

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Mesek Felipe De Souza

**EXEMPLOS DE DESCONTINUIDADE PARA OS
EXPOENTES DE LYAPUNOV**

BELO HORIZONTE
2023

Mesek Felipe de Souza

**EXEMPLOS DE DESCONTINUIDADE PARA OS EXPOENTES DE
LYAPUNOV**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dr.^a Karina Marin

BELO HORIZONTE

2023

Souza, Mesek Felipe de.

S729e Exemplos de descontinuidade para os expoentes de Lyapunov [recurso eletrônico] / Mesek Felipe de Souza — 2023.
1 recurso online (88 f. il, color.): pdf.

Orientadora: Karina Daniela Marin.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 87 – 88

1. Matemática – Teses. 2. Expoentes de Lyapunov – Teses. 3. Teoria Ergódica– Teses. I. Marin, Karina Daniela. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Exemplos de descontinuidade para os
expoentes de Lyapunov*

MESEK FELIPE DE SOUZA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Profª. Karina Daniela Marín
UFMG

Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera
UFMG

Profª. Jennyffer Bohorquez
UFOP

Belo Horizonte, 03 de agosto de 2023.

Resumo

Este trabalho apresenta de forma expandida a construção de dois exemplos de descontinuidade dos expoentes de Lyapunov de um cociclo linear que toma valores em $SL(2, \mathbb{R})$ relativos a topologia α -Hölder, com $\alpha \in (0, \infty)$. A hipótese que o primeiro exemplo de descontinuidade utiliza é a desigualdade $2^{2\alpha} < \sigma$, para algum $\sigma > 1$, enquanto o segundo exemplo utilizará da hipótese de $\sigma^2 > 2^\alpha$, para que se escolha um $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ próximo suficiente de 1 e que ocorra $\sigma^{4p-2} \geq 2^\alpha$. Em particular o segundo exemplo de descontinuidade abrange o primeiro exemplo quando utiliza-se da hipótese $\sigma^2 > 2^{4\alpha}$.

Palavras-chaves: Expoentes de Lyapunov. Cociclo Linear. Teoria Ergódica.

Abstract

This work presents in an expanded form the construction of two examples of discontinuity of the Lyapunov exponents of a linear cocycle that takes values in $SL(2, \mathbb{R})$ relative to topology α -Hölder, with $\alpha \in (0, \infty)$. The hypothesis that the first example of discontinuity uses is the inequality $2^{2\alpha} < \sigma$, for some $\sigma > 1$, while the second example will use the hypothesis of $\sigma^2 > 2^\alpha$, so that $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ is chosen close enough to 1 and $\sigma^{4p-2} \geq 2^\alpha$ occurs. In particular, the second example of discontinuity covers the first example when the inequality $\sigma^2 > 2^{4\alpha}$ is used.

Key-words: Lyapunov exponents. Linear Cocycle. Ergodic Theory.

Sumário

1	Preliminares	9
1.1	Revisão de Teoria Ergódica	9
1.2	Deslocamento de Bernoulli	17
1.3	Expoentes de Lyapunov	21
2	Exemplo de Bocker-Viana	27
2.1	Construção da perturbação	27
2.2	Cálculo dos expoentes da perturbação	36
3	Exemplo de Butler	41
3.1	Notações e definições	41
3.2	Cálculo dos expoentes da perturbação	66
3.2.1	Primeira etapa	67
3.2.2	Segunda etapa	77
3.2.3	Terceira etapa	78
3.3	Teorema Principal	82
	Referências	83

Introdução

Os expoentes de Lyapunov tiveram sua aplicabilidade em estudos iniciada no trabalho [11] de Lyapunov. Este objeto também se conecta ao estudo de dinâmica suave como se vê no trabalho de Pensin [17]. Outra aplicabilidade para eles se encontra nos estudos de estabilidade de equações diferenciais como é apresentado no livro de Viana [19] ou em [3].

Tendo em vista a aplicação no estudo de estabilidade de equações diferenciais, a teoria de estabilidade de Lyapunov, resumida de forma simplória, utiliza destes objetos para estudar como a estabilidade, das equações, interpretadas como sistemas dinâmicos, se comporta ao ocorrer perturbações. Reforçando essa teoria, os trabalhos de Furstenberg e Kesten [9] e o de Oseledets [16] trouxeram uma abordagem no sentido de teoria ergódica para os expoentes de Lyapunov. Portanto o problema de estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos está relacionado indiretamente ao problema da continuidade dos expoentes. Compreendendo esta relação estabelecida, se elabora a questão de quais regularidades sobre esse objetos são necessárias para se ter continuidade.

Estudar a continuidade é um problema que está relacionado tanto com a topologia quanto com o sistema dinâmico. Ao se fixar um sistema dinâmico ergódico o estudo da continuidade se restringe a estudar as perturbações sobre os valores em $GL(d, \mathbb{R})$, e como se comportam os expoentes após a perturbação.

Em algumas situações a continuidade foi estipulada, isso é apresentado nos trabalhos de Neto e Viana [15] e no trabalho de Malheiro e Viana [12]. Em [15] a continuidade dos expoentes de Lyapunov é estabelecida para cociclos localmente constantes que assumem valores em $GL(2, \mathbb{C})$ sobre um deslocamento de Bernoulli, já em [12] é sobre um deslocamento de Markov.

No trabalho de Bochi [4] é apresentado que, se fixar um sistema ergódico, existirá um conjunto residual tal que, ou os cociclos lineares são hiperbólicos ou possuem expoentes de Lyapunov nulos. De certo modo, isso indica que a continuidade na topologia C^0 , para o caso de um sistema ergódico é dada pelos elementos deste conjunto residual. Ainda como consequência do trabalho [4] segue que a descontinuidade na topologia C^0 é típica.

Expandindo o estudo da continuidade para outras topologias, em particular as topologias α -Hölder, se tem outro aspecto no estudo dado pela conjectura de Viana [19]. A conjectura indica que os expoentes de Lyapunov, ligados a uma família de cociclos α -Hölder contínua que possuem holonomias estáveis e instáveis que variam continuamente,

são contínuos.

Buscado a resposta da conjectura, o trabalho de Backes, Brown e Butler [2] prova que os expoentes variam continuamente quando restritos ao espaço dos cociclos α -Hölder contínuos que satisfazem a condição de *fiber-bunched*. Estendendo o resultado apresentado em [2] o trabalho de Freijo e Marin [8], prova a continuidade dos expoentes para cociclos não uniformemente *fiber-bunched*.

O exemplo apresentado no artigo de Neto e Viana [15], apresenta a não ocorrência de continuidade na topologia α -Hölder, quando se está em uma das condições fora da hipótese de *fiber-bunched*. Já no exemplo apresentado no trabalho de Butler [5], mostra-se que mesmo bem próximo de satisfazer a condição de *fiber-bunched* ainda vale a descontinuidade para os expoentes.

Por fim destaca-se, como mencionado no trabalho [5], que as situações $2^\alpha \leq \sigma^2 \leq 2^{2\alpha}$ e $\sigma^{4p-2} < 2^\alpha$, com um $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, permanecem sem resposta, sobre a ocorrência de descontinuidade ou continuidade.

O texto está organizado da seguinte forma, no capítulo 1 são apresentados de forma resumida o necessário sobre os resultados e definições de teoria ergódica e expoentes de Lyapunov que possibilitam a compreensão dos capítulos seguintes. Já no capítulo 2 é apresentado o primeiro exemplo de descontinuidade para os expoentes de Lyapunov, que pode ser encontrado em [15]. Já no capítulo 3 é apresentado um exemplo de descontinuidade que generaliza o exemplo do capítulo 2, esse exemplo de descontinuidade, expandido no capítulo 3, pode ser encontrado em [5].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é objetivado a conceitos iniciais para se compreender as construções dos exemplos de descontinuidade que serão apresentados nos capítulos 2 e 3, como também compreender parte da teoria e seus principais resultados. A revisão será breve tendo foco apenas no necessário para a compreensão do texto, mas existe muitos resultados e aplicações distintas ao que se limita nesse texto.

1.1 Revisão de Teoria Ergódica

Nesta seção serão introduzidos alguns conceitos de Teoria Ergódica, que são utilizados durante a construção dos exemplos de descontinuidade. Para estudos aprofundados pode-se consultar as principais referências desta seção, que são [20] e [13].

Inicia-se abordando o que é uma medida invariante e algumas de suas propriedades. Em seguida será apresentado o teorema ergódico de Birkhoff, a definição de ser ergódico e algumas equivalências para essa respectiva propriedade. Por fim, apresenta-se o sistema dinâmico denominado deslocamento de Bernoulli, junto a prova desse ser um sistema ergódico.

A seguir define-se uma medida invariante. Medidas invariantes aparecem nos estudos de mecânica, probabilidades e teoria dos números. Uma forma de se interpretar uma medida invariante é a de que não ocorrer grandes distorções sobre uma determinada σ -álgebra, após uma aplicação mensurável agir sobre ela.

Definição 1.1 (Medida invariante) *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Diz-se que uma transformação mensurável $f : M \rightarrow M$ preserva a medida μ , ou que μ é invariante por f , se para todo $C \in \mathcal{A}$, sua pré-imagem $f^{-1}(C)$ satisfaz $\mu(C) = \mu(f^{-1}(C))$.*

Pela Definição 1.1 há que a medida de todo conjunto mensurável deve coincidir com a medida de sua pré-imagem por f para se concluir a invariância. Porém a próxima proposição indica que se obter a invariância de uma medida para uma álgebra se obterá

a invariância para a sua σ -álgebra gerada. A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [20]

Proposição 1.2 *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita em M . Suponha que exista uma álgebra \mathcal{A} de subconjuntos mensuráveis de M tal que \mathcal{A} gera a σ -álgebra \mathcal{B} de M e $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Então o mesmo vale para todo conjunto $E \in \mathcal{B}$, isto é, a medida μ é invariante por f .*

Uma outra forma de se obter uma medida invariante por uma transformação f , é utilizar de medidas definidas por combinações convexas de medidas invariantes por f já conhecidas, como será observado a seguir.

Observação 1.3 *Sejam μ_1 e μ_2 medidas finitas invariantes pela transformação f então há que $\mu = (1 - t)\mu_1 + t\mu_2$ também é uma medida finita invariante por f , para qualquer $t \in (0, 1)$.*

O próximo teorema afirma que uma medida invariante finita induz a propriedade de recorrência sobre os pontos de conjuntos mensuráveis de medida não nula. A recorrência é o atributo de um ponto retornar ao seu conjunto inicial infinitas vezes por iterações de uma transformação. A demonstração deste teorema está disponível para consulta em [20]

Teorema 1.4 (Recorrência de Poincaré) *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável, μ uma medida finita invariante por f e $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ está em E .*

Apesar do Teorema 1.4 indicar a existência da recorrência, não se têm mais nenhuma informação sobre o acontecimento dessa propriedade, isto é, não se tem informações adicionais sobre o número de iterações necessárias para cada retorno do ponto pela transformação. Para possibilitar a determinação e indicativos de propriedades sobre o retorno do ponto ao seu conjunto original define-se a função de primeiro retorno. E através do estudo dessa sobre o ponto e suas iteradas se busca mais informações sobre a recorrência.

Definição 1.5 *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável, μ uma medida finita invariante por f e $E \subset M$ um conjunto mensurável qualquer com $\mu(E) > 0$. Então a função de tempo de primeiro retorno $\rho_E : E \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ que é dada por*

$$\rho_E(x) = \min\{n \geq 1; f^n(x) \in E\},$$

sempre que existir uma iterada de x dentro de E , caso contrário, $\rho_E(x) = \infty$.

A função tempo de primeiro retorno exhibe o número de iterações necessárias para que o ponto efetue seu primeiro retorno ao conjunto de partida. Essa informação junto a transformação f permite definir outra função, a função de primeiro retorno, que fornece ponto iterado o número de vezes suficiente para que esteja de volta ao conjunto inicial.

Definição 1.6 *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita invariante por f , $E \subset M$ um conjunto mensurável qualquer com $\mu(E) > 0$ e ρ_E é a respectiva função de tempo de primeiro retorno a E . Então define-se a função de retorno a E como $f^{\rho_E} : E \rightarrow E$ dada por*

$$f^{\rho_E}(x) = f^{\rho_E(x)}(x).$$

O próximo resultado apresenta algumas propriedades da função tempo de primeiro retorno. Essas propriedades serão revisitadas após se desenvolver alguns conceitos sobre o sistema ser ergódico.

Teorema 1.7 (Kač) *Seja $f : M \rightarrow M$, μ uma medida finita, invariante por f e E um subconjunto mensurável com medida positiva. Então a função ρ_E é integrável e*

$$\int_E \rho_E d\mu = \mu(M) - \mu(E_0^*),$$

em que $E_0^* = \{x \in M; f^n(x) \notin E \text{ para todo } n \geq 0\}$, isto é, E_0^* é o conjunto dos pontos de M que nunca entram em E .

Demonstração:

Para cada $n \geq 1$, define-se os conjuntos

$$E_n = \{x \in E; f(x) \notin E \dots f^{n-1}(x) \notin E, \text{ mas } f^n(x) \in E\},$$

$$E_n^* = \{x \in M; x \notin E, f(x) \notin E \dots f^{n-1}(x) \notin E, \text{ mas } f^n(x) \in E\}.$$

Observa-se que E_n é o conjunto dos pontos de E que fazem o primeiro retorno a E na n -ésima iterada. Em outras palavras,

$$E_n = \{x \in E; \rho_E(x) = n\}.$$

Já E_n^* é o conjunto dos pontos que iniciam fora de E e entram em E pela primeira vez na n -ésima iterada. Esses dois conjuntos são mensuráveis e conseqüentemente a função ρ_E será mensurável.

Os conjuntos E_n e E_n^* são disjuntos dois a dois para cada $n \geq 0$, pois $E_n \subset E$ e $E_n^* \subset E^c$. E a união $\bigcup_n E_n \cup E_n^*$ é todo o espaço M , pois os pontos que não regressão a E ou os que nunca entram estão em E_∞ e E_∞^* . Portanto

$$\begin{aligned}
\mu(M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) + \mu(E_n^*) \\
&= \mu(E_0) + \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \mu(E_n^*) \\
&= \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \mu(E_n^*).
\end{aligned}$$

Agora observa-se que se $f(y) \in E_n^*$, então o primeiro iterado de $f(y)$ que está em E é $f^n(f(y)) = f^{n+1}(y)$. Este caso só pode ocorrer se, e somente se ou $y \in E_{n+1}$ ou $y = E_{n+1}^*$. Concluindo que para todo n há que

$$f^{-1}(E_n^*) = E_{n+1}^* \cup E_{n+1}.$$

Pela invariância de μ segue que, para todo n ,

$$\mu(E_n^*) = \mu(f^{-1}(E_n^*)) = \mu(E_{n+1}^* \cup E_{n+1}) = \mu(E_{n+1}^*) + \mu(E_{n+1}). \quad (1.1)$$

Aplicando a relação (1.1) repetidas vezes e obtêm-se que, para todo $m > n$ é válido

$$\mu(E_n^*) = \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^m \mu(E_i).$$

Retomando que $\mu(M) = \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \mu(E_n^*)$, observa-se que $\mu(E_m^*) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Logo quando $m \rightarrow \infty$ ocorre que,

$$\mu(E_n^*) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Por fim, destaca-se que

$$\begin{aligned}
\mu(M) - \mu(E_0^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^* + \mu(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{n-1}^*) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) \\
&= \int_E \rho_E d\mu.
\end{aligned}$$

■

Outra forma de se obter informações sobre a recorrência de um ponto é estudar o

tempo médio de visita de x a E . O tempo médio de visita de x a E é definido como $\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\}$. O próximo teorema expõe informações sobre a existência e integrabilidade do tempo médio de visita. A demonstração do teorema pode ser encontrada em [13], já em [20] é provado o Teorema ergódico sub-aditivo, que se pode obter o resultado enunciado a seguir como consequência.

Teorema 1.8 (Birkhoff) *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma transformação que preserva a medida μ . Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in L^1(\mu)$ então o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)),$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, se a função $\phi \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, a função definida por

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)),$$

satisfaz $\tilde{\phi} \in L^p(\mu)$ e

$$\int_M \tilde{\phi} d\mu = \int_M \phi d\mu.$$

Destaca-se que o teorema anterior prova a existência de um limite para uma função integrável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para concluir a existência de $\tau(E, x)$ deve se recordar que $\#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\} = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))$, $\chi_E : M \rightarrow \mathbb{R}$ e χ_E é integrável. Apesar do Teorema 1.8 ser conhecido como teorema ergódico de Birkhoff, a propriedade de um sistema dinâmico ser ergódico não é caracterizado pelo respectivo teorema, isto é, o sistema ser ergódico não é expressa pela existência do limite. Ver-se-á que essa propriedade está conectada com o valor do limite que define $\tau(E, x)$.

Antes de se apresentar a definição de um sistema ser ergódico é necessário uma definição prévia. A definição a seguir indica quando uma função φ é invariante por uma transformação f . Em particular através dessa definição seguirá como um conjunto é invariante.

Definição 1.9 *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade, $f : M \rightarrow M$ e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Diz-se que φ é f -invariante se $\varphi = \varphi \circ f$ em μ -quase todo ponto. Um conjunto mensurável $A \subset M$ é f -invariante se a função χ_A for f -invariante.*

Em resumo um conjunto mensurável A será invariante pela transformação f se $\mu((A \cup f^{-1}(A)) \setminus (A \cap f^{-1}(A))) = 0$, isto é, A é f -invariante se a diferença entre $A \cup f^{-1}(A)$ e $A \cap f^{-1}(A)$ tem medida nula. Isso indica que $A \cap f^{-1}(A)$ concentra a medida dos conjuntos A e $f^{-1}(A)$, ou seja, a medida da diferença entre A e sua pré-imagem por f é nula. Fixada a ideia de um conjunto invariante pela transformação f , pode-se definir uma medida invariante ergódica em relação a sua aplicação de invariância.

Definição 1.10 (Sistema ergódico) Uma transformação mensurável $f : M \rightarrow M$ é dita ergódica com respeito a uma medida finita invariante μ se todo conjunto f -invariante possui medida μ igual a 0 ou a 1.

Na Proposição 1.11, mostrar-se-á que o sistema (f, μ) ser ergódico possui várias equivalências.

Proposição 1.11 *As seguintes propriedades são equivalentes*

1. $f : M \rightarrow M$ é ergódica para uma medida finita invariante μ .
2. Se $\varphi \in L^1(\mu)$ é f -invariante então φ é constante, em μ -quase todo ponto.
3. Para toda $\varphi \in L^1(\mu)$, $\tilde{\varphi} = \int \varphi d\mu$ em μ -quase todo ponto.
4. $\tau(E, x) = \mu(E)$ para μ -quase todo ponto $x \in M$ e para todo $E \in \mathcal{A}$.

Demonstração:

1 \implies 2

Suponha que (f, μ) seja um sistema ergódico. Mostrar-se-á que dado uma função $\phi \in L^1(\mu)$ que é invariante pela aplicação f , então ela será constante para μ -quase todo ponto. Dado $\phi \in L^1(\mu)$, invariante por f , toma-se o conjunto $A_c = \{x \in M; \phi(x) \leq c\}$, nota-se A_c é invariante por f , pois ϕ é f invariante, então $X = \{x \in M; \phi(f(x)) \neq \phi(x)\}$ é tal que $\mu(X) = 0$.

E em particular $\mu((A_c \cup f(A_c)) \setminus (A_c \cap f(A_c))) = \mu(X) = 0$, recorda-se que $A_c \cap f(A_c)$ é o conjunto dos $x \in M$ que vale a igualdade $\phi(f(x)) = \phi(x)$.

Como (f, μ) é ergódico os conjuntos invariantes tem medida em $\{0, 1\}$, logo $\mu(A_c) = 0$ ou $\mu(A_c) = 1$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Então considere $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\psi(c) = \mu(A_c)$. Destaca-se que ψ é não decrescente, pois se $c_1 < c_2$, então $A_{c_1} \subset A_{c_2}$, logo $\mu(A_{c_1}) \leq \mu(A_{c_2})$, por propriedade de medida.

Como $\phi \in L^1(\mu)$ deve existir $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) \leq \bar{c}$ para μ -quase todo ponto. Então $\mu(A_c) = 0$ para todo $c < \bar{c}$ e $\mu(A_c) = 1$ para todo $c > \bar{c}$.

Pela definição de A_c e propriedade de \bar{c} segue que $\phi(x) = \bar{c}$ em μ -quase todo ponto.

2 \implies 3

Agora mostrar-se-á que se toda função $\phi \in L^1(\mu)$ que é f -invariante e constante em μ -quase todo ponto então $\tilde{\phi}(x) = \int \phi d\mu$

Nota-se que $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$ e,

$$\tilde{\phi}(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(f(x))) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \phi(f^j(x)) = \tilde{\phi}(x).$$

Logo $\tilde{\phi}$ é f - invariante então é constante igual a K e portanto pelo Teorema 1.8 segue que

$$\int \phi d\mu = \int \tilde{\phi} d\mu = \int K d\mu = K = \tilde{\phi}.$$

3 \implies 4

Se $\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))$ então conclui-se que $\tau(E, x) = \mu(E)$, para μ -quase todo ponto x e todo conjunto $E \in \mathcal{A}$.

4 \implies 1

Por outro lado, suponha que $\tau(E, x) = \mu(E)$, para μ -quase todo ponto e $E \in \mathcal{A}$.

Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que A é f invariante então $\chi_A = \chi_A \circ f$ e $\mu(A) > 0$. Observa-se que

$$\tau(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(x) = 1.$$

Pela hipótese segue que $\mu(A) = \tau(A, x) = 1$. Portanto, ou $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$, concluindo que (f, μ) é ergódico. ■

Como é apresentado no item 4 da Proposição 1.11, em um sistema ergódico o tempo médio de visita de x a E coincide com a medida de E . Essa informação conecta o Teorema 1.8 com a propriedade de f ser ergódica em relação a medida μ . Outra informação adquirida quando se trabalha com um sistema dinâmico ergódico é referente ao Teorema 1.7. Na próxima observação se exhibe que para f ergódica em relação a μ ocorre $\int_E \rho_E d\mu = \mu(M)$.

Observação 1.12 *Considere as hipótese do teorema 1.7. Quando f é ergódica para a medida μ segue que $\mu(E_0^*) = 0$ e portanto $\int_E \rho_E d\mu = \mu(M)$. Nota-se que E_0^* é invariante pela aplicação f , pois $f^{-1}(E_0^*) = E_0^* \cup E_0$. Como f é ergódica, então $\mu(E_0^*) = 0$ ou $\mu(E_0^*) = 1$. Se a medida fosse 1, então $\mu(E) = 0$, contradizendo a hipótese do Teorema 1.7. Logo $\mu(E_0^*) = 0$. Substituindo o valor na expressão do Teorema 1.7 conclui-se a observação.*

As medidas ergódicas são elementos especiais dentro do conjunto das medidas finitas invariante por uma mesma aplicação f . Em particular da observação 1.3 o conjunto das medidas finitas invariantes por f é convexo. E a próxima proposição mostrará que as medidas ergódicas são elementos extremais desse conjunto.

Proposição 1.13 *Uma probabilidade invariante μ é ergódica se, e somente se, não é possível escrevê-la na forma $\mu = (1 - t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0, 1)$ e μ_1, μ_2 probabilidades invariantes distintas.*

Demonstração:

Suponha que (f, μ) seja um sistema ergódico e $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$, para algum $t \in (0, 1)$ e μ_1, μ_2 probabilidades invariantes distintas.

Nota-se que $\mu_1 \ll \mu$, pois se $\mu(E) = 0$, segue de $(1-t), t > 0$ e as medidas positivas que $\mu_1(E) = 0$.

Aplica-se o Teorema de Radon-Nikodym, enunciado em [13] e se obtêm $\mu_1(E) = \int_E g d\mu$ em que, $g = \frac{d\mu_1}{d\mu}$.

Como μ_1 e μ_2 são invariantes por f segue que,

$$\mu_1(f(A)) = \int_{f(A)} g d\mu = \int_A g(f^{-1}(A)) d\mu = \int_A g d\mu = \mu_1(A),$$

logo a derivada de Radon-Nikodym g é f -invariante. Como μ é ergódica em relação a f segue que g deve ser constante, portanto

$$\mu_1(A) = \int_A K d\mu = K\mu(A).$$

Portanto, $\mu = \mu_1$, de forma exatamente semelhante prova-se que $\mu = \mu_2$. O que gera a contradição de $\mu_1 \neq \mu_2$. Então μ não pode ser escrita como $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$.

Seja μ invariante por f , não ergódica. Então existe $A_0 \in \mathcal{A}$, que é f -invariante e satisfaz $0 < \mu(A_0) < 1$.

Pode-se definir as medidas μ_i , para $i = 1, 2$, como $\mu_1(A) = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)}$ e $\mu_2(A) = \frac{\mu(A \cap A_0^c)}{\mu(A_0^c)}$. De fato μ_i são invariantes por f , pois $\mu_1(A) = \frac{1}{\mu(A_0)}\mu(A \cap A_0) = \frac{1}{\mu(A_0)}\mu(f^{-1}(A \cap A_0))$, pela invariância de μ , segue análogo para μ_2 .

Logo pode-se escrever $\mu = \mu(A_0)\mu_1 + \mu(A_0^c)\mu_2$.

■

Para finalizar a seção de revisão dos conceitos de Teoria ergódica apresenta-se o último objeto dessa seção.

Definição 1.14 *Sejam μ e ν probabilidades invariantes por transformações $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$, respectivamente Diz-se que os sistemas (f, μ) e (g, ν) são ergodicamente equivalentes quando pode-se escolher conjuntos mensuráveis $X \subset M$ e $Y \subset N$ com $\mu(M \setminus X) = 0$ e $\nu(N \setminus Y) = 0$ e uma bijeção mensurável $\phi : M \rightarrow Y$ com inversa mensurável de tal forma que $\phi_*\mu = \nu$ e $\phi \circ f = g \circ \phi$.*

1.2 Deslocamento de Bernoulli

Após a exibição de algumas propriedades das medidas invariantes e medidas ergódicas o restante desta seção construirá o sistema dinâmico denominado deslocamento de Bernoulli. Esse sistema dinâmico será utilizado na construção dos exemplos de descontinuidade dos capítulos 2 e 3.

Para iniciar essa construção do deslocamento de Bernoulli, primeiro se construirá o espaço em que se definirá a transformação e a medida. A próxima definição trata do espaço produto de um espaço de medida.

Definição 1.15 *Seja (M, \mathcal{A}, ν) um espaço de probabilidade, o espaço produto à partir de M será definido por $\Sigma = \prod_{j \in \mathcal{I}} M = \{(x_j)_{j \in \mathcal{I}}; x_j \in M\}$, em que \mathcal{I} é o conjunto de índice, em que assumisse tanto $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ quanto $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$.*

O espaço Σ é o espaço das sequências infinitas com valores em M . Quando o conjunto de índice é \mathbb{N} os elementos de Σ são as sequências unilaterais, já no caso de I ser \mathbb{Z} os elementos são as sequências bilaterais. Se M for finito de cardinalidade K se denota Σ por Σ_K . Feito essas observações sobre a definição anterior, munir-se-á Σ com uma σ -álgebra. Para tal, a próxima definição apresentará os subconjuntos que compõem a álgebra geradora.

Definição 1.16 *Define-se os cilindros de Σ como os subconjuntos da forma $[m; A_m \dots, A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : x_i \in A_i \text{ para } m \leq i \leq n\}$, em que $A_j \in \mathcal{A}$, para $m \leq j \leq n$.*

De fato os cilindros possuem uma estrutura de álgebra. E a σ -álgebra produto será a definida pela σ -álgebra gerada pela álgebra dos cilindros.

Definição 1.17 *A σ -álgebra produto do espaço Σ , denotada por \mathcal{B} será a σ -álgebra gerada pela álgebra dos cilindros, isto é, a σ -álgebra gerada pelas uniões finitas de cilindros disjuntos dois-a-dois.*

Após a definição do espaço mensurável (Σ, \mathcal{B}) , o próximo teorema garante a existência de uma medida finita que torna $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma demonstração para este teorema se encontra em [10]. A medida advinda do referido resultado será denominada medida produto e consequentemente $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ será denominado o espaço de probabilidade produto.

Teorema 1.18 *Seja (M, \mathcal{A}, ν) um espaço de probabilidade. Existe uma única medida μ em (Σ, \mathcal{B}) tal que $\mu([m; A_m \dots, A_n]) = \nu(A_m) \dots \nu(A_n)$ para qualquer cilindro $[m; A_m \dots, A_n]$. Em particular, μ é uma probabilidade.*

Finalmente definir-se-á o deslocamento de Bernoulli como a dupla (f, μ) . Em que f é a aplicação deslocamento dada por

$$\begin{aligned} f: \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (x_n)_n &\mapsto (x_{n+1})_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

e a medida μ é dada pelo espaço de probabilidade produto $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$. Mostrar-se-á que f é ergódica para μ .

Primeiramente será mostrado que de fato μ é invariante por f . A ideia da demonstração é estender a invariância da medida na álgebra dos cilindros pela Proposição 1.2.

Proposição 1.19 *Sejam $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ o espaço de probabilidade produto, a aplicação f definida em (1.2). Então a medida μ é invariante pela transformação f .*

Demonstração:

Para provar que de fato a medida μ é invariante pelo deslocamento, provar-se-á que a propriedade de invariância é válida para a álgebra dos cilindros. Pela Proposição 1.2 a invariância da medida para álgebra se estende para a respetiva σ -álgebra gerada.

$$\mu(f^{-1}([m; A_m \dots, A_n])) = \prod_{i=m}^n \nu(A_i) = \mu([m; A_m \dots, A_n]). \quad (1.3)$$

Concluindo que a medida μ é invariante nos cilindros. Como a σ -álgebra do espaço produto é gerada pela álgebra dos cilindros, concluindo assim a invariância. ■

O próximo resultado indica ao se considerar uma σ -álgebra \mathcal{A} gerada por uma álgebra \mathcal{B} sempre existirá um elemento da álgebra que tem medida suficientemente próxima de um elemento da σ -álgebra.

Teorema 1.20 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e seja \mathcal{A} uma álgebra que gera a σ -álgebra \mathcal{B} . Então para todo $\varepsilon > 0$ e todo $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) < \varepsilon$*

O próximo lema é o segundo resultado auxiliar mencionado anteriormente, que será utilizado na prova de f ser ergódica para μ . Este lema apresenta uma relação entre a medida de cilindros e a pré-imagem deles pela aplicação de deslocamento f .

Lema 1.21 *Se B e C são uniões finitas de cilindros disjuntos dois-a-dois, então tem-se*

$$\mu(B \cap f^{-j}(C)) = \mu(B)\mu(f^{-j}(C)) = \mu(B)\mu(C),$$

para todo j suficientemente grande.

Demonstração:

Primeiro suponha que os conjuntos B e C são cilindros da forma, $B = [k; B_k, \dots, B_l]$ e $C = [m; C_m, \dots, C_n]$. Então,

$$f^{-j}(C) = [m + j; C_m, \dots, C_n], \text{ para cada } j.$$

Tome j suficientemente grande, tal que $m + j > l$. Segue que

$$\begin{aligned} B \cap f^{-j}(C) &= \{(x_n)_n; x_k \in B_k, \dots, x_l \in B_l, x_{m+j} \in C_m, \dots, x_{n+j} \in C_n\} \\ &= [k; B_k, \dots, B_l, M \dots M, C_m, \dots, C_n]. \end{aligned}$$

Também há que M aparece $m + j - l - 1$ vezes. Pela definição da medida em (1.3) segue que,

$$\begin{aligned} \mu(B \cap f^{-j}(C)) &= \prod_{i=k}^l \nu(B_i) \prod_{i=l}^m \nu(M) \prod_{i=m}^n \nu(C_i) \\ &= \mu(B) 1^{m+j-l-1} \mu(C) = \mu(B)\mu(C). \end{aligned}$$

Para o caso geral, destaca-se que μ é finitamente aditiva. Então conclui-se o resultado para caso de uniões finitas de cilindros. ■

O resultado final desta seção é a prova de f ser ergódica para a medida produto.

Proposição 1.22 *Todo deslocamento de Bernoulli (f, μ) é ergódico.*

Demonstração:

Seja A um conjunto invariante pelo deslocamento f . Inicia-se com o caso em que A é elemento da álgebra da uniões finitas de cilindros disjuntos. Pelo Lema 1.21 anterior, tomando $B = C = A$ segue que para j suficientemente grande $\mu(A \cap f^{-j}(A)) = \mu(A)^2$. Mas de A ser invariante por f , segue que $f^{-j}(A) = A$ e portanto $\mu(A \cap A) = \mu(A)^2$, logo

$$\mu(A) = \mu(A)^2,$$

que ocorre apenas quando $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.

Para o caso em que A é um conjunto mensurável e invariante qualquer, pode-se aproximar conjuntos da σ -álgebra por conjuntos da álgebra que a gera pelo Teorema 1.20, logo dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe B na álgebra geradora tal que $\mu(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{4}$, em que, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ denota a diferença simétrica entre os conjuntos A e B .

Pelo Lema 1.21 pode-se fixar um j suficientemente grande tal que,

$$\mu(B \cap f^{-j}(B)) = \mu(B)\mu(f^{-j}(B)) = \mu(B)^2.$$

E também há que,

$$\begin{aligned}
|\mu(A)^2 - \mu(B)^2| &\leq 2|\mu(A) - \mu(B)| \\
&\leq 2|\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A)| \\
&\leq 2(|\mu(A \setminus B)| + |\mu(B \setminus A)|) \\
&\leq 2\mu(A\Delta B) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Observa-se que a diferença simétrica $(A \cap f^{-j}(A)\Delta B \cap f^{-j}(B))$ está contida em $(A\Delta B) \cup (f^{-j}(A)\Delta f^{-j}(B)) = (A\Delta B) \cup f^{-j}(A\Delta B)$.

Então como μ é invariante por f , segue que

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap f^{-j}(A)) - \mu(B \cap f^{-j}(B)) &\leq \mu(A \cap f^{-j}\Delta B \cap f^{-j}(B)) \\
&\leq \mu((A\Delta B) \cup f^{-j}(A\Delta B)) \\
&\leq \mu(A\Delta B) + \mu(f^{-j}(A\Delta B)) \\
&= 2\mu(A\Delta B) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ao juntar as relações anteriores segue que

$$\begin{aligned}
|\mu(A) - \mu(A)^2| &= |\mu(A \cap f^{-j}(A)) - \mu(A)^2| \\
&\leq |\mu(A \cap f^{-j}(A)) - \mu(B \cap f^{-j}(B)) + \mu(B \cap f^{-j}(B)) - \mu(A)^2| \\
&\leq |\mu(A \cap f^{-j}(A)) - \mu(B \cap f^{-j}(B))| + |\mu(B \cap f^{-j}(B)) - \mu(A)^2| \\
&\leq |\mu(A \cap f^{-j}(A)) - \mu(B \cap f^{-j}(B))| + |\mu(B)^2 - \mu(A)^2| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, se deduz que $\mu(A) = \mu(A)^2$, isto é, $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$. Concluindo que o sistema (f, μ) é ergódico. ■

Observação 1.23 *Destaca-se que para o deslocamento de Bernoulli (1.2) possui a propriedade de que (f^2, μ) também seja ergódica.*

A propriedade de f ser ergódica para μ será utilizada nos exemplos de descontinuidade apresentados nos capítulos seguintes. O próximo resultado indicará sobre como pode-se definir outros deslocamentos de Bernoulli equivalentes a um deslocamento inicial.

Proposição 1.24 *Sejam (f, μ) o deslocamento de Bernoulli definido por $M = \{1, \dots, d\}$ e $C = [0; c_0, \dots, c_l]$ um cilindro. Considera-se fC a aplicação de primeiro retorno, de*

acordo com a Definição 1.6 e μ_C a medida μ restringida e normalizada ao cilindro C , isto é, para todo conjunto mensurável $A \subset C$ segue que $\mu_C(A) = \mu(A) \frac{1}{\mu(C)}$. Então, existe um espaço de probabilidade (M', \mathcal{A}', ν') tal que (fC, μ_C) é ergodicamente equivalente ao deslocamento de Bernoulli (f', μ') definido por (M', \mathcal{A}', ν') .

Em [20] existe um esboço da prova da proposição. E assim concluí-se a revisão de conceitos de teoria ergódica para a compreensão este texto.

1.3 Expoentes de Lyapunov

Nesta seção se apresenta o Teorema de Kingman, o Teorema de Furstenberg-Kesten, a definição dos expoentes de Lyapunov, o Teorema de Oseledets e ao final será exposto uma propriedade dos expoentes para uma aplicação f ergódica.

Para se definir o objeto central dessa seção será necessário algumas definições prévias, entre elas, inicia-se com a definição de sequência subaditiva.

Definição 1.25 *Diz-se que uma sequência de funções $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ é subaditiva para uma transformação $f : M \rightarrow M$ se*

$$\varphi_{m+n}(x) \leq \varphi_n(x) + \varphi_m \circ f^n(x),$$

para todo $m, n \geq 1$.

O próximo teorema a ser apresentado servirá para obter o Teorema de Furstenberg-Kesten. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [20] ou em [19]. As respectivas demonstrações apresentadas nas referências citadas permite que o Teorema 1.8 também seja obtido como consequência.

Teorema 1.26 (Kingman) *Seja μ uma probabilidade invariante para uma transformação $f : M \rightarrow M$ e seja $\varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ uma sequência subaditiva de funções mensuráveis tal que $\varphi_1^+ = \max\{\varphi_1, 0\} \in L^1(\mu)$. Então a sequência $(\frac{\varphi_n}{n})$ converge em μ -quase todo ponto para uma função mensurável $\varphi : M \rightarrow [-\infty + \infty)$. Além disso, $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\} \in L^1(\mu)$ e*

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu = \inf \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu \in [-\infty + \infty).$$

A próxima definição será a de cociclo linear, essa definição junto ao Teorema 1.26 encaminhará para a definição de expoentes de Lyapunov.

Definição 1.27 (Cociclo) *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação que preserva a medida μ . Seja $A : M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ uma função mensurável*

com valores no grupo linear das matrizes invertíveis de dimensão 2×2 com coeficientes reais. O cociclo linear de A sobre f é a aplicação

$$\begin{aligned} F : M \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \times \mathbb{R}^2 \\ (x, v) &\mapsto (f(x), A(x)v) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ao longo do texto se refere a A como o cociclo linear de A sobre f , mas essa referência é apenas um abuso de linguagem sobre a definição de cociclo linear. Esse abuso de linguagem decorre da observação a seguir.

Observação 1.28 *Da Definição 1.27 pode-se calcular as iteradas do cociclo linear associado a A , isto é, $F^n(x, v)$*

No caso geral da definição destaca-se que

$$\begin{aligned} F^n(x, v) &= F^{n-1}(f(x), A(x)v) \\ &= F^{n-2}(f^2(x), A(f(x))A(x)v) \\ &\vdots \\ &= (f^n(x), A(f^{n-1}(x)) \dots A(f(x))A(x)v) \\ &= (f^n(x), A^n(x)v), \end{aligned}$$

em que $A^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \dots A(f(x))A(x)$. Essa notação de $A^n(x)$ que induz a linguagem de A ser dito como o cociclo.

No caso em que f é invertível, pode-se calcular as iteradas negativas de F .

$$\begin{aligned} F^{-n}(x, v) &= F^{-n+1}(f^{-1}(x), A(f^{-1}(x))^{-1}v) \\ &= F^{-n+2}(f^{-2}(x), A(f^{-2}(x))^{-1}A(f^{-1}(x))^{-1}v) \\ &\vdots \\ &= (f^{-n}(x), A(f^{-n}(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1}v) \\ &= (f^{-n}(x), A^{-n}(x)v), \end{aligned}$$

em que $A^{-n}(x) = A(f^{-n}(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1} = (A^n(f^{-n}(x)))^{-1}$.

Outra propriedade de $A^n(x)$ se obtêm ao estudar a sequência $\varphi_n = \ln \|A^n(x)\|$, como é apresentado na observação a seguir.

Observação 1.29 *A sequência $\varphi_n = \ln \|A^n(x)\|$ é subaditiva.*

De fato,

$$A^{n+m}(x) = A^n(f^m(x))A^m(x),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+m}(x) &= \ln \|A^{n+m}(x)\| \\
&= \ln \|A^n(f^m(x))A^m(x)\| \\
&\leq \ln(\|A^n f^n(x)\| \dots \|A^m(x)\|) = \\
&= \ln \|A^n(f^m(x))\| + \ln \|A^m(x)\| \\
&= \varphi_n(f^m(x)) + \varphi_m(x).
\end{aligned}$$

A partir do exposto na Observação 1.29 o Teorema de Furstenberg-Kesten, que está enunciado a frente, decorre do Teorema 1.26.

Teorema 1.30 (Furstenberg-Kesten) *Sejam, (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade, com a medida μ invariante para uma aplicação $f : M \rightarrow M$ invertível e $A : M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$. Se $\ln \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ então existem em μ - quase todo ponto*

$$\lambda_+(A, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)\|,$$

$$\lambda_-(A, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|(A^n(x))^{-1}\|^{-1},$$

e ainda há que

$$\begin{aligned}
\int \lambda_+(A, x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \ln \|A^n(x)\| d\mu, \\
\int \lambda_-(A, x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \ln \|(A^n(x))^{-1}\|^{-1} d\mu.
\end{aligned}$$

Tendo em mente o resultado do Teorema 1.30 finalmente se define o objeto central dessa seção, os expoentes de Lyapunov.

Definição 1.31 (Expoente de Lyapunov) *Os números $\lambda_+(A, x)$ e $\lambda_-(A, x)$ que existem pelo Teorema 1.30 serão os denominados expoentes extremais de Lyapunov do cociclo linear F .*

Em particular, quando o cociclo toma valores em $SL(2, \mathbb{R})$, isto é, quando o cociclo toma valores nas matrizes de determinante igual a 1, sempre ocorre que $\lambda_+(A, x) = -\lambda_-(A, x)$, em μ - quase todo ponto, pois, $\|A^{-n}(x)\| = \|A^n(x)\|$.

O próximo resultado é uma versão para duas dimensões do importante Teorema de Oseledets. Este teorema garante a existência da decomposição em soma direta do espaço em dois outros sub-espacos, um estável e outro instável, quando os expoentes de Lyapunov não são nulos.

Teorema 1.32 (Oseledets) *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade, $F : M \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M \times \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, v) = (f(x), A(x)v)$, para alguma função mensurável $A : M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ satisfazendo $\ln^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$. Então há que*

1. $\lambda_-(x) = \lambda_+(x)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| = \lambda_{\pm}(x)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

2. Ou, $\lambda_-(x) < \lambda_+(x)$ e existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^2 = E_x^u \oplus E_x^s$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| = \begin{cases} \lambda_-(x) & \text{se } v \in E_x^s \setminus \{0\} \\ \lambda_+(x) & \text{se } v \in \mathbb{R}^2 \setminus E_x^s \end{cases},$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| = \begin{cases} \lambda_+(x) & \text{se } v \in E_x^u \setminus \{0\} \\ \lambda_-(x) & \text{se } v \in \mathbb{R}^2 \setminus E_x^u \end{cases}.$$

Mais ainda, no último caso $A(x)E_x^u = E_{f(x)}^u$ e $A(x)E_x^s = E_{f(x)}^s$ e o ângulo entre os espaços E^s e E^u decresce sub-exponencialmente ao longo das órbitas, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln |\text{sen } \angle(E_{f^n(x)}^u, E_{f^n(x)}^s)| = 0.$$

Para finalizar a seção apresenta-se um resultado que indica uma conexão entre o expoente de Lyapunov de um cociclo associado a A de um cociclo associado a iteradas específicas de A .

Teorema 1.33 *Sejam $Z \subset M$, um conjunto de medida positiva, $f : M \rightarrow M$ uma transformação invertível e invariante por uma medida de probabilidade μ , $f^p : Z \rightarrow Z$ a aplicação de primeiro retorno a Z , da Definição 1.6 e a medida de probabilidade ν tal que para todo conjunto mensurável $E \subset Z$ há que $\nu(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(Z)}$ e F e G os respectivos cociclos induzidos por f , A e f^p e A^p . Então*

1. *A probabilidade ν é f^p -invariante e $\ln \|(A^p)^\pm\| \in L^1(\nu)$ quando $\ln \|A^\pm\| \in L^1(\mu)$.*
2. *A decomposição de Oseledets de G coincide com a restrição da decomposição de Oseledets de F .*
3. *Para ν -quase todo ponto $x \in Z$ existe $c(x) \geq 1$ tal que os expoentes de Lyapunov satisfazem*

$$\lambda_j(G, x) = c(x)\lambda_j(F, x).$$

para todo $j \geq 1$.

Demonstração:

Seja $Z_j \subset Z$, o conjunto dos pontos tais que o tempo de primeiro retorno é j , isto é, $Z_j = \{x \in Z; \rho(x) = j\}$. Pela definição de Z_j segue para todo $i \neq j$, $Z_j \cap Z_i = \emptyset$.

O mesmo vale $f^j(Z_j)$. Assim $\{Z_j; j \geq 1\}$ e $\{f^j(Z_j); j \geq 1\}$ é uma partição com medida total Z . Agora provar-se-á que ν é invariante por f^p . Então dado qualquer

conjunto $E \subset Z$ e qualquer $j \geq 1$, então

$$\mu(f^{-\rho}(E \cap f^j(Z_j))) = \mu(E \cap f^j(Z_j)) = \mu(E \cap Z_j),$$

pois μ é invariante por f . Segue que

$$\mu(f^{-\rho}(E)) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(f^{-\rho}(E \cap f^j(Z_j))) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E \cap Z_j) = \mu(E).$$

Então a medida ν é invariante por f^ρ .

Em seguida provar-se-á que as decomposições de Oseledets de G coincide com a restrição da decomposição de Oseledets de F . Inicialmente nota-se que

$$\int_Z \ln^+ \|A^\rho\| d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{Z_j} \ln^+ \|A^j\| d\mu \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \int_{Z_j} \ln^+ \|A \circ f^i\| d\mu,$$

desde que μ é invariante por f e o domínio $f^i(Z_j)$ é uma partição disjunta para todo $0 \leq i \leq j-1$. Segue que

$$\int_Z \ln^+ \|A^\rho\| d\mu \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \int_{f^i(Z_j)} \ln^+ \|A\| d\mu \leq \int \ln^+ \|A\| d\mu$$

Uma limitação para a norma da inversa é obtida da mesma maneira, provando que $\ln^+ \|A^{\pm\rho}\|$ é ν -integrável.

A restrição da decomposição de Oseledets de F é invariante sobre A^ρ pela informação presente no Teorema de 1.32.

Define-se

$$c(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \rho(f^{j\rho(x)}(x)).$$

Percebendo que ρ é integrável relativa a ν ,

$$\int_Z \rho d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j\mu(Z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \mu(f^i(Z_j)) \leq 1.$$

Pelo Teorema 1.8, $c(x)$ está bem definida em ν -quase todo ponto x , da definição de $c(x) \geq 1$. Agora dado qualquer vetor v genérico e ponto $x \in Z$. E por fim

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \|A^{k\rho}(x)v\| = c(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\|.$$

Assim concluí-se que A^ρ de Oseledets coincide com a restrição da decomposição de F e garante a igualdade entre os expoentes de Lyapunov. ■

Segue da definição de $c(x)$ que no caso em que f é ergódica para μ pode-se determinar o valor de $c(x)$ por meio da medida μ do conjunto Z .

Corolário 1.34 *Nas condições do Teorema 1.33, se μ é ergódica para f então ν é ergódica para f^p e $c(x) = \frac{1}{\mu(Z)}$ para ν quase todo ponto.*

Demonstração:

A demonstração deste resultado decorre da Observação 1.12 que

$$c(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \rho(f^{jp}(x)) = \nu(Z) = \frac{1}{\mu(Z)}.$$

■

Assim finaliza-se essa seção que apresenta uma certa fundamentação para os conceitos de expoente de Lyapunov.

Capítulo 2

Exemplo de Bocker-Viana

Neste capítulo será apresentada de forma detalhada a construção de um ponto de descontinuidade relativo a topologia α -Hölder, para aplicação expoente de Lyapunov de um cociclo gerado por uma matriz em $SL(2, \mathbb{R})$, em que $\alpha \in (0, \infty)$. Para construir este exemplo tomar-se-á uma perturbação específica de um cociclo inicial que toma valores em $SL(2, \mathbb{R})$. Em um determinado cilindro a perturbação do cociclo agirá sobre os subespaços estável e instável de A os trocando. Quanto ao novo cociclo, que efetua a troca dos subespaços, seus expoentes de Lyapunov são nulos. As alterações do cociclo perturbado o deixam suficientemente próximo do cociclo inicial, concluindo assim que esse cociclo representa uma descontinuidade dos expoentes de Lyapunov. A primeira seção do capítulo traz a construção da perturbação do cociclo inicial e na seção seguinte é apresentada a demonstração de que os expoentes de Lyapunov da perturbação construída são nulos. Esse exemplo pode ser encontrado com uma notação semelhante em [15].

2.1 Construção da perturbação

Inicia-se essa seção relembrando as notações e objetos básicos para a construção do exemplo. Seja Σ_2 , o espaço das sequências bilaterais com valores em $M = \{0, 1\}$, isto é, $\mathbf{x} \in \Sigma_2$, então $\mathbf{x} = (x_n)_n$, com $n \in \mathbb{Z}$, em que $x_n \in \{0, 1\}$. Descreve-se a medida produto μ sobre Σ_2 por meio de $\mu([0; 0]) = \nu(\{0\}) = p_0$, $\mu([0; 1]) = \nu(\{1\}) = p_1$ e $p_0 + p_1 = 1$, em que ν é uma medida em M . A aplicação

$$f: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 \\ (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n,$$

denotará o deslocamento sobre a sequência $(x_n)_n$, como definido em (1.2).

Define-se a norma na topologia α -Hölder, para $\alpha \in (0, \infty)$, em relação as aplicações α -Hölder contínuas $L: \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ como

$$\|L\|_\alpha = \sup_{x \in \Sigma_2} \|L(x)\| + \sup_{x \neq y} \frac{\|L(x) - L(y)\|}{d(x, y)^\alpha},$$

em que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denota a métrica sobre o espaço Σ_2 dada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2^{-N(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, em que $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{N \geq 0 ; x_n = y_n \text{ para todo } |n| < N\}$.

Pela Proposição 1.19 e Proposição 1.22, sabe-se que a medida μ associada é invariante pelo deslocamento de Bernoulli f e ainda f é ergódica para μ .

Assim, dado $\sigma > 1$ qualquer, define-se $A : \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ como

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \text{ se } x_0 = 0 \text{ e } A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \text{ se } x_0 = 1. \quad (2.1)$$

Efetuar-se-á um abuso de notação sobre a definição de A , ao se denotar $A(0)$, na verdade se indica que $A(\mathbf{x})$ é tal que $x_0 = 0$, de forma semelhante para a notação $A(1)$.

Antes de se prosseguir com a descrição da construção do exemplo de descontinuidade apresenta-se o objetivo central desse capítulo como o teorema principal a seguir.

Teorema 2.1 *Para qualquer $\alpha > 0$ tal que $2^{2\alpha} < \sigma$ existe $B : M \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ com expoentes de Lyapunov nulos e tal que $\|A - B\|_\alpha$ é arbitrariamente próximo de zero.*

Para demonstrar o 2.1 se construirá uma perturbação de A de forma que o novo cociclo tenha propriedades desejadas.

Como μ é probabilidade e A é constante em compactos, segue que $\ln^+ \|A^\pm\| \in L^1(\mu)$. Agora mostrar-se-á como se calcula os expoentes de Lyapunov associados ao cociclo $A^n(\mathbf{x})$ definido por A em relação a aplicação f .

Lema 2.2 *Os expoentes de Lyapunov, associados a aplicação A definida em (2.1) e a medida μ assumem os valores $\lambda_\pm(A, \mathbf{x}) = \pm |p_0 - p_1| \ln \sigma$.*

Demonstração:

Pela Definição 1.31, de expoentes de Lyapunov, há que $\lambda_+(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)\|$ e $\lambda_-(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \ln \|A^{-n}(x)\|$.

Nota-se que o cociclo $\|A^n(x)\|$ é dado por

$$\begin{aligned} \|A^n(\mathbf{x})\| &= \|A(f^{n-1}(\mathbf{x}))A(f^{n-2}(\mathbf{x})) \cdots A(\mathbf{x})\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \sigma^{\#0_n - \#1_n} & 0 \\ 0 & \sigma^{-(\#0_n - \#1_n)} \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sigma^{|\#0_n - \#1_n|}, \end{aligned}$$

em que $\#1_n$ denota a quantidade de 1 na sequência \mathbf{x} até a $(n-1)$ -ésima entrada, isto é, $\#1_n = \#\{0 \leq j \leq n-1; f^j(\mathbf{x}) \in [0; 1]\}$. A definição de $\#0_n$ é análoga. Semelhantemente segue que,

$$\|A^{-n}(\mathbf{x})\| = \left\| \begin{bmatrix} \sigma^{-(\#0_n - \#1_n)} & 0 \\ 0 & \sigma^{\#0_n - \#1_n} \end{bmatrix} \right\| = \sigma^{|\#0_n - \#1_n|}.$$

Assim têm-se que

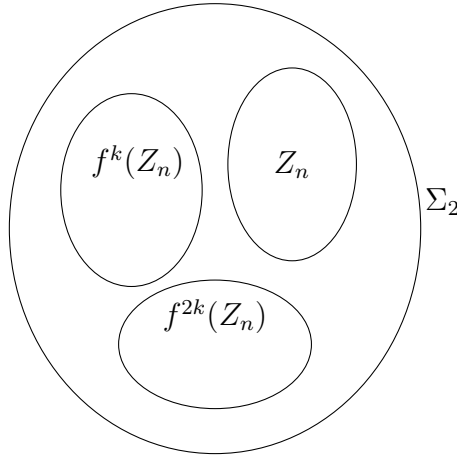
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sigma^{|\#0_n - \#1_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\#0_n - \#1_n|}{n} \ln \sigma,$$

recorda-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j < n; f^j(x) \in E\} = \tau(E, x)$, pela Proposição 1.11 há que $\tau(E, x) = \mu(E)$ quando o sistema é ergódico, no caso acima $\mu([0; 0]) = p_0$ e $\mu([0; 1]) = p_1$. Portanto $\lambda_{\pm}(A, x) = \pm|p_0 - p_1| \ln \sigma$.

■

Destaca-se que $\lambda_{\pm}(A, x) = 0$, apenas quando $p_0 = p_1$, então desde que $p_0 \neq p_1$ pode-se aplicar o Teorema de Oseledets [Teorema 1.32], logo existem dois subespaços tais que o cociclo é invariante sobre eles. Por outro lado, nota-se que, $A(1) \cdot (1, 0) = (\sigma, 0)$ e $A(1) \cdot (0, 1) = (0, \sigma^{-1})$, e $A(0) \cdot (0, 1) = (0, \sigma)$ e $A(0) \cdot (1, 0) = (\sigma^{-1}, 0)$. Assim ao denotar-se $H_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}(1, 0)$ e $V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}(0, 1)$, segue que esses dois subespaços coincidem com os subespaços invariantes obtidos pelo Teorema de Oseledets.

Agora define-se o cilindro Z_n , em que se definirá a perturbação do cociclo A . Seja $n = 2k + 1$, para algum $k \geq 1$, então $Z_n = [0; \underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{-vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1\text{-vezes}}]$, isto é, Z_n é o cilindro que seus pontos tem o símbolo 0 aparecendo k -vezes desde a posição 0 e em seguida, ocorrem $k+1$ -vezes o símbolo 1. Destaca-se que as imagens de Z_n pela aplicação f são obrigatoriamente disjuntas para as $2k$ primeiras iteradas de f , ou seja, se $i \neq j$ e $0 \leq i, j \leq 2k$ então $f^i(Z_n) \cap f^j(Z_n) = \emptyset$, pois supondo que exista um ponto em duas imagens de cilindros $f^i(Z_n)$ e $f^j(Z_n)$, para i e j menores que $2k$ segue que, $f^i(Z_n) = [-i; \underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{-vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1\text{-vezes}}]$ e $f^j(Z_n) = [-j; \underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{-vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1\text{-vezes}}]$, então \mathbf{x} , tem a partir da i -ésima entrada k entradas com o símbolo 0, e ainda a partir da j -ésima entrada k entradas com o símbolo 0, se $j \neq i$ e $j > i$ ao menos \mathbf{x} teria $k+1$ entradas com o símbolo 0 e sobreporia uma entrada com o símbolo 1 contraponto a definição do cilindro, portanto $j = i$ sempre que existir interseção para $1 \leq i, j \leq 2k$.

Figura 2.1: Espaço Σ_2 .

Sejam, $\varepsilon_n = \sigma^{-k}$ e $\delta_n = \arctg \varepsilon_n$, em que $n = 2k + 1$. Define-se a aplicação

$$R_n : \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(\delta_n) & -\text{sen}(\delta_n) \\ \text{sen}(\delta_n) & \cos(\delta_n) \end{bmatrix} & \text{se } \mathbf{x} \in f^k(Z_n), \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_n & 1 \end{bmatrix} & \text{se } \mathbf{x} \in Z_n \cup f^{2k}(Z_n), \\ Id & \text{se } \mathbf{x} \notin f^k(Z_n) \cup f^{2k}(Z_n) \cup Z_n \end{cases},$$

em que Id denota a identidade em $GL(2, \mathbb{R})$. Define-se a perturbação de A como o cociclo linear

$$B_n = AR_n. \quad (2.2)$$

Agora, mostrar-se-á que em determinada condição a matriz B_n estará suficientemente próxima de A .

Lema 2.3 *Para todo $n = 2k + 1$, existe $C > 0$ tal que $\|B_n - A\|_\alpha \leq C \left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^k$.*

Demonstração:

Seja $L_n = A - B_n = A(Id - R_n)$. Então $\sup \|L_n\| \leq \sup \|A\| \cdot \|Id - R_n\|$. Nota-se que $\|Id - R_n\| \leq \varepsilon_n$, $\|A\| = \sigma$, logo $\sup \|L_n\| \leq \sigma\varepsilon_n$.

Agora, observa-se que se \mathbf{x} e \mathbf{y} não estão no mesmo cilindro $[0, a]$, segue que $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

0, assim $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2^0 = 1$. E nesse caso,

$$\begin{aligned} \frac{\|L_n(\mathbf{x}) - L_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \|L_n(\mathbf{x}) - L_n(\mathbf{y})\| \\ &\leq \|L_n(\mathbf{x})\| + \|L_n(\mathbf{y})\| \\ &\leq 2 \sup \|L_n\| \\ &\leq 2\sigma\varepsilon_n \end{aligned}$$

Agora, se \mathbf{x} e \mathbf{y} estão no mesmo cilindro, segue que A é constante em um cilindro, pela definição (2.1), e assim $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{y})$ e segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\|L_n(\mathbf{x}) - L_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|A(\mathbf{x})(R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y}))\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \|A\| \frac{\|R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \sigma \frac{\|R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Ao se considerar os possíveis cilindros, nota-se que, se \mathbf{x} e \mathbf{y} não pertencem a $Z_n \cup f^k(Z_n) \cup f^{2k}(Z_n)$, então $R_n(\mathbf{x}) = R_n(\mathbf{y}) = Id$ e portanto $\|R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y})\| = 0$. No caso em que \mathbf{x} e \mathbf{y} estão no mesmo $f^i(Z_n)$, para $i \leq 2k + 1$, segue que $R_n(\mathbf{x}) = R_n(\mathbf{y})$ e ainda se obtém $\|R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y})\| = 0$.

Resta observar o caso em que \mathbf{x} ou \mathbf{y} está em um $f^i(Z_n)$ e o outro ponto não está nesse cilindro. Então no máximo $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2k$, pois coincidir $2k + 1$ implicaria $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^i(Z_n)$. Logo $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 2^{-2k}$. Supondo, sem perda de generalidade que $\mathbf{x} \in f^i(Z_n)$, segue que $R_n(\mathbf{y}) = Id$ e $R_n(\mathbf{x})$ é uma das escolhas restantes da definição de R_n , mas em particular decorre que $\|Id - R_n\| \leq \varepsilon_n$.

E assim segue que

$$\begin{aligned} \frac{\|L_n(\mathbf{x}) - L_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq \sigma \frac{\|R_n(\mathbf{x}) - R_n(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \sigma(\|Id - R_n\| + \|Id - R_n\|)2^{\alpha N(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \\ &\leq \sigma 2\varepsilon_n 2^{2k\alpha}. \end{aligned}$$

Nenhuma das limitações ultrapassam $2\sigma\varepsilon_n$, logo

$$\begin{aligned}
\|L_n\|_\alpha &= \sup \|L_n\| + \sup \frac{\|L_n(x) - L_n(y)\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\
&\leq \sigma \varepsilon_n + 2\sigma \varepsilon_n 2^{2k\alpha} \\
&\leq \sigma \sigma^{-k} (1 + 2 \cdot 2^{2k\alpha}) \\
&\leq 3\sigma \left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^k
\end{aligned}$$

■

Observa-se que se $2^{2\alpha} < \sigma$ decorre que $\left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$ e assim pode-se escolher K_0 suficientemente grande tal que $\left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^k < \varepsilon C^{-1}$ e assim concluir que a distância entre os cociclos A e B_n é arbitrariamente pequena.

Antes de se provar que o cociclo B_n^n sobre o cilindro Z_n troca a direção horizontal $H_{\mathbf{x}}$ com a vertical $V_{\mathbf{x}}$, dar-se-á uma ideia de como ocorre esse processo. A primeira iterada de B_n remove do eixo horizontal os vetores da forma $\mathbb{R}(1, 0)$ mas mantém fixo os vetores que estão no eixo vertical, essa perturbação após uma quantidade k de iteradas está em uma reta $\mathbb{R}(\varepsilon_n, 1)$ que possui um ângulo de δ_n com o eixo vertical, durante as k iteradas do processo os vetores do eixo vertical não são movimentados. Como está apresentado na Figura 2.2

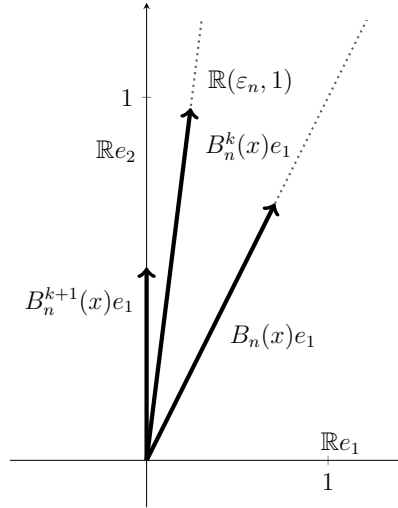


Figura 2.2: Primeira etapa do cociclo sobre Z_n .

Ao rotacionar o sistema todo pelo ângulo δ_n na iterada $k + 1$, os vetores invariante no eixo vertical são empurrados para fora do eixo enquanto a reta $\mathbb{R}(\varepsilon_n, 1)$ finalmente rotacionam para o eixo vertical. As próximas k iteradas não afetam os vetores que estão atualmente no eixo vertical, mas empurram os vetores rotacionados que estão na reta $\mathbb{R}(-\sigma, \sigma^{k-1})$ para os vetores da reta $\mathbb{R}(-1, \varepsilon_n)$ e assim ao aplicar a perturbação, na $2k + 1$ -ésima iterada, sobre a primeira coordenada dos vetores eles prosseguem para o eixo

horizontal, enquanto essa perturbação não afeta o eixo vertical concluindo assim inversão dos eixos. Essa parte final do processo é detalhado na Figura 2.3.

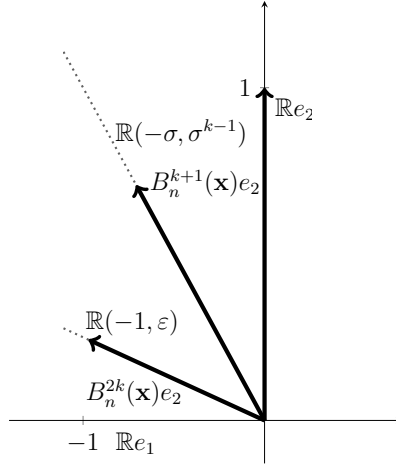


Figura 2.3: Segunda etapa do cociclo sobre Z_n .

Lema 2.4 $B_n^n(\mathbf{x})H_{\mathbf{x}} = V_{f^n(x)}$ e $B_n^n(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}} = H_{f^n(x)}$, para todo $x \in Z_n$.

Demonstração: Nota-se que para todo $x \in Z_n$,

$$\begin{aligned}
 B_n^k(\mathbf{x}) &= B_n(f^{k-1}(\mathbf{x})) \dots B_n(\mathbf{x}) \\
 &= A(f^{k-1}(\mathbf{x}))R_n(f^{k-1}(\mathbf{x})) \dots A(\mathbf{x})R_n(\mathbf{x}) \\
 &= A(0)Id \dots A(0)IdA(0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_n & 1 \end{bmatrix} \\
 &= A(0)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_n & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^{-k} & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_n & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^{-k} & 0 \\ \sigma^k \varepsilon_n & \sigma^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 1 & \sigma^k \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Daí segue que,

$$B_n^k(\mathbf{x})H_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 1 & \sigma^k \end{bmatrix} \cdot K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ 1 \end{bmatrix},$$

e

$$B_n^k(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 1 & \sigma^k \end{bmatrix} \cdot K \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma^k \end{bmatrix} = K' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Portanto, $B_n^k H_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}(\varepsilon_n, 1)$ e $B_n^k V_{\mathbf{x}} = V_{f^k(\mathbf{x})}$.

Note que para $\text{tg}(\delta_n) = \varepsilon_n$, decorre que $\text{sen}(\delta_n) = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1 + \varepsilon_n^2}}$ e $\text{cos}(\delta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_n^2}}$, se considerarmos $b = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_n^2}}$ a matriz de rotação de ângulo δ_n se escreve como $\begin{bmatrix} b & -\varepsilon_n b \\ \varepsilon_n b & b \end{bmatrix}$. Então para a $k + 1$ iterada,

$$\begin{aligned} B_n^{k+1}(\mathbf{x}) &= B_n(f^k(\mathbf{x}))B_n^k(\mathbf{x}) \\ &= A(f^k(\mathbf{x}))R_n(f^k(\mathbf{x}))B_n^k(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -\varepsilon_n b \\ \varepsilon_n b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{-k} & 0 \\ 1 & \sigma^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{-k}b - \varepsilon_n b & -\varepsilon_n b \sigma^k \\ b(\varepsilon_n \sigma^{-k} + 1) & b \sigma^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma(\sigma^{-k}b - \varepsilon_n b) & -\sigma \varepsilon_n b \sigma^k \\ \sigma^{-1}b(\varepsilon_n \sigma^{-k} + 1) & b \sigma^{k-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

como $\sigma^{-k} = \varepsilon_n$, $\sigma^{-k}b - \varepsilon_n b = b(\sigma^{-k} - \varepsilon_n) = 0$. Logo, $B_n^{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix}$.

Daí segue que

$$B_n^{k+1}(\mathbf{x})H_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha b \sigma^{-1}(\sigma^{-2k} + 1) \end{bmatrix},$$

e logo $K' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$B_n^{k+1}(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} -b\sigma \\ b\sigma^{k-1} \end{bmatrix},$$

Para a $2k$ -iterada segue que

$$\begin{aligned}
B_n^{2k}(\mathbf{x}) &= B_n(f^{2k-1}(\mathbf{x})) \dots B_n(f^{k+1}(\mathbf{x})) B_n^{k+1}(\mathbf{x}) \\
&= A(f^{2k-1}(\mathbf{x})) R_n(f^{2k-1}(\mathbf{x})) \dots A(f^{k+1}(\mathbf{x})) R_n(f^{k+1}(\mathbf{x})) B_n^{k+1}(\mathbf{x}) \\
&= A(1) Id \dots A(1) Id \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= A(1)^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma^{k-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{-(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma \\ \sigma^{-1}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^k \\ \sigma^{-k}b(\sigma^{-2k} + 1) & b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daí segue que,

$$B_n^{2k}(\mathbf{x}) H_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^k \\ \sigma^{-k}b(\sigma^{-2k} + 1) & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 0 \\ b\sigma^{-k}(\sigma^{-2k} + 1) \end{bmatrix},$$

e logo $K' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, para $K' = b\sigma^{-k}(\sigma^{-2k} + 1)$.

$$B_n^{2k}(\mathbf{x}) V_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^k \\ \sigma^{-k}b(\sigma^{-2k} + 1) & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\sigma^k K \\ bK \end{bmatrix} = b\sigma^k K \begin{bmatrix} -1 \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Por fim, para a $2k + 1$ -iterada

$$\begin{aligned}
B_n^{2k+1}(\mathbf{x}) &= A(f^{2k}(\mathbf{x})) R_n(f^{2k}(\mathbf{x})) B_n^{2k}(\mathbf{x}) \\
&= A(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^k \\ \sigma^{-k}b(\sigma^{-2k} + 1) & b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^k \\ \sigma^{-k}b(\sigma^{-2k} + 1) & -b\sigma^k\varepsilon_n + b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^{k+1} \\ \sigma^{-(k+1)}b(\sigma^{-2k} + 1) & b\sigma^{-1}(-\sigma^k\varepsilon_n + 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^{k+1} \\ \sigma^{-(k+1)}b(\sigma^{-2k} + 1) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

E por fim, conclui-se que

$$\begin{aligned}
B_n^{2k+1}(\mathbf{x})H_{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^{k+1} \\ \sigma^{-(k+1)}b(\sigma^{-2k} + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ Kb\sigma^{-(k+1)}(\sigma^{-2k} + 1) \end{bmatrix} \\
&= K' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^{2k+1}(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -b\sigma^{k+1} \\ \sigma^{-(k+1)}b(\sigma^{-2k} + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -bK\sigma^{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= K' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Nota-se que toda vez que $B_n^{l(2k+1)}(\mathbf{x})$ tomar pontos em Z_n , para algum l inteiro, ocorrerá todo esse processo de permutação dos eixos. Assim concluí-se a construção da perturbação do cociclo A , que efetua a troca dos subespaços invariantes, resta mostrar que seus expoentes de Lyapunov são nulos e concluir a construção do exemplo. Como será visto na próxima seção.

2.2 Cálculo dos expoentes da perturbação

Nesta seção mostrar-se-á que para qualquer $n > 0$ tem-se $\lambda_{\pm}(B_n) = 0$, para tal, inicia-se definindo a medida μ_n , que é a restrição normalizada de μ a Z_n , isto é, defini-se μ_n como $\mu_n(X) = \frac{\mu(X)}{\mu(Z_n)}$, para $X \subseteq Z_n$.

Antes de se prosseguir para o cálculo explícito dos expoentes de Lyapunov, necessita-se de algumas definições e notações preliminares. Seja $w = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{-vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1\text{-vezes}})$ uma palavra finita e seja \mathcal{B} o conjunto de todas as palavras finitas $b = (b_1, \dots, b_s)$ que não tem como uma sub palavra w . Pelo Teorema 1.4, de Recorrência de Poincaré sabe-se $\mathbf{x} \in Z_n$ e retorna a Z_n infinitas vezes em μ - quase todo ponto. Então pode-se decompor \mathbf{x} em infinitas palavras da forma (w, b, w) e logo $Z_n = \bigsqcup_{b \in \mathcal{B}} [0; w, b, w]$.

Define-se também a aplicação de primeiro retorno $f_n : Z_n \rightarrow Z_n$, isto é, f_n aplicada a \mathbf{x} parte de uma palavra w e retorna a Z_n na próxima palavra w dentro da sequência

infinita \mathbf{x} . Destaca-se que $f_n|_{[0;w,b,w]} = f^{n+s}|_{[0;w,b,w]}$, para todo $b \in \mathcal{B}$, pois para retornar a Z_n , deve-se lembrar que todos os $f^i(Z_n)$ são disjuntos, para $1 \leq i \leq n$ e pela definição da palavra b ela não admite sub-palavra w assim o número de iteradas necessárias para encontrar a próxima palavra w no cilindro $[0; w, b, w]$ é de $n + s$.

Assim conclui-se que (f_n, μ_n) é equivalentemente ergódico pela Proposição 1.24 um deslocamento de Bernoulli sobre o alfabeto infinito \mathcal{B} . Agora pode-se definir o cociclo $\hat{B}_n : Z_n \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, induzido por B_n sobre f_n , isto é, $\hat{B}_n|_{[0;w,b,w]} = B_n^{n+s}|_{[0;w,b,w]}$, para cada $b \in \mathcal{B}$. Pela Proposição 1.34 segue que $\lambda_{\pm}(\hat{B}_n) = \lambda_{\pm}(B_n) / \mu(Z_n)$. Portanto é suficiente mostrar que $\lambda_{\pm}(\hat{B}_n) = 0$. Logo deseja-se provar o seguinte resultado

Lema 2.5 *Os expoentes de Lyapunov do cociclo B_n são nulos para todo $n > 0$.*

Demonstração:

Para concluir que os expoentes de Lyapunov do cociclo \hat{B}_n são nulos, utilizar-se-á de um absurdo gerado por supor que estes expoentes não são nulos.

Suponha que os expoentes de Lyapunov $\lambda_{\pm}(\hat{B}_n) \neq 0$, então pode se aplicar o Teorema de Oseledets 1.32 e se obter $E_x^u \oplus E_x^s$, que estão definidos em quase todo ponto $x \in Z_n$.

Agora sejam $C \in Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ e as respectivas medidas

$$m^u(C) = \mu(\{\mathbf{x} : (\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^u) \in C\}) = \int \delta_{(\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^u)}(C) d\mu(\mathbf{x}),$$

e

$$m^s(C) = \mu(\{\mathbf{x} : (\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^s) \in C\}) = \int \delta_{(\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^s)}(C) d\mu(\mathbf{x}),$$

definidas em $Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ para qualquer subconjunto mensurável.

Observa-se que o cociclo definido por

$$F_{\hat{B}_n} : \begin{array}{ccc} Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) & \rightarrow & Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ (\mathbf{x}, v) & \mapsto & (f_n(\mathbf{x}), \hat{B}_n(\mathbf{x})v) \end{array},$$

trocamos os subespaços verticais e horizontais pelo Lema 2.4. Basta observar que o cociclo \hat{B}_n é definido por B_n justamente nas palavras w , então ocorre que

$$\hat{B}_n(\mathbf{x})H_{\mathbf{x}} = V_{f_n(\mathbf{x})} \quad \hat{B}_n(\mathbf{x})V_{\mathbf{x}} = H_{f_n(\mathbf{x})} \quad (2.3)$$

Define-se m_n como uma medida em $Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ que,

$$m_n(B) = \frac{1}{2}\mu_n(\{\mathbf{x} \in Z_n; V_{\mathbf{x}} \in B\}) + \frac{1}{2}\mu_n(\{\mathbf{x} \in Z_n; H_{\mathbf{x}} \in B\}), \quad (2.4)$$

para qualquer subconjunto mensurável $B \in Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, recorda-se que $V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}(0, 1)$ e $H_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}(1, 0)$.

Decorre da definição de m_n que essa medida se projeta em Z_n por meio da μ_n . E em particular m_n concede medida total a junção de $H_{\mathbf{x}}$ e $V_{\mathbf{x}}$ de forma que pode-se interpreta-la como $\frac{(\delta_{H_{\mathbf{x}}} + \delta_{V_{\mathbf{x}}})}{2}$.

Afirmção: A medida m_n definida em (2.4) é $F_{\hat{B}_n}$ - invariante.

Demonstração:

Observa-se que

$$m_n(F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)) = \frac{1}{2} \left[\mu_n(\{\mathbf{y} \in Z_n; V_{\mathbf{y}} \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)\}) + \mu_n(\{\mathbf{y} \in Z_n; H_{\mathbf{y}} \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)\}) \right].$$

Como está destacado em (2.3) $F_{\hat{B}_n}$ é tal que leva os pontos em $V_{\mathbf{x}}$ ($H_{\mathbf{x}}$) em pontos em $H_{\mathbf{y}}$ ($V_{\mathbf{y}}$), para $y = f_n(\mathbf{x})$.

Em particular se $V_{\mathbf{y}} \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)$ então $(\mathbf{y}, K(0, 1)) \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)$ Logo existe $(\mathbf{x}, K'(1, 0)) \in C$, tal que $f_n(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e $\hat{B}_n(\mathbf{x})K'(1, 0) = K(0, 1)$, ou seja, $H_{\mathbf{x}} \in C$.

Portanto, $V_{\mathbf{y}} \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C) \Leftrightarrow H_{\mathbf{x}} \in C$ e de forma análoga $H_{\mathbf{y}} \in F_{\hat{B}_n}^{-1}(C) \Leftrightarrow V_{\mathbf{x}} \in C$, então

$$\begin{aligned} m_n(F_{\hat{B}_n}^{-1}(C)) &= \frac{1}{2} [\mu_n(\{\mathbf{x} \in Z_n; (\mathbf{x}, H_{\mathbf{x}}) \in C\}) + \mu_n(\{\mathbf{x} \in Z_n; (\mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}) \in C\})] \\ &= m_n(C). \end{aligned}$$

O que conclui a afirmação. ■

Afirmção: O sistema $(m_n, F_{\hat{B}_n})$ é ergódico.

Demonstração:

Seja X um subconjunto invariante de $Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que $m_n(X) \neq \{0, 1\}$. Seja X_0 o conjunto dos $x \in Z_n$ tal que a fibra $X \cap \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ não contendo $H_{\mathbf{x}}$ nem $V_{\mathbf{x}}$. Em outras palavras o complementar de X_0 é a imagem da interseção de $X \cap \{(\mathbf{x}, [v]) \in Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2); [v] = (1, 0) \text{ ou } [v] = (0, 1)\}$ sobre a projeção canônica $\pi' : Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow Z_n$. Desde que essa interseção seja subconjunto mensurável de $Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ é um espaço polonês aplica-se o Teorema III.23 de [6] e conclui-se que X_0 é mensurável de Z_n .

Pela definição de X_0 e pela propriedade $F_{\hat{B}_n}$ trocar as fibras horizontais e verticais decorre que X_0 é f_n - invariante e como (f_n, μ_n) é equivalente a um deslocamento de Bernoulli segue que X_0 têm medida por μ_n com valores 0 ou 1. Como por suposição $1 > m_n(X) > 0$ deve se ter $\mu_n(X_0) = 0$, caso contrário X teria medida maior ou igual a 1. Seja X_2 o conjunto de $x \in Z_n$ tal que a fibra $X \cap \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ contém simultaneamente $H_{\mathbf{x}}$ e $V_{\mathbf{x}}$, logo tem $\mu_n(X_2) = 0$.

Agora seja X_H o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z_n$ tais que suas fibras contém $H_{\mathbf{x}}$ mas não contém $V_{\mathbf{x}}$, define-se X_V de forma semelhante, como o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z_n$ tais que suas fibras contém $V_{\mathbf{x}}$ mas não contém $H_{\mathbf{x}}$.

Pelo visto anteriormente, do comportamento de m_n ao se projetar sobre Z_n decorre que $X_H \cup X_V$, tem medida μ_n total e da definição de Z_n e de f_n decorre que $f_n(X_H) = X_V$ e $f_n(X_V) = X_H$. Observa-se que $\mu_n(X_H) = \frac{1}{2} = \mu_n(X_V)$ e $f_n^2(X_H) = X_H$ e $f_n^2(X_V) = X_V$. Isso é uma contradição pois f_n é equivalente a um deslocamento de Bernoulli e sua segunda iterada é ergódica como é apresentado em 1.23.

O que conclui a afirmação. ■

Seja dado $\kappa > 0$, define-se X_κ como o conjunto de todos os $(\mathbf{x}, [v]) \in Z_n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que a decomposição de Oseledets $E_{\mathbf{x}}^u \oplus E_{\mathbf{x}}^s$ está definida em \mathbf{x} e $[v]$ se divide em $v = v^u + v^s$ com a propriedade $\kappa^{-1} \|v^s\| \leq \|v^u\| \leq \kappa \|v^s\|$

Nota-se que os expoentes Lyapunov são distintos em todos os pontos de X_κ e seus pontos retornam um número finito de vezes a X_κ . Então pela Recorrência de Poincaré 1.4 $m_n(X_\kappa) = 0$, para qualquer $\kappa > 0$. Logo a medida m_n tem medida total em $\{(\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^u)(\mathbf{x}, E_{\mathbf{x}}^s); \mathbf{x} \in Z_n\}$. Portanto m_n é uma combinação convexa de m^u e m^s , o que é um absurdo já que m_n é ergódica, contradizendo a Proposição 1.13.

Como essa contradição advém da existência da decomposição de Oseledets que ocorre quando os expoentes do cociclo \hat{B}_n não são nulos, deve ocorrer $\lambda_\pm(\hat{B}_n) = 0$. Consequentemente pela Proposição 1.34 decorre que $\lambda_\pm(\hat{B}_n) = \frac{1}{\mu(Z_n)} \lambda_\pm(B_n) = 0$. Concluindo-se que os expoentes de B_n são iguais a zero. ■

E assim os expoentes da perturbação de A tem seus expoentes nulos para qualquer valor de $n > 0$, resta concluir a construção do exemplo de descontinuidade para os expoentes de Lyapunov do cociclo associado as iteradas de A .

A próxima demonstração de teorema concluirá a construção do ponto de descontinuidade de forma que o cociclo B tomado será definido pela distância que se deseja aproximar do cociclo A definido inicialmente em (2.1).

Demonstração do Teorema 2.1: Toma-se B_n como o construído em (2.2). Pelo Lema 2.3, para todo n é possível obter $\|B_n - A\|_\alpha \leq C \left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^k$, com n dependendo de k , já que $n = 2k + 1$. Da hipótese do teorema decorre que $\frac{2^{2\alpha}}{\sigma} < 1$ assim quando k é suficientemente grande, esse quociente será pequeno, em outras palavras, $\frac{2^{2\alpha}}{\sigma} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$.

Assim se $\varepsilon > 0$, pode-se escolher K_0 tal que $\left(\frac{2^{2\alpha}}{\sigma}\right)^{K_0} < \frac{\varepsilon}{C}$, $N = 2K_0 + 1$ e $B = B_N$. Logo a distância α -Hölder de A e B será menor que ε e pelo Lema 2.5, segue que os expoentes de B são nulos.



Assim concluí-se a construção da perturbação do cociclo gerado por A e f que representa uma descontinuidade para os expoentes de Lyapunov na topologia α -Hölder, já que $\lambda_{\pm}(B, x) = 0$ e $\lambda_{\pm}(A, x) = \pm|p_0 - p_1| \ln \sigma$, e a distância entre essas duas matrizes pode ser tomada tão pequena quanto se queira na respectiva topologia.

Capítulo 3

Exemplo de Butler

Neste capítulo será apresentada uma segunda construção de um ponto de descontinuidade relativo a topologia α -Hölder para os expoentes de Lyapunov de um cociclo linear que assume valores em $SL(2, \mathbb{R})$, em que $\alpha \in (0, \infty)$. Este exemplo busca generalizar o exemplo no capítulo anterior, ao mostrar que próximo de satisfazer a inequação de *fiber bunched* ainda prevalece a descontinuidade.

Para se entender a diferença entre a construção anterior e a atual das perturbações de A deve-se atentar para o cilindro em que se ocorre a troca entre os subespaços estáveis e instáveis. No caso do Capítulo 2, o cilindro Z_n é tal que fixa-se suas entradas e só são considerados os retornos ao próprio Z_n enquanto no novo exemplo se considera retornos próximos ao cilindro Z . Ao se considerar essa liberdade é necessário tomar algumas condições para se controlar os problemas consequentes. De certo modo, se paga um preço por essa liberdade pois os expoentes de Lyapunov da nova construção terão valores pequenos mas não serão nulos, diferindo do que ocorre no primeiro exemplo.

3.1 Notações e definições

Inicia-se recordando algumas notações, considere o deslocamento de Bernoulli $f : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, definido em (1.2). A medida produto dada no Teorema 1.18, definida por $\mu([0 : 0]) = 1 - p$ e $\mu([0 : 1]) = p$, para algum $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Manter-se-á a métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2^{-N(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, em que $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{N \geq 0 ; x_n = y_n \text{ para todo } |n| < N\}$. Como se mantém a norma na topologia α -Hölder para as aplicações contínuas $L : \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, para $\alpha \in (0, \infty)$ como

$$\|L\|_\alpha = \sup_{x \in \Sigma_2} \|L(x)\| + \sup_{x \neq y} \frac{\|L(x) - L(y)\|}{d(x, y)^\alpha},$$

e denotar-se-á $C^\alpha(\Sigma_2, SL(2, \mathbb{R}))$ como o conjunto das aplicações α -Hölder contínuas.

Atente-se para que se mantém a definição de A como em (2.1). Novamente se efetua o abuso de notação sobre a definição de A , ao se denotar $A(0)$ e $A(1)$, que indica que $A(\mathbf{x})$

é tal que $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$ respectivamente. O objetivo deste capítulo é construir outro exemplo de descontinuidade para os expoentes de Lyapunov de A , em síntese, objetiva-se a provar o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Seja $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Se $\sigma^{4p-2} \geq 2^\alpha$ então para cada vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset C^\alpha(\Sigma_2, SL(2, \mathbb{R}))$ de A e cada $\kappa \in (0, (2p-1) \ln \sigma)$ existe um cociclo localmente constante $L \in \mathcal{U}$ tal que $\lambda_+(L, \mu_p) = \kappa$. Em particular A é ponto de descontinuidade para os Expoentes de Lyapunov com respeito a μ_p em $C^\alpha(\Sigma_2, SL(2, \mathbb{R}))$.*

Assumi-se a hipótese de $\sigma^{2(p-1)} > 2^\alpha$. Com essa hipótese pode-se encontrar um racional $\gamma > 0$ suficientemente pequeno tal que vale a desigualdade $\sigma^2 > 2^{(\gamma+1)\alpha}$. Também pode-se escolher $N > 0$, tal que γN seja um inteiro. O parâmetro N , será frequentemente alterado de acordo com a situação, mas sempre satisfará essa hipótese de tornar $\gamma N \in \mathbb{Z}$.

Para este capítulo assumi-se algumas notações para aplicações que serão recorrentes durante a construção da perturbação do cociclo. Inicialmente denota-se por $\tau_E(\mathbf{x})$ a aplicação de tempo de primeiro retorno de \mathbf{x} a algum conjunto mensurável $E \subset \Sigma_2$, isto é,

$$\tau_E(\mathbf{x}) = \inf\{n \geq 1 : f^n(\mathbf{x}) \in E\}$$

Pela aplicação τ_E , pode-se induzir o deslocamento de retorno à E como

$$f^{\tau_E}(\mathbf{x}) = f^{\tau_E(\mathbf{x})}(\mathbf{x}),$$

isto é, f^{τ_E} é o deslocamento f iterado o número suficiente de vezes para que \mathbf{x} efetue o primeiro retorno ao conjunto E .

Através da aplicação f^{τ_E} pode-se definir a aplicação tempo mínimo para n retornos de \mathbf{x} ao conjunto E pelo deslocamento f . Para tal aplicação utiliza-se a notação $\tau_E^{(n)}(\mathbf{x})$ e a define-se por

$$\tau_E^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_E(f^{\tau_E^{(j)}}(\mathbf{x})).$$

Observa-se que para $j = 0$ há que $\tau_E(f^0(\mathbf{x})) = \tau_E(\mathbf{x})$ e se $j = 1$, ocorre que $\tau_E^1(\mathbf{x}) = \tau_E(\mathbf{x})$. Então a aplicação está bem definida para $n \geq 1$.

Defini-se a aplicação de estimativa da entrada dos valores de \mathbf{x} como

$$S_{\tau_E^{(n)}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\tau_E^{(n)}(\mathbf{x})-1} \pi(f^i(\mathbf{x})),$$

em que $\pi(f^i(\mathbf{x}))$, denota a projeção na 0-ésima entra de $f^i(\mathbf{x})$. De certa forma, devido aos símbolos que Σ_2 assume neste capítulo, pode-se interpretar $S_{\tau_E^{(n)}}(\mathbf{x})$ como a quantidade de símbolos 1 em \mathbf{x} até o n -ésimo retorno ao conjunto E .

Definir-se-á os cilindros centrais em que se efetuará a perturbação. Considere $Z \subset \Sigma_2$ o cilindro

$$Z = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2 : x_0 = 1, x_i = 0, 1 \leq i \leq N\} = [0; 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N\text{-vezes}}]. \quad (3.1)$$

Se $\gamma N \leq N$, define-se $W \subset \Sigma_2$ como

$$W = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2 : x_0 = 1, x_i = 0, 1 \leq i \leq \gamma N\} = [0; 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\gamma N\text{-vezes}}]. \quad (3.2)$$

Em particular observa-se que $Z \subseteq W$.

Como no caso do exemplo do Capítulo 2 os conjuntos $f^i(W)$ são dois a dois disjuntos, isto é, $f^i(W) \cap f^j(W) = \emptyset$ para $i \neq j$ sempre que $0 \leq i, j \leq \gamma N - 1$. Consequentemente, de Z estar contido em W , segue que $f^i(Z) \cap f^j(Z) = \emptyset$, para $i \neq j$. Esta propriedade é representada na Figura 3.1.

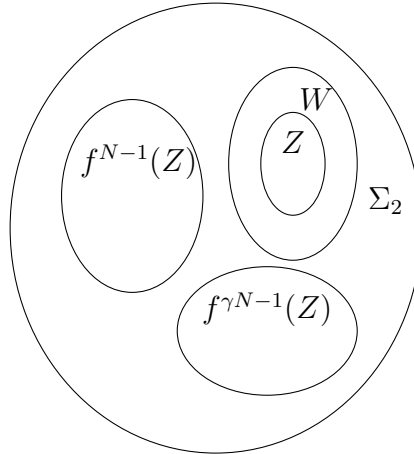


Figura 3.1: Cilindros W e Z .

Para os cilindros W e Z que foram definidos, denota-se o tempo de primeiro retorno a Z dos pontos $\mathbf{x} \in W$ pela aplicação f por $t(\mathbf{x})$, que se relaciona com a aplicação $f^{\tau_W^{(n)}}$ da seguinte forma

$$t(\mathbf{x}) = \inf\{n \geq 1 : f^{\tau_W^{(n)}}(\mathbf{x}) \in Z\}. \quad (3.3)$$

Observação 3.2 Segue da definição das aplicações $S_{\tau_Z}(\mathbf{x})$ e $\tau_Z(\mathbf{x})$ uma forma de se estimar e denotar a quantidade de entradas 0 e 1 em algum ponto \mathbf{x} até alguma iterada específica.

Recorda-se que $S_{\tau_Z}(\mathbf{x})$ indica a quantidade de entradas 1 na sequência \mathbf{x} até o retorno ao conjunto Z . Já τ_Z indica a quantidade de iteradas necessárias para o retorno de \mathbf{x} à Z . Como as possibilidades de entradas são 0 ou 1, ao eliminar a quantidade de entradas 1 das

iteradas necessárias para retornar a Z restará a quantidade de entradas 0 da sequência \mathbf{x} , isto é, a quantidade de entradas 0 até o retorno ao conjunto Z é dada por $\tau_Z(\mathbf{x}) - S_{\tau_Z}(\mathbf{x})$.

Por fim destaca-se que a diferença entre a quantidade de entradas 1 e 0 até uma iterada j , em que j é o tempo de retorno ao conjunto Z , é dada por

$$\begin{aligned} \#1_{j+1} - \#0_{j+1} &= S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - (\tau_Z(\mathbf{x}) - S_{\tau_Z}(\mathbf{x})) \\ &= 2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - \tau_Z(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Começar-se -á a construção da alteração do cociclo A . Essa primeira alteração será o cociclo B . Este cociclo B é o início da construção da perturbação final L do cociclo induzido inicial A .

Definição 3.3 Dado $\varepsilon > 0$ e A o cociclo linear definido em (2.1). Considere o cociclo $B : \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ dado por

$$B(\mathbf{x}) = \begin{cases} R_1^{-\theta} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in f^{N-1}(Z) \\ A(\mathbf{x}) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} & \text{se } \mathbf{x} \in W \\ A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z) \end{cases}, \quad (3.4)$$

em que as matrizes $R_1^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}}$ e $R_2^{-\theta}$ são definidas respectivamente por $R_1^{-\theta} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} & 1 \end{bmatrix}.$$

Na Definição 3.3 o valor do parâmetro θ será escolhido a frente para que seja possível o cisalhamento $R_1^{-\theta}$ tornar a direção estável paralela a direção instável. Porém antes de prosseguir será introduzida uma notação que auxilia na compreensão do processo. Denota-se $a \asymp b$ para indicar que existe uma constante C independente de N tal que $C^{-1}b < a < Cb$. Assumi-se que $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são os vetores canônicos de \mathbb{R}^2 . Salienta-se que a notação \asymp utilizada em vetores denota uma limitação sobre a constante do respectivo vetor. Na Figura 3.2 é apresentado graficamente uma intuição da notação \asymp .

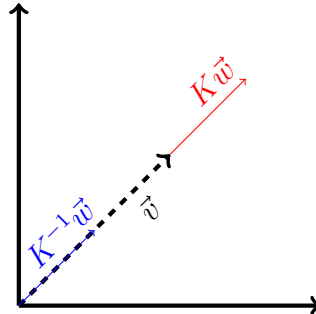


Figura 3.2: $\vec{v} \asymp \vec{w}$.

O próximo lema indicará a possibilidade do cociclo induzido por B sobrepor a direção e_1 na direção e_2 após um número de iteradas suficientemente grande.

Lema 3.4 *Existem θ e N suficientemente grande tal que $B^N(\mathbf{x})(e_1) = Ke_2$ para algum $K \in \mathbb{R}$. Além disso, $B^{\tau_Z}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \varepsilon C^N \sigma^{-2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) + \tau_Z(\mathbf{x})} e_2$ para $\mathbf{x} \in Z$.*

Demonstração:

Nota-se que se $\mathbf{x} \in Z$ então

$$\begin{aligned} B^N(\mathbf{x}) &= B(f^{N-1}(\mathbf{x})) \dots B(\mathbf{x}) \\ &= R_1^{-\theta} A(0) \dots A(0) A(1) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} \\ &= R_1^{-\theta} A(0) \dots A(0) Id R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{-(N-2)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^{-(N-2)} - \theta \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} & -\theta \sigma^{(N-2)} \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} & \sigma^{(N-2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} B^N(\mathbf{x})(e_1) &= \begin{bmatrix} \sigma^{-(N-2)} - \theta \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} & -\theta \sigma^{(N-2)} \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} & \sigma^{(N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^{-(N-2)} - \theta \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por hipótese $\sigma^2 > 2^{(\gamma+1)\alpha}$, portanto $\left(\frac{2^{(\gamma+1)\alpha}}{\sigma^2}\right)^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo se N é suficientemente grande tem-se que $\left(\frac{2^{(\gamma+1)\alpha}}{\sigma^2}\right)^N < \frac{\varepsilon^2}{\sigma^4}$, que é equivalente a desigualdade

$$\varepsilon^{-1} 2^{\gamma \alpha N} \sigma^{-2(N-2)} < \varepsilon 2^{-\alpha N}.$$

Daí, toma-se $\theta = \varepsilon^{-1} 2^{\gamma \alpha N} \sigma^{-2(N-2)}$ e conseqüentemente decorre que

$$\sigma^{-(N-2)} - \varepsilon^{-1} 2^{\gamma \alpha N} \sigma^{-2(N-2)} \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} = 0.$$

Ainda mais, se $\theta < \varepsilon 2^{-\alpha N}$, pode-se escolher $C > 1$ tal que $C^{-1} \varepsilon 2^{-\alpha N} \leq \theta \leq C \varepsilon 2^{-\alpha N}$, pois basta notar que

$$\begin{aligned}
C^{-1}\varepsilon 2^{-\alpha N} &< \varepsilon^{-1} 2^{\gamma\alpha N} \sigma^{-2(N-2)} \\
C^{-1} &< \varepsilon^{-2} 2^{(\gamma+1)\alpha N} \sigma^{-2(N-2)} \\
1 &< \frac{\varepsilon^2}{\sigma^4} \left(\frac{\sigma^2}{2^{(\gamma+1)\alpha}} \right)^N < C.
\end{aligned}$$

Portanto $\theta \asymp \varepsilon 2^{-\alpha N}$.

Para a segunda afirmação destaca-se que $B^{\tau_Z(\mathbf{x})}(e_1) = A^{\tau_Z(\mathbf{x})-N}(f^N(\mathbf{x}))(B^N(\mathbf{x}))(e_1)$, e B mantém fixo a reta que passa em e_2 exceto quando $\mathbf{x} \in f^{N-1}(Z)$. Assim decorre que

$$B^N(\mathbf{x})(e_1) \asymp \varepsilon \sigma^N 2^{-\gamma\alpha N} e_2.$$

Para finalizar, da Observação 3.2 segue que $S_{\tau_Z(\mathbf{x})} = 1 + \sum_{i=N+1}^{\tau_Z(\mathbf{x})-1} \pi(f^i(\mathbf{x}))$ e portanto pode-se estimar a quantidade de $A(0)$ e $A(1)$ por meio de $2S_{\tau_Z(\mathbf{x})} - \tau_Z(\mathbf{x})$. Logo $B^{\tau_Z(\mathbf{x})}(e_1) \asymp \varepsilon C^N \sigma^{-2S_{\tau_Z(\mathbf{x})} + \tau_Z(\mathbf{x})}$.

■

O próximo lema afirma que ao alterar o cociclo A , construindo o cociclo B , não se afasta B de forma exagerada de A .

Lema 3.5 $\|A - B\|_\alpha < C\varepsilon$, para $\mathbf{x} \in Z$.

Demonstração:

Se \mathbf{x} e \mathbf{y} estão no mesmo cilindro, segue de A ser constante em cilindros que

$$\frac{\|(A - B)(\mathbf{x}) - (A - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} = \frac{\|B(\mathbf{x}) - B(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}.$$

Definição de B tem-se que se \mathbf{x} e \mathbf{y} estão no mesmo cilindro e esse cilindro está em algumas das alterações que definem B , então $B(\mathbf{x}) - B(\mathbf{y}) = 0$.

Considera-se agora os casos em que \mathbf{x} e \mathbf{y} não estão no mesmo conjunto de definição.

Se $\mathbf{x} \in W$ e $\mathbf{y} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z)$ então segue que

$$\begin{aligned} \frac{\|(A-B)(\mathbf{x}) - (A-B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) + B(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &= \frac{\|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) + A(\mathbf{y}) - A(\mathbf{x})R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &= \frac{\|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\|A(\mathbf{x})\| \|Id - R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\sigma\varepsilon 2^{\gamma\alpha N}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{y} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z)$ então $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \gamma N$, pois mais coordenadas iguais indicaria que $\mathbf{y} \in W$. Logo, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-\alpha} \leq 2^{\gamma\alpha N}$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\|(A-B)(\mathbf{x}) - (A-B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq \frac{\sigma\varepsilon 2^{\gamma\alpha N}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} 2^{\gamma\alpha N} = \sigma\varepsilon. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x} \in f^{N-1}(Z)$ e $\mathbf{y} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z)$

$$\begin{aligned} \frac{\|(A-B)(\mathbf{x}) - (A-B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|A(\mathbf{x}) - R_1^{-\theta}A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) + A(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\|A(\mathbf{x}) - R_1^{-\theta}A(\mathbf{x})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\|A(\mathbf{x})\| \|Id - R_1^{-\theta}\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\sigma\theta}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x} \in f^{N-1}(Z)$ e $\mathbf{y} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z)$ então $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq N-2$, e assim $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-\alpha} \leq 2^{(N-2)\alpha}$ e lembre-se que $\theta < \varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}$ e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\|(A-B)(\mathbf{x}) - (A-B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq \frac{\sigma\theta}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \sigma\theta 2^{(N-2)\alpha} \\ &\leq \sigma\varepsilon 2^{-\alpha N} 2^{\alpha N} 2^{-2\alpha} = \frac{\sigma\varepsilon}{2^{2\alpha}} \end{aligned}$$

Por fim, se $\mathbf{x} \in W$ e $\mathbf{y} \in f^{N-1}(Z)$ então $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, já que $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$. Segue

que

$$\begin{aligned}
\frac{\|(A - B)(\mathbf{x}) - (A - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}} A(\mathbf{y}) + R_1^{-\theta} A(\mathbf{y})\| \\
&\leq \|(Id - R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}})A(\mathbf{x})\| + \|A(\mathbf{y})(Id - R_1^{-\theta})\| \\
&\leq \|A\| \|Id - R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\| + \|A\| \|Id - R_1^{-\theta}\| \\
&\leq \sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} + \sigma\theta \\
&< \sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} + \sigma\varepsilon 2^{-\alpha N} \\
&< 2\sigma 2^{-\alpha N} \varepsilon < 2\sigma\varepsilon.
\end{aligned}$$

Agora observa-se que o $\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma_2} \|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\|$ pode-se limitar da seguinte forma. Se $\mathbf{x} \in W$, então

$$\|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| = \|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\| \leq \|A\| \|Id - R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}\| \leq \sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}.$$

Se $\mathbf{x} \in f^{N-1}(Z)$, segue que

$$\|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| = \|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})R_1^{-\theta}\| \leq \|A\| \|Id - R_1^{-\theta}\| \leq \sigma\theta < \sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}.$$

E se $\mathbf{x} \in W^c \setminus f^{N-1}(Z)$ segue que

$$\|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| = \|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})\| = 0.$$

Em todos os casos pode-se efetuar a limitação $\sigma\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} < \sigma\varepsilon$. Então decorre que

$$\begin{aligned}
\|A - B\|_\alpha &= \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma_2} \|A(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| + \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Sigma_2} \frac{\|(A - B)(\mathbf{x}) - (A - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\
&< \sigma\varepsilon + 2\sigma\varepsilon \\
&< 3\sigma\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Pelo Lema 3.4 nota-se que a perturbação que leva e_1 a e_2 nos retornos ao conjunto Z já está definida. Resta definir a que levará e_2 para e_1 . Contudo, para efetuar essa mudança, deve-se alterar o cociclo induzido por B sem alterar a troca já realizada.

Para efetuar essa modificação de forma a preservar a direção e_1 , deve-se escolher um conjunto adequado para efetuar a modificação do cociclo induzido. Esse conjunto será denotado por G , definido por algumas propriedades e parâmetros que serão apresentados à frente. Em particular os parâmetros e propriedades escolhidos para definir G permitirão que as modificações em B não o afastem de A na norma α -Hölder.

Definição 3.6 *Seja v uma palavra finita com $m \geq \gamma N + 1$ símbolos $v_j \in \{0, 1\}$, $0 \leq j \leq m - 1$. Diz-se que $v = v_0 \cdots v_{m-1}$ é um bloco de retorno à W de comprimento m se satisfizer:*

1. $v_0 = 1$ e $v_i = 0$ para $1 \leq i \leq \gamma N$.
2. Não existe uma sub-palavra da forma $(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\gamma N - \text{vezes}})$ contida na sub-palavra formada por $v_{\gamma N + 1} \dots v_{m-1}$.

Tendo a definição de bloco de retorno à W definir-se-à outros conjuntos utilizados na construção da modificação de B . O primeiro conjunto é $\mathcal{C}(v)$, que indica o cilindro da palavra finita v . Esse conjunto denota o cilindro que têm as m primeiras entradas de seus pontos coincidindo com os símbolos v_j da palavra finita v e exatamente em seguida a sub-palavra da forma $(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\gamma N - \text{vezes}})$, dito em outras palavras,

$$\mathcal{C}(v) = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2; x_i = v_i; 0 \leq i \leq |v| - 1, x_{|v|} = 1, x_i = 0, |v| + 1 \leq i \leq |v| + \gamma N\},$$

em que $|v|$ denota o comprimento da palavra finita v . Pode-se dizer também que $\mathcal{C}(v)$ é o conjunto dos \mathbf{x} tais que iniciam em W e retornam a W pela aplicação deslocamento f após $|v| = m$ iteradas, isto é, se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v)$ ocorre $\tau_W(\mathbf{x}) = |v|$.

Observação 3.7 *O cilindro $\mathcal{C}(v)$ tem diâmetro de ao menos $2^{-(|v| + \gamma N)}$, em que $|v| = \tau_W(\mathbf{x})$ para algum $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v)$.*

De fato, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}(v)$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, então,

$$\mathbf{x} = (v_0, v_1, \dots, v_{|v|-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\gamma N - \text{vezes}}, x_{|v| + \gamma N + 1}, \dots),$$

e

$$\mathbf{y} = (v_0, v_1, \dots, v_{|v|-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\gamma N - \text{vezes}}, y_{|v| + \gamma N + 1}, \dots).$$

como $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existe a possibilidade dos pontos diferirem apenas na $|v| + \gamma N + 1$ entrada. Logo $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq |v| + \gamma N$ e $\sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}(v)\} \leq 2^{-(|v| + \gamma N)}$, concluindo a observação.

O próximo conjunto a se definir será denotado por \mathcal{V} e indicará o conjunto de todos os blocos de retorno à W , isto é,

$$\mathcal{V} = \{v; v \text{ é um bloco de retorno à } W \text{ de comprimento } m, \gamma N + 1 \leq m < +\infty\}.$$

E assim denotar-se-à o conjunto das l -ênuplas de $v \in \mathcal{V}$ por \mathcal{V}^l . Antes de prosseguir com as definições dos conjuntos necessários para se construir uma nova perturbação de A será definidos alguns parâmetros.

- O primeiro será $\beta > 0$, que deverá ser tomado satisfazendo a inequação

$$\sigma^{4p-2-4\beta} > 2^\alpha. \quad (3.5)$$

- Já $\kappa > 0$ é tal que $0 < \kappa \leq (2p - 1) \ln \sigma^2$.
- Para escolher $\eta > 0$, independente de N utilizar-se-à de uma consequência dos teoremas provados em [1]. Dessa forma a escolha de η satisfaz que para todo $a > 1$ e $N > 0$ ocorre

$$\frac{\mu\left\{\mathbf{x} \in Z; \tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{a}{\mu(Z)}\right\}}{\mu(\Sigma_2)} \leq \eta e^{-a}.$$

- Com a escolha de η e κ feitas, pode-se escolher $\zeta > 1$ suficientemente grande a tal ponto que $\frac{\eta(\ln(\sigma^2))e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^2} < \frac{\kappa}{100}$.
- O último parâmetro tomado será ω , um inteiro escolhido de tal modo que $\omega > \gamma^{-1}$. Destaca-se que quanto menor o valor de γ maior será o valor de ω .

Após estabelecer esses parâmetros pode-se definir $\mathcal{G}_l \subset \mathcal{V}^l$ como o conjunto das l -ênuplas de blocos de retorno à W que satisfazem

1. se $l = 1$, então \mathcal{G}_1 é o conjunto das as 1-ênupla v^1 , de blocos de retorno à W tais que

$$\mathcal{C}(v^1) \subset \{\mathbf{x} \in W : |S_{\tau_W}(\mathbf{x}) - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x}) \text{ e } N^2 \leq \tau_W(\mathbf{x}) \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}\}; \quad (3.6)$$

2. se $l \geq 2$, então \mathcal{G}_l é o conjunto das l -ênupla v^1, v^2, \dots, v^l de blocos de retorno à W tais que

$$\mathcal{C}(v^j) \subset \{\mathbf{x} \in W : \tau_W(\mathbf{x}) < N^{j+1}\}$$

para $1 \leq j \leq l - 1$ e

$$\mathcal{C}(v^l) \subset \{\mathbf{x} \in W : |S_{\tau_W}(\mathbf{x}) - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x}) \text{ e } N^{l+1} \leq \tau_W(\mathbf{x}) \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}\}.$$

E posterior a essas definições de conjuntos e parâmetros finalmente se define o conjunto G tal que será utilizado para modificar B e consequentemente o cociclo induzido.

Definição 3.8 *Seja $t(\mathbf{x})$ como definido em (3.3). Diz-se que $G \subset Z$ é um bom conjunto, cujos pontos $\mathbf{x} \in Z$ estão associados a uma sequência de blocos de retorno à W , $(v^1(\mathbf{x}), \dots, v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) \in \mathcal{V}^{t(\mathbf{x})}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *O bloco de retorno $v^1(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$.*
2. *Se $v^i(\mathbf{x})$ é um bloco de retorno á W tal que $|v^i(\mathbf{x})| \geq N^2$ então*

$$\mathcal{C}(v^i(\mathbf{x})) \subset \{\mathbf{x} \in W : |S_{\tau_W(\mathbf{x})} - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x})\}.$$

3. *Não existe uma sub-ênupla $(v^{i+1}(\mathbf{x}), \dots, v^{i+\omega}(\mathbf{x}))$ com ω elementos tais que*

$$\mathcal{C}(v^{i+j}(\mathbf{x})) \subset \{\mathbf{x} \in W; \tau_W(\mathbf{x}) < N^{j+1}\}$$

para cada $1 \leq j \leq \omega$.

4. *O cilindro $\mathcal{C}(v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) \subset \{\mathbf{x} \in W; \tau_W(\mathbf{x}) \geq N^{\omega+1}\}$.*

5. $\tau_Z(\mathbf{x}) \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}$.

Para entender as propriedades que definem o conjunto G deve-se lembrar a definição de W em (3.2), que implica que os pontos $\mathbf{x} \in W$ satisfazem $|v^i(\mathbf{x})| \geq \gamma N + 1$, para $2 \leq i \leq t(\mathbf{x})$. Em particular, diferente do exemplo do capítulo 2, não se considera apenas um bloco de retorno á W para efetuar o processo de troca das direções estáveis e instáveis. E portanto não se pode efetuar a construção sem exigir uma longa sequência de palavras v^i , que apresentem “boas” propriedades.

Ao se considerar qualquer $\mathbf{y} \in W$, segue da definição de B e do visto na demonstração do de Lema 3.4 que o ângulo entre $B^{\gamma N+1}(\mathbf{y})(e_1)$ e e_1 é de ao menos uma constante $C > 0$, que independe de N . Assim para efetuar a α -Hölder perturbação que preserve a reta sobre e_1 , espera-se que exista uma iteração $M > \gamma N + 1$, suficientemente grande tal que o ângulo entre $B^M(\mathbf{y})(e_1)$ e e_1 seja exponencialmente pequeno em M antes de se efetuar o cisalhamento que permuta os espaços sobre as retas geradas por e_1 e e_2 .

Portanto a primeira propriedade de G busca pontos \mathbf{x} tais que seu primeiro tempo de retorno á W seja suficientemente grande, mas exista uma limitação superior garantindo que a palavra $v^1(\mathbf{x})$ seja finita.

Um cálculo de probabilidade mostra que se $\gamma < \frac{1}{2}$ então a probabilidade de $|v^i(\mathbf{x})| = \gamma N + 2$ para algum $1 \leq i \leq t(\mathbf{x})$, aproxima-se de 1 quando $N \rightarrow \infty$. Isto é, quanto maior é o valor de N maior é a chance de existir um bloco de retorno à W com o menor tempo de retorno possível de \mathbf{x} a W . Esse fato indica que para γ pequeno, quase certamente existe um bloco de retorno à W que é pequeno e não deve ter um ângulo exponencialmente pequeno entre e_1 e uma determina da iterada do cociclo B sobre e_1 , o que impede de

aplicar o cisalhamento mencionado. Portanto, deve se considerar grupos de blocos de retorno à W que garantam $\mu_Z(G)$ grande.

Em particular, essa garantia de $\mu_Z(G)$ ser grande decorre da propriedade 3 de G , que indica a existência de longas sequências de blocos e retorno à W , já que γ pequeno implica ω grande. As palavras que compõem a sequência de blocos de retorno à W possuem limitações de tempo de retorno a W suficientemente grande para que ângulo seja exponencialmente pequeno. A seguir apresenta-se uma das propriedades do conjunto de blocos de retorno á W que compõem G .

Lema 3.9 *Para cada $\mathbf{x} \in G$, existe uma única partição da sequência $(v^1(\mathbf{x}), \dots, v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x}))$ em uma l -ênupla da forma $(v^i(\mathbf{x}), \dots, v^{i+l-1}(\mathbf{x}))$ que se encontra em \mathcal{G}_l com $1 \leq l \leq \omega$.*

Demonstração:

Pela definição do conjunto bom G , item 1, $v^1(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^1$. Agora, para a construir a partição da sequência olha-se de forma ordenada para uma palavra $v^{k+1}(\mathbf{x})$.

Se $|v^{k+1}| \geq N^2$ então $\mathcal{C}(v^k) \subset \{\mathbf{x} \in W : |S_{\tau_W(\mathbf{x})} - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x})\}$. Pela última condição de G segue que

$$\frac{\zeta}{\mu(Z)} \geq \tau_Z(\mathbf{x}) - \tau_W(\mathbf{x}) \geq \tau_W(\mathbf{x})^{k+1}.$$

Portanto $v^{k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$ e toma-se $v^{k+1}(\mathbf{x})$ como o novo elemento da partição.

Caso $|v^{k+1}| < N^2$, pela propriedade de G deve existir algum l tal que $2 \leq l \leq \omega$ com $|v^{k+j}(\mathbf{x})| < N^{j+1}$ para $1 \leq i \leq l-1$ e $|v^{k+l}(\mathbf{x})| \geq N^{l+1}$. Segue da definição de G que $(v^{k+1}(\mathbf{x}), \dots, v^{k+l}(\mathbf{x}))$ deve satisfazer

$$\mathcal{C}(v^{k+i}(\mathbf{x})) \subset \{\mathbf{x} \in W : \tau_W(\mathbf{x}) < N^{k+i+1}\},$$

para $1 \leq i \leq l-1$.

E $|v^{k+l}(\mathbf{x})| \geq N^{l+1} > N^2$ então

$$\mathcal{C}(v^{k+l}(\mathbf{x})) \subset \{\mathbf{x} \in W : |S_{\tau_W(\mathbf{x})} - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x})\}$$

Logo $(v^{k+1}(\mathbf{x}), \dots, v^{k+l}(\mathbf{x})) \in \mathcal{G}_l$ e toma-se está ênupla como novo elemento da partição.

Observa-se que pela exigência de $|v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})| \geq N^{\omega+1}$, decorre forçosamente que a última partição tomada seja da forma $(v^{t(\mathbf{x})-l+1}(\mathbf{x}), \dots, v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) \in \mathcal{G}_l$ para algum l , $1 \leq l \leq \omega$, concluindo a existência da partição.

Provar-se-á a unicidade da partição. Ela decorre da unicidade de cada sub-palavra $v^i(\mathbf{x})$ para $1 \leq i \leq t(\mathbf{x})$ e pela forma como se da à construção. Isto é, cada sub-palavra $v^i(\mathbf{x})$ sempre será única para um determinado ponto $\mathbf{x} \in \Sigma_2$. Assim a construção avalia

de forma ordenada cada tamanho das sub-palavras, implicando na unicidade da decomposição.

■

O Lema 3.9 apresenta que a $t(\mathbf{x})$ -ênupla de blocos de retorno à W dos pontos $\mathbf{x} \in G$ possuem a característica de se separarem em sub-ênuplas de \mathcal{G}_l , com $1 \leq l \leq \omega$. Assim para efetuar a modificação de B , será utilizado as sub-ênuplas e efetuar-se-à as modificações sobre cada palavras $v^{i+l-1}(\mathbf{x})$. Em particular existe formas de se tratar cada palavra $v^{i+l-1}(\mathbf{x})$ das ênuplas $(v^i(\mathbf{x}), \dots, v^{i+l-1}(\mathbf{x})) \in \mathcal{G}_l$. A frente será tratado os blocos de retorno à W que satisfazem $v^1(\mathbf{x})$, com $x \in G$.

Observação 3.10 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $v^1(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(v) \subset Z$. Essas condições são equivalentes a considerar os pontos $\mathbf{x} \in G$ tais que iniciam a decomposição em ênuplas da forma \mathcal{G}_l com $1 \leq l \leq \omega$.*

Os próximos resultados tem como objetivo moldar a perturbação final L . Inicialmente se definirá B_0 e efetuando modificações sucessivas define-se B_l . Recordar-se do exemplo de Bocker-Viana no Capítulo 2, a característica principal do cociclo que perturba A é a troca dos espaços estáveis e instáveis nos pontos do cilindro Z_n . Neste exemplo se deseja que a perturbação final de A que será denotada por L , efetue as trocas apesar de utilizar os cilindros W e Z .

Ao considerar $\mathbf{x} \in G \subset Z$, se tem a sequência de blocos de retorno à W associados a \mathbf{x} antes que ele efetue o primeiro retorno à Z , isto é, $(v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), \dots, v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x}))$. Então se construirá B_0 , alterando B , de tal forma que na primeira palavra $v^1(\mathbf{x})$ ocorrerá a troca dos espaços estáveis e instáveis do seguinte modo.

Destaca-se que quando \mathbf{x} passa pelo cilindro W , a direção e_1 sofre um cisalhamento, que leva a direção e_1 para a direção $e_1 + \varepsilon 2^{-\gamma r N} e_2$, pela definição de B . Ao considera $\mathbf{x} \in Z$, segue que esse ponto passará por $f^{N-1}(Z)$, e nesse momento, a direção e_1 que foi perturbada para $e_1 + \varepsilon 2^{-\gamma r N} e_2$ finalmente passa para Ke_2 . Simultaneamente a direção e_2 que estava fixa até esse momento pelo cociclo B_0 se movimenta para uma direção da forma $ke_1 + e_2$, como se observa na Figura 3.3 .

E então B_0 deve ser tal que ao se aplicar iterações suficientes para que a imagem de \mathbf{x} esteja em $f^{|v^1(\mathbf{x})|-1}(\mathcal{C}(v^1(\mathbf{x})))$, ocorrerá o cisalhamento que leva $ke_1 + e_2$ para a direção e_1 . Isso deve ocorrer sem alterar a direção fixa e_2 construída em $f^{N-1}(Z)$.

Contudo, quando ocorre o retorno à W na palavra $v^2(\mathbf{x})$, a recém determinada direção e_1 será perturbada, pela definição de B . Para corrigir os erros dos retornos à W , que ocorreram a cada início de palavra v^i , toma-se a decomposição da sequência de blocos de retorno à W associados a \mathbf{x} em sub-ênuplas de palavras pertencentes a \mathcal{G} . E para cada palavra final, dessas sub-ênuplas, efetua-se uma modificação de forma que a direção $e_1 + r(\mathbf{x})e_2$ retorne para e_1 .

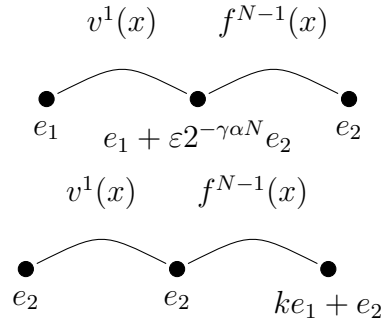


Figura 3.3: Primeira modificação em W .

Como as sub-ênuplas de blocos de retorno á W podem assumir tamanhos l , em que $1 \leq l \leq \omega$, deve-se definir a modificação de forma que o cociclo sempre identifique l e a possível quantidade de palavras que antecedem a sub-ênupla. Isto será possível ao se considerar a modificação sobre um conjunto \mathcal{C}^* . Esta etapa final é representado na Figura 3.4.

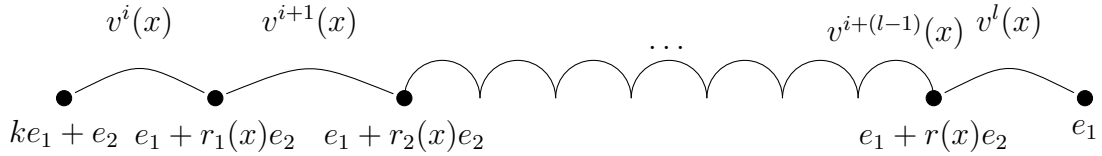


Figura 3.4: Mudança de direção em l -ênuplas \mathcal{G}_l .

O lema a seguir descreve o comportamento do cociclo associado a B quando se está sobre os pontos $\mathbf{x} \in G$ na primeira palavra associada a decomposição em ênuplas de blocos de retorno \mathcal{G}_l .

Lema 3.11 *Seja $\mathbf{x} \in G$ tal que $v^1(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$ é um bom bloco de retorno à W , com $\mathcal{C}(v^1) \subset Z$. Se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v^1)$ então $B^{\tau_W}(\mathbf{x})(e_2) \asymp \sigma^{-N} \theta \sigma^{2S_{\tau_W}(\mathbf{x}) - \tau_W(\mathbf{x}) + N} (-e_1 + \theta^{-1} \sigma^{-4S_{\tau_W}(\mathbf{x}) + 2\tau_W(\mathbf{x}) - 2N} e_2)$*

Demonstração:

Se $\mathbf{x} \in Z$ então

$$\begin{aligned} B^N(\mathbf{x})(e_2) &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \sigma^{(N-2)} \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} \sigma^{(N-2)} & \sigma^{(N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \sigma^{(N-2)} \begin{bmatrix} -\theta \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular o ângulo $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 1}}\right)$ entre $B^N(\mathbf{x})(e_2)$ e e_2 é menor que θ e segue que $\varphi \asymp \theta$.

Agora, observa-se que

$$\begin{aligned} B^{\tau_W(\mathbf{x})} &= B(f^{(\tau_W(\mathbf{x})-1)}(\mathbf{x})) \dots B(f^{(N-1)}(\mathbf{x})) \dots B(\mathbf{x}) \\ &= B(f^{(\tau_W(\mathbf{x})-1)}(\mathbf{x})) \dots B^N(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Como B fora de $f^{N-1}(Z)$ e de W é igual a A , segue que

$$B^{\tau_W(\mathbf{x})}(e_2) = A^{\tau_W(\mathbf{x})-N}(B^N(\mathbf{x})(e_2)).$$

Pela observação inicial segue que

$$B^{\tau_W(\mathbf{x})}(e_2) \asymp \sigma^{-N} A^{\tau_W(\mathbf{x})-N}(-\theta e_1 + e_2).$$

Relembra-se que a direção e_1 aumenta se existe 1 na sequência \mathbf{x} e a direção e_2 aumenta se existe 0 á sequência \mathbf{x} .

Utilizando a Observação 3.2 é possível estimar a quantidade de 1 e 0 na sequência \mathbf{x} até o retorno de \mathbf{x} ao conjunto W . Para, estimar como o cociclo A afetará o vetor $-\theta e_1 + e_2$ durante as $\tau_W(\mathbf{x}) - N$ iteradas, basta remover as N primeiras iteradas da estimativa.

Assim concluí-se que

$$\begin{aligned} B^{\tau_W(\mathbf{x})}(e_2) &\asymp \sigma^{-N}(-\theta \sigma^{2S_{\tau_W(\mathbf{x})-\tau_W(\mathbf{x})+N}} e_1 + \sigma^{-2S_{\tau_W(\mathbf{x})+\tau_W(\mathbf{x})-N}} e_2) = \\ &= \sigma^{-N} \theta \sigma^{2S_{\tau_W(\mathbf{x})-\tau_W(\mathbf{x})+N}}(-e_1 + \theta^{-1} \sigma^{-4S_{\tau_W(\mathbf{x})+2\tau_W(\mathbf{x})-2N}} e_2). \end{aligned}$$

■

Para definir o cisalhamento que tornará a direção e_2 paralela a direção e_1 é necessário melhorar a estimativa que está na direção e_2 dada pelo Lema 3.11.

Lema 3.12 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $v^1(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$ é um bom bloco de retorno à W com $\mathcal{C}(v^1) \subset Z$. Se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v^1)$, para N suficientemente grande é válido*

$$\theta^{-1} \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(\mathbf{x})-2N} < \varepsilon 2^{-\alpha(\tau_W(\mathbf{x})+\gamma N)}.$$

Demonstração:

Tome $\xi = \sigma^{-4p+2+4\beta} 2^\alpha$. Pela escolha de β em (3.5) decorre que $\xi < 1$. Como $v^1 \in \mathcal{G}_1$, pela definição em (3.6) segue que $N^2 \leq \tau_W(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v^1)$. Então

$$\xi^{\tau_W(\mathbf{x})} < \xi^{N^2}.$$

Por outro lado relembra-se que $\theta \asymp \varepsilon 2^{-\alpha N}$. Em particular

$$\begin{aligned}
k\varepsilon 2^{-\alpha N} &= C^{-1} \varepsilon 2^{-\alpha N} < \theta \\
k\varepsilon 2^{-\alpha N} \varepsilon \sigma^{2N} 2^{-\gamma \alpha N} &< \theta \varepsilon \sigma^{2N} 2^{-\gamma \alpha N} \\
k\varepsilon^2 \sigma^{2N} 2^{-(\gamma+1)\alpha N} &< \theta \varepsilon \sigma^{2N} 2^{-\gamma \alpha N}.
\end{aligned}$$

Por fim nota-se que para algum N suficientemente grande se tem as duas seguintes inequações

$$k\varepsilon^2 \left(\frac{\sigma^2}{2^{(1+\gamma)\alpha}} \right)^N > k\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad k\varepsilon^2 > \xi^{N^2}.$$

Portanto, para N suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\xi^{\tau_W(\mathbf{x})} &< \xi^{N^2} < k\varepsilon^2 \sigma^{2N} 2^{-(1+\gamma)\alpha N} < \theta \varepsilon \sigma^{2N} 2^{-\gamma \alpha N} \\
\sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(\mathbf{x})} 2^{\alpha \tau_W(\mathbf{x})} &< \theta \varepsilon \sigma^{2N} 2^{-\gamma \alpha N} \\
\theta^{-1} \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(\mathbf{x})} 2^{2N} &< \varepsilon 2^{-\alpha(\tau_W(\mathbf{x})+\gamma N)}
\end{aligned}$$

■

O próximo resultado garante que é possível definir um cisalhamento que tornará o cociclo induzido por B aplicado na direção e_2 paralelo a direção e_1 , após uma quantidade suficiente de iteradas.

Lema 3.13 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $v(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(v) \subset Z$. Então para N suficientemente grande existe $\delta(v) > 0$ suficientemente pequeno tal que o cisalhamento $R_2^{\delta(v)}(B^{\tau_W(\mathbf{x})}(e_2))$ é paralelo a e_1 e pode-se escolher $\delta(v) < \varepsilon 2^{-(|v|+\gamma N)}$.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.11 sabe-se que $B^{\tau_W(\mathbf{x})}(e_2) \asymp \theta \sigma^{2S_{\tau_W(\mathbf{x})-\tau_W(\mathbf{x})}} (-e_1 + \theta^{-1} \sigma^{-4S_{\tau(\mathbf{x})} 2\tau_W(\mathbf{x})-2N} e_2)$. Para garantir a existência de $\delta(v)$ basta que exista um $\delta'(v)$ tal que o cisalhamento $R_2^{\delta'(v)}$ torne o vetor $-e_1 + \theta^{-1} \sigma^{-4S_{\tau(\mathbf{x})} 2\tau_W(\mathbf{x})-2N} e_2$ paralelo a e_1 .

Em particular pode-se tomar $\delta'(v) = \theta^{-1} \sigma^{-4S_{\tau_w(\mathbf{x})+2\tau_W(\mathbf{x})-2N}$. Pela definição da relação \asymp segue que $\delta(v) < \delta'(v)$.

Para determinar a limitação de $\delta(v)$ observa-se que pela definição de \mathcal{G}_1 em (3.6), para $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(v)$, segue de $|S_{\tau_W(\mathbf{x})} - p\tau_W(\mathbf{x})| \leq \beta\tau_W(\mathbf{x})$ que

$$\begin{aligned}
p\tau_W(\mathbf{x}) - \beta\tau_W(\mathbf{x}) &\leq S_{\tau_W(\mathbf{x})} \\
-4S_{\tau_W(\mathbf{x})} + 2\tau_W(\mathbf{x}) &\leq 4(\beta - p)\tau_W(\mathbf{x}) + 2(\tau_W(\mathbf{x})) \\
-4S_{\tau_W(\mathbf{x})} + \tau_W(\mathbf{x}) &\leq (4\beta + 2 - 4p)\tau_W(\mathbf{x}) \\
\sigma^{-4S_{\tau_W(\mathbf{x})+2\tau_W(\mathbf{x})}} &\leq \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(\mathbf{x})}.
\end{aligned}$$

Assim pelo Lema 3.12 decorre que

$$\begin{aligned} \theta^{-1} \sigma^{-4S\tau_W(\mathbf{x})+2\tau_W(\mathbf{x})-2N} &\leq \theta^{-1} \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(\mathbf{x})-2N} \\ &\leq \varepsilon 2^{-\alpha(\tau_W(\mathbf{x})+\gamma N)} = \varepsilon 2^{-\alpha(|v|+\gamma N)}. \end{aligned}$$

■

Sabe-se que existe o cisalhamento $R_2^{\delta(v)}$ que torna os blocos de retorno à W que compõem a palavra v de pontos em $x \in G \subset Z$ paralelos a e_1 quando o cociclo é aplicado na direção e_2 . Então sobre esse tipo de bloco de retorno à W é que se define uma alteração sobre B como é exposto a seguir.

Definição 3.14 *Se, $\varepsilon > 0$ e A o cociclo linear definido em (2.1). Considere w os blocos de retorno à W tais que $w \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(w) \subset Z$. Denota-se $B_0 : \Sigma_2 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$*

$$B_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} R_1^{-\theta} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in f^{N-1}(Z) \\ A(\mathbf{x}) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} & \text{se } \mathbf{x} \in W \\ A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in W^c \setminus (f^{N-1}(Z) \cup \bigcup_w f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))) \\ R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_w f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)) \end{cases}, \quad (3.7)$$

em que as matrizes $R_1^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}}$ e $R_2^{-\theta}$ são definidas respectivamente por $R_1^{-\theta} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon 2^{-\gamma \alpha N} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \delta(w) \text{ e } R_2^{\delta(w)} \text{ é dado pelo Lema 3.13.}$$

Observação 3.15 *Destaca-se que B_0 está bem definido. De fato, se $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$, com a palavra $w \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(w) \subset Z$ então inicialmente $f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)) \not\subset W$ pela definição de $\mathcal{C}(W)$. E $f^{N-1}(Z) \cap f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)) = \emptyset$ já que a entrada $x_1 = 1$ para \mathbf{x} em $f^{|w|-1}(\mathcal{C}(W))$ e $x_1 = 0$ para $\mathbf{x} \in f^{N-1}(Z)$. Portanto as alterações de B_0 para B são feitas em $W^c \setminus f^{N-1}(Z)$. Logo B_0 está bem definida.*

O próximo lema concluirá que as alterações sobre a definição de B para construir B_0 não excede $C\varepsilon$ na norma da topologia α -Hölder.

Lema 3.16 *Seja B_0 como na Definição 3.14 e B como na Definição 3.3 então $\|B_0 - B\|_\alpha < C\varepsilon$.*

Demonstração:

Destaca-se que B_0 coincide com B exceto para os $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$ tais que o bloco de retorno à W satisfaz que $w \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(w) \subset Z$. Então limitar-se-á os respectivos termos da norma α -Hölder para esse conjunto em particular.

Se $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$ e $\mathbf{y} \in W^C / (f^{N-1}(Z) \cup \bigcup_w f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)))$ então

$$\begin{aligned} \frac{\|(B_0 - B)(\mathbf{x}) - (B_0 - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) + A(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &= \frac{\|(R_2^{\delta(w)} - Id)A(\mathbf{x})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\|A\| \|R_2^{\delta(w)} - Id\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\sigma \delta(w)}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$ e $\mathbf{y} \in W^C / (f^{N-1}(Z) \cup \bigcup_w f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)))$ então o máximo de coordenadas que esses pontos podem coincidir é de $|w| - 2$. Logo $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq |w| - 2$ e consequentemente $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-\alpha} \leq 2^{|w|-2}$. Pelo Lema 3.13 decorre que

$$\begin{aligned} \frac{\delta(w)\sigma}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq 2^{|w|-2} \delta(w)\sigma \\ &< 2^{|w|-2} \varepsilon 2^{-|w|-\gamma N} \sigma \\ &< \varepsilon \sigma. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$ e $\mathbf{y} \in W$ então

$$\begin{aligned} \frac{\|(B_0 - B)(\mathbf{x}) - (B_0 - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} + A(\mathbf{y}) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}}\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &= \frac{\|(R_2^{\delta(w)} - Id)A(\mathbf{x})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Como $f^{|w|}(\mathbf{x}) \in W$ pela definição de $\mathcal{C}(w)$ segue que $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1$ e só se tem a igualdade no máximo para x_0 e y_0 . Então

$$\begin{aligned} \frac{\|(R_2^{\delta(w)} - Id)A(\mathbf{x})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq \frac{\|R_2^{\delta(w)}\| \|A\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \delta(w)\sigma 2^\alpha \\ &\leq \varepsilon 2^{-(|w|+\gamma N)} 2^\alpha \sigma \\ &\leq 2^\alpha \sigma \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x} \in f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$ e $\mathbf{y} \in f^{N-1}(Z)$ então

$$\begin{aligned} \frac{\|(B_0 - B)(\mathbf{x}) - (B_0 - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &= \frac{\|R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) - R_1^{-\theta} A(\mathbf{y}) + R_1^{-\theta} A(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq \frac{\|R_2^{\delta(w)} - Id\| \|A\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha}. \end{aligned}$$

Novamente para \mathbf{x} e \mathbf{y} pode-se ocorrer a igualdade apenas na 0-ésima entrada já que $x_1 = 1$ pois $\mathbf{x} \in f^{|\mathbf{w}|-1}(\mathcal{C}(w))$ e $y_1 = 0$ pois $\mathbf{y} \in f^{N-1}(Z)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\|(B_0 - B)(\mathbf{x}) - (B_0 - B)(\mathbf{y})\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} &\leq \frac{\|R_2^{\delta(w)} - Id\| \|A\|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha} \\ &\leq 2^\alpha \delta(w) \sigma \\ &\leq 2^\alpha \varepsilon 2^{-(|\mathbf{w}|+\gamma N)} \sigma \\ &\leq 2^\alpha \varepsilon \sigma. \end{aligned}$$

Por fim, nota-se que se $\mathbf{x} \in f^{|\mathbf{w}|-1}(\mathcal{C}(w))$ então

$$\begin{aligned} \|B_0(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| &= \|R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})\| \\ &\leq \|R_2^{\delta(w)} - Id\| \|A\| \\ &\leq \delta(w) \sigma \\ &\leq \varepsilon 2^{-(|\mathbf{w}|+\gamma N)} \sigma \\ &\leq \varepsilon \sigma. \end{aligned}$$

Assim $\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma_2} \|B_0(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon \sigma$.

Como a maior distância possível entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é limitada por $2^\alpha \sigma \varepsilon$ e $2^\alpha < \sigma^2$, então

$$\|B_0 - B\|_\alpha \leq \varepsilon \sigma + \sigma^3 \varepsilon = K \varepsilon.$$

■

Para definir as próximas alterações sobre B_0 de forma que a modificação se comporte bem sobre os pontos desejados e não altere a direção e_1 que já foi modificada, define-se outro conjunto.

Definição 3.17 *Seja (v^1, \dots, v^k) uma sequência de blocos de retorno à W , tal que $(v^1, \dots, v^k) \in \mathcal{G}_k$ com $\mathcal{C}(v^i) \subset W \setminus Z$ para cada $1 \leq i \leq k$. Denota-se $\mathcal{R}(v^1, \dots, v^k)$ como a união de todos os conjuntos da forma $f^{|\mathbf{w}^1|+\dots+|\mathbf{w}^j|}(\mathcal{C}(w^1, \dots, w^j, v^1, \dots, v^k))$ com $(w^1, \dots, w^j, v^1, \dots, v^k) \in$*

\mathcal{G}_{j+k} e $\mathcal{C}(w^i) \subset W \setminus Z$ para cada i . E da definição de $\mathcal{R}(v^1, \dots, v^k)$ induz a definição de

$$\mathcal{C}^*(v^1, \dots, v^k) = \mathcal{C}(v^1, \dots, v^k) \setminus \mathcal{R}(v^1, \dots, v^k).$$

Observação 3.18 *O conjunto $\mathcal{C}^*(v^1, \dots, v^k)$ considera os blocos de retorno à W que satisfazem $N^{k+1} \leq |v^k| \leq N^{k+1+j}$ com $j \geq 1$.*

Seja $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^*(v^1, \dots, v^k)$ então

$$\mathbf{x} \notin \mathcal{R}(v^1, \dots, v^k)$$

ou seja, $\mathbf{x} \notin \bigcup_j f^{|w^1|+\dots+|w^j|}(\mathcal{C}(w^1, \dots, w^j, v^1, \dots, v^k))$ em que $(w^1, \dots, w^j, v^1, \dots, v^k) \in \mathcal{G}_{j+k}$.

Da definição de \mathcal{G} , em (3.6), segue que para j satisfazer que ou $|v^1| > N^{j+2}$ ou $|v^k| \leq N^{j+k+1}$. Como a ênupla $(v^1, \dots, v^k) \in \mathcal{G}_k$, segue que $|v^1| < N^2$, Logo não pode ocorrer $N^{j+2} < |v^1|$.

Resta a condição $N^{k+j+1} \geq |v^k|$. Pela propriedade de estar em \mathcal{G}_k segue que $N^{k+1} \leq |v^k|$ e como $j \geq 1$ conclui-se que se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^*(v^1, \dots, v^k)$ segue que \mathbf{x} é tal que $N^{k+1} \leq |v^k| \leq N^{k+1+j}$.

Ainda necessita-se ser cuidadoso ao alterar o cociclo induzido por B_0 , evitando alterar a direção e_1 . Para isso altera-se sobre \mathcal{C}^* de forma que não ocorra interseção sobre os conjuntos de modificação, em particular G admite \mathcal{G} ênuplas com no máximo $\omega - 1$ elementos. A forma finita de se alterar o cociclo será sobre as possíveis \mathcal{G} ênuplas eliminando os casos maiores que ω de forma semelhante ao que se fez com a definição de B_0 sobre B .

A próxima observação mostra como se considerar as outras palavras dentro da sequência de blocos de retorno à W associados a $\mathbf{x} \in G$ que não são a primeira palavra v^1 que inicia dentro de G .

Observação 3.19 *Seja v um bloco de retorno à W tal que $\mathcal{C}(v) \subset W/Z$. Isso corresponde a considerar $v^i(\mathbf{x})$ em que $i \geq 2$ para algum $x \in G$.*

Para construir a perturbação final L , será efetuada uma quantidade finita de modificações sobre B_0 . Essas modificações sobre B_0 são feitas de forma indutiva utilizando a modificação anterior, isto é, para construir B_1 se altera B_0 , para construir B_2 se altera B_1 , e assim por diante. O próximo lema busca definir como se construirá B_l a partir de B_{l-1} para $1 \leq l \leq \omega$.

Lema 3.20 *Pode-se definir B_l para $1 \leq l \leq \omega$, de forma que $\|B_{l-1} - B\|_\alpha < lC\varepsilon$ e tal que algum bloco de retorno à W com $|v| \geq N^{1+l}$ e $\mathcal{C}(v) \subset W \setminus Z$ a aplicação de primeiro retorno à W , $B_{l-1}^{\tau_W}$ coincide com B .*

Demonstração:

Para $l = 1$, B_0 definido em (3.7) satisfaz $\|B_0 - B\| < C\varepsilon$. Sobre os blocos de retorno à W , denotados por w satisfazendo $w \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(w) \subset Z$ logo $B_0^{\tau w}(\mathbf{x}) = B^{\tau w}(\mathbf{x})$.

Para construir B_l a partir de B_{l-1} considera-se $(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \in \mathcal{G}_k$, uma sequência de blocos de retorno à W precedendo v com $k \leq l$, v tal que $\mathcal{C}(v) \subset W \setminus Z$ e $v \in \mathcal{G}_1$. Para o caso $k = 1$ considera-se apenas o bloco com v . Então para $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$ segue que

$$B_{l-1}^{\tau w^{(k)}}(\mathbf{x})(e_1) = B^{\tau w}(f^{\tau w^{(k-1)}}(\mathbf{x}))(B_{l-1}^{\tau w^{(k-1)}}(\mathbf{x})(e_1)).$$

Nota-se que para cada palavra w^j , $1 \leq j \leq k-1$, \mathbf{x} efetua um retorno a W , e pela hipótese de $B_{l-1}^{\tau w}(\mathbf{x}) = B^{\tau w}(\mathbf{x})$ então será aplicado sobre o cociclo $A(\mathbf{x})R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}}$, que altera a direção e_1 para a direção $e_1 + \varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} e_2$

Então observa-se que a medida que se retorna para W sobre as palavras w^j , $1 \leq j \leq k-1$, acumula-se esse cisalhamento sobre a direção e_1 aplicada ao cociclo. Esse acúmulo junto as possíveis aplicações do cociclo A se tornam

$$\varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} \left(\sigma^{-2S_{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}) + \tau_W^{(k-1)}(\mathbf{x})} + \sigma^{-2S_{\tau_W^{(k-2)}}(f^{\tau w}(\mathbf{x})) + \tau_W^{(k-2)}(f^{\tau w}(\mathbf{x}))} + \dots \right. \\ \left. + \sigma^{-2S_{\tau_W^{(k-2)}}(f^{\tau w^{(k-2)}}(\mathbf{x})) + \tau_W^{(k-2)}(f^{\tau w^{(k-2)}}(\mathbf{x}))} \right).$$

Assim segue que o cociclo aplicado na direção e_1 fica da forma

$$B_{l-1}^{\tau w^{(k-1)}}(\mathbf{x})(e_1) = \sigma^{2S_{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k-1)}(\mathbf{x})} e_1 + \varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} \sum_{i=0}^{k-2} \sigma^{-2S_{\tau_W^{(k-1-i)}}(f^{\tau w^i}(\mathbf{x})) + \tau_W^{(k-1-i)}(f^{\tau w^i}(\mathbf{x}))} e_2.$$

Como cada respectivo tempo de retorno é do tamanho da palavra w^j , então denota-se por

$$r(\mathbf{x}) = \sigma^{2S_{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k-1)}(\mathbf{x})} \varepsilon 2^{-\gamma\alpha N} \cdot \sum_{i=0}^{k-2} \sigma^{-2S_{\tau_W^{(k-1-i)}}(f^{\tau w^i}(\mathbf{x})) + \tau_W^{(k-1-i)}(f^{\tau w^i}(\mathbf{x})) - 2S_{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k-1)}(\mathbf{x})}.$$

Por se considerar $(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \in \mathcal{G}_k$ segue que cada tempo de retorno é limitado

por N^{j+1} então $|r(\mathbf{x})| < c\sigma^{\sum_{j=1}^{k-1} N^{j+1}}$ e segue que $B_{l-1}^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})(e_1)$ será da forma

$$B_{l-1}^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \sigma^{2S_{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k-1)}(\mathbf{x})} (e_1 + r(\mathbf{x})e_2),$$

portanto ao aplicar o próximo cociclo de retorno a W se têm

$$B_{l-1}^{\tau_W^{(k)}}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \sigma^{2S_{\tau_W^{(k)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k)}(\mathbf{x})} (e_1 + r(\mathbf{x})\sigma^{-4S_{\tau_W^{(k-1)}}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} e_2).$$

Semelhante ao caso da modificação em B_0 , pode-se encontrar $\delta(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$ tal que que o cisalhamento definido por esse $\delta(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$ torna o cociclo paralelo a e_1 . Em outras palavras $R_2^{\delta(u^1, \dots, u^{k-1}, v)}(B_{l-1}^{\tau_W^{(k)}}(\mathbf{x})(e_1))$ é paralelo a e_1 .

De fato basta tomar esse delta da forma

$$\delta(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \asymp r(\mathbf{x})\sigma^{-4S_{\tau_W^{(k-1)}}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} \varepsilon 2^{-\gamma\alpha N}.$$

Mostrar-se-á que para N suficientemente grande este δ admitirá uma limitação superior. Para tal relembra-se da notação $\xi = \sigma^{-4p+2+4\beta}2^\alpha < 1$. Para l fixo pode-se tomar N suficientemente grande para que seja válida a inequação

$$N^{l+1} > \frac{1}{\log \xi^{-1}} (\log c + \log(\sigma 2^\alpha)) \sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}, \quad (3.8)$$

pois a inequação é polinomial em N .

Mas é equivalente á

$$\begin{aligned} N^{l+1} &> \frac{1}{\log \xi^{-1}} (\log c + \log(\sigma 2^\alpha)) \sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1} \\ \log \xi^{-1 N^{l+1}} &> \log c (\sigma 2^\alpha)^{\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}} \\ \xi^{N^{l+1}} &< C (\sigma^{-1} 2^{-\alpha})^{\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$ e $(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \in \mathcal{G}_k$ segue da definição que para $f^{k-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \mathcal{C}(v)$,

$$\sigma^{-4S_{\tau_W^{(k-1)}}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} < \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))}.$$

Ainda por $(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \in \mathcal{G}_k$, segue que $\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) = |v| \geq N^{l+1}$ então

$$\begin{aligned}
\sigma^{-4S_{\tau_W}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} 2^{\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} &< \sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} 2^{\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} = \\
\sigma^{(-4p+2+4\beta)\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} 2^{\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} &< \sigma^{(-4p+2+4\beta)N^{l+1}} 2^{\alpha N^{l+1}} = \\
\sigma^{(-4p+2+4\beta)N^{l+1}} 2^{\alpha N^{l+1}} &= (\xi)^{N^{l+1}} < C(\sigma^{-1} 2^{-\alpha})^{\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}} = \\
C(\sigma^{-1} 2^{-\alpha})^{\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}} &< r(\mathbf{x})^{-1} 2^{-\alpha \sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}}.
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$r(\mathbf{x}) \sigma^{-4S_{\tau_W}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} \varepsilon 2^{\gamma \alpha N} < \varepsilon 2^{-\alpha \left(\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1} + \tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) \right) \gamma N}.$$

Para finalizar considere N suficientemente grande para que a inequação (3.8) seja verdadeira para todos os valores de $1 \leq l \leq \omega$.

Define-se o novo cociclo B_l por

$$B_l \big|_{f^{|u^1| + \dots + |u^{k+1}| + |v| - 1}(\mathcal{C}^*(u^1, \dots, u^{k-1}, v))} = R_2^{\delta(v^1, \dots, v^k)} \circ B_{l-1},$$

e B_l coincide com B_{l-1} fora de qualquer cilindro dessa forma.

Nota-se que $B_l^{\tau_W^{(k)}}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \sigma^{2S_{\tau_W^{(k)}}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(k)}(\mathbf{x})} e_1$ para \mathbf{x} em um desses conjuntos $\mathcal{C}^*(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$.

Quanto a distância α -Hölder do cociclo B_l , nota-se que cada conjunto $\mathcal{C}^*(u^1, \dots, u^{k-1}, v)$ é a união de cilindros de diâmetro de ao menos $2^{-\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1} - |v| - \gamma N}$. Então a inequação $\xi^{N^{l+1}} < C(\sigma 2^\alpha)^{-\sum_{j=1}^{l-1} N^{j+1}}$ junto com a hipótese de indução $\|B_{l-1} - B\|_\alpha < lC\varepsilon$ implica que

$$\|B_l - B\|_\alpha \leq \|B_l - B_{l-1}\| + \|B_{l-1} - B\|.$$

Como no cilindro que B_l difere de B_{l-1} ocorre semelhante ao já visto no Lema 3.16, ocorre a limitação por $C\varepsilon$ então $\|B_l - B\|_\alpha \lesssim (l+1)C\varepsilon$.

■

Na Figura 3.5 é apresentando uma representação gráfica de como ocorre os retornos de um ponto $\mathbf{x} \in G$ para o conjunto Z através dos blocos de palavras v .

Pode se explicitar o que ocorre com a direção estável e instável do cociclo L que foi indicado Figura 3.4 de outra forma, como está representado na Figura 3.6. Nota-se que a direção e_2 não se movimenta dentro dos sub-blocos de retorno à W . E se corrige o acúmulo de cisalhamentos dentro dos sub-blocos na última palavra. Destaca-se que a palavra $v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ sempre é palavra final de algum sub-bloco, mesmo que de tamanho 1.

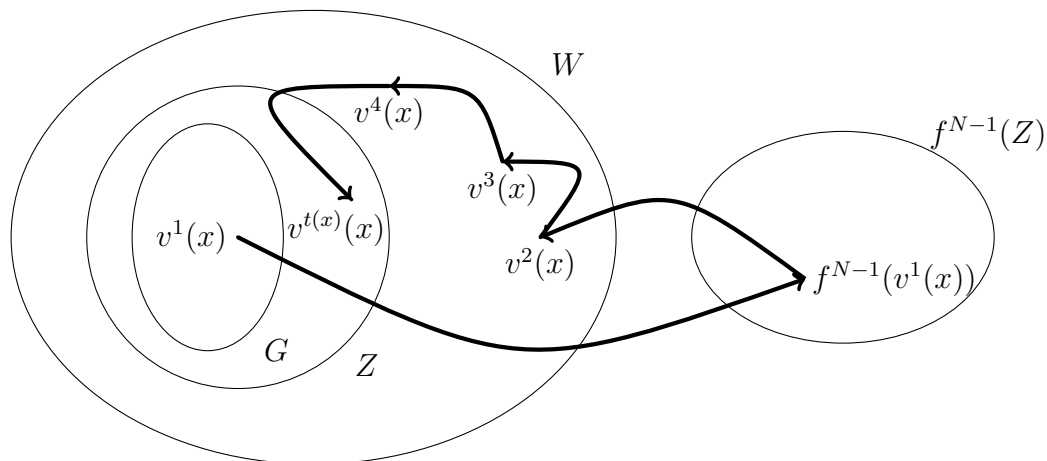


Figura 3.5: Sequências de retornos de x à W por blocos de retorno v .

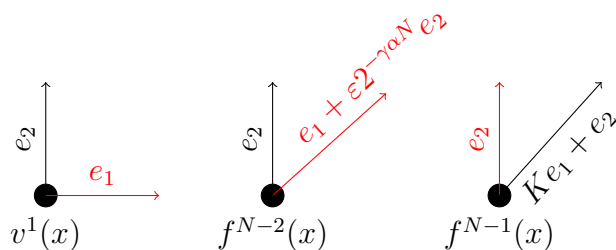


Figura 3.6: Processo inicial de troca das direções.

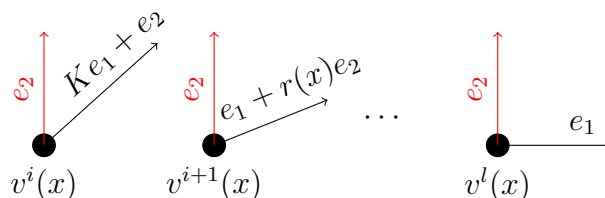


Figura 3.7: Processo de controlar as direções dentro das ênuplas \mathcal{G}_i .

Definição 3.21 Dado $\varepsilon > 0$, considere w os blocos de retorno á W , tais que $w \in \mathcal{G}_1$ e $\mathcal{C}(w) \subset Z$ e seja $(u^1, \dots, u^{k-1}, v) \in \mathcal{G}_k$, para $k \leq \omega$ tal que $\mathcal{C}(u^i) \subset W \setminus Z$ e $v \in \mathcal{G}_1$. Pelo

Lema 3.20 define-se $L = B_\omega$, isto, é,

$$L(\mathbf{x}) = \begin{cases} R_1^{-\theta} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in f^{N-1}(Z) \\ A(\mathbf{x}) R_2^{\varepsilon 2^{-\gamma \alpha N}} & \text{se } \mathbf{x} \in W \\ A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in W^C \setminus f^{N-1}(Z) \\ R_2^{\delta(w)} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_w f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w)) \\ R_2^{\delta(v)} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_v f^{|v|-1}(\mathcal{C}^*(v)) \\ \vdots & \\ R_2^{\delta(u^1 \dots u^{k-1}, v)} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^l f^{|u^1| + \dots + |u^{k-1}| + |v| - 1}(\mathcal{C}^*(u^1 \dots u^{k-1}, v)) \\ \vdots & \\ R_2^{\delta(u^1 \dots u^{\omega-1}, v)} A(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^\omega f^{|u^1| + \dots + |u^{\omega-1}| + |v| - 1}(\mathcal{C}^*(u^1 \dots u^{\omega-1}, v)) \end{cases} \quad (3.9)$$

Proposição 3.22 Para $\mathbf{x} \in Z$ segue que

$$L^{\tau_Z}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \varepsilon C^N \sigma^{-2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) + \tau_Z(\mathbf{x})} e_2, \quad (3.10)$$

e se $\mathbf{x} \in G$ segue que

$$L^{\tau_Z}(\mathbf{x})(e_2) \asymp \sigma^{2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - \tau_Z(\mathbf{x})} e_1 \quad (3.11)$$

Demonstração:

Se $\mathbf{x} \in Z$ então

$$L^N(\mathbf{x}) = B_\omega^N(\mathbf{x}) = B_\omega(f^{N-1}(\mathbf{x})) \dots B_\omega(\mathbf{x}).$$

Pela definição de B_ω decorre que $B_\omega^N(\mathbf{x}) = B^N(\mathbf{x})$. E pelo visto na demonstração do Lema 3.4 segue que $B^N(\mathbf{x})(e_1) \asymp \varepsilon 2^{-\gamma r N} \sigma^N e_2$. Como B_ω deixa invariante e_2 fora dos cilindros $f^{N-1}(Z)$ e $f^{|w|-1}(\mathcal{C}(w))$. Segue que $B_\omega^{\tau_Z}(\mathbf{x})(e_1) \asymp \varepsilon C^N \sigma^{-2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) + \tau_Z(\mathbf{x})} e_2$.

Se $\mathbf{x} \in G$, segue do Lema 3.9, que existe a sequência de blocos de retorno á W decomposta em ênuplas \mathcal{G} . Sobre a primeira palavra $v^1(\mathbf{x})$ segue que $L^{|v^1(\mathbf{x})|-1}(\mathbf{x})(e_1) = B_\omega(f^{|v^1(\mathbf{x})|-1}(\mathbf{x})) \dots B_\omega(\mathbf{x})(e_2)$. Pela definição de B_ω , para $\mathbf{x} \in G$, segue que $B_\omega^{|v^1(\mathbf{x})|} = B_0^{|v^1(\mathbf{x})|}(\mathbf{x})(e_2)$. E pela Definição 3.7 e Lema 3.13 segue que

$$B_\omega^{|v^1(\mathbf{x})|}(\mathbf{x})(e_2) \asymp K e_1.$$

Para cada sub-ênupla de \mathcal{G}_l , da forma $(v^{i+1}(\mathbf{x}), \dots, v^{i+l-1}(\mathbf{x}))$, com $1 \leq l \leq \omega$ e $i > 1$, ocorre sobre $f^{v^{i+l}(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ o cisalhamento que leva $\sigma_{\tau_W}^{2S_{\tau_W^{(i+l-1)}(\mathbf{x})} - \tau_W^{(i+l-1)}(\mathbf{x})}(e_1 + r(\mathbf{x}) \sigma^{-4S_{\tau_W}(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x})) + 2\tau_W(f^{\tau_W^{(k-1)}}(\mathbf{x}))} e_1$ de volta para $\sigma_{\tau_W}^{2S_{\tau_W^{(i+l-1)}(\mathbf{x})} - \tau_W^{(i+l-1)}(\mathbf{x})} e_1$.

Logo sobre a último bloco de retorno $vt(\mathbf{x})(\mathbf{x})$ ocorre a limitação

$$L^{\tau z}(\mathbf{x})(e_2) \asymp \sigma^{2S_{\tau z}(\mathbf{x}) - \tau z(\mathbf{x})} e_1$$

■

A seguir são apresentadas algumas observações de propriedades que a perturbação L possui e serão necessárias na próxima seção.

Observação 3.23 *L é constante em todos os cilindros de diâmetro maior que $2^{-\zeta\mu(Z)^{-1} - \gamma N}$. Por isso L é localmente constante e em particular α -Hölder contínua.*

Observação 3.24 *Existe uma família contínua de cociclos L_t , para $t \in [0, 1]$, tal que $L_0 = A$, $L_1 = L$ e L_t é constante em qualquer cilindro de diâmetro no máximo $2^{-\zeta\mu(Z)^{-1} - \gamma N}$, isto é, o cociclo L_t é localmente constante na mesma coleção de cilindros.*

Basta notar que se pode definir $L_t = tL + (1 - t)A$. Como L e A são localmente constantes, e L é definido por alterações em cilindros de A , L_t também será localmente constante na mesma coleção de cilindros.

Observação 3.25 *Têm-se $\|A - L_t\|_\alpha < \omega C\varepsilon$ para cada $t \in [0, 1]$. Pode-se escolher ε suficientemente pequeno tal que*

$$\|L_t\| < \sigma^2. \quad (3.12)$$

De fato pela definição de L_t segue que

$$\|A - L_t - A\|_\alpha = \|A - (tL + A - tA)\|_\alpha \leq t\|A - L\|_\alpha < \omega C\varepsilon.$$

Em particular

$$\|L_t\| \leq \|L_t - A\| + \|A\| \leq \|L_t - A\|_\alpha + \sigma \leq \omega C\varepsilon + \sigma.$$

Então se $\varepsilon < \frac{\sigma^2 - \sigma}{\omega C}$ se tem $\|L_t\| < \sigma^2$.

Assim finaliza-se a definição da perturbação do cociclo A de forma que permuta os subespaços invariantes quando retorna ao cilindro Z . Na próxima seção, o foco estará sobre o cálculo dos expoentes de Lyapunov da perturbação do cociclo linear A .

3.2 Cálculo dos expoentes da perturbação

Nesta seção buscar-se-á calcular os expoentes de Lyapunov do cociclo linear associado a L definido na seção anterior. Diferente do exemplo do capítulo 2, será possível apenas mostrar uma igualdade para o expoente diferente de zero que será dada por $\lambda_+(L, \mu) = \kappa$ tal que $0 < \kappa \leq (2p - 1) \ln \sigma$.

Lembre-se que pela Proposição 1.34 tem-se que $\lambda_+(L^{\tau_Z}, \mu_Z) = \frac{\lambda_+(L, \mu)}{\mu(Z)}$. Então para limitar $\lambda_+(L, \mu)$ é suficiente limitar $\lambda_+(L^{\tau_Z}, \mu_Z)\mu(Z)$. Ainda pode-se limitar $\lambda_+(L^{\tau_Z}, \mu_Z)$ utilizando a k -ésima aplicação de retorno ao conjunto Z . Para isso, relembre do Teorema de 1.30. E pelo Teorema 1.26 o limite que define o expoente de Lyapunov pode ser limitado da seguinte forma

$$\lambda_+(L^{\tau_Z}, \mu_Z) \leq \frac{1}{n} \int_Z \ln \|L^{\tau_Z^{(n)}}\| d\mu_Z,$$

e para $n = 2$,

$$\lambda_+(L^{\tau_Z}, \mu_Z) \leq \frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau_Z^{(2)}}\| d\mu_Z.$$

Mostrar-se-á que para um N suficientemente grande tem-se que

$$\frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau_Z^{(2)}}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{\mu(Z)}$$

e assim concluir a limitação de $\lambda_+(L, \mu)$.

Para provar a limitação de $\frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau_Z^{(2)}}\| d\mu_Z$, divide-se o conjunto Z em três subconjuntos, $Z \setminus G$, $Z \setminus f^{-\tau_Z}(G)$ e $G \cap f^{-\tau_Z}(G)$. A limitação será efetuada nesses três conjuntos separadamente em algumas etapas.

3.2.1 Primeira etapa

A primeira etapa da limitação da integral inicia com a integral sobre o conjunto $Z \setminus G$. Recordar-se da definição de G , que para $\mathbf{x} \in G$ vale pela propriedade 5 que $\tau_Z(\mathbf{x}) \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}$ e então pode-se considerar os pontos $\mathbf{x} \in Z$ tais que $\tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{\zeta}{\mu(Z)}$. Recordar-se do resultado de [1] que garante a existência de $\eta > 0$ independente de N tal que para todo $a > 1$ e $N > 0$ têm-se

$$\mu_Z\left(\left\{\mathbf{x} \in Z; \tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{a}{\mu(Z)}\right\}\right) \leq \eta e^{-a}. \quad (3.13)$$

Então pode-se construir uma estimativa dos \mathbf{x} tais que $\tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{\zeta}{\mu(Z)}$ sobre a integral. Para isso, denota-se $Q_\zeta = \{\mathbf{x} \in Z : \tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{\zeta}{\mu(Z)}\}$ e $K = Z \setminus (G \cup Q_\zeta)$. Logo

$$\int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z = \int_K \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z + \int_{Q_\zeta} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z.$$

O próximo resultado dará uma estimativa superior para $\int_{Q_\zeta} \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z$.

Proposição 3.26 *Seja $Q_\zeta = \{\mathbf{x} \in Z : \tau_Z(\mathbf{x}) > \frac{\zeta}{\mu(Z)}\}$ em que $\zeta > 1$ é tomado grande o suficiente para que $\frac{\eta(\ln(\sigma^2))e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^2} < \frac{\kappa}{100}$, então*

$$\int_{Q_\zeta} \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{100\mu(Z)}.$$

Demonstração:

De fato há que

$$\begin{aligned} \int_{Q_\zeta} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_{n\zeta} \setminus Q_{(n+1)\zeta}} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\zeta \ln(\sigma^2) \mu_Z(Q_{n\zeta})}{\mu(Z)} \\ &\leq \frac{\eta \ln(\sigma^2)}{\mu(Z)} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\zeta e^{-n\zeta} \\ &\leq \frac{\eta \ln(\sigma^2)}{\mu(Z)} \frac{e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^2}. \end{aligned}$$

Pela escolha do parâmetro ζ , segue que

$$\int_{Q_\zeta} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z \leq \frac{\eta \ln(\sigma^2)}{\mu(Z)} \frac{e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^2} < \frac{\kappa}{100\mu(Z)}.$$

■

A próxima estimação será da medida dos pontos $\mathbf{x} \in Z$ que não estão em G ou Q_ζ . Essa estimativa será feita em quatro etapas, já que G está definida por 5 propriedades de acordo com a Definição 3.8 e já não se considera a quinta por conta de que Q_ζ . Assim ao considerar que não se viola a condição $\tau_Z(\mathbf{x}) < \frac{\zeta}{\mu(Z)}$, resta as outras 4 propriedades para se estar em G .

Antes de apresentar as limitações para cada uma das 4 condições, será apresentado um resultado intermediário útil em algumas estimações à frente. Esse resultado auxiliar estima a probabilidade de tempo de retorno à W e também estima os acertos em tempos "curtos" saindo de Z para W .

Proposição 3.27 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $\tau_Z(\mathbf{x}) < \frac{\zeta}{\mu(Z)}$, então tem-se que para cada $m > N$,*

$$\mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) < m\}) \leq m\mu(W).$$

Demonstração:

Destaca-se que se $\mathbf{x} \in Z$ então suas coordenadas x_n para $n \geq N + 1$ ou $n < 0$ são independentes, identicamente distribuídas com respeito a medida μ_Z e ainda ocorrendo que $\mu_Z([n; 1]) = p$ e $\mu_Z([n; 0]) = 1 - p$ para $n \geq N + 1$ ou $n < 0$.

Ainda observa-se que se $\mathbf{x} \in Z$ e existe $m > 0$ tal que $x_m = 1$ e $x_{m+i} = 0$, para $1 \leq i \leq \gamma N$, isto é, se $f^m(\mathbf{x}) \in W$, há que $m \leq N$, pela definição de Z e W .

Portanto para cada $m > N$, observa-se que $\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) = m\} \subset \{\mathbf{x} \in Z; f^m(\mathbf{x}) \in W\}$ então

$$\begin{aligned} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) = m\}) &\leq \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; f^m(\mathbf{x}) \in W\}) = \\ &= \mu_Z([m; 1]) \prod_{i=1}^{\gamma N} \mu_Z([m+1; 0]) \\ &= p(1-p)^{\gamma N} \\ &= \mu(W). \end{aligned}$$

Decorre como consequência que

$$\begin{aligned} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) < m\}) &= \sum_{j=N+1}^{m-1} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) = j\}) \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{m-1} \mu(W) \\ &\leq m\mu(W). \end{aligned}$$

■

Agora analisa-se o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z$ que não atendem a primeira condição da Definição 3.8.

Proposição 3.28 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $\tau_Z(\mathbf{x}) < \frac{\zeta}{\mu(Z)}$ e $|v^1(\mathbf{x})| < N^2$, então $\mu_Z(G_{\setminus 1}) < N^2\mu(W)$, em que $G_{\setminus 1}$ denota o conjunto dos pontos \mathbf{x} que satisfazem a hipótese.*

Demonstração:

Pela Proposição 3.27 segue que

$$\begin{aligned} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; |v^1(\mathbf{x})| < N^2\}) &= \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(\mathbf{x}) < N^2\}) \\ &\leq N^2\mu(W). \end{aligned}$$

■

Agora analisa-se o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z$ que não atendem a segunda condição da Definição 3.8.

Proposição 3.29 *Seja $\mathbf{x} \in Z$. Suponha que existe algum $1 \leq i \leq t(\mathbf{x})$ tal que $|v^i(\mathbf{x})| \geq N^2$ e*

$$|S_{\tau_W}(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) - p\tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x}))| > \beta\tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})). \quad (3.14)$$

Então $\mu_Z(G_{\setminus 2}) < \frac{\zeta\mu(W)}{\mu(Z)^2} \frac{e^{-\frac{N^2\beta^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}}}$ em que $G_{\setminus 2}$ denota o conjunto dos pontos \mathbf{x} que satisfazem a hipótese.

Demonstração:

De fato nota-se que a medida do conjunto dos pontos \mathbf{x} que satisfazem (3.14) é limitado por

$$\sum_{i=1}^{\frac{\zeta}{\mu(Z)}} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) \geq N^2, |S_{\tau_W}(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) - p\tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x}))| > \beta\tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x}))\}),$$

já que a medida de $G_{\setminus 2}$ é uma soma de 1 ate $t(\mathbf{x})$ dos mesmo elementos que a soma apresentada.

Observa-se $\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) \geq N^2\} \subseteq \bigcup_{n=N^2}^{\infty} \{\mathbf{x} \in Z; \tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) \geq n\}$.

Ao somar-se sobre os possíveis valores de $\tau_W(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x}))$, essa soma será limitada por

$$\sum_{i=1}^{\frac{\zeta}{\mu(Z)}} \sum_{n=N^2}^{\infty} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; |S_n(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) - pn| > \beta n\}). \quad (3.15)$$

Define-se $\mu_W(A) = \mu(A) |_W \frac{1}{\mu(W)}$, a normalização da medida μ a W , então μ_W é invariante a aplicação de primeiro retorno à W , f^{τ_W} . Agora destaca-se que, se $A \subset Z \subset W$, então

$$\mu_Z(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(Z)} \frac{\mu(W)}{\mu(W)} = \frac{\mu(W)}{\mu(Z)} \mu_W(A).$$

Ao considerar que A é a restrição de um conjunto $A' \subset \Sigma_2$, segue que $\mu_W(A' \cap Z) \leq \mu_W(A' \cap W)$ e a soma em (3.15) é limitada por

$$\frac{\mu(W)}{\mu(Z)} \sum_{i=1}^{\frac{\zeta}{\mu(Z)}} \sum_{n=N^2}^{\infty} \mu_W(\{\mathbf{x} \in W; |S_n(f^{\tau_W^{(i-1)}}(\mathbf{x})) - pn| > \beta n\}).$$

Ao aplicar a invariância de μ_W pelo mapa f^{τ_W} segue que

$$\mu(G_{\setminus 2}) \leq \frac{\zeta\mu(W)}{\mu(Z)^2} \sum_{n=N^2}^{\infty} \mu_W(\{\mathbf{x} \in W; |S_n(\mathbf{x}) - pn| > \beta n\}).$$

Pela Inequação de Chernoff em [7] para somas de limitações, independentes e identicamente distribuídas para variáveis aleatórias, segue que

$$\mu_W(\{\mathbf{x} \in W; |S_n(\mathbf{x}) - pn| > \beta n\}) \leq e^{-\frac{n\beta^2}{2}}.$$

Portanto conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta\mu(W)}{\mu(Z)^2} \sum_{n=N^2}^{\infty} \mu_W(\{\mathbf{x} \in W; |S_n(\mathbf{x}) - pn| > \beta n\}) &\leq \frac{\zeta\mu(W)}{\mu(Z)^2} \sum_{n=N^2}^{\infty} e^{-\frac{n\beta^2}{2}} \\ &= \frac{\zeta\mu(W)}{\mu(Z)^2} \frac{e^{-\frac{N^2\beta^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}}}. \end{aligned}$$

■

Agora analisa-se o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z$ que não atendem a terceira condição da Definição 3.8.

Proposição 3.30 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $\tau_Z(\mathbf{x}) < \frac{\zeta}{\mu(Z)}$ e existe algum $1 \leq i \leq t(\mathbf{x}) - \omega$ tal que para cada $1 \leq j \leq \omega$ tem-se $|v^{i+j-1}(\mathbf{x})| < N^{j+1}$ em que $\omega < \gamma^{-1}$ e $\omega \in \mathbb{Z}$. Então $\mu(G_{\setminus 3}) < \frac{\zeta N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} \mu(W)^\omega}{\mu(Z)}$ em que $G_{\setminus 3}$ denota o conjunto dos pontos \mathbf{x} que satisfazem a hipótese.*

Demonstração:

De fato, pode-se estimar a probabilidade dos blocos de retorno à W sequenciados $(v^i(\mathbf{x}), \dots, v^{i+\omega-1}(\mathbf{x}))$ que ocorrem com $|v^{i+j-1}(\mathbf{x})| < N^{j+1}$ para $1 \leq j \leq \omega$. Utiliza-se da independência das coordenadas x_n de \mathbf{x} para $n > N$, segue que a limitação para cada $i \geq 1$ é dada por

$$\begin{aligned} &\mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W^{(i+j-1)}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(i+j-2)}(\mathbf{x}) < N^{j+1}, \text{ para } 1 \leq j \leq \omega\}) \\ &= \prod_{j=1}^{\omega} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W^{(i+j-1)}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(i+j-2)}(\mathbf{x}) < N^{j+1}\}) \end{aligned}$$

Aplica-se a Proposição 3.27 e

$$\begin{aligned} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W^{(i+j-1)}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(i+j-2)}(\mathbf{x}) < N^{j+1}, \text{ para } 1 \leq j \leq \omega\}) &\leq \prod_{j=1}^{\omega} N^{j+1} \mu(W) \\ &\leq N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} \mu(W)^\omega. \end{aligned}$$

Deve-se efetuar essa soma sobre todos os valores possíveis de i . Como foi requerido que $\tau_Z(\mathbf{x}) \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}$, pode-se somar sobre $1 \leq i \leq \frac{\zeta}{\mu(Z)}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mu_Z(G_{\setminus 3}) &= \sum_{i=1}^{t(\mathbf{x})} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W^{(i+j-1)}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(i+j-2)}(\mathbf{x}) < N^{j+1}, \text{ para, } 1 \leq j \leq \omega\}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\frac{\zeta}{\mu(Z)}} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; \tau_W^{(i+j-1)}(\mathbf{x}) - \tau_W^{(i+j-2)}(\mathbf{x}) < N^{j+1}, \text{ para, } 1 \leq j \leq \omega\}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\frac{\zeta}{\mu(Z)}} N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} \mu(W)^\omega \\
&\leq \frac{\zeta N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} \mu(W)^\omega}{\mu(Z)}.
\end{aligned}$$

■

Agora analisa-se o conjunto dos $\mathbf{x} \in Z$ que não atendem a quarta condição da Definição 3.8.

Proposição 3.31 *Seja $\mathbf{x} \in Z$ tal que $\tau_Z(\mathbf{x}) < \frac{\zeta}{\mu(Z)}$ e $|v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})| < N^{\omega+1}$. Então $\mu_Z(G_{\setminus 4}) \leq N^{\omega+1} \mu(W)$, em que $G_{\setminus 4}$ denota o conjunto dos pontos \mathbf{x} que satisfazem a hipótese.*

Demonstração:

Observa-se que

$$\{\mathbf{x} \in Z; |v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})| < N^{\omega+1}\} \subseteq \bigcup_{m=1}^{N^{\omega+1}} \{\mathbf{x} \in Z; f^{-m}(f^{\tau_Z(\mathbf{x})})\}.$$

Isso ocorre pois $|v^{t(\mathbf{x})}(\mathbf{x})|$ é o tempo que \mathbf{x} leva para retornar a Z após seu último retorno à W . Então pode-se considerar o tempo em que \mathbf{x} retorna a Z e diminuir as iteradas suficientes para serem seu tempo de retorno m .

Relembra-se que μ_Z é invariante sobre a aplicação de primeiro retorno f^{τ_Z} , daí segue que

$$\begin{aligned}
\mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; |v^{t(\mathbf{x})}| < N^{\omega+1}\}) &\leq \sum_{m=1}^{N^{\omega+1}} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; f^{-m}(f^{\tau_Z(\mathbf{x})}) \in W\}) \\
&= \sum_{m=1}^{N^{\omega+1}} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; f^{-m}(\mathbf{x}) \in W\}).
\end{aligned}$$

Como as coordenadas x_n , para $n < 0$, de $\mathbf{x} \in Z$ são independentes para μ_Z pode-se utilizar da Proposição 3.27 para se obter

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N^{\omega+1}} \mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; f^{-m}(\mathbf{x}) \in W\}) &\leq \sum_{m=1}^{N^{\omega+1}} \mu_Z(\{x_{-m} = 1\}) \prod_{i=1}^{\gamma N} \mu_Z(\{x_{-m+i} = 0\}) \\ &\leq N^{\omega+1} \mu(W) \end{aligned}$$

■

Agora com todas as estimativas para partes dos pontos que não estão no conjunto G pode-se finalmente atingir a estimativa que de fato interessa para limitar a integral $\int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z$. O próximo resultado mostrará uma limitação para $\mu_Z(K)$.

Lema 3.32 *Seja $K = Z \setminus (G \cup Q_\zeta)$, então para N suficientemente grande há que*

$$\mu_Z(K) < \frac{\kappa}{100\zeta \ln \sigma^2}.$$

Demonstração:

Pela Definição 3.8 de G , segue que pode-se aplicar as Proposições 3.28; 3.29; 3.30; 3.31 e assim obtêm-se que

$$\mu_Z(K) \leq N^2 \mu(W) + \frac{\zeta \mu(W)}{\mu(Z)^2} \frac{e^{-\frac{N^2 \beta^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}}} + \frac{\zeta N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} \mu(W)^\omega}{\mu(Z)} + N^{\omega+1} \mu(W).$$

Relembra-se que $\mu(W) = p(1-p)^{\gamma N}$ e $\mu(Z) = p(1-p)^N$ ao substituir esses valores na inequação obtêm-se

$$\begin{aligned} \mu_Z(K) &\leq N^2 p(1-p)^{\gamma N} + \frac{\zeta (1-p)^{(\gamma-2)N}}{p} \frac{e^{-\frac{N^2 \beta^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}}} + \zeta N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} p^{\omega-1} (1-p)^{(\omega\gamma-1)N} \\ &\quad + N^{\omega+1} p(1-p)^{\gamma N}. \end{aligned}$$

Destaca-se que $(1-p) < 1$, logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 p(1-p)^{\gamma N} = \frac{p}{\gamma^2} \lim_{N \rightarrow \infty} (N\gamma)^2 (1-p)^{\gamma N} = 0.$$

Também há que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\zeta (1-p)^{(\gamma-2)N}}{p} \frac{e^{-\frac{N^2 \beta^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}}} = \frac{\zeta}{p(1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}})} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N^2 \frac{\beta^2}{2} + (\gamma-2) \ln(1-p)N} = 0.$$

Observa-se que pela escolha de ω de forma que $\omega\gamma > 1$, segue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta N^{\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2}} p^{\omega-1} (1-p)^{(\omega\gamma-1)N} = \zeta p^{\omega-1} \lim_{N \rightarrow \infty} N^s (1-p)^{rN} = 0,$$

pois $\frac{(\omega+1)(\omega+2)}{2} = s > 0$ e $(\omega\gamma-1) = r > 0$.

Por último tem-se que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\omega+1} p (1-p)^{\gamma N} = 0.$$

E portanto quando $N \rightarrow \infty$, há como consequência que $\mu_Z(K) \rightarrow 0$. Logo pode-se escolher N suficientemente grande para que

$$\mu_Z(K) < \frac{\kappa}{100\zeta \ln \sigma^2}.$$

■

Após essas limitações pode-se deduzir uma última limitação sobre as medidas de conjuntos μ_Z .

Observação 3.33 Como $Z \setminus G = K \cup Q_\zeta$, então $\mu_Z(Z \setminus G) < \frac{\kappa}{50\xi \ln \sigma^2}$.

Pela inequação 3.13 e pela escolha de $\zeta > 1$ segue que

$$\mu_Z(Q_\zeta) < \frac{\kappa}{100 \ln \sigma^2}.$$

Então decorre desse Lema 3.32 que

$$\begin{aligned} \mu_Z(Z \setminus G) &= \mu_Z(K) + \mu_Z(Q_\zeta) \\ &< \frac{\kappa}{100 \ln \sigma^2} + \frac{\kappa}{100 \ln \sigma^2} \\ &< \frac{\kappa}{50\zeta \ln \sigma^2}. \end{aligned}$$

As duas próximas proposições serão estimativas sobre os valores de integrais que estão conectadas com a integral $\int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z$ que se deseja estimar.

Proposição 3.34

$$\int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{50\mu(Z)}.$$

Demonstração:

De fato, da Definição de 1.27 decorre que

$$\begin{aligned} \|L^{\tau_Z}(\mathbf{x})\| &= \|L(f^{\tau_Z(\mathbf{x})-1}(\mathbf{x})) \dots L(\mathbf{x})\| \\ &\leq \prod_{i=0}^{\tau_Z(\mathbf{x})-1} \|L\| \\ &\leq (\sigma^2)^{\tau_Z(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Logo $\ln \|L^{\tau_Z}\| \leq \tau_Z(\mathbf{x}) \ln \sigma^2$.

E assim, pela Proposição 3.32 e pela limitação de $\tau_Z(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in K$ decorre que

$$\begin{aligned} \int_K \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z &\leq \int_K \tau_Z(\mathbf{x}) \ln \sigma^2 d\mu_Z \\ &\leq \ln \sigma^2 \int_K \frac{\zeta}{\mu(Z)} d\mu_Z \\ &\leq \ln \sigma^2 \frac{\zeta}{\mu(Z)} \mu_Z(K) \\ &< \ln \sigma^2 \frac{\zeta}{\mu(Z)} \frac{\kappa}{100\zeta \ln \sigma^2} \\ &< \frac{\kappa}{100\mu(Z)}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.26 decorre que

$$\begin{aligned} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z &= \int_K \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z + \int_{Q_\zeta} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z \\ &< \frac{\kappa}{100\mu(Z)} + \frac{\kappa}{100\mu(Z)} \\ &< \frac{\kappa}{50\mu(Z)}. \end{aligned}$$

■

E a próxima estimativa é dada a proposição seguinte.

Proposição 3.35

$$\int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{50\mu(Z)}$$

Demonstração:

Para limitar essa integral, observa-se que a função característica de $Z \setminus G$ e a função $\ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\|$ são independentes com relação a medida μ_Z e segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| d\mu_Z &= \frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| \chi_{Z \setminus G} d\mu_Z \\ &= \frac{1}{2} \mu_Z(Z \setminus G) \int_Z \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| d\mu_Z \end{aligned}$$

Nota-se da Definição de 1.27. e denotando por simplicidade $\mathbf{y} = f^{\tau_Z}(\mathbf{x})$ que

$$\begin{aligned} \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| &= \|L(f^{\tau_Z^{-1}}(\mathbf{y})) \dots L(\mathbf{y})\| \\ &\leq \prod_{i=0}^{\tau_Z(\mathbf{y})-1} \|L(f^i(\mathbf{y}))\| \\ &\leq (\sigma^2)^{\tau_Z(\mathbf{y})} \\ &\leq (\sigma^2)^{\tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x}))}. \end{aligned}$$

Logo $\ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| \leq \tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x})) \ln \sigma^2$. Então pelo Teorema 1.7 de Kač, segue que

$$\begin{aligned} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| d\mu_Z &\leq \ln \sigma^2 \int_Z \tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x})) d\mu_Z \\ &\leq \frac{\ln \sigma^2}{\mu(Z)}. \end{aligned}$$

Como foi apresentado na Observação 3.33, $\mu(Z \setminus G) < \frac{\kappa}{50\zeta \ln \sigma^2}$. Então segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}\| d\mu_Z &= \frac{1}{2} \frac{\mu_Z(Z \setminus G) \ln(\sigma^2)}{\mu(Z)} \\ &< \frac{\kappa}{100\mu(Z)}. \end{aligned}$$

■

E após os resultados de preparação segue se para o lema que mostra a limitação da integral no conjunto desejado.

Lema 3.36

$$\frac{1}{2} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau_Z^2}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{50\mu(Z)}. \quad (3.16)$$

Demonstração: Da Definição 1.27, segue que

$$\begin{aligned} \|L^{\tau z^2}(\mathbf{x})\| &= \|L(f^{\tau z^2-1}(\mathbf{x})) \dots L(f^{\tau z}(\mathbf{x}))L(f^{\tau z-1}(\mathbf{x})) \dots L(\mathbf{x})\| \\ &\leq \|L^{\tau z}(\mathbf{x})\| + \|L^{\tau z} \circ f^{\tau z}(x)\|. \end{aligned}$$

Então pelas proposições 3.34 e 3.35 conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau z^2}\| d\mu_Z &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{Z \setminus G} \log \|L^{\tau z}\| d\mu_Z + \int_{Z \setminus G} \log \|L^{\tau z} \circ f^{\tau z}\| d\mu_Z \right) \\ &< \frac{\kappa}{100\mu(Z)} + \frac{\kappa}{100\mu(Z)} \\ &< \frac{\kappa}{50\mu(Z)}. \end{aligned}$$

■

3.2.2 Segunda etapa

Para calcular a integral sobre o conjunto $Z \setminus f^{-\tau z}(G)$ se utiliza das ideias das proposições anteriores. E assim no próximo resultado explicita-se como proceder essa aplicação de ideias.

Lema 3.37

$$\frac{1}{2} \int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \ln \|L^{\tau z^2}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{25\mu(Z)}.$$

Demonstração:

Observa-se que

$$\frac{1}{2} \int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \ln \|L^{\tau z^2}\| d\mu_Z \leq \frac{1}{2} \left(\int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \ln \|L^{\tau z}\| d\mu_Z + \int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \ln \|L^{\tau z} \circ f^{\tau z}\| d\mu_Z \right).$$

Pela definição de $f^{\tau z}$, segue que para cada $\mathbf{x} \in Z \setminus f^{-\tau z}(G)$ existe um único $\mathbf{y} \in G$ tal que $f^{\tau z}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Então destaca-se que

$$\int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \ln \|L^{\tau z}(\mathbf{x})\| d\mu_Z = \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau z}(\mathbf{y})\| d\mu_Z = \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau z} \circ f^{\tau z}\| d\mu_Z,$$

De forma semelhante pode-se associar para cada $\mathbf{y} \in Z \setminus G$ um único $\mathbf{x} \in Z \setminus f^{-\tau z}(G)$ tal que $\mathbf{x} = f^{-\tau z}(\mathbf{y})$, então

$$\int_{Z \setminus G} \log \|L^{\tau z}(\mathbf{y})\| d\mu_Z = \int_{Z \setminus f^{-\tau z}(G)} \log \|L^{\tau z}(\mathbf{x})\| d\mu_Z.$$

E pelas proposições 3.34 e 3.35 segue que

$$\frac{1}{2} \int_{Z \setminus f^{-\tau_Z}(G)} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{25\mu(Z)}.$$

■

3.2.3 Terceira etapa

Para limitar a integral sobre $\mathbf{x} \in G \cap f^{-\tau_Z}(G)$, recorda-se da Proposição 3.22 que o cociclo L permuta e_1 e e_2 a cada retorno a Z e possuem estimativas dadas por (3.10) e (3.11). Logo,

$$\|L^{\tau_Z}(\mathbf{x})\| \leq C^N (\sigma^2)^{|2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - \tau_Z(\mathbf{x}) - 2S_{\tau_Z}(f^{\tau_Z}(\mathbf{x})) + \tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x}))|}.$$

E portanto,

$$\ln \|L^{\tau_Z}\| \leq N \ln C + \ln(\sigma^2) |2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - \tau_Z(\mathbf{x}) - 2S_{\tau_Z}(f^{\tau_Z}(\mathbf{x})) + \tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x}))|.$$

Antes de calcular a integral sobre o conjunto $G \cap f^{-\tau_Z}(G)$ prepara-se alguns conceitos. Defina para $\mathbf{x} \in Z$

$$T_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=N+1}^{n-1} (2\pi(f^j(\mathbf{x})) - 1) = 2S_n(\mathbf{x}) - n + N.$$

Sabe-se que T_n é a soma de variáveis aleatórias $2(\pi \circ f^j) - 1$, independentes e identicamente distribuídas em relação a medida μ_Z . Já que para cada $\mathbf{x} \in Z$ as entradas x_j , com $j \geq N + 1$, são livres e pela definição da medida produto terão suas probabilidades calculadas como produtos independentes.

Destaca-se que $\tau_Z - N$ é um tempo de parada para $T_n(\mathbf{x})$. Pois, nota-se que as N entradas iniciais de algum $\mathbf{y} \in Z$ são fixadas, logo não são independentes. Assim a liberdade sobre o retorno de \mathbf{y} a Z deve ignorar as N entradas fixas. Então o tempo necessário para que ocorra a parada da contagem em $T_n(\mathbf{y})$ é quando \mathbf{y} retorna a Z depois de ignorar as N primeiras iteradas, ou seja, $\tau_Z(\mathbf{y}) - N$. Formalmente isto é dito que $\tau_Z - N$ está na sub- σ -álgebra de Borel de Z induzida por essa sequência de variáveis aleatórias. Logo para cada $j \geq N + 1$ há que

$$\begin{aligned}
\int_Z (2(\pi \circ f^j) - 1) d\mu_Z &= \int_{\pi(f^j(\mathbf{x}))=1} (2(\pi \circ f^j) - 1) d\mu_Z + \int_{\pi(f^j(\mathbf{x}))=0} (2(\pi \circ f^j) - 1) d\mu_Z \\
&= \int_{\pi(f^j(\mathbf{x}))=1} 1 d\mu_Z + \int_{\pi(f^j(\mathbf{x}))=0} -1 d\mu_Z \\
&= 1\mu_Z([j : 1]) - 1\mu_Z([j : 0]) \\
&= 1(p) - (1 - p) \\
&= 2p - 1,
\end{aligned}$$

e

$$\int_Z (2(\pi \circ f^j) - 1 - (2p - 1))^2 d\mu_Z = \int_{\pi \circ f^j=0} (-1 - (2p - 1))^2 d\mu_Z + \int_{\pi \circ f^j=1} (2 - 1 - (2p - 1))^2 d\mu_Z.$$

Então segue que

$$\begin{aligned}
\int_Z (2(\pi \circ f^j) - 1 - (2p - 1))^2 d\mu_Z &= \int_{\pi \circ f^j=0} (-2p)^2 d\mu_Z + \int_{\pi \circ f^j=1} (2 - 2p)^2 d\mu_Z \\
&= 4p^2 \mu(\{x_j = 0\}) + 4(1 - p)^2 \mu(\{x_j = 1\}) \\
&= 4p^2(1 - p) + 4(1 - p)^2(p) \\
&= 4p(1 - p)[p + 1 - p] \\
&= 4p - 4p^2 + 1 - 1 \\
&= 1 - (2p - 1)^2.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Kač, 1.7 e pelo Teorema de Radon-Nikodym em [13] segue que

$$\begin{aligned}
\int_Z \tau_Z - N d\mu &= \int_Z \tau_Z d\mu_Z - N \int_Z d\mu_Z \\
&= \frac{1}{\mu(Z)} \int_Z \tau_Z d\mu - N \\
&= \frac{\mu(\Sigma)}{\mu(Z)} - N \\
&= \frac{1}{\mu(Z)} - N.
\end{aligned}$$

Pela Identidade de Wald disponível [7] segue que é válido

$$\int \sum_{i=1}^{\tau} X_1 d\mu_Z = \int X_1 d\mu_Z \cdot \int \tau d\mu_Z$$

e

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \int \sum_{i=1}^{\tau} X_i d\mu_Z \right)^2 = \int \left(X_1 - \int X_1 d\mu_Z \right)^2 d\mu_Z \cdot \int \tau d\mu_Z,$$

em que τ denota o tempo de parada para $\sum_{i=1}^{\tau} nX_i$.

Aplica-se essa identidade para T_n com tempo de parada $\tau_Z - N$. Pela primeira identidade segue

$$\int_Z T_{\tau_Z} d\mu_Z = (2p - 1) \left(\frac{1}{\mu(Z)} - N \right),$$

e pela segunda segue que

$$\int_Z (T_{\tau_Z} - (2p - 1) \left(\frac{1}{\mu(Z)} - N \right))^2 d\mu_Z = (1 - (2p - 1))^2 \left(\frac{1}{\mu(Z)} - N \right).$$

Lema 3.38

$$\int_{G \cap f^{-\tau_Z}(G)} \ln \|L^{\tau_Z}\| d\mu_Z \leq \frac{\kappa}{25\mu(Z)}.$$

Demonstração:

Define-se

$$\psi(\mathbf{x}) = 2S_{\tau_Z}(\mathbf{x}) - \tau_Z(\mathbf{x}) - 2S_{\tau_Z}(f^{\tau_Z}(\mathbf{x})) + \tau_Z(f^{\tau_Z}(\mathbf{x}))$$

Claramente tem-se $\int_Z \psi d\mu_Z = 0$, pois f^{τ_Z} é invariante por μ_Z . Usando a independência das variáveis aleatórias T_{τ_Z} e $T_{\tau_Z} \circ f^{\tau_Z}$ junto com o fato que elas são identicamente distribuídas conclui-se que

$$\begin{aligned} \int_Z \psi^2 d\mu_Z &= 2 \int_Z (T_{\tau_Z} - (2p - 1) \left(\frac{1}{\mu(Z)} - N \right))^2 d\mu_Z \\ &= 2(1 - (2p - 1)^2) \left(\frac{1}{\mu(Z)} - N \right) \\ &\leq C \frac{1}{\mu(Z)} \end{aligned}$$

para N suficientemente grande.

Assim pela Desigualdade de Chebyshev, que pode ser encontrada em [7], para qualquer $a > 0$ tem-se

$$\mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; |\psi(\mathbf{x})| > a\}) \leq \frac{\int \psi^2 d\mu_Z}{a^2} \leq \frac{C}{\mu(Z)a^2}$$

toma-se $a = \mu(Z)^{-\frac{3}{4}}$, e segue que

$$\begin{aligned}\mu_Z(\{\mathbf{x} \in Z; |\psi(\mathbf{x})| > \mu(Z)^{-\frac{3}{2}}\}) &\leq \frac{C}{\mu(Z)\mu(Z)^{\frac{-3}{2}}} \\ &\leq C\mu(Z)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{G \cap f^{-\tau Z}(G)} |\psi| d\mu_Z &\leq C\mu(Z)^{-\frac{3}{4}} + 2\zeta\mu(Z)^{-1}\mu(Z)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\mu(Z)^{-\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

em que o conjunto com $|\psi| > \mu(Z)^{-\frac{3}{4}}$ usa-se a limitação superior dada por $\tau_Z^2(\mathbf{x}) = \tau_Z(\mathbf{x}) + \tau_Z(f^{\tau Z}(\mathbf{x})) \leq 2\frac{\zeta}{\mu(Z)}$ imposta sobre o segundo tempo de retorno pelo elemento em $\mathbf{x} \in G \cap f^{-\tau Z}(G)$. Escolhe-se N suficientemente grande tal que $\frac{C}{\mu(Z)^{\frac{3}{4}}} < \frac{\kappa}{25\mu(Z)}$ para finalmente concluir que

$$\begin{aligned}\int_{G \cap f^{-\tau Z}(G)} \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z &\int_{G \cap f^{-\tau Z}(G)} |\psi| d\mu_Z \\ &\leq \frac{\kappa}{25\mu(Z)}.\end{aligned}$$

■

Como resultado final para essa seção segue que

Lema 3.39

$$\frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z < \frac{\kappa}{\mu(Z)},$$

Demonstração:

Pelos Lemas 3.36; 3.37; 3.38 segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_Z \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{Z \setminus f^{-\tau Z}(G)} \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z + \int_{Z \setminus G} \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z + \int_{G \cap f^{-\tau Z}(G)} \ln \|L^{\tau Z}\| d\mu_Z \right) \\ &< \frac{\kappa}{50\mu(Z)} + \frac{\kappa}{25\mu(Z)} + \frac{\kappa}{25\mu(Z)} \\ &< \frac{\kappa}{\mu(Z)}\end{aligned}$$

■

3.3 Teorema Principal

Busca-se finalizar com o teorema que conclui a construção do contra exemplo desejado. Destaca-se que quando $\gamma = 1$ deve-se obter a construção do contra-exemplo que foi apresentado no capítulo 2. Um outro comentário a ser feito é que deve-se tomar cuidado com as definições dos vários parâmetros tomados durante a construção, pois em alguns casos não se pode conseguir sua existência quando se escolhe combinações de α -Hölder topologia e alguns valores de σ . Apresenta-se novamente seu enunciado e finalmente sua demonstração

Teorema 3.1 *Seja $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Se $\sigma^{4p-2} \geq 2^\alpha$ então para cada vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset C^\alpha(\Sigma_2, SL(2), \mathbb{R})$ de A e cada $\kappa \in (0, (2p-1) \ln \sigma)$ existe um cociclo localmente constante $L \in \mathcal{U}$ tal que $\lambda_+(L, \mu) = \kappa$. Em particular A é ponto de descontinuidade para os Exponentes de Lyapunov com respeito a μ em $C^\alpha(\Sigma_2, SL(2), \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Inicialmente destaca-se que é suficiente provar o Teorema com a hipótese de $\sigma^{2(p-1)} > 2^\alpha$. Pois ao se considerar a igualdade $\sigma^{2(p-1)} = 2^\alpha$ pode-se considerar uma vizinhança aberta \mathcal{U} de A e para cada $\kappa \in (0, (2p-1) \ln \sigma)$ escolhe-se $\delta > 0$, suficientemente pequeno de forma que a aplicação

$$A_\delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\sigma + \delta)^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma + \delta \end{bmatrix} \text{ se } x_0 = 0 \text{ e } A_\delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma + \delta & 0 \\ 0 & (\sigma + \delta)^{-1} \end{bmatrix} \text{ se } x_0 = 1 \quad (3.17)$$

esteja em \mathcal{U} , ou seja, δ pequeno para que $A_\delta \in \mathcal{U}$. E nesse caso pode-se efetuar as construções sobre as hipóteses de $\kappa \in (0, (2p-1) \ln \sigma + \delta)$ e $(\sigma + \delta)^{4p-2} > 2^\alpha$ e concluir a existência de um cociclo L com $\lambda_+(L, \mu) = \kappa$ para toda vizinhança aberta \mathcal{U} de A_δ .

Assim assumindo a hipótese de $\sigma^{2(p-1)} > 2^\alpha$, segue que pela Definição 3.21, pelo Lema 3.39 obtêm-se $\lambda_+(L, \mu) < \kappa$. Pela Observação 3.24, existe uma família variando continuamente com $L_0 = A$ e $L_1 = L$ e assim pode-se utilizar o resultado principal do trabalho [2] que garante a existência de $t \in [0, 1]$, tal que L_t é satisfaz $\lambda_+(L_t, \mu) = \kappa$.

Como para L_t é válido as mesmas propriedades que para L , conclui-se a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ABADI, M.;VERGNE, N. Sharp error terms for return time statistics unnder mixing conditions. *Journal of Theoretical Probability*,22(1):18-37, 2009.
- [2] BACKES, L.; BROWN, A.; BUTLER, C. Continuity of Lyapunov exponents for cocycles with invariant holonomies. *Journal of Modern Dynamics*, 12: 223-260, 2018.
- [3] BARREIRA, L.;PESIN, Y. B. Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. University Lecture Series Vol. 23. *American Mathematical Society*. 2001.
- [4] BOCHI, J. Genericity of zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 22(6):1667-1696, 2002.
- [5] BUTLER, C. Discontinuity of Lyapuunov exponents near fiber bunched cocycles. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 378: 523-539, 2018.
- [6] CASTAING, C.; VALADIER, M. Convex analysis and measurable multifunctions. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol 580. Springer-Verlag, 1977.
- [7] DURRETT, R. Probability: theory and examples, *Duxbury Press*, 1988.
- [8] FREIJO, C.; MARIN, K. Continuity of Lyapunov exponents for non-uniformly fiber bunched cocycles. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 41(12):3740-3767, 2021.
- [9] FURSTENBERG, H.; KESTEN, H. Prodsuts of radom matrices. *Annals of Mathematical Statistics* 31: 457-496, 1960.
- [10] HALMOS, P. *Measure Theory*. D. Van Nostrand company, 1950.
- [11] LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motin. *Internat J. Control*. 55(3):521-790, 1192. Traduzido por A.T. Fuller de Édouard Davaux, tradução francesa (1907) do original Russo (1892).
- [12] MALHEIRO, E. C.; VIANA, M. Lyapunov exponents of linear cocycles over Markov shifts. *Stochastics and Dynamics*, 15: 1-27, 2015.

- [13] MAÑÉ, R. Teoria Ergódica. Rio de Janeiro: *IMPA*, 1 ed. 1983.
- [14] MAÑÉ, R. Oselede's theorem from the generic viewpoint. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 12 (Warsaw, 1983), 1269-1276, PWN, Warsaw, 1984.
- [15] NETO, C. B.; VIANA, M. Continuity of Lyapunov exponents for random 2D matrices. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 37: 1413-1442, 2017.
- [16] OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 19: 179-210, 1968.
- [17] PESIN, Y. B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 32, 55-114, 1977.
- [18] TAO, T. Topics in random matrix theory. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 132. American Mathematical Society Providence, RI, 2012.
- [19] VIANA, M. Lectures on Lyapunov exponents. Vol. 15, Cambridge Studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [20] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. Fundamentos da Teoria Ergódica. Rio de Janeiro: *SBM*, 2 ed. 2019.
- [21] VIANA, M.; YANG, J. Continuity of Lyapunov exponents in the C^0 topology. *Israel Journal of Mathematics*, 229, n^o 1, 461-485, 2019.