

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Douglas Danton Nepomuceno

**AÇÕES ANOSOV DE CONTATO**  
**UNIFORMEMENTE QUASECONFORMES**

Belo Horizonte

2022

Douglas Danton Nepomuceno

# AÇÕES ANOSOV DE CONTATO UNIFORMEMENTE QUASECONFORMES

Versão Final

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientadores:** Carlos Alberto Maquera Apaza - *ICMC / Universidade de São Paulo - USP, e*

Alberto Berly Sarmiento Vera - *ICEX / Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.*

Belo Horizonte

2022

Nepomuceno, Douglas Danton.

N441a      Ações Anosov de contato uniformemente quaseconformes.  
[recurso eletrônico] / Douglas Danton Nepomuceno. – 2022.  
1 recurso online (83 f. il, color.): pdf.


Orientador: Carlos Alberto Maquera Apaza.  
Coorientador: Alberto Berly Sarmiento Vera.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.  
Referências: f. 77-80.

1. Matemática – Teses. 2. Folheações hiperbólicas – Teses.  
3. Ações Anosov – Teses. 4. Sistemas Dinâmicos – Teses.  
I. Maquera Apaza, Carlos Alberto. II. Sarmiento Vera, Alberto  
Berly. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de  
Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

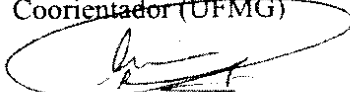
CDU 51(043)

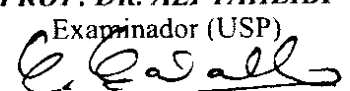
ATA DA CENTÉSIMA OCTOGÉSIMA TERCEIRA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO ALUNO DOUGLAS DANTON NEPOMUCENO, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 22 DE MARÇO DE 2022.

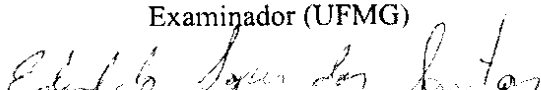
Aos vinte e dois dias do mês de março de 2022, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Teams pelo link <https://teams.microsoft.com/l/meetup-join/19%3aAYecAalchayXPclzfHCvwoQszQ5f1oLzcBoc8vTlx4Y1%40thread.tacv2/1647433222468?context=%7b%22Tid%22%3a%2264126139-4352-4cd7-b1fb-2a971c6f69a6%22%2c%22Oid%22%3a%22e107b1dd-2cc9-4f3d-8030-c8f7af80d5f8%22%7d> (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Douglas Danton Nepomuceno**, intitulada: "*Ações Anosov de Contato Uniformemente Quaseconformes*", requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Carlos Alberto Maquera Apaza, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 22 de março de 2022.

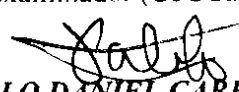
  
**PROF. DR. CARLOS ALBERTO MAQUERA APAZA**  
Orientador (USP)

  
**PROF. DR. ALBERTO BERLY SARMIENTO VERA**  
Coorientador (UFMG)

  
**PROF. DR. ALI TAHZIBI**  
Examinador (USP)

  
**PROF. DR. CARLOS MARIA CARBALLO**  
Examinador (UFMG)

  
**PROF. DR. EDIVALDO LOPES DOS SANTOS**  
Examinador (UFSCar)

  
**PROF. DR. PABLO DANIEL CARRASCO CORREA**  
Examinador (UFMG)

À Idalina, minha primeira professora.

# AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Domingos e Idalina pelo apoio incondicional.

Aos meus orientadores Carlos Maquera e Alberto Sarmiento pelos ensinamentos acadêmicos, paciência, interesse e disponibilidade; por fomentarem meu interesse em matemática.

À Viviane Mendes pelos exemplos positivos de vida acadêmica e pessoal.

Aos meus queridos amigos e familiares pelo aprendizado coletivo, apoio e bons momentos de entretenimento.

À minha tia Waldivia (em memória).

A todos meus professores, desde o ensino básico até a pós-graduação.

Aos sempre prestativos servidores do Instituto de Ciências Exatas da UFMG.

À CAPES e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

# RESUMO

Neste trabalho obtemos resultados de rigidez para ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$  visando obter respostas positivas na direção da Conjectura de Katok-Spatzier: *Toda ação Anosov suave e irredutível de  $\mathbb{Z}^k$  ou  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação algébrica.* Mais precisamente, nosso resultado principal (Teorema **A**) afirma que *“toda ação Anosov de  $k$ -contato generalizada e uniformemente  $u$ -quaseconforme numa variedade fechada de dimensão  $2n + k$  ( $n \geq 2$ ) é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação Anosov quasealgébrica”.* Esse resultado generaliza um resultado obtido por Sadovskaya [46] para fluxos de Anosov. Para mostrarmos este teorema, dois resultados fundamentais se destacam, no primeiro (Teorema **B**) mostramos que uma ação Anosov irredutível e uniformemente  $u$ -quaseconforme é  $u$ -conforme em relação a uma métrica Riemanniana (Hölder contínua e suave em folhas fortes) no fibrado forte instável. Finalmente, no segundo resultado (Teorema **C**) mostramos que ações Anosov de  $k$ -contato generalizadas e uniformemente  $u$ -quaseconformes possuem folheação forte instável e folheação forte estável suaves.

**Palavras-Chave:** Ações Anosov;  $u$ -quaseconforme;  $u$ -conforme;  $k$ -contato; Folheação; Irredutível.

# ABSTRACT

In this work we obtain rigidity results for  $\mathbb{R}^k$  Anosov actions in order to obtain positive answers in the direction of the Katok-Spatzier Conjecture: *Every irreducible smooth Anosov action of  $\mathbb{R}^k$  or  $\mathbb{Z}^k$  ( $k \geq 2$ ) is  $C^\infty$ -conjugated to an algebraic action.* More precisely, our main result (Theorem **A**) states that “*all uniformly  $u$ -quasiconformal Anosov action associated with a generalized  $k$ -contact structure in a closed  $(2n + k)$ -manifold ( $n \geq 2$ ) is  $C^\infty$ -conjugated to a quasi-algebraic Anosov action*”. This generalizes a result obtained by Sadovskaya [46] for Anosov flows. To prove this theorem, two fundamental results stand out, in the first one (Theorem **B**) we prove that an irreducible and uniformly  $u$ -quasiconformal Anosov action is  $u$ -conformal with respect to a Riemannian metric (Hölder continuous and smooth on strong leaves) in the strong unstable distribution. Finally, in the second (Theorem **C**) we prove that uniformly  $u$ -quasiconformal Anosov actions associated with a generalized  $k$ -contact structure have smooth strong unstable foliation and strong stable foliation.

**Keywords:** Anosov Actions;  $u$ -quasiconformal;  $u$ -conformal;  $k$ -contact; Foliation; Irreducible.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
2.1	Ações de Grupos de Lie, Folheações e Representações . . . . .	14
2.2	Ações Anosov: Teoria Geral . . . . .	22
2.3	Ações Anosov de $k$ -Contato Generalizadas . . . . .	30
<b>3</b>	<b>ESTRUTURAS CONFORMES E IRREDUTIBILIDADE</b>	<b>32</b>
3.1	Fibrado de Estruturas Conformes . . . . .	32
3.2	Irredutibilidade e Medida de Margulis para Ações Anosov . . . . .	41
<b>4</b>	<b>AÇÕES ANOSOV UNIFORMEMENTE <math>u</math>-QUASECONFORMES</b>	<b>45</b>
4.1	Ações Anosov Uniformemente $u$ -quaseconformes . . . . .	45
4.2	Ações Anosov $u$ -Conformes . . . . .	50
<b>5</b>	<b>SUAVIDADE DE FOLHEAÇÕES: AÇÕES ANOSOV DE <math>k</math>-CONTATO CONFORMES</b>	<b>64</b>
5.1	Folheação Estável Fraca de Classe $C^1$ . . . . .	64
5.2	Folheações Suaves . . . . .	67
5.2.1	Folheação Estável Fraca Suave . . . . .	67
5.2.2	Folheações Instáveis e Estáveis Suaves . . . . .	69
5.3	Folheações Suaves: Uma Aplicação . . . . .	72
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO / QUESTÕES EM ABERTO</b>	<b>75</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>76</b>
	<b>ÍNDICE</b>	<b>81</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Sistemas Anosov formam uma família de sistemas dinâmicos que possui hiperbolicidade global e exerce conexões com diversas outras áreas de pesquisa em matemática. Com outra denominação, Anosov [3] introduziu a noção de sistemas Anosov. No contexto de difeomorfismos e como consequência dos trabalhos de Franks [16] e Newhouse [42] temos que difeomorfismos Anosov de codimensão um, em uma variedade fechada de dimensão maior do que três, são conjugados a automorfismos hiperbólicos do toro.

Em se tratando de fluxos Anosov os principais modelos são as *suspensões* de difeomorfismos Anosov e os fluxos *algébricos* (por exemplo, o *fluxo geodésico*) em variedades Riemannianas fechadas com métrica de curvatura seccional estritamente negativa. No início da década de 70, Verjovsky [48] mostrou que fluxos Anosov de codimensão um em variedades fechadas de dimensão maior ou igual a quatro são transitivos. Em dimensão três Franks-Williams [17] exibiram um exemplo de um fluxo Anosov não transitivo, conhecido como *Anomalous Anosov Flows*.

Atualmente estuda-se os sistemas Anosov em diversas direções, por exemplo: *ações Anosov de um grupo de Lie  $G$* , *sistemas parcialmente hiperbólicos*, *fluxos Seccional-Anosov*, etc. Uma conexão entre sistemas Anosov e *teoria de representações* pode ser encontrada em Labourie [34]. Até o momento, a maioria de resultados parciais sobre classificação topológica são para difeomorfismos e/ou fluxos Anosov.

O conceito de *ações Anosov* foi introduzido por Pugh-Shub [43] nos anos 70. Estudos recentes feitos por Barbot-Maquera [5] e [6] no caso de ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$  estabeleceram várias propriedades gerais para ações Anosov, incluindo uma caracterização topológica

para o conjunto de elementos regulares e a transitividade no caso de codimensão-1 em variedades de dimensão maior que  $k + 2$ . Posteriormente, Barbot-Maquera [7] classificam as ações Anosov algébricas de um grupo de Lie Nilpotente. A longo prazo, a continuidade desses trabalhos visa mostrar a seguinte conjectura:

**Conjectura Generalizada de Verjovsky:** *Cada ação Anosov irreductível de codimensão-1 de  $\mathbb{R}^k$  sobre uma variedade fechada  $M$  de dimensão maior do que  $k + 3$  é topologicamente equivalente à suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$ .*

Em outra direção à classificação topológica, nesta tese procuramos resultados de rigidez. Nesse sentido, Katok-Spatzier [32] conjecturaram o seguinte a respeito de Ações Anosov:

**Conjectura de Katok-Spatzier:** *Toda ação Anosov suave e irreductível de  $\mathbb{Z}^k$  ou  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação algébrica.*

Em dimensão três, por exemplo, Ghys [18] mostrou que, se as distribuições estáveis e instáveis são suaves então estes fluxos são obtidos reparametrizando fluxos *algébricos* (suspensões ou fluxos geodésicos sobre variedades fechadas de curvatura negativa).

Benoist-Labourie [10] consideram um difeomorfismo Anosov cujas distribuições estáveis e instáveis são suaves e provam que, se este difeomorfismo preserva uma conexão afim, então ele é conjugado a um automorfismo hiperbólico sobre uma *infranilvariedade*. Em seguida, Benoist-Foulon-Labourie [9] consideram fluxos Anosov com distribuições estáveis e instáveis suaves e provam que se, este é de contato, então este fluxo é isomorfo ao *fluxo geodésico*.

Em Fang [15] é provado que fluxos Anosov com distribuições estáveis/instáveis suaves e que preservam uma métrica pseudo-Riemanniana são equivalentes ou a uma suspensão ou ao fluxo geodésico sobre uma 3-variedade. Além disso, Fang [14] mostra que, se um fluxo Anosov preserva volume e é *uniformemente quaseconforme* (com distribuições fortes suaves), então esse fluxo é equivalente a uma suspensão de um automorfismo hiperbólico

de um toro ou a uma perturbação canônica do fluxo geodésico.

Os resultados que motivaram esta tese são os resultados de rigidez obtidos por Sadovskaya [46] onde são considerados *fluxos Anosov de contato e uniformemente  $u$ -quaseconforme*. Precisamente o seguinte resultado.

**Teorema 1.2 (Sadovskaya [46]):** *Seja  $\varphi^t$  um fluxo Anosov de contato ( $C^\infty$ ) sobre uma variedade compacta  $M$ ,  $\dim(M) \geq 5$ . Se  $\varphi^t$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme na distribuição instável forte, então  $\varphi^t$  é  $C^\infty$ -conjugado ao fluxo geodésico de uma variedade de curvatura negativa constante.*

Nosso interesse neste trabalho portanto é estender o resultado acima para o contexto de ações Anosov *uniformemente  $u$ -quaseconformes* (Definição 4.1) associadas a uma estrutura de  *$k$ -contato generalizada* (Definição 2.20). Fazemos assim um paralelo com fluxos Anosov de *contato* uniformemente  $u$ -quaseconformes. O teorema principal desse trabalho é o Teorema A enunciado abaixo.

**Teorema A** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  ( $k \geq 2$ ) uma ação Anosov suave e de  $k$ -contato generalizada numa variedade fechada  $M$ ,  $\dim(M) = 2n+k$  ( $n \geq 2$ ). Se  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme, então esta ação é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação Anosov quasealgébrica.*

O teorema proposto nessa tese é então uma versão fraca da Conjectura de Katok-Spatzier mencionada anteriormente. Para  $n = 1$  a ação Anosov  $\phi$  seria sempre  $u$ -conforme, daí a exigência  $n \geq 2$  para que possamos ter fibrados fortes instáveis e estáveis (Definição 2.12) de dimensões iguais e maiores do que um.

A demonstração do teorema segue o seguinte roteiro: começamos utilizando o fibrado instável forte para definirmos um *fibrado de classes  $u$ -conformes* localmente trivial sobre  $M$  (Seção 3.1) e uma ação do *grupo linear* na fibra típica. Definimos em seguida uma *estrutura  $u$ -conforme* (seção do fibrado de classes  $u$ -conformes) utilizando centros de *discos mínimos*.

Provamos que essa estrutura conforme é invariante pela ação Anosov, mensurável e

limitada num conjunto de medida total. Além disso, com a *irreduzibilidade* da ação Anosov e uma família de funções que parametrizam folhas fortes mostramos que tal estrutura  $u$ -conforme é localmente Hölder contínua e suave em folhas instáveis fortes. A extensão dessa estrutura  $u$ -conforme origina uma métrica no fibrado instável forte que torna a ação Anosov  $u$ -conforme (Definição 4.2). Precisamente mostramos o seguinte resultado.

**Teorema B.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov suave, irreduzível e uniformemente  $u$ -quaseconforme sobre um subcone  $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^k$ . Então  $\phi$  é  $u$ -conforme com relação a uma métrica riemanniana no subfibrado instável forte a qual é Hölder contínua em  $M$  e suave ao longo das folhas da folheação instável forte.*

Por fim, uma *estrutura de  $k$ -contato generalizada* (Definição 2.18) nos permitiu obter simetrias e a suavidade das folheações de interesse.

**Teorema C.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  ( $k \geq 2$ ) uma ação Anosov suave e de  $k$ -contato generalizada numa variedade fechada  $M$  de  $\dim(M) = 2n + k$  ( $n \geq 2$ ). Se  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme, então esta ação possui folheações instáveis e estáveis fortes suaves.*

O texto está estruturado em quatro capítulos, descritos a seguir:

Inicialmente, no Capítulo 2 introduzimos os conceitos e resultados fundamentais para o restante do trabalho. Por exemplo, fatos básicos sobre ações e representações de grupo, folheações; ações Anosov e suas propriedades essenciais. Apresentamos ainda exemplos protótipos de Ações Anosov, como *suspensões* (Exemplo 2.2) e a *câmara de Weyl* (Exemplo 2.3). Por fim, apresentamos formalmente o conceito de ações de  $k$ -contato generalizadas e fatos básicos sobre essas estruturas.

No Capítulo 3, a partir de uma métrica riemanniana no subfibrado instável forte, definimos as *classes  $u$ -conformes* em cada fibra e mostramos que o conjunto dessas classes é difeomorfo a  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  ( $n$  é a dimensão do fibrado instável forte). Assim, foi possível definir um novo *fibrado de classes  $u$ -conformes* sobre a variedade. A fibra típica é uma variedade

de *curvatura negativa* com métricas invariantes por uma determinada ação de  $GL(n)$  (ação por isometrias). Seções desse fibrado são chamadas de *estruturas  $u$ -conformes* (Definição **3.1**).

Ademais, nesse capítulo discutimos os importantes conceitos de *irreduzibilidade* (Definição **3.6**) e *transitividade em subcones* (Definição **3.8**) de uma ação Anosov, o que nos permitiu ter uma *Medida de Margulis* quaseinvariante por holonomias.

No Capítulo **4**, com uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme e irreduzível construímos uma determinada estrutura  $u$ -conforme invariante pela ação, limitada, mensurável, localmente Hölder contínua e suave nas folhas instáveis fortes. Essa estrutura deu origem a uma métrica na distribuição instável forte que torna a ação Anosov  $u$ -conforme (Teorema **B**).

Finalmente, no Capítulo **5** utilizando a ferramenta do capítulo anterior (estrutura  $u$ -conforme) demonstramos a regularidade de certas holonomias. Esses resultados foram sintetizados no Teorema **A**. Utilizando uma estrutura de  $k$ -contato generalizada mostramos o Teorema **C**, isto é, concluímos que ambas as folheações fracas (estável e instável) e ambas as folheações fortes (estável e instável) são suaves (de classe  $C^\infty$ ), com isso mostramos o Teorema **A**.

## CAPÍTULO 2

# PRELIMINARES

Capítulo dedicado à apresentação de definições e resultados fundamentais para o trabalho que desenvolvemos nos capítulos seguintes. Na Seção 2.1 definimos os conceitos de grupo, ações, folheações e representações. Na Seção 2.2 exibimos o objeto principal: as ações Anosov (Definição 2.12), bem como os conceitos e propriedades essenciais de sua teoria. Por fim, na Seção 2.3 definimos *estruturas de  $k$ -contato generalizadas*, ações de  $k$ -contato generalizadas e apresentamos suas propriedades importantes. Supomos desde já que nosso ambiente seja uma variedade *riemanniana* suave  $M$ , fechada e *conexa*.

### 2.1 Ações de Grupos de Lie, Folheações e Representações

De forma geral, um grupo é um conjunto dotado de uma operação que possui certas propriedades. Esse objeto aparece em quase todas as áreas da matemática e dentre outras coisas, aparecem com frequência ao longo deste texto.

**Definição 2.1** (Grupo). Um *grupo* é um conjunto não vazio  $G$ , munido de uma operação binária (fechada em  $G$ ), que denotamos por  $\cdot$  e que satisfaz os seguintes axiomas:

1. A operação é associativa:  $(g \cdot h) \cdot l = g \cdot (h \cdot l)$ , para todo  $g, h, l \in G$ .
2. A operação tem um elemento neutro: existe um elemento  $e \in G$ , tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ , para todo  $g \in G$ .
3. Todo elemento de  $G$  possui um elemento inverso: para todo  $g \in G$ , existe um  $g^{-1} \in G$ , tal que,  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

Algumas vezes, ao denotar  $g \cdot h$  (operação entre  $g$  e  $h$ ) vamos simplesmente escrever  $gh$ .

**Exemplo 2.1** (Grupos de Lie). Um *grupo de lie*  $G$  é um grupo que possui uma estrutura de variedade diferenciável  $C^\infty$ , tal que, a aplicação

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

é  $C^\infty$ . Isto é equivalente a dizer que as aplicações  $(g, h) \mapsto gh$  e  $h \mapsto h^{-1}$  são  $C^\infty$ . Uma subvariedade imersa  $G_0 \subset G$  de classe  $C^\infty$  que também é grupo de Lie (com a operação induzida) é chamada de subgrupo de Lie de  $G$ . Alguns grupos de Lie:

- a) O grupo aditivo  $\mathbb{R}^k$ ,
- b)  $GL(n, \mathbb{R}) = GL(n) = \{\text{matrizes reais } n \times n \text{ invertíveis}\}$  (*grupo linear*),
- c)  $O(n, \mathbb{R}) = O(n) = \{U \mid U \text{ é uma matriz } n \times n, \text{ que satisfaz: } UU^T = I_n\}$ , (*grupo ortogonal*),
- d)  $SL(n, \mathbb{R}) = SL(n) = \{U \in GL(n) \mid \det(U) = 1\}$  (*grupo linear especial*),
- e)  $SO(n, \mathbb{R}) = SO(n) = \{U \in O(n) \mid \det(U) = 1\}$  (*grupo especial ortogonal*).

Daqui em diante  $G$  denota um grupo de Lie.

**Definição 2.2** (Ação). Uma *ação* do grupo  $G$  sobre uma variedade  $M$  é uma aplicação  $\varphi : G \times M \longrightarrow M$  com as seguintes propriedades:

- a)  $\varphi(e, p) = p$ , para todo  $v \in M$ , onde  $e$  é o elemento neutro da operação em  $G$ .
- b)  $\varphi(g, \varphi(f, p)) = \varphi(gf, p)$  para todo  $g, f \in G$  e para todo  $p \in M$ .

Neste caso, dizemos que  $G$  age em  $M$ . Quando a aplicação  $\varphi : G \times M \longrightarrow M$  for  $C^r$  ( $r \geq 0$ ) dizemos que a ação é  $C^r$ . Para todo  $g \in G$  temos que  $\varphi_g : M \longrightarrow M$  é uma aplicação definida por  $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$ . No caso de ações  $C^r$  as aplicações  $\varphi_g$  são  $C^r$ -difeomorfismos. De fato, basta notar  $\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$  e que  $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id$  e  $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id$ .



**Definição 2.3.** Dada uma ação de  $G$  sobre  $M$ , definimos os seguintes conjuntos:

1.  $\mathcal{O}_\varphi(p)$  a *órbita* ( $\varphi$ -órbita) da ação por  $p \in M$ :

$$\mathcal{O}_\varphi(p) = \{\varphi(g, p) \mid g \in G\}.$$

Notemos que, dados  $p, q \in M$ , tal que  $q \notin \mathcal{O}_\varphi(p)$ , então  $\mathcal{O}_\varphi(p) \cap \mathcal{O}_\varphi(q) = \emptyset$  (ou seja, as órbitas de uma ação definem uma partição de  $M$ )

2. Dado  $p \in M$ ,  $G_p$  é chamado de *grupo de isotropia*. Definimos:  $G_p = \{g \in G \mid \varphi(g, p) = p\}$ . Note que  $G_p$  é um subgrupo fechado de  $G$ .

**Definição 2.4.** Seja  $G$  um grupo,  $M$  uma variedade diferenciável e suponha que  $G$  age em  $M$  ( $\varphi : G \times M \rightarrow M$ ).

1. A ação é dita *efetiva* se nenhum elemento  $g \in G$  ( $g \in G \setminus \{e\}$ ) fixa todos os pontos de  $M$ . Ou de maneira equivalente se  $\forall g \neq e \in G$ , existe um  $x \in M$  tal que  $\varphi(g, x) \neq x$ .
2. A ação é dita *transitiva* se existe  $p \in M$  tal que a órbita de  $p$  é densa em  $M$ .
3. A ação é dita *minimal* se toda órbita da ação é densa em  $M$ .
4. A ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  é *localmente livre* se  $G_p$  é discreto para cada  $p \in M$ . Em particular, se  $G_p$  é trivial ( $G_p = \{e\}$ ) para cada  $p \in M$ , então a ação é dita *livre*.

No que segue, exibimos alguns fatos básicos sobre ações que posteriormente nos permitirão compreender sob quais condições as órbitas determinam uma *folheação* (Definição 2.7) na variedade.

**Definição 2.5.** Considere em  $G$  a seguinte relação de equivalência:  $g_1 \sim_\varphi g_2$  se, e somente se,  $g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_p$ ,  $p \in M$ . O espaço quociente por esta relação é denotado por  $G/G_p$ .

O seguinte teorema estabelece a topologia das órbitas de uma ação.

**Teorema 2.1** (Camacho-Neto [11]). *Fixado  $p \in M$  existe uma única estrutura de variedade diferenciável em  $G/G_p$  tal que a projeção quociente denotada por  $\pi : G \rightarrow G/G_p$  é uma submersão que define um fibrado com fibra  $G_p$ . Se,  $G_p$  é discreto, então  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento. Além disso, se a ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  for  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), existe*

uma única imersão biunívoca  $C^r$ ,  $\bar{\varphi}_p : G/G_p \rightarrow \mathcal{O}_\varphi(p)$  tal que  $\bar{\varphi}_p \circ \pi = \varphi_p$  (caso  $G_p$  seja discreto, a aplicação  $\varphi_p : G \rightarrow \mathcal{O}_\varphi(p)$  é um recobrimento).

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \pi \downarrow & \searrow \varphi_p & \\ G/G_p & \xrightarrow{\bar{\varphi}_p} & \mathcal{O}_\varphi(p) \end{array}$$

**Observação 2.1.** De acordo com o teorema acima, ser localmente livre é equivalente a  $\dim \mathcal{O}_\varphi(p) = \dim G$  cada  $p \in M$ . De fato,  $\dim \mathcal{O}_\varphi(p) = \dim G$  se e somente se,  $\dim G/G_p = \dim G$ , ou seja,  $G_p$  é discreto.

Como consequência, uma ação localmente livre  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) possui órbitas difeomorfas a  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^{k-l}$  em que  $0 \leq l \leq k$ .

**Definição 2.6.** Dada uma ação  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) e fixada uma base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  de  $\mathbb{R}^k$  definimos os campos  $X_j(p) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(tv_j, p) \right|_{t=0}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) de classe  $C^{r-1}$ , chamados de *geradores infinitesimais* da ação.

**Observação 2.2.** Seja  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ). Temos os seguintes fatos:

1. A aplicação de classe  $C^r$  definida por  $\varphi_j(t, p) := \varphi_j^t(p) = \varphi(tv_j, p)$  é o fluxo do campo  $X_j$ .
2. Pelo fato de  $\mathbb{R}^k$  ser abeliano, os geradores infinitesimais comutam dois a dois. Nesta situação, vale que  $\varphi_i^t \circ \varphi_j^s = \varphi_j^s \circ \varphi_i^t$  para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  e  $s, t \in \mathbb{R}$ , isto é, o colchete de Lie  $[X_i, X_j] = 0$ .
3. A ação  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k t_i v_i, p\right) = \varphi_1^{t_1} \circ \varphi_2^{t_2} \circ \dots \circ \varphi_k^{t_k}(p). \quad (2.1)$$

Os campos  $X_1, \dots, X_k$  definem um campo de planos tangente à ação.

4. De maneira recíproca, toda família de  $k$  campos de vetores completos, comutativos dois a dois e linearmente independentes  $X_1, \dots, X_k$  são geradores infinitesimais de uma ação  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) localmente livre.

Uma ação  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) é localmente livre e possui órbitas que definem uma *folheação* em  $M$ . Para justificar essa afirmação necessitamos do conceito de folheação, campos de  $k$ -planos involutivos e o Teorema 2.2 (Teorema de Frobenius). A grosso modo, uma folheação decompõe a variedade  $M$  em *subvariedades* conexas, as quais chamamos de folhas. Precisamente temos a definição a seguir.

**Definição 2.7** (Folheação). Seja  $M$  uma  $m$ -variedade de classe  $C^\infty$ . Uma *folheação* de classe  $C^r$  e dimensão  $k$  ( $k < m$ ) de  $M$  (ou codimensão  $m-k$ ) é um atlas  $\mathcal{F} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  de classe  $C^r$  em  $M$  com as seguintes propriedades:

1. Para todo  $\alpha \in A$ ,  $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ , onde  $U_1$  e  $U_2$  são discos abertos de  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^{m-k}$  respectivamente.
2. Sejam  $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$  tais que  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ , então a mudança de coordenadas (Figura 2.1)  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$  é da forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, \quad \forall \alpha, \beta \in A.$$

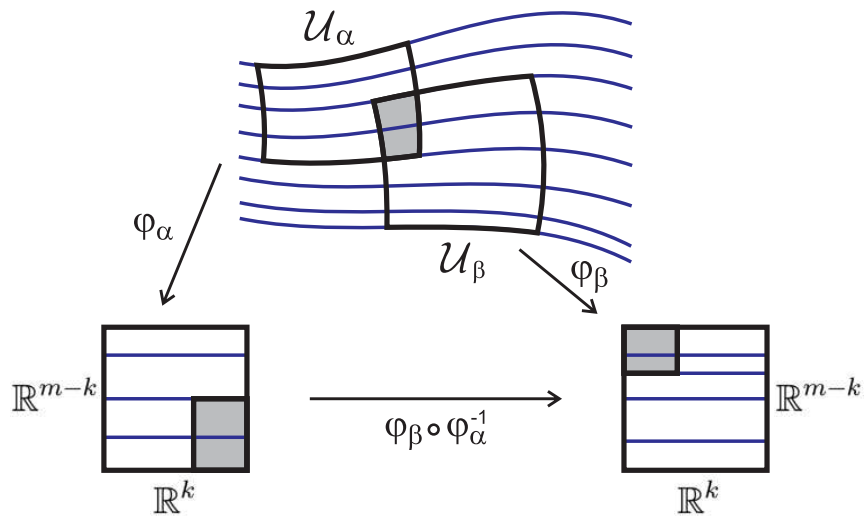


Figura 2.1: Mudança de Coordenadas de  $\mathcal{F}$ . Adaptado de Camacho-Neto [11].

**Proposição 2.1** (Camacho-Neto [11]). *Toda folheação  $\mathcal{F}$  ( $C^r, r \geq 1$ ) de dimensão  $k$  numa variedade  $M$  define um campo de planos ( $C^{r-1}$ ) de dimensão  $k$  em  $M$  (tal campo é denotado por  $T\mathcal{F}$ ).*

Assim,  $M$  só pode ter uma folheação de dimensão  $k$  se admite campos de planos de dimensão  $k$  (campo de  $k$ -planos).

**Definição 2.8.** Um *campo de planos*  $P$  é dito *involutivo* se, dado dois campos de vetores  $X$  e  $Y$  tais que, para cada  $q \in M$ ,  $X(q)$  e  $Y(q) \in P(q)$ , então  $[X, Y](q) \in P(q)$ .

**Teorema 2.2** (Frobenius). *Seja  $P$  um campo de  $k$ -planos ( $C^r, r \geq 1$ ) em  $M$ . Se  $P$  é involutivo, então existe uma folheação  $\mathcal{F}$ ,  $C^r$ , de dimensão  $k$  em  $M$ , tal que,  $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$  para todo  $q \in M$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{F}$  é uma folheação, de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) e  $P$  é um campo de planos tangente a  $\mathcal{F}$ , então  $P$  é involutivo.*

Pela Observação 2.2, dada uma ação  $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) os geradores infinitesimais, em particular comutativos, definem um campo de  $k$ -planos involutivo em  $M$ . Portanto, de acordo com o Teorema de Frobenius  $\varphi$  possui órbitas que definem uma folheação de dimensão  $k$  em  $M$ .

Em alguns contextos pode-se adotar a linguagem de *representações* ao invés de ações. No que segue,  $G$  é um grupo qualquer e  $X$  um espaço topológico com uma topologia Hausdorff.  $Aut(X)$  é o grupo de automorfismos de  $X$ , ou seja, formado por homeomorfismos de  $X$  em si mesmo e com a operação de composição (às vezes denota-se  $Aut(x) = C^0(X)$ ).

**Definição 2.9** (Representação de um Grupo). Uma *representação* (as vezes também chamada de operação) de um grupo  $G$  num espaço topológico  $X$  é um homomorfismo de grupo:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow Hom(X) \\ g &\longmapsto \rho(g) : X \longrightarrow X \end{aligned}$$

A imagem  $\rho(g)$  de um elemento  $g \in G$  também é chamada de *permutação* de  $X$ . O espaço  $X$  é chamado de *espaço de representação* de  $G$ . Uma representação induz uma ação (e vice versa)  $\varphi : G \times X \rightarrow X$ , definida assim:

$$\varphi(g, x) = \rho(g)(x).$$

A aplicação  $\varphi$  de fato é uma ação, considere  $e$  o elemento neutro de  $G$ , temos consequentemente que:

1.  $\varphi(e, x) = \rho(e)(x) = I_X(x) = x$
2.  $\varphi(g.h, x) = \rho(g) \circ \rho(h)(x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ .

Exigimos em geral que  $\varphi$  seja contínua. É possível encontrar representações em diversos contextos, como por exemplo, *representações lineares* e espaços de representação sendo um  $F$ -espaço vetorial ( $F$  um corpo). No caso em que  $X = M$  é uma variedade diferenciável podemos tomar  $Hom(M) = Diff^r(M)$  ( $r \geq 0$ ).

**Observação 2.3.** *No texto utilizamos ambas as notações, de representação e de ação, não fazendo distinção entre as mesmas.*

Considere  $\Delta$  um *subgrupo* fechado de um grupo topológico  $G$  (considere  $G$  com uma topologia Hausdorff). Então,  $G/\Delta$  com a topologia quociente é uma espaço de Hausdorff. A aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : G \times (G/\Delta) &\longrightarrow (G/\Delta) \\ (g, [h]) &\longmapsto [g.h] \end{aligned}$$

satisfaz as condições 1 e 2 de ação acima. Logo,  $(G/\Delta)$  pode ser considerado um espaço de representação de  $G$ .

**Definição 2.10.** Sejam  $\varphi_1 : G \times X \longrightarrow X$  e  $\varphi_2 : G \times X' \longrightarrow X'$  representações de  $G$ . Dizemos que  $X$  e  $X'$  são *equivalentes* se, existe um homeomorfismo  $f : X \longrightarrow X'$ , tal que:  $\varphi_2(g, f(x)) = f(\varphi_1(g, x))$ .

No Capítulo 3 estaremos interessados em estudar uma ação de  $GL(n)$  sobre os espaço das matrizes simétricas e definidas positivas com determinante igual a um. Além disso, fazer uma identificação via difeomorfismo desse espaço com um determinado quociente. Assim, as definições e resultados a seguir serão fundamentais nessa situação.

**Definição 2.11.** Um subgrupo próprio  $H$  de um grupo  $G$  é chamado *maximal* se nenhum outro subgrupo próprio  $K$  de  $G$  contém  $H$  estritamente, ou seja, não existe subgrupo  $K$  de  $G$ , tal que,  $H \subsetneq K \subsetneq G$ .

**Lema 2.1** (Mass [39]). *Seja  $\Omega$  um subgrupo fechado de  $GL(n)$ . Qualquer subgrupo compacto maximal  $\Delta$  de  $\Omega$  pode ser escrito da forma*

$$\Delta = \{U \mid UHU^T = H, U \in \Omega\},$$

para alguma matriz simétrica definida positiva  $H$  (denotamos  $H = H^T > 0$ ).

**Lema 2.2.** *Seja  $\Omega = GL(n)$ , então todos os subgrupos compactos maximais são conjugados.*

**Demonstração:** Seja  $\Delta$  um subgrupo maximal de  $GL(n)$ , pelo Lema 2.1 escrevemos  $\Delta = \{U \mid UHU^T = H, U \in \Omega\}$ . Mostraremos que  $\Delta$  é conjugado a  $O(n)$  a qual é subgrupo maximal.

Existe  $P \in GL(n)$ , tal que,  $H = PP^T$  (fato demonstrado no Lema 3.1). Assim, dado  $U \in \Delta$  temos  $UHU^T = H$  e conseqüentemente  $UPP^TU^T = PP^T$ , o que implica  $P^TU^T(P^T)^{-1} = P^{-1}U^{-1}P$ . Isso é o mesmo que dizer  $(P^{-1}UP)^T = (P^{-1}UP)^{-1}$  (a matriz  $V = P^{-1}UP$  é ortogonal). Escrevendo  $PVP^{-1} = U$  vemos que  $\Delta = PO(n)P^{-1}$ . ■

Um resultado de Maas [39] diz que se,  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são subgrupos conjugados de um grupo  $G$  ( $\Delta_1 = g\Delta_2g^{-1}$ ,  $g \in G$ ), então existe um homeomorfismo  $f : G/\Delta_1 \rightarrow G/\Delta_2$  que tornam esses dois espaços de representação de  $G$  equivalentes (no sentido da Definição 2.10). No caso em que  $G = GL(n)$  só precisamos considerar o subgrupo  $O(n)$ , uma vez que no Lema 2.2 acima vimos que qualquer outro subgrupo fechado maximal é conjugado a  $O(n)$ .

## 2.2 Ações Anosov: Teoria Geral

Introduzimos nesta seção o objeto principal do trabalho, as *ações Anosov* de  $\mathbb{R}^k$ . A definição no entanto pode ser feita para um grupo de Lie qualquer. Estamos interessados em definir o conjunto de *elementos Anosov* (Definição 2.12), bem como as folheações decorrentes dos subfibrados associados a ação. Além de exemplos protótipos de ações Anosov, exibimos ainda os conceito de *pontos não-errantes* (Definição 2.15) e *transitividade* (Definição 2.16).

**Definição 2.12** (Ação Anosov). Uma ação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  localmente livre, de classe  $C^\infty$  é *Anosov* se existe  $a \in G$  tal que o difeomorfismo  $g = \phi(a, \cdot) = \phi_a$  age de maneira normalmente hiperbólica com respeito a folheação definida pelas órbitas. Ou seja, existem números reais  $\lambda > 0$ ,  $C > 0$  e uma decomposição contínua e  $Dg$ -invariante  $TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu}$ , tal que:

$$\|Dg^n|_{E_a^{ss}}\| \leq Ce^{-\lambda n}, \quad \forall n > 0,$$

$$\|Dg^n|_{E_a^{uu}}\| \leq Ce^{\lambda n}, \quad \forall n < 0.$$

Nesta definição  $T\phi$  é a distribuição tangente às órbitas da ação.

O elemento  $a \in G$  satisfazendo esta definição é chamado de *elemento Anosov* ou *elemento regular*. Os casos mais estudados são quando  $G = \mathbb{Z}$  (*difeomorfismos Anosov*) e quando  $G = \mathbb{R}$  (*fluxos Anosov*). Nestas duas situações cada elemento não trivial de  $G$  é elemento Anosov, mas isso de modo geral não necessariamente é assim como mostra a Observação 2.4.

Hirsch, Pugh and Shub [23] desenvolveram a teoria básica de transformações normalmente hiperbólicas. Em decorrência disso obtemos que a decomposição do fibrado tangente  $TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu}$  é Hölder contínua e que os subfibrados  $E_a^{ss}$ ,  $E_a^{uu}$ ,  $T\phi \oplus E_a^{ss}$  e  $T\phi \oplus E_a^{uu}$  são unicamente integráveis. As respectivas folheações são denotadas assim:

- $E_a^{ss}$  \_\_\_\_\_  $\mathcal{F}_a^{ss}$  (folheação estável forte),
- $E_a^{uu}$  \_\_\_\_\_  $\mathcal{F}_a^{uu}$  (folheação instável forte),
- $E_a^{ss} \oplus T\phi$  \_\_\_\_\_  $\mathcal{F}_a^s$  (folheação estável fraca),

- $E_a^{uu} \oplus T\phi$  —————  $\mathcal{F}_a^u$  (folheação instável fraca).

**Lema 2.3** (Barbot-Maquera [6]). *Seja  $g = \phi(a, \cdot)$  o difeomorfismo dado na Definição 2.12 e considere  $h : M \rightarrow M$  um difeomorfismo que comuta com  $g$  e tal que o subfibrado  $T\phi$  seja invariante por  $Dh$ . Então, os subfibrados  $E_a^{ss}$  e  $E_a^{uu}$  são invariantes por  $Dh$ .*

Dados  $a$  e  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $\phi_a \circ \phi_b = \phi_b \circ \phi_a$ , ou seja, os difeomorfismos da ação Anosov comutam dois a dois e consequentemente os subfibrados instável e estável (forte e fraco) são preservados pela ação  $\phi$ . Também, cada folheação  $\mathcal{F}_a^\sigma$  ( $\sigma = ss, uu, s, u$ ) é preservada por todo difeomorfismo que comuta com  $a$ .

As folheações  $\mathcal{F}_a^{uu}$  e  $\mathcal{F}_b^{ss}$  possuem folhas homeomorfas a planos. Isso decorre do conhecido Teorema da Variedade Estável Local para sistemas hiperbólicos. Denotamos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\phi)$  o conjunto de elementos Anosov de  $\phi$  (ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M$ ). Chamamos  $\mathcal{A}$  de *conjunto de Anosov* ou *conjunto regular*. Até o momento o que se conhece desse conjunto  $\mathcal{A}$  é dado pela proposição a seguir.

**Proposição 2.2** (Barbot-Maquera [6]). *O conjunto de elementos Anosov  $\mathcal{A}$  é aberto em  $\mathbb{R}^k$  e cada componente conexa é um cone aberto e convexo.*

- i Cada componente conexa de  $\mathcal{A}$  chamada de *câmara*.
- ii Um *subcone regular* é um cone aberto convexo contido numa câmara.
- iii Se,  $\mathcal{A}_a$  é a componente conexa que contém  $a$ , então  $\mathcal{F}_a^\sigma = \mathcal{F}_b^\sigma$  ( $\sigma = ss, uu, s, u$ ) para todo  $b \in \mathcal{A}_a$ .
- iv Uma  $\phi$ -órbita, tal que, o subgrupo de isotropia contém um elemento Anosov é compacta.

Foi conjecturado por A. Katok que o conjunto de elementos Anosov de uma ação Anosov é aberto e denso.

**Observação 2.4.** *Decorre da proposição acima que não podemos ter  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) (esta mesma observação é válida para fluxos Anosov). De fato, de acordo com a definição de ações Anosov se  $a$  e  $-a$  são elementos Anosov, então  $E_a^{uu}(x) = E_{-a}^{ss}(x)$  para todo  $x \in M$ . No entanto se supormos  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^k$  estaríamos contradizendo o item (iii) da*



proposição anterior que, neste caso, nos garante que a decomposição  $TM = E_a^{uu} \oplus T\phi \oplus E_a^{ss}$  é constante num cone.

A seguir apresentamos alguns exemplos de ações Anosov (exemplos complementares podem ser obtidos em Barbot-Maquera [6]).

**Exemplo 2.2** (Suspensões). Considere uma ação  $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$  sobre uma variedade fechada  $N$ . Em  $N \times \mathbb{R}^k$  consideramos a seguinte relação de equivalência: dados  $(x, u)$  e  $(y, v) \in N \times \mathbb{R}^k$ ,  $(x, u) \sim (y, v)$  se, e somente se,  $u - v = n \in \mathbb{Z}^k$  e  $y = \tilde{\phi}^n(x) = \tilde{\phi}(x, n)$ , ou seja,  $(y, v) = (\tilde{\phi}^n(x), u - n)$ .

Com isso temos a variedade quociente  $M = (M \times \mathbb{R}^k / \sim)$  e os campos verticais  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Definimos assim a seguinte ação  $\varphi$  em  $M \times N$ , onde

$$\varphi((u_1, \dots, u_k), p) = \sum_{i=1}^k u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

que consequentemente induz uma ação  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  no quociente  $M$ , chamada de *ação suspensão*. Esta ação é Anosov se, e somente se, algum elemento de  $\mathbb{Z}^k$  induz um difeomorfismo Anosov sobre  $N$ .

**Definição 2.13.** Dada uma ação localmente livre  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ , dizemos que  $\phi$  é uma *suspensão* se existe uma subvariedade  $N \subset M$  de codimensão  $k$  e uma ação  $\tilde{\phi} : \mathbb{Z}^k \times N \rightarrow N$ , tal que,  $\phi$  é suspensão de  $\tilde{\phi}$ .

No caso de fluxos, ser suspensão é equivalente a existir uma seção transversal global. No entanto para ações  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  essa equivalência não é verdade em geral, ou seja, exibir uma seção transversal global não implica necessariamente que  $\phi$  é a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ . A suspensão de uma ação *algébrica* (ver Definição 5.6) é algébrica.

Existem ações *algébricas* que não são suspensões, por exemplo, o fluxo geodésico. O seguinte exemplo, o qual é fornecido pela teoria clássica de grupos de Lie *semi-simples* (ver San Martín [41]), e que generaliza o fluxo geodésico é um modelo algébrico para o caso de ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$ .

**Exemplo 2.3** (Ação da Câmara de Weyl). Seja  $G$  um grupo de Lie real conexo semi-simples com centro finito e seja  $\mathcal{G}$  sua álgebra de Lie. Seja  $\Gamma$  um reticulado uniforme livre de torção em  $G$  e  $\mathfrak{a}$  um subespaço de Cartan de uma  $\mathbb{R}$ -decomposição de  $\mathcal{G}$ .

O centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathcal{G}$  é a soma  $\mathfrak{a} \oplus \mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é a álgebra de Lie de um subgrupo compacto  $K$  de  $G$ . A ação a direita de  $\mathfrak{a}$  induz uma ação de  $\mathbb{R}^k$  sobre o biquociente  $M = \Gamma \backslash G/K$ . A ação adjunta de  $\mathfrak{a}$  sobre  $\mathcal{G}$  preserva a seguinte decomposição:

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{G}^\alpha$$

onde cada raiz  $\alpha$  são formas lineares descrevendo a restrição de  $ad(a)$  em  $\mathcal{G}^\alpha$ . Os elementos regulares  $a$  de  $\mathfrak{a}$  para os quais  $\alpha(a) \neq 0$ , correspondendo as câmaras de Weyl do grupo de Lie, formam uma união de abertos convexos de elementos Anosov.

O exemplo anterior pode ser visto com detalhes completos em Almeida [2], nesse também é mostrado que a ação dada pelo exemplo acima é de  $k$ -contato generalizada (Definição 2.20). O conceito de  $k$ -contato será explorado na próxima seção (Seção 2.3) e será importante para os objetivos desse trabalho.

**Exemplo 2.4.** Seja  $N$  uma  $n$ -variedade e  $\varphi^t$  um fluxo Anosov de codimensão-1 ( $\dim(E^{uu}) = 1$ ) sobre  $N$  (ou seja,  $n \geq 3$ ). Construimos assim uma ação Anosov  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) de codimensão-1 sobre  $M = N \times \mathbb{T}^{k-1}$ . Para facilitar a notação e visualização fixamos  $k = 2$ . Ou seja,  $\mathbb{T}^{k-1} = \mathbb{S}^1$ . Consideramos o sistema de coordenadas  $(x, \theta) \in N \times \mathbb{S}^1$  e denotamos por  $\varphi_0^s$  o fluxo vertical gerado pelo campo  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

Definimos os seguinte fluxos em  $M$ :

$$\psi_1^t((x, \theta)) = (\varphi^t(x), \theta) \quad \text{e} \quad \psi_2^s((x, \theta)) = (x, \varphi_0^s(\theta)).$$

Estes fluxos são comutativos. De fato:

$$\psi_1^t \circ \psi_2^s((x, \theta)) = \psi_1^t((x, \varphi_0^s(\theta))) = (\varphi^t(x), \varphi_0^s(\theta)) = \psi_2^s((\varphi^t(x), \theta)) = \psi_2^s \circ \psi_1^t((x, \theta)).$$

Segue da Observação 2.2 que  $\psi_1^t$  e  $\psi_2^s$  definem uma ação de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $M$ .

$$\phi(tv_1 + sv_2, (x, \theta)) = \psi_1^t \circ \psi_2^s((x, \theta)). \quad (2.2)$$

Esta ação (2.2) é Anosov. De fato, Um possível elemento Anosov é da forma  $(t_0v_1 + 0v_2) \in \mathbb{R}^2$  que nos dá o difeomorfismo parcialmente hiperbólico:  $\phi^{(t_0v_1, 0)} : M \rightarrow M$ . Definimos uma decomposição em  $TM$  da seguinte maneira: para cada  $(x, \theta) \in M$  definimos  $T_{(x, \theta)}M = \widehat{E}_{(x, \theta)}^{ss} \oplus T_{(x, \theta)}\phi \oplus \widehat{E}_{(x, \theta)}^{uu}$  em que  $\widehat{E}_{(x, \theta)}^{ss} = D\varphi_0^{s_0}((x, 0))|_{E_{(x, 0)}^{ss}}$  e  $\widehat{E}_{(x, \theta)}^{uu} =$

$D\varphi_0^{s_0}((x, 0))|_{E_{(x,0)}^{uu}}$  para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$  (ou seja, estou definindo no espaço tangente ao ponto  $(x, \theta)$  um subespaço advindo via difeomorfismo de um subespaço tangente ao ponto  $(x, 0)$  na seção zero  $N \times 0$ ).

No caso geral, basta utilizar os  $(k - 1)$  fluxos gerados pelos campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$  ( $j = 1, \dots, (k - 1)$ ) de  $\mathbb{T}^{k-1}$  e  $\varphi^t$  para obter uma ação de  $\mathbb{R}^k$ . Cada órbita da ação definida acima é um produto de uma órbita de  $\varphi^t$  por  $\mathbb{S}^1$ .

No exemplo anterior se  $\dim(n) > 4$ , então dado  $\varphi^t$  um *fluxo Anosov* de codimensão-1 em  $N$ , Verjovsky [48] (Teorema de Verjovsky) nos diz que  $\varphi^t$  é transitivo (tem órbita densa em  $N$ ). Neste caso, a ação Anosov de codimensão-1 associada também será transitiva uma vez que  $\dim(M) > 2 + k$  (Barbot-Maquera [6]). No caso em que  $\dim(N) = 3$  o exemplo de Franks-Williams [17] (Anomalous Flow) mostra que existem fluxos Anosov não transitivos. Então se  $\psi^t$  é o Anomalous Flow o quociente  $M$  no exemplo acima terá dimensão igual a  $2 + k$  e conseqüentemente a ação Anosov não é transitiva (Barbot-Maquera [6]).

Para ações Anosov uma pergunta recorrente é a seguinte: quais teoremas e definições sobre fluxos Anosov podem ser generalizados para uma ação Anosov? Para nossos propósitos, começamos enunciando o teorema da vizinhança produto.

**Observação 2.5.** *Para todo  $\delta > 0$ , denotamos por  $\mathcal{F}_\delta^\sigma(p)$  uma bola aberta na métrica induzida em  $\mathcal{F}^\sigma$  com centro em  $p$  e raio  $\delta$ , onde  $\sigma = ss, uu, s, u$ .*

**Teorema 2.3** (Vizinhança Produto - ver por exemplo Barbot-Maquera [6]). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov. Existe  $\delta_0 > 0$ , tal que, para todo  $\delta \in (0, \delta_0)$  e para todo  $p \in M$ , as aplicações:*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]^u : \mathcal{F}_\delta^s(x) \times \mathcal{F}_\delta^{uu}(x) &\longrightarrow M \\ (y, z) &\longmapsto [y, z]^u = \mathcal{F}_{2\delta}^s(z) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^{uu}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]^s : \mathcal{F}_\delta^{ss}(x) \times \mathcal{F}_\delta^u(x) &\longrightarrow M \\ (y, z) &\longmapsto [y, z]^s = \mathcal{F}_{2\delta}^{ss}(z) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^u(y) \end{aligned}$$

*estão bem definidas e são homeomorfismos em suas imagens.*

Em Arbieto-Morales [4] são apresentados resultados e definições no contexto de ações Anosov, semelhantes aqueles já conhecidos para fluxos Anosov. Exemplos: Closing

Lemma, Axioma A, estabilidade estrutural; decomposição espectral, pontos não-errantes, entre outros.

**Teorema 2.4** (Closing Lemma - Arbieto-Morales [4], pág. 71). *Seja  $M$  uma variedade fechada,  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M$  e  $a \in \mathbb{R}^k$  um elemento Anosov. Existem constantes  $\epsilon$ ,  $C$  e  $\lambda$  dependendo continuamente de  $\phi$  na topologia  $C^1$  e  $a$ , tais que: se, para algum  $x \in M$  e  $t \in \mathbb{R}$*

$$d(\phi(ta, x), x) < \epsilon,$$

*então existem um ponto  $y \in M$  e uma curva diferenciável  $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^k$ , tais que, para todo  $s \in [0, t]$  temos:*

1.  $d(\phi(sa, x), \phi(\gamma(s), y)) < Ce^{-\lambda(\min\{s, t-s\})}d(\phi(ta, x), x)$ ;
2.  $\phi(\gamma(t), y) = \phi(\delta, y)$ , onde  $\|\delta\| < Cd(\phi(ta, x), x)$ ;
3.  $\|\gamma' - a\| < Cd(\phi(ta, x), x)$ .

**Observação 2.6.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma câmara contendo a (elemento Anosov) de uma ação  $\phi$ . Fixado  $a$ , o item 3 do Closing Lemma implica que se,  $d(\phi(ta, x), x)$  é suficientemente pequeno, o vetor tangente  $\gamma'$  pertence a  $\mathcal{C}$ , portanto,  $\gamma$  está contida em  $\mathcal{C}$ . Além disso, se  $d(\phi(ta, x), x)$  é suficientemente pequeno, pelo item 2 do Closing Lemma  $\gamma(t) - \delta$  pertence a  $\mathcal{C}$  (essa diferença tem inclinação próxima a  $\gamma(t)$  uma vez que  $\|\delta\|$  é pequeno). Consequentemente, a órbita de  $y$  é fechada já que  $\gamma(t) - \delta \in G_y$*

$$\phi(\gamma(t) - \delta, y) = \phi(\gamma(t), \phi(-\delta, y)) = \phi(\gamma(t), \phi(-\gamma(t), y)) = \phi(0, y) = y.$$

Definimos agora a noção de ponto não-errante para ações. Esta definição, no caso de ações Anosov permite uma importante aplicação do *Closing Lemma* (Teorema 2.4).

**Definição 2.14** (Ponto não-errante - Definição geral). *Dada uma ação  $\phi$  (não necessariamente Anosov) de um grupo de Lie  $G$  em  $M$ , um ponto  $x \in M$  é chamado de *ponto não-errante* se, para qualquer vizinhança aberta  $U$  de  $x$  e todo conjunto compacto  $K \subset G$ , existe um  $v \in G - K$ , tal que,  $\phi_v(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\Omega$  ou  $\Omega(\phi)$  o conjunto de pontos não-errantes de  $\phi$ .*

O conjunto  $\Omega$  é invariante por  $\phi$ , além disso a fronteira de uma órbita de um ponto  $x \in \Omega$  esta contida em  $\Omega$  (Arbieto-Morales [4]). Para o caso de Ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$  particularizamos a noção de ponto não-errante. Fixado um subcone regular  $\mathcal{C}_0$  definimos o seguinte:

**Definição 2.15** (Ponto não-errante com respeito a um subcone - Ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$ ). Seja  $\phi$  uma ação Anosov e  $\mathcal{C}_0$  um subcone regular. Um ponto  $x \in M$  é chamado de *ponto não-errante com respeito a  $\mathcal{C}_0$*  se, para qualquer vizinhança aberta  $U$  contendo  $x$ , existe um  $v \in \mathcal{C}_0$ ,  $\|v\| > 1$ , tal que,  $\phi_v(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  o conjunto de pontos não-errantes com respeito a  $\mathcal{C}_0$ .

**Proposição 2.3** (Arbieto-Morales [4]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M$ . Então a união de órbitas compactas é densa no conjunto de pontos não errantes  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  com respeito a um subcone regular  $\mathcal{C}_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $x \in \Omega(\mathcal{C}_0)$ ,  $\epsilon > 0$  e  $U_\epsilon$  uma  $(\frac{\epsilon}{2C+1})$ -vizinhança de  $x$  em  $M$  onde  $C$  é igual no Closing Lemma. Então existe  $v \in \mathcal{C}_0$ , tal que,  $\phi_v(U_\epsilon) \cap U_\epsilon \neq \emptyset$ . Agora,  $\phi^{-v}(\phi_v(U_\epsilon) \cap U_\epsilon) \neq \emptyset = \phi^{-v}(\phi^v(U_\epsilon)) \cap \phi^{-v}(U_\epsilon) = U_\epsilon \cap \phi^{-v}(U_\epsilon) \neq \emptyset$ . Além disso, temos que  $\phi_v(U_\epsilon \cap \phi^{-v}(U_\epsilon)) \subset \phi_v(U_\epsilon) \cap U_\epsilon \neq \emptyset$ . Ou seja, fixado um  $y \in U_\epsilon \cap \phi^{-v}(U_\epsilon)$  vale que  $d(\phi_v(y), y) < \frac{2\epsilon}{2C+1}$  e que  $d(y, x) < \frac{\epsilon}{2C+1}$ .

Pelo *Closing Lemma* (Teorema 2.4) e pela Observação 2.6, existe um ponto  $z \in M$  e um  $w \in \mathbb{R}^k$  ( $w = \gamma(t) - \delta$ ), tal que,  $\phi^w(z) = z$  e cuja  $\phi$ -órbita de  $z$  é compacta. Também vale que  $d(y, z) < Cd(\phi_v(y), y) < \frac{C2\epsilon}{2C+1}$ . Assim,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\epsilon}{2C+1} + \frac{C2\epsilon}{2C+1} = \epsilon.$$

Isso mostra que o conjunto das órbitas compactas de  $\phi$  ( $\text{Comp}(\phi)$ ) é denso em  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  (provamos que  $x$  pertence ao fecho deste conjunto intersectado com  $\Omega(\mathcal{C}_0)$ ). ■

**Definição 2.16.** Uma ação Anosov  $\phi$  é dita *topologicamente transitiva* se para quaisquer abertos  $U$  e  $V$  em  $M$ , existe  $v \in \mathcal{C}_0$ , tal que,  $\phi_v(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Outra aplicação importante do Closing Lemma é a *decomposição espectral* para ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$ , cuja demonstração pode ser encontrada em Arbieto-Morales [4] e Barbot-Maquera [6].

**Teorema 2.5** (Decomposição Espectral - ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$ ). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \text{Diff}^r(M)$  uma ação Anosov. Então o conjunto de pontos não errantes  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  é uma união finita  $\Omega(\mathcal{C}_0) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$  de conjuntos invariantes, compactos, transitivos e dois a dois disjuntos  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ).*

**Lema 2.4** (Almeida [2]). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov que preserva volume, então  $\phi$  é topologicamente transitiva.*

**Demonstração:** Dado  $x \in M$  fixamos  $g \in B_r(0)^c$  ( $r \geq 1$ ), tal que,  $g \in \mathcal{C}_0$  o difeomorfismo  $\phi_g : M \rightarrow M$  preserva volume. Fixada uma vizinhança arbitrária  $U$  de  $x$ , pelo *Teorema de Recorrência de Poincaré* para quase todo ponto  $y \in U$  existe  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $\phi(n \cdot g, y) \in U$ . Ou seja,  $\phi_{ng}(U) \cap U \neq \emptyset$ . Como  $ng \in B_{nr}(0)^c \subset B_r(0)^c$ , temos que  $x$  é um ponto não-errante com respeito a  $\mathcal{C}_0$  (Definição 2.15). Assim,  $\Omega(\mathcal{C}_0) = M$  e como  $M$  é conexa segue do teorema da decomposição espectral (Teorema 2.5) que  $\phi$  é topologicamente transitiva (de acordo com a Definição 2.16). ■

No Teorema 2.5 apenas a hipótese de ser uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  é suficiente para obtermos a decomposição espectral. No entanto, para ações de um grupo de Lie em geral existe a noção de ação *Axioma A*, análoga aquela para fluxos.

**Definição 2.17** (Axioma A). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $G$  (grupo de Lie) sobre  $M$ . Dizemos que  $\phi$  é *Axioma A* se, as órbitas compactas são densas em  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  e existe um elemento Anosov  $a$  pertence ao centro de  $G$ .*

**Teorema 2.6** (Decomposição Espectral - ações Anosov de um grupo de Lie  $G$ ). *Seja  $\phi : G \rightarrow \text{Diff}^r(M)$  uma ação Anosov Axioma A. Então o conjunto de pontos não errantes  $\Omega(\mathcal{C}_0)$  é uma união finita  $\Omega(\mathcal{C}_0) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$  de conjuntos invariantes, disjuntos e compactos  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ). Além disso, a ação é transitiva quando restrita a cada  $\Omega_i$ .*

## 2.3 Ações Anosov de $k$ -Contato Generalizadas

Apresentamos nesta seção o conceitos de *estrutura de  $k$ -contato generalizada* que nos fornece uma ação Anosov de contato. Além disso, estudamos algumas propriedades fundamentais dessas ações.

**Definição 2.18** (Almeida [2]). Uma *estrutura de  $k$ -contato generalizada* em uma variedade  $M$  de dimensão  $2n + k$  é uma coleção de  $k$  1-formas  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  (linearmente independentes) e uma decomposição  $TM = I \oplus F$ ,  $\dim(I) = k$ , tais que:

- $F = \bigcap_{i=1}^k \ker(\alpha_i)$ ,
- $d\alpha_j|_F$  é não degenerada,  $\forall 1 \leq j \leq k$ ,
- $\ker(d\alpha_j^n) = I$ ,  $\forall 1 \leq j \leq k$ .

Esta estrutura é denotada por  $(M, \alpha, TM = I \oplus F)$  onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ .

Segue da definição que para todo  $j = 1, \dots, k$  vale que  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge d\alpha_j^n$  é uma forma de volume. Além disso, como  $\dim(F) = 2n$  a condição de  $d\alpha_j|_F$  ser não degenerada é equivalente a  $d\alpha_j^n|_F \neq 0$ .

**Definição 2.19.** O *posto* de uma forma diferencial  $\omega$  no ponto  $y \in M$  é a codimensão do espaço característico

$$\mathcal{C}(\omega)(y) = \{X \in T_p M \mid i_X \omega(y) = 0 \text{ e } i_X d\omega(y) = 0\}.$$

**Lema 2.5** (Almeida [2]). *As 1-formas que definem a estrutura de  $k$ -contato generalizada possuem posto (“rank”) constante.*

**Lema 2.6** (Almeida [2]). *Para cada  $j$ , existe um único campo de vetor  $X_j \in \mathcal{X}(M, I)$  (espaço dos campos de vetores tangentes ao fibrado  $I$ ), tal que,  $\alpha_i(X_j) = \delta_{ij}$ . Dados  $i, j$  com  $i \neq j$  temos que  $[X_i, X_j] = 0$  (cada campo comuta com outro). Chamamos estes campos de vetores de campos de vetores de Reeb.*

A existência de campos de Reeb (comutativos) mostra que estruturas de  $k$ -contato generalizadas estão associadas com uma ação  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M$  (chamada de ação de

$k$ -contato generalizada). Além disso, se a decomposição  $TM = I \oplus F$  é suave, então a ação associada bem como cada campo de vetores  $X_j$  também são suaves. Em Almeida [2] (Exemplo 3.2.7) é mostrada uma forma de construir exemplos de ações de  $k$ -contato generalizadas.

**Definição 2.20.** Uma ação de  $k$ -contato generalizada  $\phi$  é chamada *Anosov de  $k$ -contato generalizada* se  $\phi$  é Anosov.

**Lema 2.7** (Almeida [2]). *Seja  $\phi$  uma ação de  $k$ -contato generalizada numa variedade fechada  $M$ . Então  $\phi$  não admite uma seção transversal global. Isto é, não admite uma subvariedade imersa  $N$  de codimensão  $k$  transversa às órbitas da ação.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $N \subset M$  seja uma seção transversal global, então a restrição de  $d\lambda_j^n$  em  $N$  é uma forma de volume. Uma vez que  $d\lambda_j^n = d(\lambda_j \wedge d\lambda_j^{n-1})$  e pelo Teorema de Stokes  $N$  deve ter volume zero, isso é uma contradição. ■

**Observação 2.7.** *O Lema 2.7 nos diz que uma ação Anosov de  $k$ -contato generalizada não pode ser uma suspensão.*

**Lema 2.8** (Almeida [2]). *A distribuição  $F$  na estrutura de  $k$ -contato generalizada não é integrável.*

**Demonstração:** Suponha que  $F$  seja integrável. Pelo Teorema 2.2 (Frobenius), isso é equivalente a dizer que o colchete  $[F, F] \subset F$ . Tomando dois campos de vetores  $Z$  e  $W$  em  $F$  temos que  $\alpha_j(Z) = \alpha_j(W) = \alpha_j([Z, W]) = 0$ . Assim,

$$d\alpha_j(Z, W) = Z(\alpha_j(W)) - W(\alpha_j(Z)) - \alpha_j([Z, W]) = 0.$$

Isso contradiz o fato de  $d\alpha_j$  ser uma forma não degenerada em  $F$ . ■



## CAPÍTULO 3

# ESTRUTURAS CONFORMES E IRREDUTIBILIDADE

Neste capítulo estudamos mais alguns resultados e conceitos essenciais para obtenção do resultado principal da tese. Na Seção 3.1 mostramos que existe um fibrado de *classes u-conformes*, localmente trivial, sobre  $M$ . Além disso, provamos que a fibra típica desse fibrado é difeomorfa ao quociente  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  (Proposição 3.1). Definimos nessa fibra uma ação de  $GL(n)$  por isometrias (Definição 3.3) que está relacionada com a utilização de métricas invariantes e posteriormente, nos capítulos seguintes, com o estudo de ações Anosov *u-conformes*. O Lema 3.4 determinou a existência de discos mínimos contendo conjuntos limitados não vazios em  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ , no Capítulo 4 essa será uma ferramenta essencial para obtenção de uma *estrutura u-conforme* invariante.

Na Seção 3.2 deste capítulo apresentamos o conceito de *irredutibilidade* para ações Anosov (Definição 3.6) e mostramos que ações Anosov de *k-contato generalizadas* são irredutíveis (Teorema 3.5). A irredutibilidade de uma ação Anosov nos garante a existência de uma *medida de Margulis* em  $M$ .

### 3.1 Fibrado de Estruturas Conformes

Seja  $\xi$  um subfibrado vetorial de  $TM$  com fibra típica  $\mathbb{R}^n$ .

1. Um *produto interno*  $g$  em  $\xi$  é uma escolha  $C^r$  ( $r \geq 0$ )  $g_x : \xi_x \times \xi_x \rightarrow \mathbb{R}$  de produtos internos.
2. Dois produtos internos em  $\xi$ ,  $g$  e  $g'$  são *conformalmente equivalentes* se existe uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  suave, tal que,  $g = f^2 g'$  (denotamos por  $g \sim g'$  essa *relação de equivalência*).

3. Uma classe de equivalência  $\tau = [g]$  é chamada de *estrutura conforme de  $M$  ao longo de  $\xi$*  (ou simplesmente *estrutura  $\xi$ -conforme*).

Dada uma estrutura  $\xi$ -conforme  $\tau$ , é sempre possível representar a classe  $\tau(x)$  por um elemento cuja matriz possui determinante igual a 1 (Tukia [47] - Seção D). Portanto, dado  $x_0 \in M$  o conjunto das classes conformes em  $\xi_{x_0}$  é identificado com:

$$\mathcal{C}_{x_0}^\xi = \{A \mid A = A^T > 0; \det(A) = 1\}. \quad (3.1)$$

Denotamos por  $\mathfrak{F}_{x_0}^\xi = \{A \mid A = A^T > 0\}$  o conjunto das matrizes simétricas e definidas positivas, logo  $\mathcal{C}_{x_0}^\xi \subset \mathfrak{F}_{x_0}^\xi$ . Mostraremos na proposição a seguir que  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M)$  onde

- $\mathcal{C}^\xi = \{(x, [g_x]) \mid [g_x] = \text{classe de produtos internos equivalentes em } \xi_x\}$ , e
- $\pi$  é a projeção canônica,

é um fibrado localmente trivial, chamado de *fibrado de classes  $\xi$ -conformes*.

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longleftarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\xi & \longleftarrow & \frac{SL(n)}{SO(n)} \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Figura 3.1: Fibrado de classes  $\xi$ -conformes (localmente trivial).

**Proposição 3.1.** *A tripla  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M)$  é um fibrado localmente trivial com fibra típica  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ .*

**Demonstração:** Dado  $x_0 \in M$ , mostraremos inicialmente que existe um difeomorfismo entre  $\mathcal{C}_{x_0}^\xi$  e  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ . De fato, definimos a seguinte aplicação:

$$f : \begin{array}{ccc} \frac{SL(n)}{SO(n)} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{x_0}^\xi \\ [P] & \longmapsto & PP^T \end{array},$$

onde

$$[P] = \{Q \in SL(n) \mid \exists X \in SO(n); Q = PX\} \quad (\text{classe de } P \in SL(n)).$$

A matriz  $PP^T$  tem determinante igual a 1, uma vez que  $\det(PP^T) = \det(P) \det(P^T) = 1$  ( $P \in SL(n, \mathbb{R})$ ). A matriz  $PP^T$  também é simétrica:  $(PP^T)^T = (P^T)^T(P^T) = PP^T$ . Além disso,  $PP^T$  é *definida positiva*. De fato, dado  $x \in \mathbb{R}^n$  temos que  $x^T PP^T x = \langle x, PP^T x \rangle = \langle P^T x, P^T x \rangle = \|P^T x\|^2 > 0$ , sempre que  $x \neq 0$ . Assim,  $PP^T$  pertence a  $\mathcal{C}_{x_0}^\xi$ .

A aplicação  $f$  independe do representante da classe: seja  $Q \in [P]$ , então existe um elemento  $X \in SO(n)$ , tal que,  $Q = PX$ . Temos  $[Q] \mapsto (Q)(Q)^T = PXX^T P^T = PP^T$  ( $X \in O(n)$ , logo  $XX^T = I_n$ ).

Sobrejetividade de  $f$ : Dada uma matriz  $A \in \mathcal{C}_{x_0}^\xi$ , queremos escrevê-la da forma  $A = PP^T$  para algum  $P \in SL(n)$ . A matriz  $A$  é diagonalizável (simétrica) e pelo *Teorema Espectral*, existe uma matriz ortogonal  $Q$  ( $Q^T = Q^{-1}$ ), tal que:  $A = Q^T A_0 Q$ , onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definimos a seguinte matriz:

$$P_A = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Fazendo  $P_A(P_A)^T = A_0$ , temos que:  $A = Q^T P_A(P_A)^T Q = Q^T P_A(Q^T P_A)^T$ . Se, denotarmos  $Q^T P_A = P$ , vale que  $A = PP^T$ .

Injetividade de  $f$ : Dadas as imagens  $PP^T = QQ^T$  devemos mostrar que  $[P] = [Q]$  em  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  (ou seja, existe  $X \in SO(n)$ , tal que,  $Q = PX$ ). Isso é verdade, pois escrevendo  $P = Q[Q^T(P^T)^{-1}]$  a matriz  $R = Q^T(P^T)^{-1}$  é ortogonal:

$$\begin{aligned} RR^T &= (Q^T(P^T)^{-1})(Q^T(P^T)^{-1})^T = Q^T(P^T)^{-1}((P^T)^{-1})^T(Q^T)^T \\ &= Q^T(P^T)^{-1}P^{-1}Q = Q^T(PP^T)^{-1}Q = Q^T(QQ^T)^{-1}Q \\ &= Q^T(Q^T)^{-1}Q^{-1}Q = I_n. \end{aligned}$$

A seguir estudamos as trivializações locais e mudanças de coordenadas de  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M, \frac{SL(n)}{SO(n)})$ . Denotamos por  $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$  a cobertura de  $M$  dada pelas trivializações de  $\xi$ .

Dados  $i, j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  denotamos por  $\Phi_{ij}(x, v) = (x, h_{ij}(x, v))$  a aplicação que faz a mudança de coordenada  $\Phi : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n$  com  $x \in U_i \cap U_j$ . Neste caso  $h_{ij}(x, v) = h_{ij}^x(v)$  é um isomorfismo linear  $h_{ij}^x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para o fibrado  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M, \frac{SL(n)}{SO(n)})$ , usamos a cobertura  $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$  acima. Uma vez que para cada  $x_0 \in M$  a fibra  $\xi_{x_0}$  é isomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , podemos sempre pensar em  $\mathcal{C}_{x_0}^\xi$  identificado com o conjunto das classes conformes de  $\mathbb{R}^n$ .

Ou seja, para a cobertura  $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$  de  $M$  existem difeomorfismos

$$f_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \frac{SL(n)}{SO(n)}, \quad (i \in \Lambda)$$

que tornam os diagramas abaixo comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_i} & U_i \times \frac{SL(n)}{SO(n)} \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

Isto é  $\pi = p \circ f_i$  ( $p$  é a projeção no primeiro fator). Agora, dados  $i, j \in \Lambda$ , tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  definimos uma aplicação  $\Psi_{ij}(x, \tau) = (x, g_{ij}(x, \tau))$ ,  $x \in U_i \cap U_j$  semelhante aquela  $\Phi_{ij}(x, v) = (x, h_{ij}(x, v))$  definida para a mudança de coordenada do fibrado  $E^{uu}$ .

Para isso, observamos que o fato de  $h_{ij}(x, y) = h_{ij}^x(y)$  ser um isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  ( $h_{ij}^x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ), esta aplicação preserva produtos internos, no seguinte sentido: dado um produto interno  $g$  em  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir um novo produto interno  $\mu$  fazendo  $\mu(v, w) = g(h_{ij}^x(v), h_{ij}^x(w))$ .

Além disso, para um escalar  $\lambda$ , vale que  $\lambda\mu(v, w) = \lambda g(h_{ij}^x(v), h_{ij}^x(w))$ . Definimos assim uma aplicação  $g_{ij}^x : \frac{SL(n)}{SO(n)} \rightarrow \frac{SL(n)}{SO(n)}$  que preserva classes e temos os seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ & \swarrow f_i & \searrow f_j \\ (U_i \cap U_j) \times \frac{SL(n)}{SO(n)} & \xrightarrow{\Psi_{ij}} & (U_i \cap U_j) \times \frac{SL(n)}{SO(n)} \end{array}$$

Ratificamos portanto que  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M, \frac{SL(n)}{SO(n)})$  é um fibrado localmente trivial. ■

**Definição 3.1.** Uma seção  $\tau$  do fibrado  $(\mathcal{C}^\xi, \pi, M, \frac{SL(n)}{SO(n)})$  é chamada de *estrutura  $\xi$ -conforme*.

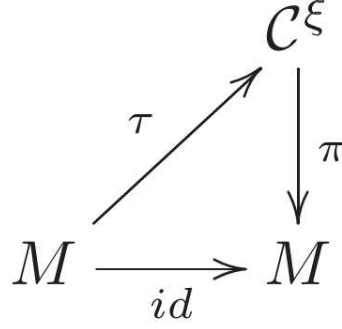


Figura 3.2: Fixado  $x \in M$ ,  $\tau(x)$  é um elemento de  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ .

**Observação 3.1** (Mass [39]). No caso em que  $n = 2$  identificamos  $\mathcal{C}_{x_0}^\xi$  com o espaço hiperbólico de  $\dim(3)$ .

Dada uma ação Anosov  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ , no caso particular em que  $\xi = E_a^\sigma$  ( $\sigma = ss, uu$ ) denotamos por  $\mathcal{C}_x^\sigma$  a fibra em  $x \in M$ , por  $\mathcal{C}^\sigma$  o espaço total e chamaremos o fibrado  $(\mathcal{C}^{uu}, \pi, M, \frac{SL(n)}{SO(n)})$  de *fibrado de classes  $\sigma$ -conformes* ( $\sigma = ss, uu$ ). Dizemos ainda que uma seção  $\tau$  desse fibrado é uma *estrutura  $\sigma$ -conforme* sobre  $M$  ( $\sigma = ss, uu$ ).

A seguir definimos ações naturais de  $GL(n)$  em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  e  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$ . Particularizamos daqui em diante ao caso  $\xi = E_a^{uu}$  com  $a \in C_0$  um cone Anosov fixo. Isso se faz necessário, pois no Capítulo 4 estaremos interessados em ações Anosov *uniformemente u-quaseconformes* (Definição 4.1).

**Definição 3.2.** Dado  $x \in M$ , definimos uma ação do grupo  $GL(n)$  em  $\mathfrak{F}_x^{uu}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi : GL(n) \times \mathfrak{F}_x^{uu} &\longrightarrow \mathfrak{F}_x^{uu} \\ (U, T) &\longmapsto UTU^T \end{aligned} \quad .$$

Analogamente a demonstração feita no Lema 3.1 podemos exibir um difeomorfismo entre  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$  e  $\frac{GL(n)}{O(n)}$ . Para o que segue precisamos definir uma métrica em  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$ . Começamos definimos em  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$  a seguinte forma diferenciável:  $ds^2 = tr(T^{-1}dT T^{-1}dT) = tr(T^{-1}dT)^2$ , onde  $dT$  é uma matriz de diferenciais, ou seja,  $dT = (dt_{ij})$ .

**Lema 3.1** (Mass [39]). *A forma  $ds^2$  é invariante pela ação de  $GL(n)$  em  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$ . Além disso,  $ds^2$  é positiva definida o que  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$  uma variedade Riemanniana.*

**Demonstração:** Um elemento  $U \in GL(n)$  age em  $T \in \mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$  da seguinte forma:  $T \mapsto UTU^T$ . Para uma matriz  $dT$ :  $dT \mapsto UdTU^T$ . Uma vez que  $(UTU^T)^{-1} = (U^T)^{-1}T^{-1}U^{-1}$  temos que a forma diferencial  $T^{-1}dT$  é transformada pela ação de  $U$  em

$$(UTU^T)^{-1}UdTU^T = (U^T)^{-1}T^{-1}dTU^T,$$

daí

$$\begin{aligned} \text{tr}(((U^T)^{-1}T^{-1}dTU^T)((U^T)^{-1}T^{-1}dTU^T)) &= \text{tr}((T^{-1}dT T^{-1}dT)(U^T(U^T)^{-1})) \\ &= \text{tr}(T^{-1}dT T^{-1}dT) \\ &= \text{tr}(T^{-1}dT)^2 \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

Portanto  $ds^2$  é de fato invariante pela ação de  $GL(n)$ . Para ver que esta forma é definida positiva definimos  $W = W^T = (\sqrt{T})^{-1}dT(\sqrt{T})^{-1} = (w_{ij})$ , então

$$ds^2 = \text{tr}(T^{-1}dT)^2 = \text{tr}(WW^T) = \sum_{ij} w_{ij}^2 \geq 0.$$

■

O teorema a seguir, devido a Maas [39] (pág. 27) nos fornece uma expressão para medir a distância entre dois pontos  $T_0$  e  $T_1$  em  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$ .

**Teorema 3.1** (Maas [39]). *Sejam  $T_0$  e  $T_1$  pontos arbitrários em  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$ . Existe uma única curva  $\gamma$  de comprimento mínimo ligando  $T_0$  a  $T_1$ . O comprimento de  $\gamma$  é dado por:*

$$\left( \sum_{i=1}^n (\log t_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde  $t_1, \dots, t_n$  denotam os zeros de  $\det(tT_0 - T_1)$ .

No caso em que  $T_0 = I_n$  temos que  $t_1 = \lambda_1, \dots, t_n = \lambda_n$  são os autovalores de  $T_1$ . Denotamos a distância entre  $T_1$  e  $T_0$  por  $d(T_1, T_0)$ . Em Mass [39] é provado que  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  é uma *subvariedade geodésica* de  $\mathfrak{F}_{x_0}^{uu}$  (ou seja, dados dois pontos  $A_0$  e  $A_1$  em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  a geodésica ligando  $A_0$  a  $A_1$  pertence a  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$ ).

**Definição 3.3** (Ação por Isometrias). Definimos uma ação do grupo  $GL(n)$  em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi : GL(n) \times \mathcal{C}_x^{uu} &\longrightarrow \mathcal{C}_x^{uu} \\ (U, T) &\longmapsto U[A] = |\det(U)|^{\frac{-2}{n}} UTU^T \end{aligned} \quad .$$

**Observação 3.2.** O termo  $|\det(U)|^{\frac{-2}{n}}$  é necessário para termos as igualdades:

$$\begin{aligned} \det(U[A]) &= (|\det(U)|^{\frac{-2}{n}})^n \det(UAU^T) \\ &= |\det(U)|^{-2} (\det(U))^2 \det(A) = 1. \end{aligned}$$

Ou seja, que  $GL(n)$  realmente age  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$ .

Se adicionarmos o termo  $\frac{\sqrt{n}}{2}$  a  $ds^2$  obtemos  $ds^2 = \frac{\sqrt{n}}{2} \text{tr}(A^{-1}dA)^2$ . A distância de  $I_n$  a  $A \in \mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  se torna:

$$d(I_n, A) = \frac{\sqrt{n}}{2} ((\log \lambda_1)^2, \dots, (\log \lambda_n)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**Observação 3.3.** Podemos por conveniência definir a ação de acima com a transposta pela esquerda, ou seja,  $U[A] = |\det(U)|^{\frac{-2}{n}} U^T T U$ .

**Lema 3.2.** Dado  $U \in GL(n)$  a aplicação  $A \mapsto U[A]$  (dada pela ação de  $GL(n)$  em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$ ) é uma isometria.

**Demonstração:** Mostraremos que  $d(A_0, A_1) = d(U[A_0], U[A_1])$ . De fato,

$$U[A_0] = |\det(U)|^{\frac{-2}{n}} (UA_0U^T) \quad \text{e} \quad U[A_1] = |\det(U)|^{\frac{-2}{n}} (UA_1U^T).$$

Fazendo  $(U[A_0])^{-1}(U[A_1]) = B^{-1}A_0^{-1}(B^T)^{-1}B^T A_1 B = B^{-1}(A_0^{-1}A_1)B$  temos uma conjugação entre  $(A_0^{-1}A_1)$  e  $(U[A_0])^{-1}(U[A_1])$ . Assim, vale que

$$\begin{aligned} d(A_0, A_1) &= d(I_n, A_0^{-1}A_1) \\ &= d(I_n, (U[A_0])^{-1}(U[A_1])) \\ &= d(U[A_0], U[A_1]). \end{aligned}$$

Como a distância de uma matriz a identidade depende apenas de seus autovalores (Teorema 3.1) e a conjugação preserva autovalores, as igualdades acima fazem sentido. ■

Algumas vezes é importante definir em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  uma segunda métrica  $d'$  equivalente a  $d$ , tal que, em dimensão  $n = 2$  vale que  $d = d'$  (esta igualdade acontece quando adicionamos o fator  $\frac{\sqrt{n}}{2}$ ) a  $ds^2$ . A distância  $d'$  é assim definida:

**Definição 3.4** (Tukia [47]). Dados  $I_n$  e  $A$  em  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$ ,

$$d'(I_n, A) = \frac{n}{2} \max(\log \lambda_{\max}^A, \log \frac{1}{\lambda_{\min}^A}),$$

em que  $\lambda_{\max}^A$  é o maior e  $\lambda_{\min}^A$  é o menor autovalor de  $A$  respectivamente.

**Lema 3.3** (Tukia [47]). *As métricas  $d$  e  $d'$  são equivalentes.*

Fixado  $x_0 \in M$ , listamos abaixo mais alguns resultados importantes sobre a fibra  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$ :

1. O espaço  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  é uma variedade Riemanniana *globalmente simétrica* (Ver Helgason [21], pág. 518).
2. O espaço  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  é do tipo não compacto (“*non-compact type*”), ou seja, a álgebra de Lie simétrica ortogonal associada a este espaço (Ver Helgason [21], pág. 213) é do tipo não compacta (Ver Helgason [21], pág. 230). O cálculo dessa álgebra de Lie mencionada pode ser obtido em Helgason [21], pág. 451.
3. O espaço  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  possui curvatura seccional negativa (Ver Helgason [21], pág. 213).
4. Dos 3 fatos anteriores temos que:  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e curvatura negativa.

Para demonstrar o Lema a seguir fazemos algumas definições e notações preliminares. Seja  $N$  uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura negativa, então todas as geodésicas de  $N$  não se intersectam e são todas homeomorfas a  $\mathbb{R}$ .

Quaisquer dois pontos  $x, y \in N$  podem ser conectados por uma única geodésica e denotamos este segmento fechado de geodésica por  $xy$  (ou seja,  $d(x, y) =$  comprimento de  $xy$ ). Dados  $x \in N$  e  $r > 0$ , entendemos como disco, o disco fechado  $D(x, r) = \{z \in N \mid d(z, x) \leq r\}$ . (todos esses resultados podem ser encontrados em Helgason [21]).

Se  $z \in N$ ,  $x \neq z \neq y$ , denotamos por  $\theta(z, x, y) \in [0, \pi]$  o ângulo entre  $zx$  e  $zy$ . Nesta situação, um resultado de Helgason [21] diz que:

$$d(x, y)^2 \geq d(z, x)^2 + d(z, y)^2 - 2d(z, x)d(z, y) \cos(\theta(z, x, y)). \quad (3.2)$$



**Lema 3.4.** *Seja  $N$  uma variedade riemanniana simplesmente conexa, completa e de curvatura negativa. Seja  $X \subset N$  um subconjunto não vazio e limitado. Então existe um disco  $D(p_X, r_X)$  contendo  $X$ , unicamente determinado e com raio mínimo.*

**Demonstração** Podemos assumir que  $X$  é diferente de um ponto (para evitarmos raio zero). Definimos

$$r = \inf\{r' \mid D(y, r') \supset X \text{ para algum } y \in N\} > 0.$$

Afirmamos que existe no máximo um  $y \in N$ , tal que,  $D(y, r) \supset X$ . De fato, suponha por absurdo que exista  $z \in N$ ,  $z \neq y$ , tal que,  $D(z, r) \supset X$ . Seja  $w$  o ponto médio do segmento  $zy$  e seja  $D = D(y, r) \cap D(z, r)$ . Fixamos  $u \in D$ , tal que,  $u \neq w$  (ver Figura 3.3).

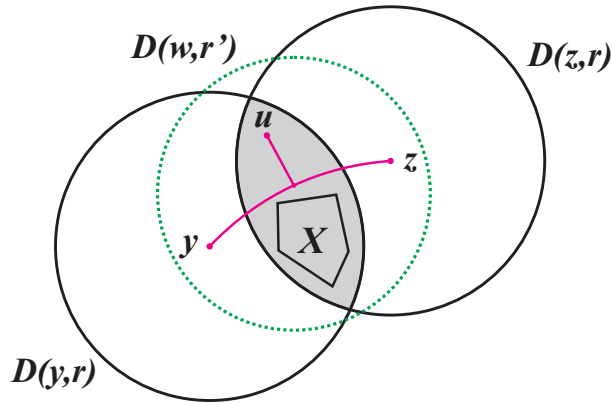


Figura 3.3: Situação descrita acima.

Então, ou  $\theta(w, u, y) \geq \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta(w, u, z) \geq \frac{\pi}{2}$ . Supomos que o primeiro caso aconteça. Pela Desigualdade (3.2) acima (provada por Helgason [21]), temos:

$$r^2 \geq d(y, u)^2 + d(w, u)^2 - 2d(w, y)d(w, u) \cos(\theta(w, u, y)) > d(w, u)^2.$$

Assim, para cada  $u \in D$ ,  $d(w, u) < r$ . Pela compacidade de  $D$ , existe uma distância positiva entre  $D$  e  $D(w, r)$ , ou seja, podemos encontrar um  $r' < r$ , tal que,  $X \subset D \subset D(w, r')$ . Isso é um absurdo pela definição de  $r$ . ■

No que segue utilizaremos o lema anterior para o caso em que  $N = \frac{SL(n)}{SO(n)}$ . A demonstração do Lema 3.4 também pode ser encontrada em Tukia [47] (pág. 334).

## 3.2 Irredutibilidade e Medida de Margulis para Ações Anosov

Nesta seção mostramos resultados a respeito de ações irredutíveis bem como utilizamos esse conceito para garantir a existência de uma medida de Margulis. Inicialmente apresentamos a noção de *irredutibilidade* de uma ação Anosov no contexto de ação Anosov de *codimensão-1* (ou seja,  $\dim E_a^{ss}$  ou  $\dim E_a^{uu}$  é igual a 1,  $a$  elemento Anosov num cone  $\mathcal{C}_0$ ). Em geral, fixamos  $E_a^{uu}$  como tendo dimensão 1 uma vez que  $E_{\mathcal{C}_0}^{uu} = E_{-\mathcal{C}_0}^{ss}$  e  $E_{\mathcal{C}_0}^{ss} = E_{-\mathcal{C}_0}^{uu}$ .

**Definição 3.5.** Uma ação Anosov  $\phi$  de codimensão-1 é dita *irredutível* se para qualquer  $g \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  com  $\phi_g(x) = x$ , a aplicação de holonomia  $Hol_\gamma$ , ao longo do caminho  $\gamma = \{\phi_{sg}(x) \mid s \in [0, 1]\}$  de  $\mathcal{F}_a^s$ , é uma contração topológica ou uma expansão topológica.

**Observação 3.4.** Mesmo quando uma ação Anosov de codimensão-1 não for irredutível, podemos associar a essa uma ação irredutível de codimensão-1 através de recobrimento finito (Barbot-Maquera [6]).

O resultado a seguir nos dá uma caracterização das órbitas de uma ação Anosov irredutível e de codimensão-1.

**Teorema 3.2** (Barbot-Maquera [6]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov irredutível e de codimensão-1. Então toda órbita não compacta de  $\phi$  é um plano, ou seja, difeomorfa a  $\mathbb{R}^k$ .*

De forma geral, sem restringir apenas ao caso de codimensão-1 o termo *irredutível* aparece nos trabalhos de A. Katok e colaboradores tais como Kalinin-Spatzier [29], Qian [45] entre outros. Sempre que mencionarmos irredutibilidade, será nos termos da Definição 3.6 a seguir e tem a ver com a *minimalidade* das folheações fortes.

**Definição 3.6.** Uma ação Anosov é dita *irredutível* se  $\overline{\mathcal{F}_a^{uu}(x)} = M$  em relação a algum elemento Anosov  $a$  (logo, para todos elementos regulares num mesmo cone) para algum  $x \in M$ .

**Lema 3.5** (Qian [45]). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov que preserva volume. Se  $\phi$  é irredutível em relação a algum elemento Anosov  $a$  e para algum  $x \in M$ , então  $\overline{\mathcal{F}_a^{uu}(y)} = M$  para todo  $y \in M$ .*

O Teorema 3.3 a seguir distingue ações Anosov *irredutíveis* de suspensões sob certas condições.

**Definição 3.7.** Dado um subcone regular  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^k$  e um ponto  $x \in M$ , definimos a *órbita de  $x$  com respeito a  $\mathcal{C}$*  como sendo o seguinte conjunto:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = \{\phi(v, x) \mid v \in \mathcal{C}\}.$$

**Definição 3.8.** Uma ação Anosov  $\phi$  é *transitiva em subcones* se, para todo subcone regular  $\mathcal{C}$ , existe um  $x \in M$ , tal que,  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(x)$  é denso em  $M$ .

**Teorema 3.3** (Lopes [37]). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Se existir algum subcone regular  $\mathcal{C}$ , tal que,  $\Omega(\mathcal{C}) = M$ , então existem duas possibilidades:*

1. *As folheações fortes são minimais, ou seja,  $\overline{\mathcal{F}_a^{uu}(x)} = M$  (respec.  $\overline{\mathcal{F}_a^{ss}(x)} = M$ ) em relação a todo elemento Anosov e para todo  $x \in M$  (ação irredutível), ou;*
2. *A ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta de codimensão  $k$ .*

Ações Anosov de  *$k$ -contato generalizadas* (Capítulo 2 - Definição 2.20) fazem parte dos ingredientes principais do resultado principal da tese. Essas ações, em especial, preservam uma forma de volume. Assim, o Lema 3.6 a seguir possui aplicação imediata nesse contexto permitindo nova interpretação do Teorema 3.3.

**Lema 3.6.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov que preserva volume. Então  $\phi$  é transitiva em subcones regulares.*

**Demonstração:** Suponha que  $\phi$  não seja transitiva em subcones. Isso significa que existe um subcone  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$  (cone Anosov), tal que, para todo  $x \in M$ ,  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(x)$  não é denso em  $M$ . Assim, existe um aberto não vazio (vizinhança produto local - Definição 2.3)  $V$  contida no complementar de  $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(x)}$ .

No entanto, como  $\phi$  preserva volume, tomando uma direção Anosov  $g \in \mathcal{C}$ , pelo Teorema de Recorrência de Poincaré  $\phi(ng, y)$  deve intersectar  $V$  para quase todo  $y \in V$  (Obs.:  $ng \in \mathcal{C}$ ). Obtemos assim uma contradição. ■

Agora, de posse do Lemas 3.6 e utilizando o fato de que uma ação Anosov que preserva volume satisfaz  $\Omega(\mathcal{C}_0) = M$  (Lema 2.4), o Teorema 3.3 pode ser enunciado seguinte forma.

**Teorema 3.4.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M$  uma ação Anosov que preserva volume. Então existem duas possibilidades:*

1. *As folheações fortes são minimais, ou seja,  $\overline{\mathcal{F}_a^{uu}(x)} = M$  (respec.  $\overline{\mathcal{F}_a^{ss}(x)} = M$ ) em relação a todo elemento Anosov e para todo  $x \in M$  (ação irredutível), ou;*
2. *A ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta de codimensão  $k$ .*

**Teorema 3.5.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M$  uma ação Anosov suave de  $k$ -contato generalizada. Então,  $\phi$  é irredutível, ou seja,  $\overline{\mathcal{F}_a^{uu}(x)} = M$  em relação a todo elemento Anosov e para todo  $x \in M$  (a folheação forte instável é minimal).*

A demonstração do teorema anterior é consequência do Teorema 3.4 onde, com a hipótese da ação ser de  $k$ -contato generalizada distinguimos ações Anosov irredutíveis daquelas ações Anosov que são suspensões. Isso é possível devido ao fato de que ações de  $k$ -contato generalizadas não admitem seções transversais globais (Almeida [2]).

No contexto de fluxos, sabemos de Katok-Hasselblatt [31] que dado um fluxo Anosov topologicamente mixing, existe uma única medida invariante de entropia máxima (chamada de medida de Bowen-Margulis), cuja medida condicional restrita a  $\mathcal{F}^{uu}$  e a  $\mathcal{F}^{ss}$  possui respectivamente expansão uniforme e contração uniforme. Em Carrasco-Rodriguez-Hertz [12] é introduzido o conceito e provada a existência de uma medida no contexto de ações Anosov, semelhante aquela de Bowen-Margulis para fluxos Anosov (exigindo-se irredutibilidade). Especificamente, são mostrados os seguintes resultados.

**Teorema 3.6** (Carrasco-Rodriguez-Hertz [12]). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma isometria central (em particular um difeomorfismo dado por um elemento Anosov - Definição em Carrasco-Rodriguez-Hertz [12]) de classe  $C^2$ , tal que, cada folha de  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  seja densa (irredutibilidade no caso de ações Anosov). Seja  $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação Hölder (potencial) que satisfaz:*

1.  *$\varphi$  é contante ao longo da folheação central (órbitas no caso de ações Anosov), ou*

2.  $\varphi = -\log \det Df|E^{uu}$  (Caso SRB).

Então, existe  $P \in \mathbb{R}$  e famílias de medidas  $\mu^{uu} = \{\mu_x^{uu}\}_{x \in M}$ ,  $\mu^{ss} = \{\mu_x^{ss}\}_{x \in M}$ ,  $\mu^u = \{\mu_x^u\}_{x \in M}$  e  $\mu^s = \{\mu_x^s\}_{x \in M}$ , tais que, para todo  $x \in M$ :

- A medida  $\mu^\sigma$  é uma medida de Radon em  $\mathcal{F}^\sigma(x)$  de suporte total (relativo), tal que, dado  $y \in \mathcal{F}^\sigma(x)$  implica que  $\mu_x^\sigma = \mu_y^\sigma$  ( $\sigma \in \{ss, uu, s, u\}$ ).

- As seguintes propriedades de quaseinvariância são satisfeitas:

1.  $\mu_{f(x)}^\sigma = e^{(P-\varphi)} f_* \mu_x^\sigma$ ,  $\sigma \in \{uu, u\}$ .

2.  $\mu_{f(x)}^\sigma = e^{(\varphi-P)} f_* \mu_x^\sigma$ ,  $\sigma \in \{ss, s\}$ .

Como consequência do teorema 3.6 é mostrado em Carrasco-Rodriguez-Hertz [12] (Teorema 3.1) que existe uma medida ergódica de probabilidade  $m_\varphi$  em  $M$ , invariante por  $f$ . Além disso, fixado  $x \in M$  e uma caixa folheada de  $\mathcal{F}^{uu}$  contendo  $x$  é mostrado ainda que  $m_\varphi|U$  é equivalente a medida produto  $\mu_x^{uu} \times \mu_x^s$ . Tomamos  $\varphi$  constante igual a zero quando  $f$  for um difeomorfismo associado a um elemento Anosov de uma ação Anosov. Neste caso, as folheações fracas possuem holonomias quaseinvariantes (preservam conjuntos de medida nula).

**Teorema 3.7** (Birkhoff). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação mensurável e  $\mu$  uma probabilidade invariante por  $f$ . Dado qualquer conjunto mensurável  $E \subset M$ , o tempo médio de visita*

$$\tau(E, x) = \lim_n \frac{1}{n} \#\{j = 0, 1, \dots, n-1 \mid f^j(x) \in E\}$$

*existe em  $\mu$ -quase todo ponto de  $M$ . Além disso  $\int \tau(E, x) d\mu(x) = \mu(E)$ .*

## CAPÍTULO 4

# AÇÕES ANOSOV UNIFORMEMENTE $u$ -QUASECONFORMES

Neste capítulo estudamos resultados e propriedades de ações Anosov irredutíveis e *uniformemente  $u$ -quaseconformes*.

Na Seção 4.1 definimos os conceitos de ação Anosov *uniformemente  $\sigma$ -quaseconforme*, ações Anosov  *$\sigma$ -conformes* ( $\sigma = u, s$ ), ações Anosov *conformes* e a *invariância* de uma estrutura conforme em relação a  $\phi$ . Mostramos uma caracterização da invariância através de uma base de elementos Anosov.

Na Seção 4.2 mostramos que ações Anosov irredutíveis e uniformemente  $u$ -quaseconformes são de fato  $u$ -conformes (Teorema B). Mais precisamente, existe uma métrica restrita ao fibrado instável forte *Hölder contínua, mensurável, suave* em cima das folhas fortes e invariante por  $\phi$ , tal que, com essa métrica a ação Anosov é  $u$ -conforme. Para isso, primeiramente definimos determinados conjuntos fechados em cada uma das fibras do *fibrado de classes  $u$ -conformes* e em seguida definimos uma estrutura conforme utilizando o centro de discos *mínimos* contendo esses conjuntos. Num conjunto de medida total essa estrutura conforme nos dá as propriedades mencionadas acima e sua extensão fornece a métrica desejada.

### 4.1 Ações Anosov Uniformemente $u$ -quaseconformes

Seja  $\phi$  uma ação Anosov, fixado um cone Anosov  $\mathcal{C}_0$  seja  $a \in \mathcal{C}_0$  um elemento Anosov, por definição  $TM = E_a^{uu} \oplus T\phi \oplus E_a^{ss}$ . Pela Proposição 2.2 (iii) temos que tal decomposição é constante em  $\mathcal{C}_0$ , isto é,  $E_a^{\sigma\sigma} = E_b^{\sigma\sigma}$  ( $\sigma = u, s$ ) para todo  $b \in \mathcal{C}_0$  e os fibrados  $E^{\sigma\sigma}$  ( $\sigma = u, s$ ) são invariantes pela derivada  $D\phi_a$  para todo  $a \in \mathcal{C}_0$ .

Fixado um elemento Anosov  $a \in \mathcal{C}_0$  consideramos a família de difeomorfismos indu-

zidos pela ação  $\{\phi_{ta}\}_{t \in \mathbb{R}}$ , isto define um fluxo que denotamos por  $\phi_a^t$  ( $\phi_a^t(x) = \phi(ta, x)$ ), chamado *fluxo induzido* pelo elemento Anosov  $a \in \mathcal{C}_0$ .

Para definirmos ações Anosov uniformemente  $u$ -quaseconformes primeiro definimos *difeomorfismos quaseconformes* (uma referência: Väisälä [49]). Dado um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , dizemos que  $f$  é *quaseconforme* se

$$H(x, f) = \frac{\max_{h \in TM, |h|=1} |Df(x) \cdot h|}{\min_{h \in TM, |h|=1} |Df(x) \cdot h|} \quad (4.1)$$

é limitado.

Historicamente, aplicações quaseconformes em dimensão dois foram estudadas por Grötzsch, [19] na década de 20 do século passado. Contribuições em dimensões maiores foram feitas por Lavrentiev [35], Markušević [40] e Kreines [33]. Aspectos gerais da teoria podem ser encontrados em Ahlfors [1] e Lehto-Virtanen [36].

A noção de aplicações *quaseconformes* também é definida de maneira topológica. De fato, dado um *homeomorfismo*  $f : M \rightarrow M$ , para cada  $r > 0$  definimos:

$$L(x, r, f) = \sup_{y \in S(x, r)} d(f(y), f(x)), \quad (4.2)$$

$$l(x, r, f) = \inf_{y \in S(x, r)} d(f(y), f(x)), \text{ e} \quad (4.3)$$

a *dilatação linear*

$$\mathcal{H}(x, f) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, r, f)}{l(x, r, f)}, \quad (4.4)$$

onde  $S(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) = r\}$  e  $d$  é a distância dada pela métrica riemanniana. Em Väisälä [49] (Corolário 22.4) está demonstrado que a dilatação (4.4) é limitada sempre que  $f$  for um difeomorfismo quaseconforme, de acordo com a Definição 4.5. Reciprocamente, se a dilatação linear  $\mathcal{H}(x, f)$  for limitada para um difeomorfismo  $f$ , em Väisälä [49] (Seção 34) é demonstrado que  $f$  será quaseconforme.

Podemos generalizar a definição de quaseconformidade nos restringindo a um subfibrado. Isto é, dado um subfibrado  $\xi = (E, \pi, M, \mathbb{R}^m)$  de  $TM$ , invariante pelas derivadas de um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , dizemos que a aplicação  $f$  é  $\xi$ -*quaseconforme* se

$$H(x, f) = \frac{\max_{h \in \xi, |h|=1} |Df(x) \cdot h|}{\min_{h \in \xi, |h|=1} |Df(x) \cdot h|} \quad (4.5)$$

for limitado.

**Definição 4.1.** Dizemos que uma ação Anosov  $\phi$  é *uniformemente  $u$ -quaseconforme* se existem um cone Anosov  $\mathcal{C}_0$  e  $L \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$K_a(x, t) = \frac{\max_{v \in E^{uu}, \|v\|=1} \|D\phi_a^t(x)(v)\|}{\min_{v \in E^{uu}, \|v\|=1} \|D\phi_a^t(x)(v)\|} \leq L, \quad \forall x \in M, \forall a \in \mathcal{C}_0 \text{ e } t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Desta definição temos em particular que cada difeomorfismo da forma  $\{\phi_a^t\}$  é  $\xi$ -quaseconforme, onde  $\xi$  é o subfibrado instável forte ( $E_a^{uu}$ ). Temos assim uma cota uniforme para cada difeomorfismo quaseconforme. De agora em diante nosso cone Anosov fixado será  $\mathcal{C}_0$  de acordo com a Definição 4.1 acima.

**Definição 4.2.** A ação Anosov  $\phi$  é chamada de  *$u$ -conforme* quando  $K_a(x, t) = 1$  para todos  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathcal{C}_0$  e  $x \in M$ .

A definição de  $\phi$  uniformemente  $u$ -quaseconforme (Definição 4.1) é equivalente à definição abaixo (Väisälä [49]) dada em termos da distância induzida sobre a folheação forte instável ( $\mathcal{F}_a^{uu}$ ).

**Definição 4.3.** Sejam  $a, x$  e  $t$  como na Definição 4.1, dizemos que a ação Anosov  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme se

$$K_a(x, t) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup\{d^{uu}(\phi_a^t(y), \phi_a^t(x)) \mid y \in S^{uu}(x, r)\}}{\inf\{d^{uu}(\phi_a^t(y), \phi_a^t(x)) \mid y \in S^{uu}(x, r)\}} \quad (4.7)$$

é uniformemente limitada em  $M$ , onde  $d^{uu}$  é a métrica induzida ao longo das folhas de  $\mathcal{F}_a^{uu}$  e  $S^{uu}(x, r) = \{y \in \mathcal{F}_a^{uu}(x) \mid d^{uu}(x, y) = r\}$ .

De maneira análoga definimos a noção de ação Anosov uniformemente  $s$ -quaseconforme. Dizemos que uma ação Anosov  $\phi$  é *uniformemente  $s$ -quaseconforme* se existem um cone Anosov  $\mathcal{C}_0$  e  $\widehat{L} \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\widehat{K}_a(x, t) = \frac{\max_{v \in E^{ss}, \|v\|=1} \|D\phi_a^t(x)(v)\|}{\min_{v \in E^{ss}, \|v\|=1} \|D\phi_a^t(x)(v)\|} \leq \widehat{L} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (4.8)$$

A ação Anosov é  *$s$ -conforme* se  $\widehat{K}_a(x, t) = 1$  (os elementos  $x$ ,  $a$  e  $t$  são novamente como na Definição 4.1).

Assim como para aplicações conformes as noções de  $u$ -conforme e  $s$ -conforme nos fornecem aplicações cujas derivadas preservam ângulos.



**Definição 4.4.** Se uma determinada ação Anosov  $\phi$  é simultaneamente uniformemente  $u$ -quaseconforme e uniformemente  $s$ -quaseconforme (assim como  $u$ -conforme e  $s$ -conforme), então dizemos que  $\phi$  é *uniformemente quaseconforme* (respectivamente *conforme*).

Por compacidade de  $M$  temos que métricas riemannianas são equivalentes, então se  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme em relação a uma métrica em  $M$ , temos que  $\phi$  será uniformemente quaseconforme em relação a qualquer outra métrica em  $M$ .

De agora em diante vamos trabalhar com o fibrado de classes  $u$ -conformes definido na Seção 3.1. Sabemos da Definição 3.3 que dado  $U \in GL(n)$  esse elemento age na fibra  $\mathcal{C}_{x_0}^{uu}$  da seguinte forma:  $U[A] = |\det(U)|^{-\frac{2}{n}} UAU^T$ . Lembramos que uma seção  $\tau$  desse fibrado é chamada de estrutura  $u$ -conforme.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{C}^{uu} \\ & \searrow Id & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Do Capítulo 2 sabemos ainda que dada uma base Anosov  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset \mathcal{C}_0$  e  $g_0 \in \mathbb{R}^k$  temos que  $g_0 = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k$  para algumas constantes  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Fazendo

$$\phi_{e_i}^{a_i}(\cdot) = \phi(a_i e_i, \cdot),$$

dado  $x_0 \in M$  podemos escrever

$$\phi_{g_0}(x_0) = \phi_{e_1}^{a_1} \circ \dots \circ \phi_{e_k}^{a_k}(x_0) = y_0,$$

uma composição de fluxos dados por elementos Anosov.

Seguindo Tukia [47] (Equação F0 - pág. 334), definimos a seguir o conceito de *invariância* de uma estrutura  $u$ -conforme em relação a uma ação Anosov.

**Definição 4.5.** Dizemos que a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é *invariante* pela ação  $\phi$  se para todo  $g \in \mathbb{R}^k$  tivermos:

$$\tau(x) = (D\phi_g(x))[\tau(\phi_g(x))], \quad \forall x \in M. \quad (4.9)$$

Nesta definição podemos utilizar alternativamente a derivada inversa  $(D\phi_g(x))^{-1}$  (ver Tukia [47] - Seção F). Na equação (4.9) o lado direito é a ação do grupo linear  $GL(n)$  (Definição 3.3). Dizemos também que  $\tau$  é *preservada* por  $\phi$  ou que  $\tau$  é  $\phi$ -invariante.

**Lema 4.1.** *A invariância de uma estrutura conforme  $\tau$  é equivalente a invariância em um subcone  $\mathcal{C}_0$ , ou seja*

$$\tau(x) = (D\phi_a^t(x))[\tau(\phi_a^t(x))], \quad \forall x \in M, \forall a \in \mathcal{C}_0 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

**Demonstração:**  $\Rightarrow$ ) Se  $\tau$  é invariante por  $\phi$ , em particular é invariante por todo elemento  $a \in \mathcal{C}_0$ .

$\Leftarrow$ ) Dada uma base  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset \mathcal{C}_0$  e  $g \in \mathbb{R}^k$ , escrevemos:

$$g = \sum_{i=1}^k t_i \cdot e_i \quad (t_i \in \mathbb{R}),$$

e temos que para  $x_0 \in M$ , com  $y_0 = \phi_g(x_0)$  vale

$$\phi_g(x_0) = \phi_{e_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{e_k}^{t_k}(x_0) = y_0.$$

Então:

$$D\phi_g = D\phi_{e_k}^{t_k} \circ \dots \circ D\phi_{e_1}^{t_1}.$$

Isso quer dizer que, pela comutatividade, vale a invariância de  $\tau$  por  $\phi$  pela igualdade  $\tau(x_0) = (D\phi_g(x_0))[\tau(\phi_g(x_0))]$ . ■

**Observação 4.1.** *Dado um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$ , então um difeomorfismo conforme é sempre solução do seguinte sistema de Cauchy-Riemann:  $(Df(x))^T \cdot Df(x) = J(x, f)^{\frac{2}{n}} \cdot I$  onde  $J$  representa o Jacobiano (Iwaniec-Martin [25]). Em particular, deste lema temos que uma ação Anosov  $\phi$  é  $u$ -conforme se, e somente se,*

$$(D_u\phi_a^t(x))^T \cdot D_u\phi_a^t(x) = |\det(D_u\phi_a^t(x))|^{\frac{2}{n}} \cdot I, \quad \forall a \in \mathcal{C}_0.$$

**Lema 4.2.** *Uma ação Anosov  $\phi$  é  $u$ -conforme em relação a uma métrica riemanniana  $g$  se, e somente se, a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  associada a  $g$  é invariante por  $\phi$ .*

**Demonstração:**  $\Rightarrow$ ) Seja  $\tau$  a estrutura  $u$ -conforme associada a métrica riemanniana  $g$ . Da Observação 4.1 temos que  $\phi$  é  $u$ -conforme se, e somente se,

$$(D_u\phi_a^t(x))^T \cdot D_u\phi_a^t(x) = |\det(D_u\phi_a^t(x))|^{\frac{2}{n}} \cdot I, \quad \forall a \in \mathcal{C}_0, t \in \mathbb{R}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\langle D\phi_a^t(x) \cdot [\tau(\phi_a^t(x))] \cdot u, v \rangle &= |\det D\phi_a^t(x)|^{-\frac{2}{n}} \cdot \langle (D\phi_a^t(x))^T \cdot \tau(\phi_a^t(x)) \cdot D\phi_a^t(x) \cdot u, v \rangle \\
&= |\det D\phi_a^t(x)|^{-\frac{2}{n}} \cdot \langle \tau(\phi_a^t(x)) \cdot D\phi_a^t(x) \cdot u, D\phi_a^t(x) \cdot v \rangle \\
&= |\det D\phi_a^t(x)|^{-\frac{2}{n}} \cdot \tau_{\phi_a^t(x)}(D\phi_a^t(x) \cdot u, D\phi_a^t(x) \cdot v) \\
&= |\det D\phi_a^t(x)|^{-\frac{2}{n}} \cdot \tau_x((D\phi_a^t(x))^T \cdot D\phi_a^t(x) \cdot u, v) \\
&= |\det D\phi_a^t(x)|^{-\frac{2}{n}} \cdot |\det D\phi_a^t(x)|^{\frac{2}{n}} \cdot \tau_x(u, v) \\
&= \tau_x(u, v).
\end{aligned}$$

Isso mostra que  $D\phi_a^t(x) \cdot [\tau(\phi_a^t(x))]$  é a matriz de  $g$  e conseqüentemente que  $\phi$  preserva a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$ .

$\Leftarrow$ ) Por invariância vale que  $\tau_x(u, v) = \langle D\phi_a^t(x) \cdot [\tau(\phi_a^t(x))] \cdot u, v \rangle$ , assim pelas contas acima  $(D_u\phi_a^t(x))^T \cdot D_u\phi_a^t(x) = |\det(D_u\phi_a^t(x))|^{\frac{2}{n}} \cdot I$  para todos  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in M$ . Ou seja,  $\phi$  é  $u$ -conforme em relação a métrica riemanniana  $g$ . ■

## 4.2 Ações Anosov $u$ -Conformes

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o Teorema **B**, ou seja, que dada uma ação Anosov  $\phi$  uniformemente  $u$ -quaseconforme, sob certas condições essa também é  $u$ -conforme. Precisamente o seguinte resultado.

**Teorema B.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov suave, irredutível e uniformemente  $u$ -quaseconforme sobre um subcone  $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^k$ . Então  $\phi$  é  $u$ -conforme com relação a uma métrica riemanniana no subfibrado instável forte a qual é Hölder contínua em  $M$  e suave ao longo das folhas da folheação instável forte.*

A demonstração do Teorema acima é conseqüência das proposições **4.1**, **4.2** e **4.4** a seguir.

**Proposição 4.1.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme. Então existe uma estrutura  $u$ -conforme  $\hat{\tau}$  limitada, invariante por  $\phi$  e mensurável.*

**Demonstração:** Começamos mostrando a existência de  $\hat{\tau}$ . Seja  $\tau_0$  uma estrutura  $u$ -conforme arbitrária contínua em  $M$ . Dado  $x \in M$  definimos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{M}_x := \{(D\phi_a(x))[\tau_0(\phi_a(x))] \mid a \in \mathcal{C}_0\} \subset \mathcal{C}_x^{uu}. \quad (4.11)$$

Vamos mostrar que  $\mathcal{M}_x$  é um conjunto limitado em  $\mathcal{C}_x^{uu}$ . Para isso, utilizamos a métrica  $d'$  dada pela Definição 3.4. Basta então mostrarmos que a distância

$$d'(\tau_0(x), (D\phi_a^t(x))[\tau_0(\phi_a^t(x))])$$

é limitada. Pela desigualdade triangular temos:

$$d'(\tau_0(x), (D\phi_a^t(x))[\tau_0(\phi_a^t(x))]) \leq d'(\tau_0(x), I_x) + d'(I_x, (D\phi_a^t(x))[\tau_0(\phi_a^t(x))]),$$

onde  $I_x$  é a matriz identidade. A primeira parcela da desigualdade acima é limitada uma vez que  $\tau_0$  é uma estrutura contínua numa variedade compacta. Quanto a segunda parcela do lado direito temos o seguinte:

$$\begin{aligned} & d'(I_x, (D\phi_a^t(x))[\tau_0(\phi_a^t(x))]) \\ &= d'(I_x, |\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}} \cdot (D\phi_a^t(x))^T \cdot I_x \cdot (D\phi_a^t(x))) \\ &= \frac{n}{2} \max \left( \log(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\max}^{D\phi_a^t})^2, \log \frac{1}{(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\min}^{D\phi_a^t})^2} \right), \end{aligned}$$

trocando a norma do máximo pela norma da soma temos:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{n}{2} \cdot M \cdot \left( \log(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\max}^{D\phi_a^t})^2 + \log \frac{1}{(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\min}^{D\phi_a^t})^2} \right) \\ & \leq \frac{n}{2} \cdot M \cdot \log \left( \frac{(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\max}^{D\phi_a^t})^2}{\frac{1}{(|\det(D\phi_a^t(x))|^{\frac{-2}{n}})^n \cdot (\lambda_{\min}^{D\phi_a^t})^2}} \right) \leq \frac{n}{2} \cdot M \cdot \log \frac{(\lambda_{\max}^{D\phi_a^t})^2}{(\lambda_{\min}^{D\phi_a^t})^2}. \end{aligned}$$

Por definição  $k_a(x, t) \leq L < \infty$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in M$ , assim:

$$d'(I_x, (D\phi_a^t(x))[\tau_0(\phi_a^t(x))]) \leq \frac{n}{2} \cdot M \cdot \log L^2 < \infty, \quad \forall a \in \mathcal{C}_0 \text{ e } t \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Como o conjunto  $\mathcal{M}_x$  é limitado, pelo Lema 3.4 existe um disco mínimo unicamente determinado contendo  $\mathcal{M}_x$ , denotamos por  $p_x \in \mathcal{C}_x^{uu}$  o centro desse disco. Com isso definimos a seguinte estrutura conforme:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} : M &\longrightarrow \mathcal{C}^{uu} \\ x &\longmapsto p_x. \end{aligned}$$

De (4.12) temos que a estrutura conforme  $\hat{\tau}$  definida desta forma é limitada, pois os conjuntos  $\mathcal{M}_x$  são uniformemente limitados.

Mostraremos agora que a estrutura conforme  $\widehat{\tau}$  é invariante pela ação  $\phi$ . De fato, denotamos  $y_0 = \phi_a(x_0)$  para  $x_0 \in M$  e  $a \in \mathcal{C}_0$  fixos e veremos inicialmente que

$$(D\phi_a(x_0))[\mathcal{M}_{y_0}] = \mathcal{M}_{x_0}.$$

Para cada  $b \in \mathcal{C}_0$  o elemento  $(D\phi_a(x_0))\left[\{(D\phi_b(y_0))[\tau_0(\phi_b(y_0))]\right] \in (D\phi_a(x_0))[\mathcal{M}_{y_0}]$  e temos:

$$\begin{aligned} & (D\phi_a(x_0))\left[\{(D\phi_b(y_0))[\tau_0(\phi_b(y_0))]\right] = \\ &= (D\phi_a(x_0))\left[|\det(D\phi_b(y_0))|^{-\frac{2}{n}} \cdot (D\phi_b(y_0))^T \cdot \widehat{\tau}(\phi_b(y_0)) \cdot (D\phi_b(y_0))\right] \\ &= |\det(D\phi_a(x_0))|^{-\frac{2}{n}} \cdot |\det(D\phi_b(y_0))|^{-\frac{2}{n}} \\ & \quad \cdot (D\phi_a(x_0))^T \cdot \left((D\phi_b(y_0))^T \cdot \widehat{\tau}(\phi_b(y_0)) \cdot (D\phi_b(y_0))\right) \cdot (D\phi_a(x_0)) = \end{aligned}$$

Pela propriedade da composta  $\phi_{a+b} = \phi_a \circ \phi_b$  obtemos:

$$= |\det(D\phi_{a+b}(x_0))|^{-\frac{2}{n}} \cdot \left(D\phi_b(y_0) \cdot D\phi_a(x_0)\right)^T \cdot \widehat{\tau}(\phi_b(y_0)) \cdot \left(D\phi_b(y_0) \cdot D\phi_a(x_0)\right).$$

Logo,

$$(D\phi_a(x_0))\left[\{(D\phi_b(y_0))[\tau_0(\phi_b(y_0))]\right] = D\phi_{a+b}[\widehat{\tau}(\phi_{a+b}(x_0))]$$

e então  $(D\phi_a(x_0))[\mathcal{M}_{y_0}] \subset \mathcal{M}_{x_0}$ . A inclusão oposta segue do mesmo argumento utilizado acima, ou seja, tomando um elemento de  $\mathcal{M}_{x_0}$  podemos escrevê-lo como um elemento de  $(D\phi_a(x_0))[\mathcal{M}_{y_0}]$ .

Como para cada  $b \in \mathcal{C}_0$ ,  $c = a + b \in \mathcal{C}_0$  e estamos tomando  $b$  variando em todo o cone  $\mathcal{C}_0$ , por definição vale que

$$(D\phi_a(x_0))[\mathcal{M}_{y_0}] = \{D\phi_c[\widehat{\tau}(\phi_c(x_0))] \mid c \in \mathcal{C}_0\} = \mathcal{M}_{x_0}.$$

Denotamos por  $D(p_{y_0}, r_{y_0})$  o disco mínimo que contém  $M_{y_0}$  e por  $D(p_{x_0}, r_{x_0})$  o disco mínimo que contém  $M_{x_0}$ . Do Lema 3.2 sabemos que fixada uma matriz  $U = D\phi_a \in GL(n)$  a aplicação  $A \mapsto U[A] = |\det U|^{-\frac{2}{n}} X^T A X$  define uma isometria em  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ . Temos portanto que:

$$(D\phi_a(x_0))[D(p_{y_0}, r_{y_0})] = D(p_{x_0}, r_{x_0})$$

e  $r_{y_0} = r_{x_0}$ . Daí temos a invariância  $\widehat{\tau}$  por  $\phi$  em  $\mathcal{C}_0$ . Devido ao Lema 4.1 temos ainda que  $\widehat{\tau}$  é invariante por  $\phi$ . A mensurabilidade de  $\widehat{\tau}$  em  $M$  é bem estabelecida em Tukia [47] (ver Teorema F). ■

A seguinte proposição praticamente demonstra o Teorema **B** com exceção da suavidade sobre as folhas da folheação instável forte.

**Proposição 4.2.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov ( $C^\infty$ ) uniformemente  $u$ -quaseconforme e irredutível em  $M$ . Então existe uma estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  a qual é Hölder contínua em  $M$  e invariante por  $\phi$ . Além disso,  $\tau$  coincide com  $\hat{\tau}$  num conjunto de medida total ( $\hat{\tau}$  é a estrutura definida na proposição anterior).*

A demonstração da proposição anterior será consequência dos seguintes cinco lemas, para os quais assumimos as hipóteses da Proposição **4.2** acima e consideramos o elemento Anosov  $a \in \mathcal{C}_0$ .

**Lema 4.3.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\hat{\tau}$  é localmente Hölder contínua num conjunto de medida total  $\mathcal{E}$  sobre as folhas da folheação estável forte. Isto é, para todo  $z \in M$ , existe uma vizinhança  $U_z \subset \mathcal{F}_a^{ss}(z)$  contendo  $z$ , tal que,  $d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq K^{ss}d(x, y)^\alpha$  para todos  $x, y \in U_z \cap \mathcal{E}$  e para algum  $\alpha > 0$ .*

**Demonstração:** Sejam  $z \in M$  e uma vizinhança produto  $U$  contendo  $z$ . Tomamos uma placa da folha instável forte de  $z$  da forma  $U_z = U \cap \mathcal{F}^{ss}(z)$ . Dados  $x, y \in U_z$ , temos que por trivialização local  $\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y) \in \frac{SL(n)}{SO(n)}$ . Denotamos  $x_1 = \phi_a^1(x)$ ,  $y_1 = \phi_a^1(y)$  e  $T_x = (D\phi_a^t(x))^{-1} \in GL(n)$  (respectivamente  $T_y$ ). Pelo Lema **3.3** o grupo linear  $GL(n)$  age em  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$  por *isometrias*, logo  $T_x$  e  $T_y$  definem isometrias na fibra típica  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ .

Como mostrado na Proposição **4.1** a estrutura conforme  $\hat{\tau}$  é  $\phi$ -invariante, daí

$$\hat{\tau}(x) = T_{x_1}[\hat{\tau}(x_1)] \quad \text{e} \quad \hat{\tau}(y) = T_{y_1}[\hat{\tau}(y_1)].$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) &= d(T_{x_1}[\hat{\tau}(x_1)], T_{y_1}[\hat{\tau}(y_1)]) \\ &\leq d(T_{y_1}[\hat{\tau}(x_1)], T_{y_1}[\hat{\tau}(y_1)]) + d(T_{x_1}[\hat{\tau}(x_1)], T_{y_1}[\hat{\tau}(x_1)]). \end{aligned}$$

Aplicando o fato de  $T$  definir uma isometria no primeiro membro da soma e utilizando a dependência Hölder no segundo membro obtemos então que

$$d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq d(\hat{\tau}(x_1), \hat{\tau}(y_1)) + Kd(x_1, y_1)^\alpha. \quad (4.13)$$

para alguns  $K, \alpha$  (constantes Hölder com  $\alpha > 0$ ).

Denotamos agora  $x_i = \phi_a^i(x)$  e  $y_i = \phi_a^i(y)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Afirmamos que a seguinte desigualdade vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$d(\widehat{\tau}(x), \widetilde{\tau}(y)) \leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + \sum_{i=1}^n Kd(x_i, y_i)^\alpha. \quad (4.14)$$

De fato, argumentando por indução, para  $n = 1$  a Desigualdade (4.13) diz que.

$$d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq d(\widehat{\tau}(x_1), \widehat{\tau}(y_1)) + Kd(x_1, y_1)^\alpha.$$

Suponhamos que a desigualdade (4.14) valha para  $n = k$  (hipótese de indução), ou seja:

$$d(\widehat{\tau}(x), \widetilde{\tau}(y)) \leq d(\widehat{\tau}(x_k), \widehat{\tau}(y_k)) + \sum_{i=1}^k Kd(x_i, y_i)^\alpha.$$

Então vamos mostrar que vale para  $n = k + 1$ . Para ver isso, com a hipótese de indução escrevemos:

$$d(\widehat{\tau}(x_1), \widetilde{\tau}(y_1)) \leq d(\widehat{\tau}(x_{k+1}), \widehat{\tau}(y_{k+1})) + \sum_{i=2}^{k+1} Kd(x_i, y_i)^\alpha. \quad (4.15)$$

Somando  $Kd(x_1, y_1)^\alpha$  a ambos os lados da desigualdade (4.15) temos que:

$$\begin{aligned} d(\widehat{\tau}(x), \widetilde{\tau}(y)) &\leq d(\widehat{\tau}(x_1), \widetilde{\tau}(y_1)) + Kd(x_1, y_1)^\alpha \\ &\leq d(\widehat{\tau}(x_{k+1}), \widehat{\tau}(y_{k+1})) + \sum_{i=2}^{k+1} Kd(x_i, y_i)^\alpha + Kd(x_1, y_1)^\alpha \\ &\leq d(\widehat{\tau}(x_{k+1}), \widehat{\tau}(y_{k+1})) + \sum_{i=1}^{k+1} Kd(x_i, y_i)^\alpha. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Isso mostra que a desigualdade (4.14) de fato vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por hiperbolicidade vale o seguinte:

$$d(x_i, y_i) = d(\phi_a^i(x), \phi_a^i(y)) \leq Ce^{-\lambda i} d(x, y), \quad C, \lambda > 0.$$

Daí, pela desigualdade (4.14) temos o seguinte:

$$\begin{aligned} d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) &\leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + K \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)^\alpha \\ &\leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + (KCd(x, y))^\alpha \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \cdot i \cdot \alpha} \\ &\leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + (KCd(x, y))^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda \cdot i \cdot \alpha} \\ &\leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + (KC)^\alpha K_2 d(x, y)^\alpha. \end{aligned}$$

Denotando  $K^{ss} = (KC)^\alpha K_2$  temos que para todos  $x, y \in U_z$  e  $n \in \mathbb{N}$  vale que

$$d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq d(\widehat{\tau}(x_n), \widehat{\tau}(y_n)) + K^{ss}d(x, y)^\alpha. \quad (4.17)$$

Por outro lado, do Capítulo 3 sabemos que existe uma medida de Margulis  $\mu_a$ , invariante pelo tempo 1 do fluxo  $\phi_a^t$ . Como a estrutura conforme  $\widehat{\tau}$  é mensurável, Lusin [38] (**Teorema de Lusin**) nos garante que existe um conjunto fechado  $E \subset M$  ( $\mu_a(E) > \frac{1}{2}$ ), tal que,  $\widehat{\tau}|_E$  é contínua, como  $M$  é compacta o conjunto  $E$  é compacto e portanto  $\widehat{\tau}$  é *uniformemente contínua* em  $E$ . Denotamos por  $\mathcal{E}$  o conjunto dos pontos de  $M$  cuja frequência das órbitas do difeomorfismo de tempo 1  $\phi_a^1$  em  $E$  é  $\mu_a(E)$ , pelo Teorema de Birkhoff 3.7  $\mathcal{E}$  tem medida total em  $M$ .

Finalmente, para todos  $x, y \in \mathcal{E} \cap U_z$ , as sequências  $(x_i = \phi_a^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  e  $(y_i = \phi_a^i(y))_{i \in \mathbb{N}}$  possuem subsequências  $(x_{n_k})$  e  $(y_{n_k})$  em  $E$ , tais que,  $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$  ( $x$  e  $y$  pertencem a uma placa de uma folha estável forte). Pela continuidade uniforme de  $\widehat{\tau}$  em  $E$ , também vale que  $d(\widehat{\tau}(x_{n_k}), \widehat{\tau}(y_{n_k})) \rightarrow 0$ . Assim, mostramos que

$$d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq K^{ss}d(x, y)^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \cap U_z.$$

■

**Lema 4.4.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\widehat{\tau}$  é localmente Hölder contínua num conjunto de medida total  $\mathcal{E}$  sobre as folhas da folheação instável forte. Isto é, para todo  $z \in M$ , existe uma vizinhança  $V_z \subset \mathcal{F}_a^{uu}(z)$  contendo  $z$ , tal que,  $d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq K^{uu}d(x, y)^\alpha$  para todos  $x, y \in \mathcal{E} \cap V_z$  e para algum  $\alpha > 0$ .*

A demonstração do lema acima é análoga a do Lema 4.3 tomando  $y, z \in V_z \subset \mathcal{F}_a^{uu}$  e considerando iteradas negativas desses pontos.

**Lema 4.5.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\widehat{\tau}$  é localmente Hölder contínua num conjunto de medida total  $\mathcal{E}$  sobre as folhas da folheação instável fraca. Isto é, para todo  $z \in M$ , existe uma vizinhança  $W_z \subset \mathcal{F}_a^u(z)$  contendo  $z$ , tal que,  $d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq K^u d(x, y)^\alpha$  para todos  $x, y \in \mathcal{E} \cap W_z$  e para algum  $\alpha > 0$ .*

**Demonstração:** Sejam  $z \in M$  e uma vizinhança produto  $W$  contendo  $z$ , tomamos  $W_z = W \cap \mathcal{F}_a^u(z)$  uma placa da folha instável fraca de  $z$ .



Dados  $x, y \in \mathcal{E} \cap W_z$ , se  $x$  e  $y$  pertencem a uma mesma folha instável forte, então pelo Lema 4.3 o resultado é verdadeiro. Por outro lado, se  $y \in \mathcal{O}_\phi(x)$ , então existe  $g_0 \in \mathbb{R}^k$ , tal que,  $\phi_{g_0}(x) = y$ . Pela invariância de  $\hat{\tau}$  por  $\phi$  temos que  $\hat{\tau}(x) = D\phi_a[\hat{\tau}(y)]$  e assim

$$0 = d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq K^u d(x, y)^\alpha, \quad \alpha > 0, \forall K^u \in \mathbb{R}.$$

Dados quaisquer  $x, y \in \mathcal{E} \cap W_z$ , denotamos  $x' = \mathcal{O}_\phi(y) \cap \mathcal{F}^{uu}(x)$ . Neste caso  $x'$  também pertence a  $\mathcal{F}^s(y)$ . Da estrutura de hiperbolicidade uniforme, temos que para  $p, q \in W$  e  $r \in \mathcal{F}_a^{uu}(p) \cap \mathcal{F}_a^s(q)$  (ver Figura 4.3), existem constantes reais positivas  $A$  e  $B$  tais que:

$$A \cdot d(p, q) < d(r, p) < B \cdot d(p, q). \quad (4.18)$$

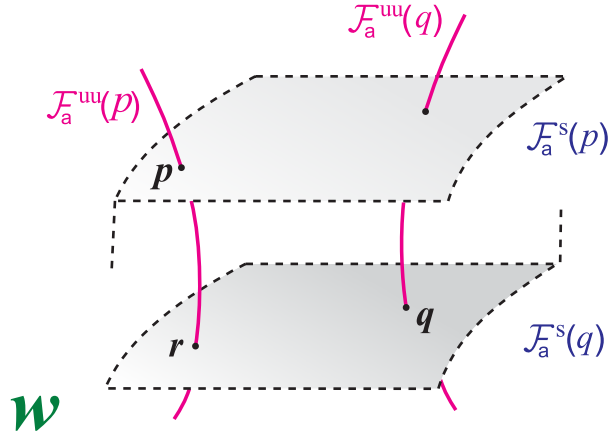


Figura 4.1: Vizinhança produto  $W$  com os pontos  $p, q$  e  $r$ .

Assim, para  $p = x$ ,  $q = y$  e  $r = x'$  temos:

$$\begin{aligned} d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) &\leq d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(x')) + d(\hat{\tau}(x'), \hat{\tau}(y)) \\ &\leq K^{uu} \cdot d(x, x')^\alpha + 0 \\ &\leq K^{uu} \cdot B \cdot d(x, y)^\alpha \\ &= K^u \cdot d(x, y)^\alpha, \end{aligned}$$

onde  $K^u = K^{uu} \cdot B$ . ■

**Lema 4.6.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\hat{\tau}$  é localmente Hölder contínua num conjunto de medida total  $\mathcal{E}$  em  $M$ . Isto é, para todo  $w \in M$  e vizinhança produto  $U_w \subset M$  contendo  $w$  temos que  $d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq K d(x, y)^\alpha$  para todos  $x, y \in \mathcal{E} \cap U_w$  e para algum  $\alpha > 0$ .*

**Demonstração:** Dado  $w \in M$ , sejam  $x, y \in \mathcal{E} \cap U_w$  vizinhança produto  $U_w$  de  $M$  (aqui não necessariamente os pontos estão numa mesma folha forte ou fraca). Como  $\mathcal{E}$  tem medida total em  $M$ , para  $\mu_a$ -quase todo ponto de  $U_w$  vale que  $\mu_\phi^{ss}(\mathcal{F}_a^{ss}(x) \cap U_w \cap \mathcal{E})$  tem medida condicional total.

Sejam  $\mathcal{F}_a^{ss}(x)$  e  $\mathcal{F}_a^{ss}(y)$  folhas estáveis fortes passando por  $x$  e  $y$  respectivamente. Seja  $H_{x,y} : \Sigma_x \subset \mathcal{F}^{ss}(x) \cap U_w \rightarrow \Sigma_y \subset \mathcal{F}^{ss}(y) \cap U_w$  a aplicação de holonomia da folhação instável fraca.

Uma vez que a medida  $\mu_a$  é quaseinvariante por aplicações de holonomia nas folheações fortes  $\mathcal{F}^\sigma$  ( $\sigma = ss, uu$ ), existe um ponto  $z \in \Sigma_x \cap \mathcal{E}$ , tal que,  $H_{x,y}(z) \in \mathcal{E}$ . Caso contrário, teríamos um conjunto de medida condicional não nula em  $\mathcal{F}_a^{ss}(H_{x,y}(x))$  sem pontos de  $\mathcal{E}$ .

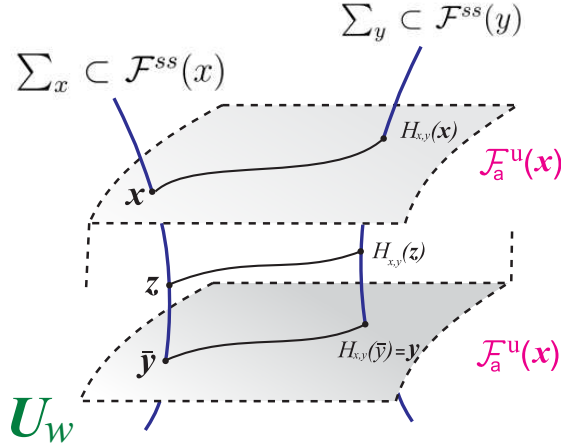


Figura 4.2: Vizinhança produto  $U_w$  com os pontos  $x, z, H_{x,y}(z)$  e  $y$ .

- Como  $x$  e  $z$  estão numa mesma placa de uma folha estável forte, do Lema 4.3 temos:

$$d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(z)) \leq K^{ss} d(x, z)^\alpha.$$

- Como  $z$  e  $H_{x,y}(z)$  pertencem a uma mesma placa de uma folha instável fraca, do Lema 4.4 temos:

$$d(\hat{\tau}(z), \hat{\tau}(H_{x,y}(z))) \leq K^u d(z, H_{x,y}(z))^\alpha, \quad \text{e.}$$

- Os pontos  $H_{x,y}(z)$  e  $y$  pertencem a uma mesma folha estável forte, assim novamente pelo Lema 4.3 temos:

$$d(\hat{\tau}(H_{x,y}(z)), \hat{\tau}(y)) \leq K^{ss} d(H_{x,y}(z), y)^\alpha,$$

Agora, utilizando a desigualdade triangular duas vezes:

$$\begin{aligned}
d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) &\leq d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(z)) + d(\widehat{\tau}(z), \widehat{\tau}(y)) \\
&\leq K^{ss} d(x, z)^\alpha + d(\widehat{\tau}(z), H_{x,y}(z)) + d(H_{x,y}(z), \widehat{\tau}(y)) \\
&\leq K^{ss} d(x, z)^\alpha + K^u d(z, H_{x,y}(z))^\alpha + K^{ss} d(H_{x,y}(z), y)^\alpha \\
&\leq K(d(x, z)^\alpha + d(z, H_{x,y}(z))^\alpha + d(H_{x,y}(z), y)^\alpha)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde  $K = \max\{K^{ss}, K^u\}$ .

Para obtermos o resultado pretendido resta mostrar que a soma do lado direito de (4.19) se torna

$$K(d(x, z)^\alpha + d(z, H_{x,y}(z))^\alpha + d(H_{x,y}(z), y)^\alpha) \leq \widehat{K} d(x, y)^\alpha \tag{4.20}$$

para algum  $\widehat{K} \in \mathbb{R}$ .

Assim como na Desigualdade (4.18), temos que para  $p, q \in U_w$  e  $r \in \mathcal{F}_a^{ss}(p) \cap \mathcal{F}_a^u(q)$  (ver Figura 4.3), existem constantes reais positivas  $A$  e  $B$  tais que:

$$A \cdot d(p, q) < d(r, p) < B \cdot d(p, q). \tag{4.21}$$

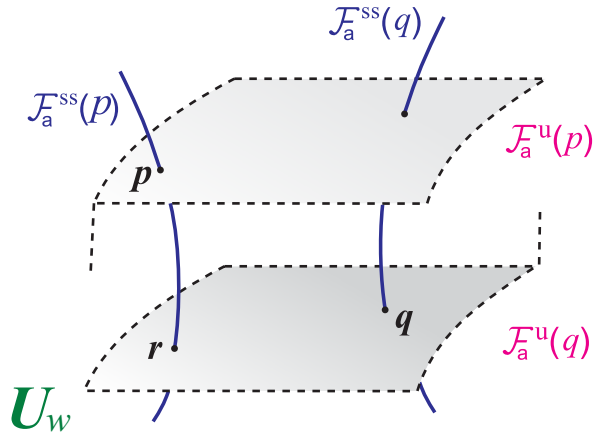


Figura 4.3: Vizinhança produto  $U_w$  com os pontos  $p, q$  e  $r$ .

Da afirmação anterior e da densidade do conjunto  $\mathcal{E}$  podemos escolher  $\bar{y} \in U_w \cap \mathcal{E}$ , tal que:  $d(x, z) < d(x, \bar{y})$  e  $d(\bar{y}, z) < d(x, \bar{y})$ . Assim, aplicando a propriedade enunciada pela Desigualdade (4.18), obtemos a seguinte tripla de expressões:

1.  $d(x, z)^\alpha \leq d(x, \bar{y})^\alpha \leq B^\alpha \cdot d(x, y)^\alpha$ ,
2.  $d(z, H_{x,y}(z))^\alpha \leq B^\alpha \cdot d(z, y)^\alpha \leq \left(\frac{B}{A}\right)^\alpha \cdot d(z, \bar{y})^\alpha < \left(\frac{B}{A}\right)^\alpha \cdot d(x, \bar{y})^\alpha < \left(\frac{B^2}{A}\right)^\alpha \cdot d(x, y)^\alpha$

$$3. d(H_{x,y}(z), y)^\alpha < B^\alpha \cdot d(z, y)^\alpha < \left(\frac{B}{A}\right)^\alpha \cdot d(z, \bar{y})^\alpha < \left(\frac{B}{A}\right)^\alpha \cdot d(x, \bar{y})^\alpha < \left(\frac{B^2}{A}\right)^\alpha \cdot d(x, y)^\alpha$$

Daí, somando as expressões 1, 2 e 3 anteriores, a Desigualdade (4.19) se torna

$$d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq K\hat{K}d(x, y)^\alpha, \quad (4.22)$$

para  $\hat{K} = B^\alpha + 2\left(\frac{B^2}{A}\right)$ . Isso demonstra a propriedade Hölder, localmente, para a estrutura conforme  $\hat{\tau}$  (restrita a  $\mathcal{E}$ ). ■

**Lema 4.7.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\hat{\tau}$  é uniformemente contínua num conjunto  $\hat{\mathcal{E}}$  invariante por  $\phi$  e de medida total em  $M$ .*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{E}$  o conjunto dos lemas anteriores, definimos  $\hat{\mathcal{E}}$  da seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{E}} = \bigcap_{g \in \mathbb{R}^k} \phi_g(\mathcal{E}). \quad (4.23)$$

O conjunto  $\hat{\mathcal{E}}$  tem medida total em  $M$  uma vez que  $\mathcal{E}$  tem medida total e cada difeomorfismo  $\phi_g$  preserva a medida de Margulis. Além disso,  $\hat{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}$  e portanto de acordo com o lema anterior a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é localmente Hölder contínua em  $\hat{\mathcal{E}}$ , ou seja, dado  $z \in M$  e uma vizinhança produto  $U_z$  contendo  $z$ , para todo par de pontos  $x, y \in U_z \cap \hat{\mathcal{E}}$  temos que  $d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq Kd(x, y)^\alpha$  para algum  $\alpha > 0$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta_0 = \sqrt[\alpha]{\frac{\epsilon}{K}}$  e  $x, y \in \hat{\mathcal{E}} \cap U_z$  tais que  $d(x, y) < \delta_0$  obtemos:

$$d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) \leq K \cdot d(x, y)^\alpha < K \cdot \left(\sqrt[\alpha]{\frac{\epsilon}{K}}\right)^\alpha = \epsilon. \quad (4.24)$$

Ou seja, para todo ponto  $z \in M$  é possível obter uma bola aberta  $B(z, r_z)$  onde  $\hat{\tau}|_{B(z, r_z)}$  é uniformemente contínua. Fixando uma cobertura por bolas  $C = \{B(z, r_z) \mid z \in M\}$  de  $M$ , existe  $\delta > 0$  (*número de Lebesgue*), tal que, para todo  $w \in M$  a bola  $B(w, \delta) \subset B(z, r_z)$  para algum  $z \in M$  (ou seja, qualquer bola de raio  $\delta$  está contida em algum elemento da cobertura  $C$ ). Isso é precisamente afirmar que  $\hat{\tau}$  é uniformemente contínua em  $\hat{\mathcal{E}}$ , pois de acordo com a Desigualdade (4.24) dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que, se  $d(x, y) < \delta$ , então  $d(\hat{\tau}(x), \hat{\tau}(y)) < \epsilon$ . ■

Para concluirmos a demonstração da Proposição 4.2 vamos estender a estrutura  $\hat{\tau}|_{\hat{\mathcal{E}}}$ , obtendo assim uma estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  definida em  $M$  e invariante por  $\phi$ .

**Demonstração (da Proposição 4.2):** De acordo com o Lema 4.7 a estrutura  $u$ -conforme  $\hat{\tau}$  é uniformemente contínua em  $\hat{\mathcal{E}}$ , assim pela densidade do conjunto  $\hat{\mathcal{E}}$  existe

uma extensão contínua  $\tau$  de  $\widehat{\tau}$  em  $M$ , definida da seguinte forma:  $\tau(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\tau}(x_n)$ , onde  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é qualquer sequência contida em  $\widehat{\mathcal{E}}$ , tal que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

A estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é invariante por  $\phi$ . De fato, se  $x \in \widehat{\mathcal{E}}$  então  $\tau$  é  $\phi$ -invariante por definição. Se  $x$  não pertence a  $\widehat{\mathcal{E}}$ , por definição existe uma sequência convergente  $x_n \rightarrow x$ , tal que,  $\widehat{\tau}(x_n) \rightarrow \tau(x)$ . Assim, para cada  $g \in \mathbb{R}^k$  denotamos  $\{y_n = \phi_g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  e temos então que  $y_n \rightarrow y = \phi_g(x)$ . Pela invariância de  $\widehat{\tau}$  vale que  $\widehat{\tau}(x_n) = D\phi_g(y_n)$  e consequentemente por continuidade  $\tau(x) = D\phi_g(\tau(y))$ .

A estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é localmente Hölder contínua em  $M$ . De fato, fixado  $w \in M$  e uma vizinhança produto  $U_w$  contendo  $w$ , para quaisquer  $x, y \in \widehat{\mathcal{E}} \cap U_w$  temos que  $d(\widehat{\tau}(x), \widehat{\tau}(y)) \leq Kd(x, y)^\alpha$  para algum  $\alpha > 0$ . Se  $x$  e  $y$  não pertencem a  $\widehat{\mathcal{E}}$ , tomamos sequências  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  em  $\widehat{\mathcal{E}} \cap U_w$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$  e assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  obtemos:

$$\begin{aligned} d(\tau(x), \tau(y)) &\leq d(\tau(x), \tau(x_n)) + d(\tau(x_n), \tau(y_n)) + d(\tau(y_n), \tau(y)) \\ &\leq d(\tau(x), \tau(x_n)) + K \cdot d(x_n, y_n)^\alpha + d(\tau(y_n), \tau(y)). \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  vale que  $d(\tau(x), \tau(y)) \leq Kd(x, y)^\alpha$ , o que mostra que  $\tau$  é localmente Hölder contínua em  $M$ .

Por fim, a mensurabilidade e a limitação de  $\tau$  decorrem da continuidade. ■

A seguir enunciamos a Proposição 4.1 de Sadovskaya [46] (pág. 13) que é de fundamental importância para nossos resultados. Por ter uma demonstração completa não vamos repeti-la aqui.

**Proposição 4.3** (Sadovskaya [46] - pág. 13). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana compacta,  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\mathcal{F}$  uma folheação contínua em  $M$  com folhas suaves. Suponha que  $f$  preserva  $\mathcal{F}$  e que  $\|Df|_{T_x\mathcal{F}}\| < 1$ . Além disso, suponha que existam constantes  $C > 0$  e  $\epsilon > 0$ , tais que, para quaisquer  $x \in M$  e  $n \in \mathbb{N}$  tenhamos:*

$$\|(Df^n|_{T_x\mathcal{F}})^{-1}\| \cdot \|Df^n|_{T_x\mathcal{F}}\|^2 \leq C(1 - \epsilon)^n. \quad (4.25)$$

Então para cada  $x \in M$ , existe um  $C^\infty$ -difeomorfismo  $h_x : \mathcal{F}(x) \rightarrow T_x\mathcal{F}$ , tal que:

- $h_{f(x)} \circ f = Df(x) \circ h_x$ ,
- $h_x(x) = 0$  e  $(Dh_x)(x)$  é a identidade.

- $h_x$  depende continuamente em  $x$  na topologia  $C^\infty$ .

**Observação 4.2.** A Proposição anterior, no caso de ações Anosov, está enunciada considerando a folheação estável forte  $\mathcal{F}_a^{ss}$ . No entanto, como estamos trabalhando com a folheação instável forte  $\mathcal{F}_a^{uu}$ , assumimos as hipóteses  $\|Df^{-1}|_{T\mathcal{F}}\| < 1$  e conseqüentemente a desigualdade (4.25) da forma:  $\|(Df^{-n}|_{T_x\mathcal{F}})^{-1}\| \cdot \|Df^{-n}|_{T_x\mathcal{F}}\|^2 \leq C(1 - \epsilon)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Mostraremos no lema a seguir que para uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme a tese da proposição anterior é verdadeira.

Para o que segue necessitamos da noção de *conorma* de um operador linear.

**Definição 4.6.** A conorma de um operador inversível  $T : V \rightarrow V$  num espaço vetorial normado  $V$  é definida como sendo:  $m(T) = \inf\{\|T(v)\| \mid \|v\| = 1\} = \|T^{-1}\|^{-1}$ .

**Lema 4.8.** Seja  $\phi$  uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme em  $M$ . Então para cada  $x \in M$ , existe um  $C^\infty$ -difeomorfismo  $h_x : \mathcal{F}_a^{uu}(x) \rightarrow E_a^{uu}(x)$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $h_{\phi_a^1} \circ \phi_a^1 = D\phi_a^1(x) \circ h_x$ ,
2.  $h_x(x) = 0$  e  $(Dh_x)(x)$  é a aplicação identidade.
3.  $h_x$  depende continuamente de  $x$  na topologia  $C^\infty$ .

**Demonstração:** Dada uma ação Anosov  $\phi$  o difeomorfismo  $\phi_g : M \rightarrow M$  preserva a folheação  $\mathcal{F}_a^{uu}$  para todo  $g \in \mathbb{R}^k$ . Fixado  $a \in \mathcal{C}_0$ , por hiperbolicidade temos que  $\|D\phi_a^{-n}|_{E_a^{uu}(x)}\| < Ce^{-\lambda n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) para todo  $x \in M$ . Além disso,  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme em  $\mathcal{C}_0$  por hipótese. Logo:

$$\frac{\|D\phi_a^t(x)|_{E_a^{uu}(x)}\|}{m(D\phi_a^t(x)|_{E_a^{uu}(x)})} \leq L \quad \forall x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R},$$

onde  $m(D\phi_a^t(x)|_{E_a^{uu}(x)})$  é a *conorma* da derivada, de acordo com a Definição 4.6. Escrito de outra forma:  $\|(D\phi_a^{-n}(x)|_{E_a^{uu}(x)})^{-1}\| \cdot \|D\phi_a^{-n}(x)|_{E_a^{uu}(x)}\| \leq L$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in M$ . Assim:

$$\begin{aligned} \|(D\phi_a^{-n}(x)|_{E_a^{uu}(x)})^{-1}\| \cdot \|D\phi_a^{-n}(x)|_{E_a^{uu}(x)}\| &\leq L(Ce^{-\lambda n}) \\ &\leq K(1 - \epsilon)^n \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

para algum  $\epsilon > 0$ , tal que,  $e^{-\lambda} + \epsilon = 1$ . Estamos portanto nas hipóteses da proposição 4.3, ou seja, existe a família  $h_x$  com as propriedades enunciadas na tese deste lema. ■

Na proposição a seguir  $\tau$  é estrutura  $u$ -conforme da Proposição 4.2.

**Proposição 4.4.** *A estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é suave ao longo das folhas da folheação instável forte  $\mathcal{F}_a^{uu}$ .*

**Demonstração:** Dado  $x \in M$ ,  $\mathcal{F}_a^{uu}(x)$  denota a folha instável forte passando por  $x$ , vamos mostrar que  $\tau|_{\mathcal{F}_a^{uu}(x)}$  é suave. Seja  $E_a^{uu}(x)$  o espaço tangente a  $\mathcal{F}_a^{uu}(x)$  em  $x$ . No fibrado *globalmente trivial*  $\xi = E_a^{uu} \times \frac{SO(n)}{SO(n)}$  consideramos a seção  $\sigma : E_a^{uu} \rightarrow \xi$  definida por  $\sigma(v) = \tau(x)$  para todo  $v \in E_a^{uu}(x)$ . Vamos mostrar que a igualdade  $(h_x)_*(\tau(y)) = \sigma(h_x(y))$  é verdadeira para todo  $y \in \mathcal{F}_a^{uu}(x)$ , ou seja, o *pushforward* de  $\tau(y)$  é igual a  $\sigma(h_x(y))$ . Consequentemente  $\tau$  será  $C^\infty$  ao longo de  $\mathcal{F}_a^{uu}(x)$  uma vez que  $h_x$  é um difeomorfismo suave e  $\sigma$  é constante.

A estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  é  $\phi$ -invariante, ou seja, da Definição 4.5 para cada  $x \in M$  temos que  $\tau(x) = D\phi_g[\tau(\phi_g(x))]$  para todo  $g \in \mathbb{R}^k$ . Logo, a estrutura conforme  $\sigma$  satisfaz  $\sigma(v) = D\phi_g[\sigma(D\phi_g(v))]$  para todo  $v \in E_a^{uu}(x)$  e para todo  $g \in \mathbb{R}^k$ , isto é,  $\sigma$  é  $D\phi$ -invariante, pois a derivada de  $D\phi_a$  é ela mesma em todo ponto de  $E_a^{uu}(x)$ . Passamos assim da dinâmica da ação para a dinâmica dada pela derivada.

Para facilitar a notação no que segue, dados  $x \in M$  e  $y \in \mathcal{F}_a^{uu}(x)$ , denotamos por  $h_x(\tau(y))$  o *push forward* de  $\tau(y)$  para o ponto  $h_x(y)$  (ver Figura 4.4).

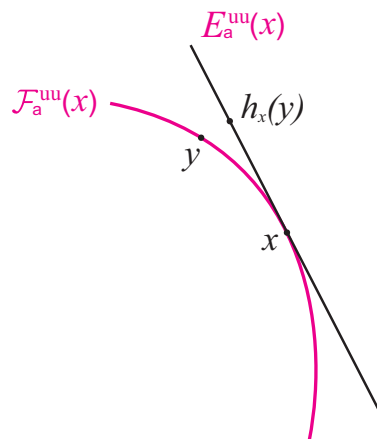


Figura 4.4:  $x, y \in \mathcal{F}_a^{uu}(x)$

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que, a seguinte desigualdade se verifica:

$$d(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(y))), \sigma(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y)))) < \epsilon. \quad (4.26)$$

De fato, pelo item 3) do Lema 4.8, se  $\phi_a^{-n}(y)$  e  $\phi_a^{-n}(x)$  são suficientemente próximos, então as derivadas  $Dh_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y))$  e  $Dh_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(x))$  estão numa mesma vizinhança na topologia  $C^\infty$ . Consequentemente  $h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(y)))$  está na mesma vizinhança de  $h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(x)))$ . Por outro lado, o item 2) do Lema 4.8 nos diz que  $Dh_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(x))$  é a aplicação identidade, ou seja, como  $\sigma$  é constante temos:

$$h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(x))) = \sigma(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(x))) = \sigma(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y))).$$

Assim, a Desigualdade (4.26) anterior fica demonstrada. Da Desigualdade (4.26) temos que:

$$\begin{aligned} \epsilon &> d\left(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(y))), \sigma(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y)))\right) \\ &= d\left(D\phi_a^n(x)[h_{\phi_a^{-n}(x)}(\tau(\phi_a^{-n}(y)))] , D\phi_a^n(x)[\sigma(h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y)))]\right) \\ &= d\left(D\phi_a^n(x)[h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y))[\tau(y)]] , \sigma\left(D\phi_a^n(x)[h_{\phi_a^{-n}(x)}(\phi_a^{-n}(y))]\right)\right) \\ &= d(h_x(\tau(y)), \sigma(h_x(y))). \end{aligned}$$

A primeira igualdade se justifica, pois  $D\phi_a^n(x)[\cdot]$  define uma isometria em  $\frac{SL(n)}{SO(n)}$ . A segunda igualdade vem do fato de  $\tau$  ser invariante pela ação  $\phi$  e a terceira desigualdade é consequência do item 1) do Lema 4.8. Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, temos que  $(h_x)_*(\tau(y)) = \sigma(h_x(y))$  para todo  $y \in \mathcal{F}_a^{uu}(x)$  e para todo  $x \in M$ . ■

As Proposições 4.1, 4.2 e 4.4 concluem a prova do Teorema B, pois de acordo com o Lema 4.2 a ação  $\phi$  ser  $u$ -conforme em relação a uma determinada métrica  $g$  é equivalente a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$  associada a  $g$  ser invariante por  $\phi$ .



## CAPÍTULO 5

# SUAVIDADE DE FOLHEAÇÕES: AÇÕES ANOSOV DE $k$ -CONTATO CONFORMES

Nosso objetivo neste capítulo consiste em estudar regularidades das folheações fortes e fracas definidas por uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme.

Na Seção 5.1 mostramos que dado um elemento Anosov  $a \in \mathcal{C}_0$  o fibrado estável fraco  $E_a^s$  é de classe  $C^1$ . Na Subseção 5.2.1 mostramos que as holonimas em relação a folheação estável fraca são conformes e uniformemente suaves, portanto a folheação estável fraca é de classe  $C^\infty$ . Na Subseção 5.2.2 mostramos o Teorema C, utilizando a estrutura de  $k$ -contato generalizada para provar que a folheação instável forte e a folheação instável fraca são suaves. A Seção 5.3 é dedicada à demonstração do Teorema A que nos fornece um resultado de rigidez.

### 5.1 Folheação Estável Fraca de Classe $C^1$

Em Hirsch-Pugh [22] (Seção 4) é mostrado que para o *fluxo geodésico*  $\varphi^t$  numa superfície de curvatura negativa (fluxo Anosov) o fibrado forte instável  $E^{uu}$  e o fibrado forte estável  $E^{ss}$  (da decomposição  $TM = E^{ss} \oplus T\varphi^t \oplus E^{uu}$ ) são de classe  $C^1$ .

Por outro lado, Sadovskaya [46] mostra, com as devidas adaptações, que para o caso de fluxos Anosov  $u$ -conformes o fibrado estável fraco  $E^s$  é de classe  $C^1$ . A seguir, vamos destacar as adaptações correspondentes para o caso de ações Anosov  $u$ -conformes e mostrar que o *fibrado estável fraco*  $E_a^s$  em relação a um elemento Anosov  $a \in \mathcal{C}_0$  é de classe  $C^1$ .

Começamos denotando o seguinte fibrado  $W$  sobre  $M$ :  $W = E_a^{uu} \oplus E_a^{ss}$ . Da teoria de sistemas hiperbólicos, o subfibrado  $W$  é a princípio apenas Hölder contínuo. No entanto,

$W$  pode ser aproximado por um fibrado  $\widehat{W}$  de classe  $C^\infty$ . De fato, dada uma ação Anosov  $\phi$  e uma base de elementos Anosov  $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathcal{C}_0$  podemos sempre escrever  $\phi$  como uma composição de  $k$ -fluxos comutativos. Assim, para cada direção  $a_j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$  podemos definir um subfibrado de  $TM$  fazendo o seguinte:

$$W_j = E_{a_j}^{uu} \oplus E_{a_j}^{ss} \oplus T\phi_{a_1} \oplus \dots \oplus T\phi_{a_{j-1}} \oplus \widehat{T\phi_{a_j}} \oplus T\phi_{a_{j+1}} \oplus \dots \oplus T\phi_{a_k},$$

onde  $\widehat{T\phi_{a_j}}$  é um subfibrado que não está sendo considerado. Cada  $T\phi_{a_i}$  denota o subfibrado definido pelo campo associado ao fluxo  $\phi_{a_i}^t$ . Listamos algumas propriedades de  $W_j$ :

1.  $W_j$  tem codimensão-1.
2.  $\phi_{a_j}^t$  é transversal a  $W_j$ .
3. O subfibrado assim definido é invariante pelas derivadas de  $\phi_{a_j}^t$ .

$$4. E_a^{uu} \oplus E_a^{ss} = \bigcap_{j=1}^k W_j = W.$$

Como cada  $W_j$  tem codimensão-1 podemos definir uma 1-forma diferenciável  $\alpha_j$  cujo núcleo coincide com  $W_j$ . Aproximando  $\alpha_j$  por uma 1-forma de classe  $C^\infty$  obtemos um subfibrado  $\widehat{W}_j$  de classe  $C^\infty$  que é próximo a  $W_j$  e

$$\bigcap_{j=1}^k \widehat{W}_j = \widehat{W}$$

também é um subfibrado de  $TM$  de classe  $C^\infty$  que aproxima  $W = E_a^{uu} \oplus E_a^{ss}$ . Assim, fica mostrado que  $W$  pode ser arbitrariamente próximo de um fibrado suave  $\widehat{W}$ .

O fluxo  $\phi_a^t$  é transversal a  $W$ , logo podemos definir uma decomposição em  $\widehat{W}$  da seguinte maneira:

$$\widehat{W} = \widehat{E}_a^{uu} \oplus \widehat{E}_a^{ss}$$

onde

$$\widehat{E}_a^{uu} = \widehat{W} \cap (E_a^{uu} \oplus T\phi_a), \text{ e}$$

$$\widehat{E}_a^{ss} = \widehat{W} \cap (E_a^{ss} \oplus T\phi_a).$$

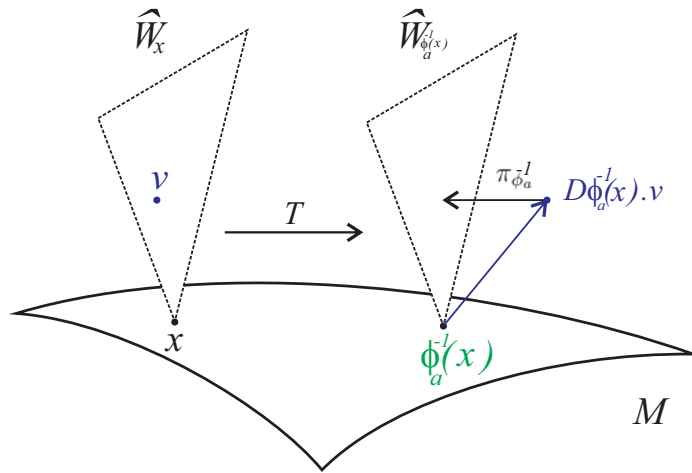


Figura 5.1: Aplicação  $T : \widehat{W}_x \longrightarrow \widehat{W}_{\phi_a(x)}$ .

O fibrado  $\widehat{W}$  pode não ser invariante por  $D\phi_a$ . No entanto, definimos uma aplicação  $T : \widehat{W} \longrightarrow \widehat{W}$  da seguinte forma: fixado  $x \in M$  fazemos  $T|_{\widehat{W}_x} = \pi_{\phi_a^{-1}(x)} \circ D\phi_a^{-1}(x)$ , onde  $\pi_{\phi_a^{-1}}$  é a projeção do espaço tangente  $T_{\phi_a^{-1}(x)}M$  sobre  $\widehat{W}_{\phi_a^{-1}(x)}$  ao longo do fluxo  $\phi_a^t$ .

Assim como na Seção 4 de Hirsch-Pugh [22] definimos um novo fibrado sobre  $M$  a partir de  $\widehat{W}$ , cujas fibras são da forma:

$$\mathcal{G}_x = \{G \mid G : \widehat{E}_a^{ss}(x) \longrightarrow \widehat{E}_a^{uu}(x) \text{ é linear, e } \|G\| < 1\}.$$

Uma vez que  $\widehat{W}$  é de classe  $C^\infty$  temos que um fibrado definido dessa maneira também é de classe  $C^\infty$ . A aplicação  $T : \widehat{W} \longrightarrow \widehat{W}$  define um recobrimento  $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  do difeomorfismo  $\phi_a^{-1}$ . A aplicação  $F$  é uma 1-contração nas fibras, pois  $\|D\pi_{\phi_a}\| = 1$  e temos:

$$\begin{aligned} k_x \cdot (\alpha_x)^{-1} &= \|D^u \phi_a^{-1}(x)\| \cdot \|D^s \phi_a^1(y)\| \cdot (m(D^u \phi_a^{-1}(x)))^{-1} \\ &= \|D^u \phi_a^{-1}(x)\| \cdot \|D^s \phi_a^1(y)\| \cdot \|(D^u \phi_a^{-1}(x))^{-1}\| \\ &= \|D^s \phi_a^1(y)\| \\ &< 1, \end{aligned}$$

onde  $k_x$  é uma constante Lipschitz de  $F|_{\mathcal{G}_x}$  e  $\alpha_x$  é a contração na base (conorma de  $T|_{\widehat{W}_x}$ ). Nas equações anteriores  $\|(D^u \phi_a^{-1}(x))\| \cdot \|(D^u \phi_a^{-1}(x))^{-1}\| = 1$  decorre do fato de  $\phi$  ser uma ação Anosov  $u$ -conforme, na estrutura riemanniana que estamos considerando, ou seja:

$$\frac{\|D\phi_a^{-1}(x)|_{E_a^{uu}(x)}\|}{m(D\phi_a^{-1}(x)|_{E_a^{uu}(x)})} = 1, \quad \forall x \in M.$$

O denominador  $m(D\phi_a^{-1}(x)|_{E_a^{uu}(x)})$  é a conorma da derivada, de acordo com a Definição 4.6.

Utilizando o *Teorema da Seção  $C^r$*  (Hirsch-Pugh [22] - Seção 3) concluímos que  $\widehat{E}_a^{ss}$  é de classe  $C^1$ . Portanto, o fibrado estável fraco  $E_a^s = E_a^{ss} \oplus T\phi = \widehat{E}_a^{ss} \oplus T\phi$  é de classe  $C^1$ , uma vez que  $T\phi$  é suave.

## 5.2 Folheações Suaves

Nesta seção estudamos a suavidade da folheação estável forte  $\mathcal{F}_a^{ss}$  e da folheação estável fraca  $\mathcal{F}_a^s$ . Além disso, mostramos que com a hipótese de termos uma estrutura de  $k$ -contato generalizada a folheação forte instável  $\mathcal{F}_a^{uu}$ , bem como a folheação instável fraca  $\mathcal{F}_a^u$  são suaves.

### 5.2.1 Folheação Estável Fraca Suave

**Proposição 5.1.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov  $u$ -conforme, então as holonomias locais da folheação  $\mathcal{F}_a^s$  preservam a estrutura  $u$ -conforme  $\tau$ , ou seja, são  $u$ -conformes.*

**Demonstração:** Dado  $w \in M$ , seja  $U_w$  uma vizinhança produto contendo  $w$ . Dados  $x, y \in U_w$  consideramos a holonomia local  $H_{x,y} : \Sigma_x \subset \mathcal{F}_a^{uu}(x) \rightarrow \Sigma_y \subset \mathcal{F}_a^{uu}(y)$  em relação a folheação estável fraca  $\mathcal{F}_a^s$  e sobre o caminho  $\gamma$ . Temos portanto que para cada  $z \in \Sigma_x \mapsto H_{x,y}(z) = \mathcal{F}_a^{uu}(y) \cap \mathcal{F}_a^s(z)$ .

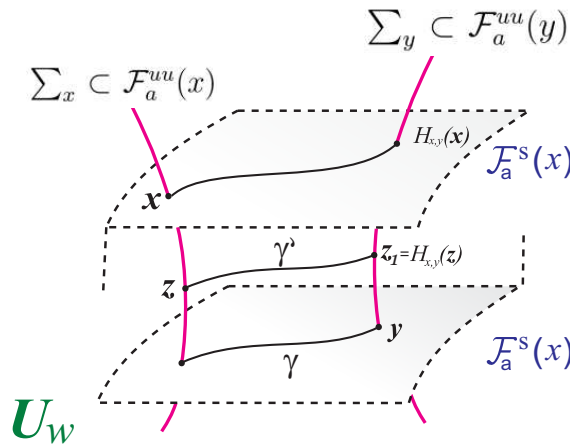


Figura 5.2: Representação de  $H_{x,y}$

Dado  $z \in \Sigma_x$  queremos verificar que  $DH_{x,y}(z)[\tau(z)] = \tau(z_1)$  onde  $z_1 = H_{x,y}(z)$ . Os pontos  $z$  e  $z_1$  pertencem a uma placa  $P_z \subset U_w$  da folheação  $\mathcal{F}_a^s$ . Se  $z$  e  $z_1$  pertencem a

órbita  $\mathcal{O}_\phi(z)$ , então  $DH_{x,y}(z)[\tau(z)] = \tau(z_1)$  uma vez que  $\tau$  é invariante por  $\phi$ . Eventualmente o ponto  $z_1$  pode não estar na órbita  $\mathcal{O}_\phi(z)$ , no entanto pela estrutura de produto local  $z_1$  pertence a alguma folha estável forte. Seja  $z_2 = \mathcal{F}_a^{ss}(z_1) \cap \mathcal{O}_\phi(z)$ . Obtemos dessa forma um caminho que liga  $z$  a  $z_1$  passando por  $z_2$  e homotópico a  $\gamma$ . Assim,  $H_{x,y} = H_{z_2,z_1} \circ H_{z,z_2}$ .

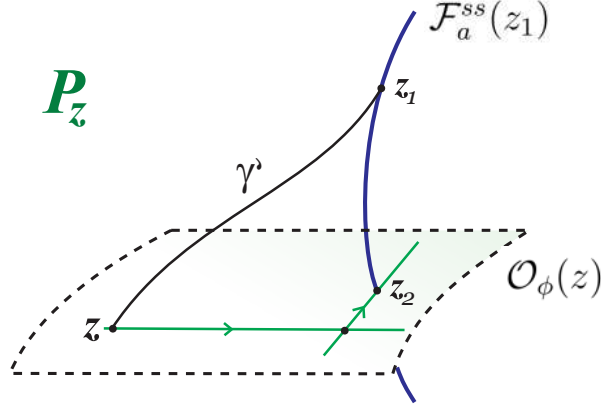


Figura 5.3: Representação de  $H_{x,y} = H_{z_2,z_1} \circ H_{z,z_2}$ .

É suficiente mostrarmos que  $DH_{z_2,z_1}(z_2)[\tau(z_2)] = \tau(z_1)$ , pois  $z$  e  $z_2$  estão numa mesma órbita de  $\phi$ . Temos que  $H_{z_2,z_1} = \phi_a^{-t} \circ H_{\phi_a^t(z_2), \phi_a^t(z_1)} \circ \phi_a^t$ , logo dado  $\epsilon > 0$ , para  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente grande  $\phi_a^t(z_2)$  e  $\phi_a^t(z_1)$  são  $\epsilon$ -próximos. Consequentemente  $DH_{\phi_a^t(z_2), \phi_a^t(z_1)}$  é próxima à identidade.

Pela continuidade de  $\tau$  também é verdade que  $\tau(\phi_a^t(z_2))$  é próximo a  $\tau(\phi_a^t(z_1))$  e então  $DH_{\phi_a^t(z_2), \phi_a^t(z_1)}[\tau(\phi_a^t(z_2))]$  é próximo a  $\tau(\phi_a^t(z_1))$ . Como a derivada  $D\phi_a^t$  induz uma isometria entre  $\mathcal{C}_{z_1}^{uu}$  e  $\mathcal{C}_{\phi_a^t(z_1)}^{uu}$ , concluímos que  $DH_{z_2,z_1}[\tau(z_2)]$  é próximo a  $\tau(z_1)$ . Fazendo  $t \rightarrow \infty$  temos que  $DH_{z_2,z_1}[\tau(z_2)]$  converge a  $\tau(z_1)$ , ou seja,  $DH_{z_2,z_1}(z_2)[\tau(z_2)] = \tau(z_1)$  e consequentemente  $DH_{x,y}(z)[\tau(z)] = \tau(z_1)$ , mostrando assim que a holonomia  $H_{x,y}$  é de fato  $u$ -conforme. ■

**Definição 5.1.** Uma aplicação de holonomia  $H_{x,y}$  é dita *uniformemente suave* se é suave e suas derivadas dependem continuamente de  $y$  na topologia  $C^\infty$ .

Os Lemas 5.1 e 5.2 a seguir estão demonstrados em Sadovskaya [46], no entanto por completude do texto apresentamos suas respectivas demonstrações.

**Lema 5.1.** Se as holonomias  $H_{x,y}$  definidas pela folheação estável fraca são uniformemente  $C^\infty$ , então a folheação estável fraca é suave.

**Demonstração:** Seja  $w \in M$  e uma vizinhança produto  $U_w$  contendo  $w$ . Podemos escolher uma coordenada local suave  $\Psi : U_w \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de tal modo que  $\Psi(w) = 0$ ,  $\Psi(\mathcal{F}_a^s(w) \cap U_w) \subset \mathbb{R}^m$  e  $\Psi(\mathcal{F}_a^{uu}(w) \cap U_w) \subset \mathbb{R}^n$ .

Dado  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  definimos a seguinte aplicação:  $\Pi(z) = (x, H_{z,0}(z))$ . Por hipótese as holonomias em relação a folheação estável fraca são uniformemente suaves, logo a aplicação  $\Pi$  é uniformemente suave nas folhas de  $\mathcal{F}_a^s$  e de  $\mathcal{F}_a^{uu}$ . De Journé [26] temos que  $\Pi$  é suave. Ou seja, a folheação estável fraca é classe  $C^\infty$ . ■

**Lema 5.2.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov  $u$ -conforme, então a folheação  $\mathcal{F}_a^s$  é suave.*

**Demonstração:** fixado  $w \in M$ , consideramos uma vizinhança produto  $U_w$  contendo  $w$ . Dados  $x, y \in U_w$ , devido ao lema anterior basta mostrarmos que as holonomias locais  $H_{x,y}$  da folheação estável fraca são uniformemente suaves. Definimos portanto uma aplicação  $G_{x,y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  da seguinte maneira:

$$G_{x,y} = g_y \circ h_y \circ H_{x,y} \circ h_x^{-1} \circ g_x^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde  $g_y : E^{uu}(y) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g_x : E^{uu}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$  são aplicações lineares que levam respectivamente os produtos internos em  $E^{uu}(y)$  e  $E^{uu}(x)$ , definidos pela métrica associada a  $\tau$ , no produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ . As aplicações  $h_x$  e  $h_y$  são nos moldes do Corolário 4.8 (ou seja ambas são de classe  $C^\infty$  e dependem continuamente de  $x$  e  $y$  respectivamente). Além disso, podemos pensar em  $V$  como um aberto contendo a origem de  $\mathbb{R}^n$ .

Da Seção 5.1 temos que a folheação estável fraca  $\mathcal{F}_a^s$  é de classe  $C^1$ , ou seja, as aplicações de holonomia são uniformemente de classe  $C^1$  (Pugh-Shub-Wilkinson [44]). Pela Proposição 5.1 a aplicação de holonomia  $H_{x,y}$  é conforme, assim pelas propriedades de  $g_x, g_y, h_x$  e  $h_y$  temos que  $G_{x,y}$  é também conforme e no mínimo de classe  $C^1$ .

No entanto, uma aplicação conforme de classe  $C^1$  é também de classe  $C^\infty$  (ver Hartman [20]). Ambas as aplicações  $g_y$  e  $h_y$  envolvidas na composição que define  $G_{x,y}$  dependem continuamente de  $y$  na topologia  $C^\infty$ , isso implica que  $H_{x,y}$  também depende continuamente de  $y$  na topologia  $C^\infty$ . Ou seja,  $H_{x,y}$  é uniformemente  $C^\infty$ . ■

## 5.2.2 Folheações Instáveis e Estáveis Suaves

Dada uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme  $\phi$ , com as hipóteses adicionais de irreduzibilidade a transitividade mostramos no Teorema B que  $\phi$  é  $u$ -conforme.

Além disso, no Lema 5.2 mostramos que neste caso a folheação estável fraca é suave. Mostraremos a seguir que uma ação Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme  $\phi$  com uma estrutura de  $k$ -contato generalizada (ver Definição 2.20) possui a folheação instável forte e a folheação estável forte suaves, para isso fixado  $a \in \mathcal{C}_0$  necessitamos que  $\dim(E_a^{ss}) = n = \dim(E_a^{uu})$  onde  $\dim(M) = 2n + k$  ( $n \geq 2$ ).

No lema a seguir provamos que se uma ação de  $k$ -contato generalizada é  $u$ -conforme, então essa ação é também  $s$ -conforme. Sadovskaya [46] mostra resultado similar para o caso de *fluxos Anosov de Contato e difeomorfismos simpléticos*.

**Lema 5.3.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $k$ -contato generalizada e  $u$ -conforme com relação a uma determinada métrica riemanniana  $g_u$  restrita a  $E_a^{uu}$ . Se,  $\dim(E_a^{ss}) = n = \dim(E_a^{uu})$ , então  $\phi$  é  $s$ -conforme com respeito a alguma métrica riemanniana  $g_s$  em  $E_a^{ss}$ .*

**Demonstração:** Dado  $x \in M$ , existe um isomorfismo  $\Psi_x : E_a^{uu}(x) \rightarrow (E_a^{uu})^*(x)$  onde  $(E_a^{uu})^*(x)$  é o espaço dos funcionais lineares de  $E_a^{uu}(x)$  (espaço dual). Assim, existe o fibrado dual  $(E_a^{uu})^*$  do fibrado  $E_a^{uu}$  sobre  $M$ . Neste caso, a métrica riemanniana  $g_u$  em  $E_a^{uu}$  que torna  $\phi$  uma ação Anosov  $u$ -conforme possui uma métrica dual  $g_u^*$  em  $(E_a^{uu})^*$ .

Denotamos por  $\tau_u$  a estrutura  $u$ -conforme associada a  $g_u$  e por  $\tau_u^*$  a estrutura  $u^*$ -conforme associada a  $g_u^*$ . Como  $\phi$  é  $u$ -conforme em relação a  $g_u$ , fixados  $x \in M$  e  $g \in \mathbb{R}^k$  a derivada  $D\phi_g$  faz o pullback de  $(g_u)_{\phi_g(x)}$  para  $(g_u)_x$  (Pelo Lema 4.2 isso é equivalente a  $\tau_u$  ser invariante por  $\phi$ , ou seja,  $\tau_u(x) = D\phi_g[\tau_u(\phi_g(x))]$ ). Portanto, a estrutura  $u^*$ -conforme  $\tau_u^*$  é invariante pela derivada dual, isso que dizer que, dados  $x \in M$  e  $g \in \mathbb{R}^k$  o isomorfismo  $(D\phi_g)^* = \Psi_{\phi_g(x)} \circ D\phi_g(x) \circ \Psi_x^{-1}$  (derivada dual) faz o pullback de  $\tau_u^*(\phi_g(x))$  para  $\tau_u^*(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} (E_a^{uu})^*(x) & \xrightarrow{(D\phi_g)^*} & (E_a^{uu})^*(\phi_g(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_a^{uu}(x) & \xrightarrow{D\phi_g} & E_a^{uu}(\phi_g(x)) \end{array}$$

Por hipótese, a ação Anosov  $\phi$  é associada a uma estrutura de  $k$ -contato generalizada (ver Definição 2.18). Assim, fixada uma 1-forma  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) temos por definição que  $d\alpha_i$  restrita a  $E_a^{uu} \oplus E_a^{ss}$  é não-degenerada. Como  $\dim(E_a^{ss}) = n = \dim(E_a^{uu})$ , para

cada  $x \in M$  definimos o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x : E_a^{ss}(x) & \longrightarrow & (E_a^{uu})^*(x) \\ w & \mapsto & f : E_a^{uu}(x) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & v \mapsto f(v) = d\alpha_i(v, w). \end{array}$$

A aplicação  $\Gamma^{-1}$  induz então uma métrica  $g_s$  em  $E_a^{ss}$ , denotamos por  $\tau_s$  a estrutura  $s$ -conforme associada a  $g_s$ . A invariância de  $\tau_u^*$  implica na invariância de  $\tau_s$  por  $\phi$ . Ou seja, a ação  $\phi$  é  $s$ -conforme em relação a  $g_s$ . ■

**Teorema C.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M$  ( $k \geq 2$ ) uma ação Anosov suave e de  $k$ -contato generalizada numa variedade fechada  $M$ . Se  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme, então esta ação possui a folheação estável forte e a folheação instável forte suaves.*

**Demonstração (do Teorema C):** Do Lema 3.5 temos que  $\phi$  é irredutível, com isso estamos nas hipóteses do Teorema B, ou seja, a ação  $\phi$  é  $u$ -conforme em relação a uma determinada métrica no fibrado instável forte. Pelo Lema 5.2 temos que  $\mathcal{F}_a^s$  é de classe  $C^\infty$ , logo dadas as 1-formas da Definição 2.18 (estrutura de  $k$ -contato generalizada) escrevemos o fibrado instável forte  $E_a^{ss}$  como a interseção de dois fibrados suaves

$$E_a^{ss} = E_a^s \cap \left( \bigcap_{i=1}^k \ker(\alpha_i) \right) = (E_a^{ss} \oplus T\phi) \cap (E_a^{ss} \oplus E_a^{uu})$$

e temos portanto que a folheação estável forte  $\mathcal{F}_a^{ss}$  também é de classe  $C^\infty$ .

Do Lema 5.3 temos que se a ação  $\phi$  é  $u$ -conforme, então  $\phi$  é  $s$ -conforme. Argumentando analogamente ao Lema 5.2 temos ainda que a folheação instável forte  $\mathcal{F}_a^u$  é suave. Escrevendo

$$E_a^{uu} = E_a^u \cap \left( \bigcap_{i=1}^k \ker(\alpha_i) \right) = (E_a^{uu} \oplus T\phi) \cap (E_a^{ss} \oplus E_a^{uu})$$

temos que a folheação estável forte  $\mathcal{F}_a^{uu}$  é de classe  $C^\infty$ . ■



## 5.3 Folheações Suaves: Uma Aplicação

Dado um sistema Anosov (difeomorfismo, fluxo ou Ação), ter a folheação estável forte e a folheação instável forte suaves permite aplicações no contexto de sistemas algébricos (ou quasealgébricos), assim mencionamos a seguir mais algumas definições e fatos básicos sobre grupos e álgebras de Lie (além daqueles do Capítulo 2) com a finalidade de obter um resultado de rigidez dado pelo Teorema A.

**Definição 5.2.** Seja  $G$  um grupo de Lie (ver Definição 2.1) e  $e$  o elemento neutro de  $G$ , dizemos que  $\mathfrak{g} = T_e G$  é a *álgebra de Lie* de  $G$ .

**Definição 5.3.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $g \in G$ , os difeomorfismos  $L_g : G \rightarrow G$  e  $R_g : G \rightarrow G$  definidos por  $L_g(h) = g \cdot h$  e  $R_g(h) = h \cdot g$  ( $h \in G$ ) são chamados de *translação a esquerda* e *translação a direita* respectivamente.

**Definição 5.4.** Um campo de vetores  $\hat{X}$  em  $G$  é dito *invariante a esquerda* (respectivamente *invariante a direita*) se  $DL_g(h) = \hat{X}(L_g(h))$  (respec.  $DR_g(h) = \hat{X}(R_g(h))$ ) para todos  $g, h \in G$ .

Da definição de invariância temos que, se um campo de vetores  $\hat{X}$  é invariante (a esquerda ou a direita) em  $G$  então  $\hat{X}$  fica completamente caracterizado por seu valor no elemento neutro, ou seja,  $\hat{X}(e)$ . De fato, basta tomar  $L_{h^{-1}}$  e  $R_{h^{-1}}$  para cada  $h \in G$ .

Além disso, existe uma bijeção entre o espaço dos campos de vetores invariantes a esquerda (respec. a direita) e a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , através da seguinte aplicação  $\hat{X} \mapsto \hat{X}(e) = X \in \mathfrak{g}$ . Se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , então temos bem definido o colchete de Lie  $[X, Y]$ . Dado  $X \in \mathfrak{g}$ , denotamos por  $\hat{X}$  o campo de vetores tal que  $\hat{X}(e) = X$

**Definição 5.5.** A aplicação

$$\begin{aligned} adX : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

é chamada de *adjunta* de  $X$ . Dizemos ainda que  $\mathfrak{g}$  (ou  $G$ ) é *nilpotente* se  $adX$  é um operador linear nilpotente para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .

No Capítulo 2 definimos o conceito de subgrupo de Lie (Definição 2.1). Alternativamente podemos definir um subgrupo de Lie  $H < G$  como sendo qualquer subvariedade

(subgrupo) *fechado*. Neste caso, o quociente  $G/H$  possui estrutura de variedade através da projeção  $\pi : g \mapsto g \cdot H \in G/H$  ( $g \in G$ ). A variedade  $G/H$  não é necessariamente um grupo de Lie, isso acontece quando  $H$  é um *subgrupo normal*.

Além de  $H$  subgrupo fechado normal de  $G$ , se tomarmos  $\Gamma < H$  podemos definir a seguinte ação em  $G/H$ :  $\Gamma \times G/H \rightarrow G/H$ , onde,  $(\gamma, (g \cdot H)) \mapsto \gamma \cdot (gH)$ . Denotamos por  $\Gamma \backslash G/H$  o espaço de órbita dessa ação.

**Definição 5.6.** Uma ação *algébrica* abeliana é dada por uma quádrupla  $(G, K, \Gamma, \mathfrak{h})$ , onde

- $G$  é um grupo de Lie conexo com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .
- $K$  é um subgrupo compacto de  $G$  com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{l}$ .
- $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}$ , contida no normalizador  $N_{\mathfrak{g}}\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{l}$  e tal que  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ .
- $\Gamma$  é um reticulado uniforme em  $G$  agindo livremente em  $G/K$ .

**Lema 5.4** (Barbot-Maquera [7]). *Uma ação algébrica  $(G, K, \Gamma, \mathfrak{h})$  é Anosov se, e somente se, existe um elemento  $h \in \mathfrak{h}$  e uma decomposição  $\mathfrak{g} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}$  (invariante por  $ad(h)$ ) tal que os autovalores de  $ad(h)|_{\mathcal{U}}$  (respectivamente  $ad(h)|_{\mathcal{F}}$ ) tem parte real estritamente positiva (respectivamente negativa).*

Em se tratando de difeomorfismos e fluxos Anosov algébricos, as definições podem ser encontradas em Bautista-Morales [8] - pág. 32. Ao trabalhar com ações Anosov e condições rígidas é esperado que as mesmas sejam conjugadas a ações algébricas. No entanto, os resultados até então são no contexto de ações *quasealgébricas*.

**Definição 5.7.** Uma ação *quasealgébrica* abeliana é dada por uma quádrupla  $(G, K, \Gamma, \mathfrak{a})$ , onde

- $G$  é um grupo de Lie conexo com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .
- $K$  é um subgrupo fechado de  $G$  com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ .
- $\mathfrak{a}$  é uma subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}$ , contida no normalizador  $N_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{h}$  e tal que  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ .

- $\Gamma$  é um subgrupo discreto agindo livremente em  $G/K$ , tal que,  $\Gamma \backslash G/K$  é compacto.

O grupo de Lie abeliano  $H$  associado com  $\mathfrak{a}$  age (localmente livre) no quociente  $\Gamma \backslash G/K$  por translação a direita.

**Teorema 5.1** (Almeida [2]). *Seja  $M$  uma variedade compacta suportando uma ação Anosov  $\phi$  associada a uma estrutura de  $k$ -contato generalizada e com fibrados fortes suaves. Então  $\phi$  é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação quasealgébrica. Se, além disso,  $\phi$  é “fiel” e  $H^1(\pi_1(M), \mathbb{R}) = 0$ , então o modelo quasealgébrico  $(G, K, \Gamma, \mathfrak{a})$  pode ser tomado com  $G$  semi-simples.*

Como consequência do Teorema C e do teorema anterior enunciamos a seguir o A. Esse resultado generaliza para o contexto de ações Anosov o trabalho de Benoist-Foulon-Labourie [9] onde é mostrado que fluxos Anosov de contato com fibrados fortes suaves são conjugados a fluxos algébricos.

**Teorema A** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  ( $k \geq 2$ ) uma ação Anosov suave e de  $k$ -contato generalizada numa variedade fechada  $M$  de  $\dim(M) = 2n + k$  ( $n \geq 2$ ). Se  $\phi$  é uniformemente  $u$ -quaseconforme, então esta ação é  $C^\infty$ -conjugada a uma ação Anosov quasealgébrica. Se, além disso,  $\phi$  é “fiel” e  $H^1(\pi_1(M), \mathbb{R}) = 0$ , então o modelo quasealgébrico  $(G, K, \Gamma, \mathfrak{a})$  pode ser tomado com  $G$  semi-simples.*

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSÃO / QUESTÕES EM ABERTO

Ao longo do trabalho desenvolvido e que resultou nesse texto, surgiram alguns questionamentos e possibilidades de estudos futuros, a saber:

- Em Barbot-Maquera [7] é definido o conceito de Ação Anosov de *grupos nilpotentes* e simplesmente conexos. Questionamos então se, o resultado principal dessa tese é válido nesse contexto, ou seja, quando a ação Anosov  $\phi$  for de um grupo  $H$  (de  $\dim k$ ) nilpotente e simplesmente conexo numa variedade fechada  $M$  (de  $\dim n + k$ ).
- Outro questionamento possível é sobre a possibilidade de conseguir um resultado análogo aquele Teorema 3 (para fluxos Anosov) em Fang [14]. Ou seja, dada uma ação Anosov  $\phi$  irredutível, uniformemente quaseconforme ( $u$ -conforme e  $s$ -conforme) com distribuições fortes suaves e que preserva volume, então  $\phi$  será conjugada a uma ação algébrica ou a uma suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$ .

No segundo questionamento incluímos como hipótese a ação  $\phi$  ter distribuições fortes suaves uma vez que não estamos supondo  $\phi$  ser de  $k$ -contato generalizada.

No resultado obtido (para fluxos) por Sadovskaya [46] a conjugação é feita em relação a um *fluxo geodésico* numa variedade de curvatura negativa *constante*. No caso de ações, questionarmos o seguinte:

- Para o modelo quasealgébrico o que é possível dizer sobre a curvatura de  $\Gamma \backslash G / K$ ?

Essencialmente, utilizamos a noção de ações de  $k$ -contato *generalizadas* no contexto de ações Anosov, no entanto, esse é um conceito geral. Sabemos que os sistemas Anosov, em particular Ações Anosov, nos permite afirmar que existe uma quantidade significativa

de órbitas compactas. Na verdade, o conjunto das órbitas compactas é denso no conjunto pontos não errantes (Proposição 2.3).

Na literatura existente, a *Conjectura de Weinstein* (ver por exemplo Hutchings [24]) é um fato bastante discutido e tem o seguinte enunciado: *Seja  $M$  uma variedade fechada, orientada e dimensão ímpar suportando uma forma de contato  $\lambda$ . Então o fluxo de Reeb associado possui uma órbita fechada.* Diante disso, surge então um novo questionamento:

- Dada uma ação (não Anosov) de  $k$ -contato generalizada (Seção 2.3), em quais condições existe uma órbita compacta? Intuitivamente, uma hipótese possível seria dotar o subfibrado  $F$  da decomposição  $T = I \oplus F$  com uma estrutura *uniformemente quaseconforme* e fazer o estudo de certas holonomias.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Van Nostrand, New York, 1966.
- [2] U. Almeida. *Contactt Anosov Actions With Smooth Invariant Bundles*. ICMC - USP São Carlos: Tese, 2018.
- [3] D. V. Anosov. Roughness of geodesic flows on compact manifolds of negative curvature (in russian). *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, 1962.
- [4] A. Arbieto and C. Morales. *Dynamics of Partial Actions*. Oxford Science Publications, Rio de Janeiro, 2009.
- [5] T. Barbot and C. Maquera. On condimension one anosov actions of  $\mathbb{R}^k$  that are suspensions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A*, 29(3):803–822, 2011.
- [6] T. Barbot and C. Maquera. Transitivity of codimension one anosov actions of  $\mathbb{R}^k$  on closed manifolds. *Erg. Theory and Dyn. Sys.*, 31:1–22, 2011.
- [7] T. Barbot and C. Maquera. Algebraic anosov actions of nilpotent lie groups. *Topology and its Applications*, 31(1):199–219, 2013.
- [8] S. Bautista and C. Morales. *Lectures on Sectional-Anosov Flows*. Monograph, Rio de Janeiro, 2010.
- [9] Y. Bernoist, P. Foulon, and F. Labourie. Flots d’anosov à distributions stables et instable différentiables. *J. Amer. Math. Soc.*, 5:33–74, 1992.
- [10] Y. Bernoist and F. Labourie. Sur les difféomorphismes d’anosov à feuilletages stables et instable différentiables. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 1(313):41–47, 1991.
- [11] C. Camacho and A. L. Neto. *Teoria Geométrica das Folheações*. IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

- [12] P. D. Carrasco and Federico Rodriguez-Hertz. Geometrical constructions of equilibrium states. *Mathematics Research Reports*, 2:45–54, 2021.
- [13] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2011.
- [14] Y. Fang. Smooth rigidity of uniformly quasiconformal anosov flows. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24:1937–1959, 2004.
- [15] Y. Fang. Geometric anosov flows of dimension five with smooth distributions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 4:333–362, 2005.
- [16] J. Franks. Anosov diffeomorphism. *Global Analysis (Proc. Symp. Pure Math.)*, *Math. Soc.*, 1970.
- [17] J. Franks and B. Williams. *Anomalous Anosov Flows*. Springer, Berlin, 1980.
- [18] E. Ghys. Flots d’anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4)20:251–270, 1987.
- [19] H. Grötzsch. Über die verzerrung bei schlichten nichtkonformen abbildungen und Über eine damit zusammenhängende erweiterung des picardschen satzes. -, 80:503–507, 1928.
- [20] P. Hartman. On isometries and on a theorem of liouville. *Math. Z.*, 69:202–210, 1958.
- [21] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [22] M. Hirsch and C. Pugh. Smoothness of horocycle foliations. *J. Differential Geometry*, 10:225–238, 1975.
- [23] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub. *Invariant Manifolds*. Cambridge University Press, USA, 1995.
- [24] M. Hutchings. Taubes’s proof of the weinstein conjecture in dimension three. *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society*, 47:73–125, 2009.

- [25] T. Iwaniec and G. Martin. *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*. IMPA (27<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática), New York, 2001.
- [26] J. Journé. A regularity lemma for functions of several variables. *Revista Matemática Iberoamericana*, 4:187–193, 1998.
- [27] B. Kalinin and V. Sadovskaya. On local and global rigidity of quasiconformal anosov diffeomorphisms. *Journal of The Institute of Mathematics of Jussieu*, 2:567–582, 2003.
- [28] B. Kalinin and V. Sadovskaya. Global rigidity for totally nonsymplectic anosov  $\mathbb{Z}^k$  actions. *Geometry and Topology*, 10:929–954, 2006.
- [29] B. Kalinin and R. Spatzier. On the classificatin of cartan actions. *GAFa, Geom. funct. anal*, 17:468–490, 2007.
- [30] M. Kanai. Differential-geometric studies on dynamics of geodesic and frame flows. *Japanese Journal of Mathematics. New Series*, 19:1–30, 1993.
- [31] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Springer, Berlin, 1977.
- [32] A. Katok and R. Spatzier. Differential rigidity of anosov actions of higher rank abelian groups and algebraic lattice actions. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 206:292–319, 1997.
- [33] M. Kreines. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables. *Mat. Sbornik*, 9:713–719, 1941.
- [34] F. Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projetive space. *Invent. Math.*, 2006.
- [35] M. Lavrentiev. Sur un critère différentiel des transformations homéomorphes des domaines à trois dimensions. *Dokl Akad*, 22:241–242, 1938.
- [36] O. Lehto and K. I. Virtanen. *Quasikonforme Abbildungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.



- [37] R. Lopes. *Ações Anosov que São Suspensões*. Tese - USP, São Carlos - SP, 2016.
- [38] N. Lusin. Sur les propriétés des fonctions mesurables. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 154:1688–1690, 1912.
- [39] H. Maas. *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*. Lecture Notes in Mathematics (Universitat Heidelberg), Berlin, 1971.
- [40] A. Markuševič. Sur certaines classes de transformations continues. *Dokl Akad*, 28:301–304, 1940.
- [41] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2010.
- [42] S. E. Newhouse. On codimension one anosov diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, 1970.
- [43] C. Pugh and M. Shub. Ergodicity of anosov actions. *Invent. Math.*, 15:1–23, 1972.
- [44] C. Pugh, M. Shub, and A. Wilkinson. Hölder foliations. *Duke Mathematical Journal*, 86:517–546, 1997.
- [45] N. Qian. *Rigidity Phenomena of Group Actions on a class of Nilmanifolds and Anosov  $\mathbb{R}^k$  Actions*. Tese - California Institute of Technology, 1992.
- [46] V. Sadovskaya. On uniformly quasiconformal anosov systems. *Math. Research Letters*, 12(2):425–441, 2005.
- [47] P. Tukia. On quasiconformal groups. *Journal D'Analyse Mathématique*, 46:318–346, 1986.
- [48] A. Verjovsky. Codimension one anosov flows. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 1974.
- [49] J. Väisälä. *Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

# ÍNDICE

- álgebra de Lie, 72
  - nilpotente, 72
- órbita em respeito a um subcone, 42
- ação, 15
  - órbita de uma ação, 16
  - algébrica, 73
  - Anosov, 22
  - Anosov  $s$ -conforme, 48
  - Anosov  $u$ -conforme, 47
  - Anosov Axioma A, 29
  - Anosov conforme, 48
  - Anosov de  $k$ -contato generalizada, 31
  - Anosov irreduzível, 41
  - Anosov irreduzível (codimensão 1), 41
  - Anosov suspensão, 24
  - Anosov transitiva em subcones, 42
  - Anosov uniformemente  $s$ -quaseconforme, 47
  - Anosov uniformemente  $u$ -quaseconforme, 47
  - Anosov uniformemente quaseconforme, 48
  - da Câmara de Weyl, 24
  - efetiva, 16
  - livre, 16
  - localmente livre, 16
  - minimal, 16
  - por isometrias, 38
  - quasealgébrica, 73
  - suspensão, 24
  - transitiva, 16
- adjunta, 72
- campo de planos, 19
  - involutivo, 19
- campo de vetores
  - invariante a direita, 72
  - invariante a esquerda, 72
- capítulo
  - Capítulo 1, 14
  - Capítulo 2, 32
  - Capítulo 3, 45
  - Capítulo 4, 64
- conjectura
  - de Katok-Spatzier, 10
  - de Weinstein, 76
  - generalizada de Verjovsky, 10
- conjunto
  - de Anosov, 23
  - regular, 23
- conorma, 61
- difeomorfismo

- $\xi$ -quaseconforme, 46
- Anosov, 22
- quaseconforme, 46
- dilatação linear, 46
- disco mínimo, 40
- elemento
  - Anosov, 22
  - regular, 22
- estrutura
  - $\sigma$ -conforme ( $\sigma = ss, uu$ ), 36
  - $\xi$ -conforme, 33
  - $u$ -conforme invariante, 48
  - de  $k$ -contato generalizada, 30
- fluxo
  - Anomalous Flow, 26
  - Anosov, 22
  - de Reeb, 30
  - induzido por um elemento Anosov, 46
- folheação, 18
  - estável forte, 22
  - estável fraca, 22
  - forte minimal, 43
  - instável forte, 22
  - intável fraca, 23
  - minimal, 42
- forma de contato, 76
- gerador infinitesimal, 17
- grupo, 14
  - de automorfismos, 19
  - de isotropia, 16
  - de Lie, 15
  - especial ortogonal, 15
  - linear, 15
  - linear especial, 15
  - ortogonal, 15
- holonomia uniformemente suave, 68
- ponto
  - não-errante, 27
  - não-errante com respeito a um subcone
    - Anosov, 28
- produto interno, 32
- representações, 19
  - lineares, 20
- subfibrado vetorial, 32
- subgrupo
  - de Lie, 15
  - maximal, 20
- subvariedade geodésica, 37
- Teorema
  - de Lusin, 55
  - Closing Lema (para ações Anosov), 27
  - da Decomposição Espectral, 29
  - da Seção  $C^r$ , 67
  - de Frobenius, 19
  - de Linearização, 60
  - de Recorrência de Poincaré, 29
  - de Verjovsky, 26
  - Teorema A, 74
  - Teorema B, 50

Teorema C, 71

translação

- a direita, 72
- a esquerda, 72

vizinhança produto local, 26