UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Igor Soares dos Santos Barbosa

Introdução a Teoria Matemática dos Leilões

Belo Horizonte 2023

Igor Soares dos Santos Barbosa

Introdução a Teoria Matemática dos Leilões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte
2023

Barbosa, Igor Soares dos Santos.

B238i Introdução a teoria matemática dos leilões [recurso eletrônico] / Igor Soares dos Santos Barbosa – 2023.
1 recurso online (60 f. il., color.): pdf.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 60.

1. Estatística – Teses. 2. Leilões - Economia matemática – Teses. 3. Teoria dos jogos – Teses. 4. Equilíbrio de Nash – Teses. 5. Teorema de equivalência de receitas – Teses. 6. Programação linear - Teses. I. Lima, Bernardo Nunes Borges de. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Introdução à teoria matemática dos leilões

IGOR SOARES DOS SANTOS BARBOSA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Bernardo N. B. de Lima

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Prof. José Heleno Faro
INSPER

Prof. Juan Pablo Gama Torres
FACE-UFMG

Marcelo Richard Hilário

Prof. Marcelo Richard Hilário
UFMG

Belo Horizonte, 03 de março de 2023.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Eu agradeço primeiramente aos meu pais, Hermes e Lucrécia que sempre me deram um incondicional apoio. Agradeço ao meu professor e orientador Bernardo que aceitou me guiar pelos venturosos caminhos da Teoria dos Jogos, agradeço aos meus colegas Letícia Figueiredo e Gustavo Parreira que me acompanharam nos primeiros passos. Eu agradeço aos meus amigos que me acompanharam durante a graduação e o mestrado em matemática, sem vocês eu não teria chegado tão longe, obrigado Rodrigo, Ian, Laura, Hugo, Arthur, Patrícia, Osmar, Terezinha, Marcell, Lucas (provavelmente esquecendo vários nomes importantes). Meu agradecimento aos professores e funcionários da UFMG, a minha família e aos meus amigos. Agradeço a OBMEP que me incentivou a gostar de matemática durante o ensino médio e por fim agradeço ao CAPES pelo financiamento da bolsa de mestrado.

Resumo

Essa dissertação aborda sobre leilões de único item, o modelo matemático usado supõe que os participantes têm utilidade linear, racionalidade, que o perfil de estratégias é sempre um equilíbrio de Nash e por fim que as distribuições de probabilidade dos valores privados são de conhecimento comum. É feita uma apresentação de resultados clássicos e leilões clássicos, como Teorema de equivalência de Vickrey[Vic61] e Myerson[Mye81], princípio da revelação, leilão inglês, holandês e Leilão de Vickrey. Outros resultados mais recentes como de leilão aproximadamente ótimo Lookahead (por Ronen [Ron01]) são apresentados no Capítulo 4. No caso onde os valores privados têm distribuição absolutamente contínua e independentes Myerson mostrou que um leilão ótimo pode ser encontrado [Mye81], isso é feito no Capítulo 3, no último capítulo é apresentado como reduzir o problema de encontrar o leilão ótimo no caso discreto a um problema de programação linear.

Palavras-chave:
Economia-matemática; leilões; equilíbrio de Nash; teoria dos jogos; racionalidade; teorema de equivalência de receitas; princípio da revelação; leilão de Vickrey; programação linear.

Abstract

This dissertation is about unique item auctions, the mathematical model used supposes all participants have linear utility and rationality, the set of strategies is always a Nash equilibrium, and the probability distributions of the private values are known for all participants. We present classical results and classic auction mechanisms, such as the Revenue Equivalence Theorem of Vikrey[Vic61] and of Myerson[Mye81], the revelation principle, English auction, Dutch auction, and Vickrey's auction. Some other fresh results as an approximately optimal auction of Lookahead (by Ronen [Ron01]) are present in Chapter 4. When the values are independent and absolutely continuous Myerson showed that an optimal auction can be found[Mye81], this is done in Chapter 3, in the last chapter presents how to reduce the problem of finding an optimal auction to a problem of linear programming in the case of discrete values.
Key-words: mathematical economy; auctions; Nash equilibrium; game theory; rationality; revelation principle; Vickrey auction; linear programming.

Sumário

1 Introdução

1.1 Por que estudar leilões

Os leilões estão presentes na história da humanidade e inclusive na sua cultura. Desde os famosos leilões de obras de arte, presentes em vários filmes, até mesmo na vida comum de cidadãos, como leilões de automóveis, casas ou gado. Atualmente, com o advento da internet leilões adquiriram novos formatos, por exemplo o e-bay, uma plataforma de leilões on-line conhecida mundialmente. Para um brasileiro (isto também é válido para outras nacionalidades) mesmo que nunca tenha participado de um leilão, este influência sua vida, isto acontece pois o governo federal se utiliza de licitações para contratação de serviços e compra de bens. Licitações são um exemplo de leilões.

O objetivo desta dissertação é o estudo de mecanismos de leilão do ponto de vista teórico, buscando entender o comportamento dos agentes (participantes) sobre determinadas hipóteses e também estudar dentre os possíveis mecanismos de leilão quais são os mais eficientes. É importante frisar que o estudo será feito a partir de *um modelo matemático* de teoria de leilões, não *o modelo matemático*, o artigo deve ser indefinido, uma vez que o comportamento de agentes pode ser modelado de formas distintas, ou mesmo que a noção de eficiência pode ser interpretada de várias formas matematicamente.

1.2 O que é a teoria de leilões

Nessa dissertação buscamos trabalhar o problema do leiloeiro, imagine a seguinte situação:

O leiloeiro é uma pessoa que pretende vender um bem e que conhece alguns possíveis compradores, uma estratégia seria escolher um preço p e enviar a todos a informação que tal bem está a venda pelo preço p e o primeiro a responder que está disposto a pagar tal preço compra o objeto, nesse caso qual o preço o vendedor deve escolher? É difícil responder a essa pergunta sem informações sobre o comportamento dos compradores e sem saber qual é o objetivo do vendedor.

Supondo que o vendedor queira maximizar seu ganho e que ele conhece qual o valor cada possível comprador está disposto a pagar pelo objeto, a melhor estratégia é escolher o comprador disposto a pagar a maior quantia e vender o bem por tal preço. Em geral a primeira hipótese é verdadeira (os vendedores buscam maximizar seus ganhos esperados) mas nem sempre os vendedores conhecem o quanto as pessoas estão dispostas a pagar pelo objeto. Voltando à pergunta feita anteriormente, se o vendedor escolhe um preço p muito alto é possível que nenhum comprador esteja disposto a pagar tal valor, o que seria um desperdício de tempo e recursos (com propaganda, divulgação, comunicação, etc) por outro lado, se p é muito pequeno, poderia existir algum comprador disposto a pagar um valor maior que p, nesse caso o vendedor não maximiza seu ganho.

Uma outra forma de resolver esse problema é "passar a responsabilidade" da escolha do preço de venda para os compradores em um sistema de leilão, nesse caso os compradores se comunicarão através de ofertas ao vendedor (essa comunicação pode ser feita de forma independe entre os participantes ou não), com essas informações o leilão determina o preço de tal objeto e o preço da venda.

Alguns exemplos de mecanismos de leilão:

Leilão ascendente ou leilão Inglês O leiloeiro começa com um preço baixo p, enquanto existirem dois ou mais possíveis compradores o leiloeiro aumenta o preço do item, até que exista um único participante interessado, que ganha o leilão e paga o valor público do item.

Leilão de primeiro-preço selado Nesse caso cada licitante envia uma oferta de forma confidencial ao leiloeiro, que vende o objeto ao licitante que ofertou o maior preço, pelo preço que ele ofertou.

Observe que o leilão inglês envolve múltiplas ofertas e pode tornar caro o processo, porém a estratégia dos compradores é bem simples: enquanto o valor do leilão está abaixo do valor que está disposto a pagar o comprador continua no leilão. Por outro lado, o leilão de primeiro-preço selado é um leilão direto, ou seja, envolve apenas uma única oferta tornando o processo bem simples, porém a estratégia do comprador não é óbvia, dado que ele tem incentivo em mandar uma oferta menor que o preço que avalia o objeto.

1.3 Organização do texto

É importante ressaltar que para entendimento do modelo matemático é necessário um conhecimento sobre probabilidade, mais especificamente sobre variáveis aleatórias, esperança matemática e esperança condicional. Para o entendimento das demonstrações ao longo do texto também é necessário o conhecimento sobre análise real.

No capítulo 2 desta dissertação iremos descrever a teoria de leilões como um modelo matemático, assim podemos analisar o comportamento dos licitantes em alguns leilões sob a hipótese de racionalidade, analisando estratégias dominantes e equilíbrios de Nash, no capítulo 3 analisaremos os leilões do ponto de vista do vendedor, de novo sobre a hipótese de racionalidade e também sobre uma hipótese de neutralidade ao risco, o que nos possibilita chegar aos resultados impressionantes de Myerson sobre equivalência de receitas de uma classe de leilões e sobre a existência de um leilão que otimiza o ganho esperado do leiloeiro, resultados que renderam um prêmio Nobel de economia em 2007. No capítulo 4 descrevemos o leilão de Lookahead, criado por Amir Ronen, que pode ser utilizado em casos mais gerais que o Leilão de Myerson e possui várias propriedades de otimalidade. Por fim no capítulo 5 é tratado o problema do leilão ótimo no caso discreto.

2 O modelo matemático e exemplos clássicos

Em toda a dissertação nos restringiremos ao caso de leilões de um único item, onde temos n possíveis compradores (às vezes chamados de licitantes ou jogadores), esses licitantes serão designados por números de 1 a n, o conjunto dos possíveis compradores será representado por $N = \{1, \ldots, n\}$, um licitante arbitrário normalmente será representado pelas letras i, j.

Um leilão será tratado como um mecanismo social de decisão, onde há uma troca de informação entre os licitantes e o leiloeiro, em alguns casos a informação é pública como no leilão inglês, em outros a informação é restrita ao remetente e destinatário como no caso do leilão de primeiro preço selado.

Nos capítulos 2, 4, 5, cada licitante i tem um valor privado $v_i \in \mathbb{R}$ que avalia o objeto, isso significa que ele não estará disposto a pagar mais que v_i pelo objeto, para a construção do modelo matemático utilizamos a referência [KP17]. Apenas no capítulo 3 é adicionado um fator de correção nas avaliações privadas.

2.1 O modelo matemático

Para modelar a incerteza sobre as avaliações pessoais vamos supor que o valor privado do i-ésimo licitante v_i é uma variável aleatória sorteada a partir de uma distribuição de probabilidade $F_i(x)$ de conhecimento comum.

Notação: V_i representa a variável aleatória associada ao valor privado do i-ésimo jogador, v_i representa seu sorteio e $v = (v_i)_{i \in N}$ é o vetor com os valores privados.

É importante notar a diferença entre conhecer a distribuição de probabilidade e conhecer o valor da variável aleatória, cada licitante conhece o seu próprio valor privado, que representa o quanto está disposto a pagar pelo objeto em leilão, porém desconhece o quanto os outros participantes estão dispostos a pagar, a única informação sobre o valor privado dos outros participantes é sua distribuição de probabilidade.

Um leilão será completamente caracterizado por duas funções, uma função de alocação e uma função pagamento. A função **alocação** α recebe as ofertas ou sinais[1] que os participantes dão e decide qual participante é o ganhador, esta decisão pode ser aleatória, ou seja, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$ onde α_i é a probabilidade do i-ésimo participante ganhar o leilão. A função **pagamento** p decide quanto cada participante deve pagar dadas as ofertas ou sinais, ao contrário da função alocação a função pagamento é determinística.

[1] Um sinal é qualquer mensagem que o participante passe ao leiloeiro ou aos demais participantes, pode ser um valor numérico que representa uma quantia dinheiro que esteja disposto a pagar, na dissertação consideraremos apenas esse tipo de sinal, porém de modo geral um sinal pode incluir suborno, ameaças, trocas de bens, contratos ou qualquer tipo de proposta.

Uma **estratégia** de oferta é uma função β_i que decide qual sinal do i-ésimo participante de acordo com a sua avaliação privada v_i. O perfil de estratégias é denotado por $\beta = (\beta_i)_{i\in N}$, onde β_i é a estratégia adotada pelo participante i.

Fixado um perfil de estratégias β, as ofertas de fato são $\beta(v) = (\beta_i(v_i))_{i\in N}$, também chamada de sinais.

Nessa dissertação usaremos a notação vetorial para essas funções $\alpha(\beta(v)) = (\alpha_i(\beta(v)))_{i\in N}$, onde $\alpha_i(\beta(v))$ é a função que dá a probabilidade do i-ésimo participante ganhar o leilão quando os sinais são $\beta(v)$. O mesmo para a função pagamento $p(\beta(v)) = (p_i(\beta(v)))_{i\in N}$ que representa o pagamento do i-ésimo participante quando os sinais são $\beta(v)$.

Vamos supor que os participantes do leilão são todos **racionais** no sentido que buscam maximizar o valor esperado da sua utilidade u_i. A função **utilidade ou ganho** é linear e dada por $u_i(\beta) = \alpha_i(\beta) \cdot v_i - p_i(\beta)$.

Notação: Se o vetor $\beta = (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ representa o perfil de estratégias de todos os jogadores. Definiremos $U_i(\beta|v_i)$ como a esperança condicional de $u_i(\beta)$, condicionada ao valor privado V_i. Isto é,

$$U_i(\beta|v_i) := \mathbb{E}[u_i(\beta)|V_i = v_i]. \tag{2.1}$$

Quando não houver confusão omitiremos o condicional em v_i, escrevendo apenas $U_i(\beta)$.

É importante observar que $U_i(\beta)$ é uma variável aleatória que depende de V_i, uma vez que temos a informação completa de V_i, ou seja conhecemos a realização dessa variável aleatória. O valor privado v_i e o ganho $U_i(\beta|v_i)$ são números reais.

Muitas vezes precisaremos destacar qual a estratégia adotada pelo licitante i fixado. Nesse caso usaremos a notação $(\beta_{-i}, \hat{\beta}_i)$ para representar o perfil de estratégias onde todos os $j \neq i$ tomam a estratégia β_j de acordo com o perfil β e o licitante i desvia sua estratégia para $\hat{\beta}_i$.

Portanto $U_i(\beta_{-i}, \hat{\beta}_i)$ é o ganho esperado de i quando todos $j \neq i$ tomam a estratégia β_j e o licitante i desvia sua estratégia para $\hat{\beta}_i$.

A utilidade do leiloeiro também é linear e será escrita como

$$u_0(\beta) := v_0 \cdot \mathbb{1}_{\{\text{ninguém ganha o leilão}\}}(\beta) + \sum_{i\in N} p_i(\beta), \tag{2.2}$$

ou seja, a soma do pagamento de todos participantes somado com o valor v_0 avaliado pelo leiloeiro caso não haja comprador. Também usaremos a notação para a esperança do da utilidade $U_0(\beta|v_0) = U_0(\beta) := \mathbb{E}[u_0(\beta)|V_0 = v_0]$

Em resumo temos três hipóteses, que serão usadas em toda a dissertação:

H1 Cada licitante possui um valor privado v_i que ele próprio conhece, mas não conhece os valores privados dos outros participantes, tendo informação apenas sobre a distribuição de probabilidade desses outros valores. O leiloeiro possui um valor privado v_0 que avalia o objeto.

H2 As funções utilidade são lineares:

$$u_i(\beta) = \alpha_i(\beta) \cdot v_i - p_i(\beta) \quad \forall i \in N, \text{ (Utilidade do i-ésimo participante)}$$

$$u_0(\beta) = v_0 \cdot \left(1 - \sum_{i \in N} \alpha_i(\beta)\right) + \sum_i p_i(\beta). \text{ (Utilidade do leiloeiro)}$$

H3 Cada participante é **racional**, i.e. escolhe a estratégia que maximiza seu ganho esperado.

Definição 2.1 (Equilíbrio de Bayes-Nash)**.** Em um leilão, fixado um perfil de estratégias β, diremos que este perfil de estratégia é um **equilíbrio de Bayes-Nash**, ou simplesmente equilíbrio, se para todos os participantes $i \in N$, a estratégia tomada por i garante um ganho esperado de $U_i(\beta)$ maior ou igual que a utilidade esperada quando i desvia sua estratégia de β_i para $\hat{\beta}_i$, qualquer que seja este $\hat{\beta}_i$. isto é,

$$U_i(\beta) \geq U_i(\beta_{-i}, \hat{\beta}_i) \quad \forall i, \forall \hat{\beta}_i. \tag{2.3}$$

Observação 2.2.

- A Hipótese (H2) implica que os participantes são **neutros ao risco**, por exemplo, o participante será indiferente quanto a um ganho certo de 1000 reais ou ter 0,01 de chance de ganhar 100.000 reais (o que nem sempre é uma hipótese realista). É possível propor uma teoria utilizando outra função utilidade mais geral onde os participantes sejam aversos ao risco ou amantes de risco porém a matemática fica mais difícil e não é garantido que são válidos os resultados que mostraremos nessa dissertação.

- Estamos supondo que nenhum participante tem obrigação de participar do leilão, então caso o seu ganho esperado seja negativo, pela hipótese de racionalidade, o jogador escolhe não participar do leilão. Dessa forma podemos supor que para todos os jogadores temos $U_i(\beta) \geq 0$.

- Outra implicação da Hipótese (H3) é que o perfil de estratégias em um leilão sempre será um equilíbrio de Nash.

Nesse contexto de leilões é interessante pensar que o leiloeiro sugere aos participantes que tomem algum tipo de estratégia, β, no leilão, é claro que o participante não é obrigado a seguir essa estratégia, porém a sugestão é "boa"se o participante não tem interesse em desviar sua estratégia supondo que os outros mantém a sugestão do leiloeiro, em outras palavras, se β for um equilíbrio de Nash. Então mesmo que seja possível construir leilões sem equilíbrio de Nash (veja os Exemplos 2.3 e 2.5), ao longo do texto vamos supor que todos leilões possuem um equilíbrio de Nash.

2.2 Leilão de primeiro preço selado com 2 compradores i.i.d.[2] uniformes

Suponha que temos dois licitantes que sorteiam seus valores privados de distribuições uniformes em $[0, 1]$ independentes. Vamos ver qual é o equilíbrio desses jogadores quando o vendedor escolhe o leilão de primeiro-preço selado.

Como temos apenas um lance a estratégia fica completamente definida a partir de uma função β, pela simetria do problema, vamos procurar por um equilíbrio onde ambos licitantes tomam a mesma estratégia $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, vamos supor também que tal função β seja derivável e estritamente crescente.

Fixado um valor privado v_1 o jogador 1, precisa decidir sua oferta $b(v_1)$ de forma a maximizar $U_1(\beta_{-1}, b)$, por causa da definição de equilíbrio de Nash (2.3). Seja V_2 uma variável aleatória com a distribuição do valor privado do jogador 2, então

$$U_1(\beta_{-1}, b) = (v_1 - b) \cdot \mathbb{P}[b > \beta(V_2)]. \tag{2.4}$$

Como β é sobrejetiva (pois é estritamente crescente) existe um w de forma que $\beta(w) = b$, como V_2 tem distribuição uniforme, temos que

$$\mathbb{P}[\beta(w) > \beta(V_2)] = \mathbb{P}[w > V_2] = w, \tag{2.5}$$

Usando o fato de β ser estritamente crescente.

Então a Equação (2.4) fica

$$U_1(\beta_{-1}, b) = (v_1 - \beta(w)) \cdot w. \tag{2.6}$$

Para que a utilidade seja máxima quando $w = v_1$, temos que a derivada parcial com relação a w deve ser zero nesse ponto

$$\frac{\partial U_1(\beta_{-1}, b)}{\partial w}\Big|_{w=v_1} = v_1 - \beta'(w)w - \beta(w)\big|_{w=v_1} = 0,$$

$$v_1 = \beta'(v_1)v_1 + \beta(v_1) = (v_1\beta(v_1))'.$$

Integrando dos dois lados temos que

$$\frac{v_1^2}{2} + \beta(0) = v_1\beta(v_1).$$

[2] Um conjunto de variáveis aleatórias são ditas i.i.d quando são coletivamente independentes e identicamente distribuídas.

No contexto de teoria de leilões faz sentido assumir que $\beta(0) = 0$, já que o comprador não tem interesse em pagar pelo objeto. Assim concluímos que $\beta(v_1) = \frac{v_1}{2}$.

Vamos verificar que, de fato, $\beta(v) = v/2$, define um equilíbrio de Nash:

$$U_1(\beta_{-1}, b) = (v_1 - b) \cdot \mathbb{P}[V_2/2 < b] = 2b(v_1 - b), \tag{2.7}$$

cujo máximo ocorre exatamente quando $b = v_1/2 = \beta(v_1)$.

Então o ganho esperado para os compradores é $v^2/2$, onde v é o tanto que o comprador avalia o objeto, enquanto o ganho esperado para o leiloeiro será

$$\mathbb{E}\left[\max\left\{\frac{V_1}{2}, \frac{V_2}{2}\right\}\right] = \frac{1}{3}. \tag{2.8}$$

Caso $v_0 > 1/3$, mesmo sabendo que é bem provável que algum dos dois compradores esteja disposto a pagar mais que 1/3 (a probabilidade é de 8/9), o leilão tem valor esperado menor que o valor v_0, ou seja, não é benéfico ao leiloeiro. Isso é um indício que fixar um preço mínimo é algo benéfico ao leiloeiro, de fato, veremos que mesmo no caso onde o leiloeiro avalia $v_0 = 0$ ele pode ter algum benefício em fixar um preço mínimo.

O exemplo anterior do leilão de primeiro preço selado com 2 compradores i.i.d uniformes foi retirado de [KP17].

Porém nem todo leilão possui um equilíbrio de Nash, a seguir mostraremos dois exemplos onde isso acontece.

Exemplo 2.3 (Quem tem mais paciência)**.** Considere o leilão onde o vencedor é decidido pela maior oferta e o vencedor paga um real ao leiloeiro, independente da oferta vencedora. Suponha que temos dois participantes e que o valor privado deles é uma constante $v > 1$.

Podemos ver que uma estratégia será uma distribuição de probabilidade sobre os números reais, fixada qualquer distribuição $F(x)$, podemos definir uma resposta melhor definindo $\hat{F}(x) = F(x-1)$, que desloca as probabilidades para números maiores. Observe que a utilidade de cada jogador será $(v-1)\mathbb{P}(\text{ganhar o leilão})$. Como $\mathbb{P}(\text{jogador 1 ganha}) + \mathbb{P}(\text{jogador 2 ganha}) \leq 1$, suponha sem perda de generalidade que $\mathbb{P}(\text{jogador 1 ganha}) \leq \mathbb{P}(\text{jogador 2 ganha})$, se o jogador 1 toma a estratégia $\hat{F}$, onde $F(x)$ é a estratégia adotada pelo jogador 2, então nesse novo perfil de estratégias o jogador 1 tem mais chances de ganhar o leilão, portanto tem incentivo em trocar sua estratégia.

Observação 2.4. Um ponto chave na demonstração da existência de um equilíbrio de Nash em um jogo é a compacidade do espaço das estratégias, então alguém pode pensar que o problema no exemplo anterior é que o espaço de todas as possíveis ofertas não é compacto ($\mathbb{R}$ não é compacto). O exemplo a seguir mostra que mesmo se o conjunto de todas as possíveis ofertas (ou das ofertas viáveis) for compacto K, o leilão pode não ter equilíbrio de Nash.

Isso não contradiz com o Teorema de Nash [Nas50], pois o espaço das estratégias serão as distribuições de probabilidade sobre as funções $\beta_i : K \to K$, que não é conjunto compacto.

Exemplo 2.5. Considere o leilão com dois participantes, onde ambos jogadores estão dispostos a pagar 1 real. O leiloeiro avalia o objeto em 0. O vencedor do leilão será aquele que der o maior lance, nesse caso o pagamento é o valor do maior lance, em caso de empate nos lances cada participante paga $\epsilon > 0$ e nenhum dos participantes leva o objeto.

Ou seja, o conjunto das possíveis ofertas (ou ofertas viáveis) é $[0, 1]$. A estratégia de ofertar 1 real não é benéfica pois caso o adversário também oferte 1 real, era preferível ter ofertado qualquer outro valor evitando de pagar ϵ, caso o adversário oferte $p < 1$ era melhor ter ofertado qualquer valor entre p e 1. Qualquer outra distribuição de probabilidade sobre $[0, 1]$ tem uma resposta melhor dada por "concentrar a massa"de probabilidade mais perto do valor 1.

Até o momento tratamos da definição de leilão de uma forma não específica, propositalmente, quando falamos sobre estratégias precisamos de um conjunto Info das informações disponíveis, que está intimamente ligado à forma como ocorre a troca de informações entre os participantes do leilão, a princípio não exigimos nada desse conjunto Info. Tratar de tais conceitos de forma não específica nos permite incluir na teoria de leilões vários mecanismos e jogos, como os tradicionais leilões ascendente e primeiro preço selado, jogos de aposta como pôquer (observe que aqui o montante é objeto em leilão e o valor privado muda de acordo com as apostas, o pagamento é feito por todos os participantes que apostaram, o leiloeiro é o cassino que fica com uma porcentagem do pote de cada rodada), processos de licitação de obras públicas (aqui o objeto em leilão é o contrato e as ofertas são os serviços prestados, de forma que o valor privado é o custo da prestação de serviço, logo um número negativo e o pagamento na verdade é feito pelo leiloeiro, ou seja, também é negativo), um leilão entre um vendedor e um único comprador define um processo de barganha, o mecanismo de leilão aqui tratado modela qualquer sistema que possua uma função **pagamento** e uma função **alocação** que define o(s) ganhador(es) do leilão, que respeitem as hipóteses (H1,H2,H3). Por isso a teoria de leilões pode ser útil como base teórica para outros modelos econômicos.

A fim de obter resultados mais gerais, precisaremos de restringir a classe de leilões onde trabalharemos, antes de fazer as definições formais, vamos apresentar alguns exemplos clássicos que motivam tais resultados e justificam tais restrições.

2.3 Leilão Ascendente

Definição 2.6 (Estratégia Fracamente Dominante)**.** Diremos que um jogador i possui uma **estratégia fracamente dominante** β_i se fixadas quaisquer estratégias adversárias

β_{-i}, o jogador não possui benefício em mudar sua estratégia. Isto é,

$$U_i(\beta_{-i}, \beta_i) \geq U_i(\beta_{-i}, \hat{\beta}_i) \quad \forall \beta_{-i}, \forall \hat{\beta}_i.$$

Perceba que β ser estratégia fracamente dominante para todos os jogadores é mais forte que ser um equilíbrio de Nash, ou seja, sempre que β_i é estratégia dominante para todos os participantes i esse perfil β é um equilíbrio de Nash, porém a reciproca nem sempre é válida, nem todo equilíbrio de Nash é formado por estratégias fracamente dominantes.

Consideremos um leilão Ascendente que não possua preço de reserva (o lance mínimo é qualquer valor positivo), já vimos na introdução que a melhor estratégia para o comprador é enquanto o valor do lance estiver abaixo do preço disposto a pagar, o jogador se dispõe a dar mais lances, caso contrário não dá mais lances. É importante notar que essa é uma estratégia fracamente dominante, ou seja, não importa quais sejam as estratégias que os outros jogadores adotem a melhor coisa a se fazer é dar lances enquanto o preço está abaixo do que se dispõe a pagar.

Logo, no equilíbrio de Nash o leilão somente termina quando o segundo maior valor privado é superado. Assim, supondo que renumeramos os participantes de forma a garantir que os valores privados respeitem $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n$, o ganho esperado do leiloeiro é a maior oferta que v_2 não pode cobrir.

Para efeitos de cálculo temos que diferenciar dois casos, ofertas discretas e ofertas contínuas, leilões reais têm ofertas discretas (um participante é incapaz de pagar $\sqrt{2}$ reais) a forma como é feita a escolha dos níveis de ofertas afeta o ganho esperado do leiloeiro. Nesse caso, leilão ascendente discreto, é comum chama-lo de **leilão inglês**. Para efeitos teóricos é interessante considerar também um leilão contínuo, onde um relógio regula o preço atual que aumenta de forma contínua, cada participante do leilão ascendente contínuo aperta um botão enquanto tem interesse em pagar o preço vigente, nesse caso o leilão é chamado de **leilão japonês**. O ganho esperado do leiloeiro no caso discreto é $v_2 + \epsilon$.

Onde ϵ é um valor pequeno de forma que $v_2 + \epsilon$ seja a menor oferta que supere v_2. No caso contínuo não existe tal ϵ, portanto o pagamento será igual ao segundo maior valor privado.

No caso especifico onde temos dois participantes e seus valores privados possuem distribuições uniformes independentes em $[0, 1]$. O ganho esperado do leiloeiro é

$$\mathbb{E}[\min\{V_1, V_2\}] + \epsilon = \frac{1}{3} + \epsilon. \tag{2.9}$$

O exemplo do leilão Ascendente e a definição de estratégia dominante foram retirados de [KP17].

2.4 Leilão de segundo preço selado

Também conhecido como Leilão de Vickrey, em homenagem ao economista Willian Vickrey, que descreveu esse leilão pela primeira vez em [Vic61]. Nesse leilão cada participante tem o direito de enviar apenas uma única oferta confidencial, o ganhador do leilão será aquele que enviar a maior oferta, porém pagará a segunda maior quantia ofertada.

Para descrevermos a estratégia dominante, fixamos um licitante i, seja $m_i = \max_{j \neq i}\{v_j\}$ a maior oferta dos outros licitantes, o ganho esperado $U_i(b)$ do licitante i caso oferte $b \in \mathbb{R}$ será

$$U_i(b) = 0 \cdot \mathbb{P}[b < m_i] + (v_i - m_i) \cdot \mathbb{P}[m_i < b].$$

Suponha que $b < v_i$, nesse caso

$$\begin{aligned} U_i(b) =& (v_i - m_i)\mathbb{P}[m_i < b] \\ \leq& (v_i - m_i)\mathbb{P}[m_i < v_i] = U_i(v_i), \end{aligned}$$

onde temos que $(v_i - m_i) > 0$ no evento $(m_i < v_i)$ e $b < v_i \implies \mathbb{P}[m_i < b] \leq \mathbb{P}[m_i < v_i]$.

Caso a oferta seja maior que a avaliação $v_i < b$, existe alguma chance de vencer o leilão no caso $m_i > v_i$ nesse evento paga-se mais pelo objeto do que é avaliado por i, calculando a utilidade esperada temos

$$\begin{aligned} U_i(b) =& (v_i - m_i)\mathbb{P}[m_i < b] \\ =& (v_i - m_i)\mathbb{P}\left[(m_i < b) \cap (v_i < m_i)\right] + (v_i - m_i)\mathbb{P}\left[(m_i < b) \cap (m_i \leq v_i)\right] \\ \leq& (v_i - m_i)\mathbb{P}\left[(m_i < b) \cap (m_i \leq v_i)\right] \\ \leq& (v_i - m_i)\mathbb{P}\left[(m_i \leq v_i)\right] = U_i(v_i). \end{aligned}$$

Então a estratégia dominante é cada licitante ser honesto e ofertar o quanto avalia o objeto. No caso onde temos dois possíveis compradores que avaliam o objeto independentemente com uma distribuição uniforme em $[0, 1]$, o valor esperado do ganho do leiloeiro será

$$\mathbb{E}[\min\{V_1, V_2\}] = \frac{1}{3}. \tag{2.10}$$

Que é o valor esperado do mínimo de duas variáveis aleatórias i.i.d uniformes em $[0, 1]$.

A definição a seguir será muito importante no próximo capítulo para a demonstração do Teorema de equivalência de receitas de Myerson e para a construção do leilão ótimo de Myerson.

Definição 2.7. (leilão fiel) Um leilão é **fiel**, se a estratégia $\beta(v) = v$ é um equilíbrio, em outras palavras, os licitantes não têm nenhum incentivo em mentir sobre seus valores privados.

Observação 2.8. O Leilão de Vickrey é um exemplo de leilão fiel.

Observação 2.9. A literatura em inglês se utiliza do conceito **incentive compative** para nomear o conceito aqui dito *fiel*, outras referências utilizam **feasible** para nomear o mesmo conceito.

2.5 Leilão Holandês

Também conhecido como leilão de Tulipas, é um leilão centenário usado em leilões de flores em Aalsmeer, Holanda. Ao contrário do leilão Inglês, os preços começam altos, e vão diminuindo com o tempo até que apareça o primeiro interessado em comprar pelo preço vigente ou até que o preço atinja um valor de reserva r.

É um excelente leilão para a venda de bens perecíveis com alto valor, como flores, pois garante um bom preço de venda e o procedimento é planejado para ser bem rápido, no leilão Royal Floral Holland os preços são marcados por um relógio, e os participantes têm apenas alguns segundos para tomar uma decisão.

Teorema 2.10. *O leilão Holandês é estrategicamente equivalente ao leilão de primeiro preço selado.*

Demonstração. Uma estratégia no leilão holandês é escolher um tempo de parada, ou seja, dado que o participante avalia o objeto como v_i ele deve escolher um preço $\beta_i(v_i)$ para ser seu “preço de parada”, como ganha o leilão aquele que possui o maior $\beta_i(v_i)$, o leilão é equivalente ao leilão de primeiro preço selado, pois o resultado do leilão e os pagamentos seriam os mesmos se todos os participantes enviassem previamente os seus “preços de parada” $\beta_i(v_i)$ ao leiloeiro e este usasse um leilão de primeiro preço. □

Observação 2.11. Existem duas coisas importantes a pontuar:

- Apesar de teoricamente os leilões serem equivalentes, na prática as receitas são diferentes, duas possíveis explicações para tal efeito são: Nem sempre os participantes são racionais (H3), em outras palavras, nem sempre os participantes são neutros com relação ao risco, afinal de contas ganhar \$100 é bem diferente de ter 0,01 de chance de ganhar \$10.000. Outra explicação é que fatores psicológicos afetam o mecanismo, enquanto o leilão de preço selado é um procedimento estático, o leilão Holandês é dinâmico e fatores como a velocidade do relógio e o ambiente do leilão podem deixar os participantes mais animados, os influenciando a dar lances mais cedo, ou mais tarde, sobre o assunto veja [AKW12].

O exemplo do leilão Holandês e a demonstração de que tal leilão é estrategicamente equivalente ao leilão de segundo preço foi retirada do capítulo 3.1.1 de [Men08]

Corolário 2.12. *O leilão Holandês no caso simétrico (simétrico significa que as distribuições dos valores privados são i.i.d.) respeita:*

- *Se* $v_i = 0$ *então a utilidade será* $u_i(v_i) = 0$.
- *O ganhador do leilão é sempre aquele que tem o maior valor privado.*

Demonstração. Segue diretamente do fato que o leilão de primeiro preço selado possui tais propriedades e do teorema anterior que garante a equivalência de ambos.

□

Calculamos para vários leilões qual era um equilíbrio de Nash no caso onde temos dois licitantes cujo valor privado tem distribuição uniforme em $[0, 1]$. Não é coincidência que o ganho esperado do leiloeiro no leilão de primeiro preço selado (Equação 2.8), segundo preço selado (Equação 2.10) e holandês seja $\frac{1}{3}$ nem mesmo que no leilão ascendente esse ganho seja de $\frac{1}{3} + \epsilon$ (Equação 2.3). O primeiro a mostrar que tais leilões têm receitas equivalentes foi Vickrey em [Vic61], as receitas são equivalentes não só no caso onde as distribuições dos valores privados são uniformes, basta apenas a hipótese de simetria, ou seja, todos os participantes têm valores privados independentes com a mesma distribuição, por isso o teorema a seguir leva seu nome e será demonstrado no Capítulo 3. O resultado aqui apresentado é mais geral que mostrar que os quatro tipos de leilões (primeiro preço selado, segundo preço selado, leilão ascendente e leilão descendente) têm receitas equivalentes e foi apresentado por Myerson em [Mye81], como um corolário de um teorema de equivalência ainda mais geral (3.12)

Teorema 2.13 (Teorema da Equivalência de Receitas de Vickrey)**.** *Fixada a distribuição de probabilidade dos valores privados, o leiloeiro possui o mesmo ganho esperado em qualquer leilão que possua as duas propriedades abaixo:*

A) Se $v_i = 0$, *então a utilidade será* $u_i(v_i) = 0$ *(de forma equivalente,* $p_i(\beta) = 0$ *quando* $v_i = 0$*);*

B) O ganhador do leilão sempre será aquele que possui o maior valor privado.

Observação 2.14. Já vimos que quando os participantes têm distribuições i.i.d. para seus valores privados o leilão Holandês respeita as propriedades A) e B) acima, observe também que os leilões ascendente, primeiro preço-selado e Vickrey também possuem essas propriedades. Perceba também que o resultado não depende de como se escolhe a função pagamento, no sentido que, se a regra de alocação é a regra descrita acima a receita do leilão não depende de qual é a função pagamento escolhida.

Observação 2.15. Nem sempre os leilões de primeiro preço, segundo preço, ascendente e holandês terão a mesma receita, isso somente é garantido no caso i.i.d., pois nesse caso podemos garantir que o ganhador do leilão será aquele que possui o maior valor privado. No caso onde temos distribuições distintas, um jogador que possui uma distribuição "menor" terá que dar ofertas mais agressivas (mais próximas ao seu valor privado), enquanto um outro jogador que possui distribuição "maior" pode se dar ao luxo de manter sua oferta baixa, no caso que é possível que vencedor não seja aquele que possui o maior valor privado, mas aquele que deu a maior oferta. Veja o caso assimétrico no Exemplo (3.20).

2.6 Preços de reserva

Se o leiloeiro avalia o objeto em v_0 não faz sentido que ele pretenda leiloar o objeto por um preço abaixo de v_0, por isso faz sentido colocar um preço mínimo de pelo menos v_0 para o leilão. O interessante é que mesmo quando $v_0 = 0$ pode ser vantajoso colocar algum **preço de reserva** r.

Definição 2.16 (Preço de Reserva)**.** Colocar um preço de reserva r é uma alteração na regra de um leilão, de forma que o item somente é vendido se algum participante der um lance maior que r, além disso, caso o item seja alocado por um valor abaixo de r, o preço será ajustado para o valor de reserva r. De forma equivalente, pode-se construir um leilão com preço de reserva r, considerando que o leiloeiro sempre dá um lance de valor r em seu próprio leilão e o pagamento é sempre maior ou igual a r.

Exemplo 2.17 (Leilão de Vickrey com preço de reserva r)**.** Este leilão é de preço selado, onde o ganhador é aquele que envia a maior oferta e o pagamento é o máximo entre r e o segundo maior lance.

Para simplificação dos cálculos vamos supor que existem dois participantes cujo valores privados têm distribuições uniformes em $[0, 1]$ independentes e assim calcular o melhor preço de reserva $r \in [0, 1]$.

Sob essas condições, vamos considerar três eventos disjuntos. No evento A, ambos participantes ofertam acima de r, no evento B, um dos participantes oferta acima de r e outro oferta abaixo e, no evento C, ambos participantes ofertam abaixo de r. Condicionado ao evento A, temos um Leilão de Vickrey onde os participantes têm valores privados independentes e uniformes em $[r, 1]$ cuja receita esperada será o valor esperado do mínimo das v.a. que é $\frac{1-r}{3} + r$, condicionado ao evento B a receita é r e condicionado ao evento C a receita é 0.

Logo a utilidade esperada do leiloeiro será

$$
\begin{aligned}
U_0(\beta) &= \left[\frac{1-r}{3} + r\right] \mathbb{P}(A) + r\mathbb{P}(B) + 0\mathbb{P}(C) \\
&= \left[\frac{1}{3} + \frac{2r}{3}\right] \cdot (1-r)^2 + r \cdot 2r(1-r) \\
&= -\frac{4}{3}r^3 + r^2 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

O máximo dessa função é atingido em $r = \frac{1}{2}$, resultando em um ganho esperado de $\frac{5}{12}$ para o leiloeiro, compare com o ganho esperado de $\frac{1}{3}$ no caso onde não existe preço de reserva.

Surpreendentemente, o Leilão de Vickrey com preço de reserva $\frac{1}{2}$ é ótimo no caso acima. Por ótimo, queremos dizer que não existe leilão cuja receita esperada seja maior que $\frac{5}{12}$. Veremos o caso geral na Seção (3.2), onde seguimos o artigo de Myerson para descrever o leilão ótimo.

Teorema 2.18 (Equivalência de Receitas com preço de reserva)**.** *Quaisquer leilões com o mesmo preço de reserva r que satisfaçam as duas propriedades A) e B) do Teorema (2.13) têm receitas equivalentes.*

Demonstração. Podemos simular um leilão com preço de reserva r como um leilão sem preço de reserva onde temos um participante a mais cujo valor é sempre r, onde as regras do leilão são as mesmas do leilão original exceto se esse participante fictício ganhar o leilão, nesse caso o item é vendido ao preço v_0, que em termos de utilidade para o leiloeiro é equivalente a não vender. Observe que o leilão simulado tem receita equivalente ao leilão original e que o Teorema de equivalência de receitas (2.13) vale.

□

É importante observar que um leilão com preço de reserva não tem receita equivalente ao leilão sem preço de reserva, mas que sobre as condições do Teorema (2.13) dois leilões com o mesmo preço de reserva e mesma função pagamento têm receitas equivalentes.

2.7 Leilões reversos

No contexto de licitações é comum o uso de leilões reversos, ou seja, quem está disposto a pagar é o leiloeiro enquanto os participantes do leilão estão dispostos a vender algo ou prestar algum serviço, como por exemplo no caso de construção de obras públicas.

Nesse caso o normal é que cada empresa faça o orçamento e enviem para o leiloeiro, que avalia as propostas e (supondo que a qualidade de produtos/serviço é a mesma) decide-se como ganhador aquele participante que realiza o serviço pelo menor orçamento.

Na verdade o leilão reverso é como um leilão comum, onde os valores privados V_i têm suporte em um intervalo negativo $[-h, 0]$, a interpretação é que caso ganhe o leilão o vencedor terá uma despesa, por exemplo, na prestação de serviços. Porém a função pagamento também será disposta em valores negativos $p(x) \in [-h, 0]$ indicando que o vencedor recebe dinheiro do leiloeiro e não o contrário.

Desta forma o leilão descrito inicialmente é um leilão de primeiro preço selado.

Assim muitos aspectos e resultados da teoria de leilões aqui apresentados podem ser aplicados diretamente (sem adaptações) para leilões reversos.

2.8 Leilões com vários objetos

Em geral, leilões podem envolver mais de um objeto, por exemplo, os leilões de direito de exploração de petróleo no território brasileiro envolveram dezenas de poços e bacias. Um exemplo descrito nas páginas 9 - 12 de [Mil04] sobre leilões de uso de frequência de rádio na Nova Zelândia nos mostra que devemos ser cuidadosos ao usar os resultados de teoria dos leilões na prática.

Exemplo 2.19 (Leilões de frequência de rádio - Nova Zelândia)**.** Em 1990, o governo da Nova Zelândia conduziu sete leilões de Vickrey simultâneos para a venda dos direitos de uso de frequências de rádio.

Pode parecer eficiente usar um leilão de segundo preço após ver o resultado de Myerson (Seção 3.2), que nos garante que no caso simétrico o leilão de segundo preço com preço de reserva é ótimo. Porém, isso não é necessariamente verdade no caso onde temos vários objetos em leilão, uma vez que a função de alocação α não é uma probabilidade, pois não precisa respeitar $\sum_i \alpha_i \leq 1$ uma vez que existem vários objetos múltiplos ganhadores podem receber objetos ou um participante pode ganhar em mais de um lote, além disso, a função utilidade não será necessariamente a dada pela hipótese H2 pois a avaliação do participante sobre itens distintos pode ser diferente e mesmo sobre subconjuntos de itens.

Lote	Empresa ganhadora	Oferta mais alta(NZ$)	Segunda oferta (NZ$)
1	Sky Network TV	2.371.000	401.000
2	Sky Network TV	2.273.000	401.000
3	Sky Network TV	2.273.000	401.000
4	BCL	255.124	200.000
5	Sky Network TV	1.121.000	401.000
6	Totalisator Agency Board	401.000	100.000
7	United Christian Broadcast	685.200	401.000

Tabela 1 – Vencedores do leilão dos lotes UHF: Direitos de uso de frequência 8 MHz, [Mil04], página 12.

O caso chama atenção pois a concessão mais barata foi vendida a NZ$ 100.000 enquanto a maior oferta foi de NZ$ 2.371.000 comparando um leilão de segundo preço com um leilão inglês, como vimos antes, em ambos os leilões é um equilíbrio de Nash ser honesto e reportar seu valor real, porém no caso do leilão inglês o leilão teria terminado quando o preço ultrapassasse a segunda maior oferta e não saberíamos o quanto o vencedor estaria disposto a pagar. Para evitar futuros incômodos, a Nova Zelândia adotou um leilão de primeiro preço selado posteriormente.

Uma outra propriedade indesejada do leilão acima é que ele atribui preços distintos a objetos idênticos, como temos leilões idênticos é difícil aconselhar um participante se ele deve dar oferta em mais de um lote, ou em qual dos lotes participar, inclusive era possível que algum lote ficasse sem ofertas enquanto outro lote tivesse participantes demais.

Para contornar esses problemas alguns mecanismos de leilão foram propostos, como por exemplo VCG (nomeado em homenagem a Vickrey, Clarks e Groves) e GSP (Generalized Second-prize auction), como foge do escopo dessa dissertação tratar de leilões com vários objetos recomendamos ao leitor interessado os Capítulos 15 e 16 de [KP17] e também a Parte II de [Mil04].

3 Teoremas de Equivalência de Receitas e Leilão Ótimo de Myerson

Na primeira hipótese H1, assumimos que o valor privado de cada participante é uma variável aleatória V_i cuja realização é v_i e também assumimos que é uma variável aleatória pois é um valor, a princípio, desconhecido pelos outros participantes. Segundo Myerson em [Mye81] existem duas razões para essa incerteza: **incerteza de preferência** e **incerteza de qualidade**, tais conceitos são creditados a Paul Milgrom em [Mye81]. A incerteza de preferência se refere ao fato que o participante não sabe quanto os outros valorizam o objeto em leilão, de forma que obter mais informação sobre avaliação alheia não afeta o quanto o participante avalia o objeto, apesar de afetar qual oferta será dada. Por outro lado, a incerteza de qualidade gera uma revisão na avaliação privada do participante.

Por exemplo, Toyosu Market um mercado de peixes em Tókio, recebe todos os dias peixes frescos que são leiloados a restaurantes. Do ponto de vista de um restaurante que participa do leilão, suas incertezas são de preferência, o restaurante conhece seus custos de produção dos pratos e possui um preço de venda dos seus pratos já definido, logo sua avaliação sobre algum atum à venda independe da avaliação de seus concorrentes (aqui estamos desconsiderando a influência midiática de altos lances e considerando apenas os ganhos diretos na compra de atum).

Um outro exemplo são leilões de carros usados, um carro usado é normalmente avaliado pelo estado de conservação. Então participantes diferentes podem ter informações diferentes sobre o carro, saber a opinião de especialistas e diferentes mecânicos influencia diretamente na avaliação pessoal de um participante, então a incerteza nesse caso não é apenas de preferência, mas também de qualidade.

Motivados pelos dois tipos de incerteza, vamos dar mais detalhes a hipótese H1, onde $t_i \in [a_i, b_i]$ é uma variável aleatória que representa uma avaliação pessoal do licitante i quando este não tem informações sobre as avaliações pessoais dos outros participantes, o vetor $t = (t_1, \dots, t_n)$ representa as avaliações pessoais de todos os participantes. Vamos assumir que existem n funções de revisão $e_j : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$, $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, de forma que o valor privado será a variável aleatória que atualiza as avaliações pessoais dado o conhecimento das avaliações pessoais dos outros participantes

$$V_i(t) = t_i + \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} e_j(t_j). \tag{3.1}$$

Observação 3.1. Essas funções de revisão e_j serão usadas apenas nesse capítulo.

A função $e_j(t_j)$ representa uma atualização que o i-ésimo jogador faz ao descobrir que o j-ésimo jogador avalia o objeto como t_j, na teoria descrita nesta dissertação é importante que a atualização e_j seja uniforme entre os participantes, mais especificamente e_j é a mesma função para todos os participante.

Continuaremos utilizando v_i em letra minúscula para representar a realização da variável aleatória $V_i(t)$, onde cada participante tem conhecimento sobre a realização da própria avaliação sobre o objeto, porém os outros não conhecem a realização, mas apenas a distribuição. O leiloeiro possui valor privado v_0 e não conhece a realização de nenhuma das variáveis aleatórias v_i, somente conhece a distribuição dessas variáveis.

Para efeito de cálculos usaremos a seguinte notação $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$, que representa o vetor dos avaliações pessoais de todos os participantes adversários de um licitante i fixado.

Para fim de notação usaremos $T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ para o espaço de todos valores privados possíveis e $T_{-i} = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} [a_j, b_j]$, para o espaço dos valores privados, onde o i-ésimo participante conhece seu próprio valor.

Definição 3.2. Um **Leilão direto de único item** é um leilão em que todos os licitantes dão apenas uma oferta de forma independente entre si e simultaneamente, com essas informações o leiloeiro decide qual o ganhador do leilão e quanto cada licitante deve pagar, pode acontecer do licitante pagar uma parcela mesmo sem levar o item.

Dessa forma podemos definir o vetor $v(t) = (v_i(t))_{i \in N}$, que representa os valores privados dos jogadores, $\beta_i : T \to \mathbb{R}$ a estratégia de oferta do jogador i, o vetor $\beta = (\beta_i(v_i(t)))_{i \in N}$ que representa as ofertas recebidas pelo leiloeiro, de forma simplificada escreveremos apenas apenas $\beta_i(t) = \beta_i(v_i(t))$.

Assim, podemos determinar um leilão direto $\mathcal{A}$ de único item como um par de funções:

- $\alpha^{\mathcal{A}}[\beta] = (\alpha_1[\beta], \dots, \alpha_n[\beta])$, que determina a probabilidade de alocação do objeto, assim $\alpha_i[\beta] \in [0, 1]$ é a probabilidade do i-ésimo licitante ganhar o leilão.

- $\mathcal{P}^{\mathcal{A}}[\beta] = (p_1[\beta], \dots, p_n[\beta])$, é a regra de pagamento, que determina quanto cada jogador pagará em determinada configuração de ofertas.

Observação 3.3. As funções $\alpha_i[\beta]$ respeitam $\sum_{i \in N} \alpha_i[\beta] \leq 1$ pois o leilão é de único objeto indivisível e $1 - \sum_{i \in N} \alpha_i[\beta]$ é a probabilidade de nenhum participante ganhar o leilão. Observe que estas probabilidades são variáveis aleatórias que dependem das ofertas dadas pelos jogadores.

Na hipótese H2 garantimos que as utilidades são lineares, utilizando as notações acima podemos reescrever as funções utilidade da seguinte forma

$$u_i(\beta) = v_i \cdot \alpha_i(\beta) - p_i(\beta) \qquad \forall i \in N,$$

$$u_0(\beta) = v_0 \cdot \left(1 - \sum_i \alpha_i(\beta)\right) + \sum_i p_i(\beta),$$

onde $u_0(\beta)$ representa a utilidade do leiloeiro quando os participantes ofertam β. Portanto o ganho esperado do participante i condicionado ao seu valor privado será

$$U_i(\beta) := \mathbb{E}\left[u_i(\beta)\middle|t_i\right] = \mathbb{E}\left(v_i(t) \cdot \alpha_i(\beta) - p_i(\beta)\right) \tag{3.2}$$

e o ganho esperado do leiloeiro será

$$U_0(\beta) := \mathbb{E}\big[u_0(\beta)\big] = \mathbb{E}\left[v_0(t) \cdot \left(1 - \sum_i \alpha_i(\beta)\right) + \sum_i p_i(\beta)\right]. \tag{3.3}$$

A maior parte dos exemplos de leilões que foram vistos são leilões diretos, pois estes são simples de tratar teoricamente, por exemplo, o leilão de primeiro e segundo preço selado, os contra-exemplos (2.3) e (2.5). Por outro lado, na prática os leilões nem sempre são leilões diretos, como os leilões inglês e holandês. O próximo resultado diz que é suficiente trabalhar com leilões diretos se estamos interessados na receita esperada de cada participante e na receita esperada do leiloeiro, mais do que isso, relembrando a definição de leilão fiel (2.7), podemos nos restringir a classe dos leilões diretos fieis.

Lema 3.4 (Principio da Revelação - [Mye81])**.** Seja $\mathcal{A}$ um mecanismo de leilão, com um equilíbrio de Nash β. Então existe um mecanismo de Leilão $\mathcal{C}$ que é um leilão direto fiel, cujas funções de pagamento e alocação formam um leilão estrategicamente equivalente ao leilão original.

Demonstração. Para decidir qual o pagamento do leilão $\mathcal{A}$ os participantes usam a estratégia descrita por $\beta_i : (v_i, \beta_{-i}) \to \theta_i$ que descreve os sinais[1] dados pelo participante de acordo com a avaliação privada, observe que θ_i pode ser um espaço de ações complicado e pode depender das ações que os outros tomam β_{-i} ao longo do leilão. Uma vez que todas as ações foram tomadas o mecanismo de leilão decide o pagamento $\mathcal{P}_i[\theta]$, onde $\theta = (\theta_i)_{i \in N}$, como no diagrama abaixo, de forma análoga a função α determina a alocação do objeto.

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{P}\circ\beta"'] & \theta \arrow[r, "\mathcal{P}"] & \mathcal{P}(\theta) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\circ\beta"'] & \theta \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(\theta) \end{tikzcd}$$

[1] Um sinal, pode ser uma oferta, uma sequência de ofertas, suborno, ameaças, ou qualquer tipo de troca de informação que seja trocada entre os participantes e o leiloeiro.

A ideia é incorporar as estratégias que os jogadores tomam em um leilão $\mathcal{C}$, onde a função pagamento será $\mathcal{P} \circ \beta$ e a função alocação será $\alpha \circ \beta$, como o perfil de estratégias β é um equilíbrio de Nash para o leilão $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \alpha)$, então ser honesto (tomar a estratégia $\beta_i(t_i) = t_i$) será um equilíbrio de Nash no novo leilão $\mathcal{C} = (\mathcal{P} \circ \beta, \alpha \circ \beta)$

$\square$

Outra forma de ver que o leilão é fiel, suponha que o participante tem algum ganho extra ao desviar da estratégia sincera ($\beta_i(t_i) = t_i$) no novo leilão $\mathcal{C}$, então ele teria algum ganho em revisar sua estratégia em $\mathcal{A}$.

Uma forma de interpretar esse leilão é que nesse leilão o participante não saiba como calcular a oferta que deva dar e peça ajuda a um terceiro que analisa as regras do leilão e a avaliação pessoal desse participante para calcular a oferta. Se todos participantes confiam nesse terceiro para calcular sua oferta podemos pensar que o leilão dado pelo princípio da revelação é a incorporação desse terceiro no mecanismo de leilão.

Observação 3.5. É importante frisar qual é o equilíbrio em $\mathcal{A}$ pois isso altera $\mathcal{C}$ portanto altero o cálculo da receita esperada em cada leilão, uma vez que um mecanismo de leilão $\mathcal{A}$ pode ter equilíbrios distintos que podem ter receitas esperadas distintas, ver Exemplo 1.

Observação 3.6. A hipótese de que o objeto é indivisível não é necessária aqui, já que um leilão que divide o objeto em partes $a_i \in [0, 1]$ tal que $\sum_{i \in N} a_i \leq 1$ e a_i representa a proporção recebida por i, tem mesma utilidade esperada que o leilão que sorteia o ganhador com probabilidades a_i, pela hipótese H3 ambos leilões são equivalentes, observe que isto é diferente de um leilão com múltiplos objetos, uma vez que um leilão de múltiplos objetos o participante pode estar interessado em dar lances por quantidades parciais do leilão, enquanto no caso abordado os jogadores somente podem dar ofertas pelo todo porém eventualmente ocorre uma divisão dos bens.

3.1 Análise do problema

Pelo princípio da revelação, podemos supor que o equilíbrio de Nash $b = (\beta_i)_{i \in N}$ será $\beta_i(t_i) = t_i$, então usaremos a notação simplificada para o ganho esperado do participante i:

$$U_i[t_i] := U_i[t_{-i}, t_i].$$

Fixando um participante i do leilão, nada impede tal participante de fazer uma oferta distinta de seu valor privado t_i, suponha que tal oferta tem valor de s_i, nesse caso o ganho esperado de tal participante será

$$U_i\left[t_{-i}, s_i \middle| t_i\right] = \mathbb{E}\left[v_i(t_{-i}, t_i) \cdot \alpha_i[t_{-i}, s_i] - p_i[t_{-i}, s_i]\right]. \tag{3.4}$$

Para simplificar a notação omitiremos o t_{-i}, escrevendo da seguinte forma

$$U_i\left[s_i \middle| t_i\right] = \mathbb{E}\big[v_i(t_i) \cdot \alpha_i(s_i) - p_i(s_i)\big].$$

Pelo princípio da revelação podemos supor que o leilão é direto fiel, ou seja, $U_i[t_i] \geq U_i[s_i|t_i]$, para todos os $s_i \in [a_i, b_i]$.

Observação 3.7. Observe que $U_i\left[t_i \middle| t_i\right] = U_i[t_i]$

Definição 3.8. Dado um leilão podemos definir para cada $i \in N$ a seguinte função

$$Q_i(\alpha_i, t_i) := \mathbb{E}\left[\alpha_i \middle| t_i\right] = \mathbb{P}\left[i \text{ ganha o leilão} \middle| t_i \text{ é a oferta de } i\right],$$

que é a probabilidade condicional de i ganhar o leilão dado que tal participante avalia o objeto como t_i.

Fixada uma oferta s_i, o lema a seguir interpreta a função $Q_i(\alpha_i, s_i)$ como uma função que calcula a variação de $U_i[s_i|\cdot]$ sobre os possíveis valores privados t_i, então podemos interpretar $Q_i(\alpha_i, t_i)$ como uma função potencial da utilidade o que se afirma no Lema (3.10).

Lema 3.9. A utilidade pode ser escrita em função de $Q_i(\alpha_i, t_i)$ da seguinte forma

$$U_i[s_i|t_i] = U_i[s_i] + (t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, s_i).$$

Demonstração. Primeiro observe que $v_i(t_{-i}, t_i) = v_i(t_{-i}, t_i) + (t_i - s_i)$, pois $\sum_{j \neq i} e_j(t_j)$ não envolve t_i, usando a Equação (3.4) que descreve $v_i(t)$ se o participante avalia t_i mas oferta s_i

$$\begin{aligned}
U_i\left[s_i \middle| t_i\right] &= \mathbb{E}\big[v_i(t_{-i}, t_i) \cdot \alpha_i[t_{-i}, s_i] - p_i[t_{-i}, s_i] \big| t_i\big] \\
&= \mathbb{E}\left[\big(v_i(t_{-i}, s_i) + (t_i - s_i)\big)\alpha_i(t_{-i}, s_i) - p_i[t_{-i}, s_i] \middle| t_i\right] \\
&= U_i[s_i|s_i] + (t_i - s_i)\mathbb{E}\left[\alpha_i(t_{-i}, s_i) \middle| t_i\right] \\
&= U_i\left[s_i\right] + (t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, s_i).
\end{aligned}$$

□

O lema a seguir é central, ele caracteriza os leilões diretos fieis, com ele é possível descrever a função pagamento p_i a partir da função de alocação α_i e do ganho esperado quando o participante avalia o menor valor possível $U_i[a_i]$, "eliminando" a função pagamento do problema do leiloeiro.

Lema 3.10. Um leilão direto é fiel, se e somente se,

$$Q_i(\alpha_i, t_i) \text{ é crescente em } t_i \text{ e} \tag{3.5}$$

$$U_i[t_i] = U_i[a_i] + \int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z)dz \qquad \forall i \in N, \forall t_i \in [a_i, b_i]. \tag{3.6}$$

Antes de apresentar uma demonstração formal do lema, será apresentada uma heurística: Pelo lema anterior $\frac{U_i[s_i|t_i] - U_i[s_i|s_i]}{t_i - s_i} = Q_i(\alpha_i, s_i)$ portanto $\frac{\Delta U_i}{\Delta s_i} = Q_i$ tomando Δs_i pequeno $\frac{dU_i}{ds_i} = Q_i$, assim $U_i[t_i] - U_i[a_i] = \int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, s_i) ds_i$, esta não é uma demonstração formal pois $U_i(\cdot|\cdot)$ tem duas entradas e foi usado ΔU_i de forma errada acima.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Como o leilão é fiel pelo Lema (3.9) temos

$$U_i[t_i] \geq U_i[s_i|t_i] = U_i[s_i] + (t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, s_i),$$

usando a desigualdade a cima duas vezes, trocando o papel dos t_i, s_i

$$(t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, s_i) \leq U_i(t_i) - U_i(s_i) \leq (t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, t_i). \tag{3.7}$$

Supondo $t_i > s_i$ concluímos a partir da desigualdade (3.7) que $Q_i(\alpha_i, s_i) \leq Q_i(\alpha_i, t_i)$, ou seja, $Q_i(\alpha_i, z)$ é crescente (3.5).

Para demonstrar a igualdade (3.6), primeiro observe que $Q_i(\alpha_i, z)$ é crescente, logo é integrável. Para todo $\delta > 0$ tome uma partição do intervalo $[a_i, t_i]$ formada pela sequência $(s_j)_{j=0}^{M}$, de forma que $|s_0 - a_i| < \delta, |s_M - t_i| < \delta, \quad (s_{j-1} - s_j) = \delta \quad, \forall j \quad 0 < j \leq M.$

A partir da desigualdade (3.7), somando para os elementos da partição (s_j)

$$\sum_j (s_j - s_{j-1})Q_i(\alpha_i, s_{j-1}) \leq \sum_j U_i(s_j) - U_i(s_{j-1}) \leq \sum_j (s_j - s_{j-1})Q_i(\alpha_i, s_j)$$
$$\sum_j \delta Q_i(\alpha_i, s_{j-1}) \leq U_i(s_M) - U_i(s_0) \leq \sum_j \delta Q_i(\alpha_i, s_j).$$

Tomando o limite de $\delta \to 0$ temos a integral de Riemann no lado direito e esquerdo da desigualdade, a função $Q_i(\alpha_i, \cdot)$ é integrável pois já mostramos que é crescente, concluindo a igualdade (3.6), ou seja,

$$\int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z) dz = U_i(t_i) - U_i(a_i)$$

($\Longleftarrow$) Para mostrar a recíproca, suponha que valem (3.5),(3.6), temos que mostrar que $U_i[t_i] \geq U_i[s_i|t_i] \quad \forall t_i, s_i \in [a_i, b_i]$.

Caso $s_i \leq t_i$,

$$\begin{aligned}
U_i[t_i] =& U_i[s_i] + \int_{s_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z) dz \\
\geq& U_i[s_i] + \int_{s_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, s_i) dz \\
=& U_i[s_i] + (t_i - s_i)Q_i(\alpha_i, s_i) \\
=& U_i[s_i|t_i].
\end{aligned}$$

Caso $t_i < s_i$,

$$\begin{aligned}U_i[t_i] =& U_i[s_i] - \int_{t_i}^{s_i} Q_i(\alpha_i, z)dz \\ \geq& U_i[s_i] - \int_{t_i}^{s_i} Q_i(\alpha_i, s_i)dz \\ =& U_i[s_i] - (s_i - t_i)Q_i(\alpha_i, s_i) \\ =& U_i[s_i|t_i].\end{aligned}$$

□

Corolário 3.11. *Se o leilão é direto e fiel então o pagamento esperado é*

$$\mathbb{E}[p_i(t_i)|t_i] = t_i \cdot \mathbb{E}[\alpha_i(t_i, t_{-i})|t_i] - U_i(a_i) - \int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z)dz.$$

Demonstração. Basta usar que $U_i[t|t_i] = t_i \cdot \mathbb{E}[\alpha_i(t_i, t_{-i}) - p_i(t_i)|t_i]$ e usar a Equação (3.6) do lema anterior. □

Com o corolário descrito acima é possível demonstrar um dos teoremas mais importantes da Teoria de Leilões de forma bem simples.

Teorema 3.12 (Equivalência de receitas de Myerson)**.** *Fixadas as distribuições de probabilidade sobre os valores privados, dois leilões que possuem a mesma função alocação e que para todo $i \in N$ o ganho esperado quando o i-ésimo jogador avalia o mínimo $U_i(a_i)$ é o mesmo em ambos leilões, então a receita esperada é mesma em ambos os leilões.*

Demonstração. Fixado um leilão $(\alpha, \mathcal{P})$, pelo princípio da revelação podemos construir um leilão direto fiel cuja receita esperada é a mesma do leilão original, então sem perda de generalidade podemos considerar que $(\alpha, \mathcal{P})$ é um leilão direto fiel para efeitos de cálculo de U_0

$$U_0(t) = \mathbb{E}\left[v_0 \cdot \left(1 - \sum_{i \in N} \alpha_i(t)\right) + \sum_{i \in N} p_i(t_i)\right].$$

Usando o Corolário (3.11) podemos perceber que p_i depende somente da alocação $\alpha_i(t)$ e dos ganhos esperados $U_i(a_i)$ quando os participantes avaliam o mínimo possível, portanto $U_0(t)$ está completamente determinado fixados a função de alocação α e os ganhos esperados $U_i(a_i)$.

□

Observação 3.13. Esse tipo de resultado facilita a busca de leilões ótimos, uma vez que para encontrar o leilão ótimo basta encontrar a melhor função pagamento, ao invés de buscar o melhor par de funções alocação e pagamento ótimos.

O corolário a seguir descreve um caso particular do Teorema de equivalência de receitas de Myerson, que foi apresentado no capítulo anterior como Teorema de equivalências de Vickrey (2.13).

Corolário 3.14. *Qualquer leilão onde o ganhador é aquele que possui o maior valor privado e $U_i(a_i) = 0$, para todos os $i \in N$, possui a mesma receita esperada.*

O Lema (3.10) é importante pois, ao buscar maximizar o ganho esperado do leiloeiro U_0, podemos buscar entre os leilões cuja função alocação respeita as condições (3.5),(3.6). O teorema a seguir tem papel central no artigo [Mye81] e possibilita concluir os resultados do Leilão ótimo de Myerson (ou simplesmente leilão de Myerson), que será apresentado depois em (3.18). O Lema (3.10) também será utilizado no capítulo seguinte para mostrar a otimalidade do Leilão de Lookahead dentre a classe de leilões cujo ganhador pode ser apenas aquele participante que dá a maior oferta.

Antes de prosseguir na construção do Leilão ótimo de Myerson teremos que acrescentar mais uma hipótese sobre as distribuições de probabilidade dos valores privados v_i:

3.1.1 H4 (Valores absolutamente contínuos independentes)

Vamos acrescentar ao modelo a seguinte hipótese:

H4

Para todo participante i, v_i tem distribuição de probabilidade $F_i(x) : [a_i, b_i] \to [0, 1]$ absolutamente contínua, ou seja, existe $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ não negativa de forma que

$$F_i(x) = \int_{a_i}^{x} f_i(z)dz,$$

mais forte que isto, é necessário pedir que $f_i(t_i) > 0$ para todos os $t_i \in [a_i, b_i]$.

Como as distribuições são coletivamente independentes temos que o vetor $v(t) = (v_i(t))_{i\in N}$ tem distribuição absolutamente contínua $F(x)$ e possui função densidade f que respeita

$$f(t) = \prod_{i\in N} f_i(t_i).$$

Definição 3.15. A função de densidade de probabilidade do espaço dos valores privados, onde o i-ésimo participante conhece seu próprio valor é escrita

$$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} f_j(t_j) = f(t)/f_i(t_i).$$

Teorema 3.16. *O ganho esperado do leiloeiro em um leilão direto fiel pode ser escrito como*

$$U_0[t] = \int_T \left(\sum_{i \in N} \left(t_i - t_0 - e_i(t_i) - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) \alpha_i(t) \right) f(t) dt \tag{3.8}$$

$$+ \int_T v_0 f(t) dt - \sum_{i \in N} U_i(a_i). \tag{3.9}$$

Demonstração. Pela Igualdade 3.3

$$\begin{aligned} U_0[t] =& \mathbb{E}\left[v_0 \left(1 - \sum_{i \in N} \alpha_i[t] \right) + \sum_{i \in N} p_i[t] \right] \\ =& \mathbb{E}[v_0] + \mathbb{E}\left[\sum_{i \in N} \big(p_i[t] - v_0 \cdot \alpha_i[t] \big) \right] \\ =& \int_T v_0 f(t) dt + \sum_{i \in N} \int_T \alpha_i(t) \big(v_i(t) - v_0(t) \big) f(t) dt \\ & + \sum_{i \in N} \int_T \big(p_i(t) - \alpha_i(t) v_i(t) \big) f(t) dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando o Lema (3.10) e o Teorema de Fubini para concluir que

$$\begin{aligned} \int_T \left(p_i(t) - \alpha_i(t) v_i(t) \right) f(t) dt =& - \int_{a_i}^{b_i} U_i[t_i] f_i(t_i) dt_i \\ =& - \int_{a_i}^{b_i} \left(U_i(a_i) + \int_{a_i}^{t_i} Q_i(s_i) ds_i \right) f_i(t_i) dt_i \\ =& - U_i(a_i) - \int_{a_i}^{b_i} \int_{s_i}^{b_i} f_i(t_i) Q_i(s_i) dt_i ds_i \\ =& - U_i(a_i) - \int_{a_i}^{b_i} \left(1 - F_i(s_i) \right) Q_i(s_i) ds_i \\ =& - U_i(a_i) - \int_T \left(\frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) \alpha_i(t) f(t) dt, \end{aligned} \tag{3.11}$$

no último passo foi usado que

$$Q_i(s_i) = \int_{T_{-i}} \alpha_i(t) \frac{f(t)}{f_i(t_i)} dt_{-i}.$$

Observe que $v_i(t) - v_0(t) = t_i - t_0 - e_i(t_i)$.

Substituindo a equação anterior e a Equação (3.11) em (3.10) temos a fórmula desejada

$$U_0[t] = \underbrace{\int_T \left(\sum_{i \in N} \left(t_i - t_0 - e_i(t_i) - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) \alpha_i(t) \right) f(t) dt}_{A} \tag{3.12}$$
$$- \underbrace{\sum_{i \in N} U_i(a_i)}_{B} + \underbrace{\int_T v_0 f(t) dt}_{C} .$$

□

Portanto o problema do leiloeiro é maximizar $U_0[t]$ dada as funções densidades dos valores privados f_i, sabemos que o único termo da Equação (3.12) que depende da função pagamento p_i é o termo B, o termo C é uma constante determinada a partir das distribuições dos valores privados, observe que o termo A depende apenas da função alocação α e das funções distribuições dos valores privados.

3.2 Leilão ótimo de Myerson

O princípio da revelação (3.4) diz que se buscamos encontrar um leilão que maximiza o ganho esperado do leiloeiro basta procurar por um leilão direto fiel que maximiza a receita esperada. Com isso em mente, podemos usar a Equação (3.12) da maneira enunciada abaixo.

Lema 3.17. Se um leilão direto fiel possui uma função alocação α que maximiza

$$\int_T \left[\sum_{i \in N} \left(t_i - t_0 - e_i(t_i) - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) \alpha_i(t) \right] f(t) dt$$

(termo A da Equação 3.12).

e além disso se a função de pagamento $p_i(t)$ respeita

$$p_i(t) = \alpha_i(t) v_i(t) - \int_{a_i}^{t_i} \alpha_i(t_{-i}, s_i) ds_i. \tag{3.13}$$

Então o leilão é ótimo.

Demonstração. Via definição

$$\mathbb{E} \left[\alpha_i(t) v_i(t) - \int_{a_i}^{t_i} \alpha_i(t_{-i}, s_i) ds_i - p_i(t) \middle| t_i \right] = U_i(a_i) \geq 0.$$

Recordando a fórmula para o ganho U_0 (Equação 3.12), podemos concluir que a escolha de $p_i(t) = \alpha_i v_i(t) - \int_{a_i}^{t_i} \alpha_i(t_{-i}, s_i) ds_i$ maximiza o ganho $U_0[t]$, já que o único termo que depende de $p_i(t)$ em U_0 é B.

Como C é constante, um leilão que maximiza o termo restante A será ótimo.

□

3.3 Leilão ótimo no caso regular

O objetivo agora será dar uma caracterização melhor do termo A da Equação (3.12) em ordem de construir um leilão ótimo. Assumindo uma condição de regularidade é possível construir tal leilão.

Regularidade

Seja,

$$c_i(t_i) := t_i - e_i(t_i) - \frac{1 - F_i(t_i)}{f(t_i)}. \tag{3.14}$$

Diremos que o problema do leiloeiro é **regular** se a função $c(t_i)$ é estritamente crescente. Nesse caso o Leilão de Myerson é como um leilão de segundo preço, com lances mínimos de $c_i^{-1}(t_0)$ para o participante i, porém no Leilão de Myerson o vencedor não aquele que possui a maior oferta t_i, mas aquele que possui o maior $c_i(t_i)$ e o menor $\tilde{t_i}$ em que $c_i\tilde{t_i})$ é o maior que o $c_j(t_j)$ para os outros $j \neq i \in N$. Por isso a função c_i é chamada de **valor virtual** de i. Veremos que o Leilão de Myerson respeita as propriedades de otimalidade do Lema (3.17), para isso vamos definir formalmente o Leilão de Myerson.

Definição 3.18 (Leilão Ótimo de Myerson)**.** O leiloeiro mantém o objeto se $t_o > \max\{c_i(t_i)\}$, caso contrário o vencedor do leilão é aquele com maior $c_i(t_i)$, em caso de empate o leiloeiro pode usar qualquer regra arbitrária de desempate (empates acontecem com probabilidade zero), então para que o i-ésimo participante tenha alguma chance de ganhar o leilão $\alpha_i > 0$ é necessário que $c_i(t_i) = \max\{c_i(t_i)\} \geq t_0$. Ou seja, a função alocação maximiza o termo A da Equação 3.12, que pode ser escrito assim

$$\sum_{i \in N} \big(c_i(t_i) - t_0\big)\alpha_i(t).$$

Portanto,

$$\alpha_i(t_{-i}, s_i) = \mathbb{1}_{\{c_i(s_i) \geq \max c_j(t_j)\}} \cdot \mathbb{1}_{\{c_i(s_i) > t_0\}}.$$

A função pagamento p_i será definida de forma que o Lema 3.17 garanta a otimalidade do leilão, dessa forma escrevemos

$$p_i(t) = \alpha_i(t)v_i(t) - \int_{a_i}^{t_i} \alpha_i(t_{-i}, s_i)ds_i.$$

Podemos reescrever essa função de forma mais intuitiva, fixado um vetor t_{-i} usando a definição de α_i

$$\int_{a_i}^{t_i} \alpha_i(t_{-i}, s_i) ds_i = \begin{cases} t_i - \max\limits_{j \neq i}\{c_j(t_j)\}, & \text{se } c_i(s_i) = \max\limits_{j \in N}\{c_j(t_j)\} \text{ e } c_i(t_i) > t_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo a função pagamento é

$$p_i(t) = \begin{cases} v_i - t_i + \max\limits_{j \neq i}\{c_j(t_j)\}, & \text{se } i \text{ ganha o leilão e } c_i(t_i) > t_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Relembrando que $v_i = t_i + \sum\limits_{j \neq i} e_j(t_j)$, no caso em que i ganha o leilão temos

$$p_i(t) = \max_{j \neq i}\{c_j(t_j)\} + \sum_{j \neq i} e_j(t_j).$$

A função de pagamento do Leilão de Myerson em certo sentido não depende do valor ofertado, uma vez que se sabe que o valor ofertado era suficiente para vencer o leilão o pagamento é igual ao ínfimo dos valores possíveis que esse jogador continuaria vencendo o leilão. A melhor estratégia é aquela que o jogador oferta seu valor privado, pois no caso que o jogador ganha o leilão com o lance t_i ele não tem vantagem em dar um lance diferente de t_i, no caso em que ser honesto não ganha o leilão ele não tem incentivo em dar um lance maior pois tem ganho esperado negativo (análise similar a feita na Seção 2.4 sobre o Leilão de Vickrey). Observe que esta propriedade está intimamente ligada a regularidade do leilão, caso o valor virtual $c_i(\cdot)$ não fosse crescente, algum participante pode ter incentivo a dar um lance menor que o valor privado t_i buscando maximizar $c_i(t_i)$ aumentando sua chance de ganhar o leilão sem aumentar o seu pagamento.

Observação 3.19.
- Com isso podemos usar o Lema (3.17) para concluir que o Leilão de Myerson é ótimo no caso regular.
- No caso onde as funções de revisão $e_i \equiv 0$ e que os valores privados têm todos a mesma distribuição, o Leilão de Myerson é igual ao Leilão de Vickrey com preço de reserva, logo esse leilão é ótimo no caso uniforme.

Exemplo 3.20. Se temos $V_i \sim U[0,1]$ independentes, temos que $c_i(t_i) = 2t_i - 1$ portanto, o vencedor do leilão será aquele que submete a maior oferta, exceto que o leiloeiro somente vende caso $t_i \geq c_i^{-1}(0) = 1/2$. O preço a pagar pelo ganhador i será $\max\{1/2, t_{-i}\}$. No caso simétrico o Leilão de Myerson será um Leilão de Vickrey com preço de reserva $1/2$.

Caso $V_i \sim U[a_i, b_i]$ independentes, temos que $c_i(t_i) = 2t_i - b_i$. Portanto nem sempre o participante que dá o maior lance vence o leilão no caso assimétrico.

3.4 Leilão ótimo no caso geral

No caso geral (onde $c_i(t_i) = t_i - e_i(t_i) - \frac{1-F_i(t_i)}{f(t_i)}$ não é crescente) precisamos definir uma nova função $\bar{c}_i$ que fará o papel do valor virtual[2] c_i no caso regular, de forma que $\bar{c}_i$ seja monótona crescente.

Definição 3.21 (Valor virtual $\bar{c}_i(\cdot)$)**.** Fixado um jogador i, lembrando que F_i é a função de distribuição acumulada do valor privado V_i definimos $h_i(q) := c_i\big(F_i^{-1}(q)\big)$. Lembrando que $f_i(x) > 0$ para todo $x \in [a_i, b_i]$, logo F_i é estritamente crescente, portanto existe uma inversa $F_i^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$h_i(q) := c_i\big(F_i^{-1}(q)\big) = F_i^{-1}(q) - e_i\big(F_i^{-1}(q)\big) - \frac{1-q}{f_i\big(F_i^{-1}(q)\big)},$$

definimos

$H_i(q) := \int_0^q h_i(r)dr.$

Agora definimos $G_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ como o envoltório convexo de $H_i(q)$, formalmente podemos definir $G_i(q) := \sup\{\phi(q) |\ \ \phi(r) \leq G_i(r),\ \ \forall r \in [0,1] \text{ e } \phi(r) \text{ é convexa}\}$, informalmente é a maior função convexa abaixo de $H_i(q)$.

Como $G_i(q)$ é convexa, G_i também é diferenciável exceto em uma quantidade enumerável de pontos e sua derivada é monótona crescente. Então definimos $g_i(q) = G_i'(q)$, nos pontos onde a derivada existe, nos pontos onde a derivada não existe define-se a função de forma que seja contínua a direita.

Finalmente definimos $\bar{c}_i(t_i) = g_i\big(F_i(t_i)\big)$

Observação 3.22. Observe que no caso regular ($c_i(\cdot)$ crescente) h_i é a composição de funções crescentes, logo crescente, portanto $H_i(q)$ é uma função convexa, ou seja, $H_i(q) = G_i(q)$, assim $g_i(q) = h_i(q)$, concluindo que $\bar{c}_i(q) = c_i(q)$.

Definição 3.23 (Leilão de Myerson caso geral)**.** Definimos o Leilão de Myerson (no caso geral) como o leilão que aloca o objeto para o jogador i que possui o maior valor virtual $\bar{c}_i(t_i)$ se $\bar{c}_i(t_i) > t_0$, caso nenhum $\bar{c}_i(t_i) > t_0$ o leiloeiro mantém o objeto. Caso exista mais de um participante com máximo $\bar{c}_i(t_i) > t_0$, o leiloeiro sorteia uniformemente o vencedor dentre aqueles com maior valor virtual.

Seja $M(t) = \{i : t_0 < \bar{c}_i(t_i) = \max\{\bar{c}_j(t_j)\}\}$, o conjunto dos participantes que têm chance $1/|M(t)|$ de ganhar o leilão. A função alocação pode ser escrita como $\bar{\alpha}_i(t_i) = 1/|M(t)| \cdot \mathbb{1}_{\{i \in M(t)\}}$.

Definimos a função pagamento como descrita no Lema (3.17):

$$\bar{p}_i(t) = \bar{\alpha}_i(t)v_i(t) - \int_{a_i}^{t_i} \bar{\alpha}_i(t_{-i}, s_i)ds_i.$$

[2] $\bar{c}_i$ é chamado de *nível de prioridade* por Myerson em [Mye81] e de valor virtual por Karlin e Peres em [KP17].

Teorema 3.24. *O Leilão de Myerson (no caso geral) é ótimo.*

Demonstração. A demonstração consiste em provar que o leilão $(\bar{\alpha}_i, \bar{p}_i)$ respeita as condições do Lema (3.17), para mostrar que o leilão é fiel vamos usar o Lema (3.10).

Assim como no caso regular, mostrar que $Q_i(\bar{\alpha}_i)$ é crescente segue do fato de $\bar{c}_i = g_i \circ F_i^{-1}$ ser crescente, isto ocorre pois g_i é crescente dado que é a derivada de uma função convexa e F_i^{-1} também é uma função crescente.

Como $Q_i(\bar{\alpha}_i, s_i)$ é crescente a Condição 3.5 vale (observe que o leilão foi construído de forma a respeitar a Equação (3.6)), pelo Lema (3.10), o leilão é fiel.

Usando integral por partes podemos derivar a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
&\int_T [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)]\bar{\alpha}_i(t) f(t)dt \\
&\qquad = \int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] \int_{T_{-i}} \bar{\alpha}_i(t) f(t) dt_{-i} dt_i \\
&\qquad = \int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] Q_i(\bar{\alpha}_i) \\
&\qquad = [H_i \circ F_i(t_i) - G_i \circ F_i(t_i)]\Big|_{t_i=a_i}^{t_i=b_i} - \int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] dQ_i(\bar{\alpha}_i).
\end{aligned}$$

Observe que como $G_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ é o envoltório convexo de H_i temos que $H_i(F_i(a_i)) = H_i(0) = G_i(0) = G_i(F_i(a_i))$ e também $H_i(F_i(b_i)) = H_i(1) = G_i(1) = G_i(F_i(b_i))$, então o termo

$$H_i \circ F_i(t_i) - G_i \circ F_i(t_i)\Big|_{t_i=a_i}^{t_i=b_i} = 0,$$

como Q_i é crescente e $H_i \geq G_i$ temos que $\int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] dQ_i(\bar{\alpha}_i) \geq 0$.

Observe que nos pontos onde $H_i(q) > G_i(q)$ temos que G_i deve ser linear em alguma vizinhança de q, logo $g_i'(q) = G_i''(q) = 0$, logo $\bar{c}_i = g_i \circ F_i^{-1}$ é constante portanto $Q_i(\bar{c}_i)$ é constante numa vizinhança de q. Portanto

$$\int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] dQ_i(\bar{\alpha}_i) = 0,$$

assim podemos concluir que

$$\int_T [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)]\bar{\alpha}_i(t) f(t)dt \tag{3.15}$$

$$= H_i \circ F_i(t_i) - G_i \circ F_i(t_i)\Big|_{t_i=a_i}^{t_i=b_i} - \int_{a_i}^{b_i} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] dQ_i(\bar{\alpha}_i) = 0. \tag{3.16}$$

Lembrando que para usar o Lema (3.17) temos que garantir que a função alocação maximiza o termo A da Equação (3.12)

$$
\begin{aligned}
&\int_T \sum_{i \in N} \left(t_i - e_i(t_i) + \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \right) \alpha_i(t) dt \\
&\qquad = \int_T \sum_{i \in N} \left(h_i(F_i(t_i)) - t_0 \right) \bar{\alpha}_i f(t) dt \\
&\qquad = \int_T \sum_{i \in N} (\bar{c}_i(t_i) - t_0) \alpha_i(t) dt \quad + \int_T \sum_{i \in N} [h_i \circ F_i(t_i) - g_i \circ F_i(t_i)] \bar{\alpha}_i(t) f(t) dt \\
&\qquad = \int_T \sum_{i \in N} (\bar{c}_i(t_i) - t_0) \alpha_i(t) dt,
\end{aligned}
$$

onde foi mostrado que a última parcela é zero na Equação (3.16).

Observe que $\bar{\alpha}_i$ de fato maximiza $\displaystyle\int_T \sum_{i \in N} (\bar{c}_i(t_i) - t_0)\alpha_i(t)dt$ pois $\bar{\alpha}_i$ é definida de forma que dá peso positivo apenas nos $\bar{c}_i(t_i) = \max\{\bar{c}_j(t_j)\} > t_0$ como desejado.

$\square$

4 Leilão Lookahead

O Leilão de Myerson é de fato o leilão que otimiza o ganho esperado do leiloeiro, porém tal leilão nem sempre aloca o objeto ao participante com maior oferta, o que em algumas situações pode ser bem desagradável, o leiloeiro precisa justificar bem o porquê de algum participante ser privilegiado ao ganhar um leilão mesmo sem dar o maior lance. Nessa seção descreveremos o leilão Lookahead (LA), mostraremos que esse leilão maximiza a receita do leiloeiro entre leilões que alocam o objeto ao participante que dá a maior oferta, além disso a receita de LA é sempre maior que $\frac{1}{2}$ da maior receita possível, quando nos restringimos a leilões ex-post. Além disso o leilão de Lookahead tem a vantagem sobre o Leilão de Myerson de estar definido no caso onde as distribuições dos valores privados não são independentes ou não são absolutamente contínuas.

Um outro motivo de Amir Ronen ao estudar o leilão Lookahead foi encontrar leilões aproximadamente ótimos, uma vez que encontrar o leilão ótimo pode ser muito difícil ou caro computacionalmente, em [Ron01] é mostrado que esse mecanismo requer tempo polinomial para calcular a distribuição condicional do agente com maior avaliação, dadas as avaliações dos outros agentes. Como o objetivo dessa dissertação não é computacional esses aspectos não serão tratados por aqui e fica como sugestão ao leitor interessado ler o artigo original [Ron01].

4.1 Leilão de único comprador

Considere o caso onde existe um único interessado, $n = 1$, cujo valor privado V_1 tem distribuição $\tilde{F}$ em $[a, b]$, seja v_0 o valor que o leiloeiro avalia o objeto. Nesse caso o Leilão de Myerson aloca o objeto ao participante 1 se $\bar{c_1}(v_1) \geq v_0$, caso contrário não há venda. Como $\bar{c_1}$ é uma função crescente, podemos dizer que existe um preço $p^*_{\tilde{F}} = \bar{c_1}^{-1}(v_0)$ de forma que caso o participante oferte um valor maior ou igual a $p^*_{\tilde{F}}$ ele recebe o objeto e paga $p^*_{\tilde{F}}$, caso contrário o objeto não é vendido. Pela otimalidade do Leilão de Myerson $p^*_{\tilde{F}}$ é o melhor preço de venda possível para um participante único de distribuição $\tilde{F}$.

Podemos calcular o $p^*_{\tilde{F}}$ da seguinte maneira

$$p^*_{\tilde{F}} = \text{argmax}\{p(1 - \tilde{F}(p)) : p \in [a, b]\}. \tag{4.1}$$

Uma vez $R(p) = p(1 - \tilde{F}(p))$ é a receita esperada do leiloeiro no leilão onde ele fixa o preço do objeto em p e o participante decide se compra ou não, chamaremos esse leilão de **venda simples** ao participante 1 (notação: omitiremos o F de $p^*_{\tilde{F}}$, escrevendo apenas p^*, quando não houver ambiguidade de qual é a distribuição $\tilde{F}$).

Observação 4.1. Sob a hipótese de $\tilde{F}(x)$ contínua p^* está bem definido, uma vez que $R(x) = x(1-\tilde{F}(x))$ será uma função contínua com domínio compacto, logo possui máximo. Veremos que em geral p^* não está bem definido (Exemplo 4.14) e também veremos condições mais fracas que garantem a existência de p^* (Teorema 4.13).

Em síntese o seguinte teorema é válido:

Teorema 4.2 (Leilão de Myerson com um participante)**.** *Se existe um único participante, o leilão que maximiza o ganho esperado do leiloeiro é o leilão que vende o objeto por* $p^*_{\tilde{F}}$ *somente quando o participante estiver disposto a pagar tal quantia. Nesse caso a receita esperada é* $R(p^*_{\tilde{F}})$.

4.2 Lookahead

No caso geral onde temos n participantes, cada agente possui um valor privado V_i com distribuição conjunta dos valores privados F e o valor privado do leiloeiro é v_0, podemos definir o leilão LA. A princípio considere que todos participantes são honestos, ou seja, ofertam seu valor privado.

Definição 4.3 (leilão Lookahead - LA)**.** Considere uma reordenação das ofertas recebidas $(v_i)_i$ de forma que $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n$, calcula-se a distribuição marginal $\tilde{F}$ de V_1 dado que $V_2 = v_2, \ldots, V_n = v_n$, rejeita-se todos os participantes exceto o participante 1 (aquele que deu a maior oferta) e realiza um Leilão de Myerson com o participante 1 com distribuição $\tilde{F}$. Caso a maior oferta v_1 seja maior ou igual que $p^*_{\tilde{F}}$, o participante 1 compra o objeto por $p^*_{\tilde{F}}$, caso contrário o objeto não é alocado a ninguém.

Exemplo 4.4. (Caso uniforme independente)

Sejam $V_1, V_2 \sim U[0,1]$ independentes, os valores privados de dois participantes interessados em um objeto a ser leiloado.

Para calcular o leilão de Lookahead, vamos calcular $\tilde{F}_l(x) = \mathbb{P}[V_1 < x | V_1 > l]$, onde $V_2 = l$,

$$\tilde{F}_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq l; \\ \frac{x-l}{1-l} & \text{se } x \in (l,1]; \\ 1 & \text{se } x > 1; \end{cases} \qquad R_l(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq l; \\ \frac{x-x^2}{1-l} & \text{se } x \in (l,1]; \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Para calcular o $p^* = \text{argmax}\{R_l(x)\}$, temos duas possibilidades, caso $l < 1/2$, $p^* = 1/2$, caso contrário $p^* = l$. Assim o leilão de Lookahead, aloca o objeto ao participante que dá a maior oferta, caso $V_2 < 0.5$ e $V_1 < 0.5 = p^*$ ninguém ganha o leilão. Caso $V_1 > 0.5$ e $V_2 < 0.5$ o primeiro participante ganha o leilão e paga $0.5 = p^*$, caso $V_1 > V_2 > 0.5$ o primeiro participante ganha o leilão e paga $V_2 = p^*$.

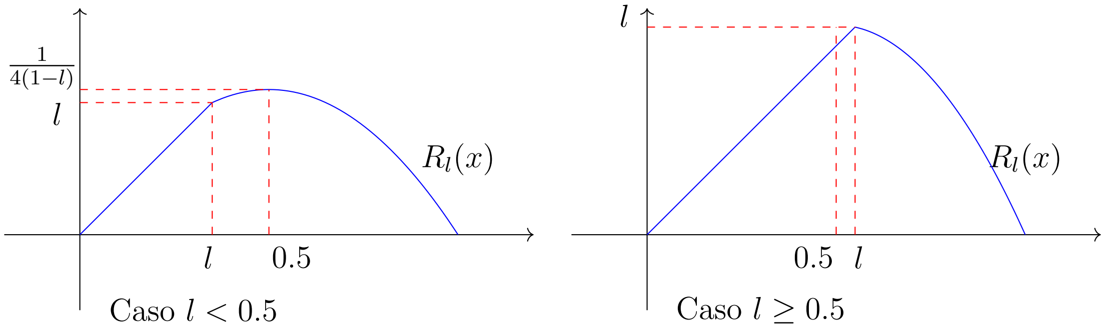

Figura 1 – Gráficos de $R(x)$

Essencialmente o leilão de Lookahead neste caso é igual ao Leilão de Vickrey com preço de reserva igual a 0.5, que coincide com o Leilão ótimo de Myerson.

Teorema 4.5. *O leilão LA maximiza a receita esperada do leiloeiro dentre a classe de leilões cujo ganhador somente pode ser aquele participante que dá a maior oferta.*

Demonstração. Uma vez que o vencedor somente pode ser aquele participante que dá a maior oferta, o leiloeiro tem duas opções aceitar a maior oferta ou rejeita-la. Pelo Leilão de Myerson com um participante (Teorema 4.2) a melhor escolha é definir o preço de corte $p^*_{\tilde{F}}$. □

Observação 4.6. É de verificação imediata que o leilão LA é fiel.

Definição 4.7 (Ex-Post)**.** Seja $\mathcal{A}$ um leilão e β um equilíbrio desse leilão, o par $(\mathcal{A}, \beta)$ é dito *ex-post* se a utilidade dos participantes é sempre não negativa, em outras palavras o pagamento é sempre menor que a avaliação do participante ganhador. Matematicamente isso quer dizer que $u_i(\beta) \geq 0, \forall i \in N$, o que é uma hipótese mais forte que $U_i(\beta) = \mathbb{E}[u_i(\beta)] \geq 0$.

Exemplo 4.8. O leilão inglês, holandês e Leilão de Vickrey são leilões ex-post, se os participantes tomam a estratégia fiel ($\beta(t) = t$). Como esses leilões são fieis, ter utilidade positiva significa que o pagamento do ganhador é sempre menor ou igual do que oferta e que os perdedores do leilão nada pagam. O leilão de primeiro preço também é ex-post, pois não existe nenhum equilíbrio onde o participante dá um lance maior que sua avaliação.

Exemplo 4.9 (All-pay)**.** O leilão *All-pay* é um exemplo de leilão que não é ex-post, nesse leilão todos os participantes pagam uma oferta, independente se vencem ou não, o vencedor é aquele participante que deu a maior oferta, com alguma regra arbitrária de desempate.

Um leilão $\mathcal{A}$ ser ex-post pode depender de qual equilíbrio é tomado, no sentido em que um perfil de estratégias β pode garantir apenas utilidades positivas em $\mathcal{A}$, mas pode existir um outro perfil de estratégias β' (equilíbrio de Nash) onde eventualmente os jogadores possuem utilidades negativas, veja Exemplo 2. Em geral podemos omitir qual é o equilíbrio em que o leilão é ex-post, seja por que é obvio qual o equilíbrio a ser analisado ou por que o leilão é ex-post para todos os equilíbrios, como no leilão inglês (que possui apenas um equilíbrio de Nash).

Teorema 4.10 (Lookahead é $\frac{1}{2}$ ótimo)**.** *Seja R_{LA} a receita no leilão LA, e seja R a receita em um outro leilão ex-post qualquer. Então $\frac{1}{2}R \leq R_{LA}$.*

Demonstração. Pelo princípio da revelação (3.4) podemos supor que o leilão com receita R é um leilão fiel.

A receita esperada R pode ser dividida como a soma de uma receita de duas fontes R_1 a receita recebida do maior ofertante e R_{-1} a receita recebida dos outros participantes. Então $R = R_1 + R_{-1}$

Afirmação $R_{LA} \geq R_1$

Como mostrado anteriormente o leilão que maximiza a receita recebida do participante com a maior oferta é LA.

Afirmação $R_{LA} \geq R_{-1}$

Fixado $(v_2, \ldots, v_n)$, o preço de venda do objeto é sempre $p \leq v_2 \leq v_1$, pois estamos considerando leilões fieis ex-post, nesse caso o objeto poderia ter sido vendido ao participante 1 pelo preço v_2 (observe que nesse caso teremos um leilão de segundo preço selado, portanto é um leilão fiel), assim existe um leilão que somente vende ao primeiro participante com receita maior que R_{-1}, pela maximalidade de LA concluímos $R_{LA} \geq R_{-1}$.

Portanto, $2R_{LA} \geq R_1 + R_{-1} = R$

□

Observação 4.11. Todos os resultados sobre o leilão Lookahead aqui mostrados não dependem da hipótese de independência dos valores privados e continuam válidos mesmo que exista alguma dependência das avaliações, a única diferença entre o caso independente é no cálculo da distribuição $\tilde{F}$.

O leilão de Lookahead e os resultados dessa seção foram retirados do artigo [Ron01], nesse artigo Amir Ronen faz uma discussão detalhada sobre aspectos teóricos, computacionais e apresenta ricos exemplos que ilustram o procedimento. O leilão LA aqui apresentado é chamado 1-Lookahead em [Ron01], nesse artigo também é apresentada uma generalização desse leilão (k-Lookahead) capaz de extrair uma receita esperada de pelo menos $\frac{k}{k+1}$ da receita ótima caso os valores privados sejam independentes.

4.3 Máximo de $R(p)$

Os teoremas sobre o leilão ótimo de um jogador (Teorema 4.2) e sobre a $\frac{1}{2}$ otimalidade de LA (Teorema 4.10) são válidos em condições mais gerais, a demonstração feita acima se utiliza do Teorema de Myerson (3.24) logo depende da hipótese que a função distribuição seja absolutamente contínua.

Antes de mostrar que valem os resultados mais gerais, vamos definir condições onde o leilão LA está definido, mais simples ainda, basta saber quando a função $R(x) = x(1-\tilde{F}(x))$ possui máximo, assim podemos definir o p^* como tal máximo. Para isto é necessário definir a função de distribuição de probabilidade de uma forma menos convencional.

Definição 4.12. (Reinterpretando a função de distribuição de probabilidade)[1]

Seja V uma variável aleatória real, e $\mathbb{P}$ a medida de probabilidade associada a V. Definimos $F_V(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, a função de distribuição de probabilidade de V como:

$$F_V(x) := \mathbb{P}_V\big((-\infty, x]\big) = \mathbb{P}\left(V < x\right).$$

A interpretação é que $1 - F_V(x)$ representa a probabilidade $\mathbb{P}_V(V \geq x)$, nesse evento um participante com valor privado V estaria disposto a pagar x pelo objeto em leilão. A única diferença entre a definição padrão de função distribuição é no caso onde $V = x$, na definição usada aqui o participante ainda tem interesse em comprar o objeto, mesmo que a utilidade seja zero. Além disso, F_V assim definida será contínua à esquerda, ao contrário da definição padrão. A continuidade a esquerda será utilizada no teorema a seguir.

Teorema 4.13. *Se o vetor aleatório dos valores privados $(V_i)_{i\in N}$ tem distribuição de probabilidade em um compacto de $\mathbb{R}^n$ (em particular quando $V_i \in [a_i, b_i], \forall i \in N$), então a função $R(x) = x(1-\tilde{F}(x))$ ($\tilde{F}$ descrito na definição 4.3 do Leilão Lookahead) tem máximo global p^*.*

Demonstração. Seja $\tilde{F} : K \to [0, 1]$ como descrito na definição (4.3), onde K é um compacto de $\mathbb{R}$. Por $\tilde{F}$ ser uma função de distribuição $(1 - \tilde{F}(x)) \in [0, 1]$, logo $R(x) \leq x \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ como o domínio é um compacto e $g(x) = x \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ é contínua, $g(x)$ possui máximo, portanto $R(x)$ é limitado superiormente, então a imagem de $R(x)$ possui um supremo M.

Pela definição de supremo podemos tomar $x_n \in K$ de forma que $R(x_n) \uparrow M$. Como K é compacto x_n possui ponto de aderência p. Podemos supor que $p > 0$, pois caso $p \leq 0$, temos $R(x_n) \leq 0 \ \ \forall n$, logo o leiloeiro prefere não alocar o objeto ao participante garantindo uma receita de 0, em outras palavras $x^* = 0$ maximiza $R(x)$. Se $p \geq 0$ vamos mostrar que p maximiza a função $R(x)$.

Caso infinitos termos da sequência respeitem $x_n \leq p$, pela continuidade a esquerda de $\tilde{F}$, temos que $\sup\{R(x)\} = \lim\limits_{x\to p^-} R(x) = R(p)$. Caso contrário temos infinitos termos que $x_n > p$, lembrando que $\tilde{F}$ é não-decrescente então possui descontinuidades do tipo salto

[1] Em livros de probabilidade é comum definir a função distribuição de uma variável aleatória V como $F_V(x) = \mathbb{P}[V \leq x]$, deste modo F_V é contínua a direita, porém é razoável construir $F_V(x) = \mathbb{P}[V < x]$ para que F_V seja contínua a esquerda, assim podemos concluir o resultado desejado.

"para cima", ou seja, $\tilde{F}(p) \leq \tilde{F}(x_n)$, portanto $R(p) = p(1 - \tilde{F}(p)) \geq \lim p(1 - \tilde{F}(x_n)) = \lim R(x_n) = \sup\{R(x)\}$, assim podemos concluir que $R(p) = M$.

$\square$

A hipótese de suporte compacto no teorema anterior é realmente necessária, mostraremos dois exemplos, o primeiro $\tilde{F}(x)$ é uma distribuição contínua em $\mathbb{R}$ com esperança infinita, o segundo é uma distribuição discreta com esperança finita.

Exemplo 4.14. Toma V com distribuição $F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 1$ e zero caso contrário, como V é uma v.a. positiva: $\mathbb{E}[V] = \displaystyle\int_1^{+\infty} (1 - F(x))\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = +\infty$.

Observe também que $R(x) = x(1 - F(x)) = \sqrt{x}$, logo não tem máximo.

Exemplo 4.15. Este exemplo mostra que esperança finita não é uma condição suficiente para garantir a existência do máximo de $R(x)$.

Defina a seguinte sequência (x_n), $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, para $n > 0$ defina recursivamente $x_{n+1} = \frac{x_n}{(1-\frac{1}{2^n})}$, então x_n é crescente e $\frac{x_n}{x_{n+1}} = (1 - \frac{1}{2^n})$.

Defina V com distribuição $F(x) = 0$ para $x \leq 0$ e constante nos intervalos $(x_n, x_{n+1}]$ igual a

$$F(x) = 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{x_{n+1}},$$

V é v.a. positiva, então vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V] &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - F(n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{x_{n+1}} [x_{n+1} - x_n] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado $R(x)$ não possui máximo

$$R(x) = \frac{x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{x_{n+1}}, \forall x \in (x_n, x_{n+1}],$$

logo $R(x) < 1$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} R(x_n) = 1$.

4.4 Lookahead caso suporte compacto

O Teorema (4.13) garante a existência de um máximo de $R(x)$ caso as variáveis aleatórias sejam distribuídas em um compacto. Então podemos definir o seguinte leilão, que por conveniência chamaremos de Lookahead (LA).

Observação 4.16. A diferença entre a definição (4.3) e a definição dada a seguir é que a necessidade de que as distribuições de probabilidade sejam absolutamente contínuas para que exista o leilão ótimo de Myerson, condição que foi enfraquecida na definição a seguir, podemos pensar que a definição a seguir é uma generalização do leilão de Lookahead.

Definição 4.17 (Lookahead)**.** Sejam V_i valores privados que tenham distribuições com suporte compacto e $v_1, \ldots, v_n$ as ofertas dadas pelos participantes, a menos de reordenação podemos supor $v_1 \geq \ldots \geq v_n$, todas ofertas exceto v_1 são descartadas, defina $\tilde{F}(x)$ a distribuição de probabilidade de V_1 dado que $V_i = v_i$ para $i > 1$. Calcule o máximo p^* de $R(x) = x(1 - \tilde{F}(x))$ que existe pelo Teorema (4.13). Caso $p^* \leq v_1$ o objeto é vendido ao participante 1 pelo preço de p^*, caso contrário o leiloeiro permanece como o objeto.

Lema 4.18. No caso onde os valores privados tem uma distribuição sobre um compacto o Leilão de Lookahead é um leilão que possui receita ótima.

Observação 4.19. A grande diferença entre o Lema (4.18) e o Teorema (4.2) são as hipóteses que $F_i(x)$ tenha derivada positiva em $[a_i, b_i]$, no lema que aqui será demonstrado basta supor que o suporte de F_i é compacto (em particular $V_i \in [a_i, b_i]$).

Demonstração. Usando o princípio da revelação podemos nos restringir a leilões diretos fieis. A parte difícil da demonstração é que não podemos usar o Teorema de Myerson que caracteriza o leilão ótimo, ao invés disso vamos usar o Lema (3.11) que dá uma caracterização do pagamento esperado nos leilões diretos fieis

$$\mathbb{E}[p_i(t)|t_i] = t_i \cdot \mathbb{E}[\alpha_i(t)|t_i] - U_i(a_i) - \int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z)dz.$$

Dessa forma um leilão direto fiel possui o mesmo ganho esperado de um leilão direto cujo pagamento esperado é definido por

$$p_i(t_i) = t_i \cdot \alpha_i(t) - U_i(a_i) - \int_{a_i}^{t_i} Q_i(\alpha_i, z)dz.$$

No caso em que temos apenas um participante o ganho esperado do leiloeiro é

$$\begin{aligned}U_0(t, \alpha) =& \mathbb{E}\left[(1 - \alpha_1(t))v_0 + p_1(t_1)\middle|t_1\right] \\ =& \mathbb{E}\left[(1 - \alpha_1(t))v_0 + t_1 \cdot \alpha_1(t) - U_1(a_1, t_{-1}, \alpha) - \int_{a_1}^{t_1} Q_1(\alpha_1, z)dz\middle|t_1\right].\end{aligned}$$

Para simplificar as contas podemos considerar primeiro que $v_0 = 0$.

Podemos escolher a função alocação α de forma que $U_1(a_1, t_{-1}, \alpha) = 0$, maximizando esse termo (lembrando que $U_i(t, \alpha) \geq 0$). Ou seja, caso a avaliação do participante é a mínima possível a_1 determina $\alpha_1(a_1) = 1$ e $p_1(a_1) = a_1$, resultando em $U_1(a_1, t_{-1}, \alpha) = 0$. Assim

$$U_0(t, \alpha) = \mathbb{E}\left[t_1 \cdot \alpha_i(t) - \int_{a_1}^{t_1} Q_1(\alpha_1, z)dz \middle| t_1\right],$$

observe que quando temos $\alpha_1(t_1, t_{-1}) = \mathbb{1}_{\{t_1 \geq r\}}$, o leilão será equivalente a vender o objeto por r caso o participante tenha valor privado t_1 superior a r, ou seja uma venda simples, nesse caso o pagamento será

$$\begin{aligned}
p_1(t_1) =& t_1 \cdot \mathbb{1}_{\{t_1 \geq r\}} - \int_{a_1}^{t_1} \mathbb{1}_{\{z \in [r, b_1]\}} dz \\
=& \mathbb{1}_{\{t_1 \geq r\}} \left(t_1 - \int_r^{t_1} dz\right) \\
=& \mathbb{1}_{\{t_1 \geq r\}} \left(t_1 - (t_1 - r)\right) \\
=& r \cdot \mathbb{1}_{\{t_1 \geq r\}}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a receita do leilão será $R(r) = r(1 - \tilde{F}(r))$, no caso onde $v_0 \neq 0$ a receita esperada será $R(r) = (r - v_0)(1 - \tilde{F}(r))$, mas uma simples mudança de variáveis nós trás de volta ao caso padrão.$\tilde{F}$ como definido em (4.3).

O leilão de Lookahead é definido de forma a maximizar $R(x)$, para mostrar que o ganho esperado máximo é igual ao ganho esperado no leilão de Lookahead, basta mostrar que o ganho em um outro leilão qualquer é igual ao ganho esperado de um leilão do tipo venda simples $\alpha(z) = \mathbb{1}_{\{z \geq \Psi\}}$, para um $\Psi \in [a_1, b_1]$.

Sob essas condições é mais interessante usar a notação de integral para esperança matemática, considere também $U \sim U[0, 1]$ uma variável aleatória independente auxiliar, então $\alpha(t_1) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\alpha(t_1) \geq U\}}] = \int \mathbb{1}_{\{\alpha(t_1) \geq U\}} dU$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[p_1(t_1, \alpha)\right] &= \int_{T_{-1}} \left[t_1 \alpha(t_1) - \int_{a_1}^{t_1} \alpha(z) dz\right] dF_{-1} \\
&= \int_{T_{-1}} \left[t_1 \int \mathbb{1}_{\{\alpha(t_1) \geq U\}} dU - \int_{a_1}^{t_1} \int \mathbb{1}_{\{\alpha(z) \geq U\}} dU dz\right] dF_{-1},
\end{aligned}$$

pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int_{T_{-1}} \left[t_1 \int \mathbb{1}_{\{\alpha(t_1) \geq U\}} dU - \int_{a_1}^{t_1} \int \mathbb{1}_{\{\alpha(z) \geq U\}} dU dz\right] dF_{-1} \\
=& \int \left[\int_{T_{-1}} \left(t_1 \mathbb{1}_{\{\alpha(t_1) \geq U\}} - \int_{a_1}^{t_1} \mathbb{1}_{\{\alpha(z) \geq U\}} dz\right) dF_{-1}\right] dU = \int R(\Psi) dU,
\end{aligned}$$

para $\Psi := \inf\{z : \alpha(z) \geq U\}$, como $p^* = \text{argmax}\{R(x)\}$, $\int R(\Psi)dU \leq R(p^*)$ que é o ganho esperado do leilão de Lookahead. $\square$

Essa demonstração foi retirada de [KP17].

Teorema 4.20. *Se os valores privados V_i possuem distribuições com suporte compacto, então o leilão LA otimiza os ganhos esperados do leiloeiro dentre a classe de leilões que alocam o objeto somente ao participante que dá a maior oferta.*

Demonstração. A demonstração é idêntica a feita no Teorema 4.5, a única diferença é que a argumentação da maximalidade no caso com um jogador vem do Lema 4.18 não utilizando o Teorema de Myerson. $\square$

4.4.1 Cotas superiores para a receita de leilões

Corolário 4.21 (O leilão de Lookahead é $\frac{1}{2}$ ótimo)**.** *Seja R' a receita esperada de um leilão ex-post e seja R_{LA} a receita esperada do Leilão Lookahead, caso os valores privados V_i tenham distribuição com suporte compacto então*

$$R_{LA} \geq \frac{1}{2} \cdot R'.$$

Demonstração. Esse teorema é um análogo ao Teorema (4.10) porém aqui as hipóteses são mais fracas, mesmo assim uma demonstração idêntica a feita no Teorema (4.10) funciona aqui, uma vez que o Teorema (4.20) garante que o leilão LA maximiza a receita recebida do participante que dá a maior oferta. $\square$

O resultado a seguir tem uma interpretação que o faz parecer bem óbvio: No caso de um comprador com valor privado $V_1 \geq 0$, o leiloeiro não consegue ter um ganho esperado maior que $\mathbb{E}[V_1]$.

Teorema 4.22. *Se $V_1 \geq 0$ tem distribuição $F_1(x)$, então para todo leilão de um único participante com receita esperada R,*

$$R \leq \mathbb{E}[V_1].$$

Onde a igualdade somente é possível caso V_1 constante quase certamente (o leilão não precisa ser ex-post).

Demonstração. Basta mostrar que $R(p) = p(1 - F_1(p)) \leq \mathbb{E}[V_1]$ uma vez que todo leilão com apenas um participante sempre aloca o objeto ao participante com maior lance, portanto o leilão de Lookahead tem receita $R(p^*)$ maior ou igual a R pelo Teorema (4.18).

Como $F_1(x)$ é função de distribuição de probabilidade, $1 - F_1(x)$ é uma função não crescente portanto o gráfico de $1 - F_1(x)$ está acima de $1 - F_1(p)$ quando $x \leq p$. Então a área abaixo do gráfico de $1 - F_1(x)$ é maior que $p(1 - F_1(p))$ como o gráfico exemplifica abaixo,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_1] = \int_0^\infty \Big(1 - F_1(x)\Big)dx &\geq \int_0^p \Big(1 - F_1(x)\Big)dx \\ &\geq \int_0^p \Big(1 - F_1(p)\Big)dx = p(1 - F_1(p)) = R(p).\end{aligned}$$

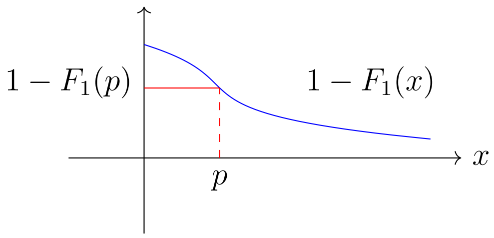

Figura 2 – $R(p) \leq \mathbb{E}[V_1]$

Observe que a igualdade ocorre se e somente se $V_1 = p$ quase certamente.

$\square$

Teorema 4.23. *Seja R a receita esperada de um leilão qualquer, então vale (o leilão não precisa ser ex-post)*

$$R \leq \mathbb{E}\left[\max\{V_i | i \in N\}\right].$$

Demonstração. Podemos considerar que os participantes são sinceros e reportam seus verdadeiros valores V_i, pelo princípio da revelação.

Seja $(p_i, \alpha_i)_{i \in N}$ as funções de pagamento e alocação do leilão fixado.

Sabemos que $U_i[V_i] \geq 0$, pois cada participante é racional (hipótese H3), logo $U_i(V_i) = \mathbb{E}[V_i \cdot \alpha_i(V_i) - p_i(V_i)] \geq 0 \implies \mathbb{E}[V_i \cdot \alpha_i(V_i)] \geq \mathbb{E}[p_i(V_i)]$, portanto

$$R = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in N} p_i(V_i)\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i \in N} V_i \cdot \alpha_i(V_i)\right] \leq \mathbb{E}[\max\{V_i\}].$$

$\square$

Observação 4.24. No caso onde temos apenas um participante o leiloeiro consegue explorar todo o valor (ter receita $R = \mathbb{E}[V_1]$) apenas no caso onde ele tem toda a informação, ou seja, apenas no caso onde V_1 é constante quase certamente. No caso onde temos mais participantes o leiloeiro pode conseguir explorar todo o valor (ter receita igual a $\mathbb{E}[\max\{V_i\}]$) mesmo com aleatoriedade, veja (Exemplo 1,Exemplo 2).

Observação 4.25. No caso onde os participantes são i.i.d. é mencionado em [KP17] página 258, que um leilão ótimo com n participantes tem uma receita menor ou igual ao leilão de Vickrey com $n + 1$ participantes.

4.5 Exemplos de Lookahead

Exemplo 1 :**(Anti-correlação - [Ron01])**

Suponha que temos dois participantes, $V_1 \sim U[0,1]$ e $V_2 = 1 - V_1$. Fixado $V_2 = l$, vamos calcular o Leilão de Lookahead, $\tilde{F}_l(x) = \mathbb{P}[V_1 < x | V_1 > l]$ onde $V_2 = l$,

$$\tilde{F}_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > \max\{l, 1-l\}; \\ 0 & \text{se } x \leq \max\{l, 1-l\}; \end{cases} \qquad R_l(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq \max\{l, 1-l\}; \\ 0 & \text{se } x > \max\{l, 1-l\}. \end{cases}$$

Portanto $p_l^* = \max\{l, 1-l\}$, ou seja, o objeto é vendido ao participante com a maior oferta pelo preço $p^* = \max\{l, 1-l\}$ onde l é a menor oferta. Se os participantes são fiéis e ofertam seu valor real, a receita esperada do leilão é $\mathbb{E}[\max\{V_1, 1-V_1\}] = \frac{3}{4}$, que é o ganho máximo que um leilão pode ter pelo Teorema (4.23) dada estas distribuições de valor privado.

É claro que nada garante que os participantes serão honestos, inclusive eles podem combinar entre si de balizar a oferta de forma ao ganhador pagar um preço menor. Seja $a \in (0,1]$ fixo, seja v o valor privado de um dos jogadores, então a estratégia de oferta $\beta(v) = av + 0.5(1-a)$, também forma um equilíbrio de Nash. Nesse caso o ganho esperado do leiloeiro será de $\frac{1}{2} + \frac{a}{4}$.

Observação 4.26. O exemplo anterior é interessante pois mostra que um leilão pode ter vários equilíbrios de Nash, além disso estes equilíbrios podem ter receitas esperadas distintas.

Exemplo 2 : **(Exemplo do Myerson - [Mye81])**

Considere agora uma distribuição de valores privados sobre um espaço discreto, com a seguinte distribuição conjunta em (v_1, v_2), com variáveis aleatórias não independentes:

$$\mathbb{P}[(100,100)] = \mathbb{P}[(10,10)] = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}[(10,100)] = \mathbb{P}[(100,10)] = \frac{1}{6}.$$

Tomando $V_2 = l$, calculemos $\tilde{F}_l(x) = \mathbb{P}[V_1 < x | V_1 \geq l]$. Caso $l = 100$ e caso $l = 10$,

$$\tilde{F}_{100}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 100; \\ 0 & \text{se } x \leq 100; \end{cases} \qquad \tilde{F}_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 100; \\ \frac{1}{3} & \text{se } x \in (10, 100]; \\ 0 & \text{se } x \leq 10. \end{cases}$$

$$R_{100}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 100; \\ x & \text{se } x \leq 100. \end{cases} \qquad R_{10}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 100; \\ \frac{2}{3}x & \text{se } x \in (10, 100]; \\ x & \text{se } x \leq 10. \end{cases}$$

Então $p^*_{100} = 100$ e $p^*_{10} = 100$. Ou seja, caso ambos participantes ofertem 100, um deles vence o leilão e paga 100 pelo objeto (com qualquer regra arbitrária de desempate, por exemplo um sorteio uniforme), caso um dos participantes oferte 100 e o outro 10, aquele que deu a maior oferta recebe o objeto e paga 100 por tal objeto, por fim se ambos participantes ofertam 10 nenhum deles vence o leilão. A receita esperada deste leilão será portanto $\frac{200}{3} = 66.\bar{6}$.

Este exemplo é interessante pois, o leilão Lookahead não maximiza a receita esperada.

Defina um leilão com as seguintes regras de alocação e pagamento:

$$
\begin{aligned}
\alpha(100,100) &= (0.5, 0.5), & \alpha(10,10) &= (0.5, 0.5);\\
\alpha(100,10) &= (1, 0), & \alpha(10,100) &= (0, 1);\\
p(100,100) &= (100, 100), & p(10,10) &= (-15, -15);\\
p(100,10) &= (0, 40), & p(10,100) &= (40, 0).
\end{aligned}
$$

Observe que o leilão descrito acima é fiel e o ganho esperado do leiloeiro será $\frac{1}{3}(200)+\frac{1}{3}(40)+\frac{1}{3}(-30) = 70$. E também acontece que $\mathbb{E}[\max\{V_1, V_2\}] = \frac{2}{3}100+\frac{1}{3}10 = 70$, portanto é o máximo que um leilão pode ter de ganho esperado pelo Teorema (4.23).

Observe também que no último leilão se ambos jogadores tomam a estratégia de sempre ofertarem \$10, isto é um equilíbrio de Nash e terá receita esperada diferente de quando os participantes são fieis.

Observação 4.27. (k-Lookahead) Existe uma generalização do leilão descrito como Lookahead, que permite resultados um pouco melhores.

Definição 4.28. (k-Lookahead) Em um leilão com n participantes, ignore as $n-k$ menores ofertas e aplica-se o leilão ótimo com as k maiores ofertas.

Observe que para $k = 1$ temos o leilão de Lookahead descrito anteriormente. Em [Ron01] é demonstrado que o leilão k-Lookahead tem receita esperada de pelo menos $\frac{k}{k+1}$ do leilão ótimo, dentre a classe de leilões ex-post se os valores privados são independentes.

5 Leilões Discretos

Myerson mostrou que no caso onde o vetor de valores privados $(V_i)_i$ é uma variável aleatória absolutamente contínua com coordenadas coletivamente independentes, podemos construir o leilão ótimo, foi esse o principal resultado do Capítulo (3), do lado oposto do espectro temos os leilões discretos, onde os valores privados assumem uma quantidade finita de valores possíveis. Nesse capítulo será mostrado que é possível encontrar o leilão ótimo dentre a classe de leilões discretos, isso é feito interpretando como um problema de programação linear onde são conhecidos muitos algoritmos eficientes, como o algoritmo *simplex*[1].

Vamos assumir válidas as hipóteses (H1,H2 e H3), ao invés de considerar a hipótese H4 usada no Capítulo 3, utilizaremos a seguinte hipótese alternativa:

H'4(Leilões discretos)

O vetor aleatório $(V_i)_{i\in N}$ *possuí distribuição em um conjunto finito de estados* S.

Relembre o (Exemplo 2), o conjunto de estados era $S = \{(10, 10), (100, 10), (10, 100), (100, 100)\}$. Na verdade todo esse capítulo foi inspirado por um comentário em [Mye81], sobre como encontrar o leilão ótimo pode ser descrito como resolver um problema de programação linear.

Todo estado s em S é um vetor (não aleatório) em $\mathbb{R}^n$, podemos escrever $s = (v_i)_{i\in N}$, a i-ésima coordenada de s é v_i a avaliação privada do jogador i. Em geral o i-ésimo jogador não possui informação sobre qual estado s o jogo está, esse participante possui somente informação sobre a i-ésima coordenada v_i, é claro que conhecer a i-ésima coordenada de s refina as probabilidades sobre S.

Seja S_i o conjunto dos possíveis valores que o i-ésimo jogador pode assumir, note que $S \subset \prod_{i\in N} S_i$, como não podemos impedir que o participante minta sobre o seu valor privado, temos que definir as funções α, p alocação e pagamento para todos os possíveis sinais, não apenas aqueles em S.

Exemplo 5.1. No (Exemplo 2) $S = \{(10, 10), (10, 100), (100, 10), (100, 100)\}$, onde $\mathbb{P}[(10, 10)] = \mathbb{P}[(100, 100)] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[(10, 100)] = \mathbb{P}[(100, 10)] = \frac{1}{6}$.

Pelo princípio da revelação (3.4) para encontrar um leilão ótimo basta procurar entre leilões diretos fieis. Supor que os participantes são honestos implica que o vetor de estratégias $\beta(s) = s$ sempre indica o estado real dos jogadores.

Então queremos maximizar $U_0 = \mathbb{E}\left[v_0\left(1 - \sum_{i\in N}\alpha_i(s)\right) + \sum_{i\in N} p_i(s)\right]$.

[1] Simplex é um algoritmo clássico descrito por Dantzig usado para encontrar soluções de problemas de programação linear, atualmente existem algoritmos mais eficientes computacionalmente como o método do ponto interior. [Kar91]

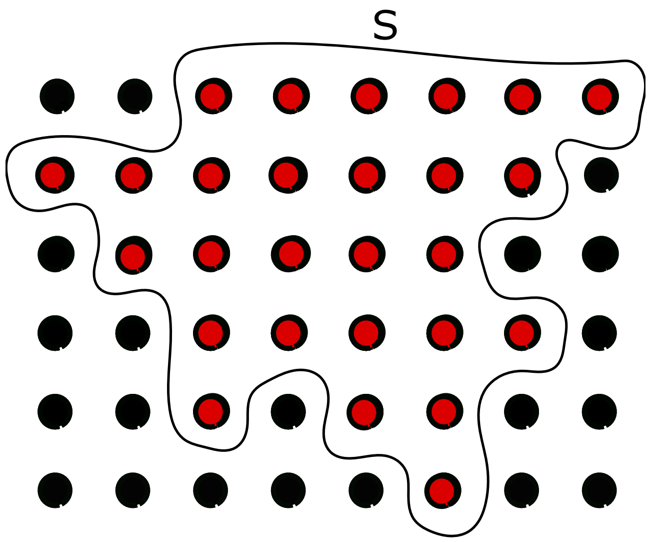

Figura 3 – A diferença entre S e $\prod S_i$ no caso onde temos dois participantes

No (Exemplo 2),

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{1}{3}\left[p_1(10,10)+p_2(10,10)\right]+\frac{1}{3}\left[p_1(100,100)+p_2(100,100)\right] \\ & +\frac{1}{6}\left[p_1(10,100)+p_2(10,100)\right]+\frac{1}{6}\left[p_1(100,10)+p_2(100,10)\right]. \end{aligned}$$

Então o problema do leiloeiro é escolher os valores de $\alpha_i(s), p_i(s)$, para $s \in \prod_{i\in N} S_i$ de forma a maximizar U_0, observe que U_0 é sempre linear nas escolhas de $\alpha_i(s), p_i(s)$, observe que nesse caso $S = \prod_{i\in N} S_i$ mas, em geral esses conjuntos são distintos.

Em geral $U_0 = \sum_{s\in S} \mathbb{P}[s]\left(v_0\left(1-\sum_{i\in N}\alpha_i(s)\right)+\sum_{i\in N}p_i(s)\right)$, onde $\mathbb{P}[s]$ é a probabilidade do estado s ocorrer. Observe que U_0 é linear nas entradas $\alpha_i(s), p_i(s)$.

Leilão fiel

As escolhas de $\alpha_i(s), p_i(s)$ devem ser feitas de forma que o leilão seja fiel, isso pode ser expresso na seguinte desigualdade, para todo jogador i e para todo $v_i, \bar{v_i} \in S_i$ possíveis valores para o i-ésimo jogador,

$$\mathbb{E}\left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_{-i}, v_i)\right] \geq \mathbb{E}\left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, \bar{v_i}) - p_i(s_{-i}, \bar{v_i})\right],$$

o que é o mesmo que

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_{-i}, v_i | s_i = v_i)\left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_{-i}, v_i)\right]$$
$$\geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_{-i}, v_i | s_i = v_i)\left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, \bar{v_i}) - p_i(s_{-i}, \bar{v_i})\right].$$

No Exemplo 2, teremos uma lista com quatro desigualdades, aqui mostraremos apenas as inequações com respeito ao jogador 1, pela simetria do exemplo as outras inequações são semelhantes trocando α_1, p_1 por α_2, p_2

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}[10\alpha_1(10,10) - p_1(10,10)] + \frac{1}{3}[10\alpha_1(10,100) - p_1(10,100)] \\
&\geq \frac{2}{3}[10\alpha_1(100,10) - p_1(100,10)] + \frac{1}{3}[10\alpha_1(100,100) - p_1(100,100)]; \\
&\frac{1}{3}[100\alpha_1(100,10) - p_1(100,10)] + \frac{2}{3}[100\alpha_1(100,100) - p_1(100,100)] \\
&\geq \frac{1}{3}[100\alpha_1(10,10) - p_1(10,10)] + \frac{2}{3}[100\alpha_1(10,100) - p_1(10,100)].
\end{aligned}$$

Notação: Em programação linear é comum usar a notação $\mathbf{0}$ para denotar o vetor com todas coordenadas zero e também se v, w são vetores, dizemos que $v \leq w$, se vale a desigualdade para cada coordenada.

Escrevendo $x = (\alpha_i(s), p_i(s))_{\substack{i \in N \\ s \in S}}$, que é o vetor cujas primeiras coordenadas são todos os $\alpha_i(s)$ e as últimas coordenadas são $p_i(s)$, descrever qual é o vetor x descreve completamente o leilão e vice-versa.

Usando as notações acima podemos escrever as inequações do *leilão fiel* como $\mathbf{0} \geq Ax$, onde A é uma matriz que depende somente da distribuição de probabilidade nos estados S. Escrever as restrições desta forma é padrão em programação linear.

Restrições de Probabilidade

O vetor α tem interpretação de ser uma probabilidade, portanto temos mais dois tipos de inequações

$\alpha_i(s) \geq 0, \forall i \in N, \forall s \in S$ e

$\displaystyle\sum_{i \in N} \alpha_i(s) \leq 1, \forall s \in S.$

Restrições de Racionalidade

A hipótese H3 nos diz que cada participante é racional, ou seja, $U_i(s|s_i = v_i) \geq 0$, para todo i e para todo $v_i \in S_i$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[v_i\alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_{-i}, v_i)|s_i = v_i] = \\ \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} &\mathbb{P}(s_{-i}, v_i|s_i = v_i)\left[v_i\alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_i, v_i)\right] \geq 0. \end{aligned}$$

No (Exemplo 2),

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}[10\alpha_1(10,10) - p_1(10,10)] + \frac{1}{3}[10\alpha_1(10,100) - p_1(10,100)] \geq 0; \\ \frac{1}{3}[100\alpha_1(100,10) - p_1(100,10)] + \frac{2}{3}[100\alpha_1(100,100) - p_1(100,100)] \geq 0; \\ \frac{2}{3}[10\alpha_2(10,10) - p_2(10,10)] + \frac{1}{3}[10\alpha_2(100,10) - p_2(100,10)] \geq 0; \\ \frac{1}{3}[100\alpha_2(10,100) - p_2(10,100)] + \frac{2}{3}[100\alpha_2(100,100) - p_2(100,100)] \geq 0. \end{aligned}$$

Definição 5.2. Um **problema de programação linear** é encontrar um vetor x que maximiza $f(x)$, f linear em cada entrada e contradomínio real. Dada as restrições $Ax \leq w$, onde são fixados A uma matriz, w um vetor e f uma função utilidade.

Observação 5.3. Dizemos que um problema de programação linear esta na forma padrão, se é exigido uma condição extra $x \geq \mathbf{0}$. Para todos os efeitos sempre é possível transformar um problema de programação geral para a forma padrão adicionando novas variáveis: Se x_i é uma variável sem restrição, re-escrevemos $x_i = x_i^+ - x_i^-$, onde $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$. Em geral essa condição extra é necessária para utilizar alguns algoritmos de programação linear, como o Simplex.

Lema 5.4. O problema de encontrar um leilão ótimo na classe de leilões onde os participantes possuem valores privados distribuídos sobre uma quantidade finita de estados é redutível a um problema de programação linear da seguinte forma:

maximizar a utilidade $U_0(x) = \sum_{s\in S} \mathbb{P}[s] \left(v_0 \left(1 - \sum_{i\in N} \alpha_i(s) \right) + \sum_{i\in N} p_i(s) \right).$

Restrito a:

- (Restrição do leilão fiel) Para todos $i \in N$ e para todos $v_i, \bar{v}_i \in S_i$

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mathbb{P}(s_{-i}, v_i | s_i = v_i) \left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_{-i}, v_i) \right]$$
$$\geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mathbb{P}(s_{-i}, v_i | s_i = v_i) \left[v_i \cdot \alpha_i(s_{-i}, \bar{v}_i) - p_i(s_{-i}, \bar{v}_i) \right];$$

- (Restrição de α_i ser uma probabilidade)

$$\sum_{i\in N} \alpha_i(s) \leq 1, \quad \forall s \in \prod_{i\in N} S_i,$$
$$\alpha_i(s) \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall s \in \prod_{i\in N} S_i;$$

- (Restrição participantes racionais)

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mathbb{P}(s_{-i}, v_i | s_i = v_i) \left[v_i \alpha_i(s_{-i}, v_i) - p_i(s_i, v_i) \right] \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall v_i \in S_i;$$

Um problema de programação linear é dito não vazio se existe algum x que obedece a todas restrições do problema.

Lema 5.5. Se $\mathcal{PL}$ é um problema de programação linear não vazio, cuja função utilidade é limitada superiormente, então existe um x^* que maximiza a função utilidade.

Demonstração. Uma demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [Kar91], corolário 11, do capítulo 1. □

Corolário 5.6. *Existe um leilão ótimo no caso discreto.*

Demonstração. O conjunto de todos os leilões discretos fieis é um conjunto dos vetores x que respeitam as restrições acima, observe que o vetor $\mathbf{0}$ respeita todas as restrições do problema, assim o problema não é vazio. O Teorema (4.23) nos garante que para todo x, $U_0(x) \leq \mathbb{E}[\max\{V_i | i \in N\}] < \infty$, o lema anterior garante a existência do máximo. □

Observação 5.7. Supondo que $|S_i| = k \;\; \forall i \in N$, sendo n o número de participantes, então o vetor x que representa o leilão tem $2nk^n$ entradas. O problema de programação linear terá nk^2 restrições de leilão fiel, $nk^2 + 1$ restrições de probabilidade, nk restrições de participantes racionais. Então o tamanho do programa linear cresce exponencialmente com n o número de participantes mas, cresce polinomialmente com k o número de sinais.

Observação 5.8. Essa formulação como um problema de programação linear é bem maleável, no sentido em que se queremos nos restringir a alguma classe especifica de leilões pode ser bem simples de adaptar o problema para essa classe, por exemplo, se queremos o melhor leilão ex-post, basta adicionar as restrições as desigualdades $u_i(s) \geq 0$ (e retirar as $U_i(s) > 0$). Se queremos maximizar o ganho em um leilão simétrico, ou seja, se π é uma permutação dentre os participantes $\alpha_i(\pi(s)) = \alpha_{\pi(i)}(s)$ e $p_i(\pi(s)) = p_{\pi(i)}(s)$, então basta considerar as restrições $\alpha_i(s) = \alpha_j(s)$ e $p_i(s) = p_j(s)$, para todos os sinais s.

5.1 Problemas

Essa seção é dedicada a questões que o autor não entende tão bem e acredita que podem ser interessantes.

- No caso discreto, foi mostrado que um encontrar um leilão ótimo é equivalente a resolver um problema de programação linear, a contra-positiva é verdadeira ou falsa?
- No caso discreto é sempre possível encontrar um leilão com receita igual a $\mathbb{E}[\max\{V_i\}]$? Se sim, o que acontece para que essa propriedade seja perdida no caso contínuo?
- É possível re-formular o problema de programação linear de forma mais eficiente?
- Myerson implicitamente assume que o leilão é ex-post no Teorema (3.17) ?

6 Conclusão

Nessa dissertação foi construído um modelo matemático sobre leilões de único objeto, nesse modelo supomos que os participantes têm utilidade linear, que a distribuição de probabilidade das avaliações privadas é conhecida por todos e que os participantes são racionais, ou seja, buscam maximizar a utilidade esperada.

Sob estas hipóteses temos alguns resultados clássicos e outros mais novos que foram abordados nessa dissertação, dentre eles os mais importantes são os Teoremas de equivalência de receitas de Vickrey (2.13) e de Myerson (3.12), estes resultados nos dão condições simples em que o ganho esperado do leiloeiro é o mesmo.

O principio da revelação (3.4) é um resultado teórico central nos trabalhos feitos por Myerson e por vários outros pesquisadores da área, por exemplo, Amir Ronen utiliza esse resultado em seu artigo [Ron01]. Utilizando o princípio da revelação e adicionando uma hipótese extra: Os valores privados são independentes e têm distribuição absolutamente contínua, Myerson foi capaz de mostrar a existência de um leilão ótimo e caracteriza-lo de forma simples. Em [Mye81], Myerson mostra que o leilão ótimo é uma espécie de Leilão de Vickrey com preço de reserva, onde o ganhador é decidido a partir de uma função que define o nível de prioridade. No Capítulo 3 foi descrito com detalhes esse leilão e outros resultados importantes dados por Myerson.

No Capítulo 4 é discutido o leilão de Lookahead, apresentado por Amir Ronen em [Ron01], que é um leilão mais simples que o Leilão de Myerson e garante uma receita esperada de pelo menos metade da receita ótima, no caso onde leilões são ex-post. O leilão Lookahead tem a vantagem de estar definido em condições mais gerais que o Leilão de Myerson.

Por fim o Capítulo 5 descreve como encontrar o leilão ótimo no caso onde os valores privados assumem uma quantidade finita de valores, isso é feito reduzindo a um problema de programação linear que são bem conhecidos na área de ciência da computação. Portanto o problema de encontrar um leilão ótimo é resolvido em dois casos extremos, no caso onde os valores privados têm distribuições independentes e absolutamente contínuas, também é resolvido no caso onde os valores privados têm uma distribuição discreta. Para distribuições gerais ainda é um problema em aberto encontrar um leilão ótimo.

Referências

[AKW12] Marc T. P. Adam, Jan Krämer, and Christof Weinhardt. Excitement up! price down! measuring emotions in dutch auctions. *International Journal of Electronic Commerce*, 17(2):7–40, 2012.

[Kar91] Howard Karloff. *Linear Programming*. Birkhauser Boston Inc., USA, 1991.

[KP17] A.R. Karlin and Y. Peres. *Game Theory, Alive*. Miscellaneous Book Series. American Mathematical Society, 2017.

[Men08] Flavio M. & Klinger Paulo Menezes. *An Introduction to Auction Theory*. Number 9780199275991 in OUP Catalogue. Oxford University Press, 2008.

[Mil04] Paul Milgrom. *Putting Auction Theory to Work*. Churchill Lectures in Economics. Cambridge University Press, 2004.

[Mye81] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, 1981.

[Nas50] John F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1):48–49, 1950.

[Ron01] Amir Ronen. On approximating optimal auctions (extended abstract). In *In The Third ACM Conference on Electronic Commerce (EC01)*, 2001.

[Vic61] William Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37, 1961.