

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Pós-Graduação em Matemática



Maynara Donato de Souza

Propriedades espectrais de operadores de Schrödinger *limit-periodic*

Belo Horizonte
2022

Maynara Donato de Souza

Propriedades espectrais de operadores de Schrödinger *limit-periodic*

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho.

Belo Horizonte

2022

Souza Maynara Donato de.

S729p Propriedades espectrais de operadores de Schrödinger limit-periodic [manuscrito] / Maynara Donato de Souza. – 2023.
58 f. il.

Orientador Silas Luiz de Carvalho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.57-58

1. Matemática – Teses. 2. Teoria espectral – Teses. 3. Física Matemática – Teses. 4. Schrodinger, Operadores de – Teses. I. Carvalho, Silas Luiz de. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

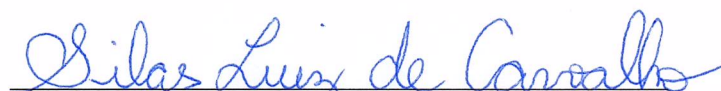


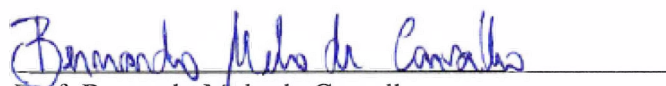
FOLHA DE APROVAÇÃO


*Propriedades espectrais de operadores
Schrödinger limit-periodic*

MAYNARA DONATO DE SOUZA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:


Prof. Silas Luiz de Carvalho
UFMG


Prof. Bernardo Melo de Carvalho
UFMG


Prof. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos
UFAM

Belo Horizonte, 25 de março de 2022.

*Aos meus pais, por motivos que aqui não
cabem; em especial à mainha por todas as orações.*

Ao meu namorado por todo o suporte.

Agradecimentos

- A Deus, pois “Porque dele, e por ele, e para ele são todas as coisas [...]” (Romanos, 11:36). Sem sua permissão, força, colo e orientação esse trabalho não teria sido realizado;
- Aos meus pais: Dona Maria Cirene e Seu José Reinaldo, por tudo o que fizeram por mim, por todo cuidado, dedicação, conselho, amor e torcida/apoio. Por ter mudado de vida para me dar uma educação melhor e abdicado de muitas coisas para que isto fosse possível (A menina de pé descalço na areia quente de Coqueiros- Jandaíra- BA agora é mestra, vocês conseguiram!) ;
- Ao meu namorado por todo apoio, dicas, companheirismo, compreensão e paciência; por ter acreditado em mim mesmo quando nem eu acreditava mais e ter me incentivado a não desistir todas as vezes que eu quis desistir; por ter entendido a minha ausência e estresse em momentos complicados e ainda assim, me apoiar nesses momentos. Flávio foi luz na caminhada escura;
- A meu amigo Genilson, por toda sua amizade e ajuda durante o curso; por ter sido revisor de questões, monitor, professor, dá sugestões, discutir questões e quando eu já não tinha mais ideia sempre vir com a frase: “olha, fica calma... eu vou pensar e ai amanhã a gente discute algo” e de fato, sempre discutíamos algo. Muito obrigada por ter me ajudado tanto e ter tornado as aulas on-line menos “on-line”;
- A meu orientador por ter aceitado o desafio de me orientar, por toda a paciência e compreensão, por ser tão dedicado e excelente profissional e, mais uma vez, por sua paciência comigo. Topar orientar a distância e o fazer com maestria é para poucos. Muito obrigada;
- Aos meus professores e orientadores da UFS que contribuíram para que eu chegasse aqui e sonharam comigo este mestrado;
- A todos que me apoiaram de maneira direta e indiretamente;
- A banca pela disponibilidade;
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho consiste em uma apresentação detalhada dos principais resultados discutidos em [1] e [12], os quais tratam do comportamento do espectro de um operador de Schrödinger *limit-periodic*. A saber, mostramos que existe um conjunto \mathcal{G}_δ denso de potenciais tal que o espectro do operador de Schrödinger associado é singular-contínuo e um conjunto de Cantor. Ademais, discutimos a existência de um conjunto denso de potenciais cujos operadores associados têm espectro puramente absolutamente contínuo.

Palavras Chaves: potenciais *limit-periodic*; espectro singular-contínuo; espectro-absolutamente contínuo; conjuntos de Cantor.

Abstract

The present work discuss in details the main results in [1] and [12], which deal with some spectral properties of *limit-periodic* Schrodinger operators. Specifically, we showed that there exists a \mathcal{G}_δ dense set of potentials such that the related Schrodinger operators have singular continuous spectrum, which is a Cantor set. Furthermore, we discussed the existence of a dense set of potentials whose associated operators have a purely absolutely continuous spectrum.

Keywords: *limit-periodic* potentials; singular continuous spectrum; absolutely continuous spectrum; Cantor sets.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 PRELIMINARES	15
1.1 Grupo de Cantor e sequências periódicas	15
1.2 Sequências <i>limit-periodic</i>	17
1.3 Operadores de Schrödinger	18
2 PROPRIEDADES ESPECTRAIS DE OPERADORES DE SCHRÖDINGER LIMIT-PERIODIC	30
2.1 Ausência de espectro absolutamente contínuo em um conjunto denso de operadores	31
2.2 Espectro de Cantor	42
2.3 Espectro absolutamente contínuo	44
2.4 Ausência de espectro pontual	45
3 CONCLUSÃO	47
A RESULTADOS GERAIS QUE PODEM SER ENCONTRADOS NAS REFERÊNCIAS	48
A.1 Teoria de grupos	48
A.2 Espaços métricos	49
A.3 Análise Funcional e Teoria espectral	49
B RESULTADOS DA TEORIA DE OPERADORES DE SCHRÖDINGER	

	10
DINAMICAMENTE DEFINIDOS	54
B.1 Potenciais do tipo <i>Gordon</i>	54
B.2 Alguns fatos gerais sobre o espectro de um operador dinamicamente definido minimal	56
B.3 Hiperbolicidade do cociclo	59
C DETALHES OMITIDOS EM DEMONSTRAÇÕES AO LONGO DO TEXTO	60
C.1 Seção 1.1	60
C.2 Seção 1.2	61
C.3 Seção 1.3	62
C.4 Seção 2.1	62
C.5 Seção 2.3	66

Introdução

Seja $(H_\omega)_{\omega \in X}$ uma família de operadores de Schrödinger limitados a um parâmetro $\omega \in X$, definida pela lei

$$\begin{aligned} H_\omega &: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \\ (H_\omega u)(n) &= u(n+1) + u(n-1) + V_\omega(n)u(n), \end{aligned}$$

em que $V_\omega(n) = v(f^n(\omega))$, com $f : X \rightarrow X$ e $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e X um espaço métrico compacto, é denominado um potencial *almost-periodic*, ou potencial dinamicamente definido. A teoria espectral dessa classe de operadores tem sido uma área de estudo muito ativa desde o final da década de 1970. Isso se deve principalmente ao fato de potenciais dinamicamente definidos serem considerados importantes, por algumas razões que discutiremos a seguir. Em particular, os pesquisadores da época já intuíaam quanto à constância e/ou quase constância, sob certas condições, do seu espectro (em função do parâmetro ω).

O primeiro resultado que comprovava a intuição da quase constância foi apresentado por Pastur, em 1980 (vide [20]). Surgiu também, neste mesmo ano (vide [15]), outro trabalho na mesma direção, porém tratando sobre os tipos espectrais (a saber, os espectros absolutamente contínuo, singular-contínuo e pontual). Já na década de 90, Last e Simon (ver [25]) mostraram que sob a condição de minimalidade do sistema dinâmico (X, f) (Vide definição na Seção B.2), o espectro absolutamente contínuo da família de operadores de Schrödinger definida acima também é constante (vide Teorema B.2.1).

A classe de operadores que estudaremos neste trabalho é um caso particular da classe de operadores *almost-periodic*, a saber, tratam-se dos chamados operadores *limit-periodic*. Um operador *limit-periodic* corresponde ao caso em que X é um grupo de Cantor, isto é, X é um grupo compacto totalmente desconexo e perfeito (vide Definição 1.1.1).

Do ponto de vista matemático, esses operadores possuem uma certa regularidade do ponto de vista espectral (como, por exemplo, as constâncias com respeito ao parâmetro ω discutidas anteriormente), e por isso, estamos interessados em estudar suas propriedades espectrais como função da função de amostragem v . Além disso, podemos destacar sua importância do ponto de vista físico, isto é, os operadores de Schrödinger *limit-periodic* podem ser empregados para

modelar o comportamento de elétrons em redes quase-cristalinas, as quais, apesar de não serem periódicas, possuem uma regularidade “quase-periódica”. Destacamos que uma das grandes descobertas da década de 2000 foi a comprovação experimental da existência dos quasicristais, o que rendeu um prêmio Nobel de Química (ver detalhes em [21]).

A classe dos operadores *limit-periodic* passou a ser estudada com maior seriedade na década de 1980, principalmente através dos trabalhos de Simon e Pastur ([6], [25], [20]). No entanto, foi o trabalho de Ávila [1] que revolucionou a maneira de se estudar essa classe de operadores, e a partir de então, surgiram vários outros trabalhos que possibilitaram uma compreensão maior do comportamento espectral da família (em relação às funções de amostragem). Com efeito, [1] é um dos principais trabalhos estudados dessa dissertação e, desse podemos destacar os seguintes resultados.

Teorema 0.0.1. Seja $f : X \rightarrow X$ uma translação mínima de um grupo de Cantor. Para um conjunto denso $\lambda v \in C^0(X, \mathbb{R})$ e para todo $\lambda \neq 0$, o operador de Schrödinger com potencial V_ω associado a λv possui espectro com medida de Lebesgue nula. Além disso, o expoente de Lyapunov $L(E, V_\omega)$ é uma função contínua e positiva da energia.

Corolário 0.0.1. Seja $f : X \rightarrow X$ uma translação mínima de um grupo de Cantor. Então,

$$\mathcal{G} := \{\lambda v \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid L(E, V_\omega) = 0 \text{ para todos } \lambda \neq 0, E \in \sigma(H_{V_\omega}) \text{ e } |\sigma(H_{V_\omega})| = 0\}$$

é um subconjunto genérico de $C^0(X, \mathbb{R})$. Aqui, $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue.

Damanik afirma, em [9], que os resultados mostrados por Ávila vão à contramão do que era esperado, a saber, que o espectro dessa classe de operadores tivesse comportamento parecido ao dos operadores periódicos (já que os potenciais *limit-periodic* podem ser definidos como limites, em uma dada topologia, de sequências de potenciais periódicos; donde se segue a nomenclatura) e ratificasse o já obtido por Avron e Simon em [16]. Isso porque os estudos eram concentrados em mostrar que o espectro de um operador *limit-periodic* é puramente absolutamente contínuo, e portanto, não pode ser um conjunto com medida de Lebesgue nula. Para mais informações sobre o desenvolvimento histórico do estudo de operadores *limit-periodic*, bem como para mais resultados envolvendo tal classe de operadores, recomendamos ao leitor consultar [11].

Tendo-se em vista o apresentado anteriormente, este trabalho tem como objetivo discutir, em detalhes, as demonstrações do Teorema 0.0.1 e do Corolário 0.0.1, bem como outros resultados presentes em [1] e em [12]; para isso, dividimos o nosso trabalho em três capítulos e três apêndices.

O Capítulo 1 apresenta notações e definições importantes que serão utilizados na parte principal do trabalho. Em particular, demonstramos a caracterização dos potenciais *limit-periodic* (Proposição 1.2.1), proposta por Ávila em [1]; apresentamos também a definição dos operadores de Schrödinger *Limit-periodic*, a noção de matriz de transferência e cociclos, e por fim, comentamos alguns resultados referentes à teoria de Floquet (todos eles presentes na Seção

1.3).

O Capítulo 2 trata diretamente de algumas propriedades espectrais dos operadores *limit-periodic*, e é o cerne dessa dissertação. Nós o dividimos em seções, cada qual versa sobre uma característica do espectro. Na Seção 2.1, discutimos a demonstração do Teorema 0.0.1 (o qual versa sobre a existência de um conjunto denso de operadores com espectro puramente singular).

Já na Seção 2.2, apresentamos a demonstração do seguinte teorema,

Teorema 0.0.2. Sejam X um grupo de Cantor e f uma translação mínima. Então, existe um conjunto G_δ denso $\mathcal{C} \subset C^0(X, \mathbb{R})$ tal que para todos $v \in \mathcal{C}$ e $\omega \in X$, o espectro de H_ω é um conjunto de Cantor.

Na Seção 2.3, apresentamos a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 0.0.3. Seja $f : X \rightarrow X$ uma translação mínima de um grupo de Cantor. Então, existe um conjunto denso de $v \in C^0(X, \mathbb{R})$ tal que para todo potencial V_ω associado, o espectro de H_{V_ω} é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue positiva, e todas as suas medidas espectrais são absolutamente contínuas.

Por fim, utilizamos o argumento do Gordon para mostrar que o espectro é puramente singular-contínuo para um conjunto \mathcal{G}_δ de potenciais; a saber apresentamos a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 0.0.4. Sejam X um grupo de Cantor e $f : X \rightarrow X$ uma translação mínima. Então, existe um subconjunto \mathcal{G}_δ denso de funções $v \in C^0(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $\omega \in X$, o espectro de H_ω é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue nula e puramente singular-contínuo.

No Capítulo 3, apresentamos nossas conclusões acerca do trabalho e perspectivas para projetos futuros.

Quanto aos apêndices, dividimo-los em partes A, B e C. O Apêndice A apresenta definições e resultados básicos de teoria de grupos, espaços métricos e análise funcional. As demonstrações de tais resultados foram omitidas por fugirem ao escopo do trabalho, mas que aqui são apresentados para possibilitar uma melhor compreensão do que está sendo estudado.

No Apêndice B, discutimos aspectos gerais da teoria de operadores dinamicamente definidos. Mais precisamente, abordamos resultados acerca dos potenciais do tipo *Gordon*, a saber, discutimos que para um potencial deste tipo o espectro do respectivo operador é puramente contínuo (i.e., sem parte pontual; Teorema 0.0.4). Discutimos ainda a constância do espectro para operadores dinamicamente definidos (a saber, o espectro de cada elemento da família independe de ω ; Teorema B.2.1). Por fim, discutimos a caracterização do espectro em termos da hiperbolicidade uniforme do cociclo associado ao operador (Teorema B.3.1).

No Apêndice C, apresentamos os detalhes de algumas afirmações feitas durante os capítulos 1 e 2, as quais necessitam de uma atenção especial. A ideia é evitar que as demonstrações fiquem longas, além de facilitar a compreensão dos argumentos principais apresentados, mas sem comprometer a estética do texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados necessários ao desenvolvimento e compreensão deste trabalho. Aqui combinaremos resultados apresentados em [1] e [12]. O leitor pode esperar encontrar definições tais como: Operadores de Schrödinger, expoentes de Lyapunov e potenciais periódicos.

1.1 Grupo de Cantor e sequências periódicas

Nessa seção faremos uma discussão, em detalhes, de resultados apresentados em [1] acerca dos potenciais periódicos e sequências em grupos de Cantor (vide a definição a seguir). Seja X um grupo de Cantor; vamos considerar sempre S como sendo o operador *shift* à direita em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, isto é, o operador linear definido pela lei $(S(x))_n = x_{n+1}$ e, $orb(x) = \{S^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$. Chamaremos de ϵ -vizinhança de um ponto $q \in X$ a bola aberta de centro em q e raio $\epsilon > 0$, $B(q, \epsilon)$. Iniciaremos nossa discussão pela definição do conceito de grupo de Cantor, seguindo [9].

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que X é um grupo de Cantor se este é um grupo abeliano topológico compacto (ver Definição A.2.1), totalmente desconexo e perfeito (não possui pontos interiores).

Faremos agora definições sobre sequências em X .

Definição 1.1.2. Seja X um grupo de Cantor. Dizemos que $x \in X$ é periódico se $orb(x)$ é finita; x é *limit-periodic* se pertence ao fecho, em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, do conjunto das sequências periódicas. Se x é *limit-periodic*, denotamos por $hull(x)$ o fecho de $orb(x)$ em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Observação 1.1.1. Se $y \in hull(x)$, então y é *limit-periodic*. De fato, pela definição do fecho de $orb(x)$ e pela continuidade do operador *shift*, segue-se que y é o limite da translação de uma sequência periódica e, portanto, y é *limit-periodic*.

Feitas as considerações iniciais, podemos enunciar o primeiro resultado com respeito à estrutura topológica de $\text{hull}(x)$.

Proposição 1.1.1. Se x é *limit-periodic*, então $\text{hull}(x)$ é compacto e possui uma única estrutura topológica de grupo com identidade x , tal que a aplicação $\mathbb{Z} \rightarrow \text{hull}(x)$ dada por $k \mapsto S^k(x)$ é um homomorfismo. Além disso, a estrutura do grupo é abeliana e existem vizinhanças compacto-abertas de x em $\text{hull}(x)$ arbitrariamente pequenas, as quais são subgrupos de índice finito.

Demonstração. Seja $x \in X$ *limit-periodic*. Então, $\text{orb}(x)$ é totalmente limitada: De fato, se p é periódico e $\|x - p\| < \epsilon$, então $\text{orb}(x)$ está contido na ϵ -vizinhança de $\text{orb}(p)$, pois $\|S^k(x) - S^k(p)\| = \|x - p\| < \epsilon$ (S é uma isometria). Portanto, sendo $\ell^p(\mathbb{Z})$ um espaço métrico completo, $\text{hull}(x)$ é compacto (vide Proposição A.2.1).

Consideremos agora o conjunto $\text{orb}(x)$ munido da operação de composição de funções. Temos que este é um grupo cíclico, uma vez que:

- i) $S^0(x) \in \text{orb}(x)$;
- ii) Dado $S^m(x)$, tem-se que $S^{-m}(x)$ é tal que $S^m \circ S^{-m}(x) = S^0(x)$ e $S^{-m} \circ S^m(x) = S^0(x)$;
- iii) Vale a associatividade:

$$S^{k+(m+n)} = S^k \circ S^{m+n}(x) = S^k \circ (S^m \circ S^n(x)) = (S^k \circ S^m) \circ S^n(x) = S^{(k+m)+n}(x).$$

Além disso, a função $\mathbb{Z} \rightarrow X$ dada por $k \mapsto S^k(x)$ é um homomorfismo (com efeito, a verificação desta afirmação consiste em usar um argumento análogo a **iii**). Vejamos que $\text{orb}(x)$ possui estrutura uniformemente contínua:

$$\begin{aligned} \|S^{k+l}(x) - S^{k'+l'}(x)\|_\infty &= \|S^{k'}(S^{k-k'+l}(x) - S^{l'}(x))\|_\infty \\ &= \|S^{k-k'+l}(x) - S^{l'}(x)\|_\infty \\ &= \|S^l(S^{k-k'}(x) - S^{l'-l}(x))\|_\infty \\ &\leq \|S^{k-k'}(x) - x\|_\infty + \|x - S^{l'-l}(x)\|_\infty \\ &= \|S^{-k'}(S^k(x) - S^{k'}(x))\|_\infty + \|S^{-l'}(S^{l'}(x) - S^l(x))\|_\infty \\ &= \|S^k(x) - S^{k'}(x)\|_\infty + \|S^{l'}(x) - S^l(x)\|_\infty \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sendo assim, dados $y, z, y', z' \in \text{orb}(x)$, segue-se que $\|yz - y'z'\|_\infty \leq \|y - y'\|_\infty + \|z - z'\|_\infty$, o que mostra a continuidade uniforme da estrutura do grupo. Sendo assim, podemos considerar uma extensão contínua ao $\text{hull}(x)$ que preserva a propriedade de comutatividade do grupo *orbit*.

Para demonstrarmos a última afirmação, fixaremos $\epsilon > 0$ e consideraremos p periódico tal que $S^k(p) = p$ e $\|x - p\| < \frac{\epsilon}{2}$. Temos que $\text{hull}^k(x)$, o fecho do conjunto $\{S^{kn}; n \in \mathbb{Z}\}$, é um subgrupo compacto de $\text{hull}(x)$ com índice no máximo k (ver Afirmação C.1.1). E mais,

$orb(x)$ age transitivamente sobre $hull(x)$ (ver Afirmação C.1.2), e portanto, sendo $hull^k(x)$ um subgrupo de índice finito de $hull(x)$, $hull(x)$ pode ser escrito como uma união finita de translações disjuntas de $hull^k(x)$ (ver Proposição A.1.1). Com isso, concluímos que $hull^k(x)$ é aberto.

Agora, como S é uma isometria em $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ e x pertence a uma $\frac{\epsilon}{2}$ -vizinhança de p , segue-se que $hull^k(x)$ está contido em uma ϵ -vizinhança de x .

□

Pela Proposição 1.1.1, $hull(x)$ é compacto e totalmente desconexo. Daí, ou este é um grupo de Cantor, ou um grupo finito, caso $x \in X$ seja periódico.

1.2 Sequências *limit-periodic*

Consideraremos, nessa seção, X como sendo um grupo de Cantor e $f : X \rightarrow X$ como sendo uma translação por $t \in X$. Apresentaremos algumas definições importantes e um resultado que nos diz como podemos avaliar $hull(x)$ através de sua relação com uma aplicação contínua.

Definição 1.2.1. Dizemos que f é uma translação mínima se $\{f^n(y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em X para todo $y \in X$. Ou, equivalentemente, $\{t^n y \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em X para todo $y \in X$.

Observação 1.2.1. Fixemos um grupo de Cantor X e uma translação mínima $f : X \rightarrow X$, e definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow X \\ n &\mapsto \varphi(n) = f^n(id), \end{aligned}$$

onde id é a identidade do grupo. Temos que φ é um homeomorfismo injetivo cuja imagem é densa em X . Com efeito, $\varphi(m+n) = f^{m+n}(id) = f^m \circ f^n(id)$, e já que f é uma translação mínima, segue-se que φ é injetiva e tem imagem densa em X . Identificaremos os inteiros com sua imagem através desse homomorfismo.

Além disso, é importante destacar que, através dessa observação podemos tomar a imagem de $x \in X$ e concluir todos os resultados demonstrados na seção anterior.

Proposição 1.2.1. Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definamos $\varphi : X \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ por $\varphi(x) = (V(f^n(x)))_{n \in \mathbb{Z}}$. Então, para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ é *limit-periodic* e $\varphi(X) = hull(x)$.

Demonstração. É suficiente mostrar que $\varphi(x)$ é *limit-periodic* (ver Afirmação C.2.1). Sendo assim, nosso objetivo é encontrar uma sequência periódica p tal que $\|\varphi(x) - p\|_\infty \leq \delta$. Para isso,

tomemos uma vizinhança aberta e compacta W da identidade de X tão pequena que se $y \in W$, então $|V(yz) - V(z)| \leq \delta$, para todo $z \in X$.

Seja d uma métrica em X compatível com a topologia. Seja $\epsilon > 0$ tal que se $y, z \in X$ são tais que $y \in W$ e $z \notin W$, então $d(y, z) > \epsilon$. Seja ainda $m > 0$ tal que t^m é tão próximo da identidade que para todo $y \in X$, $d(y, f^m(y)) < \epsilon$. Temos, por indução em $|k|$ e pela invariância por translação da métrica, que $d(f^{km}(x), f^{km+m}(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$, e portanto, $t^{mk} \in W$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, $\{t^{km} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de X de índice no máximo m , compacto e contido em W .

Por fim, seja $p \in \ell^\infty(X, \mathbb{Z})$ dado por $p_i = V(f^j(\omega))$, com $0 \leq j \leq m - 1$ e $i \equiv j \pmod{m}$. Assim,

$$\begin{aligned} |(\varphi(x))_i - p_i| &= |V(f^i(\omega)) - V(f^j(\omega))| \\ &= |V(f^{j+(i-j)}(\omega)) - V(f^j(\omega))| \\ &= |V(f^{i-j} \circ f^j(\omega)) - V(f^j(\omega))| \\ &= |V(t^{i-j} f^j(\omega)) - V(f^j(\omega))|. \end{aligned}$$

Tomando $z = f^j(\omega)$ e $y = t^{i-j}$, temos $|(\varphi(x))_i - p_i| = |V(yz) - V(z)|$. Como $i \equiv j \pmod{m}$, $t^{i-j} \in W$, e pela escolha de W , temos que $|(\varphi(x))_i - p_i| \leq \delta$. Portanto, $\|\varphi(x) - p\|_\infty \leq \delta$.

□

Exemplo 1.2.1. *Sejam Ω o toro ν -dimensional \mathbb{T}^ν e \mathcal{F} a σ -álgebra de Borel sobre o toro. A translação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$, definida pela lei*

$$T(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = (x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \dots, x_\nu + \alpha_\nu),$$

será uma translação mínima se, e somente se, $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ forem racionalmente independentes.

1.3 Operadores de Schrödinger

Sejam X um espaço compacto, $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua (função de amostragem). Definimos a família à um parâmetro $(H_\omega)_{\omega \in X}$ de operadores de Schrödinger discretos e limitados, $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, pela lei

$$[H_\omega u](n) = u(n+1) + u(n-1) + V_\omega(n)u(n), \quad (1.2)$$

com $V_\omega(n) = v(f^n(\omega))$ e $\omega \in X$.

A sequência bilateral V_ω é chamada de potencial dinamicamente definido, e assim, podemos chamar 1.2 de operador de Schrödinger com potencial dinamicamente definido. Nós nos

referiremos ora a cada elemento da família individualmente, ora à família em si. Com efeito, sob condições como ergodicidade ou minimalidade, por exemplo, o espectro de cada elemento da família independe de ω (vide [20] para o caso ergódico e o Teorema B.2.1 para o caso minimal), e assim é natural estudarmos a família como um todo.

Quando X é um grupo de Cantor, $f : X \rightarrow X$ é uma translação mínima e $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, temos um operador *Limit-Periodic*, ou uma família de operadores de Schrödinger *Limit-Periodic*. São nestes operadores que estamos interessados neste trabalho, e estudaremos algumas de suas propriedades espectrais no restante da dissertação.

Considere a equação de diferença finita

$$u(n+1) + u(n-1) + V_\omega(n)u(n) = Eu(n), \quad (1.3)$$

a qual esta associada ao operador dado pela lei (1.2). A ideia é conectar o comportamento das soluções de 1.3 a propriedades espectrais dos operadores em questão (como é típico em teoria espectral).

Uma solução formal de (1.3) deve satisfazer

$$A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

em que

$$A_n^{(E)}(\omega) = A_n^{(E,f,V)}(\omega) = S_{n-1} \cdots S_0,$$

com $S_i = \begin{pmatrix} E - v(f^i(\omega)) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A_n^{(E,V_\omega)}$ é uma matriz em $SL(2, \mathbb{R})$, chamada de matriz de transferência no sítio n associada ao potencial V_ω . Alternativamente, podemos denotá-la por $A_n^{(E,V_\omega)}$.

Fixemos $E \in \mathbb{C}$. Definimos um cociclo associado à equação de diferença finita (1.3) pela lei

$$\begin{aligned} (f, A^{(E,V_\omega)}) : X \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow X \times \mathbb{C}^2 \\ (\omega, u) &\mapsto (f\omega, A^{(E,V_\omega)}u). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Definição 1.3.1. Definimos por expoente de Lyapunov associado ao cociclo $(f, A^{(E)})$ a função dada pela lei

$$L(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln \|A_n^{(E,V_\omega)}(\omega)\| d\mu, \quad (1.6)$$

em que μ é uma medida de probabilidade de Haar em X ; vide [9] para uma discussão sobre o fato desta função estar bem-definida. Às vezes, usaremos $L(E, f, V_\omega)$ ou ainda $L(E, V_\omega)$ para

denotá-lo.

Apresentaremos a seguir um lema que discute o comportamento da derivada do argumento das matrizes de transferência.

Lema 1.3.1. Seja $n \geq 2$. Então, para todo vetor não nulo $z \in \mathbb{R}^2$, a derivada do argumento de $A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega)z$ com respeito a E é estritamente negativa.

Demonstração. Seja $\rho_n(E, \omega, z)$ a derivada com respeito a E do argumento de $A_n^{(E,f,V_\omega)}$. Temos que $\rho_1(E, x, z)$ é estritamente negativa se z é não vertical (isto é, $z \neq (y, 0)$) e nula se z é vertical.

Pela regra da cadeia para $n \geq 2$, $\rho_n(E, \omega, z) = \sum_{i=1}^n k_i \rho_i(E, f^{i-1}(\omega), A_{i-1}^{(E,f,V_\omega)}z)$, em que para cada $i = 1, \dots, n$, $k_i > 0$ (já que $A_{i-1}^{(E,f,V_\omega)}z \in SL(2, \mathbb{R})$, e portanto preserva orientação). Como ou z ou $A_1^{(E,f,V_\omega)}z$ não é vertical, o resultado se segue. \square

Proposição 1.3.1. Para todo $\omega \in X$, o espectro de H_{f,V_ω} é uma função contínua de $V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R})$.

Demonstração. Seja $B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ o espaço de Hilbert dos operadores auto-adjuntos limitados de $\ell^2(\mathbb{Z})$, munido com a norma $\|\Phi\| = \sup_{\|u\|_2=1} \|\Phi(u)\|_2$. Seja \mathcal{A} o espaço dos subconjuntos compactos de \mathbb{R} , munido com a métrica de Caratheodory d_1 (isto é, $d_1(A, B)$ é o ínfimo entre todos os r s tais que A está contido na r -vizinhança de B e B está contido na r -vizinhança de A). Com relação a estas métricas, o espectro é uma função 1-Lipschitz de $\Phi \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

De fato, como vale a Observação C.3.1 e função $C^0(X, \mathbb{R}) \ni v \mapsto H_{f,V_\omega}$ é 1-Lipschitz (Ver Lema C.3.1), conclui-se portanto que o espectro associado a H_{f,V_ω} é uma função 1-Lipschitz de $v \in C^0(X, \mathbb{R})$. Vale destacar que disso se segue ainda que o espectro de H_{f,V_ω} depende continuamente de V_ω . \square

Denotaremos, a partir de agora, o espectro do operador de Schrödinger associado ao potencial $V_\omega = v(f^n(\omega))$ por $\sigma(H_{V_\omega})$.

Definição 1.3.2. Dizemos que V_ω é periódico se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $V_\omega(n+p) = V_\omega(n)$, isto é, $v(f^{n+p}(\omega)) = v(f^n(\omega))$ para todo $\omega \in X$.

Quanto a estes potenciais, podemos dizer o seguinte.

Observação 1.3.1. Se V_ω é um potencial periódico, então V_ω é localmente constante; logo, para qualquer subgrupo compacto de $Y \subset X$ contendo uma vizinhança suficientemente pequena da identidade, a função V_ω está definida em X/Y . Se $V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R})$ e $Y \subset X$ é um subgrupo compacto de índice finito, então podemos definir outro potencial V_ω^Y por convolução com Y pela

lei

$$V_\omega^Y(x) = \int_Y V_\omega(y+x) d\mu_Y(y),$$

onde μ_Y é a medida de *Haar* em Y , $y \in Y$ e $x \in X$. O potencial V_ω^Y é periódico. De fato, basta observar que a integral anterior se reduz a uma soma, já que Y tem índice finito.

Como existem subgrupos compactos de índices finitos contidos em vizinhanças arbitrariamente pequenas da identidade, isso mostra que o conjunto dos potenciais periódicos é denso em $C^0(X, \mathbb{R})$.

O exemplo a seguir esclarece a ideia da prova:

Exemplo 1.3.1. Suponha $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ tal que y_1 é o elemento neutro e y_3 é inverso de y_2 . Ou seja, Y tem estrutura de um grupo. Daí,

$$V_\omega^Y(x) = \int_Y V_\omega(y+x) d\mu_Y = \frac{1}{3}(V_\omega(y_1+x) + V_\omega(y_2+x) + V_\omega(y_3+x))$$

(assumimos que a medida de Haar é normalizada). Assim, se consideramos $p = y_2$, temos que

$$V_\omega^Y(x+p) = \int_Y V_\omega(y+p+x) d\mu_Y = \frac{1}{3}(V_\omega(y_1+p+x) + V_\omega(y_2+p+x) + V_\omega(y_3+p+x));$$

usando associatividade dos elementos em Y , temos as seguintes opções:

1. $y_1 + y_2 = y_2$;
2. $y_3 + y_2 = y_1$;
3. $y_2 + y_2 = y_3$.

Logo,

$$V_\omega^Y(x+p) = \frac{1}{3}(V_\omega(y_2+x) + V_\omega(y_3+x) + V_\omega(y_1+x)) = \int_Y V_\omega(y+x) d\mu_Y = V_\omega^Y(x).$$

Observação 1.3.2. Se V é n -periódica, então $tr(A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega))$ independe de ω e é denotado por $\psi(E)$ (vide [14]). Então, $L(E, f, V_\omega)$ é o logaritmo do raio espectral de $A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega)$, para todo $\omega \in X$. Isso nos mostra que o expoente de Lyapunov é uma função contínua do potencial e da energia quando V_ω é um potencial periódico.

Vamos precisar de mais alguns fatos sobre o espectro de operadores com potenciais periódicos. Sendo assim, vamos listá-los a seguir, sem demonstrá-los, mas encorajamos fortemente o leitor a verificar os detalhes em [13] e [14].

Proposição 1.3.2. Se V_ω é um potencial periódico de período n , então o espectro $\Sigma(f, V_\omega)$ de H é $\{E \in \mathbb{R} \mid |\psi(E)| \leq 2\}$. Assim, para potenciais periódicos, temos $\Sigma(f, V_\omega) = \{E \in \mathbb{R} \mid L(E, f, V_\omega) = 0\}$.

A função ψ é um polinômio de grau n . ψ possui n raízes reais distintas e seus valores críticos não pertencem a $(-2, 2)$. Além disso, E é um ponto crítico de ψ com $\psi(E) = \pm 2$ se, e somente se, $A_n^{(E, f, V_\omega)}(\omega) = \pm I$. Disso, seguem-se algumas consequências sobre a estrutura de espectro periódico:

1. O conjunto $\{E \in \mathbb{R} \mid |\psi(E)| < 2\}$ possui n componentes conexas, as quais são chamadas de bandas espectrais;
2. Se E está na fronteira de alguma banda, então $\text{tr}(A_n^{(E, f, V)}(\omega)) = \pm 2$;
3. Reciprocamente, se $\text{tr}(A_n^{(E, f, V_\omega)}(\omega)) = \pm 2$, então E está na fronteira de alguma banda. Assim, o espectro é a união das bandas;
4. Se duas bandas diferentes se interceptam, então o ponto em comum da fronteira satisfaz $\text{tr}(A_n^{(E, f, V_\omega)}(\omega)) = \pm \mathbb{I}$.

Avaliemos agora as potências de uma matriz de transferência associada a um operador periódico com período p . Para $k \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{Z}$, defina (vide [12])

$$\left(A_l^{(E, f, V_\omega)} \right)^k = \begin{pmatrix} V_\omega(l) & 1 & & & & & e^{ikp} \\ 1 & V_\omega(l+1) & 1 & & & & \\ & 1 & V_\omega(l+2) & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ e^{ikp} & & & & & & 1 & V_\omega(l+p-1) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Essas matrizes são restrições de H_ω a intervalos de comprimento p com condições de fronteira auto-adjuntas adequadas. A importância da escolha das condições de fronteira se deve à existência de soluções especiais da equação de diferença finita (1.3). Feitas estas considerações, apresentamos a seguir um resultado da Teoria de Floquet (disponível em [14]) associado ao comportamento das matrizes que definimos anteriormente.

Proposição 1.3.3. (a) Temos que $E \in \sigma(H)$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, (1.3) possui uma solução que satisfaz

$$u(n+p) = e^{ikp}u(n).$$

Nesse caso, $\hat{u} = (u(l), \dots, u(l+p-1))$ é um autovetor da matriz $\left(A_l^{(E, f, V_\omega)} \right)^k$ correspondente ao autovalor E .

(b) Os p autovalores de $(A_l^{(E,f,V_\omega)})^k$ são independentes de l e

$$\sigma(H) = \bigcup_k \sigma\left((A_l^{(E,f,V_\omega)})^k\right)$$

(c) O polinômio característico de $(A_l^{(E,f,V_\omega)})^k$ obedece

$$\det\left(E - (A_l^{(E,f,V_\omega)})^k\right) = \Delta(E) - 2 \cos(kp),$$

onde $\Delta(E) = \text{tr}(A_p^{(E,f,V_\omega)})$. Temos

$$\sigma(H) = \{E \mid |\Delta(E)| \leq 2\}.$$

O conjunto $\sigma(H)$ é composto por p bandas (intervalos conexos) tais que em cada banda, $\Delta(E)$ ou é estritamente crescente, ou estritamente decrescente.

Enfatizamos que o estudo da Teoria de Floquet não é o foco deste trabalho; os detalhes da Proposição 1.3.3 estão presentes em [14]. Quanto ao comprimento de tais bandas e do espectro, temos o seguinte resultado.

Lema 1.3.2. Seja V_ω um potencial periódico de período n .

- i) O comprimento de cada banda é no máximo $2\pi/n$;
- ii) Seja $C \geq 1$ tal que para todo E na união das bandas, existem $\omega \in X$ e $k \geq 1$ tais que $\|A_k^{(E,f,V)}(\omega)\| \geq C$. Então, a medida total do espectro é no máximo $\frac{4\pi n}{C}$.

Demonstração. Se E pertence a alguma banda, $A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega)$ é conjugada, em $SL_2(\mathbb{R})$, a uma rotação; isto é, existe uma matriz $B^{(E)}(x) \in SL_2(\mathbb{R}) = \{M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(M_{2 \times 2}) = 1\}$ tal que

$$B^{(E)}(x) A^{(E,f,v)}(x)_n B^{(E)}(x) B^{(E)}(x)^{-1} \in SO_2(\mathbb{R}),$$

em que $SO_2(\mathbb{R})$ é o grupo de rotações. Essa matriz não é única, já que $RB^{(E)}(x)$ possui a mesma propriedade que $B^{(E)}(x)$, para $R \in SO_2(\mathbb{R})$.

Em particular, $\|B^{(E)}\|_{HS}^2$ (isto é, a soma dos quadrados das entradas da matriz $B^{(E)}$) é uma função bem-definida $b^{(E)}(\omega)$ que satisfaz $b^{(E)}(f^n(\omega)) = b^{(E)}(\omega)$. Isso nos permite definir uma função independente de ω , $\hat{b}(E)$, que se comporta de seguinte forma: igual a zero caso E não esteja em alguma banda, e

$$\hat{b}(E) := \frac{1}{4\pi n} \sum_{i=1}^{n-1} b^{(E)}(f^i(\omega)), \quad (1.8)$$

caso E esteja em alguma banda espectral.

Além disso, essa função se relaciona à função densidade de estados pela identidade $N(E) = \int_{-\infty}^E \hat{b}(E)dE$ (vide [2]); como consequência, concluímos que para qualquer $I \subset \sigma(H_{V_\omega})$,

$$\int_I \hat{b}(E)dE = \frac{1}{4\pi n} \sum_{i=1}^{n-1} \int_I b^{(E)}(f^i(\omega))dE = \frac{1}{n}. \quad (1.9)$$

Agora, note que $\|B^{(E)}\|_{HS}^2 \geq 2$, já que $B^{(E)} \in SL(2, \mathbb{R})$. Daí,

$$\hat{b}(E) = \frac{1}{4\pi n} \sum_{i=1}^{n-1} \int_I b^{(E)}(f^i(n))dE \geq \frac{2n}{4\pi n} = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.10)$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{n} = \int_I \hat{b}(E)dE \geq \int_I \frac{1}{2\pi}dE \implies |I| \leq \frac{2\pi}{n}. \quad (1.11)$$

Isso demonstra o item *a*). Para demonstrar o item *b*), é suficiente mostrar que para todo E em uma banda vale a relação $\hat{b}(E) \geq \frac{C}{4\pi n}$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} & B^{(E)}(f^k(\omega))A_k^{(E,f,V_\omega)}(\omega)A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega)A_k^{(E,f,V_\omega)^{-1}}B^{(E)}(f^k(\omega))^{-1} \\ &= B^{(E)}(f^k(\omega))A_n^{(E,f,V_\omega)}(f^k(\omega))B^{(E)}(f^k(\omega))^{-1} \in SO(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Assim, $B^{(E)}(f^k(\omega))A_k^{(E,f,V_\omega)}(\omega)$ conjuga $A_n^{(E,f,V_\omega)}(\omega)$ a uma rotação, e portanto, coincide com $RB^{(E)}$ para algum $R \in SO(2, \mathbb{R})$. Assim,

$$C \leq \|A_k^{(E,f,V_\omega)}(\omega)\| = \|B^{(E)}(f^k(\omega))^{-1}RB^{(E)}\| \implies \|A_k^{(E,f,V_\omega)}(\omega)\| \leq \|B^{(E)}(f^k(\omega))^{-1}\| \|B^{(E)}\|$$

Então, existe $\nu \in X$ tal que $C \leq \|B^{(E)}(\nu)\| \leq b^{(E)}(\nu)$. Logo,

$$\hat{b}(E) = \frac{1}{4\pi n} \sum_{i=1}^{n-1} b^{(E)}(f^i(\omega)) \geq \frac{C}{4\pi n}, \quad (1.12)$$

e portanto,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \hat{b}(E)dE \geq \int_{\sigma(H_{V_\omega})} \frac{C}{4\pi n}dE \quad (1.13)$$

Consequentemente,

$$1 \geq \frac{C}{4\pi n} |\sigma(H_{V_\omega})| \implies |\sigma(H_{V_\omega})| \leq \frac{4\pi n}{C}. \quad (1.14)$$

Isso conclui a demonstração. \square

Uma outra importante consequência da periodicidade é a existência de uma decomposição em integral direta do operador. Seguindo [12], apresentá-la-emos. Conforme vimos anteriormente,

podemos tratar $E \in \sigma(H)$ como uma função de $k \in \left[0, \frac{\pi}{p}\right)$. Pelo item (a) da Proposição 1.3.3, a associação $k \mapsto E$ é bijetiva. Além disso, se consideramos energias no interior da banda, isto é, $\Delta(E) \in (-2, 2)$ ou $k \in \left(0, \frac{\pi}{p}\right)$, então existem soluções linearmente independentes, $\varphi^\pm(E)$, de 1.3 que satisfazem as identidades

$$\varphi_{n+lp}^\pm(E) = e^{\pm ilkp} \varphi_n^\pm(E).$$

Podemos normalizar tais soluções tomando $\varphi_0^\pm > 0$ e

$$\sum_{j=0}^{p-1} |\varphi_j^\pm(E)|^2 = 1.$$

Após a normalização, obtemos

$$\varphi^-(E) = \overline{\varphi^+(E)}. \quad (1.15)$$

Agora, para $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de suporte finito, definimos

$$\hat{u}^\pm(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi_n^\pm(E)} u_n.$$

Também definimos em $\sigma(H)$ a medida $d\rho$ pela lei

$$d\rho = \frac{1}{\pi} \left| \frac{dk}{dE}(E) \right| dE. \quad (1.16)$$

Daí, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.4. A função $u \mapsto \hat{u}$ se estende a um operador unitário de $\ell^2(\mathbb{Z})$ a $L^2(\sigma(H), d\rho, \mathbb{C}^2)$.

A sua inversa é dada por

$$(\check{f})_n = \frac{1}{2} \int_{\sigma(H)} [\varphi^+(E) f^+(E) + \varphi_n^-(E) + f^-(E)] d\rho(E).$$

Além disso, temos que

$$\widehat{Hu}^\pm(E) = E\hat{u}^\pm(E). \quad (1.17)$$

Demonstração. Vide [14] □

A proposição anterior nos mostra que H possui espectro puramente absolutamente contínuo. Mais especificamente, a medida espectral associada ao operador H com potencial periódico V_ω

e à função $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de suporte finito é dada por

$$d\mu_{V_\omega, u}(E) = g_{V_\omega, u}(E) dE, \quad (1.18)$$

com densidade

$$g_{V_\omega, u}(E) = \frac{1}{2\pi} (|\hat{u}^+(E)|^2 + |\hat{u}^-(E)|^2) \left| \frac{dk}{dE}(E) \right| \quad (1.19)$$

para $E \in \sigma(H)$.

Lema 1.3.3. Para todo $t \in (1, 2)$, existe uma constante $D = D(\|V_\omega\|_\infty, p, t)$ tal que

$$\int_{\sigma(H)} \left| \frac{dk}{dE}(E) \right|^t \leq D. \quad (1.20)$$

Demonstração. Pelo item (c) da Proposição 1.3.3 e pela regra da cadeia,

$$0 = \Delta'(E) - 2k \sin(kp) \frac{dk}{dE} \implies \frac{dk}{dE} = \frac{\Delta'(E)}{2k \sin(kp)}.$$

Como $\Delta'(E)$ é finita no espectro (tal função é contínua no espectro, um subconjunto compacto da reta), existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\Delta'(E)\| \leq C$. Sendo assim,

$$\int_{\sigma(H)} \left| \frac{dk}{dE}(E) \right|^t dE = \int_{\sigma(H)} \left| \frac{\Delta'(E)}{2k \sin(kp)} \right|^t dE \lesssim \int_0^{\frac{\pi}{p}} \left| \frac{1}{2k \sin(kp)} \right|^t dE \lesssim \int_0^{\frac{\pi}{p}} |\sin(kp)|^{1-t} dk.$$

Sendo a última integral finita, o resultado se segue. \square

Lema 1.3.4. Seja $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ uma sequência de suporte finito. Então, para todo $t \in (1, 2)$, existe uma constante $Q = Q(\|V_\omega\|_\infty, p, u, t)$ tal que

$$\int_{\sigma(H)} |g_{V_\omega, u}(E)|^t dE \leq Q. \quad (1.21)$$

Demonstração. Como por hipótese u tem suporte finito, segue-se que existe uma constante $M = M_{(p, u)}$ tal que $\|u\|_\infty \leq M$ e $|\hat{u}^{pm}|^2 \leq M$. Assim,

$$\int_{\sigma(H)} |g_{V_\omega, u}|^t dE = \int_{\sigma(H)} \left[\frac{1}{2\pi} (|\hat{u}^+(E)|^2 + |\hat{u}^-|^2) \left| \frac{dk}{dE}(E) \right| \right]^t dE \leq \left(\frac{M}{\pi} \right)^t dE.$$

Usando o Lema 1.3.3, obtemos

$$\int_{\sigma(H)} |g_{V_\omega, u}|^t dE \leq \left(\frac{M}{\pi} \right)^t D.$$

Tomando $Q = \left(\frac{M}{\pi} \right)^t D$, o resultado se segue. \square

Apresentaremos agora um resultado da teoria da medida, cuja demonstração se baseia em [16] e nos ajudará na construção de um dos teoremas centrais da dissertação.

Lema 1.3.5. Sejam (X, μ) um espaço de medida finita, $r > 1$ e $f_n \in L^r(\mu)$, com $\sup \|f_n\|_r < \infty$. Suponha que $f_n \rightarrow f$ pontualmente em quase toda parte. Então, $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ para todo $p < r$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, tomemos $f = 0$. Fixe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_r \leq M$ e defina

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \text{se } |f_n(\omega)| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Daí, pelo teorema da convergência dominada, temos que $\|g_n\|_p \rightarrow 0$ (já que $\|g_n\|_p \leq M\mu(X)^{1/p}$), e portanto

$$\|f_n - g_n\|_p^p \leq \int_{|f_n| > M} |f_n(\omega)|^p d\omega \leq M^{p-r} \|f_n\|_r^r.$$

Logo, $\|f_n - g_n\|_p$ pode ser feito arbitrariamente pequeno ao se tomar n suficientemente grande. \square

Eis aqui uma aplicação direta do lema anterior.

Lema 1.3.6. Seja $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ uma seqüência de suporte finito e sejam $V_\omega^{(n)}, V_\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ potenciais de período p tais que $\|V_\omega^{(n)} - V_\omega\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, para cada $t \in (1, 2)$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |g_{V_\omega^{(n)}, u}(E) - g_{V_\omega, u}(E)|^t dE = 0. \quad (1.22)$$

Demonstração. Já que por hipótese $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_\omega^{(n)} - V_\omega\|_\infty = 0$, para cada $k, l \in \mathbb{N}$, as matrizes $(A_l^{(E, f, V_\omega^{(n)})})^k$ convergem, em norma, para $(A_l^{(E, f, V_\omega)})^k$, bem como os discriminantes e os autovetores associados. Sendo assim, pela definição de $g_{V_\omega^{(n)}, u}(E)$ e $g_{V_\omega, u}$, temos a convergência pontual destas funções. Daí, pelo Lema 1.3.4, $\sup_n \int_{\mathbb{R}} |g_{V_\omega^{(n)}, u}(E)|^t dE < \infty$ (basta tomar $g_{V_\omega^{(n)}, u} = 0$ para $E \notin \sigma(H_{V_\omega^{(n)}})$). Reunindo as informações anteriores, podemos usar o Lema 1.3.5 e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |g_{V_\omega^{(n)}, u}(E) - g_{V_\omega, u}(E)|^t dE = 0.$$

\square

Também podemos dizer algo sobre a convergência de potenciais através do seguinte lema.

Lema 1.3.7. Seja $V_\omega^{(n)} \in C^0(X, \mathbb{R})$ uma seqüência convergindo uniformemente para $V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R})$. Então, $L(E, f, V_\omega^{(n)}) \rightarrow L(E, f, V_\omega)$ em $L_{loc}^1(\mu)$.

Demonstração. Vamos listar algumas consequências da hipótese de convergência uniforme da sequência $V_\omega^{(n)}$ para V_ω .

- i) $\forall \epsilon > 0$ existe $n \geq n_0$ tal que $\|V_\omega^{(n)} - V_\omega\| < \epsilon$;
- ii) existe $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|V_\omega^{(n)}\| \leq C$.

Por i), tem-se a convergência pontual $A_{n_0}^{(E,f,V_\omega^{(n)})} \rightarrow A_{n_0}^{(E,f,V_\omega)}$. Segue-se agora por convergência dominada que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} L(E, V_\omega^{(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln (\|A_n^{(E, V_\omega^{(k)})}\|) dE \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \ln (\|A_n^{(E, V_\omega^{(k)})}\|) dE \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln (\|A_n^{(E, V_\omega)}\|) dE \\ &= L(E, V_\omega). \end{aligned}$$

Por ii), os expoentes de Lyapunov são positivos fora de $I = [-2 - C, 2 + C]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (já que $\sigma(H_{V_\omega^{(n)}}) \subset I$) e também pela Proposição 1.3.2. Sendo assim, limitaremos nossa atenção a este intervalo. Considere $U \subset \mathbb{R}$ uma região limitada por um triângulo equilátero T com lados I, J, K . Considere uma aplicação conforme φ do disco unitário centrado na origem para U . Pela fórmula de Schwarz-Christoffel (ver [24]),

$$\varphi^{-1}(z) = k \prod_{j=1}^3 \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{-\frac{2}{3}};$$

cada z_i é a imagem inversa de um dos vértices de T por φ . As funções $L(E, V_\omega^{(n)}) \circ \varphi$ são harmônicas e limitadas no disco unitário centrado na origem. Disso resulta (vide [17])

$$L(\varphi(0), V_\omega^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\varphi(e^{i\theta}), V_\omega^{(n)}) d\theta \quad (1.23)$$

(um resultado equivalente se segue para $L(\varphi(0), V_\omega)$). Como $L(\varphi(0), V_\omega^{(n)}) \rightarrow L(\varphi(0), V_\omega)$ (pela convergência pontual), inferimos de (1.23) que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L(\varphi(e^{i\theta}), V_\omega^{(n)}) - L(\varphi(e^{i\theta}), V_\omega)] d\theta \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

Por convergência dominada, segundo [2], as integrais ao longo de J e K vão a zero individualmente (já que em J e K , há convergência pontual de $L(\varphi(e^{i\theta}), V_\omega^{(n)})$ para $L(\varphi(e^{i\theta}), V_\omega)$). Portanto, fazendo uma mudança de variáveis, obtém-se

$$\int_I [L(E, V_\omega^{(n)}) - L(E, V_\omega)] g(E) dE \rightarrow 0, \quad (1.25)$$

com $g(E) = \varphi'(\varphi^{-1}(E))^{-1}$ (com efeito, seja $E = \varphi(e^{i\theta})$; daí, $e^{i\theta} = \varphi^{-1}(E)$, $dE = \varphi'(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta$, e portanto $d\theta = \varphi'(\varphi^{-1}(E))^{-1}dE$; defina $g(E) = \varphi'(\varphi^{-1}(E))^{-1}$).

Pela definição de φ , g se anula nos vértices de I mas é não-nula no interior de I . Segue-se dessa observação e de (1.25) que para todo $K \subset \text{int}(I)$,

$$\int_K |L(E, V_\omega^{(n)}) - L(E, V_\omega)| dE \rightarrow 0, \quad (1.26)$$

o que encerra a demonstração. \square

Faremos uma importante observação que nos fornece além de um resultado, uma notação que será utilizada no decorrer da dissertação.

Observação 1.3.3. Sendo X um grupo de Cantor, existe uma sequência decrescente de subgrupos de Cantor $X_k \subset X$ tal que $\text{ind}(X_k) = n_k$ e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \{0\}$. Sendo assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar por P_k o conjunto de potenciais de período n_k definidos em X/X_k . Note que esses conjuntos P_k s são não-vazios, pois dado $V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R})$ periódico, pela densidade do conjunto dos potenciais periódicos em $C^0(X, \mathbb{R})$ (ver Observação 1.3.1), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_\omega \in P_k$.

Por fim, gostaríamos de apresentar a definição usual de operadores de Schrödinger *limit-periodic*:

Definição 1.3.3. Seja $H = -\Delta + V$ um operador de Schrödinger discreto e limitado. Dizemos que H é *limit-periodic* se existir uma sequência de potenciais periódicos $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que V é o limite uniforme de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esta definição é a mais intuitiva e usual (vide [9]), e é com base nesta que as demonstrações dos teoremas centrais deste trabalho são feitas.

Capítulo 2

Propriedades espectrais de operadores de Schrödinger *limit-periodic*

Esse capítulo contém o cerne do trabalho. Mais especificamente, aqui serão apresentados e demonstrados os teoremas que nos dão algumas informações importantes sobre o espectro da classe de operadores que definimos em 1.4. Mais precisamente, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas 0.0.1, 0.0.2, 0.0.4, 2.4.1 e 0.0.3.

Faremos, a seguir, algumas rápidas observações quanto à notação e a algumas propriedades que serão utilizadas.

Para $n \geq 1$, denotaremos por $A_n^{(E, V_\omega)}(\omega) = A_n^{(E, f, V_\omega)}(\omega)$ a matriz de transferência no sítio n , associada ao potencial V_ω em X . Também denotaremos por $A_n^{(E, V_\omega)} = A_n^{(E, V_\omega)}(0)$. O espectro do operador associado ao potencial V_ω será denotado por $\sigma(H_{V_\omega})$. W denotará famílias finitas de potenciais periódicos e $\#W$ denotará a sua cardinalidade, levando em consideração o maior número de elementos distintos de W . E mais,

$$L(E, W) := \frac{1}{\#W} \sum_{V_\omega \in W} L(E, V_\omega) \quad (2.1)$$

denotará o expoente de Lyapunov da família W . Feitas as considerações iniciais, apresentaremos alguns lemas importantes para a demonstração do Teorema 0.0.1.

2.1 Ausência de espectro absolutamente contínuo em um conjunto denso de operadores

Antes de discutirmos os detalhes da demonstração do Teorema 0.0.1, apresentaremos alguns lemas que nos auxiliarão nesta tarefa.

Lema 2.1.1. Sejam B uma bola aberta em $C^0(X, \mathbb{R})$, $W \subset P \cap B$ uma família finita de potenciais, e $M \geq 1$. Então, existe uma sequência $W^n \subset P \cap B$ tal que

- i) para todos $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$ e $E \in \mathbb{R}$, $L(E, \lambda W^n) > 0$;
- ii) $L(E, \lambda W^n) \rightarrow L(E, \lambda W)$ uniformemente em compactos (como funções de $(E, \lambda) \in \mathbb{R}^2$).

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $W \subset P_k$, com P_k como na Observação 1.3.3. Para cada $K > k$, pela continuidade do expoente de Lyapunov (vide Observação 1.3.2), existe $N_1(K) > 0$ tal que se $|E|, |\lambda| \leq K$ e se $V_\omega \in W$, $V'_\omega \in P_K$ forem tais que $\|V - V'\|_\infty < \frac{2n_k+1}{N_1(K)}$, então $|L(E, \lambda V) - L(E, \lambda V'_\omega)| < K^{-1}$.

Dados $V_\omega \in W$, $1 \leq j \leq 2n_k + 1$, definamos $V_\omega^{K,j} \in P_K$ por

$$V_\omega^{K,j} = \begin{cases} V_\omega(i), & 0 \leq i \leq n_K - 2, \\ V_\omega(n_K - 1) + \frac{j}{N_1(K)}, & n_K - 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

(o que de fato define $V_\omega^{K,j} \in P_K$ unicamente, pela periodicidade de V_ω).

Afirmção 2.1.1. Para todos $\lambda \neq 0$, $K > k$, existe $1 \leq j \leq 2n_k + 1$ tal que $\sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ possui exatamente n_K componentes.

Demonstração. Suponha, por contradição, que para todo $1 \leq j \leq 2n_k + 1$, $\sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ não possui exatamente n_K componentes. Então, existe E_j tal que $E_j \in \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ e E_j está na fronteira de duas bandas; portanto, $A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega^{K,j}} = \pm I$ (vide Proposição 1.3.2). Daí, pela Observação C.4.1, segue-se que

$$\begin{aligned} A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega} &= S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega} A_{n_K-1}^{E_j, \lambda V_\omega} = S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega} A_{n_K-1}^{E_j, \lambda V_\omega^{K,j}} = S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega} \left(S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega^{K,j}} \right)^{-1} A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega^{K,j}} \\ &= S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega} \left(S_{n_K-1}^{\lambda V_\omega^{K,j}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando a definição de matriz de transferência (vide equação 1.4), temos que

$$A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda j}{N_1(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

no entanto, como V_ω é n_k -periódica (vide Observação C.4.3),

$$A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda j n_k}{n_K N_1(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso implica $A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega} \neq A_{n_K}^{E_{j'}, \lambda V_\omega}$ para $j \neq j'$, e portanto $E_j \neq E_{j'}$ para $j \neq j'$. Tal resultado contradiz o fato de que devem existir no máximo $2n_k$ valores tais que $\text{tr}(A) = \pm 2$. Portanto, existe $1 \leq j \leq 2n_k + 1$ tal que $\sigma(\lambda V_\omega^{K,j})$ possui n_K componentes. \square

Sendo assim, pela afirmação anterior e por compacidade, existe $\delta = \delta(W, K, M) > 0$ de modo que para $V_\omega \in W$ e $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$, existe $1 \leq j = j(K, \lambda, V_\omega)$ para o qual $\sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ possui n_K componentes e a medida da menor lacuna (entre as bandas espectrais) é maior ou igual a δ . Seja $N_2(K) \in \mathbb{N}$ tal que $N_2(K) > |\lambda| \frac{4\pi M}{\delta n_K}$.

Para $0 \leq l \leq N_2(K)$ e $V_\omega^{K,j}$ como em 2.2, definamos $V_\omega^{K,j,l}$ pela lei $V_\omega^{K,j,l} = V_\omega^{K,j} + \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}$.

Afirmção 2.1.2. Para cada $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$, $V_\omega \in W$ e $K > k$,

$$\bigcap_{0 \leq l \leq N_2(K)} \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j,l}}) = \emptyset.$$

Demonstração. Lembremos que cada componente conexa de $\sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ tem medida no máximo $\frac{2\pi}{n_K}$ (vide Lema 1.3.2). Como $N_2(K) > |\lambda| \frac{4\pi M}{\delta n_K}$, para todo $E \in \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ existe $0 \leq l \leq N_2(K)$ tal que $E - \lambda V_\omega^{K,j} + \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)} \notin \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j}})$ (vide Observação C.4.1), isto é, $E \notin \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K,j,l}})$. Isso demonstra o resultado. \square

Seja W^K a família obtida pela coleção de $V_\omega^{K,j,l}$ para diferentes $V_\omega \in W$, $1 \leq j \leq 2n_k + 1$ e $0 \leq l \leq N_2(K)$. Pela Afirmção 2.1.2, para todos $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$ e $E \in \mathbb{R}$, $L(E, \lambda W^K) > 0$ (vide Proposição 1.3.2).

Para finalizarmos, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2n_k + 1} \max_{0 \leq l \leq N_2(K)} |L(E, \lambda V_\omega^{K,j,l}) - L(E, \lambda V_\omega)| = 0,$$

uniformemente em compactos $(E, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} |L(E, \lambda V_\omega^{K,j,l}) - L(E, \lambda V_\omega)| &\leq |L(E, \lambda V_\omega^{K,j,l}) - L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega)| \\ &+ |L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega) - L(E, \lambda)| \\ &\leq |L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega^{K,j}) - L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega)| \\ &+ |L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega) - L(E, \lambda)|; \end{aligned} \tag{2.3}$$

a primeira parcela do membro direito da segunda desigualdade é menor do que K^{-1} , já que $K \geq |E| + 4\pi M^2$ (ver Observação C.4.2), enquanto que

$$|L(E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)}, \lambda V_\omega) - L(E, \lambda)| \leq \max_{V_\omega \in W} \sup_{|t| \leq \frac{4\pi M^2}{n_K}} |L(E + t, \lambda V_\omega) - L(E, \lambda V_\omega)|,$$

o qual converge para zero uniformemente em compactos $(E, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ quando $K \rightarrow \infty$ (pela continuidade dos expoentes de Lyapunov para potenciais periódicos; vide Observação 1.3.2). Isso encerra a demonstração. \square

Lema 2.1.2. Sejam B uma bola aberta em $C^0(X, \mathbb{R})$ e $W \subset P \cap B$ uma família finita de potenciais periódicos. Então, para todo K suficientemente grande, existe $W_K \subset P_K \cap B$ tal que

- I) $L(E, \lambda W_K) \rightarrow L(E, \lambda W)$ uniformemente em compactos (como função de $(E, \lambda) \in \mathbb{R}^2$);
- II) O diâmetro de W_K é no máximo n_K^{-10} ;
- III) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\inf_{E \in \mathbb{R}} L(E, \lambda W) \geq \delta \#W n_k$, então para todo $V_\omega \in W_K$, a medida de Lebesgue de $\sigma(H_{\lambda V_\omega})$ é no máximo $e^{-\frac{\delta n_K}{2}}$.

Demonstração. Assuma que $W \subset P_k$, com $n_k \geq 2$, e seja $K > k$ grande. Ordene os elementos $V_\omega^1, V_\omega^2, \dots, V_\omega^m$ de W e faça $r = \left\lfloor \frac{n_K}{m n_k} \right\rfloor$ (isto é, a parte inteira de $\frac{n_K}{m n_k}$).

Iniciaremos a construção da sequência desejada. Seja $V_\omega \in P_K$; é suficiente definir $V_\omega(l)$ apenas para $0 \leq l \leq n_K - 1$. Sejam $I_j = [j n_k, (j+1)n_k - 1] \subset \mathbb{Z}$ e $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_{m-1} < j_m = \left\lfloor \frac{n_K}{n_k} \right\rfloor$ uma sequência tal que $j_{i+1} - j_i - r \in \{0, 1\}$. Dado $0 \leq l \leq n_K - 1$, sejam j tal que $l \in I_j$, i tal que $j_{i-1} \leq j < j_i$, e faça $V_\omega(l) = V_\omega^i(l)$.

Para qualquer sequência $t = (t_1, \dots, t_m)$ com $t_i \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $V_\omega^t \in P_K$ o potencial definido pela seguinte lei: para $0 \leq l \leq n_k - 1$ e j tal que $l \in I_j$, se $j = j_i - 1$ para algum $1 \leq i \leq m$, faça $V_\omega^t(l) = V_\omega(l) + r^{-20} t_i$; caso contrário, faça $V_\omega^t(l) = V_\omega(l)$.

Seja W_K a família consistindo de todos os V_ω^t s. Disso, II) segue para K suficientemente grande (vide Lema C.4.2). Mostraremos também que $L(E, \lambda W_K) \rightarrow L(E, \lambda W)$ uniformemente em compactos, mas para tanto é suficiente nos restringirmos a subconjuntos de $(E, \lambda) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$, uma vez que $\|\lambda V_\omega\| \rightarrow 0$ implica $L(E, \lambda V_\omega) - L(E, 0) \rightarrow 0$ uniformemente (pela continuidade dos expoentes de Lyapunov e pela referida restrição a compactos).

Para E e λ fixados, escrevemos

$$A_{n_K}^{E, \lambda V_\omega^t} = C^{(t_m, m)} B^{(m)} \dots C^{(t_1, 1)} B^{(1)}, \quad (2.4)$$

em que $C^{(t_i, i)} = A_{n_k}^{(E - \lambda r^{-20 t_i}, \lambda V_\omega^i)}$ e $B^{(i)} = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)} \right)^{j_i - j_{i-1} - 1}$. Note que para E e λ pertencentes a um compacto de \mathbb{R}^2 , as normas das matrizes do tipo $C^{(t_i, i)}$ continuam limitadas ao passo que

r cresce, enquanto que normas das matrizes do tipo $B^{(i)}$ podem crescer.

Tomemos $c > 0$ tal que $(\ln \ln r)^{-m} \leq c \leq \frac{(\ln \ln \ln r)^m}{(\ln \ln r)^m}$, de modo que se $\|B^{(i)}\| < e^{cr}$, então $\|B^{(i)}\| < e^{(\ln \ln \ln r)^{-1}cr} < e^{(\ln \ln \ln r)^{-1}cn_K}$ (note que tal c existe para r suficientemente grande; com efeito, a união dos m intervalos $(\ln \ln \|B^{(i)}\| - \ln r, \ln \ln \|B^{(i)}\| - \ln r + \ln \ln \ln \ln r]$, $1 \leq i \leq m$, deve omitir ao menos um ponto em $[-m \ln \ln \ln r, -m \ln \ln \ln r + m \ln \ln \ln \ln r]$, para r suficientemente grande, o qual pode ser tomado como $\ln c$).

Definição 2.1.1. Chamamos i de “bom” se

$$B^{(i)} \geq e^{cr}.$$

Afirmção 2.1.3. Se não existe i bom, então $L(E, \lambda W) \leq \frac{cr}{r-1}$ e $L(E, \lambda W_K) \leq \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right)$. Em particular, $L(E, \lambda W_K)$ e $L(E, \lambda W)$ estão próximos.

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que é verdadeira a desigualdade $L(E, \lambda W_K) \leq \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right)$. Com efeito, pelo algoritmo de Euclides, existem inteiros $q \geq 0$ e $0 \leq s \leq n_K - 1$ tais que $n = qn_K + s$. Sendo assim, $n \rightarrow \infty \implies q \rightarrow \infty$, e conseqüentemente, $A_n^{(E, V_\omega^t)} = A_{qn_K+s} = A_s \left(A_{n_K}^{(E, V_\omega^t)} \right)^q$, pela periodicidade de V_ω^t , em que $A_s := S_{qn_K+s-1} \cdots S_{qn_K}$. Logo,

$$L(E, \lambda V_\omega^t) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{qn_K + s} \ln \|A_{qn_K+s}\| \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{qn_K + s} \left\{ \ln \|A_s\| + \ln \left\| \left(A_{n_K}^{(E, V_\omega^t)} \right)^q \right\| \right\}.$$

Usando 2.4,

$$\begin{aligned} L(E, \lambda V_\omega^t) &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{qn_K + s} \left\{ \ln \|A_s\| + \ln \left(\prod_{i=1}^m \|C^{(t_i, i)}\|^q \|B^{(i)}\|^q \right) \right\} \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{qn_K + s} \ln \|A_s\| + \frac{1}{qn_K + s} q \sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\| + \frac{1}{qn_K + s} q \sum_{i=1}^m \ln \|C^{(t_i, i)}\| \right\} \end{aligned}$$

Por L'Hospital e por $\|A_s\|$ ser limitada, obtemos

$$L(E, \lambda V_\omega^t) \leq \frac{\sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\|}{n_K} + \frac{\sum_{i=1}^m \ln \|C^{(t_i, i)}\|}{n_K}$$

Por hipótese, não existe i bom e $n_K > r$. Assim,

$$L(E, \lambda V_\omega^t) \leq \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.5)$$

Sendo $L(E, \lambda W_K) = \frac{1}{\#(\lambda W_K)} \sum_{\lambda V_\omega^t \in \lambda W_K} L(E, \lambda V_\omega^t)$, temos

$$L(E, \lambda W_K) \leq \frac{1}{\#(\lambda W_K)} \sum_{\lambda V_\omega^t \in \lambda W_K} \left\{ \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\} = \frac{1}{n_K} n_K \cdot \left\{ \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}.$$

Logo,

$$L(E, \lambda W_K) \leq \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.6)$$

Agora, mostremos que $L(E, \lambda W) \leq \frac{cr}{r-1}$. Com efeito, existem inteiros $q \geq 0$ e $0 \leq s \leq n_k - 1$ tais que $n = n_k q + s$. Além disso, $q \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Um outro ponto a ser observado é que $B^{(i)} = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}\right)^{j_i - j_{i-1} - 1}$, e pela definição da sequência (j_i) , segue-se que $B^{(i)} = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}\right)^{r-1}$ ou $B^{(i)} = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}\right)^r$. Analisemos, agora, as seguintes situações:

i) $r - 1 \neq 0$ e $B^{(i)} = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}\right)^{r-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} L(E, V_\omega^i) &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k q + s} \left\{ \ln \|A_s\| + \ln \|A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}\|^q \right\} \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k q + s} \left\{ \ln \|A_s\| + \ln \|(B^{(i)})^{\frac{1}{r-1}}\|^q \right\} \\ &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n_k q + s} \ln \|A_s\| + \frac{1}{n_k q + s} \cdot \frac{q}{r-1} \ln \|B^{(i)}\| \right\} \\ &= \frac{q}{n_k(r-1)} \ln \|B^{(i)}\| < \frac{cr}{r-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ii) $r \neq 0$; procedendo como no caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned} L(E, \lambda V_\omega^i) &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k q + s} \left\{ \ln \|A_s\| + \ln \|(B^{(i)})^{\frac{1}{r}}\|^q \right\} \\ &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n_k q + s} \ln \|A_s\| + \frac{1}{n_k q + s} \cdot \frac{q}{r} \ln \|B^{(i)}\| \right\} \\ &= \frac{1}{rn_k} \ln \|B^{(i)}\| < \frac{cr}{r-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por fim, mostremos que $\lim_{r \rightarrow \infty} |L(E, \lambda W_K) - L(E, \lambda W)| = 0$. Com efeito, considerando que $c = o(1)$, obtemos

$$\begin{aligned} |L(E, \lambda W_K) - L(E, \lambda W)| &= \left| \frac{crm}{n_K} + O\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{cr}{r-1} \right| \\ &\leq c \cdot \left| \frac{rm}{n_K} - \frac{r}{r-1} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right| \\ &< c \cdot \left| \frac{rm}{r-1} - \frac{r}{r-1} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right|, \end{aligned}$$

a qual tende a zero quando $r \rightarrow \infty$. □

Assim, podemos assumir que existe ao menos um i bom. Denotemos os possíveis i s bons por $i_1 < \dots < i_d$. Escrevamos $A^{(E, \lambda V_\omega^t)}(0) = \hat{C}^{(d)} \hat{B}^{(d)} \dots \hat{C}^{(1)} \hat{B}^{(1)}$ onde para $1 \leq j \leq d$, tem-se que $\hat{C}^{(j)} = C^{(t_{i_j}, i_j)}$ e $\hat{B}^{(j)} = B^{(i_j)} D^{(j)}$, com $D^{(j)} = C^{(i_j-1, t_{i_j-1})} B^{(i_j-1)} \dots C^{(i_{j-1}+1, t_{i_{j-1}+1})}$.

Pela escolha de c , temos que $\|D^{(j)}\| \leq e^{\frac{cr}{2}}$ para r grande, e assim

$$\|B^{(i_j)}\| = \|\hat{B}^{(j)}(D^{(j)})^{-1}\| \leq \|\hat{B}^{(j)}\| \|D^{(j)}\|^{-1} = \frac{\|\hat{B}^{(j)}\|}{\|D^{(j)}\|};$$

daí,

$$\|\hat{B}^{(j)}\| \geq \frac{\|B^{(i_j)}\|}{\|D^{(j)}\|} \geq e^{cr/2}. \quad (2.9)$$

Afirmação 2.1.4. Quando r cresce,

$$\frac{1}{n_K} \sum_{j=1}^d \ln \|\hat{B}^{(j)}\| \rightarrow L(E, \lambda V_\omega) \quad (2.10)$$

uniformemente em compactos de E e λ .

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\left| \frac{1}{n_K} \left(\sum_{j=1}^d \ln \|\hat{B}^j\| - \sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\| \right) \right| = \frac{1}{n_K} \left| \sum_{i=1}^d [\ln \|B^{(i_j)}\| + \ln \|D^{(j)}\|] - \sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\| \right| \quad (2.11)$$

Usando a definição da matriz $D^{(j)}$, (2.11) fica

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n_K} \left| \sum_{j=1}^d \left[\ln \|C^{(t_{i_j-1}, i_{j-1})} B^{(i_{j-1})} \dots C^{(t_{i_{j-1}+1}, i_{j-1}+1)} B^{(i_{j-1}+1)}\| \right] - \sum_{i \neq i_j}^m \ln \|B^{(i)}\| \right| \\ &\leq \frac{1}{n_K} \left| \sum_{j=1}^d \ln \|C^{(t_{i_j-1}, i_{j-1})}\| \dots \|C^{(t_{i_{j-1}+1}, i_{j-1}+1)}\| + \sum_{j=1}^d \ln \|B^{(i_{j-1})}\| \dots \|B^{(i_{j-1}+1)}\| - \sum_{i \neq i_j}^m \ln \|B^{(i)}\| \right| \\ &= \frac{1}{n_K} \sum_{j=1}^d \left(\ln \|C^{(t_{i_j-1}, i_{j-1})}\| + \dots + \ln \|C^{(t_{i_{j-1}+1}, i_{j-1}+1)}\| \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sendo, para cada i , $C^{(t_i, i)}$ uma matriz limitada (como função de r), existe uma constante g tal que

$$\frac{1}{n_K} \sum_{j=1}^d \left(\ln \|C^{(t_{i_j-1}, i_{j-1})}\| + \dots + \ln \|C^{(t_{i_{j-1}+1}, i_{j-1}+1)}\| \right) \leq \frac{1}{n_K} \sum_{i=1}^d gd = \frac{gd}{n_K} \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

para r grande.

Logo, mostrar (2.10) é equivalente a mostrar que

$$\frac{1}{n_K} \sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\| \rightarrow L(E, \lambda W) \quad (2.14)$$

uniformemente. No entanto, sendo $r = \left\lfloor \frac{n_K}{mn_k} \right\rfloor$, podemos escrever

$$\frac{1}{(r+1)mn_K} < \frac{1}{n_K} \leq \frac{1}{rmn_k} = \frac{1}{(j_i - j_{i-1} - 1)} \cdot \frac{1}{mn_k}.$$

Portanto, mostrar (2.14) é equivalente a mostrar que

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_k(j_i - j_{i-1} - 1)} \ln \|B^{(i)}\| \rightarrow L(E, \lambda W) \quad (2.15)$$

uniformemente, e para tanto, é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{n_k(j_i - j_{i-1} - 1)} \ln \|B^{(i)}\| \rightarrow L(E, \lambda V_\omega^i) \quad (2.16)$$

uniformemente.

No entanto, $B^{(i)}$ é simplesmente o $(j_i - j_{i-1} - 1)$ -ésimo iterado de $A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}$, cujo raio espectral é exatamente a exponencial de $n_k L(E, \lambda V_\omega^i)$. Mais precisamente, temos

$$\frac{1}{n_k(j_i - j_{i-1} - 1)} \ln \|B^{(i)}\| = \frac{1}{n_k} \ln \|(A_{n_k})^{j_i - j_{i-1} - 1}\|^{\frac{1}{j_i - j_{i-1} - 1}},$$

e pelas Proposições A.3.1 e como o raio espectral da matriz $A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)}$ é a exponencial de $n_k L(E, \lambda V_\omega)$, obtemos

$$\exp\left(\frac{1}{n_k} \ln \|(A_{n_k})^{j_i - j_{i-1} - 1}\|^{\frac{1}{j_i - j_{i-1} - 1}}\right) = \|(A_{n_k})^{j_i - j_{i-1} - 1}\|^{\frac{1}{n_k}} \rightarrow e^{L(E, \lambda V^i)}. \quad (2.17)$$

Isso encerra a demonstração da afirmação. \square

Afirmção 2.1.5. Para todo t vale a desigualdade

$$L(E, \lambda V_\omega^t) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^d \ln \|\hat{B}^{(j)}\| + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.18)$$

Demonstração. De fato,

$$L(E, \lambda V_\omega^t) \leq L(E, \lambda W_K) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^m \ln \|B^{(i)}\| + O\left(\frac{1}{r}\right) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^d \ln \|\hat{B}^{(j)}\| + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

\square

A partir de agora, vamos nos preocupar em limitar inferiormente $L(E, \lambda V_\omega^t)$ não para todo t , mas para a maior parte deles.

Sejam s_j a direção mais contraída de $\hat{B}^{(j)}$ e u_j a imagem, por $\hat{B}^{(j)}$, de sua direção mais expandida. Diremos que t é j -bom, para $1 \leq j \leq d$, se o valor absoluto do ângulo relativo entre $\hat{C}^{(j)}u_j$ e s_{j+1} é pelo menos r^{-70} (convencionaremos $j+1 = 1$ caso $j = d$).

Afirmção 2.1.6. Seja r suficientemente grande e t j -bom. Se z é um vetor não-nulo fazendo um ângulo pelo menos r^{-80} com s_j , então $z' = \hat{C}^{(j)}\hat{B}^{(j)}z$ faz um ângulo pelos menos r^{-80} com s_{j+1} e $\|z'\| \geq \|\hat{B}^{(j)}\|r^{-100}\|z\|$.

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, que o sistema $\{\tilde{u}_j, s_j\}$ é ortonormal, com \tilde{u}_j definido de modo que $\hat{B}^{(j)}\tilde{u}_j = u_j$. Sejam $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o ângulo entre z e s_j , e $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ o ângulo entre $z'' = \hat{B}^{(j)}z$ e u_j . Com respeito a esse sistema ortonormal, temos que $z = \cos(\theta)\|z\|s_j + \sin(\theta)\|z\|\tilde{u}_j$. Daí,

$$z'' = \hat{B}^{(j)}z = \cos(\theta)\|z\|\hat{B}^{(j)}s_j + \sin(\theta)\|z\|\hat{B}^{(j)}\tilde{u}_j = \cos(\theta)\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\|^{-1}s_j + \sin(\theta)\|z\|\hat{B}^{(j)}u_j.$$

Consequentemente, a projeção de z'' sobre u_j tem norma $\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\|\sin(\theta)$ (já que $\hat{B}^{(j)}\tilde{u}_j = \|\hat{B}^{(j)}\|u_j$). Note que, pela definição de z'' ,

$$z'' = (\hat{C}^{(j)})^{-1}\cos(\theta)\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\|^{-1}s_j + (\hat{C}^{(j)})^{-1}\sin(\theta)\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\|u_j$$

Assim, como z faz um ângulo de pelo menos r^{-80} com s^j , temos que

$$\begin{aligned} \|z''\| &\geq \|\hat{C}^{(j)}\|^{-1}|\sin(\theta)|\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\| \\ &\geq \|\hat{C}^{(j)}\|^{-1}\left|\theta - \frac{\theta^3}{3!}\right|\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\| \\ &\geq \|\hat{C}^{(j)}\|^{-1}r^{-81}\|z\|\|\hat{B}^{(j)}\| \end{aligned}$$

para r suficientemente grande. De $z'' = (\hat{C}^{(j)})^{-1}z'$ e $\|\hat{C}^{(j)}\|^{-1}$ ser limitada como uma função de r , tem-se que $\|z''\|\|\hat{C}^{(j)}\| \leq \|z'\|$. Portanto,

$$\|z'\| \geq \|\hat{B}^{(j)}\|r^{-100}\|z\|.$$

Por outro lado, dos itens iii) e v) da Observação C.4.4, $\tan\theta \tan\theta' = \|\hat{B}^{(j)}\|^{-2}$. Como $\|\hat{B}^{(j)}\| \geq e^{\frac{cr}{2}} \geq r^{400}$ para r grande, segue-se que $\theta' < r^{-100}$. A limitação de $\hat{C}^{(j)}$ novamente implica que o ângulo entre z' e $\hat{C}^{(j)}u_j$ é no máximo r^{-90} . Como t é j -bom, z' faz um ângulo de pelo menos r^{-80} com s_{j+1} . \square

Se t é muito bom, no sentido de que ele é j -bom para todo $1 \leq j \leq d$, então se z é um vetor não-nulo fazendo um ângulo de pelo menos r^{-80} com s_1 , segue-se do Lema 2.1.1 que

$z' = A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)} z$ também faz um ângulo de pelo menos r^{-80} com s_1 .

Além disso, $\frac{\|z'\|}{\|z\|} \geq \prod_{j=1}^d r^{-100} \|\hat{B}^{(j)}\|$. Por (2.10) e (2.18), segue-se que $L(E, \lambda V_\omega^t) - L(E, \lambda V_\omega) \rightarrow 0$ quando r cresce para t muito bom.

Para concluir a estimativa do expoente de Lyapunov, é suficiente mostrar que a maioria dos ts são muito bons, no sentido de que para todo $\epsilon > 0$ e para todo r suficientemente grande, o conjunto $t \in \{0, \dots, r-1\}^m$ dos ts não muito bons tem no máximo ϵr^m elementos. Uma estimativa precisa é apresentada a seguir.

Afirmção 2.1.7. Para r suficientemente grande, o conjunto dos ts que não são muito bons possui, no máximo, mr^{m-1} elementos.

Demonstração. Mostraremos que para todo $1 \leq j \leq d$, se para todo $1 \leq k \leq m$, com $k \neq i_j$, escolhermos $t_k \in \{0, \dots, r-1\}$, então existe no máximo um $t_{i_j} \in \{0, \dots, r-1\}$ tal que $t = (t_1, \dots, t_m)$ não é j -bom. Assim, o conjunto formado pelos ts que não são j -bons tem no máximo r^{m-1} elementos, e assim a afirmação se segue.

Fixemos t_k para $1 \leq k \leq m$, com $k \neq i_j$. Com isso, ambos u_j e s_{j+1} ficam determinados, mas $\hat{C}^{(j)} = C^{(t_{i_j}, i_j)} = A_{n_k}^{(E - \lambda r^{-20}, \lambda V_\omega^{i_j})}$ depende de t_{i_j} .

Como $n_k \geq 2$, podemos aplicar o Lema 1.3.1 para concluir que para qualquer vetor não-nulo $z \in \mathbb{R}^2$, a derivada do argumento do vetor $A_{n_k}^{(E', \lambda V_\omega^{i_j})} z$ como uma função de E' é estritamente negativa, e portanto, limitada inferiormente por uma constante positiva e superiormente por uma constante finita, uniformemente em compactos de $(E', \lambda) \in \mathbb{R}^2$ e independentemente de r .

Se r é suficientemente grande, concluímos que para todo $0 \leq l \leq r-2$, existe uma rotação R_l de ângulo θ , com $r^{-21} < \theta < r^{-19}$, tal que $C^{(l+1, i_j)} u_j = R_l C^{(l, i_j)} u_j$, com u_j normalizado (como a derivada do argumento das matrizes que compoem $C^{(l+1, i_j)}$ com respeito a energia é negativa, a medida que aumentamos o ângulo, a energia diminui. Com isso, sair de um sítio maior, isto é, $l+1$ para l corresponde à sair de uma energia menor para uma maior, o que poderíamos fazer através de uma transformação com comportamento análogo a uma rotação.) Disto se segue que existe um único $0 \leq t_{i_j} \leq r-1$ tal que $C^{(t_{i_j}, i_j)} u_j$ possui um ângulo de, no máximo r^{-90} com s_{j+1} , como desejado.

Caso contrário, isto é, caso existissem t_{i_1} e t_{i_2} tais que $C^{(t_{i_1}, i_1)} u_j$ e $C^{(t_{i_2}, i_2)} u_j$ têm um ângulo relativo igual a r^{-90} , então pela afirmação anterior, obteríamos uma rotação R_l tal que $C^{(t_{i_1}, i_1)} u_j = R_l C^{(t_{i_2}, i_2)} u_j$. Daí, o ângulo entre $R_l C^{(t_{i_2}, i_2)} u_j$ e $C^{(t_{i_1}, i_1)}$ seria menor do que r^{-90} , pela ação da rotação, o que contradiz o fato de que $C^{(t_{i_1}, i_1)} u_j = R_l C^{(t_{i_2}, i_2)} u_j$. \square

Resta-nos estimar a medida do espectro. Considerando a matriz $A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)}((j_{i-1})n_k)$, (matriz de transferência associado ao potencial λV_ω^t partindo do sítio $(r-1)n_k$ e chegando ao sítio $(r-1)n_k$) temos que, pelo Lema C.4.1, $\|A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)}((j_{i-1})n_k)\| \geq e^{\delta m n_k^2 (r-1)n_k}$. Portanto, pelo

Lema 1.3.2, concluímos que o espectro tem medida no máximo $4\pi n_k e^{-\delta m(r-1)n_k^2} < e^{-\frac{\delta n_k}{2}}$ para r suficientemente grande. \square

Por fim, apresentamos o último resultado necessário à demonstração do Teorema 0.0.1.

Lema 2.1.3. Sejam $B \subset C^0(X, \mathbb{R})$ uma bola aberta e $W \subset P \cap B$ uma família finita de potenciais periódicos. Então, para todo $M \geq 1$, existem $\delta > 0$, uma bola aberta B' com fecho contido em B e com diâmetro no máximo M^{-1} , e $W' \subset P \cap B'$ tais que

$$\text{I) } |L(E, \lambda W') - L(E, \lambda W)| < M^{-1} \text{ para } |E|, |\lambda| \leq M;$$

$$\text{II) } L(E, \lambda W') \geq \delta \text{ para } E \in \mathbb{R} \text{ e } M^{-1} \leq |\lambda| \leq M;$$

III) Para todos $V_\omega \in B'$ e $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$, a medida de Lebesgue de $\sigma(H_{\lambda V_\omega})$ é no máximo M^{-1} .

Demonstração. Aplicando o Lema 2.1.1, existe uma sequência $W^n \subset P \cap B$ cujos elementos satisfazem os itens I) e II). Daí, de II), podemos escolher $n \geq n_0$ tal que $L(E, \lambda W^n) > 0$ para todos $E \in \mathbb{R}$ e $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$; além disso, $|L(E, \lambda W^n) - L(E, \lambda W)| < \frac{M^{-1}}{4}$ para todos $|E|, |\lambda| \leq M$.

Como $L(E, \lambda V_\omega) \geq 1$ se $|E| \geq \|\lambda V_\omega\| + 4$, (vide Afirmação C.4.2) por continuidade dos expoentes de Lyapunov para potenciais periódicos, por compacidade e pela observação anterior, segue-se que para todos $E \in \mathbb{R}$ e $M^{-1} \leq |\lambda| \leq M$, $L(E, \lambda W^n) > 2\delta$, em que $\delta := \min_{|E| \geq \|\lambda V_\omega\| + 4} \{L(E, \lambda V_\omega)\}$.

Aplicando o Lema 2.1.2 para $W = W^n$, temos que para todo K suficientemente grande existe $W' = W_K \subset P_K \cap B$ que satisfaz I), II) e III). Sendo assim, existe uma bola $B' \subset B$ que contém W' com diâmetro no máximo $n_K^{-10} < M^{-1}$, centrada em algum $V'_\omega \in W'$.

Resta-nos demonstrar a última afirmação. Com efeito, note que $\sigma(H_{\lambda V_\omega})$ está contido numa Mn_K^{-10} -vizinhança de $\sigma(H_{\lambda V'_\omega})$, pois pela continuidade do espectro (vide Observação 1.3.2),

$$d(\sigma(H_{\lambda V'_\omega}), \sigma(H_{\lambda V_\omega})) \leq \|\lambda V'_\omega - \lambda V_\omega\|_\infty.$$

Agora, como $|\lambda| \leq M$ e $V_\omega, V'_\omega \in W'$,

$$\|\lambda V'_\omega - \lambda V_\omega\|_\infty = |\lambda| \|V'_\omega - V_\omega\|_\infty \leq M \|V'_\omega - V_\omega\|_\infty < Mn_K^{-10}.$$

Daí, $d(\sigma(H_{\lambda V'_\omega}), \sigma(H_{\lambda V_\omega})) < Mn_K^{-10}$. Usando que $\sigma(H_{\lambda V'_\omega})$ possui no máximo n_K componentes conexas e tem medida no máximo, $e^{\delta(\#W^n n_K)^{-1} n_K/2}$ (pela Proposição 1.3.2), o resultado se segue. \square

Demonstração do Teorema 0.0.1. Sejam $B_0 \subset C^0(X, \mathbb{R})$ uma bola aberta, $W \subset P \cap B_0$ e $\epsilon_1 > 0$. Usaremos o Lema 2.1.3 indutivamente: para cada $i \geq 1$, existem uma bola aberta B_i tal que $\overline{B_i} \subset B_{i-1}$, uma família finita de potenciais periódicos $W_i \subset P \cap B_i$, e constantes $0 < \delta_i < 1$, $\epsilon_{i+1} = \frac{\min\{\epsilon_i, \delta_i\}}{10}$ tais que

- a) $L(E, \lambda W_i) \geq \delta_i$ para $E \in \mathbb{R}$ e $\epsilon_i \leq |\lambda| \leq \epsilon_i^{-1}$;
- b) $|L(E, \lambda W_i) - L(E, \lambda W_{i-1})| < \epsilon_i$ para $|E|, |\lambda| \leq \epsilon_i^{-1}$;
- c) Para todos $\omega \in B_i$ e $\epsilon_i \leq |\lambda| \leq \epsilon_i^{-1}$, $\sigma(H_{\lambda V_\omega})$ possui medida no máximo ϵ_i .

Seja $V_{\omega_\infty} \in \bigcap_i B_i$ (este é o único elemento em comum a todos os B_i s, pelo Teorema de Cantor). Então, $\sigma(H_{\lambda V_{\omega_\infty}})$ possui medida de Lebesgue nula para todo $\lambda \neq 0$, por c).

Note que pelo item b), $L(E, \lambda W_i)$ converge uniformemente em compactos para uma função contínua e positiva para $\lambda \neq 0$.

Afirmamos que tal função coincide com $L(E, \lambda V_{\omega_\infty})$. Com efeito, $\lambda W_i \rightarrow \lambda V_{\omega_\infty}$ para $\lambda \neq 0$; então, pelo Lema 1.3.7, $L(E, \lambda W_i) \rightarrow L(E, \lambda V_{\omega_\infty})$ em L^1_{loc} , e portanto $L(E, \lambda V_{\omega_\infty})$ coincide em quase toda parte (com respeito à medida de Lebesgue) com $\lim_{i \rightarrow \infty} L(E, \lambda W_i)$. Como $E \mapsto L(E, \lambda V_{\omega_\infty})$ é a parte real de uma função subarmônica e $E \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} L(E, \lambda W_i)$ é contínua, elas coincidem em toda parte (vide [5], teorema 26).

Sendo B_0 arbitrária, a afirmação de densidade no enunciado do teorema se segue. \square

Demonstração do Corolário 0.0.1. A afirmação sobre a medida de Lebesgue do espectro é consequência imediata do Teorema 0.0.1, já que o espectro é uma função contínua de V_ω (ver Proposição 1.3.1), por [18]. Denote por

$$\mathcal{F} := \{V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid |\sigma(H_{\lambda V_\omega})| = 0, \text{ para todo } \lambda \neq 0\}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, faça

$$\mathcal{G}_n = \{V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid L(E, \lambda V_\omega) \leq \frac{1}{n} \text{ para todos } E \in \sigma(H_{\lambda V_\omega}), \lambda \neq 0\}.$$

Note que pela semi-continuidade de $L(E, \lambda V_\omega)$ (ver [22]), \mathcal{G}_n é aberto, e denso pela densidade de potenciais periódicos (com efeito, se $V_\omega \in P$, então $L(E, \lambda V_\omega) = 0$ para todos $E \in \sigma(\lambda V_\omega)$ e $\lambda \neq 0$, já que neste caso o cociclo associado é elíptico (ver Proposição 1.3.2)). Daí, cada \mathcal{G}_n é genérico, e portanto

$$\mathcal{G} = (\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n) \cap \mathcal{F}$$

também o é, por se tratar da intersecção de uma família enumerável de conjuntos genéricos. \square

Note que uma das consequências do Corolário 0.0.1 é a existência de um conjunto genérico de operadores (*limit-periodic*) com espectro puramente singular (isto é, sem componente absolutamente contínua), uma vez que o espectro de cada um destes operadores tem medida de Lebesgue nula.

2.2 Espectro de Cantor

Nessa seção mostraremos que, tipicamente, o espectro de um operador *limit-periodic* é um conjunto de Cantor. Um ponto importante a ser lembrado é que para f mínima, quando consideramos a família de operadores de Schrödinger $\{H_\omega\}_{\omega \in X}$, o espectro de H_ω independe de $\omega \in X$. (Ver Teorema B.2.2)

Recordemo-nos que $P = \cup P_k$ é o conjunto dos potenciais periódicos em $C^0(X, \mathbb{R})$, com P_k o conjunto dos potenciais de período n_k .

O próximo resultado, apresentado por [16], é necessário para a demonstração do Teorema 0.0.2.

Lema 2.2.1. $\mathcal{R} := \{V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid \sigma(H_{V_\omega}) \text{ possui interior vazio}\}$ é um conjunto G_δ .

Demonstração. Fixe $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que $a < b$, e defina

$$S_{(a,b)} := \{V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid (a, b) \cap \rho(-\Delta + V_\omega) \neq \emptyset\}.$$

Note que o resultado se seguirá da identidade $\mathcal{R} = \cap_{a < b \in \mathbb{Q}} S_{(a,b)}$ e do fato de que para cada $a < b \in \mathbb{Q}$, $S_{(a,b)}$ é aberto.

Com efeito,

$$V_\omega \in \mathcal{R} \iff V_\omega \in \cap_{a < b \in \mathbb{Q}} \{\lambda \in (a, b) \mid (a, b) \cap \rho(-\Delta + V_\omega) \neq \emptyset\},$$

donde se segue que $\mathcal{R} = \cap_{a < b \in \mathbb{Q}} S_{(a,b)}$.

Mostremos agora que para cada $a < b \in \mathbb{Q}$, $S_{(a,b)}$ é aberto. Com efeito, como o conjunto resolvente é aberto, existem $c \in (a, b)$ e $\delta > 0$ tais que $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b) \cap \rho(-\Delta + V_\omega)$. Daí, pela semi-continuidade do espectro, dado $W \in C^0(X, \mathbb{R})$ tal que $\|V_\omega - W\| < \delta$, segue-se que $c \in \rho(-\Delta + W)$ (a saber, pela Proposição 1.3.1, o espectro é uma função 1-Lipschitz do potencial; sendo assim, se $c \notin \sigma(H_{V_\omega})$, então existe uma δ -vizinhança de V_ω tal que $c \notin \sigma(H_W)$ para todo W nesta δ -vizinhança de V_ω). Consequentemente, $W \in S_{(a,b)}$, donde se conclui que o conjunto é aberto. \square

Observação 2.2.1. O operador de Schrödinger *almost-periodic* não possui espectro discreto.

Essa observação é um caso geral do teorema provado por Pastur, em [20]. Ele prova que o espectro é vazio quase certamente, mas Simon em [6] (Teorema 2.2) indica como mostrá-lo. É importante destacar que esta observação cabe ao nosso trabalho, uma vez que os operadores *limit-periodic* são um caso particular dos operadores *almost-periodic*.

Demonstração do Teorema 0.0.2. Note que pelo Lema 2.2.1 e pela Observação 2.2.1, basta mostrar que \mathcal{R} é denso. Como P é denso em $C^0(X, \mathbb{R})$ (vide Observação 1.3.1), é suficiente mostrar que dados $V_\omega \in P$ e $\epsilon > 0$, existe um potencial \tilde{V}_ω tal que $\|\tilde{V}_\omega - V_\omega\| < \epsilon$ e o espectro de $\sigma(H_{V_\omega})$ é denso em parte alguma.

Sejam, então, $V_\omega \in P$ e $\epsilon > 0$. Escrevamos V_ω como $V_\omega = \sum_{j=0}^N a_j W_j$, com $W_j \in P_j$. Definimos $s_0 = \sum_{i=0}^N a_i^{(0)} W_i$ tal que $\|s_0\| < \epsilon$ e de modo que $V_0 = V_\omega + s_0$ tenha todas as suas $n_N - 1$ lacunas (espectrais) abertas (isto é possível pela Afirmação 2.1.1), onde n_N é o mínimo múltiplo comum dos períodos de W_j , para todo j .

Suponha que sejam escolhidos s_0, s_1, \dots, s_{k-1} . Seja α_{k-1} valor do comprimento da menor lacuna (espectral) de V_{k-1} e defina $\beta_k := \min\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$. Usando novamente a Afirmação 2.1.1, escolhamos $s_k = \sum_{i=0}^{N+k} a_i^{(k)} W_i$ tais que

$$\|s_k\| < \frac{\epsilon}{2^k}, \quad (2.19)$$

$$\|s_k\| < \frac{1}{3} \frac{\beta_k}{2^k}, \quad (2.20)$$

$$V_k = V_{k-1} + \sum_{j=0}^k s_j \text{ tem todas as lacunas abertas.}$$

O limite de V_k existe, por (2.19); denote-o por \tilde{V}_ω . Por construção, temos que $\|\tilde{V}_\omega - V_\omega\| < \epsilon$. Afirmamos que o complementar de $\sigma(H_{V_\omega})$ é denso.

Dados $E \in \sigma(H_{V_\omega})$ e $\tilde{\epsilon} > 0$, podemos escolher k grande o suficiente tal que

$$\|\tilde{V}_\omega - V_k\| < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}, \quad (2.21)$$

$$\frac{2\pi}{n_{N+k}} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\epsilon}{2^{k-1}} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \quad (2.23)$$

Por (2.21), existe $E' \in \sigma(H_{V_k})$ tal que $|E - E'| < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}$. Além disso, pelo Lema 1.3.2 e por (2.22), podemos obter \tilde{E} numa lacuna de $\sigma(H_{V_k})$ tal que $|E' - \tilde{E}| < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}$. Denote tal lacuna de $\sigma(H_{V_k})$ por $I = (a - \delta, a + \delta)$. Por definição, temos que $2\beta \geq \beta_{k+1}$. Por (2.20),

$$\|\tilde{V}_\omega - V_k\| = \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} s_j \right\| < \frac{\beta_{k+1}}{3} \leq \frac{\delta}{3},$$

e assim, $(a - \frac{\delta}{3}, a + \frac{\delta}{3}) \cap \sigma(H_{V_\omega}) = \emptyset$.

Afirmamos que existe $\delta' \in [\frac{\delta}{3}, \delta)$ tal que $(a - \delta', a + \delta') \cap \sigma(H_{\tilde{V}_\omega}) = \emptyset$ e $|\delta' - \delta| < \frac{\epsilon}{2^k}$. Como vimos acima, podemos tomar $\delta' \geq \frac{\delta}{3}$. Suponha que seja impossível obter um δ' tal que $|\delta' - \delta| < \frac{\delta}{2^k}$. Então, deve existir um ponto $x \in \sigma(H_{\tilde{V}_\omega})$ tal que $[x - \frac{\epsilon}{2^k}, x + \frac{\epsilon}{2^k}] \subset (a - \delta, a + \delta)$. Assim, temos uma contradição com o já conhecido fato $[x - \frac{\epsilon}{2^k}, x + \frac{\epsilon}{2^k}] \cap \sigma(H_{\tilde{V}_\omega}) = \emptyset$, já que (2.19) implica

$$\|\tilde{V} - V_k\| = \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} s_j \right\| < \frac{\epsilon}{2^k}$$

Podemos escolher uma energia \hat{E} na lacuna de $\sigma(H_{\tilde{V}_\omega})$ que contém $(a - \delta', a + \delta)$ tal que $|\hat{E} - \tilde{E}| < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}$ e $|E' - E| < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}$. Usando desigualdade triangular, segue-se que $|\hat{E} - E| < \tilde{\epsilon}$. Isso mostra o que desejamos. \square

2.3 Espectro absolutamente contínuo

Nessa seção mostraremos que existe um subconjunto denso de operadores *limit-periodic* com espectro puramente absolutamente contínuo.

Demonstração do Teorema 0.0.3. A ideia é fazer modificações pertinentes na demonstração do Teorema 0.0.2. Sendo assim, começaremos novamente com uma bola arbitrariamente pequena em $C^0(X, \mathbb{R})$ e construiremos um ponto nesta bola para o qual o operador de Schrödinger associado tenha espectro de Cantor e este seja puramente absolutamente contínuo. A presença do espectro absolutamente contínuo implica que a medida de Lebesgue do espectro é positiva.

Fixe $t \in (1, 2)$ e $u \in \ell^2(Z)$ com suporte finito. Tomemos s_k de modo que além de satisfazer as condições presentes na demonstração do Teorema 0.0.2, satisfaça

$$\int_{\mathbb{R}} |g_u^{k-1}(E) - g_u^k(E)|^t dE \leq \frac{1}{2^k},$$

onde g_u^k é a densidade da medida espectral associada a u e ao potencial periódico $n \rightarrow v_k(f^n \omega) = V_k(n)$, com a estimativa acima uniforme em $\omega \in X$. Isso é possível devido ao Lema 1.3.6.

Pelo Lema 1.3.4, existe uma constante $Q(u, t) < \infty$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |g_u^k|^t dE \leq Q(u, t)$.

Fixe $\omega \in X$. Seja A uma união finita de conjuntos abertos. Se $P_A^{f^k}$ é a projeção espectral para o potencial $n \mapsto V_k(n)$ e se P_A é a projeção espectral associada a $n \mapsto \tilde{V}_\omega(n)$, segue que $\langle u, P_A u \rangle \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u, P_A^{f^k} u \rangle$ (vide Lema C.5.1). E como $\|V_k - \tilde{V}_\omega\|_\infty \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, segue-se que

$$\|(H_{\omega, V_k} - H_{\omega, \tilde{V}_\omega})\psi\| = \|V_k(n)\psi(n) - \tilde{V}_\omega(n)\psi(n)\| \leq \|V_k - \tilde{V}_\omega\|_\infty \|\psi\| \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

isto é, o operador de Schrödinger associado converge em norma.

Agora, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\langle u, P_A u \rangle = \int_A g_u^k dE = \left| \int_A 1 \cdot g_u^k dE \right| \leq \left(\int_A 1 dE \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_A |g_u^k|^t dE \right)^{\frac{1}{t}} \leq Q(u, t)^{\frac{1}{t}} |A|^{\frac{1}{q}},$$

onde q é tal que $\frac{1}{t} + \frac{1}{q} = 1$. Logo, a medida espectral associada a u e ao operador de Schrödinger associado ao potencial \tilde{V}_ω é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Uma vez que o resultado é válido para toda sequência u de suporte finito, segue-se por continuidade das projeções espectrais, continuidade do produto interno e pela densidade de tal conjunto de funções em $\ell^2(\mathbb{Z})$, que o operador possui espectro puramente absolutamente contínuo. \square

2.4 Ausência de espectro pontual

Mostraremos, a seguir, que tipicamente o espectro de um operador *limit-periodic* é puramente contínuo (isto é, não existe componente puramente pontual). Para tanto, usaremos o célebre argumento de Gordon (vide Apêndice A, [10]), que apresenta condições suficientes para que um operador tenha espectro puramente contínuo.

Definição 2.4.1. Uma função limitada $V_\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de potencial do tipo *Gordon* se existem inteiros positivos $q_k \rightarrow \infty$ e uma constante $C > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\max_{1 \leq n \leq q_k} |V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| \leq Ck^{-q_k}. \quad (2.25)$$

Observe que se V_ω é um potencial do tipo *Gordon*, então λV_ω o é, uma vez que $|\lambda V_\omega(n) - \lambda V_\omega(n \pm q_k)| = |\lambda| |V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| \leq |\lambda| Ck^{-q_k}$ (usando as constantes encontradas para V_ω).

Teorema 2.4.1. Sejam X um grupo de Cantor e $f : X \rightarrow X$ um a translação mínima. Então, existe um conjunto G_δ denso $\mathcal{G} \subset C^0(X, \mathbb{R})$ tal que para todos $f \in \mathcal{G}$ e $\omega \in X$, o potencial V_ω é um potencial do tipo Gordon.

Demonstração. Para $j, k \in \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{G}_{j,k} := \{V_\omega \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid \text{existe } V_{\omega_j} \in P \text{ tal que } \|V_\omega - V_{\omega_j}\| \leq \frac{1}{2}(jk)^{-jk}\}. \quad (2.26)$$

Note que para cada $j, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}_{j,k}$ é aberto, uma vez que dados $V_\omega \in \mathcal{G}_{j,k}$ e $\delta = \frac{(jk)^{-jk}}{2}$, então $B(V_\omega, \delta) \subset \mathcal{G}_{j,k}$. Com efeito, seja V_{ω_j} tal que $\|V_\omega - V_{\omega_j}\| \leq \frac{1}{2}(jk)^{-jk}$; daí, se $g \in B(V_\omega, \delta)$, então

$$\|g - V_{\omega_j}\| \leq \|g - V_\omega\| + \|V_\omega - V_{\omega_j}\| \leq \frac{(jk)^{-jk}}{2} + \frac{(jk)^{-jk}}{2} = (jk)^{-jk}, \quad (2.27)$$

donde se segue que $B(V, \delta) \subset \mathcal{G}_{j,k}$.

Para $k \in \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{G}_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_{j,k};$$

note que \mathcal{G}_k é aberto (reunião de abertos) e denso em $C^0(X, \mathbb{R})$ já que contém potenciais periódicos. Assim,

$$\mathcal{G} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$$

é um subconjunto \mathcal{G}_δ denso de $C^0(X, \mathbb{R})$. Afirmamos que para todos $V_\omega \in \mathcal{G}$ e $\omega \in X$, $V_\omega(n) = v(f^n(\omega))$ é um potencial do tipo *Gordon*. De fato, seja $V_\omega \in \mathcal{G}$; então, $V_\omega \in \mathcal{G}_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Com isso, podemos obter um $V_{\omega_{jk}}$ periódico de período jk satisfazendo

$$\|V_\omega - V_{\omega_{jk}}\| \leq \frac{1}{2}(j_k k)^{-j_k k}. \quad (2.28)$$

Seja $q_k = j_k k$ tal que $q_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq q_k} \|V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)\| &\leq \max_{1 \leq n \leq q_k} \|V_\omega(n) - V_{\omega_{jk}}(n)\| + \max_{1 \leq n \leq q_k} \|V_{\omega_{jk}}(n) - V_\omega(n \pm q_k)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(j_k k)^{-j_k k} + \frac{1}{2}(j_k k)^{-j_k k} = (j_k k)^{-j_k k} < k^{-j_k k} = k^{-q_k}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde se segue que V_ω é um potencial do tipo Gordon. □

Demonstração do Teorema 0.0.4. Pelo Teorema 2.4.1, existe um conjunto \mathcal{G}_δ denso tal que os potenciais são todos do tipo *Gordon*. Agora, pelo Lema B.1.2, o espectro pontual de um operador de Schrödinger com potencial do tipo *Gordon* é vazio. Além disso, pelo Corolário 0.0.1, existe um outro conjunto \mathcal{G}_δ denso de potenciais cujos operadores associados têm espectro puramente singular.

Como a interseção de dois conjuntos \mathcal{G}_δ densos é ainda um \mathcal{G}_δ denso, segue-se a existência de um conjunto \mathcal{G}_δ denso de potenciais cujos respectivos operadores têm espectro puramente singular-contínuo. □

Capítulo 3

Conclusão

Nessa dissertação fizemos um estudo, em detalhes, dos principais resultados apresentados nos artigos [1] e [12] sobre operadores *limit-periodic*. As principais conclusões são: o espectro é tipicamente (com respeito ao potencial) um conjunto de Cantor; existe um conjunto genérico de operadores com espectro puramente singular-contínuo; existe um conjunto denso de potenciais cujos operadores associados têm espectro puramente absolutamente contínuo. Lembramos ao leitor que as demonstrações e hipóteses detalhadas destes teoremas encontram-se no Capítulo 2.

No entanto, como pode ser visto em comentários presentes na Seção 2.2, não pudemos estudar em detalhes resultados referentes à densidade de operadores com espectro puramente pontual (vide [6]) e à existência de um conjunto genérico de operadores cujo espectro tem dimensão de Hausdorff nula (como é comentado em [1]; caso o leitor se interesse pelo tema, recomendamos [11]). Com isto, esperamos em um próximo projeto poder estudar em detalhes os resultados mencionados anteriormente, bem como alguns problemas que se encontram em aberto, e que foram propostos por Damanik e Fillman em [11]. Destacamos dois deles.

1. O tipo espectral muda quando passamos para outros elementos do $\text{hull}(x)$?
2. Considerando um operador de Schrödinger *limit-periodic* e substituindo o potencial por um múltiplo não trivial dele (ou seja, variando a constante de acoplamento), o tipo espectral pode mudar?

Apêndice A

Resultados gerais que podem ser encontrados nas referências

Neste apêndice, apresentaremos definições, lemas e teoremas que impactam diretamente ou indiretamente na compreensão do trabalho.

A.1 Teoria de grupos

Definição A.1.1. Uma ação de um grupo G em um conjunto $X \neq \emptyset$ é uma função $\phi : G \times X \rightarrow X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\phi(1, x) = x$, com 1 a identidade de G ;
- ii) $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 * g_2, x)$, onde $*$ é a operação do grupo.

Definimos por órbita da ação de ϕ sobre um elemento $x \in X$ o conjunto $orb(x) = \{\phi(g, x) \mid g \in G\}$.

Podemos classificar a ação de um grupo de duas maneiras: ações transitivas ou intransitivas, cujas definições veremos a seguir.

Definição A.1.2. A ação ϕ do grupo G em um conjunto X é dita transitiva se dados $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $\phi(g, x) = y$. Caso contrário, ϕ é dita intransitiva.

As ações transitivas são as que possuem algumas vantagens no estudo da teoria da ação de grupos, como por exemplo, esta possui apenas uma órbita, uma vez que todas coincidem; outra vantagem será apresentada a seguir.

Proposição A.1.1. Sejam G um grupo, X um conjunto não vazio, H um subgrupo de índice finito de G , e ϕ uma ação transitiva de G em X . Suponha que g_1, \dots, g_n são os representantes das classes de H em G e que $Y \subset X$ seja uma H -órbita de ϕ . Então, $G = \cup_{i=1}^n g_i Y$.

As Definições A.1.1, A.1.2 e a Proposição A.1.1 podem ser encontradas em [8].

A.2 Espaços métricos

Definição A.2.1. Um espaço métrico completo (X, d) é dito ser compacto se toda sequência no espaço tem pelo menos uma subsequência convergente.

O próximo resultado é uma outra caracterização de compacidade em espaços métricos.

Teorema A.2.1. Sejam (X, d) um espaço métrico e Y um subconjunto compacto de X . Seja $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma coleção de abertos em X e suponha que

$$Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

Então, existe um subconjunto finito F de I tal que

$$Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha.$$

Demonstração. Ver [23]. □

Vejamos agora a definição espaços totalmente limitados.

Definição A.2.2. Um espaço métrico é chamado totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, ele está contido numa ϵ -vizinhança de um conjunto finito.

Proposição A.2.1. Sejam X um espaço métrico completo e $U \subset X$ um conjunto totalmente limitado. Então, \overline{U} é compacto.

Demonstração. Ver [19]. □

A.3 Análise Funcional e Teoria espectral

Nessa seção apresentaremos definições e resultados de análise funcional e teoria espectral com base em [7]. Todas as notações são baseadas nesta referência, bem como as demonstrações encontram-se lá disponíveis.

Definição A.3.1. Seja $T : \text{dom}(T) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear num espaço de Banach não-nulo \mathcal{B} . O conjunto resolvente de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador $(T - \lambda \cdot \mathbb{I})^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \text{dom}(T)$ existe e é limitado.

Definição A.3.2. Seja $T : \text{dom}(T) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear num espaço de Banach não-nulo \mathcal{B} . O espectro de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$

Uma observação importante é que o espectro de um operador auto-adjunto nem sempre é formado por números reais; com efeito, o espectro da matriz de rotação por um ângulo reto no plano real é formado por números imaginários puros.

Lema A.3.1. Seja $T : \text{dom}(T) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear num espaço de Banach não-nulo \mathcal{B} . O resolvente de T é um conjunto aberto, e conseqüentemente, o espectro de T é um conjunto fechado.

Definição A.3.3. O raio espectral de um operador linear limitado $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é $r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Proposição A.3.1. Seja $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear limitado. Então, $r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$.

Conseguimos dizer algumas coisas sobre o conjunto de autovalores (subconjunto do espectro) de operadores compactos. Vejamos uma proposição que resume as principais propriedades deste conjunto.

Proposição A.3.2. Seja $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador compacto e limitado e seja Λ o conjunto de autovalores de T . Então:

- i) O único ponto de acumulação possível de Λ é zero.
- ii) Λ é enumerável e se $\lambda \neq 0$, então $\dim(\text{Ker}(T - \lambda \cdot \mathbb{I})) < \infty$.
- iii) Se Λ é um conjunto infinito, então os autovalores de T podem ser ordenados em uma sequência convergindo a zero.
- iv) Se $\dim(\mathcal{B}) = \infty$, então zero pertence ao espectro de T .

Definição A.3.4. Uma resolução da identidade espectral em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma função

$$P : \mathcal{A} \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$$

tal que

$$i) P(\mathbb{R}) = 1;$$

ii) Se $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$, com $\Lambda_j \in \mathbb{A}, \forall j$ (isto é, Λ é a união de uma família dois-a-dois disjunta de borelianos da reta), vale o limite forte

$$P(\Lambda) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(\Lambda_j).$$

Dada uma resolução da identidade P , associamos a cada $\xi \in \mathcal{H}$ uma medida de Borel positiva em \mathbb{R} , dada por

$$\Lambda \mapsto \mu_{\xi}(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle.$$

Podemos também associar ao par $\xi, \nu \in \mathcal{H}$ a medida de Borel complexa

$$\mu_{\xi, \nu}(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\nu \rangle.$$

Enunciamos a seguir um dos principais resultados da Teoria Espectral, a saber, o teorema que carrega seu nome.

Teorema A.3.1 (Teorema Espectral). A cada operador auto-adjunto $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ corresponde uma única resolução da identidade P^T em \mathcal{H} , tal que $T = \int t dP^T$.

Teorema A.3.2. Se $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é autoadjunto, então seu espectro é o suporte da resolução da identidade P^T , isto é,

$$\sigma(T) = \{t \in \mathbb{R} \mid P^T(t - \epsilon, t + \epsilon) = \chi_{(t-\epsilon, t+\epsilon)}(T) \neq 0, \forall \epsilon > 0\}$$

Definição A.3.5. As medidas definidas anteriormente são chamadas de medidas espectrais da resolução da identidade P associadas a ξ e ao par $\xi, \nu \in \mathcal{H}$, respectivamente.

Podemos classificar o espectro quanto à multiplicidade dos autovalores.

Definição A.3.6. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear.

- a) O espectro essencial de T é o conjunto $\sigma_{ess}(T)$ dos pontos de acumulação de $\sigma(T)$, juntamente com os autovalores de T de multiplicidade infinita.
- b) O espectro discreto de T é o conjunto $\sigma_d(T) = \sigma(T) - \sigma_{ess}(T)$, isto é, é o conjunto de autovalores isolados de T , cada um deles de multiplicidade finita.

Naturalmente, o espectro de um operador auto-adjunto pode não possuir apenas autovalores. Vamos agora definir outros subconjuntos que o formam.

Definição A.3.7. O subespaço $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}$ é o fecho do subespaço gerado pelos autovetores de T . Seu complemento ortogonal, $\mathcal{H}_c := \mathcal{H}_p^{\perp}$, é o chamado subespaço contínuo de T . As respectivas projeções ortogonais são denotadas por P_p^T e P_c^T .

Teorema A.3.3. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Então,

i) Existe um conjunto enumerável $\Lambda \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{H}_p(T) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \mu_\xi(\mathbb{R} - \Lambda) = 0\};$$

Λ pode ser tomado como o conjunto de autovalores de T .

ii) $\mathcal{H}_c(T) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \mu_\xi(\{t\}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, isto é, a função $t \mapsto \|\chi_{(-\infty, t]}(T)\xi\|$ é contínua.

Definição A.3.8. O subespaço fechado E é chamado um subespaço de redução do operador $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se

$$P_E(\text{dom}(A)) \subset A, \quad AP_E(\text{dom}(A)) \subset E, \quad \text{e } AP_{E^\perp} \subset E^\perp. \quad (\text{A.1})$$

Nesse caso, temos $A_E := A|_E = AP_E$ e $A_{E^\perp} := A|_{E^\perp} = AP_{E^\perp}$.

O próximo teorema resume importantes propriedades de subespaços de redução de operadores auto-adjuntos.

Teorema A.3.4. Sejam $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto e $E \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado.

a) Se E reduz T , então T_E e T_{E^\perp} são operadores auto-adjuntos e, nesse caso, escrevemos $T = T_E \oplus T_{E^\perp}$.

b) Para todo boreliano $\Lambda \in \mathcal{A}$, o subespaço $\text{Im}(\chi_\Lambda)(T)$ reduz T . Aqui, Im corresponde ao conjunto imagem de um operador.

Teorema A.3.5. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Então, \mathcal{H}_p e \mathcal{H}_c reduzem T .

Sendo assim, podemos definir os espectros das respectivas restrições.

Definição A.3.9. O espectro pontual de T é $\sigma_p(T) := \sigma(T_p)$, e o espectro contínuo de T é $\sigma_c(T) := \sigma(T_c)$.

Definição A.3.10. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ auto-adjunto. Então,

a) O subespaço singular de T é definido por

$$\mathcal{H}_s(T) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \mu_\xi \perp \ell\}$$

(isto é, μ_ξ e a medida de Lebesgue ℓ são mutuamente singulares). Então, $\mathcal{H}_p(T) \subset \mathcal{H}_s(T)$.

b) O subespaço absolutamente contínuo de T é definido por

$$\mathcal{H}_{ac}(T) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \mu_\xi \ll \ell\}$$

(isto é, μ_ξ é absolutamente contínua com respeito a ℓ).

c) O subespaço contínuo de T , denotado por $\mathcal{H}_{sc}(T)$, é definido como o conjunto dos vetores $\xi \in \mathcal{H}$ para os quais existe $\Omega \in \mathbb{A}$ (para cada ξ) tal que $\ell(\Omega) = 0$ e $\mu_\xi(\mathbb{R} - \Omega) = 0$; ademais, $\mu_\xi(\Lambda) = 0$ para todos os conjuntos enumeráveis $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Teorema A.3.6. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ auto-adjunto. Então,

i) $\mathcal{H}_s(T) = \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

ii) $\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

iii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{ac}(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

iv) Cada um desses subespaços, i.e, \mathcal{H}_i , com $i \in \{a, s, p, ac, sc\}$, reduz o operador T .

Analogamente aos espectros discreto e contínuo, podemos decompor $\sigma(T)$ em partes pontual, singular-contínua e absolutamente contínua.

Definição A.3.11. Seja $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Definimos $\sigma_{ac}(T) = \sigma(T_{ac})$, $\sigma_s(T) = \sigma(T_s)$ e $\sigma_c(T) = \sigma(T_c)$.

Apêndice B

Resultados da teoria de operadores de Schrödinger dinamicamente definidos

Neste apêndice, apresentaremos resultados clássicos referentes à teoria de potenciais dinamicamente definidos que são utilizados no trabalho, a exemplo do argumento de *Gordon*. Gostaríamos de destacar que usaremos $\sigma(H_\omega)$ para nos referir ao espectro do operador associado ao potencial V_ω , em algumas situações. E, Σ_{ac} corresponde ao espectro constante, isto é, independente de $\omega \in X$.

B.1 Potenciais do tipo *Gordon*

Definição B.1.1. Seja V_ω um potencial (isto é, uma sequência bilateral limitada de números reais). Dizemos que V_ω é do tipo *Gordon* se existe uma sequência $q_k \rightarrow \infty$ de inteiros positivos tal que

$$V_\omega(n \pm q_k) = V_\omega(n), \quad 1 \leq n \leq q_k.$$

Proposição B.1.1. A Definição 2.4.1 e a Definição B.1.1 são equivalentes.

Demonstração. Suponha que existam inteiros positivos $q_k \rightarrow \infty$ e $C > 0$ tais que

$$\max_{1 \leq n \leq q_k} |V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| \leq Ck^{-q_k}. \quad (\text{B.1})$$

Note que para todo $1 \leq n \leq q_k$, $|V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| \leq \max_{1 \leq n \leq q_k} |V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)|$, e ainda que dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. Como $\epsilon > 0$ é

arbitrário, segue-se que a Definição B.1.1 é satisfeita.

Reciprocamente, suponha que exista uma sequência de inteiros positivos $q_k \rightarrow \infty$ tal que

$$V_\omega(n \pm q_k) = V_\omega(n), \quad 1 \leq n \leq q_k.$$

Daí, para $q_k \rightarrow \infty$

$$|V_\omega(n \pm q_k) - V_\omega(n)| = 0 \leq Ck^{-q_k}; \quad 1 \leq n \leq q_k. \quad (\text{B.2})$$

Sendo assim, Ck^{-q_k} é uma cota superior para $|V_\omega(n \pm q_k) - V_\omega(n)|$ quando $1 \leq n \leq q_k$. Consequentemente,

$$\max_{1 \leq n \leq q_k} |V_\omega(n) - V_\omega(n \pm q_k)| \leq Ck^{-q_k}. \quad (\text{B.3})$$

□

Por [10], as matrizes de transferência definidas a partir de (1.4) satisfazem a equação

$$A_n^{(E, V_\omega)^2} - \text{tr}(A_n^{(E, V_\omega)})A_n^{(E, V_\omega)} + I = 0, \quad (\text{B.4})$$

onde I é matriz identidade 2×2 .

Agora, consideremos um vetor inicial $\psi(0) = (\psi_0 \ \psi_{-1})^t$ para a equação de autovalores $H_{V_\omega}\psi = E\psi$ tal que $\|\psi(0)\| = 1$.

Lema B.1.1. Sejam E uma energia e V_ω um potencial para o qual existe uma sequência $q_k \rightarrow \infty$ tal que $V_\omega(n \pm q_k) = V_\omega(n)$, $1 \leq n \leq q_k$. Então, E não é autovalor de H_ω , e nenhuma solução de $H_\omega\psi = E\psi$ tende a zero quando em $q_k \rightarrow \infty$. Mais precisamente, para todo $k \in \mathbb{N}$, toda solução $\psi(n)$ satisfaz

$$\max\{\|\psi(q_k)\|, \|\psi(2q_k)\|, \|\psi(-q_k)\|\} \geq \frac{1}{2}. \quad (\text{B.5})$$

Demonstração. Fixe $k \in \mathbb{N}$ e denote por $B = A_{q_k}^{(E, V_\omega)}$ e por $c = \text{tr}(B)$. Com esta notação, a equação (B.4) se torna.

$$B^2 - cB + I = 0 \quad (\text{B.6})$$

Temos dois casos a considerar, a saber $|c| \geq 1$ e $|c| < 1$. Trataremos apenas o caso $|c| \geq 1$, uma vez que o outro caso é análogo.

Vamos aplicar a equação (B.6) ao vetor $\psi(-q_k)$,

$$\psi(q_k) - c\psi(0) - \psi(-q_k) = 0.$$

Daí,

$$\|\psi(q_k) - \psi(-q_k)\| = \|c\psi(0)\|,$$

usando as condição de fronteira, $|c| \geq 1$ e desigualdade triangular,

$$\|\psi(q_k)\| + \|\psi(-q_k)\| \geq \|\psi(q_k) - \psi(-q_k)\| \geq 1. \quad (\text{B.7})$$

Com isso, para que (B.7) seja satisfeita, $\max\{\|\psi(q_k)\|, \|\psi(2q_k)\|, \|\psi(-q_k)\|\} \geq \frac{1}{2}$. Caso contrário, teríamos uma contradição. \square

O lema a seguir, pela equivalência entre as definições de potenciais do tipo *Gordon*, é essencialmente o Lema B.1.1, com a diferença que fazemos uma afirmação mais clara quanto ao comportamento espectral do operador de Schrödinger associado a tais tipos de potenciais.

Lema B.1.2. Seja V_ω um potencial do tipo *Gordon*. Então, o operador H_ω definido por (1.2) tem espectro pontual vazio.

Demonstração. O ponto central da demonstração consiste em mostrar que as soluções da equação de autovalores $H_\omega\psi = E\psi$ não são quadrado-somáveis. Para tanto, é suficiente mostrar nenhuma solução tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Pela Proposição B.1.1 e pelo Lema B.1.1, o resultado se segue. \square

B.2 Alguns fatos gerais sobre o espectro de um operador dinamicamente definido minimal

Dizemos que o sistema dinâmico (X, f) , com X um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo (naturalmente, pode-se exigir menos do sistema, mas para os nossos propósitos, tais exigências são necessárias), é minimal se para todo $\omega \in X$, a órbita de ω por f , $\mathcal{O}(\omega) = \{f^n(\omega) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, é densa em X .

Sendo assim, para cada par $\omega, \omega' \in X$, podemos aproximar ω por uma sequência formada por elementos da órbita de ω' (graças à densidade da órbita de ω' em X); a saber, existe uma sequência $(n_k)_k$, $n_k \in \mathbb{N}$, tal que $\omega = \lim_k f^{n_k}(\omega')$.

Pela continuidade de f , $H_{f^{n_k}(\omega')}$ converge fortemente para H_ω (já que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $V(f^{n+n_k}(\omega')) \rightarrow V(f^n(\omega))$, por continuidade de $V \circ f^n$). Agora, como para cada $j \in \mathbb{Z}$ e para cada $\eta \in X$, $\sigma(H_{f^n(\eta)}) = \sigma(H_\eta)$ (já que os operadores são unitariamente equivalentes), segue-se do Corolário 10.2.2 em [7] que

$$\sigma(H_\omega) \subset \overline{\bigcup \sigma(H_{f^{n_k}(\omega')})} = \sigma(H_{\omega'}).$$

Repetindo o argumento apenas trocando os papéis de ω e ω' , obtemos a outra inclusão e o seguinte resultado.

Teorema B.2.1. Sejam X um espaço métrico compacto, f um homomorfismo e $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de amostragem. Se (X, f) é mínimo, então existe um conjunto tal que para todo $\omega \in X$, $\sigma(H_{V_\omega}) = \Sigma$.

O teorema anterior discute a constância do espectro quando o sistema possui minimalidade, ou seja, o espectro do operador de Schrödinger independe de $\omega \in X$. Um resultado semelhante, porém restrito ao espectro absolutamente contínuo, foi obtido por Last e Simon em [25]; apresentamos os detalhes a seguir.

Lema B.2.1. Seja $H : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ um operador de Schrödinger discreto e limitado. Então,

$$\int d\mu(E) \left(\frac{1}{L} \sum_{m=n+1}^{n+L} \|A_E(m, n)\|^2 \right)^{1/2} \leq 4, \quad (\text{B.8})$$

em que $d\mu$ é a parte absolutamente contínua da medida espectral de H e $A(m, n)$ é a matriz de transferência que leva uma solução de (1.3) do sítio m ao sítio n .

A demonstração desse resultado se encontra em [25].

Definição B.2.1. Sejam V_ω, W funções contínuas em $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$. Dizemos que W é um limite à direita de V_ω se existe $n_j \rightarrow \infty$ tal que $V(n + n_j) \rightarrow W(n)$ quando $j \rightarrow \infty$ para cada $n > 0$ fixo.

Proposição B.2.1. Seja H_ω o operador em (1.2) em $\ell^2(\mathbb{N})$, com condição de fronteira $u(0) = 0$. Então, o espectro absolutamente contínuo é o conjunto

$$\left\{ E; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \|A_W(m, 0)\|^2 < \infty \right\}$$

Lema B.2.2. Se W é um limite à direita de V e H, \tilde{H} são os operadores de Schrödinger definidos em $\ell^2(\mathbb{N})$ e associados a W, V , respectivamente, então $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(\tilde{H})$.

Demonstração. Considere n_j tal que $V(n + n_j) \rightarrow W(n)$ quando $j \rightarrow \infty$, para cada n . Sejam

A_V e A_W as respectivas matrizes de transferência. Pelo Lema B.2.1,

$$\int d\mu_V(E) \left(\frac{1}{L} \sum_{m=n_j+1}^{n_j+L} \|A_V(m, n_j)\|^2 \right)^{1/2} \leq 4. \quad (\text{B.9})$$

Como $V(n_j + n) \rightarrow W(n)$ quando $j \rightarrow \infty$, temos que $A_V(n_j + m, n_j) \rightarrow A_W(m, 0)$. Então, B.9 implica

$$\int d\mu_V(E) \left(\frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \|A_W(m, 0)\|^2 \right)^{1/2} \leq 4; \quad (\text{B.10})$$

segue-se pelo Lema de Fatou que para quase todo E com respeito a μ_V ,

$$\liminf \left(\frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \|A_W(m, 0)\|^2 \right) < \infty. \quad (\text{B.11})$$

Logo, pela Proposição B.2.1 $E \in \sigma_{ac}(\tilde{H})$ em quase toda parte com respeito a μ_V , ou seja, $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(\tilde{H})$. \square

Definição B.2.2. Um ponto $\omega_0 \in X$ é chamado de prototípico à direita se $\{f^n(\omega_0) \mid n \geq 0\}$ é denso em X , e prototípico à esquerda se $\{f^n(\omega_0) \mid n \leq 0\}$ é denso em X . Dizemos que ω_0 é prototípico se é prototípico à direita e à esquerda.

Note que todos os $\omega_0 \in X$ são prototípicos caso (X, f) seja minimal.

Proposição B.2.2. O suporte essencial do espectro absolutamente contínuo de H_ω é o mesmo para todos os pontos prototípicos. Além disso, para qualquer ω_0 prototípico e qualquer $\omega \in X$, temos $\sigma_{ac}(H_{V_{\omega_0}}) \subset \sigma_{ac}(H_{V_\omega})$.

Demonstração. Sejam H_ω^\pm as restrições de H_ω a $\ell^2(\mathbb{Z}^\pm)$, sujeitas à condição de fronteira $u(0) = 0$. Last e Simon utilizam-se, em [25], do fato de que restringir o operador H_ω aos subespaços absolutamente contínuos é unitariamente equivalente a restringir H_ω^\pm a esses subespaços (Teorema de Kato-Rosenbljum). Sendo assim, seja $n_j \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_j}(\omega_0) \rightarrow \omega$. Então, como $V(n) = V(f^{n+m}\omega_0)$, temos que $V(\cdot + n_j) \rightarrow V(\cdot)$; pelo Lema B.2.2, o resultado se segue. \square

Teorema B.2.2. Seja X um espaço métrico compacto, f um homeomorfismo e $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de amostragem. Se (X, f) é mínimo, então existe um conjunto $\Sigma_{ac} \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $\omega \in X$, $\sigma_{ac}(H_{V_\omega}) = \Sigma_{ac}$.

Demonstração. O resultado se segue da Proposição B.2.2. \square

B.3 Hiperbolicidade do cociclo

Nessa seção, apresentaremos resultados e definições acerca do comportamento dos cociclos $SL(2, \mathbb{R})$. Todas as definições e teoremas aqui apresentados estão disponíveis em [3]. Gostaríamos de destacar que não apresentaremos as demonstrações dos teoremas, uma vez que este não é o foco do trabalho, mas incentivamos o leitor a verificá-las na referência citada.

Considere o cociclo definido por (1.5). Dizemos que $(f, A_n^{(E, V_\omega)})$ é uniformemente hiperbólico se existirem uma decomposição $E_s \oplus E_u = \mathbb{C}^2$, $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|A_n^{(E, V_\omega)} \cdot u\| &\leq C\lambda^{-n}\|u\|, \quad u \in E_s, \\ \|A_{-n}^{(E, V_\omega)} \cdot u\| &\leq C\lambda^{-n}\|u\|, \quad u \in E_u. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Os cociclos uniformemente hiperbólicos têm expoente de Lyapunov positivo. Se $(f, A_n^{(E, V_\omega)})$ tem expoente de Lyapunov positivo, mas não é uniformemente hiperbólico, então é chamado de não-uniformemente hiperbólico (i.e, temos a decomposição para \mathbb{C}^2 mas não existe $0 < \lambda < 1$ para o qual (B.12) seja satisfeito).

Teorema B.3.1. O cociclo de Schrödinger $(f, A_n^{(E, V_\omega)})$ será uniformemente hiperbólico se, e somente se, E não pertencer ao espectro do correspondente operador de Schrödinger, isto é, $\sigma(H_{V_\omega}) = \{E \in \mathbb{R} \mid (f, A_n^{(E, V_\omega)}) \text{ é não uniformemente hiperbólico}\}$.

Apêndice C

Detalhes omitidos em demonstrações ao longo do texto

Neste Apêndice, apresentaremos demonstrações de algumas afirmações feitas nas demonstrações que necessitam serem detalhadas, mas sem prejudicar a compreensão do leitor e, por isto, reservamos este espaço.

C.1 Seção 1.1

Afirmação C.1.1. $\text{hull}^k(x)$ é um subgrupo compacto (ver Definição A.2.1) de $\text{hull}(x)$ com índice no máximo igual a k .

Demonstração. Mostremos que as classes laterais $S^{n_1}(\text{hull}^k(x))$ e $S^{n_2}(\text{hull}^k(x))$ são iguais sempre que $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$, e portanto, temos apenas as classes $S^n(\text{hull}^k(x))$ tais que $n \equiv i \pmod{k}$, com $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Com efeito, suponhamos que $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$, isto é, que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n_1 = n_2 + kq$. Então,

$$\begin{aligned} v \in S^{n_1}(\text{hull}^k(x)) &\iff u = S^{n_1} \left(\lim_{j_n \rightarrow \infty} S^{kj_n}(x) \right) \iff u = \lim_{j_n \rightarrow \infty} S^{n_1+kj_n}(x) \\ &\iff u = \lim_{j_n \rightarrow \infty} S^{n_2+(kq+kj_n)}(x) \iff u = S^{n_2} \left(\lim_{j_n \rightarrow \infty} S^{k(q+j_n)}(x) \right) \\ &\iff u \in S^{n_2}(\text{hull}^k(x)). \end{aligned}$$

□

Afirmação C.1.2. $\text{orb}(x)$ age transitivamente (ver Definição A.1.2) sobre $\text{hull}(x)$.

Demonstração. Defina $\phi : orb(x) \times hull(x) \rightarrow hull(x)$ pela lei

$$\phi \left(S^n(x), \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x) \right) = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{n+k_n}(x),$$

em que $S^{n+k_n}(x)$ é a representante de alguma subsequência convergente de $S^{n+k_n}(x)$, a qual existe uma vez que $hull(x)$ é compacto. E mais, a definição de ϕ independe da escolha da subsequência, pois $\lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x)$ existe e é único. Mostremos, agora, que ϕ é uma ação transitiva (ver Definição A.1.1, A.1.2):

i) $\phi(S^0(x), \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x)) = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{0+k_n}(x) = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x);$

ii)

$$\begin{aligned} \phi \left(S^m(x), \phi(S^n(x), \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x)) \right) &= \phi(S^m, \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{n+k_n}(x)) \\ &= \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{(m+n)+k_n}(x) \\ &= \phi(S^{m+n}(x), \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x)) \end{aligned}$$

Reunindo os itens anteriores, demonstramos que ϕ é uma ação. Mostraremos agora que esta é uma ação transitiva, i.e., dado $S^j \in hull, S^j \in \{\lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{n+k_n}; S^n \in orb(x)\}$. Com efeito, vamos considerar $S^{k_n} = S^{j-m}$, para $j > m$ algum $S^m \in hull$. Daí,

$$\phi(S^m, \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}) = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{m+k_n} = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{m+j-m} = S^j.$$

□

C.2 Seção 1.2

Afirmção C.2.1. É suficiente mostrar que $\varphi(x)$ é *limit-periodic*.

Demonstração. Suponha que $\varphi(x)$ seja *limit-periodic*, e note que $orb(x)$ é a imagem por φ do conjunto $\{f^n; n \in \mathbb{Z}\}$, o qual é denso em X . Daí,

$$\begin{aligned} u \in \varphi(X) &\iff u = \varphi(v); v \in X \iff u = \varphi(\lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n}(x)) \\ &\iff u = \lim_{k_n \rightarrow \infty} \varphi(S^{k_n}(x)) \iff u = \lim_{k_n \rightarrow \infty} S^{k_n+n}(x) \\ &\iff u \in \overline{orb(x)} \iff u \in hull(x). \end{aligned}$$

□

C.3 Seção 1.3

Lema C.3.1. A função $\Phi : C^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, dada pela lei $\Phi(V_\omega) = H_{f, V_\omega}$, é 1-Lipschitz.

Demonstração. De fato, dados os potenciais V_1 e V_2 , segue-se de 1.4 que para todos $\omega \in X$, $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |((H_{f, V_1, \omega} - H_{f, V_2, \omega})u)_n| &= |[V_1(f^n(\omega)) - V_2(f^n(\omega))]u_n| \\ &\leq \|V_1 - V_2\|_\infty |u_n|, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

donde se segue que para todo $\omega \in X$, $\|H_{f, V_1, \omega} - H_{f, V_2, \omega}\| \leq \|V_1 - V_2\|_\infty$. \square

Observação C.3.1. Note que $\sigma(H_{V_\omega}) \subset [-\|H_{V_\omega}\|, \|H_{V_\omega}\|]$, analogamente para H_W . Sendo assim, como $|\|H_{V_\omega}\| - \|H_W\|| \leq \|H_{V_\omega} - H_W\|$, bem como a diferença entre $-\|H_{V_\omega}\|$ e $\|H_W\|$. Então, $d(\sigma(H_{V_\omega}), \sigma(H_W)) \leq \|H_{V_\omega} - H_W\|$.

C.4 Seção 2.1

Observação C.4.1. Denotemos por $A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega}$ a matriz de transferência associada ao potencial λV_ω , bem como $A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega^{K, j}}$ a matriz associada ao potencial $\lambda V_\omega^{K, j}$. As matrizes S_i^p , com $p = \{V_\omega, V_\omega^{K, j}\}$ e $i \in \mathbb{N}$, são as respectivas matrizes de transferência entre no sítio i . Feitas estas considerações de notação, podemos enumerar alguns fatos importantes para a nossa demonstração da Afirmação 2.1.1

- i) $S_i^{V_\omega^{K, j}} = S_i^{V_\omega}$, exceto para $i = N_K - 1$, pela definição de $V_\omega^{K, j}$;
- ii) $A_{n_K-1}^{E_j, \lambda V_\omega} = A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega^{K, j}}$ (consequência direta do item anterior);
- iii)

$$A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega} = S_{n_K-1}^{V_\omega} A_{n_K-1}^{V_\omega} \implies A_{n_K-1}^V = (S_{n_K-1}^{V_\omega})^{-1} A_{n_K}^{E_j, \lambda V_\omega}. \quad (\text{C.2})$$

Afirmação C.4.1. Suponha, por contradição, que existe E tal que para todo $0 \leq l \leq N_2(K)$, $E - \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)} \in \sigma(H_{\lambda V_\omega^{K, j}})$. Sendo assim, faça $E_0 = E$, $E_1 = E - \lambda \frac{4\pi M}{n_K N_2(K)}, \dots, E_{N_2(K)} = \frac{4\pi M N_2(K)}{n_K N_2(K)}$.

Note que para todo $1 \leq l \leq N_2(K)$,

$$|E_l - E_{l-1}| = \left| E - E + \lambda \frac{4\pi M(l - l - 1)}{n_K N_2(K)} \right| = \left| \lambda \frac{4\pi M}{n_K N_2(K)} \right| < \delta, \quad (\text{C.3})$$

uma vez que $N_2(K) > |\lambda| \frac{4\pi M}{\delta n_K}$. Além disso, se tomarmos a distância entre E_0 e $E_{N_2(K)}$, temos

$$|E_0 - E_{N_2(K)}| = \left| E - E + \lambda \frac{4\pi M}{n_K} \right| = |\lambda| \frac{4\pi M}{n_K} \geq \frac{4\pi}{n_K} \quad (\text{C.4})$$

Concluimos de (C.4) que uma banda espectral não pode conter todos os E_l s, isto é, o espectro contém no mínimo duas bandas espectrais. Assim, existe um l tal que E_l e E_{l-1} pertencem a bandas espectrais distintas. No entanto, isso é impossível, já que por (C.3) a distância entre E_l e E_{l-1} é menor do que o comprimento da menor lacuna espectral.

Tal contradição nos permite concluir a afirmação.

Observação C.4.2. Note que, pelo início da demonstração do Lema 2.1.2, é necessário que $\left| E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)} \right| < K$ para que a primeira parcela do membro direito de (2.3) seja menor que K^{-1} . Como

$$\left| E - \lambda \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)} \right| \leq |E| + |\lambda| \frac{4\pi M l}{n_K N_2(K)} \leq |E| + 4\pi M^2,$$

basta tomar $N_1(K)$ suficientemente grande de modo que $|E| + 4\pi M^2 \leq K$.

Definição C.4.1. Seja $A_{n_0+p}^{(E, V_\omega)}$, com p o período do potencial V e $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $A = A_{n_0+p}^{(E, V_\omega)}$ é uma matriz de monodromia.

Observação C.4.3. Suponha que $n_k = qn_K$, $q \in \mathbb{N}$ e seja A a matriz de monodromia definida anteriormente (Definição C.4.1). Então,

$$A^q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_j}{N_1(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_j}{N_1(K)q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_j n_k}{N_1(K)n_K} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afirmção C.4.2. $L(E, \lambda V) \geq 1$ se $|E| \geq \|\lambda V\| + 4$.

Demonstração. De fato, para $|E| \geq \|\lambda V_\omega\| + 4$, temos que $|\lambda| \leq \frac{|E|-4}{\|\lambda V_\omega\|}$. Tomando $M = \|\lambda V_\omega\| + 4$, pelo Lema 2.1.1, temos que $L(E, V_\omega) \geq 1$. \square

A partir de agora, apresentaremos as demonstrações de algumas afirmações pontuais feitas na demonstração do Lema 2.1.2.

Afirmção C.4.3. Seja $V^i \in W$ tal que $L(E, \lambda V^i) \geq \delta n_k m$. Pelo algoritmo de Euclides, existem inteiros $q \geq 0$ e $0 \leq s \leq n_k - 1$ tais que $n = qn_k + s$. Daí,

$$\begin{aligned} L(E, \lambda V_\omega^i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n^{(E, \lambda V_\omega^i)}\| = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{qn_k + s} \left(\ln \|A_s^{(E, \lambda V_\omega^i)}\| + \ln \|(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)})^q\| \right) \\ &= \frac{1}{n_k} \ln \|(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)})\|. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

com $A_s^{(E, \lambda V_\omega^i)}$ como definida no Lema 2.1.2. Consequentemente, $\ln \|(A_{n_K}^{(E, \lambda V_\omega^i)})\| \geq \delta m n_k^2$, e portanto $\|(A_{n_K}^{(E, \lambda V_\omega^i)})\| \geq e^{\delta m n_k^2}$.

Um ponto relevante é como a afirmação anterior afeta a matriz $A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)}(j_{i-1}n_k)$. Antes de analisarmos isso, vamos entender qual é a definição desta matriz de acordo com a construção feita na demonstração do Lema 2.1.2. Reforçamos a importância do leitor voltar ao primeiro parágrafo da demonstração do referido lema para uma melhor compreensão do que se segue.

Note que $l = j_{i-1}$ pertence a um subintervalo de $I_s = [(j_{i-1}n_k, (j_{i-1} + 1)n_k]$. Como $s \neq s_i - 1$, por construção, $w^t = w^i$. Sendo assim, a matriz $A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^t)}(j_{i-1}n_k)$ é, na verdade, igual a $A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(j_{i-1}n_k)$. Assim, a próxima afirmação é verdadeira.

Afirmação C.4.4.

$$A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(j_{i-1}n_k) = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)} \right)^{(r-1)}.$$

Não apresentaremos uma demonstração deste fato, por ser exaustiva, mas apresentaremos um exemplo para aflorar a intuição de que a afirmação é, de fato, verdadeira.

Exemplo C.4.1. Consideremos $n_k = 10$, $j_{i-1} = 1$, $r = 4$. Daí,

$$A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(j_{i-1}n_k) = A_{30}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(10) = S_{39}S_{38}S_{37} \cdots S_{13}S_{12}S_{11}S_{10}$$

Usando a periodicidade e o fato de que $A_q^{(E, \lambda V_\omega^i)} = A_s^{(E, \lambda V_\omega^i)}$ para $q \equiv s \pmod{n_k}$, temos que

$$A_{30}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(10) = M \cdot M \cdot M = A_{30}^{(E, \lambda V_\omega^i)} = A_{10}^3 = A_{n_k}^{(r-1)}$$

onde $M = S_9S_8S_7S_6S_5S_4S_3S_2S_1S_0$.

Então,

Lema C.4.1.

$$\|A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(j_{i-1}n_k)\| \geq e^{\delta m n_k^2 (r-1)}.$$

Demonstração. Reunindo as informações das Afirmações C.4.3 e C.4.4, obtemos

$$\|A_{(r-1)n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)}(j_{i-1}n_k)\| = \left\| \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)} \right)^{(r-1)} \right\| = \left(A_{n_k}^{(E, \lambda V_\omega^i)} \right)^{\|(r-1)\|} \geq \delta m n_k^2 (r-1).$$

□

Observação C.4.4. Listaremos algumas observações sobre o comportamento de z , z' e z'' , e suas relações com os respectivos ângulos definidos na Afirmação 2.1.6.

i)

$$\begin{aligned}\langle u_j, z'' \rangle &= \|z\| (\cos \theta \|B^{(j)}\| \langle u_j, s_j \rangle + \sin \theta \|u_j\|^2) \\ &= \|z\| \sin \theta \|u_j\|.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{|\langle u_j, z'' \rangle|}{\|u_j\|} = \|z\| \sin \theta \|u_j\| = \|z\| \|B^{(j)}\| \sin \theta.$$

ii)

$$\cos \theta' = \frac{|\langle u_j, z'' \rangle|}{\|z''\| \|u_j\|} = \frac{\|z\|}{\|z''\|} \|B^{(j)}\| \sin \theta.$$

iii)

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta'} = \frac{\|z''\|}{\|z\|} \|B^{(j)}\|^{-1}.$$

iv)

$$\sin \theta' = \frac{\langle z'', B s_j \rangle}{\|z''\| \|B^{(j)}\|^{-1}}.$$

v)

$$\frac{\sin \theta'}{\cos \theta} = \frac{\|z\|}{\|z''\|} \|B^{(j)}\|^{-1}.$$

Reunindo iii) e v) temos que $\tan \theta \tan \theta' = \|B^{(j)}\|^{-2}$.

Lema C.4.2. Considerando W_K como sendo o conjunto de todos os V_ω^t , o diâmetro de W_K é no máximo r^{-10} .

Demonstração. Denotemos por D o diâmetro. Por definição, $D = \sup\{\|V_\omega(l) + r^{-20}t_i - V_\omega(l) - r^{-20}t_j\|_\infty \mid i \neq j \text{ e } t_i, t_j \in \{0, \dots, r-1\}\}$. Isto é, $D = \sup\{|r^{-20}t_i - r^{-20}t_j| \mid i \neq j \text{ e } t_i, t_j \in \{0, \dots, r-1\}\}$. Perceba que este supremo ocorre quando a diferença $t_i - t_j$ é mínima, o que ocorre quando $t_j = 0$ e $t_i = 1$ (e vice-versa). Neste caso, $|r^{-20}t_i - r^{-20}t_j| = r^{-20} \geq |r^{-20}t_i - r^{-20}t_j|, \forall t_i, t_j$. Para r suficientemente grande, $r^{-20} \leq r^{-10}$, e portanto, $D \leq r^{-10}$. \square

C.5 Seção 2.3

Lema C.5.1. Para toda sequência bilateral u de suporte limitado, vale a desigualdade

$$\langle u, P_A u \rangle \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u, P_A^{V_k} u \rangle.$$

Demonstração. De fato, pela demonstração do Lema 1.3.6, $g_{V_k, u}$ converge pontualmente para $g_{\tilde{V}, u}$. Sendo assim, pelo Lema de Fatou,

$$\int \liminf g_{V_k, u} dE \leq \liminf \int g_{V_k, u} dE \leq \limsup \int g_{V_k, u} dE.$$

Como, por hipótese, $\liminf g_{V_k, u} = \lim g_{V_k, u} = \limsup g_{V_k, u} = g_{\tilde{V}, u}$, segue-se que

$$\int g_{\tilde{V}, u} dE \leq \limsup \int g_{V_k, u} dE.$$

Logo,

$$\langle u, P_A^{\tilde{V}} u \rangle = \int_A g_{\tilde{V}, u} dE \leq \limsup \int_A g_{V_k, u} dE = \limsup \langle u, P_A^{V_k} u \rangle.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ávila, *On the spectrum and Lyapunov exponent of limit-periodic Schrödinger operators*. Communications in Mathematical Physics, 288(3), 907-918, 2009.
- [2] A. Ávila; D. Damanik, *Generic singular spectrum for ergodic Schrödinger operators*, Duke Mathematical Journal, 130 (2), 393-400, 2005.
- [3] A. P. C. Huamán, *Propriedades espectrais de operadores de Schrödinger com potenciais ergódicos e almost-periodic*, Dissertação (Mestrado em matemática) Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.
- [4] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 156, Nova York, 1995.
- [5] B. Khoruzhenko, *LTCC course on Potential Theory*, Notas de aula, verão de 2011, Londres.
- [6] B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operators: a review*, Advances in applied mathematics, 3, 463-490, 1982.
- [7] C. R. De Oliveira, *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Vol. 54, Springer Science & Business Media, Boston, 2008.
- [8] D. J. S. Robinson, *A course in theory groups*, Second edition, Graduate texts in mathematics, New York, Springer, 1996.
- [9] D. Damanik, *Schrödinger operators with dynamically defined potentials: a survey*, Preprint, submetido em 14 de outubro de 2015. <https://arxiv.org/abs/1410.2445v2>
- [10] D. Damanik, *Gordon-type arguments in the spectral theory of one-dimensional quasicrystals*, Preprint, submetido em 6 de dezembro de 1999. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math-ph/9912005.pdf>
- [11] D. Damanik; J. Fillman, *Spectral properties of limit-periodic operators* Preprint, submetido em 15 de fevereiro de 2018. <https://arxiv.org/pdf/1802.05794>.

- [12] D. Damanik; Z. Gan, *Spectral properties of Limit-Periodic Schrödinger operators*, Communications on Pure & Applied Analysis, 10, 859-871, 2011.
- [13] F. F. Silva, *Espaçamento de autovalores e limites superiores para a dinâmica associada a operadores de Schrödinger discretos unidimensionais*, Dissertação (Mestrado em matemática) Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.
- [14] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, American Mathematical Society, 2000.
- [15] H. Kunz; B. Souillard, *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires*, Communications in Mathematical Physics, 78, 1980/81, 201-246.
- [16] J. Avron; B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operators. I limit-periodic potentials*, Communications in Mathematical Physics, 82 (1), 101-120, 1981.
- [17] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Springer, 2, Nova York, 1993.
- [18] J. Rueb, *Continuity results and estimates for the Lyapunov exponent of Brownian motion in stationary potential*, Brazilian Journal of Probability and Statistics, 30 (3), 435-466, 2016.
- [19] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [20] L. A. Pastur, *Spectral properties of disordered Systems in the one-body approximation*, Communications in Mathematical Physics, 75, 179-196, 1980.
- [21] O Globo; *Cientista israelense que descobriu quase-cristais ganha Nobel de química*, O globo, 2011. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/saude/ciencia/cientista-israelense-que-descobriu-quase-cristais-ganha-nobel-de-quimica-2744120>
- [22] P. Duarte; S. Klein, *Continuity of the Lyapunov exponents of linear cocycles*, IMPA, 31^o Colóquio brasileiro de matemática, Rio de Janeiro, 2017.
- [23] T. Tao, *Analysis II*, Springer, Los Angeles, 2016.
- [24] T. A. Driscoll; N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel mapping*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math, 8, Cambridge Univer. Press, Cambridge, 2002.
- [25] Y. Last; B. Simon, *Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators*, Inv. Math, 135, 329-367, 1999.