desconexo e seja $f : Y \to X$ como em (2). Existe $E \subset Y$ compacto tal que $f(E) = X$, mas $f(E') \neq X$ para todo subconjunto fechado próprio de E (Lema 2.2.5). Assim, obtemos que $f|_E : E \to X$ é um homeomorfismo (Lema 2.2.4) e seu inverso é a função g tal que $f \circ g = 1_X$. Portanto, (1)⇒(2).

Agora, assuma (2). Mostraremos que X é extremamente desconexo. Então, considere $U \subset X$ aberto com complemento Z. Considere o conjunto:

$$Y = \mathrm{Cl}_X(U) \sqcup Z = \{(y_i, i) \mid i \in \{0,1\}, y_0 \in \mathrm{Cl}_X(U), y_1 \in Z\}$$

equipado com a *topologia da união disjunta*, ou seja, a topologia mais fina em Y tal que as injeções canônicas $\mathrm{Cl}_X(U) \to Y$ e $Z \to Y$ são contínuas. Temos que, nesta topologia $\mathrm{Cl}_X(U)$ e Z formam uma separação de Y. Ademais, considere a sobrejeção contínua:

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \to & X \\ & (y,i) & \mapsto & y. \end{array}$$

Então, existe $g : X \to Y$ tal que $f \circ g = 1_X$. Logo, como $\mathrm{Cl}_X(U)$ é aberto em Y e g é contínua, temos que $\mathrm{Cl}_X(U) = g^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U)) \in X$ é aberto. Portanto, X é extremamente desconexo e (2)⇒(1).

Seja $f : X \to Z$ um mapa contínuo e $h : Y \to Z$ uma sobrejeção. Iremos mostrar que (2)⇒(3). Considere o pullback $X \times_Z Y$ e suas projeções:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\rho_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Observe que ρ_X é uma sobrejeção. De fato, dado $x \in X$ podemos aplicar f e obter $f(x) \in Z$. Assim, pela sobrejetividade de h, existe $y \in Y$ tal que $h(y) = f(x)$. Logo, $(x, y) \in X \times_Z Y$ e $x \in \mathrm{Im}(h)$. Com isso, temos pelo item (2) que existe $\rho' : X \to X \times_Z Y$ tal que $\rho_X \circ \rho' = 1_X$. Tomando $g = \rho_Y \circ \rho'$, obtemos o mapa pontilhado desejado que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
X \times_z Y \arrow[r, shift right, "\rho_X"'] \arrow[d, "\rho_Y"'] & X \arrow[l, shift right, "\rho'"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Por fim, assuma (3). Mostraremos que (3)$\Rightarrow$(2). Considerando a sobrejeção $f : Y \to X$ e o mapa identidade 1_X, obtemos $g : X \to Y$ tal que $f \circ g = 1_X$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "1_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

Portanto, as três afirmações são equivalentes.

$\square$

2.3 A categoria dos conjuntos profinitos

A categoria $\mathsf{ProFinSet}$ possui um papel central na matemática condensada. Em vista disso, nesta seção iremos apresentar uma breve introdução aos conjuntos profinitos e algumas de suas propriedades.

Dado $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, podemos considerá-lo como uma categoria $\mathcal{P}$ em que os objetos são os elementos do poset e os morfismos são as relações $\leq$, ou seja, $a \to b \Leftrightarrow a \leq b$. Além disso, dizemos que $(P, \leq)$ é um *conjunto direcionado para cima* se para quaisquer $a, b \in P$ existe $c \in P$ tal que $a, b \leq c$.

Sejam $\mathcal{P}$ um conjunto direcionado e $\mathcal{C}$ uma categoria, definimos um *sistema inverso* como um funtor contravariante $\mathbf{F} : \mathcal{P}^{op} \to \mathcal{C}$. Em outras palavras, um sistema inverso é um conjunto de objetos $\{\mathbf{F}(p)\}_{p \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P})}$ em $\mathcal{C}$ e, para cada $p \leq q \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P})$, um morfismo $\varphi_{p,q} : \mathbf{F}(q) \to \mathbf{F}(p)$ tal que:

(1) $\varphi_{p,p} = 1_{\mathbf{F}(p)}$ para todo $p \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P})$;

(2) Se $p \leq q \leq r$. Então, $\varphi_{p,r} = \varphi_{p,q} \circ \varphi_{q,r}$.

Caso exista, o limite de $\mathbf{F}$ é chamado de *limite inverso* e é denotado por

$$\varprojlim_{p \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P})} \mathbf{F}(p).$$

Observação 2.3.1. É importante notar que o limite inverso é um caso especial de limite, herdando as propriedades inerentes aos limites. Sua distinção está no fato de ser um limite tomado em um sistema inverso $\mathbf{F} : \mathcal{P}^{op} \to \mathcal{C}$, isto é, $\mathbf{F}$ é um funtor contravariante e $\mathcal{P}$ é um conjunto direcionado. Assim, teremos resultados particulares de limites inversos.

Agora, considere a categoria **FinSet** dos conjuntos finitos com a topologia discreta e funções contínuas. Temos que **FinSet** é uma subcategoria de **HTop**. Seja $\mathbf{F} : \mathcal{P} \to$ **HTop** um sistema inverso tal que $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ está em **FinSet**. Chamamos de *conjunto profinito* o limite inverso de $\mathbf{F}$. Denotaremos por **ProFinSet** a categoria dos conjuntos profinitos e funções contínuas.

Exemplo 2.3.2. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}.$$

Observe que os pontos $\frac{1}{n}$ são isolados, ou seja, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é aberto para todo n. O ponto 0 por sua vez não é isolado. No entanto, observe que os abertos que contêm 0 são da forma $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots\right\}$, logo são cofinitos, isto é, possuem complemento finito. Assim, obtemos $\mathfrak{C}$ como o limite inverso da sequência de conjuntos finitos:

$$\cdots \xrightarrow{\rho_3} \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\} \xrightarrow{\rho_2} \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} \xrightarrow{\rho_1} \left\{0, \frac{1}{2}\right\},$$

em que ρ_n leva $\frac{1}{n+2}$ em 0 e os demais elementos neles mesmos. Assim, temos que $\mathfrak{C}$ é um exemplo de conjunto profinito.

Proposição 2.3.3. [22, Proposição 1.2.12] *A categoria* **ProFinSet** *de conjuntos profinitos é equivalente a categoria* **Stone** *de espaços Hausdorff compactos totalmente desconexos.*

Observação 2.3.4. No texto *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups* [22] a autora cita que uma demonstração da Proposição 2.3.3 baseada na Dualidade de Stone pode ser encontrada no Capítulo VI 2.3. do livro *Stone Spaces* [18] de Peter T. Johnstone.

A partir de agora, ao lidarmos com conjuntos profinitos, estaremos nos referindo a espaços Hausdorff compactos e totalmente desconexos. Ademais, como todo espaço Hausdorff compacto extremamente desconexo é profinito (Lema 2.2.3), iremos definir a subcategoria EDSet de $\mathsf{ProFinSet}$ em que os objetos, chamados *conjuntos extremamente desconexos*, são espaços Hausdorff compactos extremamente desconexos e os morfismos são mapas contínuos.

Proposição 2.3.5. [31, Lema 5.22.3] *Um limite de conjuntos profinitos é profinito.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathsf{ProFinSet}$ um funtor tal que $\mathbf{F}(C) = X_C$. Temos que cada X_C é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo (Proposição 2.3.3). Além disso, o limite:

$$X = \lim_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} X_C$$

existe (Exemplo 1.1.11) e é compacto (veja [31, Lema 5.14.5]). Sejam $x, x' \in X$ tais que $x \neq x'$. Então, existe $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que x e x' possuam imagens x_C e x'_C, com $x_C \neq x'_C$, sob a projeção $X \to X_C$. Logo, x_C e x'_C possuem vizinhanças disjuntas U e V respectivamente. Tomando a imagem inversa de U e V concluímos que X é Hausdorff. Similarmente, x_C e x'_C estão em componentes conexas distintas de X_C de modo que necessariamente x e x' devem estar em componentes conexas distintas de X. Portanto X é totalmente desconexo e, consequentemente, profinito. $\square$

2.4 Compactificação de Stone-Čech

Sejam X e Y espaços topológicos. Definimos um *mergulho* como uma aplicação contínua $f : X \to Y$, tal que f é um homeomorfismo entre X e a imagem de f em Y. Agora, considere X um espaço Hausdorff. Uma *compactificação* de X é um par $(\overline{X}, i)$ em que $\overline{X}$ é um espaço Hausdorff compacto e $i : X \to C$ é um mergulho, tal que $\mathrm{Im}(i)$ é denso em C. Considere, por exemplo, X um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Então, a inclusão de X em seu fecho é uma compactificação de X. Nesta seção, abordaremos a compactificação de Stone-Čech e apresentaremos alguns resultados que serão relevantes para os Capítulos 4 e 5.

Definição 2.4.1. [31, Seção 5.25] Seja X um espaço Hausdorff. A *compactificação de Stone-Čech* de X é uma par $(\beta X, b)$ em que βX é um espaço Hausdorff compacto, $b : X \to \beta X$ é um mergulho e para todo mapa contínuo $f : X \to Y$, com Y Hausdorff compacto, existe única função contínua $\tilde{f} : \beta X \to Y$ tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Observação 2.4.2. Sejam X um espaço topológico e $(\overline{X}, f)$, $(\overline{X}', f')$ compactificações de X. Dizemos que as duas compactificações são *equivalentes* se existe $g : \overline{X} \to \overline{X}'$ homeomorfismo tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \overline{X} \arrow[d, "g"] \\ & \overline{X}' \end{tikzcd}$$

Assim, como a compactificação de Stone-Čech é definida por uma propriedade universal, essa é única a menos de equivalência.

Nosso interesse na compactificação de Stone-Čech reside em explorar algumas propriedades provenientes da compactificação de Stone-Čech de um conjunto discreto, cuja existência é demonstrada no Apêndice B.

Proposição 2.4.3. [30, Exemplo 2.5] *Sejam X_0 um espaço topológico discreto e $X = \beta X_0$ a compactificação de Stone-Čech de X_0. Então, X é extremamente desconexo.*

Demonstração. Temos que X é Hausdorff compacto (Definição 2.4.1). Seja $f : Y \to X$ uma sobrejeção contínua, com Y Hausdorff compacto, e considere o mergulho $b : X_0 \to X$. Como f é sobrejetiva e X_0 é discreto, existe $g : X_0 \to Y$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "f"] & X = \beta X_0 \\ X_0 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Considerando novamente o mapa da compactificação de Stone-Čech $b : X_0 \to X$, obtemos o mapa induzido $\tilde{g}$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\beta X_0 = X \arrow[r, "\tilde{g}"] & Y \arrow[r, two heads, "f"] & X = \beta X_0 \\
& X_0 \arrow[ul, "b"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que $f \circ \tilde{g} \circ b = b$, logo pela unicidade da propriedade universal da compactificação de Stone-Čech, $f \circ \tilde{g} = 1_X$. Portanto, X é extremamente desconexo (Proposição 2.2.6). $\square$

Proposição 2.4.4. [30, Exemplo 2.5] *Seja X um espaço Hausdorff compacto. Então, existe uma sobrejeção $Y \to X$, em que Y é um conjunto extremamente desconexo.*

Demonstração. Seja X um espaço Hausdorff compacto e considere X^{dis} o conjunto X com a topologia discreta. Temos que $Y = \beta X^{dis}$ é extremamente desconexo (Proposição 2.4.3). Considere, o mapa $f : X^{dis} \to X$ tal que $f(x) = x$. Observe que f é contínua e sobrejetiva. Além disso, como X é Hausdorff compacto, temos pela propriedade universal da compactificação de Stone-Čech que existe $\tilde{f} : Y \to X$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
X^{dis} \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & Y = \beta X^{dis} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Assim, como $\tilde{f} \circ b$ é sobrejetiva, temos que $\tilde{f}$ é uma sobrejeção. $\square$

Corolário 2.4.5. (1) *Seja X um espaço Hausdorff compacto. Então, existe uma sobrejeção $f : \tilde{X} \to X$, em que $\tilde{X}$ é profinito.*

(2) *Seja X um conjunto profinito. Então, existe uma sobrejeção $f : \tilde{X} \to X$, em que $\tilde{X}$ é extremamente desconexo.*

Demonstração. Como todo conjunto extremamente desconexo é profinito e todo conjunto profinito é Hausdorff compacto, as afirmações seguem imediatamente da Proposição 2.4.4. $\square$

Teorema 2.4.6. [22, Teorema 1.1.11] *Todo espaço Hausdorff compacto é um coequalizador de conjuntos extremamente desconexos na categoria $\mathcal{T}op$.*

Demonstração. Seja K um espaço Hausdorff compacto. Então, existe um mapa $q : S \to K$ sobrejetivo, em que S é um conjunto extremamente desconexo (Proposição 2.4.4). Mostraremos que o par (K, q) é o coequalizador de dois mapas cujo domínio é um conjunto extremamente desconexo e o contradomínio é S.

Considere o pullback $S \times_K S$ que é um espaço Hausdorff compacto. Logo, $S \times_K S$ admite uma sobrejeção $f : S' \to S \times_K S$ com $S' \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{EDSet})$.

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\rho}_1"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\rho}_2"'] & & & \\
& S \times_K S \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_2"'] & S \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
& S \arrow[r, "q"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & K \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
& & & X
\end{tikzcd}
$$

Afirmamos que o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, shift left, "\tilde{\rho}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{\rho}_2"'] & S \arrow[r, "q"] & K
\end{tikzcd} ,
$$

em que os mapas $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ são definidos como as composições:

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "f"] & S \times_K S \arrow[r, shift left, "\rho_1"] \arrow[r, shift right, "\rho_2"'] & S
\end{tikzcd} ,
$$

é um coequalizador. Segue da definição de pullback que:

$$q \circ (\rho_1 \circ f) = q \circ (\rho_2 \circ f).$$

Agora, considere um espaço topológico X e um mapa contínuo $h : S \to X$ tal que:

$$h \circ (\rho_1 \circ f) = h \circ (\rho_2 \circ f)$$

ou, equivalentemente,

$$h \circ \rho_1 = h \circ \rho_2,$$

visto que f é um epimorfismo. Iremos mostrar que existe único mapa contínuo $g : K \to X$

tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, shift left, "\tilde{\rho}_1"] \arrow[r, shift right, "\tilde{\rho}_2"'] & S \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & K \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

A fim de assegurar a comutatividade, devemos definir $g(a) = h(a')$ em que $a' \in q^{-1}(a)$. No entanto, para construir um mapa bem definido, é preciso garantir que todos os elementos de $q^{-1}(a)$ são mapeados para o mesmo elemento sob h. Isso pode ser verificado, uma vez que, pela definição de $S \times_K S$, para quaisquer elementos $x, y \in S$ com $q(x) = q(y)$, temos a relação $(x, y) \in S \times_K S$. Além disso, dado que $h \circ \rho_1 = h \circ \rho_2$, concluímos que $h(x) = h(y)$. Dessa forma, podemos estabelecer um mapeamento de K para X que garante a comutatividade do diagrama. Ademais, observe que g é contínuo, pois, toda sobrejeção de um espaço Hausdorff compacto é um mapa quociente (Proposição 2.1.4). Logo, todo mapa $K \to X$ tal que a composição $S \to K \to X$ é contínuo, também é contínuo.

Por fim, a unicidade de g é garantida pela sobrejetividade de $q : S \to K$.

$\square$

Capítulo 3

Categorias abelianas

Em 1955 Alexander Grothendieck escreveu um artigo revolucionário em Álgebra Homológica, o qual foi publicado em 1957 no Tôhoku Mathematical Journal intitulado *Sur quelques points d'algèbre homologique* (Referência [15]). Neste artigo, que atualmente é chamado de *Tôhoku*, Grothendieck observa que módulos sobre anéis e feixes de grupos abelianos tem um comportamento similar e que podem desenvolver sua álgebra homológica de maneira unificada; isto inclui a axiomática do que é chamado pela primeira vez de categorias abelianas. Essencialmente, categorias abelianas foram definidas em um artigo anterior de Buchsbaum como categorias exatas, com uma diferente motivação. Além disso, Saunders MacLane tinha rudimentos da definição de categoria abeliana, por volta de 1950, mas era uma noção um pouco diferente, menos invariante e com um nome diferente: bicategoria. Neste Capítulo, iremos introduzir o conceito de categoria abeliana e os axiomas de Grothendieck, que serão importantes para o estudo da categoria dos grupos abelianos condensados.

3.1 Categorias aditivas

Uma categoria abeliana é uma categoria que deve satisfazer diversas propriedades. Portanto, vamos proceder à sua definição de forma gradual, seguindo uma hierarquia de conceitos:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Categoria Pré-aditiva}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Categoria Aditiva}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Categoria Pré-abeliana}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Categoria Abeliana}}
\end{tikzcd}$$

Nesta seção, iremos introduzir as categorias pré-aditivas e aditivas, além de apresentar algumas de suas propriedades.

Definição 3.1.1. [6, Definição 1.1.1] Em uma categoria $\mathcal{C}$, chamamos de *objeto zero* um objeto que é inicial e final. Ademais, dada uma categoria $\mathcal{C}$ com um objeto zero $\mathbf{0}$, definimos um *morfismo zero* como um morfismo $f : A \to B$ que se fatora pelo objeto zero.

Considere, por exemplo, a categoria AbGrp de grupos e homomorfismos de grupos e sejam G e H dois grupos. O homomorfismo $f : G \to H$ que leva todo elemento de G para o elemento neutro de H é um morfismo zero, pois pode ser fatorado como $f : G \to \{0\} \to H$, em que o grupo $\{0\}$ é o objeto zero.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com um objeto zero $\mathbf{0}$. Então, existe exatamente um morfismo zero de cada objeto A para cada objeto B. De fato, este morfismo é a composição entre o único morfismo $A \to \mathbf{0}$ em que $\mathbf{0}$ é considerado um objeto terminal, e $\mathbf{0} \to \mathbf{B}$, em que $\mathbf{0}$ é considerado um objeto inicial. Denotaremos este morfismo por $0_{A,B} : A \to B$.

Definição 3.1.2. [6, Definição 1.1.5] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero $\mathbf{0}$. O *núcleo* de um morfismo $f : A \to B$, quando existe, é o equalizador de f e o morfismo zero $0_{A,B}$. O *co-núcleo* de f é definido dualmente. Ademais, denotamos o núcleo de f por $\ker(f)$ e o co-núcleo de f por $\operatorname{coker}(f)$.

Pela proposição 1.1.4 o núcleo de um morfismo é um monomorfismo e, por dualidade, o co-núcleo é um epimorfismo.

Definição 3.1.3. [6, Definição 1.2.1] Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria *pré-aditiva* se para todo par de objetos A, B em $\mathcal{C}$, existe uma operação binária $+$ sobre $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), +)$ é um grupo abeliano, de modo que as composições:

$$\begin{array}{rrcl} \circ : & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \to & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ & (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

são homomorfismos de grupo em cada variável.

Exemplo 3.1.4. A categoria AbGrp é pré-aditiva. Sejam G e H dois grupos abelianos. Considere dois homomorfismos quaisquer $f, g : G \to H$ e defina:

$$\begin{array}{rrcl} f + g : & G & \to & H \\ & x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

Dados $x, y \in G$ temos:

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y).$$

Por outro lado,

$$(f+g)(x)+(f+g)(y)=f(x)+g(x)+f(y)+g(y)$$

Logo, $(f+g)(x+y)=(f+g)(x)+(f+g)(y)$ para todo par $x,y\in G$. Ademais, temos que os axiomas de associatividade, elemento neutro, inverso e comutatividade são imediatos. Portanto, AbGrp é pré-aditiva.

Lema 3.1.5. [6, Proposição 1.2.3] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$\mathcal{C}$ possui um objeto inicial;*

(2) *$\mathcal{C}$ possui um objeto final.*

(3) *$\mathcal{C}$ possui um objeto zero.*

Demonstração. Temos que (3) implica (1), (2) e, por dualidade, é suficiente mostrar que (1) implica (3). Seja $\mathbf{0}$ um objeto inicial. O conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ possui único elemento, logo, $1_{\mathbf{0}}$ é o elemento zero do grupo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Dado $C\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\mathbf{0})$ possui pelo menos um elemento, o elemento neutro. Mas se $f:C\to\mathbf{0}$ é qualquer morfismo, $f=1_{\mathbf{0}}\circ f$ deve ser o elemento neutro de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\mathbf{0})$, visto que $1_{\mathbf{0}}$ é o elemento zero de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Portanto, $\mathbf{0}$ também é um objeto terminal. □

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva e $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$. Então,

$$0_{A,B}\circ f=(0_{A,B}+0_{A,B})\circ f=0_{A,B}\circ f+0_{A,B}\circ f.$$

Logo, $0_{A,B}\circ f=0_{C,B}$. Analogamente, se $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$. Então, $f\circ 0_{A,B}=0_{A,C}$.

Teorema 3.1.6. [29, Teorema 1.0.5] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Então, produtos finitos e coprodutos finitos coincidem, ou seja:*

(1) *Se $(\prod_{i\in I}C_i,\{\pi_i\}_{i\in I})$ é o produto de $\{C_i\}_{i\in I}$, com $|I|<\infty$. Então, existem:*

$$\iota_i:C_i\to\prod_{i\in I}C_i$$

em $\mathcal{C}$, para cada $i\in I$, tal que $(\prod_{i\in I}C_i,\{\iota_i\}_{i\in I})$ é o coproduto de $\{C_i\}_{i\in I}$.

(2) *Se $(\coprod_{i\in I}C_i,\{\iota_i\}_{i\in I})$ é o coproduto de $\{C_i\}_{i\in I}$, com $|I|<\infty$. Então, existem:*

$$\pi_i:\coprod_{i\in I}C_i\to C_i$$

em $\mathcal{C}$, para cada $i\in I$, tal que $(\coprod_{i\in I}C_i,\{\pi_i\}_{i\in I})$ é o produto de $\{C_i\}_{i\in I}$.

Demonstração. Mostraremos a afirmação (1), pois a afirmação (2) é análoga. A demonstração é por indução sobre $|I|$. Suponha $|I| = 2$. Considere o objeto C_1, o morfismo identidade 1_{C_1} e o morfismo zero $0_{C_1,C_2}$ (Lema 3.1.5). Temos, pela propriedade universal do produto (Definição 1.1.1), que existe único:

$$\iota_1 : C_1 \to C_1 \times C_2$$

tal que $\pi_1 \circ \iota_1 = 1_{C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_1 = 0_{C_1,C_2}$. Novamente, pela propriedade universal do produto, tomando, agora, o objeto C_2 e os morfismos 1_{C_2} e $0_{C_2,C_1}$, temos que existe único morfismo:

$$\iota_2 : C_2 \to C_1 \times C_2$$

tal que $\pi_1 \circ \iota_2 = 0_{C_2,C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_2 = 1_{C_2}$.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_1"] \arrow[ddl, bend right, "1_{C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{C_1,C_2}"] & \\
 & C_1 \times C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_2"] \arrow[ddl, bend right, "0_{C_2,C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "1_{C_2}"] & \\
 & C_1 \times C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

Dados $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, A)$ e $g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, A)$, defina $\varpi_{(g_1,g_2)} : C_1 \times C_2 \to A$ em $\mathcal{C}$, como sendo $g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$. Assim, considerando o objeto $C_1 \times C_2$ e os morfismos ι_1 e ι_2, temos que

$$\pi_1 \circ \varpi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_1 \circ \iota_1 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \iota_2 \circ \pi_2 = 1_{C_1} \circ \pi_1 + 0_{C_1,C_2} \circ \pi_2 = \pi_1.$$

Similarmente, $\pi_2 \circ \varpi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_2$. Desta forma, o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \times C_2 \arrow[d, dashed, "\varpi_{(\iota_1,\iota_2)}"] \arrow[ddl, bend right, "\pi_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_2"] & \\
 & C_1 \times C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

Como $1_{C_1 \times C_2}$ também comuta este diagrama, temos por unicidade que

$$\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \varpi_{(\iota_1,\iota_2)} = 1_{C_1 \times C_2}$$

Com isso, mostraremos que o coproduto de C_1 e C_2 é o par $(C_1 \times C_2, \{\iota_1, \iota_2\})$.

Sejam A um objeto de C, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, A)$ e $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, A)$. Considerando $\varpi_{(f_1,f_2)}$, temos que

$$\varpi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 = f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 + f_2 \circ \pi_2 \circ \iota_1 = f_1 \circ 1_{C_1} + f_2 \circ 0_{C_1,C_2} = f_1.$$

Analogamente, $\varpi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 = f_2$. Isso significa que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\
& C_1 \times C_2 \arrow[d, "\varpi_{(f_1,f_2)}"] & \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Suponha que $g : C_1 \times C_2 \to A$ também seja um morfismo em $\mathcal{C}$ que comuta o diagrama. Então:

$$\begin{array}{rcl}
\varpi_{(f_1,f_2)} - g & = & (\varpi_{(f_1,f_2)} - g) \circ 1_{C_1 \times C_2} \\
& = & (\varpi_{(f_1,f_2)} - g) \circ \varpi_{(\iota_1,\iota_2)} \\
& = & (\varpi_{(f_1,f_2)} - g) \circ (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2) \\
& = & (\varpi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 - g \circ \iota_1) \circ \pi_1 + (\varpi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 - g \circ \iota_2) \circ \pi_2 \\
& = & (f_1 - f_1) \circ \pi_1 + (f_2 - f_2) \circ \pi_2 \\
& = & 0_{C_1 \times C_2, A}.
\end{array}$$

Portanto, $\varpi_{(f_1,f_2)} = g$ e $\varpi_{(f_1,f_2)}$ é o único morfismo que comuta o diagrama acima, isto é, $(C_1 \times C_2, \iota_1, \iota_2)$ é o coproduto de C_1 e C_2. Para $|I| \geq 2$, segue por indução. $\square$

Definição 3.1.7. [31, Definição 12.3.8] Uma categoria $\mathcal{C}$ é *aditiva* se é pré-aditiva, possui um objeto zero e existem produtos finitos.

Exemplo 3.1.8. O coproduto na categoria $\mathfrak{Grp}$ é o *produto livre*, cuja construção pode ser vista no livro *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory* [5], Exemplo 2.2.4.e. Assim, temos que o coproduto não é o produto cartesiano, logo $\mathfrak{Grp}$ não é aditiva.

Definição 3.1.9. [6, Definição 1.3.1] Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Dizemos que um funtor $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é *aditivo* se para todo $C, C' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, o mapa:

$$\begin{array}{rccc}
\mathbf{F}_{C,C'} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(C), \mathbf{F}(C')) \\
& f & \mapsto & \mathbf{F}(f)
\end{array}$$

é um homomorfismo de grupos.

3.2 Categorias abelianas

Na seção anterior, abordamos a definição e algumas das propriedades de uma categoria aditiva. Agora, iremos definir uma categoria *pré-abeliana* como sendo uma categoria aditiva em que todos núcleos e co-núcleos existem.

Lema 3.2.1. [4, p. 408] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-abeliana e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Sejam também:*

(1) $(\ker(f), k)$ *o núcleo de f;*

(2) $(\mathrm{coker}(f), q)$ *o co-núcleo de f;*

(3) $(\ker(q), k')$ *o núcleo de q e*

(4) $(\mathrm{coker}(k), q')$ *o co-núcleo de k.*

Então, existe único $\overline{f} : \mathrm{coker}(k) \to \ker(q)$ tal que $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$.

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] & B \arrow[r, "q"] & \mathrm{coker}(f) \\
 & \mathrm{coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"] & \ker(q) \arrow[u, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Temos que $q \circ f = 0_{A,\mathrm{coker}(f)}$, pois o co-núcleo de f é o coequalizador de f e $0_{A,B}$ (Definição 3.1.2). Assim, segue da propriedade universal do núcleo de q que existe único $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \ker(q))$ tal que:

$$k' \circ f' = f,$$

isto é, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\ker(q) \arrow[r, "k'"] & B \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "0_{B,\mathrm{coker}(f)}"'] & \mathrm{coker}(f) \\
A \arrow[u, dashed, "\exists! f'"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como $(\ker(f), k)$ é o núcleo de f, temos $f \circ k = 0_{\ker(f),B}$. Logo, podemos concluir que

$$k' \circ f' \circ k = f \circ k = 0_{\ker(f),B} = k' \circ 0_{\ker(f),\ker(q)}.$$

É importante ressaltar que temos a seguinte cadeia de morfismos:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \ker(q) \arrow[r, "k'"] & B
\end{tikzcd}$$

Como k' é monomorfismo, $f' \circ k = 0_{\ker(f),\ker(q)}$. Assim, segue da definição de co-núcleo de k que existe único $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coker}(k), \ker(q))$ tal que:

$$\overline{f} \circ q' = f',$$

ou seja, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[rr, shift left, "0_{\ker(f),A}"] \arrow[rr, shift right, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f),\mathrm{coker}(k)}"'] \arrow[ddr, bend right, "0_{\ker(f),\ker(q)}"'] & & A \arrow[dl, "q'"'] \arrow[ddl, bend left, "f'"] \\
& \mathrm{coker}(k) \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{f}"] & \\
& \ker(q) &
\end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos:

$$k' \circ \overline{f} \circ q' = k' \circ f' = f.$$

$\square$

Definição 3.2.2. [31, Definição 12.5.1] Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita *abeliana* se $\mathcal{C}$ é pré-abeliana e para todo morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, o morfismo $\overline{f}$, dado pela proposição 3.2.1, é um isomorfismo.

Observação 3.2.3. A Definição 3.2.2 afirma que em uma categoria abeliana, para todo morfismo $f : A \to B$, o morfismo induzido $\overline{f}$ é um isomorfismo. Isso significa que o co-núcleo de qualquer morfismo na categoria é isomorfo ao quociente do contradomínio de f pela imagem de f, o que espelha precisamente a afirmação do primeiro teorema do isomorfismo.

Exemplo 3.2.4. Iremos verificar que a categoria AbGrp é abeliana. Temos que AbGrp é pré-aditiva (Exemplo 3.1.4) e que o grupo trivial $\{0\}$ é o objeto zero dessa categoria. Ademais, como abordado na Seção 1.1, AbGrp possui produtos e coprodutos finitos, logo, é aditiva.

Agora, seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(G, H)$, afirmamos que o par $(\ker(f), k)$ onde:

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = 0\} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} k: & \ker(f) & \to & \mathbf{G} \\ & g & \mapsto & g \end{array}$$

é o núcleo de f, e o par $(\mathrm{coker}(f), q)$ onde:

$$\mathrm{coker}(f) = H/\mathrm{Im}(f) \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} q: & H & \to & \mathrm{coker}(f) \\ & h & \mapsto & h + \mathrm{Im}(f) \end{array}$$

é o co-núcleo de f. Portanto, AbGrp é pré-abeliana.

Por fim, seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos e sejam $(\ker(f), k)$ e $(\mathrm{coker}(f), q)$ o núcleo e o co-núcleo de f, respectivamente, $(\ker(q), k')$ o núcleo de q e $(\mathrm{coker}(k), q')$ o co-núcleo de k. Observe que:

$$\ker(q) = \{h \in H \mid q(h) = 0\} = \{h \in H \mid h + \mathrm{Im}(f) = 0\},$$

logo, $\ker(q) \subset \mathrm{Im}(f)$. Reciprocamente, se $h \in \mathrm{Im}(f)$. Então, $h + \mathrm{Im}(f) = 0$, ou seja, $q(h) = 0$. Assim, $\ker(q) = \mathrm{Im}(f)$. Agora, observe que $\mathrm{coker}(k) = G/\mathrm{Im}(k)$, mas, k é injetiva, logo, $\mathrm{Im}(k) = \ker(f)$. Assim, $\mathrm{coker}(k) = G/\ker(f)$. Pelo Teorema do Isomorfismo, o homomorfismo de grupos $\overline{f} : \mathrm{coker}(k) = G/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $g + \ker(f) \mapsto f(g)$, é um isomorfismo. Pela definição de núcleo e co-núcleo (Definição 3.1.2), temos que:

$$k' \circ \overline{f} \circ q'(g) = k' \circ \overline{f}(g + \mathrm{Im}(k)) = k'(f(g)) = f(g),$$

isto é, $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$. Portanto, AbGrp é abeliana.

Por fim, enunciaremos uma série de resultados a cerca de categorias abelianas:

Proposição 3.2.5. [6, Proposição 1.4.4] *Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então, a categoria $\mathsf{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ é abeliana.* □

Proposição 3.2.6. [6, Proposição 1.5.1] *Em uma categoria abeliana $\mathcal{C}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *f é um isomorfismo;*

(2) *f é um monomorfismo e um epimorfismo.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que (1)⇒(2). Seja $f : A \to B$ um isomorfismo, então existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$. Como 1_B é epimorfismo, segue que f também é. Além disso, $g \circ f = 1_A$ e como 1_A é monomorfismo, f também é. Portanto, f é monomorfismo e epimorfismo.

Por outro lado, suponha que $f : A \to B$ é monomorfismo e epimorfismo. Mostraremos que (2)⇒(1). Como $\mathcal{C}$ é abeliana, temos o seguinte diagrama comutativo em que $\overline{f}$ é um isomorfismo (Definição 3.2.2):

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] & B \arrow[r, "q"] & \mathrm{coker}(f) \\
& \mathrm{coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \ker(q) \arrow[u, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

Temos que $q \circ f = 0_{A,\mathrm{coker}(f)}$ e $0_{B,\mathrm{coker}(f)} \circ f = 0_{A,\mathrm{coker}(f)}$. Como f é epimorfismo:

$$q \circ f = 0_{B,\mathrm{coker}(f)} \circ f \Rightarrow q = 0_{B,\mathrm{coker}(f)}.$$

Consequentemente, $\ker(q) \cong B$ e $k' \cong 1_B$. Visto que f também é monomorfismo, temos por dualidade que $\mathrm{coker}(k) \cong A$ e $q' \cong 1_A$. Com isso, temos que:

$$f = k' \circ \overline{f} \circ q' \cong 1_B \circ \overline{f} \circ 1_A.$$

Assim, concluímos que f é isomorfismo, pois é a composição de três isomorfismos. Portanto, (2)⇒(1). □

Proposição 3.2.7. [6, Proposição 1.5.3] *Uma categoria abeliana é finitamente completa e finitamente cocompleta.* □

Definição 3.2.8. [6, Definição 1.11.1] Seja $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor aditivo entre duas categorias abelianas. Dizemos que:

(1) $\mathbf{F}$ é *exato à esquerda* se preserva sequências exatas da forma:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$$

(2) $\mathbf{F}$ é *exato à direita* se preserva sequências exatas da forma:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

(3) $\mathbf{F}$ é *exato* se preserva sequências exatas da forma:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Observação 3.2.9. Dizer que um funtor *covariante* $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva sequências exatas à esquerda, significa que se:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$$

for exata, com $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, a sequência:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{C})$$

será exata. Por outro lado, afirmar que um funtor *contravariante* $\mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva sequências exatas à esquerda, significa que se:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$$

for exata, com $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, a sequência:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{F(C)} \longrightarrow \mathbf{F(B)} \longrightarrow \mathbf{F(A)}$$

será exata.

Lema 3.2.10. [14, Exemplo 1.6.2] *Seja X um objeto de uma categoria abeliana $\mathcal{C}$. Então, o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ e o funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ de $\mathcal{C}$ para AbGrp são exatos exatos à esquerda.*

Demonstração. Iremos fazer a demonstração para o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$. Considere uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Iremos mostrar que a sequência de grupos abelianos a seguir é exata:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \ .$$

Primeiro, mostraremos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X) = (-) \circ g$ é injetiva. Seja $c \in \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X))$, temos que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)(c) = c \circ g = 0_{B,X} = 0_{C,X} \circ g,$$

como g é sobrejetiva, $c = 0$, logo, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)$ é injetiva. Em seguida, observe que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X) = 0_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,X),\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)},$$

visto que, para todo $c : C \to X$, temos:

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X))(c) = c \circ g \circ f = c \circ 0_{A,C} = 0_{A,X}.$$

Por fim, verificaremos $\ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X))$. Sabemos que:

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)) \subset \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)),$$

logo, basta mostrar o inverso. Seja $b \in \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X))$. Como g é o co-núcleo de f, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0_{A,X}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[dl, dashed, "\exists!\overline{b}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

que mostra que $b = \overline{b} \circ g \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X))$, como desejado. □

3.3 Axiomas de Grothendieck

Em Tôhoku, Grothendieck define uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ como uma categoria aditiva satisfazendo dois axiomas a seguir:

(AB 1) Todo morfismo admite um núcleo e um co-núcleo;

(AB 2) Seja u um morfismo em $\mathcal{C}$. Então, o morfismo canônico $\overline{u} : Coim(u) \to \mathrm{Im}(u)$ é um isomorfismo.

Observe que o axioma (AB 1) se refere ao que chamamos, no presente texto, de categoria pré-abeliana, e a combinação dos axiomas (AB 1) e (AB 2) resulta na Definição 3.2.2. Ademais, Grothendieck lista alguns axiomas adicionais que uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ pode satisfazer:

(AB 3) Em $\mathcal{C}$, existe o coproduto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, com I um conjunto de índices qualquer.

(AB 3*) Em $\mathcal{C}$, existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, com I um conjunto de índices qualquer.

(AB 4) $\mathcal{C}$ satisfaz (AB 3) e coprodutos são exatos.

(AB 4*) $\mathcal{C}$ satisfaz (AB 3*) e produtos são exatos.

(AB 5) $\mathcal{C}$ satisfaz (AB 3) e colimites filtrados são exatos.

(AB 5*) $\mathcal{C}$ satisfaz (AB 3*) e limites filtrados são exatos.

(AB 6) $\mathcal{C}$ satisfaz (AB 3) e o morfismo $\xi : colim(\mathbf{F}) \to \prod_{i\in I} colim(F_i)$ é um isomorfismo.

Nesta seção analisaremos alguns destes axiomas que serão importantes para o estudo da categoria dos grupos abelianos condensados que veremos no seção 5.2.

Começamos pelos axiomas (AB 3) e seu dual (AB 3*). Se $\mathcal{C}$ é uma categoria que possui (co)produtos e (co)equalizadores arbitrários. Então, todo funtor $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ possui (co)limite (Teorema 1.1.10). Assim, os axiomas (AB 3) e (AB 3*) são equivalentes a dizer, respectivamente, que $\mathcal{C}$ é cocompleta e completa.

Categorias que satisfazem o axioma (AB 4), por sua vez, possuem coprodutos exatos. Isto significa que se I é um conjunto de índices e

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $A_i, B_i, C_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Então, a sequência

$$0 \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} f_i} \coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} g_i} \coprod_{i\in I} Z_i \longrightarrow 0$$

também é uma sequência exata curta. Dualmente, definimos produtos exatos.

Agora, para entender o axioma (AB 5) precisamos definir alguns conceitos:

Definição 3.3.1. [5, Definição 2.13.1] Seja $\mathcal{D}$ uma categoria pequena, dizemos que esta categoria é *filtrada* se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\text{Obj}(\mathcal{D}) \neq \varnothing$,

(2) para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, existe $C \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, C) \neq \varnothing \neq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C)$,

(3) dados $f, g : A \to B$, existem $C \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ e $h : B \to C$, tal que $h \circ f = h \circ g$.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria em que existem limites e colimites e $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é um funtor, em que $\mathcal{D}$ é uma categoria filtrada, o colimite de $\mathbf{F}$ é dito *colimite filtrado*.

Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então $\mathfrak{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ também é uma categoria abeliana (Proposição 3.2.5). Logo, podemos definir sequências exatas em $\mathfrak{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$. Sejam $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores e $\alpha : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ e $\beta : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ transformações naturais. Dizemos que:

$$0 \to \mathbf{F} \overset{\alpha}{\to} \mathbf{G} \overset{\beta}{\to} \mathbf{H} \to 0$$

é uma *sequência exata curta* se $\text{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$, α é monomorfismo e β é epimorfismo.

Agora, considere, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ como no parágrafo anterior e $\alpha : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ uma transformação natural qualquer. Sejam $(\text{colim}(\mathbf{F}), \{\varphi_D^{\mathbf{F}}\}_{D\in\text{Obj}(\mathcal{D})})$ e $(\text{colim}(\mathbf{G}), \{\varphi_D^{\mathbf{G}}\}_{D\in\text{Obj}(\mathcal{D})})$ os colimites de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ respectivamente. Se $D_1, D_2 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ e $f : D_1 \to D_2$ é um morfismo.

Então, pela propriedade da transformação natural α, temos que

$$\mathbf{G}(f) \circ \alpha_{D_1} = \alpha_{D_2} \circ \mathbf{F}(f).$$

Além disso, pela propriedade universal do colimite de $\mathbf{G}$, temos que $\varphi^{\mathbf{G}}_{D_1} = \varphi^{\mathbf{G}}_{D_2} \circ \mathbf{G}(f)$. Logo,

$$\varphi^{\mathbf{G}}_{D_2} \circ \alpha_{D_2} \circ \mathbf{F}(f) = \varphi^{\mathbf{G}}_{D_2} \circ \mathbf{G}(f) \circ \alpha_{D_1} = \varphi^{\mathbf{G}}_{D_1} \circ \alpha_{D_1},$$

como pode ser visto no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(D_1) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)"] \arrow[dr, "\varphi^{\mathbf{F}}_{D_1}"'] \arrow[ddd, "\alpha_{D_1}"'] & & \mathbf{F}(D_2) \arrow[dl, "\varphi^{\mathbf{F}}_{D_2}"] \arrow[ddd, "\alpha_{D_2}"] \\
& \mathrm{colim}(\mathbf{F}) \arrow[d, dashed, "\exists! \mathrm{colim}(\alpha)"] & \\
& \mathrm{colim}(\mathbf{G}) & \\
\mathbf{G}(D_1) \arrow[rr, "\mathbf{G}(f)"'] \arrow[ur, "\varphi^{\mathbf{G}}_{D_1}"] & & \mathbf{G}(D_2) \arrow[ul, "\varphi^{\mathbf{G}}_{D_2}"']
\end{tikzcd}$$

Logo, pela propriedade do colimite de $\mathbf{F}$, existe único morfismo de $\mathrm{colim}(\mathbf{F})$ para $\mathrm{colim}(\mathbf{G})$, o qual denotaremos por $\mathrm{colim}(\alpha)$, tal que:

$$\mathrm{colim}(\alpha) \circ \varphi^{\mathbf{F}}_D = \varphi^{\mathbf{G}}_D \circ \alpha_D,$$

para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$.

A partir do exposto, podemos compreender o axioma (AB 5). Este axioma diz que colimites filtrados de sequências exatas são exatos, ou seja, se

$$0 \to \mathbf{F} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{G} \xrightarrow{\beta} \mathbf{H} \to 0$$

é uma sequência exata curta, com $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, em que $\mathcal{D}$ é uma categoria filtrada. Então, a sequência:

$$0 \to \mathrm{colim}(\mathbf{F}) \xrightarrow{\mathrm{colim}(\alpha)} \mathrm{colim}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\mathrm{colim}(\beta)} \mathrm{colim}(\mathbf{H}) \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

Em seguida, iremos estabelecer os pré-requisitos para o axioma (AB 6). Seja $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}$ uma família de categorias. Definimos o produto de $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}$, denotado por $\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i$, como sendo a categoria cujos objetos são $\prod_{i\in I} D_i = \{(D_i)_{i\in I} \mid D_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_i)\}$ e os morfismos são

$$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} \mathcal{D}_i \to \prod_{j\in I} \mathcal{D}_j$$

tais que $\prod_{i\in I} f_i = \{(f_i)_{i\in I} \mid f_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}_i)\}$.

Pode-se provar que se $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ é uma família de categorias filtradas. Então, $\prod_{i\in I}\mathcal{D}_i$ também é uma categoria filtrada (veja [25]). Agora, sejam $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ uma família de categorias filtradas, $\mathcal{C}$ uma categoria em que existem colimites, $\mathbf{F}_i : \mathcal{D}_i \to \mathcal{C}$ funtores indexados por $i \in I$, e $(\mathrm{colim}(f_i), \{\varphi^i i_{D^i}\})$ o colimite de $\mathbf{F}_i$. Se $f^i : D_1^i \to D_2^i$ é um morfismo em $\mathcal{D}_i$. Então, pela propriedade do colimite de F_i:

$$\psi^i_{D_1^i} = \psi^i_{D_2^i} \circ F_i(f^i).$$

Defina o funtor:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{F}: & \prod_{i\in I}\mathcal{D}_i & \to & \mathcal{C} \\ & \prod_{i\in I} D^i & \mapsto & \prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(D^i) \\ & \prod_{i\in I} f^i & \mapsto & \prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(f^i) \end{array}$$

Seja $\left(\mathrm{colim}(\mathbf{F}), \{\varphi_{\prod_{i\in I} D^i}\}_{\prod_{i\in I} D^i \in \mathrm{Obj}(\prod_{i\in I}\mathcal{D}_i)}\right)$ o colimite de $\mathbf{F}$. Observe que, dado um morfismo $\prod_{i\in I} f^i : \prod_{i\in I} D_1^i \to \prod_{i\in I} D_2^i$ em $\prod_{i\in I}\mathcal{D}_i$, temos que:

$$\prod_{i\in I}\psi^i_{D_2^i} \circ \prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(f^i) = \prod_{i\in I}(\psi^i_{D_2^i} \circ \mathbf{F}_i(f^i)) = \prod_{i\in I}\psi^i_{D_1^i},$$

o que significa que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(D_1^i) \arrow[rr, "\prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(f^i)"] \arrow[dr, "\varphi_{\prod_{i\in I} D_1^i}"'] \arrow[ddr, bend right, "\prod_{i\in I}\psi^i_{D_1^i}"'] & & \prod_{i\in I}\mathbf{F}_i(D_2^i) \arrow[dl, "\varphi_{\prod_{i\in I} D_2^i}"] \arrow[ddl, bend left, "\prod_{i\in I}\psi^i_{D_2^i}"] \\
& \mathrm{colim}(\mathbf{F}) \arrow[d, dashed, "\exists!\xi"] & \\
& \prod_{i\in I}\mathrm{colim}(\mathbf{F}_i) &
\end{tikzcd}$$

Logo, pela propriedade do colimite de $\mathbf{F}$, existe único morfismo $\xi : \mathrm{colim}(\mathbf{F}) \to \prod_{i\in I}\mathrm{colim}(\mathbf{F}_i)$ tal que:

$$\xi \circ \varphi_{\prod_{i\in I} D^i} = \prod_{i\in I}\psi^i_{D^i},$$

para todo $\prod_{i\in I} D^i \in \mathrm{Obj}(\prod_{i\in I}\mathcal{D}_i)$. Assim, o axioma (AB 6) afirma que uma categoria $\mathcal{C}$

satisfaz o axioma (AB 3) e o morfismo $\xi : \text{colim}(\mathbf{F}) \to \prod_{i\in I} \text{colim}(\mathbf{F}_i)$, descrito anteriormente, é um isomorfismo.

Por fim, vejamos um exemplo de uma categoria abeliana que satisfaz os axiomas de Grothendieck listados acima:

Exemplo 3.3.2. Iremos apresentar de forma concisa que a categoria $\mathfrak{AbGrp}$ satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB 3), (AB 3*), (AB 4), (AB 4*), (AB5) e (AB 6). Primeiro, observe que os axiomas (AB 3) e (AB 3*) são bem conhecidos da Teoria de Grupos, visto que o produto e o coproduto de uma família de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ são, respectivamente, $(\prod_{i\in I} G_i, \{p_i\}_{i\in I})$ e $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \{\iota_i\}_{i\in I})$. Em seguida, veremos os demais axiomas:

(AB 4) Sejam $\{G_i\}_{i\in I}$, $\{H_i\}_{i\in I}$ e $\{K_i\}_{i\in I}$ famílias de grupos abelianos e $\{f_i : G_i \to H_i\}_{i\in I}$ e $\{r_i : H_i \to K_i\}_{i\in I}$ famílias de homomorfismos de grupos tais que:

$$0 \to G_i \xrightarrow{f_i} H_i \xrightarrow{r_i} K_i \to 0$$

é uma sequência exata curta. O coproduto de $\{f_i\}_{i\in I}$ é o homomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \bigoplus_{i\in I} f_i : & \bigoplus_{i\in I} G_i & \to & \bigoplus_{i\in I} H_i \\ & (g_i)_{i\in I} & \mapsto & (f_i(g_i))_{i\in I} \end{array},$$

enquanto, o coproduto de de $\{r_i\}_{i\in I}$ é o homomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \bigoplus_{i\in I} r_i : & \bigoplus_{i\in I} H_i & \to & \bigoplus_{i\in I} K_i \\ & (h_i)_{i\in I} & \mapsto & (r_i(h_i))_{i\in I} \end{array}.$$

Portanto, usando o fato de f_i ser injetiva, r_i ser sobrejetiva e $\text{Im}(f_i) = \ker(r_i)$ para todo $i \in I$, pode-ser provar que:

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} G_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} f_i} \bigoplus_{i\in I} H_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} r_i} \bigoplus_{i\in I} K_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

(AB 4*) Neste axioma, aplica-se o mesmo raciocínio empregado em (AB 4).

(AB 5) Este axioma é enunciado como o Teorema 2.6.15 no livro *An Introduction to Homological Algebra* [32] de Charles A. Weibel.

(AB 6) Este axioma decorre de um resultado que afirma que, na categoria $\mathfrak{AbGrp}$, limites finitos comutam com colimites filtrados (Veja [6, Corolário 2.13.6]).

Capítulo 4

Sites e feixes

Historicamente, um pré-feixe foi definido como um funtor contravariante na categoria $\mathcal{O}(X)$ de subconjuntos abertos de um espaço topológico X com valores na categoria Set. Por extensão, um pré-feixe é qualquer functor contravariante definido em uma categoria $\mathcal{C}$ com valores em outra categoria $\mathcal{D}$. Assim, podemos definir a categoria $\mathsf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ como sendo a categoria $\mathsf{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{D})$. Neste contexto, a noção de um site desempenha um papel crucial. Um site $\mathcal{C}$ é uma categoria equipada com uma Topologia de Grothendieck. Essa topologia possibilita a extensão da teoria de feixes para além dos espaços topológicos, abrangendo categorias mais abstratas e versáteis. O objetivo deste capítulo consiste em examinar feixes em sites, demonstrar equivalências entre feixes e destacar algumas outras propriedades relevantes para a teoria da matemática condensada.

4.1 Topologia de Grothendieck

Nesta seção, veremos uma introdução à teoria de feixes associados às topologias de Grothendieck. Existe uma definição muito comum de topologias de Grothendieck que se aplica apenas a categorias com pullbacks. Neste texto as chamaremos de pré-topologias de Grothendieck. Ademais, abordaremos a definição original de uma topologia Grothendieck, que não exige a existência de pullbacks como os da Definição 1.1.5, assim, poderemos definir conjuntos condensados no próximo capítulo de maneira mais adequada. Por fim, mostraremos que as duas definições de topologia de Grothendieck estão relacionadas.

Definição 4.1.1. [22, Definição 1.2.14] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com pullbacks. Uma *pré-topologia de Grothendieck* $\mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ sobre $\mathcal{C}$ consiste em um conjunto $\mathrm{Cov}(U)$ de famílias de morfismos $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ para cada objeto $U \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, chamadas *coberturas* de U, tais que:

(PT1) Todo isomorfismo $V \to U$ forma uma cobertura $\{V \to U\}$;

(PT2) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ é uma cobertura e $f : V \to U$ é um morfismo qualquer em $\mathcal{C}$. Então, $\{V \times_U U_i \to V\}_{i\in I}$ é uma cobertura de V.

(PT3) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ e, para cada i, $\{U_{i,j} \to U_i\}_{j\in J_i}$ são coberturas. Então, a família de composições $\{U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i\in I,\ j\in J_i}$ também é uma cobertura.

Chamamos de *site* uma categoria com uma pré-topologia de Grothendieck.

A definição de pré-topologia de Grothendieck nos permite definir uma noção de feixes para categorias com certos pullbacks que fornece uma boa extensão da noção de feixes para espaços topológicos.

Definição 4.1.2. [22, Definição 1.2.16] Sejam $\mathcal{C}$ um site e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um *feixe* no site $\mathcal{C}$ se para todo objeto U de $\mathcal{C}$ e toda cobertura $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ o diagrama:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \underset{\prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(\rho^2_{ij})}{\overset{\prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(\rho^1_{ij})}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

é um equalizador, em que $\rho^1_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_i$ e $\rho^2_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_j$ são as projeções canônicas.

Exemplo 4.1.3. Considere a categoria $\mathbf{CHTop}$ e sejam U um espaço Hausdorff compacto e $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ uma família finita de mapas juntamente sobrejetivos em $\mathbf{CHTop}$, ou seja, o mapa induzido:

$$\bigsqcup_{i\in I} f_i : \bigsqcup_{i\in I} U_i \to U$$

é sobrejetivo. Afirmamos que essas famílias definem uma pré-topologia de Grothendieck em $\mathbf{CHTop}$.

Primeiro, observe que todo isomorfismo é uma cobertura, pois é sobrejetivo. Ademais, sejam $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ uma cobertura e $f : V \to U$ um mapa qualquer, vamos mostrar que $\{V \times_U U_i \to V\}_{i\in I}$ é uma cobertura. Seja $x \in V$. Então, $f(x) \in U$. Logo, existe $x_i \in \bigsqcup_{i\in I} U_i$ tal que $\bigsqcup_{i\in I} f_i(x_i) = f(x)$. Em particular, $x_i \in U_i$ para algum $i \in I$ e $f_i(x_i) = f(x)$. Assim, temos que existe $(x, x_i) \in V \times_U U_i$ tal que $\rho_{i_1}((x, x_i)) = x$. Consequentemente, dado $x \in V$, existe $(x, x_i) \in V \times_U U_i$ tal que $\bigsqcup_{i\in I} \rho_{i_1}((x, x_i)) = x$, isto é, o mapa $\bigsqcup_{i\in I} \rho_{i_1}$ é sobrejetivo. Por fim, é direto que se $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ e, para cada i, $\{f_{i,j} : U_{i,j} \to U_i\}_{j\in J_i}$ são coberturas. Então, a família de composições $\{U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i\in I,\ j\in J_i}$ também é uma cobertura.

Similarmente, a categoria $\mathbf{ProFinSet}$ com coberturas dadas por famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivos também é um site. No entanto, isso não acontece para $\mathbf{EDSet}$, pois segundo Scholze (Referência [30], Warning 2.6) esta categoria não é fechada para pullbacks.

A vista disso, as definições a seguir estabelecem os fundamentos para uma noção mais geral de topologia de Grothendieck.

Definição 4.1.4. [22, Definição 1.2.17] Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. A *categoria slice* $\mathcal{C}_{/X}$ de $\mathcal{C}$ sobre X é uma categoria associada cujos objetos são pares (A, π), em que $\pi : A \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, ou seja, os objetos são todos os morfismos cujo codomínio é X. Os morfismos nesta categoria $f : (A, \pi) \to (A', \pi')$ são dados por morfismos $f : A \to A'$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Um *crivo* em X é uma subcategoria plena $S_{\mathcal{C}}(X) \subset \mathcal{C}_{/X}$ que consiste em pares (Y, f) com $f : Y \to X$ tal que para todo morfismo $g : (Y', f') \to (Y, f)$ em $\mathcal{C}_{/X}$ o par (Y', f') pertence à $S_{\mathcal{C}}(X)$ sempre que (Y, f) pertence à $S_{\mathcal{C}}(X)$. Quando não houver ambiguidade, denotaremos um crivo em X por $S(X)$.

Exemplo 4.1.5. Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então, podemos considerá-lo como uma categoria $\mathcal{P}$, conforme discutido na Seção 2.3. Seja p um objeto qualquer da categoria $\mathcal{P}$. Então, a categoria slice de $\mathcal{P}$ sobre p é

$$\mathcal{P}_{/p} = \{x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P}) \mid x \leq p\}.$$

Tal categoria é o crivo maximal em p. Ademais, podemos definir outros crivos em p. Considere, $q \in \mathrm{Obj}(\mathcal{P})$ tal que $q < p$. Então definimos o crivo:

$$S_{\mathcal{P}}(p) = \{x \mid x \leq q < p\}.$$

A partir do exposto, podemos definir o *pullback de um crivo* $S(X)$ ao longo de um morfismo $f : Y \to X$ como o crivo em Y que consiste em pares $(V, g : V \to Y)$ tais que a composição $(V, f \circ g : V \to X)$ pertence à $S(X)$. Usaremos a notação $f^*S(X)$ para tal pullback.

De fato, $f^*S(X)$ é um crivo. Sejam (V, g) um objeto de $f^*S(X)$ e $m : (W, h) \to (V, g)$ um morfismo em $\mathcal{C}_{/Y}$, temos que $(V, f \circ g)$ é um objeto de $S(X)$. Logo, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "h"'] & & V \arrow[dl, "g"] \\ & Y \arrow[d, "f"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

e pela propriedade do crivo $S(X)$, $(W, f \circ h)$ é objeto de $S(X)$ e, consequentemente,

$$(W, h) \in \mathrm{Obj}(f^*S(X)).$$

Agora, tendo uma nova noção de pullbacks podemos definir uma topologia de Grothendieck a partir de crivos:

Definição 4.1.6. [22, Definição 1.2.19] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma *topologia de Grothendieck* J em $\mathcal{C}$ é uma coleção de crivos para cada objeto X de $\mathcal{C}$, chamada *crivos de cobertura* e denotada por $J(X)$, tal que

(T1) Para cada objeto X em $\mathcal{C}$, o crivo maximal $\mathcal{C}_{/X}$ é um crivo de cobertura em X;

(T2) Para cada morfismo $f : Y \to X$ em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X) \in J(X)$ em X, o pullback $f^*S(X)$ é um crivo de cobertura em Y;

(T3) Seja $S(X) \in J(X)$ um crivo de cobertura em X e seja $T(X)$ outro crivo em X tal que para cada morfismo $f : Y \to X$ em $S(X)$ o pullback $f^*T(X)$ é um crivo de cobertura em Y. Então, $T(X)$ é um crivo de cobertura em X.

Uma categoria com uma topologia de Grothendieck também é chamada de *site*.

Definição 4.1.7. [22, Definição 1.2.18] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Considere um objeto X de $\mathcal{C}$ e uma coleção de morfismos $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I}$. O menor crivo em X que contém todo par (X_i, f_i) é chamado de *crivo gerado pelos morfismos* f_i, denotado por $[\{f_i\}_{i \in I}]$. Tal crivo é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}_{/X}$ e é dado por pares (Y, f) tais que existe alguma fatoração $Y \to X_i \to X$ para algum i. Além disso, dizemos que um crivo $S(X)$ é *finitamente gerado* se é gerado por uma coleção finita de morfismos.

Se uma categoria $\mathcal{C}$ é equipada com uma topologia de Grothendieck. Então, diremos que uma coleção de morfismos $\{f_i : C_i \to C\}$ é uma *cobertura de crivos* se gera um crivo de cobertura em $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exemplo 4.1.8. Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{O}(X)$ o poset de todos os subconjuntos abertos de X considerado como uma categoria em que um morfismo $U \to V$ é a inclusão

$U \subseteq V$. Então, podemos equipar $\mathcal{O}(X)$ com uma topologia de Grothendieck em que uma coleção de morfismos $\{U_i \subset U\}_{i \in I}$ é uma cobertura de um objeto U se:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Primeiro, observe que $\mathcal{O}(X)_{/U}$ é um crivo de cobertura, pois a união de todos os subconjuntos de U é igual a U, logo, (T1) é satisfeita. Em seguida, para verificar (T2), considere um crivo de cobertura $S(U)$ e um morfismo $f : V \hookrightarrow U$, temos que o pullback $f^*S(U)$ é a coleção de subconjuntos de V que pertencem à $S(U)$. Assim, dado $v \in V$, existe uma vizinhança $U_v \subset V$ de v e esta vizinhança pertence à $f^*S(U)$. Como v foi escolhido arbitrariamente, segue que:

$$V = \bigcup_{v \in V} V_v.$$

Logo, (T2) é satisfeita. Por fim, seja $S(U)$ um crivo de cobertura e $T(U)$ outro crivo tal que para todo $f_i : U_i \hookrightarrow U$ em $S(U)$, o pullback $f_i^*T(U)$ é um crivo de cobertura em U_i. Assim, cada $U_i \in S(U)$ pode ser expresso como:

$$U_i = \bigcup_{j \in J} U_{i,j},$$

em que $U_{i,j} \in T(U)$. Mas, como $S(U)$ é um crivo de cobertura, temos que:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} U_{i,j} \right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_{i,j}.$$

Portanto, (T3) é satisfeita e $\mathcal{O}(X)$ é um site.

Exemplo 4.1.9. Temos que famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivos definem uma topologia de Grothendieck em $\mathfrak{EDSet}$. Neste caso, os crivos de cobertura são os crivos gerados por cada família de mapas juntamente sobrejetivos. De fato, seja X um conjunto extremamente desconexo. Então $\mathfrak{EDSet}_{/X}$ é um crivo de cobertura, pois é gerado pela identidade 1_X que é sobrejetiva. Logo, (T1) é satisfeito.

Agora, considere um morfismo $f : Y \to X$ em $\mathfrak{EDSet}$ e um crivo de cobertura $S(X)$. Vamos mostrar que o pullback $f^*S(X)$ é um crivo de cobertura. Observe que Y é Hausdorff compacto, então existe uma sobrejeção $g : V \to Y$ tal que V é extremamente desconexo (Proposição 2.4.4). Além disso, dado um mapa $h : Z \to Y$ pertencente ao pullback, temos que h se fatora pela sobrejeção g (Proposição 2.2.6). Logo, o pullback $f^*S(X)$ é gerado por g e é um crivo de cobertura. Assim temos que (T2) é satisfeito.

Por fim, sejam $S(X)$ um crivo de cobertura e $T(X)$ um crivo tal que para cada $f : Y \to X$ o pullback $f^*S(X)$ é um crivo de cobertura. Então, para cada f_i do conjunto gerador de $S(X)$, o pullback $f_i^*S(X)$ é gerado por uma família finita de morfismos $f_{i,j}$ tais que:

$$\sqcup f_{i,j} : \bigsqcup_{i\in I, j\in J_i} Y_{i,j} \to Y_i$$

é sobrejetivo. Além disso, pela definição de $T(X)$ cada um de seus morfismos pode ser fatorado por algum $f_{i,j}$. Assim, temos que $T(X)$ é gerado pela coleção finita de morfismos formados pelas composições:

$$\bigsqcup_{i\in I, j\in J_i} Y_{i,j} \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} Y_i \longrightarrow X.$$

Logo, (T3) é satisfeito e, portanto, $\mathfrak{EDSet}$ é um site com a topologia de Grothendieck descrita.

Na verdade, veremos na próxima seção, mais especificamente na Proposição 4.2.4, que a topologia de mapas finitos juntamente sobrejetivos de $\mathfrak{EDSet}$ é herdada da topologia de $\mathfrak{ProFinSet}$.

Lema 4.1.10. [31, Lema 7.47.7] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck J e $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Se $S'(X) \in J(X)$ é um crivo de cobertura e $S(X)$ é outro crivo tal que $S'(X) \subset S(X)$. Então, $S(X) \in J(X)$.* □

A próxima etapa é definir uma nova noção de feixes. Considere $\mathcal{C}$ um site com uma topologia de Grothendieck e sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $S(X)$ um crivo em X e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathfrak{Set}$ um pré-feixe. Aplicando $\mathcal{F}$ nos mapas de $S(X)$, obtemos um cone $(\mathcal{F}(X), \{\mathcal{F}(f)\}_{(Y,f)\in S(X)})$, ou seja, para cada morfismo $g : (Y_1, f_1) \to (Y_2, f_2)$ em $S(X)$, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(X) \arrow[dl, "\mathcal{F}(f_1)"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f_2)"] & \\
\mathcal{F}(Y_1) & & \mathcal{F}(Y_2) \arrow[ll, "\mathcal{F}(g)"]
\end{tikzcd}$$

Sendo assim, pela propriedade universal de limites existe único morfismo

$$\phi : \mathcal{F}(X) \to \lim_{Y\in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y)$$

tal que todos os diagramas da seguinte forma comutam:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(X) \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[ddl, bend right, "\mathcal{F}(f_1)"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathcal{F}(f_2)"] & \\
& \lim\limits_{Y \in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y) \arrow[dl, "l_1"] \arrow[dr, "l_2"'] & \\
\mathcal{F}(Y_1) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y_2)
\end{tikzcd}$$

A partir disto, temos a seguinte definição:

Definição 4.1.11. [21, p. 127] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck. Dizemos que um pré-feixe $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ é um feixe se satisfaz a seguinte condição: Para cada objeto X em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X)$, o mapa canônico

$$\mathcal{F}(X) \to \lim_{Y \in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y)$$

é uma bijeção.

Conhecendo as definições de pré-topologia e topologia de Grothendieck, podemos relacioná-las como mostra o lema abaixo:

Lema 4.1.12. [31, Lema 7.48.1] *Seja $\mathcal{C}$ um site equipado com uma pré-topologia de Grothendieck com coberturas* $\text{Cov}(\mathcal{C})$*. Para cada objeto U de $\mathcal{C}$, denote por $J(U)$ o conjunto de crivos $S(U)$ em U com a seguinte propriedade: "existe uma cobertura $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ tal que o crivo $[\{f_i\}_{i \in I}]$ gerado por f_i está contido em $S(U)$". Então, J é uma topologia em $\mathcal{C}$ e é chamada de* topologia associada à $\mathcal{C}$*.*

Demonstração. Mostraremos que os axiomas (PT1), (PT2) e (PT3) da definição de pré-topologia (Definição 4.1.1) implicam diretamente os axiomas (T1), (T2) e (T3) da definição de topologia (Definição 4.1.6).

Seja $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e considere o crivo maximal $\mathcal{C}_{/U}$. Queremos mostrar que $\mathcal{C}_{/U} \in J(U)$. Temos que o morfismo $1_U : U \to U$ é um isomorfismo, logo, temos pelo axioma (PT1), $\{1_U : U \to U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$. Seja $[1_U]$ o crivo gerado por 1_U, temos pela maximalidade de $\mathcal{C}_{/U}$ que $[1_U] \subset \mathcal{C}_{/U}$. Logo, $\mathcal{C}_{/U} \in J(U)$. Além disso, dado um par $(V, g) \in \mathcal{C}_{/U}$ podemos fatorá-lo da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & U \arrow[r, "1_U"] & U
\end{tikzcd}$$

Assim, $\mathcal{C}_{/U} \subset [1_U]$ e, portanto, $\mathcal{C}_{/U} = [1_U]$.

Agora, considere um crivo $S(U) \in J(U)$. Existe $\{g_i : U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ tal que $[\{g_i\}_{i\in I}] \subset S(U)$. Seja $f : V \to U$ um morfismo em $\mathcal{C}$, queremos mostrar que $f^*S(U) \in J(V)$. Temos que $\mathcal{C}$ é uma categoria com pullbacks, assim para todo $i \in I$, existe $U_i \times_U V$ e pelo axioma (PT2), $\{p_{i_1} : U_i \times_U V \to V\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$. Queremos mostrar que o crivo $[\{p_{i_1}\}_{i\in I}] \subset f^*S(U)$. Considere o diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd}
& U_i \times_U V \arrow[dl, bend right, "p_{i_1}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{i_2}"] & \\
U_i \arrow[dr, bend right, "g_i"'] & & V \arrow[dl, bend left, "f"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Temos que $(U_i, g_i) \in S(U)$, assim pela condição de crivo $(U_i \times_U V, g_i \circ p_{i_1}) \in S(U)$. Como o diagrama comuta, $(U_i \times_U V, f \circ p_{i_2}) \in S(U)$. Assim, $(U_i \times_U V, p_{i_1})$ é um elemento de $\mathcal{C}_{/V}$ cuja composição com f está em $S(U)$, ou seja, $(U_i \times_U V, p_{i_1}) \in f^*S(U)$. Como todo elemento de $[\{p_{i_1}\}_{i\in I}]$ se fatora por p_{i_1} para algum i temos que $[\{p_{i_1}\}_{i\in I}] \subset f^*S(U)$.

Por fim, sejam $S(U) \in J(U)$ e $T(U)$ outro crivo tal que para cada morfismo $f : V \to U$ em $S(U)$, $f^*T(U) \in J(V)$. Queremos mostrar que $T(U) \in J(U)$. Como $S(U) \in J(U)$, existe $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ tal que $[\{f_i\}_{i\in I}] \subset S(U)$. Considere $f_i : U_i \to U$ para algum $i \in I$. Por hipótese, $f_i^*T(U) \in J(U_i)$, logo, existe $\{f_{i,j} : U_{i,j} \to U_i\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ tal que $[\{f_{i,j}\}_{i\in I,j\in J_i}] \subset f_i^*T(U)$. Além disso, temos que o axioma (PT3) implica que:

$$\{f_i \circ f_{i,j} : U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C}).$$

Afirmamos que $[\{f_i \circ f_{i,j}\}_{i\in I,j\in J_i}] \subset T(U)$. De fato, temos $(U_{i,j}, f_{i,j}) \in f_i^*T(U)$ e $f_i^*T(U)$ é o conjunto dos pares cuja composição à esquerda por f_i pertence à $T(U)$, logo, $(U_{i,j}, f_i \circ f_{i,j})$ pertence à $T(U)$. Portanto, J é uma topologia. $\square$

Uma observação importante é que uma cobertura em uma pré-topologia de Grothendieck também sera uma cobertura de crivos na topologia de Grothendieck associada. Dessa forma, ao considerarmos as categorias **CHTop** ou **ProFinSet** equipadas com uma pré-topologia de Grothendieck definida por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, podemos construir uma topologia de Grothendieck associada utilizando as mesmas coberturas.

Ademais, é possível estabelecer uma relação entre os feixes definidos na pré-topologia e os feixes da topologia associada.

Lema 4.1.13. [31, Lema 7.48.1] *Seja $\mathcal{C}$ um site equipado com uma pré-topologia de Grothendieck e considere a topologia de Grothendieck J associada à $\mathcal{C}$ (Lema 4.1.12). Então, um* *pré-feixe $\mathcal{F}$ é um feixe para esta topologia se, e somente se, é um feixe para a pré-topologia.*

Observação 4.1.14. O lema em questão foi formulado com base no Lema 7.48.1, Item (2) da referência [31]. No entanto, é importante ressaltar que a demonstração é de autoria própria, uma vez que os autores empregam uma definição de crivos ligeiramente distinta.

Demonstração. Considere $\mathcal{C}$ um site como o descrito no enunciado e seja $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe. Suponha que $\mathcal{F}$ é um feixe para pré-topologia. Então, dados $U \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ uma cobertura, temos que o diagrama abaixo é um equalizador:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(f_i)"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left, "\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij})"] \arrow[r, shift right, "\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})"'] & \prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \end{tikzcd} .$$

Agora, defina $S(U)$ como sendo crivo de cobertura gerado por $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$. Em seguida, considere o limite $L_{\mathcal{F}} = \lim\limits_{V\in S(U)^{op}} \mathcal{F}(V)$ e, seja $\phi : \mathcal{F}(U) \to L_{\mathcal{F}}$ o mapa canônico da Definição 4.1.11. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(f_i)"] \arrow[d, shift right, "\phi"'] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \\ L_{\mathcal{F}} \arrow[u, shift right, "l_{\mathcal{F}(U)}"'] \arrow[ur, "l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)}"'] & \end{tikzcd} .$$

Observe que:

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}(f_i) = l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)} \circ \phi \Rightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{F}(f_i) = \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}(f_i) \circ l_{\mathcal{F}(U)}\right) \circ \phi \Rightarrow l_{\mathcal{F}(U)} \circ \phi = 1_{\mathcal{F}(U)},$$

pois $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(f_i)$ é monomorfismo, visto que $\left(\mathcal{F}(U), \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(f_i)\right)$ é um equalizador. Com isso, precisamos mostrar que $\phi \circ l_{\mathcal{F}(U)} = 1_{L_{\mathcal{F}}}$. Entretanto, o argumento para esta demonstração não foi compreendido. O raciocínio proposto foi de, a partir da comutatividade do diagrama, obter a equação:

$$l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)} = \prod_{i\in I}\mathcal{F}(f_i) \circ l_{\mathcal{F}(U)} \Rightarrow l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)} = \left(l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)} \circ \phi\right) \circ l_{\mathcal{F}(U)}.$$

Assim, pretendíamos mostrar que $l_{\Pi\mathcal{F}(U_i)}$ é monomorfismo e concluir que $\phi \circ l_{\mathcal{F}(U)} = 1_{L_{\mathcal{F}}}$. No entanto, não conseguimos demonstrar este resultado.

Por outro lado, suponha que $\mathcal{F}$ é um feixe para a topologia J. Sejam $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $S(U)$ um crivo de cobertura. Então, existe uma cobertura $\{f_i : U_i \to U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ tal que o crivo gerado por $\{f_i\}_{i\in I}$ está contido em $S(U)$. Além disso, o mapa canônico ϕ é uma bijeção, ou seja, $\mathcal{F}(U) \cong L_{\mathcal{F}}$. Seja $\left(\text{Eq}\left(\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right), k\right)$ o equalizador do diagrama abaixo:

$$\text{Eq}\left(\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \xrightarrow{k} \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \underset{\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})}{\overset{\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij})}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i \times_U U_j)\ .$$

Dado um morfismo $h : (V, v) \to (W, w)$ em $S(U)$, temos que existem mapas:

$$e_V : \text{Eq}\left(\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \to V \text{ e } e_W : \text{Eq}\left(\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \to W$$

tais que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Eq}\left(\prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \arrow[dl, "e_W"'] \arrow[dr, "e_V"] & \\
\mathcal{F}(W) \arrow[rr, "\mathcal{F}(h)"'] & & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd} .$$

De fato, como todo mapa em $S(U)$ se fatora por algum U_i com $i \in I$, temos que existem únicos mapas $v' : V \to U_i \times_U U_i$ e $w' : W \to U_j \times_U U_j$ tais que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dashed, "\exists! v'"] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[dd, "h"'] & U_i \times_U U_i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U_i \arrow[dr, "f_i"] & \\
& & & U \\
W \arrow[r, dashed, "\exists! w'"] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] & U_j \times_U U_j \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U_j \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, aplicando $\mathcal{F}$ obtemos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Eq}\left(\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \arrow[r, "k"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left, "\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(p^1_{ij})"] \arrow[r, shift right, "\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(p^2_{ij})"'] & \prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i\times_U U_j) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{F}(W) \\
& & & \mathcal{F}(V) \arrow[u, "\mathcal{F}(h)"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}\left(\prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^1_{ij}), \prod\limits_{i,j\in I}\mathcal{F}(\rho^2_{ij})\right) \arrow[r, "k"] \arrow[dr, shift left, "e_{\mathcal{F}(U)}"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \\
& \mathcal{F}(U) = L_{\mathcal{F}} \arrow[u, "l_{\prod \mathcal{F}(U_i)}"'] \arrow[ul, shift left, "l_E"]
\end{tikzcd}$$

Assim, com um argumento similar ao mostrado anteriormente, temos que $\mathcal{F}$ é um feixe para pré-topologia. $\square$

A partir de agora, iremos considerar a categoria $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ de feixes de $\mathcal{C}$ para Set e transformações naturais. Observe que $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ é uma subcategoria plena de $\mathsf{PSh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$.

4.2 Base de um site

Muitas vezes é útil descrever um feixe especificando seu valor apenas em uma classe restrita de objetos. Sendo assim, nesta seção introduziremos o conceito de base de um site e, a partir disto, apresentaremos resultados importantes para equivalência de feixes.

Definição 4.2.1. [21, Definição B.6.1] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com a topologia de Grothendieck. Dizemos que uma subcategoria plena $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ é uma *base* para $\mathcal{C}$ se para todo objeto X de $\mathcal{C}$, existe uma cobertura de crivos $\{f_i : D_i \to X\}_{i\in I}$, em que todo D_i é objeto de $\mathcal{D}$.

Exemplo 4.2.2. Considere a categoria CHTop equipada com uma topologia de Grothendieck cuja cobertura é formada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos. Dado um espaço Hausdorff compacto X existe uma sobrejeção $f : Y \to X$ em que Y é profinito (Corolário 2.4.5). Assim, para todo objeto X em CHTop, existe uma cobertura $\{f : Y \to X\}$ composta por um mapa, em que Y é objeto de $\mathsf{ProFinSet}$. Ademais, como $\mathsf{ProFinSet}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{CHTop}$, concluímos que a categoria dos conjuntos profinitos é uma base para categoria dos espaços Hausdorff compactos. Similarmente, concluímos que $\mathbf{EDSet}$ é uma base para $\mathbf{CHTop}$ (Proposição 2.4.4) e para $\mathbf{ProFinSet}$.

Exemplo 4.2.3. Dado um espaço topológico X, considere o site $\mathcal{O}(X)$ (Exemplo 4.1.8). Temos que uma subcategoria plena $\mathcal{O}_0(X) \subset \mathcal{O}(X)$ é uma base no sentido da definição 4.2.1 se para todo $U \in X$ aberto, existe uma cobertura $\{f_i : U_i \hookrightarrow U\}_{i\in I}$, em que para todo $i \in I$, $U_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{O}_0(X))$. Segue definição da topologia de Grothendieck de $\mathcal{O}(X)$ que $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Logo, todo subconjunto aberto de X pode ser expresso como uma união de conjuntos abertos pertencentes à $\mathcal{O}_0(X)$, ou seja, $\mathcal{O}_0(X)$ é uma base no sentido usual da topologia. Reciprocamente, dada uma base para a topologia de X, essa também será uma base para o site $\mathcal{O}(X)$.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ equipada com uma topologia de Grothendieck e uma base $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, é possível herdar em $\mathcal{D}$ uma topologia proveniente de $\mathcal{C}$.

Proposição 4.2.4. [21, Proposição B.6.3] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck e $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base. Então, existe única topologia de Grothendieck na categoria $\mathcal{D}$ tal que a coleção de morfismos $\{D_i \to D\}_{i\in I}$ em $\mathcal{D}$ é uma cobertura se, e somente se, é uma cobertura em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Digamos que $S_{\mathcal{D}}(D) \subset \mathcal{D}_{/D}$ é um crivo de cobertura em $\mathcal{D}$ se contém uma coleção de morfismos $\{f_i : D_i \to D\}_{i\in I}$ os quais formam uma cobertura de crivos em $\mathcal{C}$. Iremos verificar que os axiomas (T1), (T2) e (T3) da definição 4.1.6 são satisfeitos.

O axioma (T1) segue de imediato, visto que dado $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ o morfismo $\{1_D : D \to D\}$ gera o crivo maximal $\mathcal{C}_{/D}$.

Para verificar o axioma (T2), considere $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura em $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e $f : D' \to D$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Queremos mostrar que o pullback $f^*S_{\mathcal{D}}(D) \subset \mathcal{D}_{/D'}$ é um crivo de cobertura. Seja $S_{\mathcal{C}}(D)$ o crivo gerado por $S_{\mathcal{D}}(D)$. Então, o pullback $f^*S_{\mathcal{C}}(D)$ é um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$. Desta forma, existe uma cobertura de crivos $\{g_i : C_i \to D'\}$ em $\mathcal{C}$ tal que cada composição $f \circ g_i : C_i \to D$ pertence à $S_{\mathcal{C}}(D)$. Como $S_{\mathcal{C}}(D)$ é gerado pelos morfismos de $S_{\mathcal{D}}(D)$, o mapa $f \circ g_i : C_i \to D$ pode ser fatorado por algum $(D_i, g_i') \in S_{\mathcal{D}}(D)$, assim obtemos o diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & D_i \arrow[d, "g_i'"] \\ D' \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{D}$ é base de $\mathcal{C}$, cada C_i admite uma cobertura de crivos $\{g_{i,j} : D_{i,j} \to C_i\}_{j \in J_i}$ em que cada $D_{i,j}$ é objeto de $\mathcal{D}$. Então, as composições $\{g_i \circ g_{i,j} : D'_{i,j} \to C_i \to D'\}_{i \in I, j \in J_i}$ formam uma cobertura de crivos de D' por objetos do crivo $f^* S_{\mathcal{D}}(D)$.

$$\begin{tikzcd}
D_{i,j} \arrow[r, "g_{i,j}"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & D_i \arrow[d, "g_i'"] \\
& D' \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$

Por fim, verificaremos o axioma (T3). Seja $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura. Então, existe uma coleção de morfismos $\{f_i : D_i \to D\}_{i \in I}$ que gera um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$. Seja $T_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo tal que para cada morfismo f em $S_{\mathcal{D}}(D)$ o pullback $f^* S_{\mathcal{D}}(D)$ é um crivo de cobertura. Logo, para cada f_i o pullback $f_i^* T_{\mathcal{D}}(D)$ é um crivo de cobertura e existe uma coleção $\{f_{i,j} : D_{i,j} \to D_i\}_{j \in J_i}$ que gera um crivo de coberturas em $\mathcal{C}$. Além disso, para cada f_i a composição $f_i \circ f_{i,j} : D_{i,j} \to D$ está em $T_{\mathcal{D}}(D)$. Portanto, temos uma coleção $\{f_i \circ f_{i,j} : D_{i,j} \to D\}_{i \in I, j \in J_i}$ em $T_{\mathcal{D}}(D)$ que gera um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$. $\square$

Observação 4.2.5. A partir desta proposição, concluímos que a categoria $\mathbf{EDSet}$ herda a topologia de Grothendieck de $\mathbf{ProFinSet}$ dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos.

Queremos demonstrar que, dado uma categoria $\mathcal{C}$ equipada com uma topologia de Grothendieck definida por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, e uma base $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ com a topologia herdada de $\mathcal{C}$, existe uma equivalência entre as categorias de feixes $\mathbf{Sh}(\mathcal{C})$ e $\mathbf{Sh}(\mathcal{D})$. Para tanto, é necessário definir uma extensão de Kan à direita.

Definição 4.2.6. [5, Definição 3.7.1] Considere dois funtores $\mathbf{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$. A *extensão de Kan à direita* de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$, se existir, é um par $(\mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}, \alpha)$ onde:

(1) $\mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor,

(2) $\alpha : \mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ é uma transformação natural,

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dr, dashed, bend left, "\mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \\
\mathcal{B} \arrow[ur, bend left, "\mathbf{F}"] \arrow[rr, "\mathbf{G}"'] & {} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

satisfazendo a seguinte propriedade universal: se $(\mathbf{M}, \beta)$ é outro par com $\mathbf{M} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $\beta : \mathbf{M} \circ \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ uma transformação natural. Então, existe única transformação natural $\delta : \mathbf{M} \to \mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}\circ\mathbf{F} \arrow[dl, bend right, "\alpha"'] & \\ \mathbf{G} & & \mathbf{M}\circ\mathbf{F} \arrow[ll, "\beta"] \arrow[ul, dashed, bend right, "\delta_F"'] \end{tikzcd}$$

em que δ_F é a transformação natural com:

$$\delta_{\mathbf{F}}(B) = \delta(\mathbf{F}(B)) : \mathbf{M}\circ\mathbf{F}(B) \to \mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}\circ\mathbf{F}(B)$$

para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

Teorema 4.2.7. [5, Teorema 3.7.2] *Sejam $\mathbf{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $\mathbf{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ funtores em que $\mathcal{B}$ é uma categoria pequena e $\mathcal{D}$ é uma categoria completa. Então, a extensão de Kan à direita de $\mathbf{G}$ sobre $\mathbf{F}$ existe e pode ser calculada como:*

$$\mathrm{Ran}_{\mathbf{F}}\mathbf{G}(C) = \lim_{\mathbf{F}(B)\in\mathcal{C}^{op}_{/C}} \mathbf{G}(B).$$

□

Proposição 4.2.8. [21, Proposição B.6.6] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base equipada com a topologia de Grothendieck herdada de $\mathcal{C}$ da proposição 4.2.9 e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe. Então, $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *A restrição $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}} : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ é um feixe;*

(2) *O funtor $\mathcal{F}$ é uma extensão de Kan à direita da sua restrição $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ seja um feixe. Provaremos que as condições (1) e (2) são satisfeitas. Sejam $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}}$ a restrição de $\mathbf{F}$ sobre $\mathcal{D}^{op}$ e $(\widehat{\mathcal{F}}, \alpha)$, com $\widehat{\mathcal{F}} = \mathrm{Ran}_{\mathcal{I}}\mathcal{F}_0$, a extensão de Kan à direita de $\mathcal{F}_0$ sobre o funtor de inclusão $\mathcal{I} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Observe que $\widehat{\mathcal{F}}$ existe, pois estamos trabalhando com categorias pequenas e $\mathbf{Set}$ é uma categoria completa. Além disso, afirmamos que $\widehat{\mathcal{F}}$ avaliado em um objeto C de $\mathcal{C}$, pode ser expresso pela fórmula:

$$\widehat{\mathcal{F}}(C) = \lim_{D\in(\mathcal{D}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{/C})^{op}} \mathcal{F}_0(D).$$

De fato, fixado um objeto $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, podemos considerar o pullback $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C} \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \mathcal{C}_{/C} \arrow[d, "\mathbf{U}"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{I}"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

em que $\mathbf{U} : \mathcal{C}_{/C} \to \mathcal{C}$ é um funtor de esquecimento. Dado $(D, (Y, f)) \in \mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$, temos que

$$\mathbf{U} \circ \rho_1(D, (Y, f)) = \mathcal{I} \circ \rho_2(D, (Y, f)) \Rightarrow \mathcal{I}(D) = \mathbf{U}(Y, f) \Rightarrow Y = D.$$

Além disso, dado um morfismo (g, h) em $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$, temos

$$\mathbf{U} \circ \rho_1(g, h) = \mathcal{I} \circ \rho_2(g, h) \to \mathcal{I}(g) = \mathbf{U}(h) \to g = h.$$

Assim, concluímos que $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$ é moralmente o conjunto dos mapas cujo domínio é um objeto de $\mathcal{D}$ e o contradomínio é o objeto C, logo:

$$\widehat{\mathcal{F}}(C) = \lim_{\mathcal{I}(D) \in \mathcal{C}_{/C}^{op}} \mathcal{F}_0(D) = \lim_{D \in (\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C})^{op}} \mathcal{F}_0(D).$$

Agora, considere o funtor $\mathcal{I} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Temos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, dashed, "\widehat{\mathcal{F}}"] & \\
\mathcal{D} \arrow[u, "\mathcal{I}"] \arrow[r, "\mathcal{F}_0"'] & \text{Set}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}$ é um funtor de $\mathcal{C}$ para **Set** que satisfaz $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$ e $\beta : \mathcal{F} \circ \mathcal{I} \to \mathcal{F}_0$ uma transformação natural definida em cada componente como o morfismo identidade:

$$\beta_D : \mathcal{F} \circ \mathcal{I}(D) = \mathcal{F}_0(D) \to \mathcal{F}_0(D),$$

temos pela propriedade universal da extensão de Kan (Definição 4.2.6), que existe única transformação natural $\delta : \mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{F}}$ satisfazendo $\alpha \circ \delta_{\mathcal{I}} = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{I} \arrow[dl, "\alpha"'] & \\
\mathcal{F}_0 & & \mathcal{F} \circ \mathcal{I} \arrow[ll, "\beta"] \arrow[ul, dashed, "\delta_{\mathcal{I}}"']
\end{tikzcd}$$

Ademais, δ é um isomorfismo quando restrita à $\mathcal{D}$. De fato, dado $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, temos que $\beta_D = 1_{\mathcal{F}_0}$. Logo, $\alpha_D \circ \delta_{\mathcal{I}_D} = 1_{\mathcal{F}_0}$. Por outro lado, como $\mathcal{F} \circ \mathcal{I} = \mathcal{F}_0$, temos que $\delta_{\mathcal{I}_D} \circ \alpha_D = 1_{\widehat{\mathcal{F}}(D)}$. Portanto, α_D e $\delta_{\mathcal{I}_D}$ são inversas em **Set** para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e, consequentemente, são isomorfismos.

Para provar (2), precisamos garantir que δ é um isomorfismo. Seja $S_{\mathcal{C}}(C)$ o crivo gerado por $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$. Como $\mathcal{D}$ é uma base para $\mathcal{C}$, existe uma cobertura de crivos $\{f_i : D_i \to C\}_{i \in I}$ com $D_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, logo $[\{f_i\}_{i \in I}]$ é crivo de cobertura e como $[\{f_i\}_{i \in I}] \subset S_{\mathcal{C}}(C)$, concluímos que $S_{\mathcal{C}}(C)$ também é um crivo de cobertura (Lema 4.1.10).

Assim, o mapa δ_C se encaixa no diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[rr, "\delta_C"] \arrow[d, "\varphi"'] & & \widehat{\mathcal{F}}(C) \arrow[d, "\widehat{\varphi}"] \\
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[rr, "\delta'"] & & \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \widehat{\mathcal{F}}(C')
\end{tikzcd}$$

em que δ' é a componente da transformação natural nos limites. Observe que o mapa vertical à esquerda é, por hipótese de $\mathcal{F}$ ser feixe, uma bijeção e o mapa vertical à direita também é, visto que $\widehat{\mathcal{F}}$ é uma extensão de Kan. Queremos mostrar que δ_C é uma bijeção, para isso verificaremos que δ' é bijetiva.

Considere $\{f_i : D_i \to C\}_{i \in I}$ uma cobertura de crivos da base, temos que cada mapa $(D_i, f_i) \in S_{\mathcal{C}}(C)$. Como a topologia de Grothendieck é dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, temos

$$f : \coprod_{i \in I} D_i \to C$$

é uma sobrejeção. Aplicando $\mathcal{F}$, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(C) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, tail, "\mathcal{F}(f)"] & \\
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[rr, "{}^{l}\coprod_{D_i}"'] & & \mathcal{F}(\coprod_{i \in I} D_i)
\end{tikzcd}$$

Pela condição de feixe, φ é bijetivo e $\mathcal{F}(f)$ é injetivo, logo $l_{\coprod D_i}$ também é injetivo. Além disso, como $\coprod_{i\in I} D_i$ é um objeto da base, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{C'\in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, tail, "l_{\coprod D_i}"'] & \lim\limits_{C'\in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \widehat{\mathcal{F}}(C') \arrow[d, "\widehat{l}_{\coprod D_i}"] \\
\mathcal{F}(\coprod_{i\in I} D_i) \arrow[r, "\delta_{\coprod D_i}"'] & \widehat{\mathcal{F}}(\coprod_{i\in I} D_i)
\end{tikzcd}$$

Temos que $\delta_{\coprod D_i}$ é bijetiva pois δ é isomorfismo quando restrita a base. Além disso, vimos que $l_{\coprod D_i}$ é injetivo, com isso, concluímos que δ' é monomorfismo. Para concluir que δ' é um isomorfismo, precisamos mostrar que é epimorfismo. No entanto, não conseguimos entender o argumento de Lurie (Referência [21], Proposição B.6.6). Portanto, assumiremos que δ é um epimorfismo e, concluiremos que δ_C é isomorfismo.

Agora, verificaremos a condição (1). Sejam $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura em D. Queremos mostrar que o mapa canônico $\rho : \mathcal{F}_0(D) \to \lim\limits_{D'\in S(D)^{op}} \mathcal{F}_0(D')$ é bijetivo. Seja $S_{\mathcal{C}}(D) \subset \mathcal{C}_{/D}$ o crivo gerado por $S_{\mathcal{D}}(D)$. Nossa hipótese de que $S_{\mathcal{D}}(D)$ é cobertura para topologia de Grothendieck da Proposição 4.2.4 garante que $S_{\mathcal{C}}(D)$ é cobertura para topologia de Grothendieck original em $\mathcal{C}$. Assim, o mapa ρ fatora como:

$$\mathcal{F}_0(D) = \mathcal{F}(D) \xrightarrow{\rho'} \lim_{C'\in S_{\mathcal{C}}(D)^{op}} \mathcal{F}(C') \xrightarrow{\rho''} \lim_{D'\in S_{\mathcal{D}}(D)^{op}} \mathcal{F}_0(D')$$

em que ρ' é uma bijeção, dado que por hipótese $\mathcal{F}$ é um feixe, e ρ'' é uma bijeção visto que $\mathcal{F}$ é uma extensão de Kan à direita da sua restrição à $\mathcal{D}^{op}$.

Por fim, suponha que as condições (1) e (2) são satisfeitas. Queremos mostrar que $\mathcal{F}$ é um feixe em $\mathcal{C}$. Fixe um crivo de cobertura $S_{\mathcal{C}}(C) \subset \mathcal{C}_{/C}$, considere $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$ e seja $S_{\mathcal{D}}(C) = \mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} S_{\mathcal{C}}(C)$. Queremos mostrar que o mapa horizontal superior do diagrama a seguir é bijetivo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \lim\limits_{C'\in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[d] \\
\lim\limits_{D\in(\mathcal{D}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{/C})^{op}} \mathcal{F}(D) \arrow[r] & \lim\limits_{D\in S_{\mathcal{D}}(C)^{op}} \mathcal{F}(D)
\end{tikzcd}$$

Obtemos por (2) que os dois mapas verticais são bijetivos. Além disso, por (1) e pelo fato de $\mathcal{D}$ ser uma base de $\mathcal{C}$, temos que o mapa horizontal inferior também é bijetivo. Portanto, concluímos que $\mathcal{F}(C) \to \lim_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C')$ é bijetivo. $\square$

Corolário 4.2.9. [21, Proposição B.6.4] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck dada por coleções de mapas juntamente sobrejetivos e $\mathcal{D}$ uma base de $\mathcal{C}$. Assuma $\mathcal{D}$ equipada com a topologia de Grothendieck herdada de $\mathcal{C}$ da proposição 4.2.4. Então, podemos induzir uma equivalência de categorias:*

$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) \cong \mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set}).$$

Demonstração. Dado um feixe $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, temos que a restrição $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{D}^{op}}$ é um feixe (Proposição 4.2.8), assim, definimos o funtor:

$$\begin{array}{rccc} (-)\mid_{\mathcal{D}^{op}}: & \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) & \to & \mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set}) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}\mid_{\mathcal{D}^{op}} \end{array}.$$

Ademais, considere o funtor de inclusão $\iota : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Este, induz um funtor entre as categorias de feixes de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ran}_\iota(-): & \mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set}) & \to & \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) \\ & \mathcal{F}_0 & \mapsto & \mathrm{Ran}_\iota \mathcal{F}_0 \end{array}.$$

Compondo os dois funtores, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) & \xrightarrow{(-)\mid_{\mathcal{D}^{op}}} & \mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set}) & \xrightarrow{\mathrm{Ran}_\iota(-)} & \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}\mid_{\mathcal{D}^{op}} & \mapsto & \mathrm{Ran}_\iota(\mathcal{F}\mid_{\mathcal{D}^{op}}) \end{array}.$$

Como $\mathcal{F} \cong \mathrm{Ran}_\iota(\mathcal{F}\mid_{\mathcal{D}^{op}})$ (Proposição 4.2.8), temos que $\mathrm{Ran}_\iota(-) \circ (-)\mid_{\mathcal{D}^{op}} \cong 1_{\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})}$. Analogamente, $(-)\mid_{\mathcal{D}^{op}} \circ \mathrm{Ran}_\iota(-) \cong 1_{\mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set})}$. Portanto, $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}) \cong \mathsf{Sh}(\mathcal{D}, \mathsf{Set})$ (Proposição 1.2.15). $\square$

4.3 Aspectos complementares sobre feixes

Nesta seção, discutiremos conceitos adicionais sobre feixes, relevantes para matemática condensada. Inicialmente, apresentaremos a definição de topologia de Grothendieck coerente e, posteriormente, veremos a condição de feixe para um site $\mathcal{C}$ equipado com uma topologia coerente. Por fim, abordaremos o conceito de feixificação de um pré-feixe e veremos alguns resultados complementares.

Um *epimorfismo efetivo* em uma categoria $\mathcal{C}$ é um morfismo $f : X \to Y$ tal que o pullback $X \times_Y X$ é definido e (Y, f) é o coequalizador dos mapas ρ_1 e ρ_2 abaixo:

$$X \times_Y X \underset{\rho_2}{\overset{\rho_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

Definição 4.3.1. [21, Definição A.1.3] Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é *regular* se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $\mathcal{C}$ admite limites finitos;

(2) Todo morfismo $f : X \to Z$ em $\mathcal{C}$ pode ser escrito como $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ em que g é um epimorfismo efetivo e h é um monomorfismo;

(3) A coleção de epimorfismos efetivos em $\mathcal{C}$ é fechada para pullbacks. Isto é, dado um diagrama de pullback:

$$\begin{tikzcd} X' \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

em que f é um epimorfismo efetivo. Então, o morfismo f' também é.

Definição 4.3.2. [21, Definição A.3.2] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria que admite limites finitos. Dizemos que $\mathcal{C}$ é extensiva se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\mathcal{C}$ possui coprodutos finitos;

(2) Coprodutos em $\mathcal{C}$ são disjuntos;

(3) Para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o funtor pullback:

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathcal{C}_{/Y} & \to & \mathcal{C}_{/X} \\ & U & \mapsto & U \times_Y X \end{array}$$

preserva coprodutos finitos.

Observação 4.3.3. O conceito de *coproduto disjunto* é uma generalização para categorias arbitrárias da união disjunta na categoria **Set**. Sejam $C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ em que $\mathcal{C}$ é uma categoria arbitrária. Então o coproduto $C \coprod D$ é disjunto se:

(1) Os mapas $\iota_C : C \to C \coprod D$ e $\iota_D : D \to C \coprod D$ são monomorfismos;

(2) A interseção de C e D em $C \coprod D$ é um objeto inicial.

Observação 4.3.4. Para mais informações sobre categorias regulares e extensivas, veja Referência [21], Apêndice A.

Dizemos que uma categoria é *coerente* se é regular e extensiva. Agora, considere uma categoria coerente $\mathcal{C}$. Um crivo em um objeto X é um *crivo de cobertura coerente* se contem uma coleção finita de morfismos $\{X_i \to X\}_{i\in I}$ tal que o mapa induzido $\coprod_{i\in I} X_i \to X$ é um epimorfismo efetivo. Além disso, a coleção de crivos de cobertura coerente determina uma topologia de Grothendieck em $\mathcal{C}$ chamada de *topologia coerente* (veja Proposição B.5.2 em [21]).

Exemplo 4.3.5. As categorias CHTop e $\mathsf{ProFinSet}$ são coerentes (veja Exemplo 1.2.23 em [22]). Portanto, podemos definir a topologia coerente nessas categorias. Além disso, nestes casos, cada sobrejeção contínua é um epimorfismo efetivo, visto que o diagrama:

$$S \times_K S \underset{\rho_2}{\overset{\rho_1}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{q} K$$

com q sobrejetivo é um coequalizador (similar a demonstração da Teorema 2.4.6). Por outro lado, todo epimorfismo de espaços Hausdorff compactos é sobrejetivo. Então, a topologia coerente é exatamente a topologia associada à pré-topologia do Exemplo 4.1.3.

Proposição 4.3.6. [21, Proposição B.5.5] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia coerente. Então, um pré-feixe $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *O funtor preserva produtos finitos, ou seja, para toda coleção finita de objetos $\{X_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$, o mapa canônico:*

$$\mathcal{F}\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(X_i)$$

é bijetivo.

(2) *Para todo epimorfismo efetivo $Y \to X$ em $\mathcal{C}$, o diagrama de conjuntos:*

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \rightrightarrows \mathcal{F}(Y \times_X Y)$$

é um equalizador. □

Agora, faremos uma breve introdução à feixificação. Frequentemente, é vantajoso converter os dados contidos em um pré-feixe em um feixe. Assim, existe uma maneira ótima de realizar essa conversão, que envolve a transformação de um pré-feixe $\mathcal{F}$ em um feixe, chamado de feixificado de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{F}^{sh}$. O feixificado, junto de uma transformação natural, satisfazendo uma propriedade universal, formam uma feixificação.

Definição 4.3.7. [31, Seção 7.10] Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}$ um pré-feixe. A feixificação de $\mathcal{F}$ é o par $(\mathcal{F}^{sh}, \varsigma)$ em que $\mathcal{F}^{sh} : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}$ é um feixe e ς é uma transformação natural, que satisfaz a seguinte propriedade universal: *dados* $\mathcal{G} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ *um feixe e* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *uma transformação natural, existe única transformação natural* $\overline{\alpha} : \mathcal{F}^{sh} \to \mathcal{G}$ *tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varsigma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F}^{sh} \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Observação 4.3.8. A feixificação $\mathcal{F}^{sh}$ de um pré-feixe $\mathcal{F}$ sempre existe. Para mais detalhes veja [31, Seção 7.10].

Dado um site $\mathcal{C}$, podemos definir um funtor de feixificação que leva universalmente pré-feixes em feixes:

$$\begin{array}{rccc} (-)^{sh}: & \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) & \to & \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \\ & \mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} & \mapsto & \mathcal{F}^{sh} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} \end{array}.$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.9. [31, Seção 7.10] *Seja* $\mathcal{C}$ *um site e considere o funtor inclusão*

$$\iota : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}).$$

Então, o funtor feixificação

$$(-)^{sh} : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

é adjunto à esquerda de ι*.* □

Lema 4.3.10. [31, Lema 7.10.14] *O funtor* $(-)^{sh} : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ *é exato.* □

Capítulo 5

Matemática Condensada

A matemática condensada visa fornecer uma estrutura mais conveniente para tratar objetos algébricos equipados com uma topologia, como grupos abelianos topológicos ou espaços vetoriais topológicos. Neste capítulo iremos abordar os conceitos e resultados iniciais da matemática condensada e teremos como principal referência os Capítulos 1, 2 e 4 das notas de aula de Peter Scholze (referencia [30]).

5.1 Conjuntos condensados

Objetos condensados são feixes de $\mathsf{ProFinSet}$ para $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria como Set, Ring, Grp, AbGrp, etc. Nesta seção iremos introduzir tais objetos e apresentar algumas propriedades de conjuntos condensados, dentre estas, destacamos a Proposição 5.1.18.

A definição de um objeto condensado apresenta problemas de teoria dos conjuntos, visto que a categoria de conjuntos profinitos é grande, portanto, não é uma boa ideia considerar funtores definidos em todos estes. Para evitar problemas com classes, iremos fixar um cardinal λ e buscaremos compreender apenas objetos com cardinalidade no máximo λ. Seja κ o limite da sequência:

$$\lambda < 2^{\lambda} < 2^{2^{\lambda}} < \cdots$$

e seja κ-$\mathsf{ProFinSet}$ o site dos conjuntos profinitos de tamanho menor do que κ com coberturas dadas por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivas.

Observação 5.1.1. A partir de agora, sempre que mencionarmos conjuntos profinitos estaremos nos referindo a conjuntos profinitos κ-pequenos.

Definição 5.1.2. [30, Definição 1.2] Um *conjunto, grupo, anel, ..., κ-condensado* é um feixe:

$$\begin{array}{rrcl} T: & \kappa\text{-}\mathbf{ProFinSet}^{op} & \to & \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ring}, \ldots \\ & S & \mapsto & T(S) \end{array}.$$

Equivalentemente, segundo Scholze [30], um *conjunto, grupo, anel, ..., κ-condensado* é um pré-feixe $T : \kappa\text{-}\mathbf{ProFinSet}^{op} \to \mathbf{Set}$ satisfazendo:

(1) $T(\varnothing) = *$, onde $*$ é um objeto terminal;

(2) Para todo par de conjuntos profinitos S_1 e S_2, o mapa natural:

$$T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$$

é uma bijeção;

(3) Para toda sobrejeção $S' \to S$ entre profinitos com o pullback $S' \times_S S'$ e suas projeções ρ_1 e ρ_2, o mapa natural:

$$T(S) \to \mathrm{Eq}(T(\rho_1), T(\rho_2)) = \{x \in T(S') \mid T(\rho_1)(x) = T(\rho_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

é uma bijeção.

Ademais, denotaremos por $\mathbf{Cond}(\mathcal{C})$ a categoria de objetos κ-condensados e transformações naturais, em que $\mathcal{C}$ pode ser a categoria dos conjuntos, grupos, anéis, etc.

Observação 5.1.3. Podemos verificar a naturalidade dos mapas da condição (2) da definição de conjuntos condensados. Sejam S_1 e S_2 conjuntos profinitos, temos naturalmente o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & S_2 \arrow[d, hook, "\iota_2"] \\ S_1 \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & S_1 \sqcup S_2 \end{tikzcd}.$$

Assim, aplicando um funtor $T : \mathbf{ProFinSet}^{op} \to \mathbf{Set}$, obtemos:

$$\begin{tikzcd} T(S_1) \times T(S_2) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & T(S_2) \\ T(S_1) & T(S_1 \sqcup S_2) \arrow[l, "T(\iota_1)"] \arrow[u, "T(\iota_2)"'] \arrow[ul, dashed, "\exists! f"'] \end{tikzcd}.$$

Segue da propriedade universal do produto (Definição 1.1.1) que existe único f que comuta o diagrama.

Observação 5.1.4. Observe que a condição (3) é apenas uma reformulação do diagrama do equalizador da Proposição 4.3.6.

Além de κ-**ProFinSet**, iremos abordar dois diferentes sites cujas categorias de feixes são equivalentes à categoria de conjuntos condensados. Assim, teremos a possibilidade de trabalhar com a categoria mais conveniente, de acordo com as circunstâncias.

Proposição 5.1.5. [30, Proposições 2.3 e 2.7] *A categoria de conjuntos condensados é equivalente às categorias* **Sh(**κ**-CHTop, Set)** *e* **Sh(**κ**-EDSet, Set)***, em que os sites* κ-**CHTop** *e* κ-**EDSet** *são equipados com a topologia de Grothendieck dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos.*

Demonstração. O site κ-**EDSet** é uma base para κ-**ProFinSet**, assim como este é uma base para κ-**CHTop** (Exemplo 4.2.2), logo, temos as seguinte equivalência de feixes (Proposição 4.2.9):

$$\mathbf{Sh}(\kappa\text{-}\mathbf{CHTop},\mathbf{Set}) \cong \mathbf{Sh}(\kappa\text{-}\mathbf{ProFinSet},\, \mathbf{Set}) = \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \cong \mathbf{Sh}(\kappa\text{-}\mathbf{EDSet},\, \mathbf{Set}).$$

□

Observação 5.1.6. Temos que **Cond(Set)** $\cong$ **Sh(**κ**-EDSet, Set)**, mas, como κ-**EDSet** não é fechada para pullbacks, não faz sentido considerar feixes com a pré-topologia de Grothendieck. Contudo, todo conjunto profinito S é um coequalizador de um diagrama da forma:

$$\tilde{\tilde{S}} \underset{\tilde{\rho}_2}{\overset{\tilde{\rho}_1}{\rightrightarrows}} \tilde{S} \xrightarrow{f} S\ ,$$

em que $\tilde{S}$ e $\tilde{\tilde{S}}$ são conjuntos extremamente desconexos (Proposição 2.1.4). Assim, o valor de $T(S)$ é determinado como o equalizador dos dois mapas $T(\tilde{S}) \to T(\tilde{\tilde{S}})$.

Corolário 5.1.7. [30, p. 12] *A categoria de conjuntos condensados é equivalente à categoria de pré-feixes* $T : \kappa\text{-}\mathbf{EDSet}^{op} \to \mathbf{Set}$*, satisfazendo as condições* (1) *e* (2) *da Definição 5.1.2.*

Demonstração. Observe que o análogo à condição (3) de conjuntos condensados (Definição 5.1.2) foi omitido. Isto acontece pois tal condição é automática para conjuntos extremamente desconexos. De fato, seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção entre conjuntos extremamente desconexos. Então, existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$ (Proposição 2.2.6). Logo, aplicando um funtor contravariante T, obtemos:

$$T(g) \circ T(f) = 1_{T(S)}$$

e o mapa $T(f)$ é injetivo. Além disso,

$$\mathrm{Im}(T(f)) \subset \mathrm{Eq}(T(\rho_1), T(\rho_2)) = \{x \in T(S') | T(\rho_1)(x) = T(\rho_2)(x) \in T(S' \times_X S')\},$$

pois $f \circ \rho_1 = f \circ \rho_2$. Veremos que $\mathrm{Eq}(T(\rho_1), T(\rho_2)) \subset \mathrm{Im}(T(f))$ e todo funtor contravariante entre conjuntos extremamente desconexo satisfaz a condição (3) automaticamente.

Seja $x \in \mathrm{Eq}(T(\rho_1), T(\rho_2))$ e considere o mapa $(g \circ f) \times_S 1_{S'} : S' \times_S S' \to S' \times_S S'$. Temos que:

$$\begin{array}{rcl} T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(\rho_1)(x) & = & T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(\rho_2)(x) \\ & \Downarrow & \\ T(\rho_1 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x) & = & T(\rho_2 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x) \\ & \Downarrow & \\ T(g \circ f)(x) & = & T(1_{S'})(x). \end{array}$$

Assim, $T(f)(T(g)(x)) = x$, ou seja, $x \in \mathrm{Im}(T(f))$. Portanto $T(S)$ está em bijeção com $\mathrm{Eq}(T(\rho_1), T(\rho_2))$. □

Agora, veremos um exemplo que apresenta a tradução chave de estruturas topológicas para estruturas condensadas:

Exemplo 5.1.8. [30, Exemplo 1.5] Seja X um espaço topológico qualquer. Existe um conjunto condensado $\underline{X}$ associado, definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rrcl} \underline{X}: & \kappa\text{-}\mathbf{ProFinSet}^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & S & \mapsto & \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(S, X) \\ & S_1 \xrightarrow{g} S_2 & \mapsto & \underline{X}(S_2) \xrightarrow{(-)\circ g} \underline{X}(S_1) \end{array}$$

É evidente que $\underline{X}$ é um funtor contravariante. Assim, iremos verificar que esse satisfaz as condições de conjunto condensado. Primeiro, observe que $\underline{X}(\varnothing) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\varnothing, X)$, mas só existe uma função de $\varnothing$ para X, logo, $\#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\varnothing, X) = 1$. Assim, temos que $\underline{X} = *$ é um objeto terminal.

Agora, considere S_1 e S_2 dois conjuntos profinitos κ-pequenos. Queremos mostrar que $\underline{T}(S_1 \sqcup S_2) \to \underline{X}(S_1) \times \underline{X}(S_2)$ é bijeção. Dado $f \in \underline{X}(S_1 \sqcup S_2)$, podemos definir $f_1 = f|_{S_1}$ e $f_2 = f|_{S_2}$. Com isso, definimos:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \underline{X}(S_1 \sqcup S_2) & \to & \underline{X}(S_1) \times \underline{X}(S_2) \\ & f & \mapsto & (f_1, f_2) \end{array}.$$

Iremos mostrar que φ é uma bijeção. Dado $(g_1, g_2) \in \underline{X}(S_1) \times \underline{X}(S_2)$, existe $h \in \underline{X}(S_1 \sqcup S_2)$

tal que:

$$g(s) = \begin{cases} g_1(s), & s \in S_1 \\ g_2(s), & s \in S_2 \end{cases}$$

Logo, φ é sobrejetiva.

Sejam $f, g \in \underline{X}(S_1 \sqcup S_2)$ tais que $f \neq g$. Então, existe $s \in S$ tal que $f(s) \neq g(s)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $s \in S_1$, assim, por definição $f_1(s) \neq g_1(s)$, logo, $(f_1, f_2)(s) \neq (g_1, g_2)(s)$, ou seja, $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Assim, φ e injetiva e, portanto, bijetiva. Além disso, temos que φ comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{X}(S_1 \sqcup S_2) \arrow[rr, "\underline{X}(\iota_1)"] \arrow[d, "\underline{X}(\iota_2)"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & \underline{X}(S_1) \\ \underline{X}(S_2) & & \underline{X}(S_1) \times \underline{X}(S_2) \arrow[ll, "\pi_2"] \arrow[u, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

e como existe único morfismo que comuta o diagrama (Definição 1.1.1) temos que o morfismo natural é uma bijeção.

Por fim, iremos mostrar a condição (3) de conjuntos condensados. Seja $g : S' \to S$ uma sobrejeção entre profinitos κ-pequenos e considere o pullback $S' \times_S S'$ e suas projeções ρ_1 e ρ_2. Aplicando o funtor $\underline{X}$ obtemos:

$$\begin{tikzcd} \underline{X}(S) \arrow[r, "(-)\circ g"] & \underline{X}(S') \arrow[r, shift left, "(-)\circ\rho_1"] \arrow[r, shift right, "(-)\circ\rho_2"'] & \underline{X}(S' \times_S S') \end{tikzcd} .$$

Como g é um epimorfismo, temos que $(-) \circ g$ é um monomorfismo. Além disso, segue da comutatividade do pullback que:

$$(-) \circ g \circ \rho_1 = (-) \circ g \circ \rho_2.$$

No entanto, precisamos mostrar que $(\underline{X}(S), (-) \circ g)$ satisfaz a propriedade universal do equalizador (Definição 1.1.3). Sejam M um conjunto e

$$\begin{array}{rccl} f: & M & \to & \underline{X}(S') \\ & m & \mapsto & (f_m : S' \to T) \end{array}$$

um morfismo tais que $f \circ g \circ \rho_1 = f \circ g \circ \rho_2$. Dado $f_m \in \underline{X}(S')$, defina $h_m : S \to T$ tal que $h_m \circ g = f_m$. Como qualquer sobrejeção $g : S' \to S$ entre espaços Hausdorff compacto é um mapa quociente (Proposição 2.1.4), segue que se $S' \xrightarrow{g} S \xrightarrow{h_m} T$ é contínuo, $S \xrightarrow{h_m} T$ também é. Com isso, podemos definir $h : M \to \underline{X}(S)$ com $h(m) = h_m$ tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X}(S) \arrow[r, "(-)\circ g"] & \underline{X}(S') \arrow[r, shift left, "(-)\circ\rho_1"] \arrow[r, shift right, "(-)\circ\rho_2"'] & \underline{X}(S' \times_S S') \\
& M \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Ademais, a unicidade de h segue do fato de $(-) \circ g$ ser um monomorfismo. Logo, temos pela unicidade de limite (Proposição 1.1.8) que:

$$\underline{X}(S) \to \mathrm{Eq}(\underline{X}(\rho_1), \underline{X}(\rho_2))$$

é uma bijeção. Portanto, $\underline{X}$ é um conjunto condensado.

De modo geral, se X é um anel, grupo, ... topológico. Então, $\underline{X}$ é um anel, grupo, ... condensado.

Lema 5.1.9. [30, p. 24] *Sejam A e B espaços, grupos, ... topológicos. Então:*

$$\underline{A \times B} \cong \underline{A} \times \underline{B},$$

ou seja, para todo S profinito, $\underline{A \times B}(S) \cong \underline{A}(S) \times \underline{B}(S)$.

Demonstração. Dado $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{ProFinSet})$, mostraremos que $\underline{A \times B}(S) \cong \underline{A}(S) \times \underline{B}(S)$. Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A \times B)$. Então, podemos representá-la como:

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \to & A \times B \\ & s & \mapsto & (f_1(s), f_2(s)). \end{array}$$

Assim, defina:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A \times B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, B) \\ & f & \mapsto & (f_1, f_2). \end{array}$$

Afirmamos, que ϕ e bijetiva. De fato, dado um par de funções contínuas $f_1 : S \to A$ e $f_2 : S \to B$, existe $f : S \to A \times B$, definida como $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$. Observe que f é contínua, pois dado um aberto $U \subset A \times B$, temos que $U = \bigcup_{i \in I} V_i \times W_i$ em que $V_i \subset A$ e $W_i \subset B$ para todo $i \in I$. Logo,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i \times W_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i \times W_i) = \bigcup_{i \in I} \left(f_1^{-1}(V_i) \times f_2^{-1}(W_i)\right),$$

que, pela continuidade de f_1 e f_2, é aberto. Logo, ϕ é sobrejetiva.

Agora, sejam $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A \times B)$, tais que $f \neq g$. Então, existe $s \in S$ tal que $f(s) \neq g(s)$. Assuma, sem perda de generalidade, que $f_1(s) \neq g_1(s)$. Então:

$$\phi(f)(s) = (f_1(s), f_2(s)) \neq (g_1(s), g_2(s)) = \phi(g)(s).$$

Logo, ϕ é injetiva e, portanto, para todo S:

$$\underline{A \times B}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A \times B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, B) = \underline{A}(S) \times \underline{B}(S).$$

□

Definição 5.1.10. [30, p. 7] Seja T um conjunto condensado. Definimos o *conjunto subjacente* de T como sendo o conjunto $T(*)$.

Considere um espaço topológico X e o conjunto condensado $\underline{X}$ associado a esse. Temos que o conjunto subjacente de $\underline{X}$ é:

$$\underline{X}(*) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(*, X) = X.$$

Além disso, sejam S um conjunto profinito e $\gamma : \underline{S} \to T$ uma transformação natural. Então, obtemos um mapa de conjuntos $\gamma_* : \underline{S}(*) \to T(*)$, em que $\underline{S}(*) = S$. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 5.1.11. [30, p. 8] Seja T um conjunto condensado e considere o conjunto subjacente $T(*)$. Definimos a topologia em $T(*)$ como sendo a topologia quociente para o mapa:

$$\bigsqcup_{\substack{S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{ProFinSet}) \\ \gamma : \underline{S} \to T}} S \to T(*).$$

Denotaremos este espaço topológico por $T(*)_{top}$.

Observação 5.1.12. Dizemos que um espaço topológico X é *κ-compactamente gerado* se esse estiver equipado com a topologia quociente de $\bigsqcup_{S \to X} S \to X$ em que S percorre todos conjuntos profinitos. Com isso, segue que $T(*)_{top}$ é κ-compactamente gerado e, portanto, um mapa de $T(*)_{top} \to X$ é contínuo se, e somente se, é contínua a composição $S \to T(*)_{top} \to X$ em que o mapa $S \to T(*)_{top}$ provêm de uma transformação natural $\gamma : \underline{S} \to T$ avaliada na componente $*$.

Observação 5.1.13. Para simplificar nossa abordagem, adotaremos a convenção de que todo espaço topológico é um espaço topológico κ-compactamente gerado.

Observação 5.1.14. No Exemplo 5.1.8, mostramos que é possível estabelecer uma relação entre espaços topológicos e conjuntos condensados. A partir dessa correspondências, podemos definir um funtor:

$$\begin{array}{rccc} (\underline{-}): & \kappa\text{-}\mathbf{CGTop} & \to & \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \\ & X & \mapsto & \underline{X} \\ & X_1 \xrightarrow{f} X_2 & \mapsto & \underline{X_1} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{X_2} \end{array},$$

em que $\underline{f}_S : \underline{X_1}(S) \to \underline{X_2}(S)$ é tal que $\underline{f}_S(g) = g \circ f$.

O funtor descrito acima envolve mais informações sobre a relação entre espaços topológicos e conjuntos condensados, como mostraremos nos próximos resultados.

Lema 5.1.15. [3, p. 75] *Sejam X um espaço topológico, T um conjunto condensado e $\alpha : T \to \underline{X}$ uma transformação natural. Então, o mapa $\alpha_* : T(*)_{top} \to X$ é contínuo.*

Demonstração. Sejam S um conjunto profinito e $g : * \to S$ um mapa. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} T(*) \arrow[r, "\alpha_*"] & \underline{X}(*) = X \\ T(S) \arrow[u, "T(g)"] \arrow[r, "\alpha_S"'] & \underline{X}(S) \arrow[u, "\underline{X}(g)"'] \end{tikzcd}$$

Assim, para todo $t \in T(S)$ temos:

$$\alpha_* \circ T(g)(t) = \underline{X}(g) \circ \alpha_S(t) = \alpha_S(t)(g) \in \underline{X}(*).$$

Observe que $\alpha_S(t)(-)$ é contínua, pois pertence à $\underline{X}(*) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(*, X)$, assim, $\alpha_* \circ T(-)(t)$ também é contínua, pois o diagrama comuta. Logo, se mostrarmos que $T(-)(t) : S \to T(*)$ é $\gamma_{(S)_*}$ para alguma transformação natural $\gamma_{(S)} : \underline{S} \to T$, provaremos que α_* é contínua (Observação 5.1.12). Desta forma, fixado $t \in T(S)$, defina:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{(S)_{S'}} = T(-)(t): \quad \underline{S}(S') & \to & T(S') \\ s & \mapsto & T(s)(t). \end{array}$$

Sejam $h : S' \to S''$ e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{S}(S') \arrow[r, "\gamma_{(S)_{S'}}"] & T(S') \\ \underline{S}(S'') \arrow[u, "\underline{S}(h)"] \arrow[r, "\gamma_{(S)_{S''}}"'] & T(S'') \arrow[u, "T(h)"'] \end{tikzcd}$$

Dado $f : S'' \to S$, temos:

$$\gamma_{(S)_{S'}} \circ \underline{S}(h)(f) = \gamma_{(S)_{S'}}(f \circ h) = T(f \circ h)(t) = T(h) \circ T(f)(t),$$

mas, $T(h) \circ \gamma_{(S)_{S''}}(f) = T(h) \circ T(f)(t)$. Logo, $\gamma_{(S)_{S'}} \circ \underline{S}(s) = T(s) \circ \gamma_{(S)_{S''}}$, ou seja, o diagrama comuta. Portanto, $\gamma_{(S)}$ é uma transformação natural e $\gamma_{(S)_*} = T(-)(t)$. $\square$

Lema 5.1.16. [3, p. 75] *Dado um mapa contínuo $f : T(*)_{top} \to X$, existe uma transformação natural $\zeta_{(f)} : T \to \underline{X}$ tal que $\zeta_{(f)_*} = f$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{CGTop}}(T(*)_{top}, X)$ um mapa continuo. Dado $t \in T(S)$ existe uma transformação natural:

$$\tau_{(S)}(t) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{ProFinSet}}(-, S) = \underline{S} \to T$$

tal que $\tau_{(S)_*}(t) = T(-)(t) : S = \underline{S}(*) \to T(*)$ (Observação 1.0.2). Agora considere

$$\zeta_{(f)} = \{\zeta_{(f)_S}\}_{S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{ProFinSet})}$$

tal que $\zeta_{(f)_S} : T(S) \to \underline{X}(S)$ é definida da seguinte maneira:

$$\zeta_{(f)_S}(t) = f \circ \tau_{(S)_*}(t) : \underline{S}(*) \to \underline{X}(*) = X.$$

Iremos mostra que $\zeta_{(f)}$ é uma transformação natural e $\zeta_{(f)_*} = f$. Seja $g : S \to S'$ e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T(S) \arrow[r, "\zeta_{(f)_S}"] & \underline{X}(S) \\
T(S') \arrow[u, "T(g)"] \arrow[r, "\zeta_{(f)_{S'}}"'] & \underline{X}(S') \arrow[u, "\underline{X}(g)"']
\end{tikzcd}$$

Para $x \in T(S')$ temos:

$$\zeta_{(f)_S}(T(g)(x)) = f \circ \tau_{(S)_*}(T(g)(x)) = f \circ T(-)(T(g)(x)).$$

Assim, se $s \in \underline{S}(*)$, segue que:

$$\zeta_{(f)_S}(T(g)(x))(s) = f \circ T(s)(T(g)(x)).$$

Por outro lado,

$$(\underline{X}(g) \circ \zeta_{(f)_{S'}})(x) = (\zeta_{(f)_{S'}}(x)) \circ g$$

Logo,

$$\begin{aligned}((\zeta_{(f)_{S'}}(x)) \circ g)(s) &= \zeta_{(f)_{S'}}(x)(g(s)) \\ &= f \circ \tau_{(S')_*}(x)(g(s)) \\ &= f \circ T(-)(x)(g(s)) \\ &= f \circ T(g(s))(x) \\ &= f \circ T(s)(T(g)(x)).\end{aligned}$$

Com isso, temos que $\zeta_{(f)_S} \circ T(g) = \underline{X}(g) \circ \zeta_{(f)_{S'}}$ para todo S, S' profinitos e $g : S \to S'$. Então, $\zeta_{(f)}$ é uma transformação natural. Por fim, temos que para todo $x \in T(*)$, $\zeta_{(f)_*} : T(*) \to \underline{X}(*)$ satisfaz $\zeta_{(f)_*}(x) = f \circ \tau_{(X)_*}(x)$, mas,

$$\begin{aligned}\tau_{(*)_*}(t) : \quad \underline{*}(*) &\to T(\{*\}) \\ 1_* &\mapsto T(1_*)(x) = x,\end{aligned}$$

pois $T(1_*) = 1_{T(*)}$. Portanto, $f \circ \tau_{(*)_*}(x) = f(x)$.

□

Antes de enunciar o próximo resultado, é importante lembrar que adotamos a convenção de que todo espaço topológico será considerado κ-compactamente gerado (Observação 5.1.13).

Proposição 5.1.17. [30, Proposição 1.7] *Sejam X um espaço topológico e T um conjunto condensado. Então, o mapa*

$$\begin{aligned}\Upsilon_{X,T} : \quad \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{CGTop}}(T(*)_{top}, X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond(Set)}}(T, \underline{X}) \\ f &\mapsto \zeta_{(f)}\end{aligned}$$

é uma bijeção natural. Em particular, o funtor:

$$\begin{aligned}(-)(*)_{top} : \quad \mathbf{Cond(Set)} &\to \kappa\text{-}\mathbf{CGTop} \\ T &\mapsto T(*)_{top}\end{aligned}$$

é um adjunto à esquerda do funtor $(\underline{-})$.

Demonstração. Dado $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond(Set)}}(T, \underline{X})$, temos que α_* é contínua (Lema 5.1.15), logo, podemos considerar a função:

$$\begin{aligned}\Phi_{X,T} : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond(Set)}}(T, \underline{X}) &\to \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{CGTop}}(T(*)_{top}, X) \\ \alpha &\mapsto \alpha_*\end{aligned}.$$

Mostraremos que esta é a inversa de $\Upsilon_{X,T}$. De fato, dado $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond(Set)}}(T, \underline{X})$, temos:

$$(\Upsilon_{X,T} \circ \Phi_{X,T})(\alpha) = \Upsilon_{X,T}(\alpha_*) = \zeta_{(\alpha_*)}$$

em que a componente em S é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \zeta_{(\alpha_*)_S}: & T(S) & \to & \underline{X}(S) \\ & t & \mapsto & \alpha_* \circ \tau_{(S)_*}(t). \end{array}$$

Dado $s \in S$, podemos representá-lo como $s : * \to S$, pois $S = \underline{S}(*)$. Assim, temos:

$$(\alpha_* \circ \tau_{(S)_*}(t))(s) = (\alpha_* \circ T(s))(t) = (\underline{X}(s) \circ \alpha_S)(t),$$

visto que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} T(*) \arrow[r, "\alpha_*"] & X \\ T(S) \arrow[u, "T(s)"] \arrow[r, "\alpha_S"'] & \underline{X}(S) \arrow[u, "\underline{X}(s)"'] \end{tikzcd}$$

Agora, temos para todo $t \in T(S)$ e $s \in \underline{S}(*) = S$, que:

$$(\underline{X}(s) \circ \alpha_S)(t) = \underline{X}(s)(\theta_S(t)) = (\alpha_S(t))(s).$$

Assim, $\alpha_* \circ \tau_{(S)_*}(t) = \alpha_S(t)$, logo, $\zeta_{(\alpha_*)_S} = \alpha_S$, para todo S profinito. Isto implica que:

$$(\Upsilon_{X,T} \circ \Phi_{X,T})(\alpha) = \zeta_{\alpha_*} = \alpha.$$

Por outro lado,

$$(\Phi_{X,T} \circ \Upsilon_{X,T})(f) = \Phi_{X,T}(\zeta_{(f)}) = \zeta_{(f)_*} = f.$$

Por fim, para provar a naturalidade de $\Upsilon_{X,T}$, precisamos verificar que o diagrama a seguir é comutativo (Observação 1.2.6) para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{CGTop}}(T(*)_{top}, X)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{CGTop}}(T(*)_{top}, T(*)_{top}) \arrow[r, "\Upsilon_{T(*)_{top},T}"] \arrow[d, "(T(*)_{top},f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(Set)}}(T, \underline{T(*)_{top}}) \arrow[d, "(T,\underline{f})"] \\ \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{CGTop}}(T(*)_{top}, X) \arrow[r, "\Upsilon_{X,T}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(Set)}}(T, \underline{X}) \end{tikzcd}$$

em que $(T, \underline{f})(\alpha) = \underline{f} \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(Set)}}(T, \underline{T(*)_{top}})$ e $(T(*)_{top}, f)(g) = f \circ g$ para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{CGTop}}(T(*)_{top}, T(*)_{top})$. Dado $g \in \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{CGTop}}(T(*)_{top}, T(*)_{top})$ temos:

$$(\Upsilon_{X,T} \circ (T(*)_{top}, f))(g) = \Upsilon_{X,T}(f \circ g) = \zeta_{(f\circ g)}.$$

Por outro lado,

$$((T, \underline{f}) \circ \Upsilon_{T(*)_{top},T})(g) = (T, \underline{f})(\zeta_{(g)}) = \underline{f} \circ \zeta_{(g)}$$

e, dado S profinito temos:

$$(\underline{f} \circ \zeta_{(g)})_S = \underline{f}_S \circ \zeta_{(g)_S} : T(S) \to \underline{T(*)_{top}}(S).$$

Assim, tomando $t \in T(S)$ temos:

$$(\underline{f} \circ \zeta_{(g)})(t) = \underline{f}_S(g \circ \tau_{(S)_*}(t)) = f \circ g \circ \tau_{(S)_*}(t) = \zeta_{(f\circ g)_S}(t).$$

Portanto, $\Upsilon_{X,T} \circ (T(*)_{top}, f) = (T, \underline{f}) \circ \Upsilon_{T(*)_{top},T}$ e segue que $\Upsilon_{X,T}$ é uma bijeção natural. Assim, $(-)(*)_{top} : \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \to \kappa\text{-}\mathbf{CGTop}$ é um adjunto à esquerda de $(\underline{-}) : \kappa\text{-}\mathbf{CGTop} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ (Teorema 1.2.5).

$\square$

Proposição 5.1.18. [30, Proposição 1.7] *O funtor* $(\underline{-}) : \kappa\text{-}\mathbf{CGTop} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ *é plenamente fiel.*

Demonstração. Temos que o funtor $(\underline{-}) : \kappa\text{-}\mathbf{CGTop} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ admite um adjunto à esquerda $(-)(*)_{top} : \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \to \kappa\text{-}\mathbf{CGTop}$ (Proposição 5.1.17). Além disso, dado um conjunto condensado T, definimos:

$$\eta_{(T)} = \Upsilon_{T(*)_{top},T}(1_{T(*)_{top}}) = \zeta_{(1_{\mathbf{CGTop}})} : T \to \underline{T(*)_{top}}.$$

Assim, o par $(T(*)_{top}, \eta_{(T)})$ é uma reflexão de T ao longo de $(\underline{-})$ e:

$$\eta : 1_{\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})} \to (\underline{-}) \circ (-)(*)_{top}$$

é a unidade da adjunção (Definição 1.2.3). Iremos determinar a counidade da adjunção:

$$\varepsilon : (-)(*)_{top} \circ (\underline{-}) \to 1_{\kappa\mathbf{CGTop}}$$

e mostrar que é um isomorfismo, assim, concluiremos que $(\underline{-})$ é plenamente fiel (Proposição 1.2.12). Para isso, fixado um espaço κ-compactamente gerado X, precisamos encontrar o único morfismo $\varepsilon_X : \underline{X}(*)_{top} \to X$ que satisfaz as identidades triangulares, ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "\eta_{\underline{X}}"] \arrow[dr, "1_{\underline{X}}"'] & \underline{\underline{X}(*)_{top}} \arrow[d, "\varepsilon_{\underline{X}}"] \\
& \underline{X}
\end{tikzcd}$$

Seja S um conjunto profinito, queremos que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X}(S) \arrow[r, "\eta_{(\underline{X})_S}"] \arrow[dr, "1_{\underline{X}(S)}"'] & \underline{\underline{X}(*)_{top}}(S) \arrow[d, "\underline{\varepsilon_{(X)}}_S"] \\
& \underline{X}(S)
\end{tikzcd}$$

Primeiro, observe que:

$$\eta_{(\underline{X})_S} = \zeta_{(1_{\kappa\text{-}\mathtt{CGTop}})_S} = 1_{\kappa\text{-}\mathtt{CGTop}} \circ \tau_{(S)_*}.$$

Assim, dado $f \in \underline{X}(S)$, temos que:

$$\eta_{(\underline{X})_S}(f) = (1_{\kappa\text{-}\mathtt{CGTop}} \circ \tau_{(S)_*})(f) = \underline{X}(-)(f).$$

Além disso, dado $s \in S$, podemos representá-lo como $s : * \to S$, assim:

$$\underline{X}(-)(f)(s) = \underline{X}(s)(f) = f \circ s.$$

Mas, $f(s) = f \circ s$, logo, $\eta_{(\underline{X})_S}$ é essencialmente a identidade. Ademais, como $\varepsilon_{(X)}$ deve ser um mapa tal que $\left(\underline{\varepsilon_{(X)}}_S \circ \eta_{(\underline{X})_S}\right)(f) = f$, temos:

$$f = \underline{\varepsilon_{(X)}}_S(\eta_{(\underline{X})_S}(f)) = \underline{\varepsilon_{(X)}}_S(f).$$

Assim, segue da definição do funtor $(\underline{-})$ (Observação 5.1.14) que para todo $f \in \underline{\underline{X}(*)_{top}}(S)$:

$$f = \underline{\varepsilon_{(X)}}_S(f) = f \circ \varepsilon_{(X)},$$

ou seja $\varepsilon_{(X)}$ é a identidade e, portanto, é um isomorfismo. $\square$

Observação 5.1.19. Se X é um grupo, anel, ... condensado, não podemos automaticamente considerar $\underline{X}(*)_{top}$ como um grupo, anel, ... topológico. Segundo Scholze [30], o problema reside no fato de que o functor $(-)(*)_{\text{top}}$ não necessariamente preserva produtos. O autor também afirma que, de acordo com o Teorema do functor adjunto (Teorema 1.2.16), ainda existem adjuntos ao functor de grupos, anéis, ... topológicos em relação a grupos, anéis, ... condensados, porém, sua descrição é desconhecida. Por fim, o Scholze argumenta que, em particular, esses adjuntos não preservam funtores de esquecimento e, provavelmente, não possuem aplicabilidade prática.

Exemplo 5.1.20. [30, Exemplo 1.9] Vimos no Exemplo 1 que o mapa $\Theta : \mathbb{R}^{dis} \to \mathbb{R}$ é monomorfismo e epimorfismo, mas não é isomorfismo. Logo $\mathsf{AbGrpTop}$ não é uma categoria abelina. Agora, considere os grupos abelianos condensados $\underline{\mathbb{R}^{dis}}$ e $\underline{\mathbb{R}}$ associados aos grupos topológicos $\mathbb{R}^{dis}$ e $\mathbb{R}$ respectivamente. Além disso, seja:

$$\underline{\Theta} : \underline{\mathbb{R}^{dis}} \to \underline{\mathbb{R}},$$

o morfismo definido na componente S, com S profinito, como:

$$\begin{array}{rccc} \underline{\Theta}_S : & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathbb{R}^{dis}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathbb{R}) \\ & S \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{dis} & \mapsto & S \xrightarrow{\Theta \circ f} \mathbb{R} \end{array}.$$

Observe que $\underline{\Theta}$ é injetivo, pois, cada componente $\underline{\Theta}_S$ é injetiva, visto que Θ é um epimorfismo. Além disso, segundo Scholze (Referência [30]), o co-núcleo $Q = \mathrm{coker}(\underline{\Theta})$ é um grupo abeliano condensado com grupo abeliano subjacente:

$$Q(*) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(*, \mathbb{R})}{\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(*, \mathbb{R}^{dis})} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = 0.$$

Apesar disto, o conúcleo Q é não trivial. De fato, para um conjunto profinito S qualquer, temos que:

$$Q(S) = \frac{\{\text{Mapas contínuos } S \to \mathbb{R}\}}{\{\text{Mapas localmente constantes } S \to \mathbb{R}\}} \neq 0.$$

Isso ocorre porque todo mapa contínuo $f : X \to Y$, em que X é um espaço arbitrário e Y é discreto, é *localmente constante*. Em outras palavras, para cada ponto $x \in X$, existe um conjunto $V \subset X$ que contém um conjunto aberto $U \ni x$, no qual f é constante. De fato, dado $x \in X$, temos que $\{f(x)\}$ é aberto e, pela continuidade de f, $U = f^{-1}(\{f(x)\})$ é uma vizinhança aberta de x.

Considere, por exemplo, o caso particular em que $S = \mathfrak{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}$ (Exemplo 2.3.2). Temos que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathfrak{C}, \mathbb{R}) = \{\text{Sequências convergentes em } \mathbb{R}\} \text{ e}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathfrak{C}, \mathbb{R}^{dis}) = \{\text{Sequências eventualmente constantes em } \mathbb{R}\}.$$

Logo, $\underline{\mathbb{R}^{disc}}(\mathfrak{C}) \to \underline{\mathbb{R}}(\mathfrak{C})$ é a inclusão de sequências eventualmente constantes em sequências convergências. Ademais,

$$Q(\mathfrak{C}) = \frac{\{\text{Sequências convergentes em } \mathbb{R}\}}{\{\text{Sequências eventualmente constantes em } \mathbb{R}\}} = \text{Algo enorme!}$$

Na verdade, grupos abelianos condensados formam uma categoria abeliana do melhor tipo possível, como veremos nas duas próximas seções.

5.2 Grupos abelianos condensados

Nesta seção exploraremos a categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ dos grupos abelianos condensados e transformações naturais. Veremos que essa categoria possui propriedades excelentes: é uma categoria abeliana que satisfaz alguns dos axiomas de Grothendieck, além de ser gerada por objetos projetivos compactos.

Teorema 5.2.1. [30, Teorema 2.2] *A categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck* (AB 3), (AB 3*), (AB 4), (AB 4*), (AB5) e (AB 6) (Seção 3.3).

Demonstração. Considere a categoria $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}, \mathsf{AbGrp})$. Sabemos que esta categoria é equivalente à categoria de grupos abelianos condensados (Proposição 5.1.7). Então, mostraremos que $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}, \mathsf{AbGrp})$ é abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck do enunciado. A estratégia da demonstração é usar o fato de AbGrp ser abeliana (Exemplo 3.2.4) e satisfaz os axiomas de Grothendieck (Exemplo 3.3.2) para mostrar o resultado. Para isso, considere o funtor:

$$\begin{array}{rrcl}
\mathbf{F}: & \mathcal{D} & \to & \mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}^{op}, \mathsf{AbGrp}) \\
& D & \mapsto & \begin{array}{rrcl} \mathbf{F}(D): & \kappa\text{-}\mathsf{EDSet} & \to & \mathsf{AbGrp} \\ & S & \mapsto & \mathbf{F}(D)(S) \\ & S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \mathbf{F}(D)(S_1) \xrightarrow{\mathbf{F}(D)(f)} \mathbf{F}(D)(S_2) \end{array} \\
& D_1 \xrightarrow{d} D_2 & \mapsto & \mathbf{F}(D_1) \xrightarrow{\mathbf{F}(d)} \mathbf{F}(D_2)
\end{array}$$

em que $\mathcal{D}$ é uma categoria pequena. Para cada S extremamente desconexo, defina o funtor:

$$\begin{array}{rrcl}
\mathbf{F}_S: & \mathcal{D} & \to & \mathsf{AbGrp} \\
& D & \mapsto & \mathbf{F}(D)(S) \\
& D_1 \xrightarrow{d} D_2 & \mapsto & \mathbf{F}(D_1)(S) \xrightarrow{\mathbf{F}(d)_S} \mathbf{F}(D_2)(S).
\end{array}$$

Em seguida, considere $(\lim(\mathbf{F}_S), \varphi_S^D)$, com $\varphi_S^D : \lim(\mathbf{F}_S) \to \mathbf{F}(D)(S)$, o limite de $\mathbf{F}_S$. Seja $f : S_1 \to S_2$ um morfismo entre conjuntos extremamente desconexos, utilizando a propriedade universal do limite (Definição 1.1.7), juntamente com a comutatividade de transformações naturais, temos que existe único morfismo $\psi_{S_1,S_2} : \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \to \lim(\mathbf{F}_{S_2})$ que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(D_1)(S_1) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_{S_1}"] \arrow[dddd, "\mathbf{F}(D_1)(f)"'] & & \mathbf{F}(D_2)(S_1) \arrow[dddd, "\mathbf{F}(D_2)(f)"] \\
& \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \arrow[ul, "\varphi_{S_1}^{D_1}"] \arrow[ur, "\varphi_{S_1}^{D_2}"'] \arrow[dd, dashed, "\exists!\psi_{S_1,S_2}"] & \\
& & \\
& \lim(\mathbf{F}_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_2}^{D_2}"] & \\
\mathbf{F}(D_1)(S_2) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_{S_2}"'] & & \mathbf{F}(D_2)(S_2)
\end{tikzcd}$$

Assim, defina o funtor:

$$\begin{array}{rrcl}
\mathbf{L} : & \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet} & \to & \mathfrak{AbGrp} \\
& S & \mapsto & \lim(\mathbf{F}_S) \\
& S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \xrightarrow{\psi_{S_1,S_2}} \lim(\mathbf{F}_{S_2}).
\end{array}$$

Vamos mostrar que $\mathbf{L} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Sh}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}, \mathfrak{AbGrp}))$ e que $(\mathbf{L}, \{\varphi^D : \mathbf{L} \to \mathbf{F}(D)\}_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})})$ é o limite do funtor $\mathbf{F}$, em que $\varphi^D = \{\varphi_S^D\}_{S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})}$. Inicialmente, iremos mostrar que $\mathbf{L}$ é um grupo abeliano condensado. Para isso, precisamos verificar que:

$$\mathbf{L}(S_1 \sqcup S_2) \cong \mathbf{L}(S_1) \times \mathbf{L}(S_2) \text{ (Observação 5.1).}$$

Mas, como $\mathbf{L}(S) = \lim(\mathbf{F}_S)$, devemos provar que $\lim(\mathbf{F}_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \times \lim(\mathbf{F}_{S_2})$. Com isso, dados $\mathbf{G}$ um grupo abeliano qualquer e $f_S^D : \mathbf{G} \to \mathbf{F}(D)(S)$ um homomorfismo de grupos, temos os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G} \arrow[ddl, bend right, "f_{S_1}^{D_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{S_1}^{D_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_1}"] & \\
& \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \arrow[dl, "\varphi_{S_1}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_1}^{D_2}"] & \\
\mathbf{F}_{S_1}(D_1) = \mathbf{F}(D_1)(S_1) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_{S_1}"'] & & \mathbf{F}(D_2)(S_1) = \mathbf{F}_{S_1}(D_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G} \arrow[ddl, bend right, "f^{D_1}_{S_2}"'] \arrow[ddr, bend left, "f^{D_2}_{S_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_2}"] & \\
& \lim(\mathbf{F}_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi^{D_1}_{S_2}"'] \arrow[dr, "\varphi^{D_2}_{S_2}"] & \\
\mathbf{F}_{S_2}(D_1) = \mathbf{F}(D_1)(S_2) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_{S_2}"'] & & \mathbf{F}(D_2)(S_2) = \mathbf{F}_{S_2}(D_2)
\end{tikzcd}$$

Logo, podemos formar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G} \arrow[ddl, bend right, "f^{D_1}_{S_1} \times f^{D_1}_{S_2}"'] \arrow[ddr, bend left, "f^{D_2}_{S_1} \times f^{D_2}_{S_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_1} \times \psi_{S_2}"] & \\
& \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \times \lim(\mathbf{F}_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi S_1{}^{D_1} \times \varphi S_2{}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi S_1{}^{D_2} \times \varphi S_2{}^{D_2}"] & \\
\mathbf{F}(D_1)(S_1) \times \mathbf{F}(D_2)(S_2) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_{S_1} \times \mathbf{F}(d)_{S_2}"'] \arrow[d, equal] & & \mathbf{F}(D_2)(S_1) \times \mathbf{F}(D_2)(S_2) \arrow[d, equal] \\
\mathbf{F}_{S_1 \sqcup S_2}(D_1) & & \mathbf{F}_{S_1 \sqcup S_2}(D_2)
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, $\lim(\mathbf{F}_{S_1}) \times \lim(\mathbf{F}_{S_2})$ satisfaz a propriedade universal de limites (Proposição 1.1.7) de $\mathbf{F}_{S_1 \sqcup S_2}$, assim,

$$\lim(\mathbf{F}_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(\mathbf{F}_{S_1}) \times \lim(\mathbf{F}_{S_2}),$$

o que mostra que $\mathbf{L}$ é um grupo abeliano condensado. Agora, mostraremos que o cone $(\mathbf{L}, \{\varphi^D\}_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})})$ é o limite do funtor $\mathbf{F}$. Para isso considere X um objeto de $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}, \mathcal{A}\mathsf{bGrp})$ e, para cada $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ seja $f^D : X \to \mathbf{F}(D)$ um morfismo em $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}, \mathcal{A}\mathsf{bGrp})$. Dado que $\mathbf{F}(D)(S) = \mathbf{F}_S(D)$, segue da propriedade universal do limite (Definição 1.1.7) de $\mathbf{F}_S$ que o diagrama a seguir comuta para todo S em $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}, \mathcal{A}\mathsf{bGrp})$:

$$\begin{tikzcd}
& X(S) \arrow[ddl, bend right, "f^{D_1}_S"'] \arrow[ddr, bend left, "f^{D_2}_S"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_S"] & \\
& \lim(\mathbf{F}_S) = \mathbf{L}(S) \arrow[dl, "\varphi^{D_1}_S"'] \arrow[dr, "\varphi^{D_2}_S"] & \\
\mathbf{F}_S(D_1) = \mathbf{F}(D_1)(S) \arrow[rr, "\mathbf{F}(d)_S"'] & & \mathbf{F}(D_2)(S) = \mathbf{F}_S(D_2)
\end{tikzcd}$$

Portanto, $(\mathbf{L}, \{\varphi^D\}_{D\in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})})$ é o limite do funtor $\mathbf{F}$. Ademais, uma construção similar pode ser feita para o colimite de $\mathbf{F}$. Assim, segundo Scholze (Referência [30]), a partir destas informações, podemos mostrar que $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}, \mathsf{AbGrp})$ herda as propriedades de AbGrp. A título de exemplo, vamos demonstrar a existência dos núcleos, enquanto as demais propriedades que caracterizam uma categoria abeliana (Definição 3.2.2) e os axiomas de Grothendieck (Seção 3.3) podem ser verificados de forma análoga.

Se $\alpha : T_1 \to T_2$ é um morfismo em $\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}, \mathsf{AbGrp})$. Então, $\ker(\alpha) = \lim(\mathbf{F})$, onde:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F} : & \mathcal{D} \arrow[r] & \mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}, \mathsf{AbGrp}) \\
& \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, mapsto] & T_1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "0_{T_1,T_2}"'] & T_2
\end{tikzcd}
$$

Mas o limite de $\mathbf{F}$ é dado pelo limite $\mathbf{L}$ que, por sua vez, é dado pelo limite de $\mathbf{F}_S$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_S : & \mathcal{D} \arrow[r] & \mathsf{AbGrp} \\
& \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, mapsto] & T_1(S) \arrow[r, bend left, "\alpha_S"] \arrow[r, bend right, "0_{T_1(S),T_2(S)}"'] & T_2(S).
\end{tikzcd}
$$

Dado que o limite de $\mathbf{F}_S$ representa o núcleo de α_S, podemos concluir que o limite de $\mathbf{F}$ também existe, devido ao fato de AbGrp ser uma categoria abeliana (Exemplo 3.2.4).

$\square$

Ademais, assim como em AbGrp, a categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ possui objetos livres. Considere o funtor de esquecimento $\mathbf{U} : \mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp}) \to \mathsf{Cond}(\mathsf{Set})$, visto que $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é uma categoria pequena, temos pelo Teorema do Funtor Adjunto (Teorema 1.2.16 e Observação 1.2.17) que $\mathbf{U}$ possui um adjunto a esquerda, que denotaremos por $\mathbb{Z}[-] : \mathsf{Cond}(\mathsf{Set}) \to \mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 5.2.2. [30, p. 12] Seja T um conjunto condensado. O *grupo abeliano condensado livre* $\mathbb{Z}[T]$ é a feixificação do pré-feixe:

$$
\begin{array}{rrcl}
P_T : & \kappa\text{-}\mathsf{EDSet}^{op} & \to & \mathsf{AbGrp} \\
& S & \mapsto & \mathbb{Z}[T(S)] \\
& S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \mathbb{Z}[T(S_2)] \xrightarrow{P_T(f)} \mathbb{Z}[T(S_1)]
\end{array}
$$

em que $P_T(f)$ é a extensão de $T(f)$ por linearidade.

Observação 5.2.3. Temos que $\mathbb{Z}[T]$ é o objeto livre em T com respeito a adjunção livre-esquecimento de grupos abelianos condensados e conjuntos condensados. Desta forma, temos que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{b}\mathcal{G}\mathsf{rp})}(\mathbb{Z}[T], M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(T, M) \quad \text{(Teorema 1.2.5)},$$

em que M é um grupo abeliano condensado.

Observação 5.2.4. Como $\mathbb{Z}[T]$ é a feixificação de P_T, segue da propriedade universal da feixificação (Definição 4.3.7) que dado um grupo abeliano condensado M e uma transformação natural $\alpha : P_T \to M$, existe única transformação natural $\overline{\alpha} : \mathbb{Z}[T] \to M$ que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} P_T \arrow[r, "\zeta_T"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{Z}[T] \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

A partir disso, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{b}\mathcal{G}\mathsf{rp})}(\mathbb{Z}[T], M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{PSh}(\kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}, \mathcal{A}\mathsf{b}\mathcal{G}\mathsf{rp})}(P_T, M).$$

O lema a seguir é uma importante ferramenta para matemática condensada e possui um versão análoga na teoria de grupos abelianos (Lema A.1.9),

Lema 5.2.5. [3, p. 81] *Para todo grupo abeliano condensado $\underline{A}$ associado à um grupo abeliano A, existe uma sequência exata de grupos abelianos condensados:*

$$\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{Z}[\underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\nu}} \underline{A} \longrightarrow 0$$

Demonstração. Considere os grupos abelianos condensados $\underline{A}$ e $\underline{A} \times \underline{A}$. Iremos definir uma sequência exata de pré-feixes:

$$P_{\underline{A}\times\underline{A}} \xrightarrow{\quad\mu\quad} P_{\underline{A}} \xrightarrow{\quad\nu\quad} \underline{A}\ .$$

Dado um conjunto extremamente desconexo S, temos que:

$$P_{\underline{A}\times\underline{A}}(S) = \mathbb{Z}[(\underline{A} \times \underline{A})(S)] \cong \mathbb{Z}[\underline{A}(S) \times \underline{A}(S)] \text{ e } P_{\underline{A}}(S) = \mathbb{Z}[\underline{A}(S)].$$

Logo, iremos definir as componentes de μ e ν do seguinte modo:

$$\begin{array}{rrcl} \mu_S: & \mathbb{Z}[\underline{A}(S)\times\underline{A}(S)] & \to & \mathbb{Z}[\underline{A}(S)] \\ & [(g_1,g_2)] & \mapsto & [g_1+g_2]-[g_1]-[g_2] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} \nu_S: & \mathbb{Z}[\underline{A}(S)] & \to & \underline{A} \\ & [g] & \mapsto & g \end{array}.$$

Temos que para cada componente, a sequência:

$$P_{\underline{A}\times\underline{A}}(S) \xrightarrow{\mu_S} P_{\underline{A}}(S) \xrightarrow{\nu_S} \underline{A}(S)$$

é exata (Lema A.1.9). Logo, basta mostrar que ν e μ são de fato transformações naturais.

Sejam S_1 e S_2 conjuntos extremamente desconexos e $f : S_1 \to S_2$ um mapa contínuo e, considere o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} P_{\underline{A}}(S_1) = \mathbb{Z}[\underline{A}(S_1)] \arrow[r, "\nu_{S_1}"] & \underline{A}(S_1) \\ \underline{A}(S_2) = \mathbb{Z}[\underline{A}(S_2)] \arrow[r, "\nu_{S_2}"'] \arrow[u, "\underline{A}(f) \text{ estendido por linearidade}"] & \underline{A}(S_2) \arrow[u, "\underline{A}(f)"'] \end{tikzcd}$$

Afirmamos que o diagrama comuta. Como $\underline{A}(f) = (-) \circ f$, segue que dado $[g] \in \mathbb{Z}[\underline{A}(S_2)]$ temos:

$$\mu_{S_1} \circ \underline{A}(f)([g]) = \mu_{S_1}([g]\circ f) = g \circ f = \underline{A}(f)(g) = \underline{A}(f) \circ \mu_{S_2}([g]).$$

Similarmente, temos que μ é uma transformação natural. Por fim, como feixificação é exata (Proposição 4.3.10), segue que existe uma sequência exata de grupos abelianos livres condensados:

$$\mathbb{Z}[\underline{A}\times\underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{Z}[\underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\nu}} \underline{A}\ .$$

$\square$

Antes de apresentar o próximo resultado, introduziremos três conceitos importantes: objetos compactos, objetos projetivos e geradores.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria em que existem limites e colimites, $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e considere o funtor:

$$\begin{array}{rccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-): & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Set} & & \\ & Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & & \\ & Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 & \mapsto & f^*: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_2) \\ & & & g & \mapsto & f\circ g \end{array}.$$

Seja $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor, em que $\mathcal{D}$ é uma categoria filtrada, e considere a composição

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(-))$. Seja $(\mathrm{colim}(\mathbf{F}), \{\psi_D\}_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})})$, o colimite de $\mathbf{F}$, com:

$$\psi_D : \mathbf{F}(D) \to \mathrm{colim}(\mathbf{F}),$$

então, para todo $f : D_1 \to D_2$ em $\mathcal{D}$, temos que $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ \mathbf{F}(f)$. Assim, se $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(D_1))$. Então:

$$(\psi_{D_2}^* \circ \mathbf{F}(f)^*)(g) = \psi_{D_2}^*(\mathbf{F}(f) \circ g) = \psi_{D_2} \circ \mathbf{F}(f) \circ g = \psi_{D-1} \circ g = \psi_{D_1}^*(g),$$

ou seja, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(D_1)) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f)^*"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_{D_1}^*"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(D_2)) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_{D_2}^*"] \\
& \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(-))) \arrow[d, dashed, "\exists ! \Psi"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{colim}(\mathbf{F})) &
\end{tikzcd}$$

Logo, existe único morfismo $\Psi : \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{F}(-))) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{colim}(\mathbf{F}))$, pela propriedade universal do colimite (Definição 1.1.7). Dizemos que X é um *objeto compacto* se para toda categoria filtrada $\mathcal{D}$ e para todo funtor $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, o morfismo canônico Ψ é um isomorfismo.

Agora, sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ preserva epimorfismos. Então, dizemos que X é *projetivo*. Ademais, seja $\mathbf{G} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Se para quaisquer morfismos $f, g : C_1 \to C_2$ em $\mathcal{C}$, com $f \neq g$, existe $X \in \mathbf{G}$ e $h : X \to C_1$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$. Então, dizemos que $\mathbf{G}$ é um *conjunto de geradores* de $\mathcal{C}$.

Teorema 5.2.6. [30, Teorema 2.2] *A categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é gerada por objetos projetivos compactos.*

Demonstração. Iremos mostrar que dado S um conjunto extremamente desconexo, temos que $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ é um objeto projetivo compacto e o conjunto de todos os grupos abelianos condensados livres da forma $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ é um conjunto gerador de AbGrp.

Primeiro, considere o funtor de esquecimento $\mathbf{U} : \mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp}) \to \mathsf{Cond}(\mathsf{Set})$, podemos provar que $\mathbf{U}$ preserva limites pequenos. Seja S um conjunto extremamente desconexo e considere o conjunto condensado $\underline{S}$. Temos que:

$$\Psi(\underline{S}) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], -) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, -)$$

é um isomorfismo natural (Observação 5.2.3). Ademais, temos pelo Lema de Yoneda (Teorema 1.0.1) que $\theta_{((-),S)} : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, -) \to (-)(S)$ também é um isomorfismo natural, onde:

$$\begin{aligned} (-)(S) : \quad \mathsf{Cond}(\mathsf{Set}) &\to \mathsf{Set} \\ T &\mapsto T(S) \\ T_1 \xrightarrow{\gamma} T_2 &\mapsto T_1(S) \xrightarrow{\gamma_S} T_2(S). \end{aligned}$$

Seja $\alpha : M_1 \to M_2$ um epimorfismo natural de grupos abelianos condensados. Então, o mapa $\alpha_S : M_1(S) \to M_2(S)$ também é epimorfismo. Além disso, visto que $\theta_{((-),S)}$ e $\Psi(\underline{S})$ são bijeções, temos que qualquer $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], M_2)$ está associado a único elemento $g \in M_2(S)$ e, pela sobrejetividade de α_S, existe $x \in M_1(S)$ tal que $\alpha_S(x) = g$. Novamente, pela bijetividade de $\theta_{((-),S)}$ e $\Psi(\underline{S})$, x está associado a único $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], M_1)$. Dado que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], M_1) \arrow[rr, "\alpha^*"] \arrow[d, shift right, "\Psi(\underline{S})_{M_1}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], M_2) \arrow[d, shift right, "\Psi(\underline{S})^{-1}_{M_2}"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, M_1) \arrow[u, shift right, "\Psi(\underline{S})^{-1}_{M_1}"'] \arrow[d, shift right, "\theta_{((-),S)_{M_1}}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, M_2) \arrow[u, shift right, "\Psi(\underline{S})_{M_2}"'] \arrow[d, shift right, "\theta^{-1}_{((-),S)_{M_2}}"'] \\
M_1(S) \arrow[rr, "\alpha_S"'] \arrow[u, shift right, "\theta^{-1}_{((-),S)_{M_1}}"'] & & M_2(S) \arrow[u, shift right, "\theta_{((-),S)_{M_2}}"']
\end{tikzcd}$$

temos que $\alpha^*(\gamma) = \beta$, ou seja, α^* é um epimorfismo. Logo, $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ é um objeto projetivo em $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$.

Em seguida, vamos mostrar que $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ é compacto. Compondo os isomorfismos naturais $\Psi(\underline{S})$ com $\theta_{(-),S}$, obtemos um isomorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], -)$ e $(-)(S)$. Assim, se $\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é um funtor, com $\mathcal{D}$ filtrada. Então, teremos um isomorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \mathbf{F}(-))$ e $\mathbf{F}(-)(S)$. Segundo Scholze [30], para concluir que $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ é compacto, é necessário mostrar que $\mathrm{colim}(\mathbf{F}(-)(S))$ é isomorfo a $\mathrm{colim}(\mathbf{F})(S)$, com isso, teremos que

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}(\operatorname{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \mathbf{F}(-))) &\cong \operatorname{colim}(\mathbf{F}(-)(S))\\ &\cong \operatorname{colim}(\mathbf{F})(S)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \operatorname{colim}(\mathbf{F})),\end{aligned}$$

o que implicaria o resultado. No entanto, não sabemos como realizar esta demonstração.

Por fim, veremos que o conjunto formado por todos os $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ e um conjunto gerador. Sejam $\alpha, \beta : M_1 \to M_2$ morfismos diferentes em $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. Então, existe algum conjunto extremamente desconexo S tal que $\alpha_S \neq \beta_S$, ou seja, $\alpha_S(m) \neq \beta_S(m)$ para algum m em $M_1(S)$. Pelas bijeções dadas pela adjunção e pelo Lema de Yoneda (Teorema 1.0.1), temos que existe $\gamma : \mathbb{Z}[\underline{S}] \to M_1$ e $N \in \mathbb{Z}[\underline{S}]$ tal que $\gamma_S(N) = m$. Logo,

$$\alpha_S(\gamma_S(N)) = \alpha_S(m) \neq \beta_S(m) = \beta_S(\gamma_S(N)).$$

Portanto, $\alpha \circ \gamma \neq \beta \circ \gamma$. $\square$

5.3 Produto tensorial e Hom interno de grupos abelianos condensados

Além das propriedades descritas na seção anterior, a categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ possui outras características notáveis. Nesta seção, veremos que a categoria dos grupos abelianos condensados possui produto tensorial monoidal simétrico, ou seja, o produto tensorial é tão comutativo quanto possível; para qualquer conjunto condensado T o grupo abeliano condensado $\mathbb{Z}[T]$ é flácido e; para quaisquer grupos abelianos condensados M e N, o grupo de homomorfismos $\operatorname{Hom}(M, N)$ possui um enriquecimento natural para um grupo abeliano condensado, definindo um objeto funtor-Hom interno $\underline{Hom}(M, N)$.

Definição 5.3.1. [30, p. 13]

(1) Sejam M e N pré-feixes de κ-EDSet para AbGrp. Então definimos o pré-feixe:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{M,N} : \quad \kappa\text{-}\mathsf{EDSet}^{op} &\to \mathsf{AbGrp}\\ S &\mapsto M(S) \otimes N(S)\\ S_1 \xrightarrow{f} S_2 &\mapsto M(S_2) \otimes N(S_2) \xrightarrow{M(f)\otimes N(f)} M(S_1) \otimes N(S_1).\end{aligned}$$

(2) Se M e N forem grupos abelianos condensados, definimos o *produto tensorial* de M com N, como:

$$M \otimes N := \mathcal{F}^{sh}_{M,N}.$$

Observação 5.3.2. Dado que $M \otimes N$ é a feixificação de $\mathcal{F}_{M,N}$, esse satisfaz a seguinte propriedade universal (Definição 4.3.7): dados $\mathcal{G} : \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}^{op} \to \mathfrak{AbGrp}$ um feixe e $\alpha : \mathcal{F}_{M,N} \to \mathbf{G}$ uma transformação natural, existe única transformação natural $\overline{\alpha} : M \otimes N \to \mathcal{G}$ tal que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{M,N} \arrow[r, "\varsigma_{M,N}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\overline{\alpha}"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Proposição 5.3.3. [30, p. 13] *Sejam M, N e P grupos abelianos condensados. Então:*

(1) *$M \otimes N$ é naturalmente isomorfo a $N \otimes M$;*

(2) *$M \otimes (N \otimes P)$ é naturalmente isomorfo a $(M \otimes N) \otimes P$.*

Demonstração. Iremos mostrar apenas o item (1), visto que a demonstração do item (2) é similar. Defina a transformação natural $\alpha : \mathcal{F}_{M,N} \to \mathcal{F}_{N,M}$ tal que:

$$\alpha_S : M(S) \otimes N(S) \to N(S) \otimes M(S)$$

seja o isomorfismo de grupos abelianos (Proposição A.2.4). Então, α é um isomorfismo natural. Observe que $\varsigma_{N,M} \circ \alpha$ é uma transformação natural de $\mathcal{F}_{M,N}$ para $N \otimes M$. Logo, segue da propriedade universal de $M \otimes N$ (Observação 5.3.2) que existe única transformação natural $\gamma_1 : M \otimes N \to N \otimes M$ tal que:

$$\gamma_1 \circ \varsigma_{M,N} = \varsigma_{N,M} \circ \alpha.$$

Analogamente, temos a transformação natural $\varsigma_{M,N} \circ \alpha^{-1} : \mathcal{F}_{N,M} \to M \otimes N$ e, consequentemente, existe única transformação natural $\gamma_2 : N \otimes M \to M \otimes N$ tal que;

$$\gamma_2 \circ \varsigma_{N,M} = \varsigma_{M,N} \circ \alpha^{-1}.$$

Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{M,N} \arrow[r, "\varsigma^{M,N}"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, shift right, "\gamma_1"'] \\
\mathcal{F}_{N,M} \arrow[r, "\varsigma^{N,M}"'] \arrow[u, shift right, "\alpha^{-1}"'] & N \otimes M \arrow[u, dashed, shift right, "\gamma_2"']
\end{tikzcd}$$

Agora, observe que:

$$\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \varsigma_{M,N} = \gamma_2 \circ \varsigma_{N,M} \circ \alpha = \varsigma_{M,N} \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \varsigma_{M,N}.$$

Logo, $\gamma_2 \circ \gamma_1$ comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{M,N} \arrow[r, "\varsigma^{M,N}"] \arrow[dr, "\varsigma^{M,N}"'] & M \otimes N \arrow[d, shift right, "\gamma_2 \circ \gamma_1"'] \arrow[d, shift left, "1_{M\otimes N}"] \\
& M \otimes N
\end{tikzcd}$$

Como $1_{M\otimes N}$ também comuta o diagrama, temos pela unicidade da propriedade universal (Observação 5.3.2), que $\gamma_2 \circ \gamma_1 \cong 1_{M\otimes N}$. Similarmente $\gamma_1 \circ \gamma_2 \cong 1_{N\otimes M}$. Portanto,

$$M \otimes N \cong N \otimes M.$$

$\square$

Sejam M, N e P grupos abelianos condensados. Dizemos que $\alpha : M \times N \to P$ é *bilinear*, se $\alpha_S : M(S) \times N(S) \to P(S)$ é bilinear para todo $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$. Agora, para cada conjunto extremamente desconexo S,definimos:

$$\begin{array}{rrcl} \Lambda_S : & M(S) \times N(S) & \to & \mathcal{F}_{M,N}(S) = M(S) \otimes N(S) \\ & (m,n) & \mapsto & m \otimes n \end{array}.$$

Podemos considerar a transformação natural $\Lambda : M \times N \to \mathcal{F}_{M,N}$ tomando

$$\Lambda = \{\Lambda_S\}_{S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})}.$$

Com isso, definimos $\otimes := \varsigma^{M,N} \circ \Lambda$, em que $\varsigma^{M,N}$ é a transformação natural da feixificação de $\mathcal{F}_{M,N}$ (Observação 5.3.2).

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[rr, bend right, "\otimes"'] & \mathcal{F}_{M,N} \arrow[r, "\varsigma^{M,N}"] & M \otimes N.
\end{tikzcd}$$

Assim como em $\mathfrak{AbGrp}$, o produto tensorial em $\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$ satisfaz uma propriedade universal: dados $P \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp}))$ e $\beta : M \times N \to P$ uma função bilinear, existe única transformação natural $\overline{\beta} : M \otimes N \to P$ tal que $\overline{\beta} \circ \otimes = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\beta"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{\beta}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

De fato, temos que para cada S extremamente desconexo, existe único homomorfismo de grupos $\tilde{\beta}_S : \mathcal{F}_{M,N}(S) \to P(S)$ que comuta o diagrama a seguir (Teorema A.2.3) :

$$\begin{tikzcd}
M(S) \times N(S) \arrow[r, "\Lambda_S"] \arrow[dr, "\beta_S"'] & \mathcal{F}_{M,N}(S) = M(S) \otimes N(S) \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{\beta}_S"] \\
& P(S).
\end{tikzcd}$$

Então, defina a transformação natural $\tilde{\beta} : \mathcal{F}_{M,N} \to P$, como $\tilde{\beta} = \{\tilde{\beta}_S\}_{S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}}$. Segue da propriedade universal da feixificação (Definição 4.3.7) que existe única transformação natural $\overline{\beta} : M \otimes N \to P$ tal que $\overline{\beta} \circ \varsigma^{M,N} = \tilde{\beta}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{M,N} \arrow[r, "\varsigma^{M,N}"] \arrow[dr, "\tilde{\beta}"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{\beta}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

Assim, para cada $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$ temos que:

$$\overline{\beta}_S \circ \otimes_S = \overline{\beta}_S \circ \varsigma_S^{M,N} \circ \lambda_S = \tilde{\beta}_S \circ \Lambda_S = \beta_S.$$

Portanto, $\overline{\beta} \circ \otimes = \beta$.

Ademais, pode-se observar que o funtor $\mathbb{Z}[-] : \mathfrak{Cond}(\mathfrak{Set}) \to \mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$, é simétrico monoidal em relação ao produto e ao produto tensorial, isto é, vale a seguinte proposição:

Proposição 5.3.4. [8, Corolário 2.12] *Sejam T_1 e T_2 conjuntos condensados. Então, o grupo abeliano condensado livre $\mathbb{Z}[T_1 \times T_2]$ é naturalmente isomorfo à $\mathbb{Z}[T_1] \otimes \mathbb{Z}[T_2]$.* □

Sejam $M_1, M_2 \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp}))$, $\alpha : M_1 \to M_2$ uma transformação natural e T um conjunto condensado. Definimos a transformação natural entre pré-feixes:

$$\alpha \otimes 1_{(\mathbb{Z}[T])} : \mathcal{F}_{M_1,P_T} \to \mathcal{F}_{M_2,P_T}$$

como sendo o conjunto formado pelos homomorfismos de grupos:

$$\alpha_S \otimes 1_{P_{T\,S}} : M_1(S) \otimes \mathbb{Z}[T(S)] \to M_2(S) \otimes \mathbb{Z}[T(S)],$$

para cada $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathcal{EDSet})$.

Proposição 5.3.5. [30, p. 13] *Seja T um conjunto condensado. Então, o funtor:*

$$\begin{array}{rccc} (-) \otimes P_T : & \mathcal{Cond}(\mathcal{AbGrp}) & \to & \mathcal{PSh}(\kappa\text{-}\mathcal{EDSet}, \mathcal{AbGrp}) \\ & M & \mapsto & \mathcal{F}_{M,P_T} \\ & M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 & \mapsto & \mathcal{F}_{M_1,P_T} \xrightarrow{\alpha \otimes 1_{P_T}} \mathcal{F}_{M_2,P_T} \end{array}$$

é exato. □

Corolário 5.3.6. [8, Corolário 2.12] *Seja T um conjunto condensado. Então, o grupo abeliano condensado $\mathbb{Z}[T]$ é flácido, isto é, o endofuntor:*

$$\begin{array}{rccc} (-) \otimes \mathbb{Z}[T] : & \mathcal{Cond}(\mathcal{AbGrp}) & \to & \mathcal{Cond}(\mathcal{AbGrp}) \\ & M & \mapsto & M \otimes \mathbb{Z}[T] \\ & M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 & \mapsto & M_1 \otimes \mathbb{Z}[T] \xrightarrow{\alpha \otimes 1_{\mathbb{Z}[T]}} M_2 \otimes \mathbb{Z}[T] \end{array}$$

preserva sequências exatas. □

Por fim, iremos definir o funtor Hom interno entre dois grupos abelianos condensados. Dado um grupo abeliano A, o funtor $(-) \otimes A : \mathcal{AbGrp} \to \mathcal{AbGrp}$ comuta com colimites (Proposição A.2.9). Portanto, é relevante verificar que fixado um grupo abeliano condensado M o funtor $(-) \otimes M$ também comuta colimites. Seja:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_{(-),M} : & \mathcal{Cond}(\mathcal{AbGrp}) & \to & \mathcal{PSh}(\kappa\text{-}\mathcal{EDSet}, \mathcal{AbGrp}) \\ & N & \mapsto & \mathcal{F}_{N,M} \\ & N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 & \mapsto & \mathcal{F}_{N_1,M} \xrightarrow{\mathcal{F}_{\alpha,M}} \mathcal{F}_{N_2,M} \end{array}$$

em que $(\mathcal{F}_{\alpha,M})_S := \alpha_S \otimes 1_{M_S} : N_1(S) \otimes M(S) \to N_2(S) \otimes M(S)$ para cada S em $\kappa\text{-}\mathcal{EDSet}$. Pode ser demonstrado que, a partir do fato de que $(-)\otimes A$ comuta com colimites, decorre que $\mathcal{F}_{(-),M}$ também comuta com colimites. Assim, dado que $(-)\otimes M = (\mathcal{F}_{(-),M})^{sh}$ e a feixificação é uma adjunta à esquerda (Lema 4.3.9), temos que $(-) \otimes M$ também comuta com colimites (Lema 1.2.18). Assim, pelo Teorema do Funtor Adjunto (Teorema 1.2.16), $(-) \otimes M$ possui uma adjunta à direita.

Definição 5.3.7. [30, p. 13] Definimos o endofuntor *Hom interno*, denotado por $\underline{Hom}(M, -)$, como o adjunto à direita de $(-) \otimes M$.

Lema 5.3.8. [30, p. 13] *Sejam M e N grupos abelianos condensados e S um conjunto extremamente desconexo. Então:*

$$\underline{Hom}(M,N)(S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes M, N).$$

Demonstração. Seja $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet})$ e considere o conjunto condensado $\underline{S}$. Temos pela adjunção livre-esquecimento (Observação 5.2.3) que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, \underline{Hom}(M,N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{Hom}(M,N)),$$

para todo $N \in \mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. Além disso, como $(-) \otimes M$ e $\underline{Hom}(M,-)$ são adjuntos, segue que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{Hom}(M,N)) \text{ (Teorema 1.2.5).}$$

Por fim, temos pelo Lema de Yoneda (Teorema 1.0.1) que:

$$\begin{aligned} \underline{Hom}(M,N)(S) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, \underline{Hom}(M,N)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{Hom}(M,N)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes M, N). \end{aligned}$$

□

Em resumo, é importante observar que a categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ tem todas as boas propriedades da categoria de grupos abelianos, que é gerada pelo objeto projetivo, flácido e compacto $\mathbb{Z}$. Temos que os geradores $\mathbb{Z}[\underline{S}]$ de $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ não são apenas projetivos e compactos, mas também flácidos para a estrutura monoidal em que :

(1) $\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S'}] \cong \mathbb{Z}[\underline{S} \times \underline{S'}]$, em que S e S' são conjuntos extremamente desconexos;

(2) Para quaisquer grupos abelianos condensados M e N, e S conjunto extremamente desconexo, temos que:

$$\underline{Hom}(M,N)(S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes M, N).$$

Observação 5.3.9. Além disso, o produto tensorial de dois grupos abelianos é caracterizado pela propriedade de que para todo conjunto extremamente desconexo S,

$$(M \otimes N)(S) = M(S) \otimes_{\mathbb{Z}} N(S) \text{ (Veja [8, p. 11]).}$$

5.4 Grupos abelianos localmente compactos

Nesta seção, apresentaremos uma introdução aos grupos abelianos localmente compactos, também conhecidos como LCA-grupos, e discutiremos alguns dos resultados fundamentais relacionados a esse tema. Em seguida, na subseção 5.4.1, abordaremos um importante resultado da matemática condensada que envolve os LCA-grupos.

Definição 5.4.1. [30, p. 23] Dizemos que um grupo abeliano Hausdorff A é *localmente compacto*, ou um LCA-grupo, se é localmente compacto como espaço topológico, ou seja, se todo $x \in A$ possui uma base de vizinhanças compactas. Em outras palavras, se para todo $x \in A$ e para toda vizinha aberta U de x, existe uma vizinhança compacta $K \subset U$ de x.

É importante observar que grupos topológicos são *homogêneos*, ou seja, para cada par x, y de pontos de G, em que G é um grupo topológico, existe um homeomorfismo $\varphi : G \to G$ tal que $\varphi(x) = y$. Assim, para verificar as propriedades locais de um LCA-grupo é suficiente declarar e avaliar suas propriedades locais apenas para único elemento. Por exemplo, para assegurar que um grupo abeliano topológico A é localmente compacto basta mostrar que toda vizinhança aberta U do elemento neutro e contém uma vizinhança compacta. Além disso, segue a seguinte definição:

Lema 5.4.2. [28, p. 54] *Um grupo topológico G é* discreto *se $\{e\}$ é aberto na topologia de G.* □

Exemplo 5.4.3. (1) Todo grupo abeliano com topologia discreta é um LCA-grupo. De fato, considere um grupo abeliano discreto X e seu elemento neutro e. Para cada vizinhança aberta U de e, o conjunto $\{e\} \subset U$ é compacto e aberto. Portanto, exemplos de LCA-grupos incluem $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

(2) $\mathbb{R}$ com a topologia usual é LCA-grupo. Dado $x \in \mathbb{R}$ e (a, b) uma vizinhança aberta de X, podemos escolher um $\epsilon > 0$ tal que $x \in [a + \epsilon, b - \epsilon] \subset (a, b)$. O intervalo fechado $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ é um conjunto compacto, pois é fechado e limitado, e seu interior é um conjunto aberto. Assim, podemos afirmar que $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ é uma vizinhança compacta de x. Em geral, podemos aplicar o Teorema de Heine-Borel, que estabelece que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, para concluir que $\mathbb{R}^n$, com a topologia usual e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é um LCA-grupo.

(3) Seja $\mathbb{Q}^{sub}$ o grupo abeliano $\mathbb{Q}$ equipado com a topologia subespaço induzida por $\mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{Q}^{sub}$ não é LCA-grupo, uma vez que todos os seus subconjuntos compactos têm interior vazio.

Observe que intervalos fechados $[a,b] \cap \mathbb{Q}^{sub}$ não são compactos. De fato, temos que um espaço X é compacto, se e somente se, toda rede em X possui uma sub-rede convergente (Veja Referência [24, p. 188]). Assim, pela contra-positiva, se existir uma sequência (a_n) em $[a,b] \cap \mathbb{Q}^{sub}$ que não possui nenhuma subsequência convergente em $[a,b] \cap \mathbb{Q}^{sub}$, este não será compacto. Então, podemos considerar uma sequência convergindo para um número irracional, e nenhuma subsequência convergirá para um ponto em $\mathbb{Q}^{sub}$.

Agora, considere $x \in \mathbb{Q}^{sub}$ e V uma vizinhança aberta de x. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{Q}^{sub}$ é localmente compacto. Então, x possui uma vizinhança compacta K tal que $x \in K \subset V$. Como K é compacto e contém uma vizinhança aberta de x, existe $(a,b) \cap \mathbb{Q}^{sub} \subset K$. Além disso, $[a,b] \cap \mathbb{Q}^{sub} \subset K$, pois K é fechado, visto que é um subespaço compacto de um espaço Hausdorff. Logo, o subespaço fechado $[a,b] \cap \mathbb{Q}^{sub}$ de K é compacto (Teorema 2.1.1), uma contradição, pois intervalos fechados de $\mathbb{Q}^{sub}$ não são compactos.

(4) Todo grupo abeliano Hausdorff compacto é LCA-grupo. De fato, se A é Hausdorff compacto. Então, é regular. Portanto, para qualquer ponto $x \in A$ e uma vizinhança aberta U de x, existe uma vizinhança aberta V de x tal que $\mathrm{Cl}_A(V) \subset U$ (Lema 2.1.7). Como $\mathrm{Cl}_A(V)$ é um subespaço fechado de um espaço compacto, ele também é compacto (Teorema 2.1.1). Consequentemente, $\mathrm{Cl}_A(V)$ é uma vizinhança compacta de x.

Um importante exemplo é o grupo circular $\mathbb{T} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ que é o grupo multiplicativo de todos os números complexos com valor absoluto 1. Observe que $\mathbb{T}$ é um grupo topológico com a topologia de subespaço de $\mathbb{C}^{\times}$. Além disso, $\mathbb{T}$ é Hausdorff, pois é subespaço de um espaço Hausdorff e, é compacto pois o circulo unitário é fechado e limitado em $\mathbb{C}^{\times}$. Portanto, $\mathbb{T}$ é LCA grupo.

(5) Todo grupo abeliano profinito é LCA-grupo, em particular $\mathbb{Z}_p$ é LCA-grupo. Além disso, grupos localmente profinitos, ou seja, Hausdorff localmente compactos e totalmente desconexos, são LCA-grupos. Logo, o grupo aditivo de números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ é LCA-grupo. Ademais, segundo Hoffmann e Spitzweck (Referência [16]), $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ é um LCA-grupo discreto.

(6) O produto finito de espaços localmente compacto é localmente compacto.

Observação 5.4.4. Segue do Teorema de Isomorfismo que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Assim, $\mathbb{T}$ é frequentemente denotado por $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Teorema 5.4.5 (Primeiro Teorema de Estrutura)**.** [30, Teorema 4.1] *Seja A um LCA-grupo. Então:*

(1) *Existe um inteiro* n *e um isomorfismo* $A \cong \mathbb{R}^n \times A'$, *em que* A' *admite um subgrupo compacto aberto.*

(2) A' *é uma extensão de um grupo abeliano discreto por um grupo abeliano compacto.*

Demonstração. A demonstração do Item (1) pode ser encontrada em *Principles of Harmonic Analysis* de Anton Deitmar e Siegfried Echterhoff (Referência [10, § 4.2]).

Agora, passaremos para demonstração do Item (2). Queremos provar que A' é uma extensão de um grupo abeliano discreto por um grupo abeliano compacto, ou seja, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A' \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

em que K é compacto e H é discreto. Seja K o subgrupo compacto aberto de A', cuja existência é garantida pelo Item (1). Então, precisamos mostrar que A'/K é discreto.

Observe que a classe lateral $e + K \subset A'$ é aberta em A'. Ademais, como $\rho : A' \to A'/K$ é um mapa aberto, segue que o conjunto $\{e+K\} = K \subset A'/K$ é aberto na topologia quociente, logo A'/K é discreto.

Assim, obtemos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A' \longrightarrow A'/K \longrightarrow 0.$$

Portanto A' é a extensão de um grupo abeliano discreto por um grupo abeliano compacto. $\square$

Nossos principais exemplos de LCA-grupos nos dão casos triviais do Teorema de Estrutura. A título de exemplo, considere o LCA-grupo $\mathbb{Q}_p$. Podemos representá-lo como $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{R}^0 \times \mathbb{Q}_p$ em que $\mathbb{R}^0$ é o grupo trivial. Além disso, uma vez que $\mathbb{Z}_p$ é compacto e $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ é discreto, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Agora, iremos introduzir os conceitos preliminares para abordar a dualidade de Pontrjagin. Um *caracter* de um LCA-grupo A é um homomorfismo contínuo de grupos $\chi : A \to \mathbb{T}$. O conjunto $\widehat{A}$ de todos os caracteres de A forma um grupo com a multiplicação dada por:

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x), \;\; x \in A$$

e inverso dado por:

$$\chi^{-1}(x) = \frac{1}{\chi(x)} = \overline{\chi(x)}, \;\; x \in A.$$

O grupo $\widehat{A}$ é chamado de *grupo dual* de A. Observe que $\widehat{A}$ é um grupo abeliano, visto que dados $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{A}$, temos para todo $x \in A$ que

$$\chi_1\chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x) = \chi_2(x)\chi_1(x) = \chi_2\chi_1(x),$$

pois $\chi_1(x), \chi_2(x) \in \mathbb{T}$ que é um grupo abeliano.

Exemplo 5.4.6. Vamos descrever os caracteres de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

(1) Seja $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ um caracter. Então, $\chi(1) = e^{2\pi ix}$ para algum $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, consequentemente para $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário, temos

$$\chi(k) = \chi(1)^k = e^{2\pi ikx}.$$

Logo, $\widehat{\mathbb{Z}} = \{\chi \mid \chi(k) = e^{2\pi ikx},\ \text{com } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$. Assim, ao definirmos o mapa:

$$\begin{array}{rccccc} \varphi: & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & \widehat{\mathbb{Z}} & & \\ & x & \mapsto & \varphi_x: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{T} \\ & & & & k & \mapsto & e^{2\pi ikx}, \end{array}$$

podemos observar que o grupo dual $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$.

(2) Todo caracter de $\mathbb{R}$ é da forma $x \mapsto e^{2\pi ixy}$ com $y \in \mathbb{R}$. Este resultado pode ser visto em *A Course in Functional Analysis* de John B. Conway (Referência [7, Teorema 9.11]). De modo análogo ao exempo anterior, temos que $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

(3) Os caracteres de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são precisamente os caracteres $\mathbb{R}$ que levam $\mathbb{Z}$ em 1. Logo, podemos descrevê-los como os caracteres da forma $x \mapsto e^{2\pi ixk}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, segue que $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$.

Visto que o grupo dual é um grupo abeliano, gostaríamos de atribuir uma topologia a ele. Dado um grupo topológico A, considere o grupo dual $\widehat{A}$. Sejam $K \subset A$ um conjunto compacto e $U \subset \mathbb{T}$ um conjunto aberto, definimos o conjunto

$$\mathbb{L}(K, U) = \{\chi \in \widehat{A} \mid \chi(K) \subset U\}.$$

A topologia gerada pela subbase $\{\mathbb{L}(K, U) \mid K \in A,\ U \in \mathbb{T}\}$ é chamada de *topologia compacto-aberta*.

Ademais, afirmamos que com a topologia compacto-aberta, o grupo dual $\widehat{A}$ de um LCA-grupo A também é um LCA-grupo. A construção deste resultado pode ser consultada em

Principles of Harmonic Analysis de Anton Deitmar e Siegfried Echterhoff (Referência [10, §3.1 e §3.2]).

Proposição 5.4.7. [10, Proposição 3.1.5]

(1) *Se A é compacto. Então, $\widehat{A}$ é discreto.*

(2) *Se A é discreto. Então, $\widehat{A}$ é compacto.*

Demonstração. Sejam A compacto e $\mathbb{L}(A, \{\Re(\cdot) > 0\}\}$ o conjunto de todos os caracteres cuja imagem está no conjunto aberto $\{\Re(\cdot) > 0\} \subset \mathbb{T}$ dos elementos de $\mathbb{T}$ com parte real positiva.

Observe que $\mathbb{L}(A, \{\Re(\cdot) > 0\}\}$ é um elemento da subbase da topologia compacto-aberta em $\widehat{A}$, logo é aberto. Além disso, o caracter trivial

$$\begin{array}{rccc} \chi_e : & A & \to & \mathbb{T} \\ & a & \mapsto & 1, \end{array}$$

que é o elemento neutro de $\widehat{A}$, pertence a $\mathbb{L}(A, \{\Re(\cdot) > 0\}\}$. Logo, $\mathbb{L}(A, \{\Re(\cdot) > 0\}\}$ é uma vizinhança aberta do elemento neutro. Observe que para todo $\chi \in \widehat{A}$, a imagem $\chi(A)$ é subgrupo de $\mathbb{T}$, mas o único subgrupo de $\mathbb{T}$ que está contido em $\{\Re(\cdot) > 0\}$ é o grupo trivial. Portanto, $\mathbb{L}(A, \{\Re(\cdot) > 0\}\} = \{\chi_e\}$ e $\widehat{A}$ é discreto (Definição 5.4.2).

Por outro lado, assuma que A é discreto. Então, $\widehat{A}$ é um subconjunto de $\mathrm{Map}(A, \mathbb{T})$ de todos os mapas de A para $\mathbb{T}$. Considere o conjunto $\prod_{a\in A} \mathbb{T}$, segue do Teorema de Tychonoff (Teorema 2.1.6) que $\prod_{a\in A} \mathbb{T}$ é um espaço Hausdorff compacto na topologia produto. Agora, observe que o conjunto $\mathrm{Map}(A, \mathbb{T})$ é homeomorfo $\prod_{a\in A} \mathbb{T}$, visto que a função:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Map}(A, \mathbb{T}) & \to & \prod_{a\in A} \mathbb{T} \\ & f & \mapsto & (f(a))_{a\in A} \end{array}$$

é bijetiva e um mapa aberto. Assim, $\mathrm{Map}(A, \mathbb{T})$ é compacto.

Queremos mostrar que $\widehat{A}$ é um subespaço fechado. Seja $f \in \mathrm{Map}(A, \mathbb{T}) \setminus \widehat{A}$ um mapa que não é homomorfismo de grupos, ou seja, existem $a, b \in A$ tais que $f(a)f(b) \neq f(ab)$. Sejam X e Y vizinhanças abertas disjuntas de $f(a)f(b)$ e $f(ab)$ respectivamente. Primeiro, defina $U_1 = \{g \mid g(ab) \in Y\}$. Em seguida, considere o mapa:

$$\begin{array}{rccc} m : & \mathbb{T} \times \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ & (t, t') & \mapsto & t \cdot t' \end{array}$$

Temos que m é contínuo, logo, $m^{-1}(X)$ é aberto e pode ser expresso como

$$m^{-1}(X) = \bigcup_i W_i \times Z_i,$$

em que W_i e Z_i são abertos de $\mathbb{T}$. Como m é sobrejetiva e $f(a)f(b) \in X$, podemos assumir que $f(a) \in W = W_j$ e $f(b) \in Z = Z_j$ para algum j. Agora, defina os conjuntos

$$U_2 = \{g \mid g(a) \in W\} \text{ e } U_3 = \{g \mid g(b) \in Z\}.$$

Temos que cada U_i, com $1 \leq i \leq 3$, é aberto na topologia compacto-aberta de $\mathrm{Map}(A, \mathbb{T})$. Assim, definindo $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, obtemos uma vizinhança aberta de f. Observe que se $g \in U$. Então, $g(ab) \in Y$ e $g(a)g(b) \in X$ e, como $X \cap Y = \varnothing$, g não é homomorfismo. Logo, $U \cap \widehat{A} = \varnothing$. Assim, $\widehat{A}$ é um subespaço fechado de um espaço compacto e, portanto, é compacto. □

Segue da proposição acima que o grupo dual de $\mathbb{T}$ possui a topologia discreta, logo, $\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ como LCA-grupos. Ademais, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.4.8. [9, Proposição 7.1.6] *Os isomorfismo de grupos $\widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ e $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ apresentados no Exemplo 5.4.6 são homeomorfismos. Então, em particular $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ e $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$ como LCA-grupos.* □

Dado um LCA-grupo A, temos que $\widehat{A}$ também é um LCA-grupo, logo, podemos considerar o seu grupo dual $\widehat{\widehat{A}}$. Por exemplo, sabemos que $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ (Proposição 5.4.8), logo:

$$\widehat{\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \ \widehat{\widehat{\mathbb{Z}}} \cong \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \text{ e } \widehat{\widehat{\mathbb{R}}} \cong \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}.$$

De modo geral, existe um homomorfismo canônico Δ, chamado *mapa de Pontrjagin*, definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & A & \to & \widehat{\widehat{A}} \\ & x & \mapsto & \Delta_x \end{array},$$

onde

$$\Delta_x(\chi) = \chi(x).$$

Usando este mapa, podemos apresentar o seguinte resultado:

Teorema 5.4.9 (Dualidade de Pontrjagin)**.** [10, Teorema 3.5.5] *O mapa de Pontrjagin $\Delta : A \to \widehat{\widehat{A}}$ é um isomorfismo de LCA-grupos. Então, para todo LCA-grupo A, temos que $A \cong \widehat{\widehat{A}}$.* □

A partir do exposto, podemos definir a categoria LCA dos grupos abelianos localmente compactos e homomorfismos contínuos e avaliar algumas de suas propriedades.

A categoria LCA é pré-abeliana, pois é aditiva e todos os núcleos e co-núcleos existem. Temos que o núcleo de um homomorfismo contínuo $f : A \to B$ é o núcleo algébrico usual equipado com a topologia subespaço. Já o co-núcleo de f é $B/\mathrm{Cl}_B(\mathrm{Im}(f))$ equipado com a topologia quociente. No entanto, LCA não é uma categoria abeliana. A título de exemplo, o mapa $\Theta : \mathbb{R}^{dis} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto x$ é monomorfismo e epimorfismo, mas não é isomorfismo (Exemplo 1).

Ademais, podemos definir o *funtor da dualidade de Pontrjagin*:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbb{D}: & \mathsf{LCA} & \to & \mathsf{LCA} \\ & A & \mapsto & \mathbb{D}(A) = \widehat{A} \\ & A \xrightarrow{f} B & \mapsto & \widehat{B} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \widehat{A} \end{array}$$

onde $\mathbb{D}(f)(\chi) = \chi \circ f$. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.4.10. [30, Teorema 4.1]

(1) *O funtor da dualidade de Pontrjagin $A \to \mathbb{D}(A)$ induz uma auto-dualidade contravariante na categoria LCA. O mapa de bi-dualidade $A \to \mathbb{D}(\mathbb{D}(A))$ é um isomorfismo.*

(2) *O funtor da dualidade de Pontrjagin $A \to \mathbb{D}(A)$ restringe-se a uma dualidade contravariante entre grupos abelianos compactos e grupos abelianos discretos.*

Demonstração. Este resultado equivale aos Teoremas 5.4.9 e 5.4.7. □

Em outras palavras o funtor $\mathbb{D}$ induz uma equivalência de categorias entre LCA e LCA^{op} que se restringe à uma equivalência entre as subcategorias $\mathsf{AbGrTop}^{disc}$ de grupos abelianos topológicos discretos e $\mathsf{CHAbTop}$ de grupos abelianos Hausdorff compactos.

5.4.1 Ponto de vista condensado

Agora, faremos uma análise a partir do ponto de vista condensado e, para isso, é importante lembrar dois fatos importantes. Primeiro, dado um LCA-grupo A, o grupo condensado associado $\underline{A}$ é definido em cada componente como $\underline{A}(S) = Hom_{\mathsf{Top}}(S, A)$ (Exemplo 5.1.8), onde S é profinito. Ademais, dado um grupo abeliano condensado M, temos que o funtor Hom interno $\underline{Hom}(M, -)$ é o adjunto à direita do funtor $(-) \otimes M$ (Definição 5.3.7) e quando avaliado em um grupo abeliano condensado N obtemos a seguinte igualdade (Lema 5.3.8):

$$\underline{Hom}(M, N)(S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}] \otimes M, N), \quad \forall S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet}).$$

Assim, sejam A e B LCA-grupos e considere o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{LCA}}(A,B)$. Como $\mathfrak{LCA}$ é uma categoria pré-aditiva, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{LCA}}(A,B)$ é um grupo abeliano. Além disso, ao equipar $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{LCA}}(A,B)$ com a topologia compacto-aberta, podemos considerar o conjunto condensado $\underline{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{LCA}}(A,B)}$. Queremos mostrar que $\underline{Hom}(\underline{A},\underline{B}) \cong \underline{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{LCA}}(A,B)}$, e para isso, veremos alguns resultados preliminares.

Espaços localmente compactos são compactamente gerados (Proposição 2.1.11), em particular, LCA-grupos também são. Assim, podemos mapear grupos abelianos localmente compactos de forma plenamente fiel em grupos abelianos condensados com o funtor $A \to \underline{A}$ (Proposição 5.1.18). Ademais, temos $\underline{A}(*)_{top} = A$ para todo LCA-grupo A.

Além disso, uma ideia chave para demonstração do nosso resultado principal é que dados LCA-grupos A e B e um conjunto extremamente desconexo S, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A,B)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A \times S, B).$$

Obtemos esta igualdade a partir dos resultados a seguir:

Teorema 5.4.11. [24, Teorema 46.10] *Sejam X um espaço localmente compacto e Y um espaço topológico, e equipe* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ *com a topologia compacto-aberta. Então, o mapa de avaliação:*

$$\begin{array}{rccc} e_v: & X \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y) & \to & Y \\ & (x,f) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é contínuo.

Demonstração. Dado um ponto $(x,f) \in X \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ e uma vizinhança aberta $V \subset Y$ de $f(x)$, queremos encontrar uma vizinhança aberta de (x,f) cuja imagem está contida em V. Primeiro, usando a continuidade de f e o fato de X ser localmente compacto podemos escolher uma vizinhança aberta U de x com fecho $\mathrm{Cl}_X(U)$ compacto tal que $f(\mathrm{Cl}_X(U)) \subset V$ (Lema 2.1.9). Em seguida, considere o conjunto $U \times \mathbb{L}(\mathrm{Cl}_X(U), V) \subset X \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$. Tal conjunto é aberto e contém (x,f), além disso, se $(x',f') \in U \times \mathbb{L}(\mathrm{Cl}_X(U), V)$. Então, $e_v(x',f') = f'(x') \in V$. Portanto, $U \times \mathbb{L}(\mathrm{Cl}_X(U), V)$ é a vizinhança desejada. $\square$

Dada uma função $f : X \times Z \to Y$, existe uma função correspondente

$$F : Z \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y),$$

definida pela equação $F(z)(x) = f(x,z)$. Reciprocamente, dado $F : Z \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$, esta equação define uma função correspondente $f : X \times Z \to Y$. Dizemos, que F é o mapa de Z para $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ induzido por f.

Teorema 5.4.12. [24, Teorema 46.11] *Sejam X e Y espaços topológicos em que X é localmente compacto e equipe $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ com a topologia compacto-aberta. Então, $f : X \times Z \to Y$ é contínua se e somente se o mapa induzido $F : Z \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ é contínuo.*

Demonstração. Primeiro, suponha F contínua. Então, f também é contínua, pois é igual a composição:

$$X \times Z \xrightarrow{1_X \times \mathbf{F}} X \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y) \xrightarrow{e_v} Y.$$

Por outro lado, suponha que f é contínua. Para provar a continuidade de F, tomaremos um ponto $z_0 \in Z$ e um elemento $\mathbb{L}(K,U)$ da subbase para $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ contendo $F(z_0)$ e encontraremos uma vizinhança aberta W de z_0 tal que $F(W) \subset \mathbb{L}(K,U)$.

$F(z_0) \in \mathbb{L}(K,U)$ significa que $F(z_0)(x) = f(x,z_0) \in U$ para todo $x \in K$, ou seja, $f(K \times z_0) \subset U$. A continuidade de f implica que $f^{-1}(U)$ é um aberto em $X \times Z$ contendo $K \times z_0$. Então, $f^{-1}(U) \cap (K \times Z)$ é aberto no subespaço $K \times Z$ e contém $K \times z_0$. O lema do tubo (Lema 2.1.5) implica que existe W vizinhança aberta de z_0 tal que o tubo $K \times W$ está em $f^{-1}(U)$. Então, para $z \in W$ e $x \in K$, temos $f(x,z) \in U$. Portanto, $F(W) \subset \mathbb{L}(K,U)$. $\square$

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo é construir uma transformação natural

$$\omega : \underline{Hom}(\underline{A},\underline{B}) \to \underline{\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A,B)}.$$

Primeiro, observe que para todo S extremamente desconexo, temos:

$$\underline{Hom}(\underline{A},\underline{B})(S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}],\underline{B}) \text{ (Lema 5.3.8).}$$

Assim, considerando $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}],\underline{B})$, temos o seguinte resultado:

Lema 5.4.13. [3, p. 80] *Sejam A e B LCA-grupos e S um conjunto extremamente desconexo. Uma transformação natural $\alpha : \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \to \underline{B}$ entre grupos abelianos condensados avaliada em $*$ nos dá um homomorfismo de grupos abelianos:*

$$\alpha_* : A \otimes \mathbb{Z}[S] \to B.$$

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}],\underline{B})$. Temos pela propriedade universal da feixificação (Definição 4.3.7) que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}],\underline{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{PSh}(\kappa\text{-}\mathsf{EDSet},\mathsf{AbGrp})}(\mathcal{F}_{\underline{A},\mathbb{Z}[\underline{S}]},\underline{B}).$$

Logo, α corresponde a uma transformação natural $\tilde{\alpha} : \mathcal{F}_{\underline{A},\mathbb{Z}[\underline{S}]} \to \underline{B}$ que avaliada em $*$ nos dá o homomorfismo de grupos abelianos:

$$\tilde{\alpha}_* : \underline{A}(*) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}](*) \to \underline{B}(*).$$

Além disso, segue da propriedade universal do produto tensorial (Teorema A.2.3) que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(\underline{A}(*) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}](*), \underline{B}(*)) \cong \mathrm{BiLin}(\underline{A}(*) \times \mathbb{Z}[\underline{S}](*), \underline{B}(*)).$$

Então, $\tilde{\alpha}_*$ equivale a um mapa bilinear α'. Ademais, temos pela bilinearidade de α' que para todo $a \in \underline{A}(*)$, o mapa $\alpha'_a : \mathbb{Z}[\underline{S}](*) \to \underline{B}(*)$ é linear e, para todo $s \in \mathbb{Z}[\underline{S}](*)$ o mapa $\alpha'_s : \underline{A}(*) \to \underline{B}(*)$ também é linear. Como A e B são LCA-grupos, α'_s corresponde a um mapa $A \to B$ (Proposição 5.1.18). Já α'_a, corresponde a um mapa $\mathbb{Z}[S] \to B$, visto que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{bGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}\mathsf{Sh}(\kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}, \mathcal{A}\mathsf{bGrp})}(P_{\underline{S}}, \underline{B}) \ \text{(Observação 5.2.4)},$$

e qualquer transformação natural $P_{\underline{S}} \to \underline{B}$ avaliada em $*$ é da forma $\mathbb{Z}[\underline{S}(*)] = \mathbb{Z}[S] \to B$. Assim:

$$\mathrm{BiLin}(\underline{A}(*) \times \mathbb{Z}[\underline{S}](*), \underline{B}(*)) \cong \mathrm{BiLin}(A \times \mathbb{Z}[S], B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A \otimes \mathbb{Z}[S], B).$$

$\square$

Com isso, podemos considerar o funtor:

$$\begin{array}{rccc} \Gamma(*, -) : & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{bGrp})}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A \otimes \mathbb{Z}[S], B) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha_* \end{array}.$$

Além disso, temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A \otimes \mathbb{Z}[S], B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(\mathbb{Z}[S], \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A, B))$ (Teorema A.2.6) cujo isomorfismo é dado por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A \otimes \mathbb{Z}[S], B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(\mathbb{Z}[S], \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A, B)) \\ & f & \mapsto & \varphi_f : [s] \mapsto f(- \otimes [s]) \end{array}.$$

Também temos pela propriedade universal dos grupos abelianos livres (Definição A.1.1) que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(\mathbb{Z}[S], \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A, B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathsf{bGrp}}(A, B)).$$

Visto que esta relação é dada por um diagrama comutativo da forma:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{Z}[S] \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B)
\end{tikzcd}
$$

em que $\iota(s) = [s]$, para satisfazer $\tilde{f} \circ \iota = f$, é necessário que $\tilde{f}([s]) = f(s)$. Assim, em nosso contexto, podemos afirmar que α_* está associado ao mapeamento que leva s em $\alpha_*(- \otimes [s])$.

A partir do exposto, obtemos um mapa

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B))$$

e como $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B))$, inferimos que o mapa

$$\omega : \underline{Hom}(\underline{A}, \underline{B}) \to \underline{\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)}$$

é tal que o diagrama a seguir comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{B})(S) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) \arrow[r, "\Gamma(*,-)"] \arrow[dd, dashed, "\omega_S"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A \otimes \mathbb{Z}[S], B) \arrow[d, "\cong"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(\mathbb{Z}[S], \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B)) \arrow[d, "\cong"] \\
\underline{\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B))
\end{tikzcd}
$$

Logo, precisamos verificar que ω é um isomorfismo natural.

Teorema 5.4.14. [30, Proposição 4.2] *Sejam A e B LCA-grupos. Então, existe um isomorfismo natural de grupos abelianos condensados*

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{B}) \cong \underline{\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)}.$$

Demonstração. Seja ω a transformação natural descrita anteriormente, iremos mostrar que esta é um isomorfismo natural. Devido à extensão desta demonstração, iremos dividi-la em afirmações que serão demonstradas a seguir:

Afirmação 1. Seja S um conjunto extremamente desconexo. Então existe um monomorfismo:

$$\Omega_S : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond(AbGrp)}}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A, B))$$

tal que ω_S é a co-restrição de Ω_S em $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A,B))$. Em particular, ω_S é monomorfismo.

Afirmação 2. Seja $\tilde{\nu} : \mathbb{Z}[\underline{A}] \to \underline{A}$ o epimorfismo natural da Proposição 5.2.5 e considere o funtor exato $(-) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$ (Corolário 5.3.6). Seja $\sigma : \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \to \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$. o morfismo induzido por $(-) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$. Então, ω_S é sobrejetivo se o morfismo:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma' : & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}], \underline{B}) \\ & \vartheta & \mapsto & \vartheta \circ \sigma \end{array}$$

for sobrejetivo.

Afirmação 3. σ' é sobrejetivo se existe γ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A} \times \underline{S}] \arrow[r, "d_1"] & \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"'] & \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\gamma"] & 0 \\ & & \underline{B} & & \end{tikzcd}$$

Afirmação 4. γ existe, se o $\beta \circ d_1 = 0$..

Afirmação 5. A composição $\beta \circ d_1$ é zero.

Prova 1. Considere o epimorfismo natural $\tilde{\nu} : \mathbb{Z}[\underline{A}] \to \underline{A}$ (Proposição 5.2.5). Como o funtor $(-) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$ é exato (Corolário 5.3.6), obtemos o epimorfismo induzido:

$$\sigma : \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \to \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}].$$

Observe que $\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}] \cong \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$ (Proposição 5.3.4), assim, representando o domínio de σ por $\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}]$, induzimos o seguinte mapa:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma' : & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}], \underline{B}) \\ & \vartheta & \mapsto & \vartheta \circ \sigma \end{array}$$

Afirmamos que σ' é injetivo. De fato, sejam $\vartheta_1, \vartheta_2 : \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \to \underline{B}$ transformações naturais tais que $\sigma'(\vartheta_1) = \sigma'(\vartheta_2)$, isto é, $\vartheta_1 \circ \sigma = \vartheta_2 \circ \sigma$. Visto que σ é um epimorfismo, segue que $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Além disso, definimos Ω_S como sendo o mapa que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) \arrow[rr, "\Gamma(*,-)"] \arrow[d, hook, "\sigma'"'] \arrow[drr, dashed, "\Omega_S"] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A, B)) \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{A \times S}], \underline{B}) \arrow[d, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A, B)) \arrow[u] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{A \times S}, \underline{B}) \arrow[rr, "\Gamma(*,-)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A \times S, B) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Observe que a equivalência da esquerda decorre da adjunção livre-esquecimento (Observação 5.2.3), enquanto a equivalência da direita é uma propriedade da topologia compacto aberta de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A, B)$ (Teorema 5.4.12). Ademais, segue o $\Gamma(*, -)$ inferior é um isomorfismo (Proposição 5.1.18). Assim, temos que o mapa Ω_S é injetivo e, visto que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A, B)),$$

segue que ω_S é a co-restrição de Ω_S, logo ω_S é injetiva. Além disso, devido à construção de ω_S, podemos afirmar que a imagem de α por ω_S é uma função contínua.

Prova 2. Suponha que σ' seja sobrejetivo e considere o diagrama comutativo da **Prova 1**. Então, como os demais mapas do diagrama são sobrejetivos, ω_S será uma composição de sobrejeções.

Prova 3. Considere a sequência exata (Proposição 5.2.5):

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{Z}[\underline{A}] \xrightarrow{\tilde{\nu}} \underline{A} \longrightarrow 0 \ ,$$

em que $\tilde{\mu}$ leva um gerador $[(a_1, a_2)]$ em $[a_1 + a_2] - [a_1] - [a_2]$. Como o funtor $(-) \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$ é exato (Corolário 5.3.6), induzimos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \xrightarrow{\quad d_1 \quad} \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \xrightarrow{\quad \sigma \quad} \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \longrightarrow 0 \ .$$

Ademais, como $\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \cong \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A} \times \underline{S}]$ e $\mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \cong \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}]$ (Proposição 5.3.4), obtemos a seguinte sequência exata equivalente:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A} \times \underline{S}] \xrightarrow{\quad d_1 \quad} \mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}] \xrightarrow{\quad \sigma \quad} \underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \longrightarrow 0 \ .$$

Agora, suponha que dado $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{A}\times\underline{S}],\underline{B})$, existe uma transformação natural $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})}(\underline{A}\otimes\mathbb{Z}[\underline{S}],\underline{B})$ tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S}] \arrow[r, "d_1"] & \mathbb{Z}[\underline{A}\times\underline{S}] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"'] & \underline{A}\otimes\mathbb{Z}[\underline{S}] \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\gamma"] & 0 \\
& & \underline{B} & &
\end{tikzcd}$$

Então, $\beta = \gamma\circ\sigma$, ou seja, σ' é sobrejetiva.

Prova 4. Suponha que $\beta\circ d_1 = 0$. Como $\sigma\circ d_1 = 0$, temos que o morfismo zero, comuta o diagrama.

Prova 5. Para mostrar que $\beta\circ d_1$ é zero, considere a sequência exata de pré-feixes:

$$P_{\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S}} \xrightarrow{\mu\otimes 1_{P_{\underline{S}}}} P_{\underline{A}\times\underline{S}} \xrightarrow{\beta'} \underline{B}$$

em que $\mu\otimes 1_{P_{\underline{S}}}$ e β' correspondem às transformações naturais d_1 e β respectivamente. É importante recordar que as transformações naturais induzidas pelo funtor $-\otimes P_{\underline{S}}$ são tais que as componentes são mapas bilineares, por exemplo, dado $X\in \mathrm{Obj}(\mathcal{EDSet})$, temos:

$$\mu_X\otimes 1_{P_{\underline{S}_X}} : \mathbb{Z}[\underline{A}\times\underline{A}](X)\otimes\mathbb{Z}[\underline{S}(X)] \to \mathbb{Z}[\underline{A}](X)\otimes\mathbb{Z}[\underline{S}(X)].$$

Além disso, segue da adjunção livre-esquecimento (Definição A.1.1) que dado X extremamente desconexo, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(\mathbb{Z}[(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})(X)],\mathbb{Z}[(\underline{A}\times\underline{S})(X)]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}((\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})(X),\mathbb{Z}[(\underline{A}\times\underline{S})(X)]).$$

Assim, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})(X)] \arrow[r, "\mu_X\otimes 1_{P_{\underline{S}_X}}"] & \mathbb{Z}[(\underline{A}\times\underline{S})(X)] \arrow[r, "\beta'_X"] & \underline{B}(X) \\
(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})(X) \arrow[u, hook, "\iota_{(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})_X}"] \arrow[ur, dashed, "(\mu_X\otimes 1_{P_{\underline{S}_X}})\circ\iota_{(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})_X}"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Dado $f\in(\underline{A}\times\underline{A}\times\underline{S})(X) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, A\times A\times S)$, podemos representá-la como $f =$

(f_1, f_2, f_3) em que $f_1, f_2 : X \to A$ e $f_3 : X \to S$. Com isso, temos:

$$(f_1, f_2, f_3) \xmapsto{\iota_X} [(f_1, f_2, f_3)] \xmapsto{\mu_X \otimes 1_{P_{\underline{S}}X}} [(f_1 + f_2, f_3)] - [(f_1, f_3)] - [(f_2, f_3)].$$

Mas, como A é um grupo abeliano, podemos interpretar uma combinação linear formal de funções da seguinte maneira:

$$[(f_1 + f_2, f_3)](x) - [(f_1, f_3)](x) - [(f_2, f_3)](x) := (f_1 + f_2, f_3)(x) - (f_1, f_3)(x) - (f_2, f_3)(x)$$

$$= ((f_1 + f_2)(x), f_3(x)) - (f_1(x), f_3(x)) - (f_2(x), f_3(x)) = (0, f_3(x)), \forall x \in X.$$

Logo, $(\mu \otimes 1_{P_{\underline{S}}}) \circ \iota$ é tal que $(f_1, f_2, f_3) \mapsto (0_{X,A}, f_3)$. Observe que $(0_{X,A}, f_3) \in (\underline{A} \times \underline{S})(X)$, assim, temos a seguinte sequência equivalente:

$$\underline{A} \times \underline{A} \times \underline{S} \longrightarrow \underline{A} \times \underline{S} \longrightarrow \underline{B}.$$

Além disso, temos que esta sequência corresponde à uma sequência de mapas contínuos:

$$\begin{array}{ccccc} A \times A \times S & \to & A \times S & \to & B \\ (a_1, a_2, s) & \mapsto & (0, s) & \mapsto & \beta_*(0, s) \end{array}.$$

Como um mapa $A \times S \to B$ equivale à um mapa $S \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(A, B)$ (Teorema 5.4.12), fixado um $s \in S$, obtemos um homomorfismo $A \to B$ que, em particular, leva 0 em 0. Portanto, segue das equivalências que $\beta \circ d_1 = 0$.

$\square$

Conclusão

Nesta dissertação, apresentamos os conceitos iniciais da Matemática Condensada e seus pré-requisitos de maneira mais abrangente e detalhada, utilizando como principal referência as notas de aula *Lectures on Condensed Mathematics* de Peter Scholze. Como dito anteriormente, a motivação para essa teoria surgiu da necessidade de abordar problemas fundamentais em álgebra quando as estruturas algébricas em questão estão equipadas com uma topologia. A partir desta motivação, introduzimos a definição de objetos condensados, demonstramos que o funtor $\underline{(-)} : \kappa\text{-}\mathsf{CGTop} \to \mathsf{Cond}(\mathsf{Set})$ dos espaços topológicos κ- compactamente gerados para conjuntos condensados é plenamente fiel; identificamos formas equivalentes de representar a categoria de conjuntos condensados e observamos que, embora $\mathsf{AbGrpTop}$ não seja abeliana, conforme evidenciado no Exemplo 1, a categoria $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é abeliana, apresentando propriedades notáveis. Por fim, concluímos a dissertação demonstrando a notável interação entre a categoria LCA e a categoria de grupos abelianos condensados $\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. De fato, estabelecemos que dados LCA-grupos A e B e considerando o grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)$. Como LCA equipado com a topologia compacto-aberta, temos o isomorfismo:

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{B}) \cong \underline{\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}}(A, B)},$$

conforme enunciado no Teorema 5.4.11.

Por fim, vale ressaltar que um próximo passo no estudo da Matemática Condensada pode envolver a continuação da exploração das notas de Scholze a partir do Capítulo VI, no qual os grupos abelianos sólidos são introduzidos.

Bibliografia

[1] ALMEIDA, C.; CAETANO, M. J.; CAMPOS, L. F. A.; CONTIERO, A.; MACQUARRIE, J.; SCHNEIDER, C.; SILVA, I. M.; SOUZA, L. H. R.; SOUZA, R; STEFANO, M. *Matemática Condensada*. Notas do Seminário de Matemática Condensada da UFMG. 2023. Disponível em: `https://schcs.github.io/CondensedMath/`. Acesso em: 19/12/2023.

[2] ALRICH, L. F. *Notas de Aula.* Notas de aula de curso de Aplicações de teoria de conjuntos no ICMC na USP, 2020.

[3] ÀSGEIRSSON, D. *The Foundations of Condensed Mathematics.* Dissertação de mestrado. 2021. Disponível em: `https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/Condensed-foundations.pdf`. Acesso em: 26/04/2023.

[4] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* Cambridge University Press, 2006. Apêndice A.

[5] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 1994.

[6] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures.* Cambridge University Press, 1994.

[7] CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis* 2nd ed. Springer, 1990.

[8] DÉGLISE, F. *Condensed and Locally Compact Abelian Groups.* Notas de um Workshop sobre as palestras de Peter Scholze. 2020. Disponível em `https://deglise.perso.math.cnrs.fr/docs/2020/Condensed.pdf`. Acesso em: 28/05/2023.

[9] DEITMAR, A. *A First Course in Harmonic Analysis.* 2nd ed. Springer, 2005.

[10] DEITMAR, A.; ECHTERHOFF, S. *Principles of Harmonic Analysis.* Springer, 2009.

[11] DUGUNDJI, J. *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[12] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. *Abstract Algebra.* John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[13] EILENBERG, S.; MACLANE, S. *General Theory of Natural Equivalences* Transactions of the American Mathematical Society Vol. 58, No. 2, pp. 231-294, 1945. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/1990284`. Acesso em: 26/12/2023.

[14] ETINGOF, P.; GELAKI S.; NIKSHYCH D.; OSTRIK V. *Tensor Categories* American Mathematical Society, 2015.

[15] GROTHENDIECK, A. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Project Euclid, 1957. Disponível em: `https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-9/issue-2/Sur-quelques-points-dalg%c3%a8bre-homologique-I/10.2748/tmj/1178244839.full`. Acesso em: 21/02/2023.

[16] HOFFMANN, N.; SPITZWECK, M. *Homological algebra with locally compact abelian groups.* Adv. Math. 212, no. 2, 504–524, 2007.

[17] HUNGERFORD, T. W. *Algebra* Springer, 1980.

[18] JOHNSTONE, P. T. *Stone Spaces* Cambridge University Press, 1982.

[19] KASHIWARA, M.; SCHAPIRA, P. *Categories and Sheaves.* Springer, 2006.

[20] LEINSTER, T. *Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 2014.

[21] LURIE, J. *Ultracategories.* Preprint version. 2018. Disponível em: `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf`. Acesso em: 06/12/2022.

[22] MAIR, C. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups.* 2021. Disponível em: `https://arxiv.org/pdf/2105.07888.pdf`. Acesso em: 06/12/2022.

[23] MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, 1978.

[24] MUNKRES, J. *Topology.* Pearson Education Limited, 2014.

[25] NLAB AUTHORS. *Filtered category.* Disponível em: `https://ncatlab.org/nlab/show/filtered+category`. Acesso em: 27/12/2023.

[26] NLAB AUTHORS. *Free abelian groups.* Disponível em: `https://ncatlab.org/nlab/revision/free+abelian+group/18`. Acesso em: 10/07/2023.

[27] NLAB AUTHORS. *Tôhoku.* Disponível em: `https://ncatlab.org/nlab/revision/T%C3%B4hoku/16`. Acesso em: 10/07/2023.

[28] PONTRJAGIN, L. *Topological Groups* Princeton University Press. 1946.

[29] ROCH, S. *A Brief Introduction to Abelian Categories.* Notas de aula. 2020. Disponível em: `https://page.math.tu-berlin.de/~roch/files/abelian_categories.pdf`. Acesso em: 20/02/2023.

[30] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics.* Notas de aula. 2019. Disponível em: `https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`. Acesso em: 06/12/2022.

[31] THE STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project.* 2018. Disponível em: `https://stacks.math.columbia.edu/`. Acesso em: 06/12/2022

[32] WEIBEL, C. A. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 1994.

[33] WILSON, J. S.*Profinite Groups.* Clarendon Press, 1998.

Apêndice A

Grupos abelianos

Neste apêndice, apresentaremos conceitos e resultados fundamentais sobre grupos abelianos que desempenham um papel crucial na teoria de grupos abelianos condensados. Inicialmente, exploraremos propriedades de grupos abelianos livres e, em seguida, discutiremos resultados relevantes relacionados ao produto tensorial.

A.1 Grupos abelianos livres

Os grupos abelianos livres, como veremos a seguir, possuem boas características que, por meio da teoria de feixes, se estendem aos grupos abelianos livres condensados.

Definição A.1.1. [17, p. 71] Dizemos que um grupo abeliano F é um *grupo abeliano livre* se existe um conjunto S e uma função $\iota : S \to F$ com a seguinte propriedade universal: *Dado um grupo abeliano A e uma função $f : S \to A$, existe único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : F \to A$ tal que $\tilde{f} \circ \iota = f$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Observação A.1.2. Segue da definição que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(F, A)$.

A seguir, apresentaremos uma descrição explícita de grupos abelianos livres, representando-os como o conjunto de combinações lineares formais dos elementos da base. Desta forma, poderemos exibir algumas propriedades de grupos abelianos livres.

Uma *combinação linear formal* de elementos de um conjunto S é uma função $a : S \to \mathbb{Z}$ tal que apenas uma quantidade finita de $a_s \in \mathbb{Z}$ é não nula. Identificando um elemento $s \in S$

com a função $[s] : S \to \mathbb{Z}$ tal que $s \mapsto 1$ e $r \mapsto 0$ para todo $r \neq s$, escrevemos:

$$a = \sum_{s \in S} a_s[s],$$

onde $a_s \in \mathbb{Z}$ é o coeficiente de $[s]$ na combinação linear.

Definição A.1.3. [26, Definição 3.6] Seja $S \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, o *grupo das combinações lineares* $\mathbb{Z}[S]$ é o grupo das combinações lineares formais cuja operação é a adição pontual em $\mathbb{Z}$:

$$\left(\sum_{s \in S} a_s[s]\right) + \left(\sum_{s \in S} b_s[s]\right) = \sum_{s \in S} (a_s + b_s)[s].$$

Proposição A.1.4. [26, Proposição 3.4] *O grupo abeliano livre em $S \in \mathrm{Obj}(Set)$ é, a menos de isomorfismo, o grupo das combinações lineares formais de elementos de S.*

Demonstração. Sejam S um conjunto, $\mathbb{Z}[S]$ o grupo das combinações lineares formais de S e defina:

$$\begin{array}{rccc} i: & S & \to & \mathbb{Z}[S] \\ & s & \mapsto & [s] \end{array}.$$

Iremos mostrar que $(\mathbb{Z}[S], i)$ satisfaz a propriedade universal dos grupos abelianos livres (Definição A.1.1).

Sejam A um grupo abeliano e $f : S \to A$ uma função. Defina:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{Z}[S] & \to & A \\ & \sum_{s \in S} a_s[s] & \mapsto & \sum_{s \in S} a_s f(s) \end{array}.$$

Observe que $\tilde{f}$ comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{Z}[S] \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

visto que $s \mapsto [s] \mapsto f(s)$. Entretanto, precisamos provar que $\tilde{f}$ é o único homomorfismo que comuta o diagrama. Sejam $\sum_{s \in S} a_s[s], \sum_{s \in S} b_s[s] \in \mathbb{Z}[S]$, temos que:

$$\tilde{f}\left(\sum_{s \in S} a_s[s] + \sum_{s \in S} b_s[s]\right) = \tilde{f}\left(\sum_{s \in S} (a_s + b_s)[s]\right) = \sum_{s \in S} (a_s + b_s) f(s)$$

$$= \sum_{s\in S} a_s f(s) + \sum_{s\in S} b_s f(s) = \tilde{f}\left(\sum_{s\in S} a_s[s]\right) + \tilde{f}\left(\sum_{s\in S} b_s[s]\right).$$

Logo, $\tilde{f}$ é um homomorfismo. Agora, suponha que exista g outro homomorfismo que comute o diagrama. Segue pela propriedade de homomorfismo de grupos que:

$$g\left(\sum_{s\in S} a_s[s]\right) = \sum_{s\in S} a_s g([s]) = \sum_{s\in S} a_s \tilde{f}([s]) = \tilde{f}\left(\sum_{s\in S} a_s[s]\right),$$

em que $\sum_{s\in S} a_s[s]$ é um elemento arbitrário de $\mathbb{Z}[S]$, logo, $g = \tilde{f}$. Por fim, segue da propriedade universal dos grupos abelinos livres que $F \cong \mathbb{Z}[S]$. □

Observação A.1.5. A partir de agora, iremos representar o grupo abeliano livre gerado por S por $\mathbb{Z}[S]$ e utilizaremos a notação de combinações lineares formais. Ademais, se A é um grupo abeliano, existe uma sobrejeção canônica:

$$\begin{array}{rrcl} d_0 : & \mathbb{Z}[A] & \to & A \\ & \sum_{x\in A} a_x[x] & \mapsto & \sum_{x\in A} a_x x. \end{array}$$

Uma *resolução livre* de um grupo abeliano A é uma sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

onde cada F_i é um grupo abeliano livre. A título de exemplo, temos a seguinte sequência:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 5} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \longrightarrow 0.$$

Uma resolução livre importante para matemática condensada será apresentada no Lema A.1.9, no entanto, para demonstração do resultado, é necessário introduzir alguns conceitos preliminares.

Definição A.1.6. [32, Definição 1.1.1] Um *complexo de cadeias de grupos abelianos* $(A_\bullet, d_\bullet)$ é uma família de grupos abelianos $\{A_n\}$ com mapas $d_n : A_n \to A_{n-1}$ tal que cada composição $d_n \circ d_{n-1}$ é zero. Um *morfismo de cadeias* $u : A_\bullet \to B_\bullet$ entre dois complexos é uma família de homomorfismos $u_n : A_n \to B_n$ tais que:

$$u_n \circ d_{n+1} = b_{n+1} \circ u_{n+1}$$

para todo n, isto é, tais que os diagramas a seguir comutam:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "u_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "u_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "u_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "b_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "b_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Agora, considere dois complexos de cadeia $(A_\bullet, d_\bullet)$ e $(B_\bullet, b_\bullet)$ com mapas $s_n : A_n \to B_{n+1}$. Seja $f_n : A_n \to B_n$ definido pela fórmula:

$$f_n = b_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n.$$

Afirmamos que f é um morfismo de cadeia. De fato, temos que:

$$\begin{array}{rcl} f_n \circ d_{n+1} & = & (b_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} \\ & = & b_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\ & = & b_{n+1} \circ (b_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1}) \\ & = & b_{n+1} \circ f_{n+1} \end{array},$$

pois $b_{n+1} \circ b_{n+2} = 0_{B_{n+2}, B_n}$.

Definição A.1.7. [32, Definição 1.4.3] Seja $f : A_\bullet \to B_\bullet$ um morfismo de cadeias. Dizemos que f é homotópico nulo se existem mapas $s_n : A_n \to B_{n+1}$ tais que $f_n = b_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "s_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "b_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "b_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Além disso, dizemos que um complexo de cadeias $A_\bullet$ tem uma *homotopia contratante* se a identidade é homotópica nula. Com isso, temos o seguinte resultado:

Lema A.1.8. [32, Exercício 1.4.3] *Seja $A_\bullet$ um complexo de cadeias. Então, $A_\bullet$ é uma sequência exata se, e somente se, possui uma homotopia contratante.* □

Lema A.1.9. [3, p. 81] *Para todo grupo abeliano A, existe uma resolução livre parcial de grupos abelianos da forma:*

$$\mathbb{Z}[A \times A] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[A] \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Iremos definir a sequência $\mathbb{Z}[A \times A] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[A] \xrightarrow{d_0} A$ de modo que esta possua uma homotopia contratante. Sejam

$$\begin{array}{rccc} d_0 : & \mathbb{Z}[A] & \to & A \\ & [a] & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} s_0 : & A & \to & Z[A] \\ & a & \mapsto & [a] \end{array}$$

os mapas canônicos apresentados na Observação A.1.5. Ademais, defina $d_1 : \mathbb{Z}[A \times A] \to \mathbb{Z}[A]$ como sendo o mapa que leva um gerador $[(a_1, a_2)]$ em $[a_1 + a_2] - [a_1] - [a_2]$. Por fim, defina o mapa $s_1 : \mathbb{Z}[A] \to \mathbb{Z}[A \times A]$ de modo que $s_1([a]) = [(0, a)]$. Com isso, temos:

$$(d_1 \circ s_1 + s_0 \circ d_0)[a] = d_1([(0, a)]) + s_0(a) = ([0 + a] - [0] - [a]) + [a] = [a].$$

Além disso,

$$d_0 \circ s_0(a) + 0 = d_0([a]) = a,$$

logo, a sequência possui uma homotopia contratante e, portanto, é exata (Lema A.1.8).

□

A.2 Produto tensorial

Nesta seção iremos introduzir o produto tensorial de grupos abelianos. Dentre os resultados que serão apresentados, destacamos o Teorema da Associatividade Adjunta (Teorema A.2.6), que será importante para a Seção 5.4.1, e a equivalência $\mathbb{Z}[S_1 \times S_2] \cong \mathbb{Z}[S_1] \otimes \mathbb{Z}[S_2]$ que possui uma versão condensada.

Definição A.2.1. [17, Definição 5.1] Sejam A, B grupos abelianos e $\mathbb{Z}[A \times B]$ o grupo abeliano livre gerado por $A \times B$. Seja K o subgrupo de $\mathbb{Z}[A \times B]$ gerado por todos os elementos da forma:

(1) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$;

(2) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$;

(3) $(na, b) = (a, nb)$;

para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $n \in \mathbb{Z}$. O grupo quociente $\mathbb{Z}[A \times B]/K$ é chamado de *produto tensorial* de A e B, denotado por $A \otimes B$. Além disso, denotamos $(a, b) + K$ por $a \otimes b$ e $(0, 0) + K$ por 0.

Segue direto da definição que os geradores de $A \otimes B$ satisfazem as seguintes relações:

(1) $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$, para todo $a_1, a_2 \in A$ e para todo $b \in B$.

(2) $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$, para todo $a \in A$ e para todo $b_1, b_2 \in B$.

De fato, considere por exemplo o Item (1), como $(a_1+a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \in K$, temos:

$$[(a_1 + a_2, b) + K] - [(a_1, b) + K] - [(a_2, b) + K] = K.$$

Logo, mudando a notação, obtemos:

$$(a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = 0,$$

ou seja,

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b.$$

Definição A.2.2. [17, p. 211] Sejam A, B e C grupos abelianos. Um *mapa bilinear* é uma função $f : A \times B \to C$ tal que para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $n \in \mathbb{Z}$:

(1) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

(2) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

(3) $f(na, b) = nf(a, b) = f(a, nb)$.

Um exemplo de mapa bilinear é o *mapa bilinear canônico* $i : A \times B \to A \otimes B$ que leva (a, b) em $a \otimes b$.

Teorema A.2.3. [17, Teorema 5.6] *Sejam A, B e C grupos abelianos e $g : A \times B \to C$ um mapa bilinear. Então, existe único homomorfismo de grupos $\tilde{g} : A \otimes B \to C$ tal que o diagrama a seguir comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & A \otimes B \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

em que $i : A \times B \to A \otimes B$ é o mapa bilinear canônico. □

A partir deste Teorema, concluímos que $\mathrm{BiLin}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(A \otimes B, C)$.

Proposição A.2.4. [12, Proposição 20] *Sejam A e B grupos abelianos. Então,*

$$A \otimes B \cong B \otimes A.$$

Demonstração. Seja $f : A \times B \to B \otimes A$ o mapa bilinear que leva (a, b) em $b \otimes a$. Então, segue da propriedade universal do produto tensorial (Teorema A.2.3), que existe único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : A \otimes B \to B \otimes A$ tal que $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. Similarmente, existe único morfismo $\tilde{g} : B \otimes A \to A \otimes B$ tal que $b \otimes a \mapsto a \otimes b$. Com isso, temos que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = 1_{A \otimes B}$ e $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 1_{B \otimes A}$. Portanto, $A \otimes B \cong B \otimes A$. $\square$

Proposição A.2.5. [12, Teorema 14] *Sejam A, B e C grupos abelianos. Então:*

$$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C).$$

Demonstração. Para cada $c \in C$, o mapa: $(a, b) \mapsto a \otimes (b \otimes c)$ é bilinear, assim, pela propriedade universal do produto tensorial (Teorema A.2.3), existe único homomorfismo de grupos $A \otimes B \to A \otimes (B \otimes C)$ tal que $a \otimes b \mapsto a \otimes (b \otimes c)$. Isto mostra que o mapa:

$$\begin{array}{rccc} f : & (A \otimes B) \times C & \to & A \otimes (B \otimes C) \\ & (a \otimes b, c) & \mapsto & a \otimes (b \otimes c) \end{array}$$

é bem definido. Novamente, temos pela propriedade universal do produto tensorial que existe único morfismo:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & (A \otimes B) \otimes C & \to & A \otimes (B \otimes C) \\ & (a \otimes b) \otimes c & \mapsto & a \otimes (b \otimes c) \end{array}.$$

De modo análogo, existe único morfismo:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g} : & A \otimes (B \otimes C) & \to & (A \otimes B) \otimes C \\ & a \otimes (b \otimes c) & \mapsto & (a \otimes b) \otimes c \end{array}.$$

Como $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são inversas, segue que $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$. $\square$

Teorema A.2.6 (Teorema da Associatividade Adjunta)**.** [17, Teorema 5.10] *Sejam A, B e C grupos abelianos. Então, existe um isomorfismo de grupos abelianos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A \otimes B, C) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A, C)) \\ & f & \mapsto & \varphi_f : b \mapsto \varphi_f(b) \end{array}$$

definida por:

$$\varphi_f(b)(a) = f(a \otimes b).$$

Demonstração. Primeiro, iremos verificar que para cada $b \in B$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A \otimes B, C)$, $\varphi_f(b) : A \to C$ é homomorfismo. Sejam $a, a' \in A$, temos que:

$$\varphi_f(a + a') = f((a + a') \otimes b) = f(a \otimes b + a' \otimes b) = f(a \otimes b) + f(a' \otimes b) = \varphi_f(a) + \varphi_f(a').$$

Também temos que $\varphi_f : B \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A, C)$ é um homomorfismo. De fato, dados $b, b' \in B$, temos para todo $a \in A$:

$$\varphi_f(b+b')(a) = f(a\otimes(b+b')) = f(a\otimes b+a\otimes b') = f(a\otimes b)+f(a\otimes b') = \varphi_f(b)(a)+\varphi_f(b')(a),$$

logo, φ está bem definida. Observe que φ é homomorfismo, pois dados dois homomorfismos $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A \otimes B, C)$, temos para todo $b \in B$ e para toda $a \in A$:

$$\varphi_{f_1+f_2}(b) = (f_1 + f_2)(a \otimes b) = f_1(a \otimes b) + f_2(a \otimes b) = \varphi_{f_1}(b)(a) + \varphi_{f_2}(b)(a).$$

No entanto, ainda precisamos mostrar que φ é um isomorfismo. Para isso, construiremos uma função inversa de ψ. Dado g em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A, C))$, podemos definir um mapa bilinear:

$$\begin{array}{rccc} \psi'_g : & A \times B & \to & C \\ & (a, b) & \mapsto & g(b)(a). \end{array}$$

Logo, pela propriedade universal do produto tensorial (Teorema A.2.3), existe único homomorfismo $\psi_g : A \otimes B \to C$ tal que $a \otimes b \mapsto g(b)(a)$. Assim, definimos:

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A, C)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A \otimes B, C) \\ & g & \mapsto & \psi_g : a \otimes b \mapsto g(b)(a) \end{array}.$$

Temos que ψ é um homomorfismo, pois para todo $a \otimes b \in A \otimes B$:

$$\psi_{g_1+g_2}(a\otimes b) = (g_1+g_2)(b)(a) = (g_1(b)+g_2(b))(a) = g_1(b)(a)+g_2(b)(a) = \psi_{g_1}(a\otimes b)+\psi_{g_2}(a\otimes b).$$

Por fim, afirmamos que $\varphi \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi$ são as funções identidade. De fato, uma vez que $\psi(g)(a \otimes b) = g(b)(a)$, segue que:

$$\varphi \circ \psi(g(a \otimes b)) = \varphi(\psi(g)(a \otimes b)) = \varphi(g(b)(a)) = g(a \otimes b).$$

Por outro lado, como $\varphi(f)(b)(a) = f(a \otimes b)$ temos:

$$\psi \circ \varphi(f(b)(a)) = \psi(\varphi(f)(b)(a)) = \psi(f(a \otimes b)) = f(b)(a).$$

Portanto, φ é um isomorfismo. $\square$

Observação A.2.7. Considere os funtores $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{A}b\mathcal{G}rp \to \mathcal{A}b\mathcal{G}rp$ tais que:

$$\mathbf{F}(-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{G}rp}(A, -) \text{ e } \mathbf{G}(-) = A \otimes (-).$$

Segue do Teorema A.2.6 que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(B, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A, C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A \otimes B, C),$$

para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{AbGrp})$. Afirmamos que o isomorfismo acima é natural. De fato, seja $f : C \to C'$ um homomorfismo de grupos abelianos e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A \otimes B, C) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\mathbf{G}(B), f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(B, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A, C)) \arrow[d, "(B, \mathbf{F}(f))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A \otimes B, C') \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(B, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A, C'))
\end{tikzcd}$$

em que $(\mathbf{G}(B), f) = f \circ (-)$ e $(B, \mathbf{F}(f)) = \mathbf{F}(f) \circ (-)$. Observe que:

$$\mathbf{F}(f)(-) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(A, -) = f \circ (-).$$

Como as morfismos horizontais são isomorfismos (Teorema A.2.6), segue que φ é um isomorfismo natural (Observação 1.2.6). Portanto, $\mathbf{G}$ é adjunto à esquerda de $\mathbf{F}$ (Teorema 1.2.5).

Proposição A.2.8. [26, Proposição 3.6] *Sejam S_1 e S_2 conjuntos. Então, $\mathbb{Z}[S_1 \times S_2]$ é naturalmente isomorfo à $\mathbb{Z}[S_1] \otimes \mathbb{Z}[S_2]$.*

Demonstração. Inicialmente, criaremos um mapa $f : \mathbb{Z}[S_1] \times \mathbb{Z}[S_2] \to \mathbb{Z}[S_1 \times S_2]$ que satisfaça as condições de bilinearidade. Tal mapa, pode ser definido como:

$$\left(\sum_{s_i \in S_1} n_i[s_i], \sum_{s_j \in S_2} m_j[s_j] \right) \mapsto \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)].$$

Logo, segue da propriedade universal do produto tensorial (Teorema A.2.3) que existe único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : \mathbb{Z}[S_1] \otimes \mathbb{Z}[S_2] \to \mathbb{Z}[S_1 \times S_2]$ tal que:

$$\left(\sum_{s_i \in S_1} n_i[s_i] \right) \otimes \left(\sum_{s_j \in S_2} m_j[s_j] \right) \mapsto \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)].$$

Devido as propriedades do produto tensorial, temos:

$$\left(\sum_{s_i \in S_1} n_i[s_i] \right) \otimes \left(\sum_{s_j \in S_2} m_j[s_j] \right) = \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} (n_i[s_i] \otimes m_j[s_j]) = \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [s_i] \otimes [s_j].$$

Assim, podemos descrever $\tilde{f}$ como sendo o mapa que leva:

$$\sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [s_i] \otimes [s_j] \mapsto \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)].$$

Iremos mostrar que $\tilde{f}$ é um isomorfismo. Seja

$$\sum_{(s_i,s_j) \in S_1 \times S_2} p_{i,j} [(s_i, s_j)] \in \mathbb{Z}[S_1 \times S_2],$$

temos que:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{(s_i,s_j) \in S_1 \times S_2} p_{i,j}[(s_i, s_j)] \in \mathbb{Z}[S_1 \times S_2] & = & \sum_{(s_i,s_j) \in S_1 \times S_2} m_i nj[(s_i, s_j)] \in \mathbb{Z}[S_1 \times S_2] \\ & = & \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)] \end{array},$$

com $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ tais que $n_i m_j = p_{i,j}$. Logo, existe:

$$\sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [s_i] \otimes [s_j] \in \mathbb{Z}[S_1] \otimes \mathbb{Z}[S_2]$$

tal que:

$$\tilde{f}(\sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [s_i] \otimes [s_j]) = \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)] = \sum_{(s_i,s_j) \in S_1 \times S_2} p_{i,j} [(s_i, s_j)],$$

ou seja, $\tilde{f}$ é sobrejetiva.

Por fim, sejam:

$$a = \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [s_i] \otimes [s_j] \text{ e } b = \sum_{r_i \in S_1} \sum_{r_j \in S_2} q_i k_j [r_i] \otimes [r_j]$$

e assuma que $f(a) = f(b)$. Logo,

$$f(a) = \sum_{s_i \in S_1} \sum_{s_j \in S_2} n_i m_j [(s_i, s_j)] = \sum_{r_i \in S_1} \sum_{r_j \in S_2} q_i k_j [(r_i, r_j)] = f(b).$$

Porém, todo elemento de um grupo abeliano livre é expresso unicamente como a combinação linear formal de elementos da base. Assim, cada termo $q_i k_j [(r_i, r_j)]$ é igual a algum $n_{i'} m_{j'} [(s_{i'}, s_{j'})]$ e, consequentemente, $a = b$. Logo, $\tilde{f}$ é injetiva e, portanto, é um isomorfismo. $\square$

Proposição A.2.9 (Produto tensorial comuta com colimites)**.** [31, Lema 10.12.9] *Seja A um* *grupo abeliano. Então, o funtor* $(-) \otimes A$ *comuta com colimites.* $\square$

Apêndice B

A compactificação de Stone-Čech de um espaço discreto

O propósito deste apêndice consiste na construção da compactificação de Stone-Čech para um espaço discreto X. Em resumo, demonstraremos de forma concisa que $\beta X \cong \mathrm{Ult}(X)$. Em vista disso, neste Capítulo consideraremos X discreto.

Definição B.0.1. [2, Definição 4.1.1] Um *filtro* $\mathfrak{F}$ em X é um subconjunto do conjunto das partes $\mathfrak{P}(X)$ que satisfaz:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{F}$;

(2) Se $A, B \in \mathfrak{F}$. Então, $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

(3) Se $A \in \mathfrak{F}$ e $A \subset B$. Então, $B \in \mathfrak{F}$.

Além disso, dizemos que $\mathfrak{F}$ é um *ultrafiltro* se é um filtro maximal, ou seja, se não existe $\mathfrak{F}' \subsetneq X$ tal que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$.

Exemplo B.0.2. Se A é um subconjunto de X. Então, o conjunto $\mathfrak{F}_A = \{B \subset X \mid A \subset B\}$ é um filtro. Em particular, se $A = \{x\}$. Então, $\mathfrak{F}_x := \mathfrak{F}_{\{x\}}$ é um ultrafiltro. Ultrafiltros como este, são chamados de *ultrafiltros principais*.

Proposição B.0.3. [2, Proposição 4.1.11] *Um filtro $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro se, e somente se, para todo $U \in X$, ou $U \in \mathfrak{F}$ ou $X - U \in \mathfrak{F}$.* □

Considere Ult(X) o conjunto de ultrafiltros de X. Se $U \subset X$, definimos

$$U^* = \{\mathfrak{F} \in \mathrm{Ult(X)} \mid U \in \mathfrak{F}\}.$$

A topologia de Ult(X) será a topologia gerada pela base formada pelos conjuntos da forma U^*, com $U \subset X$.

Proposição B.0.4. [2, Proposição 4.1.20] *Se $U \in X$, então, U^* é aberto e fechado.*

Demonstração. Pela definição da topologia de $\mathrm{Ult}(X)$, U^* é aberto. Por outro lado, observe que para todo $U \subset X$, temos $(X - U)^* = \mathrm{Ult}(X) - U^*$. De fato,

$$\mathrm{Ult}(X) - U^* = \{\mathfrak{F} \in \mathrm{Ult}(X) \mid U \notin \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{F} \in \mathrm{Ult}(X) \mid X - U \in \mathfrak{F}\} = (X - U)^*.$$

Portanto, o complementar de U^* também é aberto. □

Proposição B.0.5. [2, Proposição 4.1.20] $\mathrm{Ult}(X)$ *é compacto.* □

Proposição B.0.6. [2, Proposição 4.1.20] $\mathrm{Ult}(X)$ *é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}'$ ultrafiltro distintos em X. Então, existe $U \in \mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$. Assim:

$$\mathfrak{F} \in U^* = \{\mathfrak{F} \in \mathrm{Ult(X)} \mid U \in \mathfrak{F}\} \not\ni \mathfrak{F}'.$$

Consequentemente, $\mathfrak{F}' \in (X - U)^*$. Como U^* e $(X - U)^*$ são abertos disjuntos contendo $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}'$, respectivamente, concluímos que $\mathrm{Ult}(X)$ é Hausdorff. □

Para mostrar que $\beta X \cong \mathrm{Ult}(X)$, precisamos definir um mergulho $\psi : X \to \mathrm{Ult}(X)$ tal que $\psi(X)$ é denso em $\mathrm{Ult}(X)$ e a propriedade universal da compactificação de Stone-Čech seja satisfeita (Definição 2.4.1). Assim, defina:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & X & \to & \mathrm{Ult}(X) \\ & x & \mapsto & \mathfrak{F}_x. \end{array}$$

Como X é discreto, ψ é contínua. Além disso, temos que $\{x\}^* = \{\mathfrak{F}_x\}$, o que implica que $\{\mathfrak{F}_x\}$ é aberto. Portanto, ψ é aberta, logo, é um mergulho. Agora, considere $\varnothing \neq U \subset X$ e seja $x \in U$. Temos que $U \in \mathfrak{F}_x$, o que implica que $\mathfrak{F}_x \in U^*$. Portanto, $\psi(X)$ é denso em $\mathrm{Ult}(X)$.

Por fim, precisamos mostrar que $(\mathrm{Ult}(X), \psi)$ satisfazem a propriedade universal da compactificação de Stone-Čech. Seja $f : X \to Y$ um mapa contínuo, em que Y é um espaço Hausdorff compacto. Definimos $\tilde{f} : \mathrm{Ult}(X) \to Y$ como $\tilde{f}(\mathfrak{F}) \in \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \mathrm{Cl}_Y(f(A))$. Primeiro, pode-se mostrar que $\# \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \mathrm{Cl}_Y(f(A)) = 1$, assim $\tilde{f}$ estará bem definida. Além disso, afirmamos que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Ult}(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

De fato, seja $x \in X$. Então, $\psi(x) = \mathfrak{F}_x$, logo, $\tilde{f} \circ \psi(x) = \tilde{f}(\mathfrak{F}_x)$. Além disso, temos que $\{x\} \in \mathfrak{F}_x$, o que implica que $\tilde{f}(\mathfrak{F}_x) \in \{f(x)\}$. Portanto $\tilde{f}(\mathfrak{F}_x) = f(x)$, ou seja, o diagrama comuta.

Finalmente, pode-se provar que $\tilde{f}$ é contínua. Assim, como ψ é denso em $\mathrm{Ult}(X)$, segue que $\tilde{f}$ é a única aplicação contínua que comuta o diagrama acima. Portanto, $(\mathrm{Ult}(X), \psi)$ é a compactificação de Stone-Čech de X e βX é profinito.