UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Faculdade de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social

ROSELENE ALVES AMÂNCIO

CONHECIMENTOS PARA DOCÊNCIA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: o Estudo de Aula no estágio supervisionado

-

BELO HORIZONTE

2023

ROSELENE ALVES AMÂNCIO

CONHECIMENTOS PARA DOCÊNCIA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: o Estudo de Aula no estágio supervisionado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Educação.

Área de concentração: Educação

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Orientadora: Professora Dra. Samira Zaidan

BELO HORIZONTE
2023

Ficha catalográfica

A484c T

Amâncio, Roselene Alves, 1970-
Conhecimentos para docência de futuros professores de Matemática [manuscrito] : o estudo de aula no estágio supervisionado / Roselene Alves Amâncio. -- Belo Horizonte, 2023.
229f. : enc, il., color.

Tese -- (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientadora: Samira Zaidan.
Bibliografia: f. 196-204.
Anexos: f. 227-229.
Apêndices: f. 205-226.

1. Educação -- Teses. 2. Professores de matemática -- Formação -- Estágios supervisionados -- Teses. 3. Professores de matemática -- Prática de ensino -- Teses. 4. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 5. Matemática -- Licenciatura -- Teses. 6. Educação matemática -- Teses.
I. Título. II. Zaidan, Samira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 370.71

Catalogação da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)
Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO: CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL

ATA DA DEFESA DE TESE DA ALUNA

ROSELENE ALVES AMANCIO

Realizou-se, no dia 19 de dezembro de 2023, às 14:00 horas, em plataforma virtual, a 944ª defesa de tese, intitulada *CONHECIMENTOS PARA A DOCÊNCIA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: o Estudo de Aula no estágio supervisionado*, apresentada por ROSELENE ALVES AMANCIO, número de registro 2020651720, graduada no curso de MATEMÁTICA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em EDUCAÇÃO - CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Samira Zaidan - Orientadora (UFMG), Prof(a). Regina da Silva Pina Neves (UnB), Prof(a). Alana Nunes Pereira de Oliveira (UFES), Prof(a). Nilma Soares da Silva (UFMG), Prof(a). Filipe Santos Fernandes (UFMG).

A comissão considerou a tese: Aprovada, destacando o pioneirismo e a relevância da pesquisa para o campo da formação de professoras e de professores de Matemática, principalmente para os estágios supervisionados, e para o avanço das discussões sobre o Estudo de Aula em Educação Matemática.

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.

Belo Horizonte, 19 de dezembro de 2023.

Prof(a). Samira Zaidan (Doutora)

Prof(a). Regina da Silva Pina Neves (Doutora)

Prof(a). Alana Nunes Pereira de Oliveira (Doutora)

Prof(a). Nilma Soares da Silva (Doutora)

Prof(a). Filipe Santos Fernandes (Doutor)

Documento assinado eletronicamente por **Filipe Santos Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 19/12/2023, às 17:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Alana Nunes Pereira de Oliveira, Usuária Externa**, em 19/12/2023, às 21:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Nilma Soares da Silva, Professora do Magistério Superior**, em 20/12/2023, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Regina da Silva Pina Neves, Usuária Externa**, em 20/12/2023, às 21:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Samira Zaidan, Usuária Externa**, em 22/01/2024, às 14:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2917104** e o código CRC **C1D3ABFF**.

CONHECIMENTOS PARA DOCÊNCIA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: o Estudo de Aula no estágio supervisionado, de autoria de **Roselene Alves Amâncio**, analisada pela banca examinadora, constituída pelos seguintes professores:

Professora Dra. Samira Zaidan – Orientadora
Universidade Federal de Minas Gerais

Professora Dra. Regina da Silva Pina Neves
Universidade de Brasília

Professora Dra. Alana Nunes Pereira de Oliveira
Universidade Federal do Espírito Santo-Alegre

Professora Dra. Nilma Soares da Silva
Universidade Federal de Minas Gerais

Professor Dr. Filipe Santos Fernandes
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 19 de dezembro de 2023.

Dedicatória

Ao Deus eterno, Pai de Jesus Cristo, tão presente em minha vida!

Agradecimentos

Acima de tudo, agradeço a Deus por me abençoar, graciosamente, sempre. Também sou grata a tantas pessoas que de diferentes maneiras contribuíram para a realização deste trabalho.

À minha querida orientadora Samira, por acreditar em mim, por respeitar as minhas ideias e por todo apoio, paciência e incentivo. Agradeço por ter me orientado de forma tão generosa, por estar sempre disponível em me ouvir e me aconselhar. Sou grata por sua amizade e por todo aprendizado que me proporcionou.

À Marília e ao Peterson, muito obrigada pela confiança e pela dedicação ao participarem desta pesquisa, por compartilharem suas ideias, sentimentos e anseios. Eu fui presenteada com dois estagiários maravilhosos!

Ao meu amado esposo Miguel, por todo amor, amizade, incentivo e paciência.

À minha querida filha Júlia e ao meu querido filho Henrique, por alegrarem a minha vida e serem as minhas melhores produções.

Ao meu pai Onofre e a minha mãe Arenice, pelo amor incondicional, pelas orações e por serem meus maiores mestres.

Aos meus familiares, especialmente, a minha irmã Rute, aos meus irmãos Daniel e Jessé e aos meus queridos sobrinhos, por todo amor.

À Kátia e à Marina, pela amizade que perpassa as fases de nossas vidas.

À querida amiga Dília e ao querido amigo André por sempre me ouvirem e me aconselharem com toda a paciência.

Às professoras e professores do Centro Pedagógico, em especial, a Flávia, a Hermínia, a Juliana e a Luiza que se tornaram verdadeiras amigas.

Aos meus amigos do Núcleo de Matemática do Centro Pedagógico: Ana Rafaela, Denise, Diogo, Juliana e Warley. Muito obrigada por todo carinho, incentivo e apoio.

Aos técnicos do Centro Pedagógico, em especial, a Sthefânia e ao Daniel pelo empenho em me ajudar com várias questões administrativas.

Às professoras e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMG. Agradeço, em especial, a professora Terezinha, por me apoiar de diferentes formas para que este trabalho se realizasse e ao professor Filipe, por me ensinar que podemos fazer pesquisa com toda a nossa humanidade.

Aos meus colegas da linha de Educação Matemática, em especial, ao Juliano e ao Felipe.

Às professoras Alana, Ilaine e Regina pela disposição em participar da banca do meu exame de qualificação, contribuindo com valiosos comentários e sugestões.

Ao professor Tiago que se dispôs a supervisionar os estagiários e a participar desta pesquisa.

À querida Ana Lúcia, por cuidar da minha casa com tanto carinho.

À Universidade Federal de Minas Gerais, pela concessão de licença remunerada durante dois anos do desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

Esta tese é fruto de uma pesquisa que almeja compreender os conhecimentos para a docência construídos por futuros professores de Matemática quando participam de um Estudo de Aula durante o estágio curricular supervisionado e, também, tem o propósito de identificar as percepções dos futuros professores sobre o Estudo de Aula. Realizamos uma pesquisa colaborativa, desenvolvendo o processo formativo Estudo de Aula com um estagiário e uma estagiária da Licenciatura em Matemática da UFMG, contando com participações pontuais do professor supervisor. Os estagiários participaram de trezes reuniões com a pesquisadora para o desenvolvimento do Estudo de Aula que foram gravadas em áudio, transcritas e textualizadas. Também foram realizadas entrevistas individuais ao final do estágio com o intuito de conhecer suas percepções sobre o Estudo de Aula que participaram. Optamos por organizar e analisar os dados por temas relevantes para o ensino de matemática que se mostraram mais presentes, selecionando alguns episódios ocorridos nos encontros. A nossa investigação evidencia que a participação no Estudo de aula, durante o estágio, proporcionou que os estagiários construíssem, de forma entrelaçada, conhecimentos matemáticos, curriculares e que envolvem diferentes aspectos do processo de ensino e aprendizagem da matemática (justificação, diferentes tipos de tarefas, comunicação, materiais didáticos), bem como saberes que se relacionam à dinâmica de sala de aula. Também mostra que os estagiários consideraram que o Estudo de Aula enriqueceu a experiência do estágio em vários pontos, entre os quais destacamos: os estudos de artigos voltados para a sala de aula de matemática; o trabalho coletivo e reflexivo que envolveu a preparação das aulas, com elaboração de planos de aula detalhados, a regência e análise da prática; a aprendizagens relacionadas ao ensino da matemática e a dinâmica de sala de aula.

Palavras-chave: Conhecimento da docência; Estudo de Aula; Estágio; Licenciatura; Educação Matemática.

ABSTRACT

This thesis is the result of research aimed at understanding the knowledge for teaching constructed by future Mathematics teachers when participating in a Lesson Study during supervised curricular internship. Additionally, it aims to identify the perceptions of future teachers regarding the Lesson Study. We conducted collaborative research, developing the Lesson Study with two interns from the Mathematics Teaching program, with occasional participation from the supervising teacher. The interns attended thirteen meetings with the researcher for the development of the Lesson Study, and these sessions were recorded, transcribed, and textualized. Individual interviews were also conducted at the end of the internship to understand their perceptions of the Lesson Study in which they participated. We chose to organize and analyze the data by relevant themes for mathematics teaching that proved to be more prominent, selecting some episodes that occurred during the meetings. Our investigation highlights that participation in the Lesson Study during the internship allowed the interns to construct interconnected mathematical and curricular knowledge, involving different aspects of the mathematics teaching and learning process (justification, different types of tasks, communication, instructional materials), as well as knowledge related to classroom dynamics. It also shows that the interns considered that Lesson Study enriched the internship experience in several aspects, among which we highlight: studying articles focused on the mathematics classroom; the collective and reflective work that involved preparing classes, preparing detailed lesson plans, conducting and analyzing classes; learning related to mathematics teaching and classroom dynamics.

Keywords: Teaching Knowledge; Lesson Study; Internship; Teacher Education; Mathematics Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CP – Centro Pedagógico

ICEx – Instituto de Ciências Exatas

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática e

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UniBH – Centro Universitário de Belo Horizonte.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta tese é fruto de uma pesquisa[1] que tem como objetivos: compreender os conhecimentos para a docência construídos por futuros professores de Matemática quando participam de um Estudo de Aula[2] durante o estágio curricular supervisionado e identificar as percepções dos futuros professores sobre o Estudo de Aula.

O texto é escrito em primeira pessoa do singular quando diz respeito às vivências e percepções da autora. Nas demais partes do texto, por se referir às vozes da autora e da orientadora deste trabalho, a narrativa ocorre na primeira pessoa do plural.

Nesta introdução, começo me apresentando e contando como e porque resolvi realizar uma pesquisa colaborativa, desenvolvendo o Estudo de Aula com estagiários. Além de explicitar as questões que mobilizaram este estudo, explico como os dados foram organizados e analisados. Ao final, apresento como os capítulos da tese estão organizados.

Sou professora de matemática do Centro Pedagógico, escola de ensino fundamental da Universidade Federal de Minas Gerias (UFMG) e, desde 2014, tenho atuado na supervisão de estágios curriculares de estudantes da Licenciatura em Matemática; também já atuei como orientadora de monitores em projetos de ensino e extensão relacionados ao ensino de matemática. Por meio dessas experiências, pude constatar que, geralmente, os licenciandos precisavam desenvolver a capacidade de selecionar ou elaborar tarefas, de dar explicações mediante questionamentos dos estudantes, de fornecer exemplos ou de elaborar perguntas para favorecer a aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental. Também observei que costumavam ter conhecimento dos conceitos e procedimentos envolvidos nas tarefas propostas, porém esses conhecimentos nem sempre eram suficientes para favorecer o processo de ensino e aprendizagem da matemática e, além disso, muitas vezes, usavam termos matemáticos ou procedimentos que não eram adequados ao nível de escolaridade dos estudantes, demonstrando que também precisam desenvolver conhecimentos curriculares.

Por outro lado, também constatava que, ao longo do estágio, eles começavam a entender como se dava o processo de ensino e aprendizagem e a desenvolver estratégias mais adequadas para auxiliar os estudantes. No meu entendimento, essas aprendizagens eram propiciadas pela observação do modo como o ensino era conduzido, pela observação das

---

[1] Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) com o parecer número 5.341.238.
[2] O termo japonês que designa esse processo formativo é "Jugyou Kenkyuu", em língua inglesa é denominado "Lesson Study" e, em língua portuguesa, há traduções para "Estudo de Aula" ou "Pesquisa de Aula". Optamos por utilizar, neste texto, o nome "Estudo de Aula".

estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolver as tarefas, pelas conversas que realizávamos, semanalmente, sobre o que eles estavam vivenciando, percebendo e questionando com o estágio, por estudos de alguns textos que abordavam questões que suscitavam com o acompanhamento das aulas que eu lecionava, além da participação nas aulas que tinham com a professora da Faculdade de Educação responsável pela disciplina de Prática Pedagógica. Em especial, notei que o processo de planejar as aulas, envolvendo estudos e discussões sobre as tarefas que seriam propostas, e a maneira de conduzir as aulas se mostraram frutíferas para potencializar várias reflexões e aprendizados.

Fui aprendendo, também, no processo de supervisão. Construí novos conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática ao preparar as aulas com os estagiários e passei a tomar mais consciência de algumas posturas que eu tinha em sala de aula com os questionamentos feitos por eles. As tarefas propostas nas aulas que eles lecionavam passaram a fazer parte do meu acervo e, muitas vezes, foram propostas em anos posteriores.

Especificamente em relação à supervisão, fui constatando que era melhor receber dois ou três estagiários do que apenas um, em cada semestre, e propor o planejamento conjunto das aulas que eles lecionavam. Além disso, a cada ano, fui percebendo a importância de se iniciar o planejamento com mais tempo para que os estagiários pudessem refletir sobre vários aspectos que envolvem uma aula de matemática: o objetivo de aprendizagem dos estudantes, formas de abordar o conteúdo, as tarefas que seriam propostas, os recursos didáticos que poderiam ser utilizados, entre outros pontos.

Algumas de minhas percepções, como supervisora de estágio, vão ao encontro de várias pesquisas que abordam a formação inicial de professores de matemática. Autores como Moreira e David (2005), Fiorentini e Oliveira (2013), Moreira e Ferreira (2013) têm defendido que um dos grandes problemas da formação inicial de professores de matemática é a pouca conexão que existe entre os cursos de licenciatura e a realidade das escolas de educação básica. O Boletim produzido pela parceria entre a Sociedade Brasileira de Educação Matemática e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBEM/SBM, 2013) destaca a necessidade de elaboração de estratégias para se repensar a formação de professores de matemática na licenciatura, entre elas a rearticulação de todo o curso, todas as disciplinas e atividades, de modo a formar o profissional que irá atuar na educação básica. O mesmo documento enfatiza a necessidade de se promover, nas licenciaturas, conhecimentos matemáticos que considerem “as características e os objetivos da prática para a qual se destina o profissional a ser formado” (SBEM/SBM, 2013, p. 5).

Quando resolvi participar da seleção para o doutorado, já havia pensado que gostaria de realizar uma pesquisa com futuros professores de matemática e, na época, cogitava realizar uma formação que propiciasse, aos participantes, construir conhecimentos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do ensino fundamental, desse modo, já ambicionava realizar uma pesquisa colaborativa. Então, no primeiro semestre de 2019, uma professora do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) se dispôs a me emprestar alguns livros sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e, quando nos encontramos, em meio a vários assuntos, ela comentou sobre o Estudo de Aula e me enviou alguns artigos que abordavam esse processo formativo.

Logo que li esses textos, interessei-me em aprofundar conhecimentos sobre o Estudo de Aula, principalmente por ser realizado de modo coletivo, reflexivo e voltado para a prática de sala de aula, articulando teoria e prática. Tal proposta parecia vir ao encontro das práticas que eu mesma já realizava, contudo continha elementos que eu ainda não havia considerado. Assim, comecei a pensar que o Estudo de Aula poderia favorecer a formação de futuros professores de matemática, pois, conforme Ponte *et al*. (2016) afirmam:

> A participação num estudo de aula constitui uma oportunidade para os professores aprenderem questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e às dificuldades dos alunos e à própria dinâmica da sala de aula. Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, levando os participantes a criar um relacionamento próximo, partilhar ideias e apoiar-se mutuamente. Desta forma, constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover a autoconfiança, fundamental para o seu desenvolvimento profissional (Ponte *et al*., 2016, p. 870).

Então me dediquei a estudar outros textos sobre o Estudo de Aula e percebi que, ao realizar uma pequena investigação sobre uma aula, os estagiários poderiam ter oportunidade de construir conhecimentos que são próprios da docência por meio de um trabalho coletivo e reflexivo. As ações realizadas no Estudo de Aula contemplam: estudos sobre o tema da aula e definição do objetivo de aprendizagem; planejamento detalhado com indicações de possíveis estratégias, equívocos e perguntas dos estudantes e indicações das respectivas ações do docente/estagiário; desenvolvimento de regência com observação e análise da aula. Essas ações são desenvolvidas com foco na aprendizagem de estudantes de turmas reais, possibilitando articular teoria e prática. Esses aspectos que me chamaram a atenção também são valorizados por autores que pesquisam o estágio curricular supervisionado nas licenciaturas. Pimenta e Lima (2006) salientam o valor do estágio ao possibilitar conexões entre teoria e prática, contudo alertam que, para que isso ocorra, é essencial que seja conduzido como uma investigação sobre a prática, viabilizando, simultaneamente, a compreensão e a problematização das situações vivenciadas no campo de estágio. Teixeira e Cirino (2015) enfatizam a importância de os estagiários participarem de discussões e reflexões sobre as ações que compõem o estágio, desenvolvendo um papel ativo em sua própria aprendizagem. Gueirós (2015) observa que, para o estágio se configurar de maneira reflexiva e criativa, torna-se necessário que professores da universidade e da escola, que atuam como formadores dos estagiários, tenham uma concepção de prática didática formativa, e não de repetição de modelos.

Ainda sobre o Estudo de Aula, Isoda e Ofos (2009) afirmam que esse processo formativo se originou no Japão ao final do século XIX e sendo, amplamente, usado, nesse país, com professores em serviço, de maneira institucionalizada, como forma de desenvolver conhecimentos próprios da docência. Na década de 1980, ficou conhecido nos Estados Unidos e, a partir da década de 1990, passou a ser utilizado em outros países do Ocidente. Em relação à formação inicial, Elipane (2012) explica que o estágio incorpora princípios do Estudo de Aula. Ciente disso, localizei alguns trabalhos realizados com futuros professores de matemática em outros países, como Burroughs e Luebeck (2010), Myers (2012), Young, Cavanagh e Moloney (2018) e, nessa ocasião, encontrei somente um trabalho brasileiro (Coelho, 2014). Com mais esses estudos, aumentei meu interesse em desenvolver esse processo formativo com futuros professores, principalmente por ter o propósito de que o Estudo de Aula pudesse favorecer a construção de conhecimentos próprios para a docência na educação básica. Então, elaborei o projeto que foi apresentado como parte do processo de seleção para o doutorado com essa proposta. Ao iniciar o doutorado, aperfeiçoei o projeto de pesquisa com novos estudos e com a ajuda da minha orientadora, de docentes e colegas da linha de educação matemática do programa, mantendo a proposta inicial de desenvolver o Estudo de Aula com estagiários. Nesse processo de refinamento do projeto, consegui delinear as questões de pesquisa com maior nitidez, as quais são:

- Como se caracterizam os conhecimentos para o ensino de matemática que são construídos por futuros professores de matemática quando participam de um Estudo de Aula no estágio supervisionado?
- Quais as percepções dos futuros professores acerca do Estudo de Aula no estágio?

Assim, no início de 2022, iniciei os desdobramentos metodológicos propostos, mas o momento que vivíamos era difícil, pois voltávamos do surto da pandemia covid-19, ainda com muitas consequências pelo sentimento de perda que muitos viveram e com as dificuldades próprias de um período longo de interrupção de aulas regulares. Conseguimos formar um grupo para o Estudo de Aula, em condições bem específicas, com adaptações necessárias, em que obtivemos um rico material para a realização das análises, segundo os objetivos desta tese.

Ao analisar os conhecimentos construídos pelos estagiários no Estudo de Aula que desenvolvemos, procuramos dialogar com autores da Educação Matemática que abordam os temas que elegemos. Também procuramos trazer as percepções dos estagiários sobre o processo vivenciado, por meio da análise das entrevistas que foram realizadas ao final do estágio.

Acreditamos que esta pesquisa pode colaborar para enriquecer o campo de formação de professores, por revelar que o Estudo de Aula pode contribuir significativamente para que a Licenciatura em Matemática, em especial, o estágio seja desenvolvido de forma a propiciar aprendizagens que são relevantes para o exercício da docência na educação básica.

Esta tese está assim organizada: após a **Introdução**, no **Capítulo 2**, apresentamos os referenciais teóricos que nos auxiliaram a tecer reflexões sobre os conhecimentos dos professores que são relevantes para ensinar matemática na Educação Básica; e a pensar em maneiras de realizar o estágio a fim de contribuir, de modo mais eficaz, para a formação do futuro professor de matemática em uma perspectiva de atuação na educação básica.

No **Capítulo 3**, apresentamos o Estudo de Aula, suas fases e princípios fundamentais; trazemos alguns trabalhos conduzidos em outros países em que o Estudo de Aula foi realizado na formação inicial e apresentamos a revisão de literatura elaborada acerca das pesquisas brasileiras que abordaram esse processo na formação inicial de professores de matemática.

No **Capítulo 4**, expomos a trajetória da nossa pesquisa, destacando os movimentos realizados para desenvolver o Estudo de Aula; apresentamos os participantes; descrevemos o contexto da investigação; explicamos os procedimentos metodológicos adotados; narramos o percurso trilhado na realização do Estudo de Aula e a trajetória da autora como doutoranda.

No **Capítulo 5**, destacamos os conhecimentos da docência quando apresentamos vários trechos ocorridos nas reuniões e outros dados que julgamos significativos para compreender os conhecimentos construídos pelos estagiários, procurando, em nossa análise, dialogar com pesquisas do campo da Educação Matemática que abordam os temas relacionados ao ensino de matemática que elegemos.

No **Capítulo 6**, trazemos as percepções dos estagiários sobre o processo vivenciado, considerando as entrevistas que nos concederam.

Posteriormente, no **Capítulo 7**, apresentamos as conclusões oriundas de nossa investigação.

Tecemos, no **Capítulo 8**, algumas considerações finais que abordam, mais especificamente, o significado do desenvolvimento desta pesquisa e nossas próprias percepções a respeito do processo.

Por fim, listamos as **referências** e apresentamos os **apêndices**.

2. CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA E O ESTÁGIO CURRICULAR SUPERVISIONADO

Neste capítulo, apresentamos os referenciais teóricos que nos auxiliaram a tecer reflexões sobre os conhecimentos dos professores requeridos para a docência da matemática na educação básica, com a intenção de pensar na formação inicial de professores de matemática e, principalmente, no estágio curricular supervisionado.

Antes de iniciar a apresentação das escolhas teóricas, que nos inspiraram a desenvolver o processo formativo Estudo de aula e a analisar os dados da nossa pesquisa, gostaríamos de mencionar que optamos por utilizar o termo ‘conhecimento’ sem diferenciá-lo de ‘saber’, logo, neste texto, são tratados como sinônimos.

De acordo com Almeida *et al*. (2019), a produção acadêmica relativa à natureza do conhecimento profissional docente tem sido numerosa, desde a década de 1980, em vários países. Os trabalhos de Shulman (1986, 1987) tiveram destaque nesse cenário, principalmente ao propor um tipo especial de conhecimento para a docência denominado ‘conhecimento do conteúdo para o ensino’, influenciando várias pesquisas ao redor do mundo. Na teoria de Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo para o ensino é composto por três categorias: o conhecimento do conteúdo; o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

O conhecimento do conteúdo se refere ao conhecimento do assunto a ser ensinado. O conhecimento curricular se relaciona ao conhecimento dos tópicos previstos para serem ensinados em um determinado nível escolar e aos recursos didáticos que podem ser utilizados para favorecer a sua aprendizagem, englobando uma dimensão lateral e uma horizontal. A dimensão lateral relaciona-se com o conhecimento acerca do que é ensinado em outras disciplinas do mesmo nível escolar. Já a dimensão vertical se refere ao conhecimento de conteúdos da mesma área disciplinar em anos anteriores e posteriores na escola. Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) definiu que essa categoria envolve a compreensão sobre:

> [...] as representações mais úteis de tais ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações mais poderosas – ou seja, as maneiras mais úteis de representar e formular um assunto que o torna compreensível para os outros. [...] O conhecimento pedagógico do conteúdo também inclui uma compreensão do que torna fácil ou difícil o aprendizado de tópicos específicos: as concepções e preconcepções que os alunos de diferentes idades e origens trazem consigo para o aprendizado dos tópicos e lições que são ensinados com mais frequência (Shulman, 1986, p. 9, tradução nossa).

Posteriormente, Shulman (1987) ampliou essas categorias, incluindo: conhecimento pedagógico geral; conhecimento dos alunos e de suas características; conhecimento de contextos educacionais; conhecimento de propósitos, fins e valores educacionais.

Alguns pesquisadores se basearam no modelo original de Shulman (1986) para considerar as especificidades de suas áreas, como Ball, Thames e Phelps (2008) que realizaram estudos voltados para o ensino da matemática e conceberam o modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT. O MKT foi elaborado baseado em dois projetos: um que focava o ensino de matemática e o outro que analisava a matemática utilizada para o ensino. Os autores afirmam que esses estudos os levaram a novas considerações sobre o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo e, também, à ampliação do conceito de conhecimento do conteúdo para o ensino. Diante disso, buscaram uma teorização para a noção de conhecimento matemático direcionado ao ensino e às habilidades necessárias para os professores ensinarem matemática, identificaram e definiram dois subdomínios para o conhecimento pedagógico do conteúdo. Segundo eles, surpreenderam-se ao descobrir um tipo de conhecimento que não é contemplado na teoria proposta por Shulman (1986), o qual denominam como conhecimento especializado do conteúdo.

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o conhecimento matemático para o ensino tem características específicas e que são distintas do conhecimento matemático utilizado no exercício de outras profissões. Desse modo, eles propõem três subdomínios para o conhecimento do conteúdo: conhecimento comum do conteúdo; conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do horizonte matemático.

O *conhecimento comum do conteúdo* é o conhecimento que não é específico do docente, podendo ser usado por outros profissionais, como calcular uma adição ou identificar que um valor não é uma solução de uma equação.

O *conhecimento especializado do conteúdo* é um conhecimento matemático que é específico para o ensino, não sendo necessário para outras atividades ou profissões. As várias atividades que o professor faz em uma aula dependem desse tipo de conhecimento, como: saber formas distintas de ensinar um conteúdo, explicar por que as etapas de um algoritmo fazem sentido; identificar estratégias variadas para resolver um mesmo problema; interpretar os erros dos estudantes, responder às perguntas dos estudantes.

O *conhecimento do horizonte matemático* é uma consciência de como os tópicos matemáticos se relacionam entre si, tanto em um mesmo nível de escolaridade como ao longo dos anos. Ter esse tipo de conhecimento do horizonte matemático pode ajudar na tomada de decisões sobre, por exemplo, como falar para os alunos do 3º ano que, nos anos posteriores, eles irão aprender que a reta numérica será ‘preenchida’ com mais números. Porém, quando um professor dos anos iniciais informa aos alunos que devem subtrair o número menor do maior, pensando apenas nos números naturais, pode prejudicar a compreensão futura de que essa afirmação não é verdadeira quando se opera com números inteiros. Jakobsen *et al*. (2012) explicam que o conhecimento do horizonte matemático envolve um sentido de como os conteúdos se relacionam em uma visão mais ampla da matemática.

Além disso, os mesmos autores também propõem que o conhecimento pedagógico do conteúdo tenha dois subdomínios: *conhecimento do conteúdo e dos alunos*; *conhecimento do conteúdo e do ensin*o.

*O conhecimento do conteúdo e dos estud*antes está relacionado às habilidades que exigem conhecimento matemático e, ao mesmo tempo, compreensão sobre o pensamento matemático dos alunos, como elaborar ou selecionar tarefas que sejam adequadas para o nível de aprendizagem dos estudantes, compreender o raciocínio dos estudantes, antecipar possíveis equívocos ou dúvidas, ter familiaridade com erros dos estudantes e saber o motivo que os alunos os cometem.

O *conhecimento do conteúdo e do ensino* integra conhecimento sobre ensino e sobre a matemática, como planejar uma sequência de atividades que favoreça a aprendizagem de um conteúdo, escolher exemplos e contraexemplos que auxiliem os estudantes na formação de um conceito, fazer perguntas que promovam a reflexão sobre um procedimento ou conceito, identificar uma maneira adequada de introduzir um novo assunto, avaliar os recursos didáticos que são adequados para favorecer a aprendizagem de um conceito.

No MKT, o conhecimento do conteúdo e do currículo é tido como um componente do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Para esclarecer a diferença entre alguns domínios do modelo MKT, Ribeiro (2012) exemplifica da seguinte forma:

> [...] reconhecer uma resposta errada é um conhecimento comum do conteúdo (CCK); dimensionar rapidamente a natureza de um erro, especialmente aqueles que não são familiares, é um conhecimento especializado do conteúdo (SCK); ter familiaridade com os erros comuns e saber por que diversos alunos os cometem é um conhecimento de conteúdo e de estudantes (KCS); selecionar uma abordagem de ensino que seja eficiente para superar certas dificuldades e/ou explorar certos aspectos de um conteúdo é um conhecimento do conteúdo e de seu ensino (KCT). (Ribeiro, 2012, p.542).

Moriel Junior e Wielewski (2017) ressaltam o pioneirismo do MKT em descrever o conhecimento mobilizado por professores de matemática em sua prática, com destaque ao papel do conteúdo matemático do ponto de vista do ensino, além de considerar aspectos relacionados ao processo de ensino, como a aprendizagem dos alunos, o currículo, entre outros.

A reflexão sobre os vários tipos de conhecimentos que são demandados para ensinar matemática na educação básica leva-nos ao questionamento: Como os vários tipos de conhecimentos relevantes para o ensino de matemática podem ser construídos?

Cochran-Smith e Lytle (1999) fornecem um arcabouço teórico para considerar as várias iniciativas relacionadas à formação de professores que, apesar de serem, às vezes, descritas de maneira similar e apresentar, inclusive, métodos e arranjos organizativos semelhantes, são, na verdade, bem diferentes em seus propósitos e têm consequências muito diferentes para a vida cotidiana de estudantes e professores.

As autoras explicam que há concepções radicalmente diferentes de aprendizagem de professores, que incluem imagens variadas de conhecimento; da prática profissional; das relações necessárias e/ou potenciais existentes entre conhecimento e prática; dos contextos intelectuais, sociais e organizacionais que apoiam a aprendizagem do professor; e das formas como a aprendizagem do professor está ligada à mudança educacional e aos propósitos da escolarização. As diversas concepções de aprendizagem de professores – embora nem sempre explicitadas – levam a ideias muito diferentes sobre como melhorar a formação inicial e o desenvolvimento profissional de professores, como promover mudanças escolares e curriculares e como avaliar professores ao longo da vida profissional.

Cochran-Smith e Lytle (1999) fazem distinção entre três concepções proeminentes de aprendizagem de professores que são denominadas: conhecimento-para-a-prática, conhecimento-na-prática, conhecimento-da-prática.

A concepção de aprendizagem do professor denominada ‘conhecimento-para-a-prática’ está fundamentada no pressuposto de que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é produzido, principalmente, por pesquisadores universitários e estudiosos de várias disciplinas. Assim, os pesquisadores universitários geram o que é comumente referido como conhecimento formal e teórico para os professores usarem a fim de melhorar a prática. Essa concepção considera que professores altamente qualificados têm conhecimento profundo de suas áreas de conteúdo e das estratégias de ensino mais eficazes para criar oportunidades de aprendizado para os alunos. Para melhorar o ensino, então, precisam implementar, traduzir ou colocar em prática o conhecimento que adquirem de especialistas fora da sala de aula. Desse modo, os professores são vistos apenas como usuários de conhecimentos que são produzidos por outros.

Cochran-Smith e Lytle (1999, p. 259) ainda esclarecem:

> Quando programas e projetos de formação de professores são estimulados pelo conceito de conhecimento para a prática (em que há muita ênfase na base de conhecimento e no que os professores precisam saber do conhecimento formal), o ensino tende a ser uma transmissão, e o aprendizado uma aquisição de conhecimento (tradução nossa)[3].

Portanto, essa concepção enfatiza que os professores precisam ter uma base de conhecimentos teóricos para ensinar conteúdos e tomar decisões sobre o cotidiano da sala de aula.

A segunda concepção de aprendizagem dos professores, denominada ‘conhecimento-na-prática**’**, assume que alguns dos conhecimentos mais essenciais para o ensino são aprendidos por meio da experiência e da reflexão ponderada e deliberativa sobre a experiência. Essa perspectiva dá ênfase ao conhecimento que se manifesta nas ações, nas decisões e julgamentos dos docentes. Para melhorar o ensino, então, eles precisam de oportunidades para aprimorar, explicitar e articular o conhecimento implícito na experiência e na ação adequada de professores muito competentes, e/ou aprofundar seu próprio conhecimento e experiência como elaboradores de julgamentos adequados e criadores de ricas situações de aprendizagem em sala de aula.

Nessa concepção, a docência é encarada como uma das profissões que requer arte e planejamento, que demanda a necessidade de inventar novos conhecimentos e estratégias diante de situações inesperadas, assim como a arquitetura, a música, a cirurgia. Desse modo, o professor é visto como um profissional que produz conhecimentos e significado. Iniciativas baseadas no conhecimento-na-prática geralmente oferecem um contexto organizacional e social fundamentado em uma prática construtivista de sala de aula, no qual docentes trabalham em pares, um menos experiente e outro mais experiente, ou então em pequenos grupos em que professores inexperientes observam e refletem sobre o trabalho de um colega mais experiente. O papel dos mentores, como facilitadores, e não de apresentadores, ocorre em iniciativas baseadas na concepção de conhecimento-na-prática. Em relação a futuros professores, o papel de mentor é desempenhado por um professor da universidade ou supervisor de estágio, que ajuda os graduandos a pensarem sobre suas experiências, orientando atividades autorreflexivas. Há, também, iniciativas nas quais os futuros professores são levados à reflexão e ao questionamento sobre o ensino, treinando suas habilidades de

---

[3] Original: When teacher education programs or projects are animated by knowledge-for-practice (where there is so much emphasis on the knowledge base and on what teachers need to know of formal knowledge), there is an inevitable pull toward teaching as transmission and learning as accruing knowledge.

tomar decisões baseadas em análise de casos práticos de sala de aula. Todavia, o que irá determinar se um programa de formação se fundamenta no conhecimento-na-prática é se ele baseia suas ações no aprofundamento do conhecimento prático do professor e em sua capacidade de tomar decisões adequadas em sala de aula.

Cochran-Smith e Lytle (1999) explicam que a terceira concepção conhecimento-da-prática não pode ser compreendida em termos de um universo de conhecimento que separa o conhecimento formal, de um lado, do conhecimento prático, de outro. Em vez disso, assume-se que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é produzido quando docentes investigam suas próprias salas de aula e escolas, de maneira intencional e, também, quando tratam o conhecimento e a teoria produzidos por outros, como material que pode ser utilizado como fonte de interrogação e interpretação. Essa concepção de conhecimento parte do pressuposto de que o conhecimento que os docentes devem ter para ensinar bem se origina de investigação sistemática do ensino, dos estudantes, do aprendizado, da matéria, do currículo e da escola.

As autoras esclarecem que, nessa concepção, o conhecimento é intimamente ligado ao sujeito que conhece, e, apesar de relevante em situações práticas, é também um processo de teorização. Além disso, não coloca professores competentes, de um lado, e aqueles menos competentes ou novatos, de outro, assume que, por meio da investigação, tanto professores novatos como experientes podem problematizar seu próprio conhecimento, bem como o conhecimento e a prática de outros. Na concepção de conhecimento-para-a-prática, o perito é o que mantém seu conhecimento formal atualizado e segue os modelos propostos por pesquisadores universitários. Já, na perspectiva do conhecimento-na-prática, o professor perito é definido como aquele que é capaz de articular e explicitar seu conhecimento para os novatos; e espera-se que os novatos aprendam estratégias eficazes de ensino, imitando docentes mais competentes. Nessas duas visões, o aprendizado dos professores é um processo de sair de um estado de novato e ir em direção a um de perito, porém, do ponto de vista do conhecimento-da-prática, professores novatos e experientes trabalham juntos, de forma que todos aprendam.

A aprendizagem de professores que está embasada na concepção conhecimento-da-prática tem os seguintes elementos fundamentais: os participantes aprendem colaborativamente; é realizada com a intenção de transformar o ensino, o aprendizado, e a escola; é estruturada de modo a considerar múltiplos pontos de vista, incluindo pesquisas feitas por pesquisadores da escola e da universidade; sempre envolve algum tipo de coleta, análise e interpretação sistemática de dados.

No tocante ao estágio curricular supervisionado, o trabalho de Guérios (2015) nos ajuda a compreender como diferentes entendimentos que professores da escola básica e da universidade, que atuam como supervisores (a autora utiliza o mesmo termo para designar os papéis desses dois profissionais em relação ao estágio), têm de 'prática', sustentam a concepção que eles têm de supervisão de estágio e que essa concepção influencia, diretamente, a formação inicial.

Guérios (2015), baseada na pesquisa de Milanesi (2012), afirma que o estágio supervisionado na licenciatura pode proporcionar duas experiências antagônicas: a de construção de novos significados para a atividade profissional docente ou a de reprodução de modelos. Desse modo, os futuros professores poderão construir novos significados, no caso de o estágio ser vivenciado como práxis pedagógica em que a relação teoria e prática são vistas como indissociáveis. Pode também se configurar como reprodutor de modelos quando ocorre uma dicotomia entre teoria e prática.

A autora explica que uma das principais expectativas de futuros professores em relação ao estágio é a de 'aprender como ensinar', 'aprender a dar aula', porém, essas expressões podem ter significados distintos. "Para alguns, aprender a dar aula significa reproduzir modos consagrados de ação em sala de aula. Para outros, a oportunidade de acertar e errar num processo de formação profissional. Há ainda aqueles para quem seja a possibilidade de tentar inovações e de criar" (Guérios, 2015, p. 155). A autora também chama a atenção para o fato de que modos tradicionais de relação com o conhecimento matemático estão internalizados nos licenciandos em decorrência das suas trajetórias como estudantes da educação básica e da universidade, e que modificá-los é um processo lento que não ocorre de maneira vertical pela explanação alheia. Assim, conforme destaca Pires (2002, p. 48), os futuros professores devem ter ricas oportunidades de vivenciar, ao longo de toda a formação inicial as "atitudes, modelos didáticos, capacidades e modos de organização que se pretende que venha a ser desempenhado nas suas práticas pedagógicas. Ninguém promove o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo".

Todavia, considerando as vivências da maioria dos licenciandos, Castro (2002) salienta que um dos principais aspectos formativos do estágio deve ser a ressignificação de experiências, modelos, imagens internalizadas pelos futuros professores sobre como deve ser a gestão do ensino.

Para Guérios (2015), a preparação para uma prática docente inovadora e criativa ou de repetição de modelos é vinculada ao modo como o professor da escola e o professor da universidade compreendem a prática de supervisão. Desse modo, o estagiário pode ir à escola com a lógica de observar como as coisas acontecem, porém, também, pode ir ao campo para conhecê-lo e vivenciá-lo em uma perspectiva experimental, procurando buscar soluções para as situações que se apresentam.

Assim, a autora considera que dependendo do conceito que professores supervisores da escola e da universidade têm de prática, terão uma concepção de supervisão que irá instigar um movimento de aprendizagem dos estagiários, pautado no criar ou no reproduzir a prática pedagógica. Se a concepção de prática dos professores supervisores tende a imprimir, no estagiário, uma prática didática comprometida com a instrumentação técnica, irá influenciá-lo em uma didática reprodutiva de modelos. Porém, se os docentes tiverem uma concepção de prática didática formativa, poderão instigar o estagiário a realizar uma ação didática criativa e preocupada com o aprender conceitual.

Para Guérios (2015), professores e licenciandos podem:

> [...] vivenciar um processo formativo em que teoria e prática sejam indissociáveis, em que a reflexão seja ato internalizado e concomitante às ações da prática profissional e em que modos de relação com o conhecimento matemático sejam construídos a partir da oportunidade de acertar e errar num processo de formação profissional (Guérios, 2015, p. 170).

Vários autores têm destacado a importância de o estágio ser desenvolvido de maneira reflexiva, com forte conexão entre teoria e prática. Teixeira e Cirino (2015) consideram que o estágio pode se constituir um campo fértil para a formação profissional de futuros professores de Matemática quando os estagiários são protagonistas de sua própria aprendizagem e, para isso, destacam a importância de que sejam desencadeadas discussões e reflexões acerca das ações que compõem o estágio. Pimenta e Lima (2006) argumentam que, para que o estágio se constitua de forma a estabelecer vínculos entre teoria e prática, é importante que seja desenvolvido como investigação sobre a prática, possibilitando, ao mesmo tempo, compreender e problematizar as situações vivenciadas no campo de estágio. Lopes, Traldi e Ferreira (2015) problematizam a conexão entre teoria e prática, ao considerar que as licenciaturas em Matemática, geralmente, dão mais ênfase a conhecimentos da matemática acadêmica em detrimento da matemática escolar. Os autores ainda acrescentam que o conhecimento do conteúdo a ser ensinado é apenas parte de inúmeros conhecimentos e habilidades requeridos no exercício da docência.

Os panoramas apresentados por Lopes *et al.* (2017) e Barbosa e Lopes (2021) nos ajudam a identificar os principais resultados das pesquisas sobre o estágio curricular supervisionado na formação de futuros professores de matemática, além de mostrar que tem havido um crescente número de pesquisas sobre esse campo de conhecimento. Lopes *et al.* (2017) apresentam uma análise de 20 dissertações e teses que tratam do estágio curricular supervisionado na formação do professor(a) de matemática dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, produzidas nos programas de pós-graduação, nas áreas de Educação e de Ensino da Capes, no período de 2001-2012. Barbosa e Lopes (2021) ampliaram esse mapeamento para o período de 2013-2019, identificando 45 teses e dissertações que tinham, como objeto de estudo, o estágio curricular supervisionado na licenciatura em Matemática.

De acordo com Lopes *et al*. (2017), tiveram destaques, nas pesquisas analisadas, o entendimento do estágio curricular supervisionado ser desenvolvido de modo que haja articulação entre escola de educação básica e universidade para possibilitar conexão entre teoria e prática; a compreensão do estágio como um espaço primordial para o futuro professor(a) entender a complexidade da profissão e para constituição da identidade docente.

Já a investigação realizada por Barbosa e Lopes (2021) evidenciou a necessidade de repensar o estágio na formação de professores de matemática, principalmente no sentido de articular os conhecimentos adquiridos na universidade aos conteúdos ensinados na escola; de ocorrer parcerias entre universidade e escola de educação básica para que o trabalho do professor orientador e do professor supervisor ocorra de modo articulado; de repensar o currículo dos cursos de licenciatura em Matemática de modo que ocorra conexão entre teoria e prática nas diferentes disciplinas, não deixando essa conexão somente a cargo do estágio; de criar oportunidades de aprendizagem de forma que os futuros professores, além de terem domínio do conhecimento matemático, saibam utilizá-lo em diferentes contextos de prática docente.

Desse modo, esses mapeamentos convergem em salientar a importância de o estágio curricular supervisionado ocorrer em um contexto em que há articulação entre o trabalho desenvolvido pelo professor da universidade (orientador do estágio) e o professor da escola básica (supervisor do estágio), além de destacarem a importância de haver conexão entre teoria e prática.

De acordo com Lopes, Traldi e Ferreira (2015, p.7), o estágio supervisionado "pode potencializar diversas aprendizagens docentes, ao proporcionar aos futuros professores o desenvolvimento de conhecimentos, habilidades e reflexões necessários para a prática profissional", além de influenciar fortemente na construção da identidade profissional do futuro professor de matemática. Entretanto, os autores afirmam que nem sempre essas ideias prevalecem no cotidiano das licenciaturas, sendo visto, muitas vezes, como um momento de prática desvinculado da teoria e com menos importância que outros componentes curriculares.

Roldão (2007) salienta a necessidade de superar a visão da relação teoria-prática como entidades separadas, para compreender esses dois domínios do saber profissional que se integram pela ação de ensinar. A autora acrescenta que o conhecimento profissional docente é construído pelos professores por meio da incorporação e transformação dos diferentes saberes formais e do saber experiencial, em um processo de aprendizagem que é singular e contextualizado.

Para situarmos o estágio curricular supervisionado na Licenciatura em Matemática, iremos recorrer a alguns trabalhos que discutem a formação do futuro professor de matemática.

Fiorentini e Oliveira (2013) problematizam a matemática que os professores precisam saber e quais práticas formativas podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar dessa matemática que é fundamental para seu trabalho profissional. De acordo com os autores, há diferentes perspectivas em relação à prática do professor de matemática que, por consequência, demandam diferentes processos de formação. Nesse sentido, os autores destacam três perspectivas que são descritas a seguir.

A primeira perspectiva apresentada por Fiorentini e Oliveira (2013) considera que a arte de ensinar se aprende ensinando. Então, o professor necessita apenas do conhecimento matemático, que é objeto de ensino e aprendizagem, não havendo necessidade de uma formação que contemple a relação matemática, estudante e professor. Assim, o saber matemático clássico e universal ocupa lugar de destaque. As disciplinas didático-pedagógicas ocupam lugar secundário e priorizam aspectos gerais das ciências da educação (psicologia da educação, filosofia e história da educação, sociologia da educação, estrutura e funcionamento do ensino etc.), sem dar centralidade às práticas de ensinar e aprender.

Na segunda perspectiva proposta por Fiorentini e Oliveira (2013), a prática de ensino de matemática é considerada uma aplicação dos conhecimentos acadêmicos. Então, essa concepção entende que o professor precisa de uma sólida imersão teórica, tanto de conhecimentos dos matemáticos profissionais quanto das ciências educativas e de processos metodológicos. Desse modo, considera a necessidade de transposição didática do saber científico para o ensinado, conforme teoria de Chevallard (1991).

Fiorentini e Oliveira (2013) expõem que, na terceira perspectiva, a prática do professor de matemática é vista como uma prática social, constituída de conhecimentos e relações complexas que, por sua vez, demandam uma visão de matemática não isolada, mas sempre situada em um contexto social. Assim, a matemática é concebida sempre na "relação com o mundo, consigo mesmo, com outros sujeitos, sobretudo em situação de produção e negociação de significados nos processos de comunicação, de ensino e aprendizagem ou de uso/exploração de procedimentos matemáticos" (Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 922).

A concepção que considera a matemática em ação, que é sempre situada em uma prática social, vai ao encontro da proposta de Moreira e David (2005) que enfatizam a necessidade de a formação do professor de matemática levar em conta as especificidades da matemática escolar.

De acordo com Moreira e David (2005, p. 20), a matemática acadêmica é "um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais"; já a matemática escolar "inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc.". Moreira e David (2011) salientam que a matemática escolar tem valores distintos da matemática acadêmica ao priorizar a construção dos conceitos pelos estudantes e a negociação de significados que ocorrem nos processos de ensino e de aprendizagem na escola. Porém, na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, a perspectiva dominante é a de uma matemática universal, única, considerada "como o saber fundamental, aquele a partir do qual os outros saberes associados ao exercício da profissão passam a fazer sentido" (Moreira e David, 2005, p. 15).

Fiorentini e Oliveira (2013) explicam que a matemática do professor difere epistemológica e metodologicamente da matemática do matemático acadêmico, mesmo que haja muitos aspectos e elementos em comum. Também ressaltam que isso não significa que a matemática que o licenciando precisa conhecer é mais simples ou superficial do que a requerida pelo bacharel; pelo contrário, defendem que os futuros professores precisam conhecer a matemática como prática social, com profundidade e diversidade, a fim de serem capazes de estabelecer interlocução/conexão entre a matemática que os estudantes produzem/mobilizam e a historicamente produzida pela humanidade com o propósito de que a aprendizagem seja significativa para o aluno e favoreça seu desenvolvimento intelectual. Porém, os autores afirmam que os cursos de formação inicial privilegiam a formação matemática voltada quase que, exclusivamente, à matemática acadêmica sem explicitar as relações existentes com a matemática escolar, sendo necessário, conforme defendem Moreira e David (2005), mudar o foco das licenciaturas em Matemática de modo a adequar os papéis da matemática acadêmica e da matemática escolar na formação do futuro professor.

Outro aspecto a ser superado nos cursos de licenciatura em Matemática, de acordo com Fiorentini e Oliveira (2013), é o isolamento entre as disciplinas de conteúdos matemáticos e as da área de educação. Os conteúdos matemáticos costumam ser abordados sem relacioná-los com processos de ensino e aprendizagem; a formação pedagógica ocorre de modo geral sem relação com os conteúdos a serem ensinados. Entendemos que, quando os conhecimentos pedagógicos e curriculares são tratados de maneira teórica e sem conexão com os conteúdos matemáticos, não se contribue de forma efetiva para a docência.

O terceiro e último aspecto que é apontado por Fiorentini e Oliveira (2013) é que a prática profissional trabalha uma matemática distante da que prevalece na licenciatura. Desse modo, os autores salientam que, para que a Licenciatura venha a contribuir de modo mais pertinente com a formação do futuro professor, há a necessidade de envolver os professores da escola nesse processo. Então, ressaltam a importância de ocorrer práticas colaborativas com a participação de professores da universidade, professores da educação básica e futuros professores, envolvendo análises sistemáticas de problemas e práticas de ensinar e aprender matemática que podem proporcionar aprendizagens para todos os envolvidos.

Leite e Passos (2020) apresentam e discutem nove lacunas decorrentes da formação inicial de professores de matemática, que envolvem tanto a defasagem como a ausência de conhecimentos que deveriam ser contemplados nos cursos de Licenciatura em Matemática: (1) desarticulação entre teoria e prática; (2) desarticulação entre formação específica e formação pedagógica; (3) desarticulação entre a formação proporcionada na licenciatura e a realidade escolar; (4) predominância dos conteúdos específicos no currículo; (5) formação e/ou a prática do professor formador; (6) distanciamento entre escola e universidade; (7) distanciamento entre os conteúdos trabalhados na licenciatura e os conteúdos do currículo da Educação Básica; (8) a forma em que as práticas de ensino e/ou o estágio têm sido ofertados no curso; (9) a falta de desenvolvimento da leitura e da escrita.

De acordo com Leite e Passos (2020, p. 6), essas lacunas, de alguma maneira, relacionam-se com "o formato em que o currículo é pensado, sistematizado e organizado no curso, que, por sua vez, pode ter uma conexão com a formação e prática dos professores que compõem o corpo docente da licenciatura". Em nosso entendimento, a maneira como as licenciaturas em Matemática são estruturadas e desenvolvidas também tem estreita relação com a sexta lacuna apontada pelas autoras, ou seja, o distanciamento existente entre a universidade e escola é um fator gerador de várias dessas lacunas. Pois, como afirmam David, Moreira e Tomaz (2013):

> [...] é preciso conhecer o que os professores fazem e que dificuldades vivenciam em seu fazer, para estruturar, a partir daí, os saberes de formação. Deste modo, estaríamos mais próximos de formar o professor que aprende para o exercício da prática docente e também aprende no exercício dessa prática. Para isso é preciso, a nosso ver, estudar a sala de aula de matemática da escola, tanto do ponto de vista do trabalho de ensino do professor, como do ponto de vista das aprendizagens dos alunos. (David, Moreira e Tomaz, 2013, p. 57).

Cristovão (2023, no prelo) propõe uma nova perspectiva para a Licenciatura em Matemática que coloca as demandas requeridas pela prática docente como centro do processo de formação. Assim, os *conhecimentos matemáticos próprios da docência* seriam tomados como objetos de estudo em todas as disciplinas. A autora ainda explica:

> Tais conhecimentos implicam tanto compreender profundamente como e porque as noções matemáticas surgem historicamente, quanto promover/desenvolver, dentre outras coisas, uma forma própria de entender os erros e as dificuldades dos(as) estudantes, de considerar o papel das demonstrações e da formalização no ensino da matemática e, em especial, modos de estruturar a apresentação de noções matemáticas adequados à sala de aula da Educação Básica, selecionando exemplos e meios para tal, amparado em uma compreensão profunda da articulação de tais noções com o currículo desta disciplina, assim como dos(as) estudantes e da escola. (Cristovão, 2023, p. 9, no prelo)

Em nossa experiência de supervisão do estágio, muitas vezes verificamos um conflito vivenciado pelos estagiários ao terem a expectativa de que o ensino de matemática deveria seguir o padrão – definição, exemplos e exercícios/problemas – e com o rigor de termos e conceitos da matemática acadêmica. Eles costumam considerar que jogos, materiais manipuláveis, atividades exploratórias podem complementar o ensino, mas não serem o meio pelo qual os estudantes construam ideias matemáticas. Um dos incômodos mais frequentes dos licenciandos é em relação às definições e aos termos matemáticos que, para eles, deveriam ser os pontos de partida do ensino de matemática. Assim, muitas vezes, se sentem desconfortáveis quando são incorporados às aulas à medida que os conceitos são construídos. Soma-se a isso o fato de que conhecem pouco do currículo escolar, de modo que quase não têm noção do que seria esperado em termos de ideias matemáticas em relação aos conteúdos previstos para cada ano escolar.

Por outro lado, temos constatado que as inquietações dos futuros professores, que podem partir deles ou serem estimuladas pelo professor orientador/supervisor do estágio, podem ser uma oportunidade para promover reflexões sobre casos concretos de sala de aula pautadas em estudos do campo da educação matemática, na análise de materiais didáticos, na consulta de documentos curriculares, as quais podem favorecer a estruturação de situações de ensino e aprendizagem criativas e que vão ao encontro de demandas reais.

Para finalizar esta seção, enunciamos, a seguir, a nossa compreensão sobre os conhecimentos para o ensino de matemática e justificamos a nossa intenção de desenvolver o Estudo de aula no contexto do estágio curricular supervisionado.

Consideramos que o modelo MKT proposto pro Ball, Thames e Phelps (2008) nos ajuda a pensar em vários tipos de conhecimentos que são relevantes para ensinar matemática na educação básica, porém reconhecemos que, além dos saberes contemplados nesse modelo, é de suma importância que o professor de matemática desenvolva saberes relacionados à dinâmica de sala de aula para propiciar a criação de ambientes favoráveis à aprendizagem da matemática.

A maneira como o professor organiza o trabalho dos alunos; como promove a comunicação com toda a turma e entre os estudantes; como se relaciona com os alunos; como trata as ideias, dúvidas, erros e acertos dos estudantes; como administra o tempo das aulas; entre outros aspectos relacionados à dinâmica da aula, influenciam fortemente a aprendizagem dos estudantes.

Também entendemos que os diferentes tipos de saberes para a docência não são fragmentados, porém Ball, Thames e Phelps (2008), assim como Shulman (1986, 1987), fizeram uma “desmontagem analítica dos componentes envolvidos no conhecimento global docente”, como observa Roldão (2007, p. 98).

Assim, assumimos que a nossa concepção de aprendizagem da docência está pautada em uma perspectiva de conhecimento da prática (Cochran-Smith; Lytle, 1999) e considera que os conhecimentos para o ensino de matemática na educação básica envolvem um entrelaçamento entre conhecimentos matemáticos, pedagógicos, curriculares e, também, envolvem conhecimentos relacionados à dinâmica de sala de aula; com forte conexão entre teoria e prática. Esses saberes devem começar a ser construídos e mobilizados durante a formação inicial e ampliarem-se à medida que os docentes se desenvolvem profissionalmente.

Sabemos que a profissão docente ainda envolve outros aspectos que extrapolam a sala de aula, porém, neste trabalho, nossa atenção está voltada para a sala de aula de matemática. Também temos ciência dos limites da formação inicial de professores e de que o desenvolvimento profissional ocorre ao longo da vida, em vários contextos e de diferentes formas, contudo a formação inicial precisa cumprir seu papel de preparar futuros professores para a prática pedagógica.

Consideramos que os princípios que fundamentam o Estudo de Aula podem contribuir para que o estágio seja desenvolvido de modo coletivo e reflexivo, proporcionado que a sala de aula seja objeto de vivência e de análise, com foco na aprendizagem dos estudantes.

Assim, desenvolvemos o Estudo de Aula no estágio curricular supervisionado com o propósito de favorecer a construção e mobilização de conhecimentos relevantes para o ensino de matemática na educação básica, conforme mostramos nos próximos capítulos.

3. O ESTUDO DE AULA

O Estudo de Aula é um processo colaborativo e reflexivo realizado por docentes em serviço e/ou futuros professores, cujo foco principal é a aprendizagem dos estudantes (Ponte *et al*., 2016), sendo composto pelas etapas mostradas na figura 1.

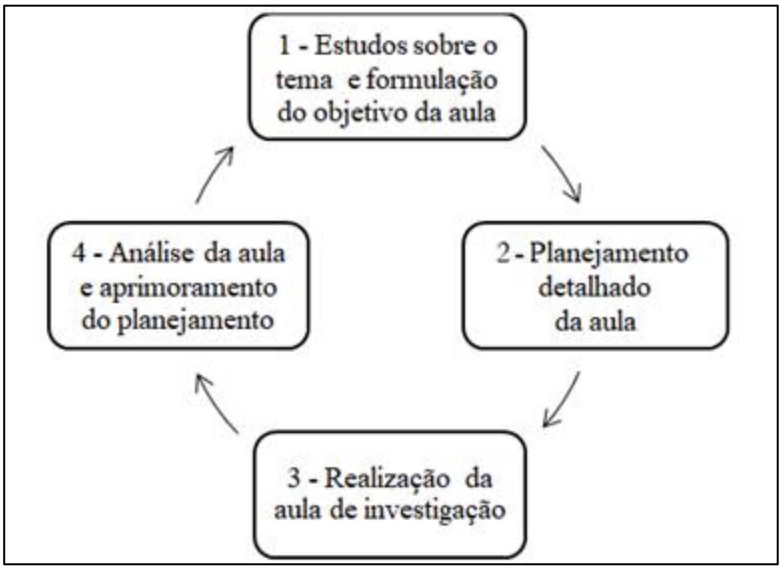


Figura 1 – Etapas do Estudo de Aula.
Fonte: adaptado de Fujii, 2014, p. 3.

A primeira etapa se destina à seleção e estudos sobre o tópico escolhido e a formulação do objetivo da aula. Fujii (2014) explica que o Estudo de Aula na escola se inicia com os professores discutindo os objetivos educacionais e a situação atual dos alunos e, em seguida, definem um objetivo específico para a aula. O autor explica que um tópico escolhido pode ser algo que os professores geralmente têm dificuldade de ensinar; ou um assunto que, para os alunos, pode parecer mais difícil; ou pode parecer fácil, mas, dele, derivam conceitos importantes; ou o tópico pode estar relacionado a um conteúdo recém-introduzido no currículo, e assim por diante. Murata (2011) esclarece que os objetivos podem ser gerais no início e irem sendo refinados e tornarem-se mais específicos ao longo do processo. De acordo com Fujii (2014), os docentes realizam um estudo minucioso do tópico a ser ensinado e dos materiais instrucionais.

Na segunda etapa, os participantes planejam, em detalhes, a aula. Eles selecionam tarefas e materiais de apoio didático que possam favorecer a aprendizagem dos estudantes; buscam antecipar possíveis estratégias, dúvidas ou equívocos dos estudantes; preparam as ações do professor nos vários momentos da aula.

Na terceira etapa, um dos participantes leciona a aula para uma turma de alunos, enquanto os outros observam o que os estudantes estão fazendo, como resolvem os problemas, os argumentos que usaram nas discussões com seus colegas ou com o docente. Desse modo, conforme esclarecem Ponte *et al.* (2017), a atenção é voltada aos estudantes, focando em suas estratégias e dificuldades, e não no trabalho do professor.

Na quarta etapa, o grupo se reúne para analisar a prática. Nesse momento, os participantes discutem suas observações com foco na aprendizagem dos estudantes. Diante disso, podem alterar o planejamento nos pontos que considerarem necessários melhorar, como: enunciados das tarefas propostas, materiais utilizados, perguntas que o professor poderá fazer, tratamento das dúvidas dos estudantes, entre outros aspectos.

Alguns autores, como Murata (2011), consideram que a definição do objetivo da aula, os estudos e o planejamento ocorrem na primeira etapa e que, também, após a revisão do planejamento, a aula de investigação pode ser lecionada em outra turma de estudantes. Porém, Fujii (2014) explica que no Japão a aula não é lecionada novamente, pois o objetivo não é atingir uma aula perfeita, mas desenvolver conhecimentos sobre a aprendizagem dos estudantes.

Fujii (2014) ressalta que o Estudo de Aula no Japão é baseado na "resolução estruturada de problemas", em que o professor apresenta um problema para a turma sem primeiro mostrar como resolvê-lo, pois o propósito é que os estudantes aprendam matemática por meio da resolução do problema e se tornem pensadores independentes. Assim a aula é organizada com uma abordagem centrada no aluno, de forma que a maior parte dos conceitos ou ideias se origina dos estudantes. No que diz respeito aos tipos de tarefa, Richit (2020) observa que a perspectiva de resolução de problemas tem sido o foco do Estudo de Aula em vários países, porém, em Portugal, tem-se dado maior ênfase às atividades exploratórias.

Murata (2011) afirma que nos Estados Unidos o Estudo de Aula tem ajudado a cultivar uma nova atitude em relação ao ensino de matemática em que a aula não é conduzida em um caminho unidirecional, mas como uma integração bidirecional das ideias dos alunos e a exploração do conteúdo pelos professores. Esse ensino interativo exige que os professores saibam como os alunos normalmente pensam e expressam sua compreensão, para que possam efetivamente facilitar seu aprendizado, unindo ideias diferentes. A autora acrescenta que essa abordagem de ensino pode ser um empreendimento extremamente desafiador para os docentes ao demandar, além da criação de um ambiente exploratório, a capacidade de escolher uma boa tarefa, de identificar os conhecimentos que são pré-requisitos e de estimular os alunos a aplicarem seus conhecimentos a uma nova situação.

Ao desenvolver o Estudo de Aula, é importante considerar aspectos da cultura escolar de cada país, a visão de educação e a formação do grupo docente participante. No que concerne à adaptação do Estudo de Aula em outras culturas, Richit (2020) observa que o desenvolvimento do Estudo de Aula, fora do Japão, demanda algumas adequações que considerem os cenários profissionais e culturais de cada contexto. No entanto, Fujii (2014) alerta para o fato de que, em certos países, ele tem sido desenvolvido com alguns aspectos equivocados, e destaca a importância de dar atenção aos princípios que envolvem esse processo formativo. Nesse sentido, Souza (2022) afirma:

> A ideia de planejar, executar o plano e refletir sobre os resultados da(na) aprendizagem de alunos é uma ideia simples, mas, olhando mais de perto, é um processo complexo e que requer atenção a muitos detalhes. As adaptações do LS japonês para outras culturas escolares são necessárias e esperadas, mas não podem ferir a sua essência. (Souza, 2022, p. 56).

Ao conceder uma entrevista, a professora Yuriko Yamamoto Baldin (Souza, Wrobel e Baldin, 2018) destaca a necessidade de os professores brasileiros aprenderem a conduzir aulas de resolução de problemas centradas nas ações dos alunos e não na exposição do conteúdo. Pois, segundo a autora, a metodologia de resolução de problemas, especialmente os abertos ou investigativos, tem sido central no Estudo de Aula no Japão, por possibilitar aulas participativas e ensino por questionamentos.

Murata (2011) salienta que muitas modificações podem mudar a natureza do Estudo de Aula, então se deve ter o cuidado de manter os princípios que fundamentam essa abordagem de desenvolvimento profissional quando adaptações são feitas. Com base nesses princípios apresentados por Murata (2011) e Fujii (2014) elaboramos o quadro a seguir.

Quadro 1 – Princípios do Estudo de Aula

O Estudo da Aula é centrado nos interesses dos professores ou dos futuros professores: os objetivos do Estudo de Aula devem ser algo que os professores sintam que é importante investigar e relevante para sua própria prática de sala de aula.
O Estudo de Aula é focado no aluno: em todas as fases do Estudo de aula, as atividades devem focar a atenção dos professores na aprendizagem do aluno e suas conexões com o ensino.
O Estudo de Aula requer um planejamento detalhado e embasado: os professores devem realizar estudos, consultar materiais e também levar em conta as suas próprias experiências para planejar uma aula com foco na aprendizagem dos estudantes, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e o objetivo definido pelo grupo.
O Estudo de aula envolve uma aula em que os estudantes têm participação ativa: a aula é organizada de modo que os alunos resolvam problemas (tarefas exploratórias) que favorecem a aprendizagem de novos conceitos e procedimentos, os quais são discutidos com toda a turma e sistematizados pelo professor.

	O Estudo da Aula tem uma aula de investigação que ocorre em uma sala de aula ao vivo: os professores compartilham experiências de observação da aula que oferecem oportunidades para que sejam pesquisadores. As observações dizem respeito à aprendizagem dos alunos e não no desempenho do docente.
	O Estudo de Aula é um processo reflexivo: oferece bastante tempo e oportunidades para os professores refletirem sobre sua prática de ensino e aprendizado do aluno.
	O Estudo de Aula é colaborativo: os professores trabalham de forma interdependente e colaborativa.

Fonte: elaborado pela autora.

Como nossa pesquisa é voltada à formação inicial, procuramos conhecer como o Estudo de Aula tem sido desenvolvido com futuros professores de matemática em alguns países e, mais especificamente, no Brasil.

3.1 Estudo de Aula na formação inicial de professores em alguns países

Nesta seção, primeiramente descrevemos brevemente como o Estudo de Aula tem sido incorporado aos cursos de formação de futuros professores de matemática no Japão e, em seguida, apresentamos, de modo geral, como ocorreu o desenvolvimento de dois trabalhos em Portugal, dois no Chile e dois nos Estados Unidos que consideramos relevantes, sem ter a pretensão de generalizar as características dos processos desenvolvidos nesses países.

3.1.1 Estudos de Aula desenvolvidos no Japão

De acordo com Elipane (2012), no sistema educacional japonês, as universidades nacionais que oferecem cursos de formação de professores são vinculadas a escolas-laboratórios, denominadas Escolas Fuzoku. Os estágios realizados por professores de matemática em formação inicial, nessas escolas, incorporam elementos fundamentais do Estudo de Aula que favorecem a construção de conhecimentos para o ensino de matemática e propiciam compreensões acerca das normas sociais que envolvem uma aula de matemática.

Elipane (2012) observou um grupo que foi constituído por um professor de uma Escola Fuzoku de ensino médio e dois futuros professores. Segundo o autor, as atividades desenvolvidas pelos futuros professores contemplaram observações em sala de aula, preparação de uma aula de investigação que foi realizada ao final do estágio por cada um dos futuros professores e reuniões de reflexão realizadas após as aulas, sendo que docentes da universidade também observaram as aulas e participaram dos momentos de análise. Assim, o autor afirma que, por meio da pesquisa que realizou, foi possível verificar que várias habilidades ou hábitos mentais que podem levar a transformações positivas nas práticas de sala de aula de matemática podem ser cultivados como uma intervenção poderosa em programas de formação de futuros professores usando os elementos do Estudo de Aula. Também reconhece que o Estudo de Aula pode proporcionar a construção de conhecimentos para o ensino que ocorre no processo colaborativo de preparação, execução e reflexão sobre cada aula e, também, ser desenvolvida uma compreensão aprofundada acerca das normas sociais que envolvem uma aula de matemática.

A professora Yuriko Yamamoto Baldin (conforme Souza, Wrobel e Baldin, 2018) explica que o Estudo de aula faz parte da formação do futuro professor no Japão e está incorporado na preparação, realização e avaliação do estágio curricular. A preparação para aula do estágio é baseada em disciplinas prévias, incluindo as de conteúdo e de metodologias, mas a preparação específica para a aula-estágio se baseia no planejamento de uma aula apresentada e discutida previamente durante um seminário do curso. Na execução da aula-estágio, o estagiário é acompanhado por seus colegas e professores da universidade para desenvolver o seu plano, que é distribuído previamente para os presentes. Os observadores focam sua atenção na aprendizagem dos alunos durante a aula. A avaliação geralmente é feita logo após a aplicação com os presentes, em ambiente separado, e depois é retomada no curso com reflexões críticas e de aprimoramento das técnicas de ensino em seminários de avaliação.

3.1.2 Estudos de Aula desenvolvidos no Chile

O trabalho de Zanocco e Ripamonti (2013) tem o olhar para as evidências do impacto da estratégia de Estudo de Aula nas práticas reflexivas e nas decisões pedagógicas de futuros professores da Educação Básica. O Estudo de Aula foi desenvolvido no contexto de duas disciplinas – ‘Didática da Matemática I’ e ‘Didática da Matemática II’ - e contou com a participação de 31 futuros professores de matemática de uma universidade chilena. Na fase de planejamento, os futuros professores assistiram a vídeos de aulas desenvolvidas de acordo com o Estudo de Aula, observando as estratégias utilizadas, as atividades propostas e a avaliação da aprendizagem e, também, estudaram textos curriculares. A aula planejada foi simulada na própria turma de graduação e, depois, lecionada para uma turma da educação básica, sendo filmada e editada pelos integrantes do grupo. Já na última fase, cada grupo reformulou o planejamento da aula e elaborou um relatório de estudo.

De acordo com as autoras, a utilização do Estudo de Aula produziu vários efeitos nos futuros professores, dentre eles: formularam julgamentos, baseados em referenciais teóricos da psicologia, da didática e sobre conteúdos matemáticos diante das situações pedagógicas analisadas; aumentaram significativamente sua participação em fóruns e debates; concentraram-se nos aspectos mais relevantes das decisões pedagógicas e seus efeitos; elaboraram conjecturas sobre os problemas associados a uma aula planejada; estabeleceram e justificaram sequências de aprendizagem; justificaram a pertinência da utilização de recursos didáticos para as aulas planejadas.

A pesquisa de Olfos *et al*. (2019) foi desenvolvida em uma disciplina denominada 'Taller de Matemática Educativa I', de um curso de Pedagogia de uma universidade chilena, e contou com a participação de 32 futuros professores que foram divididos em grupos, desenvolveram Estudo de Aula, implementado em escolas de Educação Básica. O artigo foca a análise em uma das futuras professoras, a Maria, cujo grupo fora composto por cinco futuros professores que participaram voluntariamente da pesquisa, planejando três lições com enfoque na resolução de problemas sobre operações de monômios. Ministrada a aula, que foi observada pelo seu grupo, Maria concedeu uma entrevista. Os autores descreveram e analisaram situações em que ocorreram articulações e lacunas entre os conhecimentos teóricos e práticos de Maria em relação ao ensino do conteúdo abordado na aula.

Olfos *et al.* (2019) destacam que o Estudo de Aula, com apoio de um professor da Educação Básica e de um formador da universidade, oportunizou aos futuros professores planejar uma aula de forma colaborativa, implementá-la e refletir conjuntamente sobre possíveis melhorias, contribuindo para o processo reflexivo e o desenvolvimento da análise crítica de sua formação.

3.1.3 Estudos de Aula desenvolvidos em Portugal

No trabalho de Ponte *et al*. (2017), são apresentados e discutidos dois estudos de aula, um deles desenvolvido com professores do 2º ciclo do ensino fundamental e outro desenvolvido com futuros professores. Destacamos o estudo que foi desenvolvido com sete futuros professores do ensino básico, uma professora da escola básica e três professores do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa . O planejamento buscou uma abordagem intuitiva na construção dos critérios de semelhança de triângulos, proporcionando que os futuros professores realizassem um estudo aprofundado de natureza matemática e didática. A aula foi conduzida pela professora da turma e observada pelos futuros professores e, também, por professores do Instituto de Educação, seguida de uma reunião de análise da aula.

Segundo Ponte *et al.* (2017), ao final do processo formativo, os futuros professores reconheceram que a participação no Estudo de Aula auxiliou a compreensão do planejamento de uma aula com abordagem exploratória e os processos de identificação de dificuldades dos estudantes, e deram importância especial ao trabalho coletivo vivenciado na seleção e na análise das tarefas.

A investigação realizada por Martins, Mata-Pereira e Ponte (2021) foi desenvolvida durante o estágio curricular com duas futuras professoras de matemática, sendo o processo conduzido pela investigadora (primeira autora) e pela professora da Instituição de Ensino Superior, e contou, também, com a participação de um professor da escola básica. A metodologia de ensino pela investigação marcou essa experiência e as reflexões que se seguiram, possibilitando um ambiente de discussão no grupo de Estudo de Aula, antecipando dúvidas dos alunos e as possíveis ações docentes, assim como as reflexões individuais e coletivas da prática. O principal desafio apontado pelas futuras professoras foi o de conduzir as aulas, principalmente em momentos de discussões coletivas. Ao final do processo, relataram que passaram a valorizar as práticas investigativas por favorecerem mais o compromisso e interesse dos alunos.

De acordo com Martins, Mata-Pereira e Ponte (2021), por meio do Estudo de Aula, as futuras professoras começaram a compreender melhor a estrutura de uma aula exploratória. Evidenciaram aprendizagens ao nível do planejamento, passando a considerar o aluno como o centro da aula, sentindo necessidade de alterar o enunciado da tarefa para potenciar um ambiente rico de discussão, antecipando estratégias de resolução e possíveis dificuldades e contemplando momentos de trabalho autônomo e de discussão no plano da aula. Assim, os autores reconhecem que o Estudo de Aula tem potencialidades de contribuir para que futuros professores tenham familiarização com a abordagem exploratória, tanto no planejamento como na condução dessa abordagem de ensino.

3.1.4 Estudo de Aula realizado nos Estados Unidos

O trabalho de Murata e Pothen (2011) descreve como o Estudo de Aula foi incorporado ao programa de formação de professores de matemática para atuar no Ensino Fundamental da Universidade de Stanford.

Segundo os autores, no planejamento inicial das disciplinas sobre metodologias de ensino de matemática elementar, buscou-se ser fiel à estrutura do Estudo de Aula japonês o mais próximo possível e, nele, fez-se ajustes para atender às necessidades específicas dos professores em formação inicial e do programa de formação de professores. Há três disciplinas de metodologias de ensino de matemática, no programa de um ano, que são ministradas em três trimestres acadêmicos (dez semanas cada). Durante todo o programa, os professores em formação inicial são colocados em salas de aula do ensino fundamental, e suas responsabilidades nas salas de aula mudam ao longo do tempo. Na primeira disciplina, a responsabilidade principal deles é observar e aprender fazendo parte das salas de aula. Na segunda, eles passam a ser responsáveis por ministrar miniaulas para pequenos grupos de alunos. Na última, planejam e avaliam unidades de ensino inteiras. O Estudo de Aula é a principal atividade realizada na terceira disciplina.

Um dos objetivos da terceira disciplina é facilitar a integração de estratégias pedagógicas com conhecimentos novos e aprofundados para o ensino, com vistas a promover uma maior base de conhecimentos a fim de, posteriormente, serem utilizados para ensinar matemática nas aulas. Geralmente, metade das três horas das aulas semanais é destinada para atividades e discussões de conteúdo matemático, e a outra metade, para atividades relacionadas ao Estudo de Aula.

Na primeira semana, os futuros professores se preparam para a primeira aula, realizando, antecipadamente, as leituras que foram recomendadas sobre o Estudo de Aula. No primeiro encontro, é realizada uma discussão sobre o Estudo de Aula e é enfatizado como esse processo irá ajudar a conectar as diferentes partes do ensino, que os futuros professores experimentaram até o momento, em um todo significativo. São formados grupos com 3 a 5 professores em formação inicial, de acordo com a série em que estão alocados nas escolas. Eles assistem a um vídeo de um caso de Estudo de Aula e recebem diretrizes sobre a primeira tarefa: entrevistar seu professor cooperante sobre tópicos de matemática que eles consideram que têm mais dificuldades para ensinar, relacionados a um campo específico da matemática (por exemplo: geometria, senso numérico). Os autores destacam que essa é uma tarefa crucial, pois os professores em formação inicial, geralmente, carecem de experiência para determinar as lacunas no conhecimento matemático dos alunos e decidir sobre um tópico matemático relevante. Assim, o conhecimento dos seus professores das escolas básicas desempenha um papel importante na formação dos futuros professores. Além disso, essa atribuição ajuda a manter a conexão entre as salas de aula das escolas em que os futuros professores estão inseridos e as disciplinas da Universidade.

Na segunda semana, ocorre a decisão dos objetivos e tópicos do Estudo de Aula. Os professores em formação inicial compartilham os resultados de suas entrevistas em seus grupos, negociam e decidem qual tópico irão realizar o Estudo de aula. Eles também discutem os desafios identificados na aprendizagem dos alunos sobre os temas, e fazem uma lista sobre o tópico do que eles sabem e sobre o aprendizado dos alunos. Essa lista é mantida para que eles possam refletir sobre seu aprendizado ao final do trimestre. Os professores em formação inicial também podem identificar metas 'sociais' para seus alunos, as quais podem variar amplamente: por exemplo, 'trabalhar de forma colaborativa em grupos'; 'fazer com que cada aluno fale, pelo menos, uma vez nas discussões em classe'.

Na terceira semana, os futuros professores examinam os documentos estaduais e o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) para identificarem as orientações relacionadas ao conteúdo, inclusive nos níveis de série anteriores e subsequentes. Cada grupo organiza as informações de forma a mostrar as relações entre o que está preconizado nos documentos e as expectativas estabelecidas para cada série.

Antes da aula da quarta semana, cada grupo recebe indicação de leituras sobre o tópico matemático escolhido. No encontro, são discutidas possíveis trajetórias de aprendizagem, possíveis desafios enfrentados pelos alunos, e decidem itens de avaliação a serem administrados aos alunos para entender seu nível atual de compreensão do conteúdo.

Na quinta semana, os professores em formação inicial trazem dados dos alunos de suas entrevistas de pré-avaliação. Depois de compartilhar o que encontraram nos dados, discutem se existem padrões em termos de estratégias e erros dos alunos. Eles retornam à literatura de pesquisa da semana anterior para entender os padrões. Trabalhando em equipes, é provável que vejam semelhanças entre os alunos em um determinado nível. Eles criam tabelas e gráficos para organizar os dados; escrevem um pequeno artigo discutindo os padrões que veem, e vinculam os resultados à literatura.

Na sexta, sétima e oitava semanas, os futuros professores elaboram o planejamento das aulas. Eles são aconselhados a encontrar tempo fora da sala de aula para se reunir e trabalhar em seus planos de aula. Normalmente, são fornecidos vários planos de aula e materiais curriculares para que eles possam se basear ao planejarem as aulas. Também recebem um formato de plano de aula específico para Estudos de Aula. É provável que eles trabalhem com um livro didático fornecido pelo distrito/escola e façam as modificações considerando as necessidades dos seus alunos. Nesse momento, cada grupo já decidiu qual futuro professor irá lecionar a aula, o qual deve fornecer informações sobre seus alunos para ajudar no ajuste da aula.

O plano de aula tem seções em que são inseridas as seguintes informações: objetivos da aula, relações com o currículo, pré-avaliação dos alunos, forma que a aula foi planejada e etapas da aula. A tabela de etapas é composta de três colunas: uma para atividades do professor, uma para atividades dos alunos e a última para pontos de avaliação.

Além disso, é solicitado aos professores que reflitam profundamente sobre o que aprenderam até o momento e criem ‘perguntas de pesquisa’ para o Estudo de aula. As perguntas devem estar intimamente ligadas ao aprendizado do aluno sobre o tópico escolhido, e os objetivos de aprendizado especificados no início, que geralmente se tornam mais específicos ao longo do processo. Dessa forma, os professores estreitam, continuamente, seu pensamento sobre o aprendizado dos alunos a respeito do tópico, e fazem considerações mais profundas sobre o aprendizado dos alunos, o que torna a coleta de dados mais significativa.

A aula de investigação pode ocorrer na semana 8 ou semana 9, então cada equipe decide, com o professor cooperante, a data específica de execução. Antes da aula, o professor de formação inicial que irá ministrá-la faz acordos com seu professor supervisor para preparar a sala onde ela ocorrerá, informa o pessoal da coordenação da escola e comunica aos alunos sobre o que vai acontecer. Os instrutores do curso convidam, pessoalmente, os diretores, administradores e a equipe distrital de desenvolvimento profissional para observar as aulas e participar da reunião de análise que ocorre logo em seguida.

Os professores da universidade responsáveis por essa disciplina estão presentes nos momentos em que as aulas de investigação são lecionadas e analisadas. Eles orientam aos observadores que o foco é aprender sobre o aprendizado de matemática dos alunos e coletar os dados especificados nos materiais do plano de aula. Na reunião pós-aula, quando a discussão se afasta do aprendizado do aluno e outras questões são discutidas, os professores da universidade redirecionam a conversa para que se concentre no pensamento dos estudantes observados durante a aula. Dessa forma, evita-se que a discussão se torne uma crítica à pedagogia e ao professor.

No encontro da nona semana, as equipes se reúnem, refletem sobre o processo de aprendizagem e começam a trabalhar em seus projetos finais que é composto de duas partes: elaboração de um portfólio e de uma apresentação que será exibida para toda a turma de licenciandos. Então, cada equipe apresenta um relato do processo para toda a turma na última semana.

Murata e Pothen (2011) destacam que o Estudo de Aula propicia a integração de conhecimentos teóricos e práticos; é uma forma de valorizar e trazer conhecimentos das escolas para o curso; possibilita criar forte conexão entre as atividades da disciplina e as atribuições do campo; reforça o profissionalismo dos docentes das escolas como atores e participantes importantes no processo de pesquisa. Também salientam que o Estudo de Aula propicia que os professores em formação inicial conectem vários aspectos do ensino que podem parecer distintos entre si, e possibilita a conexão de diversas atividades relacionadas ao ensino de maneira significativa, à medida que uma atividade se baseia na outra.

Os autores acrescentam que, na aula de investigação, fica óbvio que todas as atividades realizadas pelos futuros professores são partes importantes da aula final, e esclarecem que o que torna esse processo de construção de conexão único no Estudo de Aula é seu foco no aprendizado do aluno. Por exemplo, quando eles examinam os documentos curriculares, consideram como as diretrizes se relacionam e se conectam de uma série para a outra a fim de apoiar o aprendizado do conteúdo. Quando elaboram a pré-avaliação, eles buscam ideias da literatura para entender o pensamento dos alunos em suas salas de aula do ensino fundamental. Ao planejar as aulas, eles discutem como os documentos curriculares, a literatura de pesquisa, os resultados da pré-avaliação e os materiais curriculares se conectam em termos de aprendizado do aluno sobre o tópico. Assim, as conexões construídas entre o ensino, a aprendizagem do aluno e as ideias da teoria subsidiam o desenvolvimento do conhecimento para os professores. Além disso, os autores também explicam que, embora a maioria dos professores em formação possa admitir o quanto se sente nervoso com a expectativa da aula, a maioria deles relata que, ao final da experiência, sente-se recompensado e conectado uns aos outros na equipe.

Outro trabalho que selecionamos foi o de Mostofo (2014), o qual examina os efeitos do Estudo de Aula com futuros professores, à medida que eles passam da disciplina de métodos para a prática pedagógica desenvolvida em escolas da educação básica. O Estudo de aula envolveu a elaboração colaborativa de aulas, o teste de campo, a revisão e o reensino. Participaram da pesquisa, seis professores em formação de matemática do ensino médio de uma universidade privada do sudoeste dos Estados Unidos. Os dados foram produzidos com base em relatórios semanais e em entrevistas semiestruturadas que foram realizadas ao final do processo.

Na primeira fase do Estudo de Aula foi apresentado aos futuros professores, na disciplina de métodos, enquanto aprendiam sobre o ensino eficaz de matemática no ensino médio, que era o foco do curso. Depois disso, os futuros professores, durante duas aulas, reuniram-se para planejar, de forma colaborativa, uma aula de álgebra que consistia em um plano de aula escrito e um plano de matemática que incluía exemplos de problemas, apostilas e atividades. Os materiais produzidos foram entregues ao professor da disciplina que sugeriu alterações. Então, os planos foram revisados e depois lecionados, durante as aulas da referida disciplina, por um dos membros de cada equipe. Após cada aula lecionada, foi feita uma análise, iniciada com uma autorreflexão do estagiário que ministrou a aula, seguida de uma discussão em classe sobre a aula que incluiu comentários, sugestões e perguntas. Essas discussões foram conduzidas pelo professor que, ao final, adicionou comentários e sugestões. Os planos foram revisados novamente e as aulas foram lecionadas por outro membro da equipe. Então ocorreu uma nova análise das aulas e foram feitas as revisões finais dos materiais produzidos.

A segunda fase do Estudo de Aula visou preparar os futuros professores para a prática de campo sobre tópicos que foram designados pelos professores da escola básica. Cada equipe ocupou uma semana de aula da graduação para planejar, colaborativamente, sua aula e receber parecer antes de ensiná-la na sala de aula de métodos. A semana seguinte de aula foi usada para ensinar, revisar e reensinar essas lições antes de ir para a sala de aula da experiência de campo (escola). Foi dada a oportunidade de ensinar a lição para cada professor em formação durante essas rodadas. Portanto, essas aulas foram ensinadas e revisadas três vezes antes de serem ensinadas na sala de aula da experiência de campo.

Assim, as equipes foram para a escola campo de estágio em seus dias designados e cada professor em formação inicial ministrou, pelo menos, uma aula. Enquanto um estagiário lecionava uma aula, os outros membros da equipe faziam a observação e a gravação. As gravações em vídeo da aula foram exibidas nas aulas da disciplina de métodos na semana seguinte na graduação, e a turma participou de uma sessão de análise da aula lecionada unitariamente por professor em formação. Posteriormente, todo o processo descrito acima foi usado na preparação e ensino de uma segunda aula que foi desenvolvida nas escolas campo de estágio.

A tabela 1 descreve os modelos da primeira e da segunda fase usados neste trabalho.

Tabela 1 – Modelo de inovação do Estudo de Aula

Fase 1	Fase 2
Planejamento colaborativo Revisão pelo professor da disciplina Condução da aula pelo 1º membro da equipe Análise da aula Revisão colaborativa Condução da aula pelo 1º membro da equipe Nova análise da aula Revisão final	Planejamento colaborativo Revisão pelo professor da disciplina Condução da aula pelo 1º membro da equipe Análise da aula Revisão colaborativa Condução da aula pelo 2º membro da equipe considerando a revisão Análise da aula Revisão colaborativa Condução da aula pelo 3º membro da equipe considerando a revisão Análise da aula Revisão colaborativa Condução da aula em uma turma de ensino médio Análise da aula gravada em vídeo

Fonte: Extraído de Mostofo, 2014, p. 58 (tradução nossa)

De acordo com o autor, por meio da análise das entrevistas foi possível identificar alguns temas que tiveram destaque. O primeiro foi que os professores em formação consideraram o planejamento colaborativo essencial para melhorar a qualidade das aulas, mesmo que, no início do processo, ocorreram algumas dificuldades em trabalhar coletivamente. O segundo foi que os professores em formação inicial ganharam confiança com as várias oportunidades de práticas de ensino que ocorreram durante as aulas da disciplina (os futuros professores lecionavam para seus colegas) e na experiência de campo (escola de ensino médio).

Mostofo (2014) faz três ponderações sobre o trabalho realizado. Em primeiro lugar, embora a colaboração diária dos futuros professores tenha sido um grande benefício à medida que o estudo avançava, lidar com a dinâmica da equipe pode ser um problema. Não foram poucas as vezes em que a intervenção do professor da universidade foi necessária para atribuir funções e responsabilidades. Em segundo lugar, pode haver dificuldades de alinhamento do professor da universidade e da sala de aula de experiência de campo em razão do cronograma, estilos de ensino e a comunicação constante que se faz necessária. Em terceiro lugar, o pequeno tamanho da amostra (seis professores em formação) pode ter impactado muito os resultados deste estudo.

De acordo com o autor, a principal descoberta dessa pesquisa é que o Estudo de Aula pode influenciar a eficácia percebida pelos futuros professores de matemática em relação ao trabalho colaborativo, as múltiplas oportunidades de prática de ensino que ocorreram nas aulas da disciplina de métodos (na universidade) e nas salas de aula (na escola), além da observação e análise do ensino de matemática. Essas experiências permitem aos professores em formação inicial ganharem confiança antes de ingressar em sua experiência de ensino com os estudantes da educação básica.

Portanto, descrevemos, de forma sintética, alguns trabalhos realizados no Japão, Chile, Portugal e nos Estados Unidos. Embora tenhamos nos debruçado sobre um número muito restrito de trabalhos e ainda em poucos países, foi possível constatar que o Estudo de Aula tem sido desenvolvido de maneiras distintas, adaptando esse processo formativo de acordo com os contextos locais. Elipane (2012) e Souza, Wrobel e Baldin (2018) explicitam que os princípios do Estudo de Aula são incorporados à formação inicial de professores de Matemática, de forma institucionalizada no Japão. Murata e Pothen (2011) descrevem como o Estudo de Aula tem sido incorporado ao programa de formação de professores de Matemática para atuar no Ensino Fundamental da Universidade de Stanford. Os demais trabalhos (Zanocco e Ripamonti, 2013; Mostofo, 2014; Ponte *et al*., 2017; Olfos *et al*., 2019; Martins, Mata-Pereira e Ponte, 2021;) foram desenvolvidos de maneira pontual, por iniciativa dos próprios pesquisadores.

As pesquisas analisadas mostram que o Estudo de Aula pode trazer ricas contribuições para a formação inicial de professores de matemática, com destaque para a valorização do trabalho coletivo, a ampliação de conhecimentos para o ensino de matemática na educação básica de forma crítica e, ainda, maior conexão entre o que é aprendido na universidade e a realidade das escolas.

3.2 Estudo de Aula na formação inicial de professores no Brasil

Entendemos a necessidade de fazer adaptações para que o Estudo de aula possa ser desenvolvido no Brasil e, mais especificamente na formação inicial. Assim, nessa seção apresentamos um panorama das produções científicas relativas ao Estudo de Aula, realizadas no âmbito da formação inicial de professores de matemática no Brasil, até o ano de 2021, com intuito de evidenciar possibilidades e desafios para o seu desenvolvimento, bem como identificar contribuições.

3.2.1 *Aspectos metodológicos do levantamento das pesquisas*

Para alcançar os objetivos propostos nesta investigação, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa (Lüdke e André, 1986), de caráter descritivo e analítico (Fiorentini e Lorenzato, 2006), com características do estado da arte (Palanch e Freitas, 2015), para apresentar um panorama das produções científicas brasileiras relativas ao Estudo de Aula que foram desenvolvidas no âmbito da formação inicial de professores de matemática até o ano de 2021. Não restringimos o início do período de coleta de dados, pois as produções, nesse campo, ainda são recentes.

O processo de constituição do material bibliográfico foi realizado em cinco etapas. Inicialmente, foi realizada uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), com base nos descritores “Estudo de Aula” e “Lesson study”. Após eliminação das repetições, foram contabilizadas um total de trinta e nove produções, entre dissertações de mestrado e teses de doutorado, no período compreendido entre 2010 e 2021. Na segunda etapa, foi realizada a leitura dos títulos dos trabalhos e palavras-chave. Então, foram descartados quatro trabalhos por não se referirem a esse processo formativo e outros sete, por serem de áreas distintas da Educação Matemática. Na terceira etapa, lemos os resumos dos vinte e oito trabalhos, com o objetivo de identificar as produções que tinham, como foco, a formação inicial de professores. Porém, alguns resumos não continham essa informação, sendo necessário ler partes dos textos. Assim, descartamos vinte e três trabalhos direcionados à formação continuada e, desse modo, selecionamos cinco pesquisas – duas teses e três dissertações – com foco no processo formativo Estudo de Aula no contexto da formação inicial de professores de matemática.

Esse levantamento inicial possibilitou constatar que havia poucas pesquisas realizadas no âmbito de programas de pós-graduação no País, no período considerado, abordando o Estudo de Aula na formação inicial de professores de matemática. Diante disso, decidimos realizar um segundo levantamento nos principais periódicos brasileiros direcionados à Educação Matemática, para selecionar artigos que também abordassem investigações empíricas utilizando o Estudo de Aula na formação inicial de professores.

Assim, na quarta etapa, acessamos o site de cada um dos 19 periódicos que elegemos para nossa investigação, a fim de realizar procedimento de busca com os descritores “Estudo de Aula” e “Lesson study”, com indicação do ano de 2021 como período final. Nesse processo, foram identificados 27 artigos com publicações entre 2014 e 2021, conforme mostrado na tabela a seguir.

Tabela 2 – Periódicos com quantidade de artigos identificados sobre o Estudo de Aula

Periódico	Quantidade de artigos identificados
Amazônia – Revista de Educação em Ciências e Matemática	1
Bolema – Boletim de Educação Matemática	6
Boletim GEPEM	2
Educação Matemática Pesquisa	5
Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	2
Perspectivas da Educação Matemática	5
Rencima – Revista de Ensino de Ciências e Matemática	1
RIPEM - Revista Internacional de Educação Matemática	1
Vidya	3
Zetetiké	1

Além dos dez periódicos exibidos na tabela 1, também realizamos buscas em outros nove periódicos que não retornaram com artigos, os quais são: Educação Matemática em Revista; Ensino de Matemática em Debate; Revista de Educação, Ciências e Matemática; REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura; Revista de Educação Matemática; REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática; Revista Paranaense de Educação Matemática; Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática; Tangram – Revista de Educação Matemática.

Na quinta etapa, lemos os títulos, palavras-chave e resumos dos artigos com o intuito de identificar trabalhos em que o Estudo de Aula foi realizado no Brasil no contexto da formação inicial de professores. Entretanto, em alguns deles foi necessário ler parte do texto para conseguirmos identificar essas informações. Desse modo, descartamos 12 trabalhos que se referiam a pesquisas realizadas no exterior e 10 que se relacionavam à formação continuada de professores, restando cinco trabalhos. Ainda assim, dois deles se referiam a pesquisas que já haviam sido selecionadas em nosso primeiro levantamento realizado no Catálogo de Dissertações e Teses da Capes. Desse modo, foram selecionados três artigos para nossa análise.

As produções que constituíram o material empírico do nosso estudo são exibidas na tabela 3.

Tabela 3 – Título, autores e tipo de produção dos trabalhos analisados

Título	Autores/ano	Tipo de produção
A metodologia da Lesson study na formação de professores: uma experiência com licenciandos de matemática.	Coelho, 2014	Dissertação
Formação de professores para aula de resolução de problemas a partir de um Lesson Study: contribuições, constrangimentos e desafios	Küster, 2020	Dissertação
(Res)significações de saberes por licenciandos que vivenciam Estudo de Aula sobre distância entre dois pontos.	Oliveira, 2020	Dissertação
Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado.	Silva, 2020	Tese
Estudo de Aula de matemática com robótica educacional na formação inicial do professor de matemática.	Souza, 2021	Tese
A 'Glocal' Lesson Study: the case of pedagogical practices in mathematics	Rincon e Fiorentini, 2017	Artigo
Metodologia Lesson Study na Licenciatura em Matemática: possibilidade para a formação inicial.	Carvalho, 2020	Artigo
Aprendizagens de Futuros Professores de Matemática em um Estágio Curricular Supervisionado em Processo de Lesson Study	Neves e Fiorentini, 2021	Artigo

Após a constituição do material empírico, realizamos leituras completas dos trabalhos e elaboramos um fichamento de cada um dos trabalhos, considerando as seguintes categorias que foram definidas a priori: (i) participantes e contexto de desenvolvimento; (ii) definição do tema da aula; (iii) estudos realizados; iv) planejamento da aula; v) execução da aula; (vi) análise da aula; (vii) tipos de tarefas propostas; (viii) desafios vivenciados; (ix) contribuições.

3.2.2 Participantes e contextos de desenvolvimento

No trabalho de Coelho (2014), O Estudo de Aula foi adaptado para que pudesse ser desenvolvido em cinco aulas da disciplina 'Didática da Matemática II' no Instituto de Matemática da UFRJ. O autor atuou como formador com a professora dessa disciplina.

Participaram da pesquisa de Rincon e Fiorentini (2017), vinte e três alunos graduandos do Instituto de Matemática da Unicamp – cursando a disciplina de Práticas Pedagógicas em Matemática – que, voluntariamente, foram inseridos em seis grupos, de forma que pelo menos um graduando de cada grupo deveria exercer a função de professor, estagiário ou bolsista em instituição pública ou escola particular. A primeira autora era a docente dessa disciplina e atuou como formadora e pesquisadora.

No estudo de Silva (2020), o processo formativo foi vivenciado em conexão com uma disciplina de estágio curricular supervisionado, de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública pernambucana. O processo foi desenvolvido com seis estagiários que se dispuseram a participar da pesquisa, com um professor da Educação Básica que atuou como supervisor do estágio, com um professor formador da universidade e com a pesquisadora, que também exerceu o papel de formadora. Para o desenvolvimento do processo formativo, foram considerados elementos do Estudo de Aula e da Engenharia Didática.

A pesquisa de Küster (2020) foi realizada com sete alunos de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira, durante as aulas de Iniciação ao Estágio, com a presença de duas professoras pesquisadoras – uma é a autora da dissertação, e a outra a professora dessa disciplina – e foi sequenciada no semestre seguinte, quando os alunos-professores estavam realizando o estágio curricular supervisionado, contando, também, com a participação do professor formador responsável pela disciplina do estágio.

Oliveira (2020) realizou um trabalho com seis acadêmicos que cursavam licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Acre, Campus Cruzeiro do Sul, e aceitaram o convite para participar de um grupo de estudos. O pesquisador atuou também como formador, coordenando o grupo de estudos.

Na pesquisa de Carvalho (2020), o Estudo de Aula foi adaptado para ser realizado com doze alunos da graduação que cursavam a disciplina 'Ensino Exploratório nas Aulas de Matemática', ofertada, de maneira optativa, na licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas. A pesquisadora era a professora responsável por essa disciplina.

O trabalho de Souza (2021) foi desenvolvido no contexto do estágio curricular supervisionado e de um projeto denominado "ROBOMAT", contando com a participação de dezesseis alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás que cursavam a disciplina Estágio Supervisionado I. A pesquisadora e o docente dessa disciplina atuaram como formadores. Os estagiários formaram seis subgrupos em que cada um desenvolveu um, dois ou três ciclos de Estudo de Aula, totalizando doze aulas.

Na pesquisa de Neves e Fiorentini (2021), foi desenvolvida uma versão híbrida do Estudo de Aula que contemplou os elementos próprios desta proposta e o modelo colaborativo de desenvolvimento profissional utilizado pelo ‘Grupo de Sábado’, com análise narrativa. A primeira autora atuava como professora orientadora do estágio no curso de licenciatura em Matemática da Universidade de Brasília (UnB). Participaram da pesquisa dezessete futuros professores, os quais compuseram quatro subgrupos com o respectivo professor supervisor do estágio. Neste artigo, os autores focam a experiência vivenciada por um desses subgrupos.

Ao atentarmos, especificamente, para o contexto em que foram desenvolvidas as pesquisas selecionadas em nossa investigação, verificamos que uma delas foi realizada em um grupo de estudo coordenado pelo pesquisador (Oliveira, 2020), quatro foram realizadas no âmbito do estágio curricular supervisionado (Küster, 2020; Silva, 2020; Souza , 2021; Neves e Fiorentini, 2021) e três em disciplinas da licenciatura em Matemática que não estão diretamente ligadas ao estágio (Coelho, 2014; Rincon e Fiorentini, 2017; Carvalho, 2020).

Nas investigações que foram realizadas durante o estágio curricular supervisionado, os professores formadores da universidade participaram, ativamente, do Estudo de Aula. Em relação aos professores da Educação Básica que atuaram como supervisores dos estagiários, nos trabalhos de Silva (2020) e de Neves e Fiorentini (2021), são relatados vários momentos em que tiveram participação ativa no planejamento e na análise das aulas, além de estarem presentes no momento de condução das aulas. Na pesquisa de Souza (2021), é citado que o professor supervisor acompanhou as atividades práticas de ensino e participou dos momentos de análise das aulas, com o grupo. Já na investigação realizada por Küster (2020), não é mencionado o professor supervisor do estágio.

Nas pesquisas realizadas em programas de pós-graduação, os autores não eram docentes dos futuros professores, porém, em quatro delas (Coelho, 2014; Küster, 2020; Silva, 2020; Souza , 2021) exerceram a função de formador, cooperando com docentes da universidade. Já Oliveira (2020) atuou como o único formador e, também, exerceu a função de pesquisador. Nas demais investigações, os próprios docentes da universidade conduziram o Estudo de Aula (Rincon e Fiorentini, 2017; Carvalho, 2020; Neves e Fiorentini, 2021).

Um ponto convergente nos trabalhos analisados nesse quesito é que pelo menos um dos autores exerceu a dupla função de pesquisador e formador, como já era esperado, pois um dos princípios do Estudo de Aula é a colaboração entre os participantes, como afirma Desgagné (2007), na pesquisa colaborativa ocorre uma duplicidade em relação à função do pesquisador, que atua como formador e investigador.

3.2.3 Escolha dos temas das aulas

Ao buscar identificar como ocorreu a definição do tema em cada um dos trabalhos, verificamos que, nas investigações realizadas por Rincon e Fiorentini (2017), Carvalho (2020), Neves e Fiorentini (2021), os futuros professores tiveram liberdade de escolher os temas das aulas de investigação. Na pesquisa de Souza (2021), cada equipe de estagiários, tendo, como ferramenta, a robótica Educacional, pesquisou, escolheu e construiu um robô, e identificou os conceitos matemáticos que seriam abordados durante a aula com esse robô.

Em quatro pesquisas, os pesquisadores escolheram ou direcionaram a escolha dos temas. No trabalho de Coelho (2014), o tema da aula de cada um dos dois grupos, formados por alunos da licenciatura em Matemática, foi definido pelo pesquisador, pois ele considerou que os licenciandos não possuíam experiência e conhecimento do currículo, além disso a escolha do tema poderia demandar tempo. Silva (2020) propôs que o tema fosse relacionado a grandezas e medidas, e considerasse o currículo da escola do 7º ano escolar; assim, as aulas contemplaram comprimento, área e perímetro, pois o tempo não seria suficiente para trabalhar com volume, mesmo estando previsto no currículo da escola. No trabalho de Oliveira (2020), o tema “distância entre dois pontos” foi escolhido pelo pesquisador. Já na investigação de Küster (2020), foram disponibilizados três problemas que envolviam temas variados a fim de que os futuros professores pudessem analisá-los e escolher um deles para ser abordado na aula de investigação.

Desse modo, observamos que a escolha do tema se deu de modo variado, ora os futuros professores fizeram a indicação do assunto das aulas, ora os pesquisadores.

3.2.4 Estudos realizados

Os estudos realizados em cada uma das investigações analisadas são exibidos na tabela 4.

Tabela 4 – Estudos realizados em cada um dos trabalhos analisados

Autores/ano	Estudos sobre o Estudo de Aula	Consulta a documentos curriculares	Análise de materiais sobre tema da aula	Outros estudos
Coelho, 2014				x
Küster, 2020	x			
Oliveira, 2020	x		x	x
Silva, 2020		x	x	
Souza, 2021	x			x
Rincon e Fiorentini, 2017	x	x	x	x
Carvalho, 2020	x			x
Neves e Fiorentini, 2021		x	x	

Em relação à realização de estudos para subsidiar o planejamento das aulas, Ponte *et al*. (2017) explicam que os participantes de um Estudo de Aula consultam orientações curriculares, analisam materiais de ensino, fazem um diagnóstico o mais preciso possível das dificuldades dos seus alunos, procuram também conhecer os resultados de pesquisas sobre as dificuldades dos alunos e estratégias de ensino relativas ao tópico selecionado. Também verificamos que, em alguns trabalhos, ocorreram estudos que não eram sobre o Estudo de Aula ou ao tema da aula de investigação (estão indicados na última coluna da tabela 4), como: característica de uma aula centrada no aluno, atividades exploratórias, robótica educacional.

De todo modo, podemos observar que a compreensão da metodologia Estudo de Aula pelo grupo em ação é essencial e a maioria deu oportunidade para que isso ocorresse por meio de estudos.

3.2.5 Planejamento das aulas

Um dos diferenciais do processo formativo Estudo de Aula é o planejamento colaborativo que extrapola as seções, geralmente, consideradas nos planos de aula, sendo elaborado com foco na aprendizagem dos estudantes e contempla a antecipação de possíveis dúvidas, equívocos, estratégias de resolução e, também, as ações do professor nos vários momentos da aula.

> O planejamento colaborativo do método Lesson Study se diferencia de outros planejamentos não exatamente pelas sessões descritas por autores de didática – objetivos, metas, conteúdos, procedimentos, recursos e avaliação, por exemplo – mas, sobretudo, nos ingredientes sobre o modus operandi realizado pelo grupo de professores (Gaigher *et al*., 2017, p. 56).

Em quatro das pesquisas analisadas (Küster, 2020; Carvalho, 2020; Neves e Fiorentini, 2021; Souza, 2021), os planejamentos contemplaram vários elementos do Estudo de Aula.

Na pesquisa de Küster (2020), depois que os graduandos realizaram um planejamento inicial de uma aula em que seria proposto um problema, foi apresentada e discutida a abordagem Estudo de Aula e, posteriormente, realizaram novo planejamento de aula, contando com a ajuda das pesquisadoras e tendo, como referência, o mesmo problema do primeiro planejamento. Nessa situação, os alunos-professores reelaboraram o enunciado do problema, pensaram em possíveis maneiras de resolvê-lo, em modos de questionar os alunos a fim de conduzi-los na interpretação e resolução do problema, buscaram antecipar possíveis erros. Desse modo, o segundo planejamento foi elaborado de forma detalhada.

No trabalho de Carvalho (2020), no processo de elaboração do planejamento da aula de investigação, foram discutidas possíveis dúvidas e respostas dos alunos, utilização de recursos didáticos para favorecer a resolução do problema e possibilidades de intervenção do graduando/docente.

De acordo com Neves e Fiorentini (2021), o planejamento das aulas procurou ser elaborado de forma que:

> Cada subgrupo estuda, discute e elabora o planejamento da aula investigativa contendo a tarefa (preferencialmente exploratório-investigativa) a ser desenvolvida, bem como a descrição minuciosa dos modos de organização da sala de aula, do tempo; com antecipações de possíveis dúvidas ou dificuldades dos estudantes e prevendo estratégias mediacionais a serem adotadas pelo estagiário. (Neves e Fiorentini, 2021, p. 11).

Na pesquisa realizada por Souza (2021), o planejamento das aulas foi discutido com todo o grupo que buscou analisar: a estrutura das aulas; a coerência na sequência dessas aulas; avaliação tanto do conteúdo matemático quanto do conteúdo de robótica que seria trabalhado em cada aula; as tarefas propostas e a ordem dessas em cada aula; prever as dificuldades dos alunos para cada tarefa e o tempo para a sua execução.

Nos demais trabalhos, houve planejamentos que não contemplaram elementos previstos no Estudo de Aula. Na pesquisa de Coelho (2014), apenas um dos subgrupos procurou antecipar perguntas e respostas dos alunos e ações do professor. O outro subgrupo elaborou o planejamento de forma bem incompleta. Também na investigação realizada por Rincon e Fiorentini (2017), alguns subgrupos realizaram o planejamento de forma bem detalhada, porém um dos subgrupos apenas listou o que faria na aula, sem pensar nas diferentes possibilidades de respostas e ações dos alunos para cada situação. No plano de aula que consta como apêndice da produção de Oliveira (2020), há mais informações sobre o primeiro momento da aula que foi planejado para ser desenvolvido de maneira expositiva-dialogada. O momento posterior, em que os alunos iriam resolver algumas tarefas do livro didático, restringiu-se à citação dos itens do livro a serem resolvidos. O trabalho de Silva (2020) contemplou cinco aulas geminadas de acordo com a determinação do curso para o estágio. As primeiras aulas foram discutidas de forma detalhada, porém, principalmente a última, foi planejada com menos antecedência e não houve preparação para pensar nas possíveis respostas e dificuldades de cada problema. Embora tenham sido solicitados pela pesquisadora, supervisor e formador, os estagiários não elaboraram os planejamentos escritos. Assim, os esboços dos planos foram transformados em slides que foram utilizados nos momentos das aulas.

Em relação à maneira como os planejamentos ocorreram, nas pesquisas de Rincon e Fiorentini (2017), Silva (2020), Neves e Fiorentini (2021) e Souza (2021), os futuros professores elaboraram, coletivamente, um planejamento inicial que foi passando por alterações com base em discussões realizadas com os formadores e com os demais participantes. Já nos trabalhos de Carvalho (2020), Küster (2020) e Oliveira (2020), o planejamento foi realizado em conjunto por todos os participantes desde o início. Na investigação realizada por Coelho (2014), o pesquisador e a professora da disciplina optaram por não interferir nos planos construídos pelos acadêmicos, e, também, não fizeram qualquer tipo de revisão depois que eles foram construídos, limitando-se a esclarecerem os questionamentos efetuados pelos futuros professores.

3.2.6 Implementação das aulas

Nas investigações em que os contextos não estão relacionados ao estágio na licenciatura, apresentam-se alternativas para a realização da aula de investigação. Na pesquisa realizada por Coelho (2014), um dos subgrupos de graduandos atuou como docentes, e o outro grupo, como aprendizes da Educação Básica; depois, os papéis se inverteram. Oliveira (2020) criou um grupo de estudo para desenvolver o Estudo formativo e a aula foi executada em uma turma em que o pesquisador era docente. No trabalho de Carvalho (2020), a aula de investigação foi realizada em uma turma na qual um dos alunos da licenciatura atuava como professor. Na investigação de Rincon e Fiorentini (2017), os graduandos formaram equipes de forma que, pelo menos, um deles estivesse atuando como professor, estagiário ou monitor na rede pública ou escola particular, para que a aula pudesse ser executada no local de atuação desse acadêmico.

Uma estratégia utilizada por Oliveira (2020), Küster (2020), Neves e Fiorentini (2021) foi propor que um dos licenciandos ministrasse a aula planejada para os demais colegas, possibilitando novas reflexões sobre os detalhes da aula e possíveis alterações no plano. Além disso, no processo desenvolvido por Rincon e Fiorentini (2017), dois subgrupos fizeram uma segunda aplicação, incluindo as suas reflexões sobre a primeira aula e as contribuições e sugestões dos seus colegas graduandos. Já, no trabalho de Silva (2020), os estagiários conduziram as aulas em duplas.

3.2.7 Análises das aulas

Verificamos que foram realizadas reuniões para análise das aulas nos oito trabalhos examinados. No trabalho de Oliveira (2020), a reunião foi destinada à análise do processo formativo vivenciado, e a análise da aula não estava prevista inicialmente, principalmente a reflexão sobre os pontos negativos, então foi realizada uma reunião sobre os pontos a serem melhorados na aula dez meses após a sua execução. Já o trabalho de Silva (2020) contemplou cinco aulas geminadas, mas foram realizadas reuniões de análise somente das três primeiras.

Também observamos que a reunião de análise da aula contemplou pontos a serem alterados nos planejamentos das aulas nas pesquisas de Carvalho (2020), Küster (2020), Silva (2020) e Souza (2021). De acordo com Coelho (2014), a reconstrução do plano de aula estava prevista, mas não foi realizada pela falta de tempo.

3.2.8 Tarefas propostas

Nos trabalhos de Rincon e Fiorentini (2017), Neves e Fiorentini (2021) e Souza (2021), foram propostas tarefas exploratórias-investigativas. Já, nas pesquisas realizadas por Carvalho (2020) e Küster (2020), foram propostos problemas. De acordo com Oliveira (2020), os licenciandos tiveram o cuidado de selecionar tarefas desafiadoras do livro didático, contudo a aula foi conduzida de forma expositiva e pouco dinâmica. Segundo Silva (2020), nem todas as tarefas propostas foram desafiadoras para os alunos, ainda que a atenção na seleção das atividades fosse destacada algumas vezes nas reuniões realizadas. Além disso, os estagiários demonstram valorizar as definições matemáticas como ponto de partida para a realização das tarefas, distanciando-se, desse modo, de uma aula em que a aprendizagem ocorre por meio da resolução de problemas.

Alguns trabalhos expressam que foi fundamental contar com experiências anteriores (Neves e Fiorentini, 2021) ou realizar estudos (Rincon e Fiorentini, 2017; Carvalho, 2020) acerca desses tipos de tarefas, para que os estudantes da licenciatura tivessem mais condições de planejar as aulas. Alguns futuros professores vivenciaram desafios na condução de aulas com esses tipos de tarefas que requerem – do professor – possibilitar uma participação ativa dos alunos, com troca de ideias e compartilhamento de estratégias de resolução, diferentemente de aulas baseadas em exercícios. Nesse sentido, Souza (2021) demonstra que os estagiários foram orientados a elaborar tarefas abertas, que possibilitassem a investigação matemática, porém, como a abordagem exploratória foi algo completamente novo para eles, acostumados ao ensino expositivo, alguns tiveram dificuldades em desempenhar a função de mediadores do processo de ensino-aprendizagem seguindo essa abordagem.

Portanto, por um lado, concluímos que o Estudo de Aula pode proporcionar, aos estudantes da licenciatura em Matemática, a oportunidade de planejar, executar e analisar aulas com tarefas desafiadoras (resolução de problemas, tarefas exploratórias). Por outro, mostra que os cursos de formação inicial precisam propiciar que os licenciandos vivenciem aulas que contemplem diferentes tipos de tarefas nas disciplinas do curso, tanto do ponto de vista teórico como do prático.

3.2.9 Desafios e dificuldades

Em algumas das pesquisas analisadas, os autores citaram dificuldades que foram vivenciadas na realização do Estudo de Aula. Entre elas, destacamos o tempo, pois trata-se de um processo colaborativo de ensino e formação que demanda um período prolongado para ser desenvolvido. Coelho (2014) fez alterações para que esse processo pudesse ser desenvolvido em apenas cinco encontros, afirmando que os planos de aula não foram revisados pelo pesquisador ou pela professora da disciplina, ou mesmo discutidos com toda a turma, antes de serem executados; também afirmou que foram realizadas análises das aulas, mas os planejamentos não foram reelaborados devido ao pouco tempo disponível. Carvalho (2020) explica que ocorreram alterações em algumas fases do Estudo de Aula, pois o tempo, para o desenvolvimento do processo, foi restrito a oito aulas de uma disciplina. No estudo de Silva (2020), os licenciandos lecionaram cinco aulas geminadas, porém, em algumas, não houve preparação para que pudessem refletir sobre as possíveis respostas e dificuldades dos alunos para resolver cada problema, como as palavras mais adequadas para determinada atividade, pois foram planejadas com pouca antecedência. A autora também observa que os estagiários gostariam de ter realizado uma atividade individual ao final da sequência, para terem uma ideia mais nítida sobre a aprendizagem dos alunos, novamente o tempo impediu que tal ocorresse.

Alguns autores citaram dificuldades dos licenciandos em antecipar possíveis dúvidas, erros e estratégias de resolução dos estudantes das turmas onde atuaram. De acordo com Küster (2020), as estratégias de resolução presentes no planejamento não foram suficientes para auxiliar todos os alunos da escola durante a resolução do problema. No trabalho de Rincon e Fiorentini (2017), também foram constatadas dificuldades em antecipar dúvidas e erros dos alunos da escola; nem todos os grupos elaboraram planejamento com detalhes; houve situações nas aulas que não tinham sido previstas. Souza (2021) explica que ocorreram dificuldades em relação à antecipação das dúvidas e ao levantamento de conhecimentos prévios dos alunos. Eles recorreram ao currículo para buscar compreender o que os alunos já haviam estudado até aquele momento, porém esse estudo mostrou-se insuficiente para a compreensão sobre o conhecimento prévio e as dificuldades dos alunos. Esse conhecimento foi ampliado à medida que eles tiveram contato com os alunos, observando-os em situações de aprendizagem.

Outro ponto a considerar é que, em alguns trabalhos, conforme Coelho (2014), Oliveira (2020) e Souza (2021), mesmo sendo planejadas aulas com atividades desafiadoras, os futuros professores tiveram dificuldades em promover um ambiente em que os alunos têm uma participação ativa, que possibilita o compartilhamento de estratégias e a comunicação de ideias; então, algumas aulas foram conduzidas de forma expositiva, com foco na realização de procedimentos. Sobre essa situação, Souza (2021) esclarece que a abordagem exploratória foi algo completamente novo para os estagiários, acostumados ao ensino expositivo.

Alguns trabalhos também citam que a resolução de problemas ou a realização de tarefas exploratórias foi algo novo também para os estudantes da Educação Básica. Na pesquisa de Carvalho (2020), a maioria dos estudantes não conseguiu resolver o problema proposto e, ao analisar a aula, os futuros professores concluíram que o papel quadriculado, disponibilizado aos estudantes, não favoreceu a resolução do problema, então refletiram que teria sido mais adequado se tivessem utilizado outro recurso, como o Frac-soma. De acordo com Silva (2020), no decorrer das aulas foi constatado que alguns estudantes da Educação Básica estavam tendo dificuldades em realizar as tarefas que foram propostas tanto por falta de conhecimentos matemáticos básicos, como por resistência em ter uma posição mais ativa, pois estavam habituados a um ensino muito expositivo. Então, foram planejadas ações que contribuíram para maior envolvimento dos alunos que estavam menos participativos.

Outro desafio apontado foi em relação à disponibilidade de participar do processo formativo. Silva (2020) menciona a dificuldade em encontrar estudantes e profissionais dispostos a participar da pesquisa, e outro desafio apresentado pela pesquisadora foi conseguir reunir os participantes da pesquisa em vários momentos. Oliveira (2020) pondera que alguns licenciandos não conseguiram se ajustar às datas estabelecidas para os encontros, o que foi um empecilho para o andamento das atividades.

Em relação aos sentimentos dos futuros professores, Silva (2020) constatou, como já previa, que eles demonstraram ansiedade e nervosismo por serem as suas primeiras aulas e por participarem de uma pesquisa de doutorado. Coelho (2014) observa que o acadêmico que conduziu a aula do grupo 1 parece ter se sentido julgado e adotou uma posição defensiva no momento de análise da aula, e o futuro professor que conduziu a aula do grupo 2 disse que ficou nervoso no momento de execução, pois sabia que estava sendo avaliado por pessoas que tinham mais conhecimentos. De acordo com Carvalho (2020), o graduando/docente estava ansioso quando recebeu seus colegas e a sua professora na escola, o que a autora considerou natural, porque seria observado por eles ao conduzir a aula.

Ainda foram citados outros desafios vivenciados pelos participantes. De acordo com Küster (2020), o licenciando que conduziu a aula teve dificuldades em aprender a relacionar a matemática específica com uma familiaridade dos alunos e seus pensamentos matemáticos. Coelho (2014) relata que vivenciou desafios ao ter de exercer tanto o papel de pesquisador como o de formador. De acordo com Souza (2021), ocorreram dificuldades e constrangimentos durante a execução da primeira aula, ocasionadas por várias situações, as quais foram discutidas, e foram estabelecidos novos combinados, de modo que as outras aulas ocorreram de forma mais adequada. Rincon e Fiorentini (2017) afirmam que um desafio ainda a ser superado, no momento em que ocorreu a pesquisa, é a existência de cooperação entre os professores do Instituto de Matemática e a Faculdade de Pedagogia da Universidade Estadual de Campinas, para que seja possível continuar desenvolvendo o Estudo de Aula no curso de Matemática.

Constatamos que a ideia do compartilhamento em grupo requer uma construção, com tempo e diálogos, de modo a se obter confiança e engajamento nas ações em que todos participam. Cochran-Smith e Lytle (1999) afirmam que:

> Quando grupos de professores se reúnem como pesquisadores, eles precisam de tempo suficiente para trabalhar e suficiente longevidade como grupo. Quando o ritmo de uma comunidade segue sem pressa e quando os membros do grupo estão comprometidos a trabalhar com questões complexas, as ideias têm tempo de serem incubadas e de se desenvolverem, e a confiança cresce dentro do grupo, e assim os participantes se sentem confortáveis para

> levantar questões e se exporem (Cochran-Smith; Lytle, 1999, p. 294, tradução nossa).

Ainda se pode observar que havia um estranhamento dos licenciandos, em muitos destes casos, diante de metodologias participativas na escola, possivelmente eles próprios pouco habituados a essa prática, em particular nas próprias aulas da graduação.

3.2.10 Contribuições do Estudo de Aula

As pesquisas analisadas, situadas em contextos e condições diversas, apresentam várias contribuições do processo formativo Estudo de Aula desenvolvido no âmbito da formação inicial de professores de matemática.

Em relação aos conhecimentos, o Estudo de Aula possibilitou articulação entre conhecimento matemático e conhecimento pedagógico (Coelho, 2014); foi pertinente para a formação didático-pedagógica e matemática dos futuros professores (Silva, 2020); favoreceu a ampliação de conhecimentos sobre o ensino de matemática e a capacidade de identificar as dificuldades dos estudantes (Neves e Fiorentini, 2021); contribuiu para a ampliação de saberes para a docência, destacando a aprendizagem sobre formas de abordar o conteúdo da aula com os alunos do ensino médio, e a reflexão (Oliveira, 2020); possibilitou identificar o conteúdo escolar e a matemática escolar; identificar as necessidades educativas baseadas em outra leitura da sala de aula (Rincon e Fiorentini, 2017); propiciou construir ou aprofundar conhecimentos sobre alguns conteúdos matemáticos para o ensino, sobre o pensamento matemático dos alunos e o modo como aprendem (Souza , 2021).

Especificamente sobre a elaboração do plano de aula, Coelho (2014) afirma que a maioria dos graduandos não sabia como construir um plano de aula, e o processo vivenciado contribuiu para que essa lacuna pudesse ser reduzida, apesar de o planejamento ter sido feito de forma superficial e informal. Neves e Fiorentini (2021) salientam que a elaboração do plano de aula e seu refinamento, que ocorreu nas discussões realizadas no subgrupo, com a professora supervisora e com o Grande grupo, foi, especialmente, importante para a aprendizagem dos futuros professores. Segundo Oliveira (2000), ao planejar a aula, os futuros professores refletiram sobre a diferença como um conteúdo é trabalhado na matemática acadêmica e na matemática escolar. De acordo com Küster (2000), a elaboração de um planejamento de qualidade possibilitou diminuir imprevisibilidades durante a execução da aula e, desse modo, conferiu segurança ao graduando que conduziu a aula, pois se sentiu preparado para auxiliar os alunos e não foi surpreendido com os questionamentos feitos por eles.

Em todos os trabalhos analisados, Coelho (2014), Rincon e Fiorentini (2017), Carvalho (2020), Küster (2020), Neves e Fiorentini (2021), Oliveira (2020), Silva (2020) e Souza (2021), os autores apontaram a importância do trabalho coletivo para a formação dos futuros professores.

Sobre os tipos de tarefas propostas, alguns autores também destacam, como contribuições do Estudo de Aula, a oportunidade de os futuros professores refletirem sobre as características de tarefas desafiadoras (Coelho, 2014); planejarem e conduzirem aulas com tarefas exploratórias (Rincon e Fiorentini, 2017); elaborar tarefas exploratórias e conduzir aulas centradas nos alunos (Souza, 2021).

Em relação à dimensão teórica e prática do ensino de matemática, Silva (2020) salienta que elas foram interligadas em vários momentos do processo formativo; Souza (2021) afirma que a natureza reflexiva e colaborativa do Estudo de Aula contribuiu para que os estagiários refletissem sobre e para a prática. Já Neves e Fiorentini (2021) observam que os graduandos consideraram a cisão entre teoria e prática, que ocorre no curso de licenciatura, como prejudicial ao desenvolvimento profissional dos futuros professores.

Nossa intenção inicial era identificar as contribuições do Estudo de Aula para a formação de futuros professores de matemática, todavia, também, verificamos que esse processo formativo favoreceu a aproximação entre escola básica e universidade. Neves e Fiorentini (2021) consideram que a realização do Estudo de Aula, no estágio curricular supervisionado de matemática, colaborou para uma maior aproximação entre universidade e escola básica e criou oportunidade para que formadores de professores, professores da escola básica e futuros professores trabalhassem coletivamente e, às vezes, colaborativamente. Silva (2020) observa que o trabalho colaborativo entre formador, supervisor e estagiários foi um diferencial na aprendizagem dos estagiários.

Assim, as análises dos trabalhos brasileiros selecionados para nossa investigação evidenciam que o Estudo de Aula apresentou diferentes contribuições para a formação dos futuros professores e, também, favoreceu a aproximação de docentes da escola básica e universidade. No entanto, indicam maior demanda de tempo e continuidade.

4. A TRAJETÓRIA DA PESQUISA

A nossa pesquisa foi elaborada com base em diversos estudos que realizamos e em nossas experiências com formação de professores. A revisão de literatura, apresentada no capítulo dois, permitiu que a pesquisadora se apropriasse do conhecimento já produzido sobre o Estudo de Aula, tomasse ciência das possibilidades e dos desafios de desenvolver esse processo formativo com futuros professores de matemática.

Realizamos uma pesquisa colaborativa com a intenção de compreender os conhecimentos mobilizados por estudantes da licenciatura em matemática, em estágio curricular supervisionado, quando participam de um Estudo de Aula. Também temos o propósito de identificar as percepções dos estagiários sobre possíveis contribuições e limitações de participação em um Estudo de Aula.

Iniciamos o relato da trajetória com os desafios e ações realizadas para conseguir participantes dispostos a se envolverem com o Estudo de Aula. Depois, apresentamos os participantes e, em seguida, expomos o contexto de realização da pesquisa. Posteriormente, descrevemos o processo desenvolvido que inclui os procedimentos metodológicos, a minha trajetória como doutoranda e o percurso trilhado com a estagiária Marília e o estagiário Peterson.

4.1 Movimentos para construir condições para desenvolver o Estudo de Aula no estágio curricular supervisionado

Com o objetivo de, no primeiro semestre de 2022, compor um grupo colaborativo para o desenvolvimento do Estudo de Aula formado por, pelo menos, dois estudantes da licenciatura em matemática e um professor de matemática da Educação Básica que iria supervisionar o estágio dos estudantes da licenciatura, conversei, no segundo semestre de 2021, sobre a pesquisa que pretendíamos desenvolver com a professora da Universidade que, nos últimos anos, tem sido responsável pela orientação de estudantes da licenciatura em matemática em estágio curricular supervisionado. Ela já tinha conhecimentos sobre o Estudo de Aula, achou a proposta da pesquisa interessante e me convidou para apresentar a proposta deste processo formativo aos estagiários em uma de suas aulas nas turmas da manhã e da noite. Nestes momentos, os estagiários fizeram perguntas sobre o Estudo de Aula e pudemos conversar sobre outras questões do estágio e o ensino de matemática na educação básica. Em março de 2022, a mesma professora me inseriu no grupo do *WhatsApp* dos professores que supervisionaram estágios recentemente, para que eu pudesse apresentar, a eles, a proposta da pesquisa que eu pretendia desenvolver. Porém, nesse espaço, nenhum professor manifestou interesse em conhecer os detalhes da pesquisa para pensar na possibilidade de participar. Na ocasião, os dias foram passando e os docentes de escolas municipais e de estaduais de Belo Horizonte estavam em greve.

Por sugestão da orientadora desta pesquisa, nessa mesma época, visitei uma escola municipal que, há anos, recebe estagiários da UFMG, com objetivo de convidar professores de matemática para participar da pesquisa, supervisionando estagiários e participando de, pelo menos, uma reunião quinzenal para o desenvolvimento do Estudo de Aula. Assim, conversei com a Coordenadora Pedagógica que estabeleceria contato com uma das professoras de matemática da escola que, segundo ela, poderia ter interesse em participar da pesquisa. Então, após uma semana, essa professora entrou em contato comigo, pelo celular, e conversamos sobre o trabalho que eu tinha a intenção de desenvolver. A Professora disse que achou a proposta interessante e que eu e os estagiários poderíamos acompanhar suas aulas, mas que não dispunha de tempo para participar de nenhuma reunião, pois lecionava em duas escolas e não tinha horário vago. Infelizmente, essa é a condição de trabalho da maioria dos professores brasileiros.

Também entrei em contato com uma professora e um professor que haviam ingressado no mesmo programa de pós-graduação que eu estava cursando o doutorado, e tinham experiência na supervisão de estagiários. Eles se mostraram interessados em conhecer a proposta. Então, estabeleci contato individual para explicar o objetivo da pesquisa e as atividades que seriam desenvolvidas, as possíveis contribuições para os participantes e, também, os cuidados éticos que teríamos no desenvolvimento e na divulgação dos resultados da pesquisa. A professora disse que poderíamos acompanhar suas aulas, mas ficou receosa de conseguir conciliar as atividades de docente com as demandas do mestrado e a participação em reuniões para o desenvolvimento do processo formativo, então optou por não participar da pesquisa. O outro professor, Frederico, aceitou participar da pesquisa e relatou que havia supervisionado, remotamente, um estagiário e uma estagiária no semestre anterior que lhes disseram ter interesse em realizar o segundo estágio também sob a supervisão dele, com o intuito de conhecer a escola e os alunos presencialmente. Desse modo, Frederico faria contato com eles e, caso concordassem, eu entraria em contato para convidá-los. Então, depois de um período de tanta preocupação em conseguir um professor supervisor e pelo menos dois estagiários que aceitassem participar da pesquisa, uma luz se acendeu!

Alguns dias depois, o professor Frederico me passou o contato dos estagiários: Peterson e Marília. Enviei mensagem e agendei um horário individual para apresentar, a cada um, a proposta da pesquisa. No segundo semestre de 2021, eles haviam participado da aula em que eu havia apresentado o Estudo de Aula, então recordaram-se de mim e já tinham ideia das características principais desse processo formativo. Então, Marília e Peterson se dispuseram a participar da pesquisa, fazendo o estágio nas turmas do professor Frederico e concordaram em participar de reuniões para o desenvolvimento do Estudo de Aula.

Na semana seguinte, Frederico me informou que resolveu concorrer à direção da Escola e, caso fosse eleito, poderia conversar com Tiago, outro professor de matemática da sua escola, para averiguar a sua disponibilidade de supervisionar os estagiários e participar da pesquisa. Contudo, disse que aguardaria o final da greve dos professores, que ainda ocorria, para estabelecer esse contato.

A greve da Rede Municipal continuou... O 1º semestre de 2022 da Universidade se iniciou, e a professora de estágio da turma da manhã e o professor da turma da noite começaram a alocar os estagiários de matemática nas turmas dos professores supervisores da escola básica. Nesse ínterim, o professor Frederico foi eleito diretor. Diante disso, comecei a ficar muito tensa! Então conversei com a orientadora desta pesquisa sobre a possibilidade de realizar a investigação no próprio local onde eu trabalho, que não estava em greve, e todos os professores de matemática recebem estagiários semestralmente, mesmo que, inicialmente, tivéssemos pensado em produzir os dados da investigação em outra escola pública. Assim, no dia 08 de abril, convidei uma professora da escola em que trabalho, e ela aceitou, prontamente, participar da pesquisa, inclusive realizando reuniões semanais com os estagiários. Porém, no dia 11 de abril, os professores da Rede Municipal da Cidade decidiram encerrar a greve. Dessa forma, resolvemos aguardar ainda alguns dias a fim de constatar a possibilidade de realizar a pesquisa na escola municipal em que Frederico atuava. Depois, Frederico conversou com o professor Tiago sobre a possibilidade de participar da pesquisa. No dia 14 de abril, consegui fazer o primeiro contato com o professor Tiago e, no dia 18 de abril, expliquei, por telefone, os objetivos da pesquisa, bem como os cuidados éticos que teríamos no seu desenvolvimento, porém não mencionei a necessidade de participação em reuniões além do horário que ele ficava na Escola, para não dificultar a sua participação, pois já havia recebido a negativa de outros professores por esse motivo, conforme relatei anteriormente. Ele aceitou participar, e entrei em contato com Marília e Peterson para lhes informar sobre o novo professor supervisor. Eles se dispuseram a realizar o estágio na turma do professor Tiago e a participar da pesquisa, inclusive de uma reunião semanal.

Assim, foram necessários vários movimentos para desenvolver esse processo formativo com um estagiário e uma estagiária da licenciatura em matemática e com participações pontuais do professor supervisor.

4.2 Apresentação dos participantes

A investigação realizada contou com a participação da estagiária Marília, do estagiário Peterson, do professor Tiago e, também, com a minha participação.

Marília e Peterson haviam realizado o primeiro estágio, no segundo semestre de 2021, com a supervisão do professor Frederico, que atuava em uma escola municipal de Belo Horizonte, lecionando matemática para turmas de sexto e sétimos anos do ensino fundamental. O estágio havia ocorrido de forma remota, durante os meses de outubro a dezembro de 2020. Nesse período, as escolas da Rede Municipal de Belo Horizonte ofertaram ensino presencial, sem obrigatoriedade. Porém, a Universidade não havia autorizado que os estagiários estivessem presentes nas escolas.

Desse modo, durante a realização do primeiro estágio, Marília e Peterson não tiveram contato com os alunos. Eles obtiveram informações do professor Frederico sobre como a escola estava organizando o ensino remoto e o retorno presencial. Segundo eles, essa experiência foi positiva, principalmente, em relação aos estudos que realizaram para produzir uma videoaula que envolveu o algoritmo da divisão com números naturais e racionais.

Conforme relatado anteriormente, eles realizaram o segundo e último estágio na mesma escola, nas turmas de oitavos e novos anos, com a supervisão do professor Tiago, que também se dispôs a participar da pesquisa.

4.2.1 A estagiária Marília

Depois de algumas trocas de mensagens e de uma conversa telefônica, Marília se dispôs a realizar o estágio nas turmas do professor Tiago e a participar da pesquisa. Então, marcamos um encontro presencial em uma sala da Universidade onde pudemos nos conhecer pessoalmente e realizar uma entrevista.

Inicialmente, agradeci a sua disponibilidade e interesse em participar da pesquisa, expliquei alguns detalhes sobre o Estudo de Aula e como seria realizada a pesquisa, destacando os cuidados éticos. Então, disse que gostaria de entrevistá-la, tanto para já obter informações sobre ela para a pesquisa, quanto para nos conhecer melhor. Explicitei que poderia não responder alguma questão, caso se sentisse incomodada.

Marília relatou que a sua intenção no curso de Licenciatura em Matemática era aprender matemática e não ser professora. Também que concluiria a Licenciatura em Matemática naquele semestre, depois de sete anos que ingressou no curso, e que a única disciplina que precisaria cursar para se formar era o segundo estágio. Ela me relatou, também, que, por questões pessoais, trancou o curso três vezes, e que, em vários momentos, pensou em desistir, contudo o incentivo do seu marido foi fundamental para que ela persistisse.

Marília compartilhou que quando cursou o Ensino Fundamental, Médio e na primeira graduação era considerada uma aluna inteligente e dedicada, porém, ao ingressar no Curso de Matemática da UFMG constatou que seus conhecimentos eram insuficientes para acompanhar o curso e teve de se esforçar muito.

Em relação à preparação no curso para ser professora, mesmo não tendo intenção de lecionar, se surpreendeu com duas matérias que cursou com uma professora do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) – Geometria na Educação Básica e Números na Educação Básica – pelo tanto que gostou das aulas e percebeu a importância de um professor saber abordar um conteúdo de formas diferentes. Também comentou que essas disciplinas a levaram a cogitar se poderia atuar como professora.

Marília: Essas duas matérias foram espetaculares! Essa professora coloca a gente para pensar, você acha que tem um conhecimento, mas ela te questiona e te faz pensar em formas diferentes de ensinar. Coisas que parecem simples, você tem que pensar porque é daquela forma que você fez a vida inteira. [...] Eu fui muito bem nessas matérias, me desconstruí em vários sentidos e gostei! Então comecei a pensar: será que vou ser professora, mesmo? Será que é isso que Deus quer para mim?

Percebemos, pelo relato de Marília, que somente duas matérias cursadas propiciaram que ela pensasse na possibilidade de ser professora. Em outro momento da entrevista, Marília também citou que gostou de uma disciplina que cursou na Faculdade de Educação relacionada a jogos. Desse modo, constatamos que o curso de licenciatura contribuiu pouco para que Marília pudesse refletir sobre a docência. Nesse sentido, Diniz-Pereira (2015, p. 148) observa que “[...] entre aqueles que “escolhem” um curso de licenciatura, exclusivamente de licenciatura, a identidade profissional que se constrói nesse curso não é, necessariamente, a de professor”.

Ainda sobre a graduação, Marília contou que foi muito difícil chegar ao final, que precisou de muita dedicação e que está satisfeita com seu aprendizado.

Marília: O que eu acho mais rico de uma graduação, porque é a segunda que eu faço, é que nós entramos uma pessoa e saímos outra. O que eu mais aprendi na UFMG é autonomia de estudar, aprender sozinha, porque os professores têm pouco tempo com os alunos, depende mais é de quem faz o curso. Estou satisfeita com os aprendizados que a UFMG me proporcionou. Aprendi muita matemática!

Sobre o primeiro estágio curricular supervisionado, que Marília realizou no semestre anterior, ela considerou que a experiência foi importante, pois o professor supervisor compartilhou várias informações sobre a situação da escola e a aprendizagem dos alunos, principalmente no contexto pandêmico, e, também, proporcionou que ela planejasse uma videoaula sobre o algoritmo da divisão.

Sobre a realização do segundo estágio que iria ser iniciado, Marília relatou que sua principal expectativa era ter contato com os alunos e poder auxiliá-los na aprendizagem da matemática, e que também o estágio poderia ajudá-la a aprender a lecionar e a decidir sobre sua vida profissional.

Marília: Eu quero muito vivenciar a sala de aula, conhecer os alunos até mesmo para eu decidir se irei voltar para indústria ou ser professora. O estágio pode me ajudar a aprender como dar uma boa aula, como ser uma boa professora. [...] Eu acho que muitos professores ensinam muito na superficialidade, eu não acho isso bom, desmerecem a capacidade dos alunos, já pensam que o aluno não vai entender. [...]Se eu for ser professora mesmo, nossa! Eu sei que sou muito exigente!

Marília compartilhou que considera importante que o professor saiba os conteúdos com profundidade, desenvolva um bom relacionamento com os alunos e tenha a capacidade de proporcionar um ensino de matemática que seja interessante para os discentes, tenha cuidado de buscar a participação de todos os alunos, embora considere que esses aspectos não sejam fáceis. Então, pedi a Marília para pensar em uma sala de aula de matemática que a aula esteja fluindo bem e me contar o que ela havia imaginado.

Marília: Depende, por exemplo: se os alunos estão jogando um jogo matemático, eles podem estar conversando, interagindo, pensando em estratégias para jogar, ali é uma forma de proporcionar conhecimento e para mim é uma boa aula. Antes eu só pensava em aula tradicional, mas depois de fazer algumas disciplinas na Faculdade de Educação, fui percebendo que nem todas as aulas têm que ser expositivas, é preciso propor outros tipos de aula para os alunos poderem ver a matemática com outros olhos. [...] Eu acho que uma boa aula é a que os alunos estão buscando o conhecimento. Uma aula expositiva também pode ser boa, se os alunos estão levantando a mão, participando. Porque o professor não deve depositar conhecimentos, deve considerar que os alunos têm uma bagagem própria, o que eles pensam. Se eu penso em uma boa aula, eu penso em uma sala que os alunos estão interagindo em relação ao conteúdo e que eles estão felizes.

A entrevista terminou... A conversa continuou pelos corredores da Faculdade de Educação, desenrolou-se pelo estacionamento e avançou por mais quarenta minutos, enquanto permanecemos em frente ao carro de Marília que estava estacionado próximo ao meu, envolvendo vários assuntos, risos e choros. Nesse dia, pude perceber como Marília é uma pessoa extremamente dedicada a tudo que faz, exigente consigo mesma, madura, que ama a vida e, principalmente, sua família!

Ao longo do período de estágio, Marília foi muito engajada, buscou colaborar para a aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental e participou ativamente dos estudos, planejamentos, execução e análise das aulas que foram conduzidas pelos estagiários. Além disso, esteve presente em todas as reuniões realizadas para o desenvolvimento do Estudo de Aula, mesmo que, em certas ocasiões, precisasse levar seus filhos.

Marília concluiu a licenciatura em julho de 2022. Em fevereiro de 2023, ela começou a lecionar matemática para turmas do ensino médio e para turmas da educação de pessoas jovens e adultas de uma escola da rede estadual. Desde então, algumas vezes, compartilhou comigo sobre os desafios, as conquistas, o cansaço e a alegria de ser professora.

4.2.2 O estagiário Peterson

Do mesmo modo que Marília, depois de troca de mensagens e uma ligação telefônica, combinamos de fazer uma reunião para que eu pudesse explicar os detalhes da pesquisa, esclarecer possíveis dúvidas e também realizar a primeira entrevista, que ocorreu de forma virtual.

Depois de esclarecidas algumas dúvidas em relação à pesquisa e sobre alguns aspectos do Estudo de Aula, Peterson disse que se interessou em participar para se preparar melhor para lecionar as aulas do estágio.

> **Peterson:** Alguns colegas que já fizeram estágio, presencialmente, haviam me dito que o planejamento das aulas foi muito corrido. Então pensei em participar da sua pesquisa para ter uma melhor preparação para lecionar as aulas. Eu acho isso importante para ser professor, pois muitas vezes parece que, no estágio, as pessoas vão lá e dão a aula, mas acho que deve ser mais criteriosa esta preparação. No semestre passado não deu muito para saber como o estágio realmente acontece, porque não tive contato com os alunos.

Peterson relatou que iniciou a licenciatura em matemática com o propósito de ser professor e manteve essa intenção ao longo do curso, mesmo diante de várias dificuldades.

> **Peterson:** Eu estudei sempre em escola pública e me considerava bom em matemática, mas quando entrei na UFMG, eu descobri que não era bom, que eu sabia fazer contas e decorar

fórmulas. Eu tomei um baita susto! Demorei uns dois ou três meses para entender o que era a matemática da UFMG, que é diferente do que eu esperava. O curso foi muito difícil, foi desafiador, mas nunca desisti.

Diante do percurso na licenciatura que Peterson tinha trilhado nos primeiros semestres, ele resolve pedir demissão para se dedicar mais aos estudos.

Peterson: Eu achei que iria conseguir conciliar trabalho e estudo, por isso optei por fazer o curso à noite, mas eu estudaaava, estudaaava, estudaaava, porém minhas notas estavam sempre baixas! Eu fiquei estudando e trabalhando durante um ano e meio. Então, eu pedi demissão e as minhas notas foram melhorando aos poucos.

Sobre a preparação para ser professor, Peterson citou as disciplinas que considera que mais contribuíram para a sua formação.

Peterson: As duas matérias que eu fiz com uma professora do ICEx foram as que mais me ajudaram: ‘Números na Educação Básica’ e ‘Geometria na Educação Básica’. Ela fazia muitos questionamentos e nos colocava realmente para pensar. Eu refleti sobre muitos conteúdos básicos, mas que, quando fui pensar em como ensinar, vi que não são simples. Eu acho que são coisas importantes para ser professor. No primeiro estágio, eu e Marília elaboramos um plano de aula sobre divisão. No automático, a gente sabe fazer uma divisão usando o algoritmo, mas saber explicar o algoritmo é outra coisa. Por que coloca um zero? Eu não tinha pensado em transformar unidades em décimos, décimos em centésimos. Então para planejar a aula, lembrei muito dos questionamentos que ela fazia, sempre tínhamos que buscar explicações, pensar em formas diferentes das que tínhamos aprendido na escola. As matérias da Faculdade de Educação, eu fiz on-line e achei que não aproveitei tanto; Psicologia da Educação, eu gostei, mas achei muito teórico, não vi como aplicar.

Peterson também disse que considerou importantes os aprendizados que obteve ao lecionar aulas particulares, em atuar como monitor em uma escola municipal e em aplicar provas em uma escola particular, possibilitando que ele começasse a se ver como professor. Depois, compartilhou suas expectativas em relação ao segundo estágio curricular supervisionado que seria iniciado:

Peterson: Eu quero muito aprender, também quero ver como é que eu vou reagir porque eu sou um pouco tímido não só para dar aula, sou tímido de maneira geral. Eu quero me preparar bem para as aulas e quero ver como irei me sair, porque penso que é muito diferente de dar aula particular e lecionar para uma turma inteira!

Peterson relatou que considera que são necessários vários conhecimentos para ser um bom professor de matemática.

Peterson: É lógico que um bom professor precisa saber a matéria que vai ensinar, mas também tem que saber chamar a atenção dos alunos, preparar uma aula legal. Eu acho que os professores precisam ser criativos, de variar a maneira que dá aula para sair da mesmice. Eu penso também que o professor tem que perceber quando o rumo que ele está tomando não está bom, perceber se os alunos estão aprendendo ou não e mudar quando for necessário. Eu até gosto do modelo de aula tradicional, mas acho que não dá para ficar só nisso, é preciso dar espaço para os alunos falarem, participarem. Como que faz isso? Eu ainda não sei. Espero que o estágio me ajude a ter respostas para algumas perguntas.

Quando pedi para Peterson imaginar uma sala de aula em que a aula está fluindo bem, ele fez o relato a seguir.

Peterson: Esta pergunta é difícil. O meu jeito é sério, mas também gosto de brincar, de rir. Eu gostaria de ser um professor que tem uma boa relação com os alunos, mas também fico com dúvida: se eu tentar ser amigo deles, eles irão me levar a sério? Eu não gostaria de ter que dar bronca, mas sei que é preciso que os alunos respeitem os professores. Eu não pensei em uma aula que o professor está falando e todo mundo está quietinho, pensei em uma aula que os alunos estão participando, que o professor está fazendo perguntas sobre um assunto e os alunos estão respondendo, que está havendo uma troca. Se os meninos estão curiosos, a aula está boa. Um aluno pergunta: "Professor, e se a gente fizer assim?". Eu posso ser muito utópico também porque a gente estuda muita matemática e, com o estágio, vou poder pensar mais na prática de sala de aula.

Ao final da entrevista, Peterson, voltou a salientar que ingressou no curso de licenciatura com o propósito de ser professor e, mesmo com vários desafios enfrentados na realização do curso, nunca pensou em desistir.

Depois que informei de que a entrevista tinha terminado, Peterson quis fazer uma pergunta sobre a pesquisa.

Peterson: Eu entendi como será a pesquisa, mas não sei se a Marília conversou com você, porque nós conversamos sobre a nossa participação. A Marília comentou comigo que está preocupada de ela não ser uma boa estagiária, de atrapalhar a sua pesquisa. Eu falei com ela que eu entendi que o intuito não é avaliar se o estagiário é bom ou não, mas de a gente aprender junto. Eu entendi que o Estudo de Aula vai nos ajudar a preparar uma aula melhor e você vai pesquisar como iremos realizar o estágio. É isso, mesmo?

Então, novamente destaquei alguns princípios do Estudo de Aula, expliquei as fases desse processo e salientei que a preparação da aula será feita em conjunto, a observação e análise tem como foco a aprendizagem dos estudantes e não em avaliar quem lecionou a aula**.**

Com essa fala de Peterson e, também, em relação à preocupação de Marília que ela já havia externado nos momentos em que conversamos por telefone, fiquei pensando no que foi discutido em algumas aulas da matéria que cursei no doutorado – Narrativas e História Oral – sobre o que significa para os 'sujeitos de pesquisa' serem observados, analisados, contarem suas histórias de vida. A preocupação de Marília e Peterson em relação a contribuições deles para a realização da pesquisa voltou a surgir em outros momentos. Lembrei-me, também, de uma conversa que tive com um professor que, por duas vezes, já foi sujeito de pesquisa, tendo sua prática docente observada e analisada, que comentou: - “Eu já dei minha contribuição para a academia, pois duas vezes fui sujeito de pesquisa, agora que outros contribuam!”. Essas situações me fizeram refletir que, mesmo com todos os cuidados éticos, não deixa de ser preocupante ser sujeito de pesquisa. Então, procurei ter mais cuidado para que a participação, nesta investigação, contribuísse para a formação de Peterson e Marília, para que eles se sentissem como parte do processo e não como sujeitos que estão sendo observados e analisados. Será que isso foi possível?

Durante o período de estágio, Peterson foi muito dedicado, buscou contribuir para a aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental, dedicou-se na realização dos estudos, no planejamento, execução e análise das aulas lecionadas pelos estagiários. Além disso, compareceu nos dias previstos para acompanhar as aulas do professor Tiago na escola e, também, esteve presente em todas as reuniões realizadas para o desenvolvimento do Estudo de Aula. Durante esse processo, algumas vezes me questionou se o modo como ele estava participando das atividades estava cooperando para a realização da pesquisa. Então, precisei lembrá-lo de que a participação no processo era a sua maior colaboração!

Peterson, assim como Marília, precisava apenas do segundo estágio para concluir a licenciatura. Ao finalizar o curso em julho de 2022, continuou lecionando aulas particulares e aguardando até ser nomeado na Rede Municipal, pois já havia sido aprovado em concurso público. No segundo semestre de 2023, foi nomeado e começou a lecionar na mesma escola que realizou os estágios.

Pudemos observar, com os relatos dos estagiários, que a principal expectativa diz respeito a aprender a lecionar que, segundo Guérios (2015), é o anseio mais comum de alunos da licenciatura. Também constatamos duas preocupações principais em relação aos conhecimentos para lecionar matemática na educação básica: a primeira delas diz respeito ao contato com os alunos, desejosos de serem adequados, instigantes e que promovam participação. Esta colocação dos estudantes, ainda que sem uma fundamentação teórica, vai ao encontro do que coloca Teixeira (2007), considerando ser a relação docente-discente o foco da docência, onde ela se instala e se realiza. A segunda preocupação diz respeito a considerar que a matemática precisa ser abordada de forma que seja compreensível aos estudantes, com metodologias variadas. Sabemos que isto diz respeito a um conhecimento que o professor precisa construir e que é próprio da docência, que articula o conhecimento matemático com o pedagógico. Estas preocupações dos estagiários vêm ao encontro dos objetivos desta pesquisa.

4.2.3 O professor Tiago

Logo que iniciamos o acompanhamento das aulas, pudemos constatar como o professor Tiago era querido pelos alunos. Ele andava pelos corredores da escola conversando com os discentes que o procuravam para falar da vida, sobre as aulas, contar piadas e, principalmente, para comentar sobre futebol.

O estagiário Peterson escreveu sobre a relação do professor supervisor com os discentes em seu relatório de estágio:

> Ao longo de todo o semestre, o modo como o professor Tiago se relacionou com os alunos foi o que mais me deixou admirado. Todos os alunos o respeitam como pessoa e como professor. Em uma das primeiras conversas que tivemos, ele nos contou que a parte mais importante de ser professor é criar uma boa relação com os alunos e, para isso, o professor precisa de tempo e estar de coração aberto para entender os alunos e o contexto no qual eles estão inseridos, que o diálogo entre aluno e professor é fundamental. Porém, mesmo com a ótima relação entre o professor e os alunos, algumas vezes ele precisou chamar a atenção dos alunos com mais firmeza, com uma voz mais alta. Eu considero que isso também é normal, já que tem dias que os alunos estão mais agitados, atrapalhando o andamento da aula (Relatório de estágio, elaborado por Peterson, 2022).

O professor Tiago tem habilitação para lecionar Matemática, Física e Desenho Geométrico, com vinte e sete anos de experiência como docente. Além disso, é formado em Educação Física.

O professor Tiago relatou que sempre residiu na região da localização da Escola e que, quando foi aprovado no concurso, lecionou em uma escola municipal em outro bairro e, depois, conseguiu transferência para a Escola onde trabalha há mais de vinte anos, na qual também foi aluno durante o período que cursou o ensino fundamental.

Professor Tiago: A opção por trabalhar aqui se deu em função de ser uma escola que é próxima de minha casa, eu sou da comunidade também, sempre morei aqui pertinho. Então assim, eu lido com os alunos de uma forma muito tranquila. [...].Eu já lecionei para muita gente do bairro.

Ele explicou que devido à interrupção das aulas presenciais em virtude da pandemia de covid-19, desde o início do ano letivo de 2022, ele estava procurando construir uma base de conhecimentos com os alunos para conseguir trabalhar alguns conteúdos que seriam do ano escolar.

Professor Tiago: A perda foi muito significativa com a pandemia. As turmas de 8º e 9º anos que eu lecionei nos últimos anos tinham dificuldades, devido à nossa clientela que poucos alunos têm rotina de estudos, mas mesmo assim conseguíamos fazer um trabalho melhor. Com a suspensão das aulas presenciais por quase dois anos, a situação está muito difícil, a

gente está tendo que construir uma base para conseguir trabalhar algum conteúdo que seria do ano escolar. Um aluno que está no 8º ano, não fez o 6º e o 7º ano, porque quase nenhum aluno fazia os blocos de atividades que eram entregues impressas todo mês. Falta base mesmo, desde a tabuada, não é? E sem analisar outros aspectos, de raciocínio. Mas eu acho que é esperada esta situação pós-pandemia.

Sobre o desafio de ensinar matemática para a geração atual, o professor Tiago acrescentou:

Professor Tiago: Eu acho que os professores também vão ter que buscar outras soluções para tornar as aulas mais atraentes, porque tudo está mudando, e a grande verdade é que a gente também não muda nessa rapidez, ainda mais os professores mais antigos. Eu acho que será necessário fazer uso de novas tecnologias dentro de sala de aula; falar mais a linguagem deles para poder acessá-los, mas, para quem está quase se aposentando como eu, é difícil mudar!

Em relação à atuação como supervisor de estágios curriculares de estudantes da licenciatura em matemática, ele não tinha experiência anterior. Nas conversas que teve com os estagiários, deu ênfase aos seguintes aspectos: a importância de eles terem contato com a escola pública durante o período de formação inicial para conhecer uma realidade que deve ser bem próxima da futura atuação profissional deles, perceberem a importância de criar uma relação de proximidade e de respeito com os alunos e, ao mesmo tempo, ‘controlar’ as turmas, diminuindo problemas de indisciplina.

4.2.4 A professora, formadora de professores e pesquisadora Roselene

Vou tentar contar resumidamente a minha história. Quando pequena, várias amigas e primas diziam que queriam ser professoras, os tempos eram outros! Mas eu, não!!! Eu não tinha ideia de qual profissão seria, porém sabia que não queria ser professora. Ao final do ensino médio, sem nenhuma noção de qual profissão eu iria seguir, logo excluí a opção de fazer Matemática, Física ou qualquer outro curso relacionado à docência. Fiz um teste vocacional rápido que foi proposto por uma orientadora educacional do colégio em que eu estudava e, com base nele, e em algumas outras eliminações, escolhi fazer Engenharia Mecânica. No ano seguinte, comecei a fazer esse curso no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET/MG. Enquanto estudava os cálculos, as físicas, ia seguindo o curso sem pensar na minha futura profissão, até que começaram as matérias específicas no quarto, quinto período e eu tive vontade de sair correndo.... Aproveitei a greve dos professores que ocorreu quando eu estava no meio do sexto período e não voltei mais!

Os anos se passaram, trabalhei com implantação e treinamento de sistemas de informação por doze anos até que a vontade de estudar voltou! Já casada e com dois filhos, em 2004, resolvi fazer Administração de Empresas e me matriculei em um cursinho pré-vestibular. Com um mês de cursinho já tinha concluído as apostilas de matemática do semestre. Essa experiência foi muito interessante porque descobri que o que tinha aprendido estava adormecido, não esquecido! Os conhecimentos matemáticos voltaram com muita nitidez em minha mente! Reavivado o gosto pela matemática, decidi fazer licenciatura para atuar como professora. Sim! Resolvi ser professora!

No meio desse mesmo ano, mudei-me de Belo Horizonte para o interior e, no ano seguinte, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário do Cerrado, em Patrocínio/MG, onde residia. Eliminei várias matérias que eu já havia cursado na Engenharia e me tornei aluna destaque do curso de Matemática, porque, quando meus filhos iam para a escola, eu passava as tardes estudando, já que frequentava o curso à noite. Por questões familiares, voltei a residir em Belo Horizonte dois anos depois e fiz prova para obter transferência para a UFMG, fui aprovada, contudo as matérias cursadas não foram eliminadas e, diante disso, resolvi dar continuidade ao curso no Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH).

Até aquele momento, eu já tinha feito algumas matérias referentes à Educação, mas continuava dando mais importância ao aprendizado da matemática. No UniBH, cursei cinco disciplinas – Matemática e Educação I, II, III, IV e V – que me possibilitaram adquirir vários conhecimentos para ensinar matemática e mudaram a minha visão em relação à formação para ser professora de matemática. Eu percebi a importância de que, além de saber os conteúdos, era preciso conhecer formas de abordá-los no ensino. No último ano do curso, a professora que orientou a elaboração do meu TCC – O papel do professor nas aulas de investigação Matemática - indicou-me para participar de um grupo de pesquisa da PUC Minas – Pinem (Grupo de Pesquisa de Práticas Investigativas no Ensino de Matemática). A elaboração do TCC e a participação nesse grupo foram importantes para eu aprender a buscar artigos sobre Educação Matemática e, principalmente, para eu ampliar conhecimentos e refletir como os tipos de tarefas e o ambiente de sala de aula podem favorecer a aprendizagem.

Durante os anos de realização da Licenciatura, lecionei aulas particulares para alunos do ensino fundamental e médio e lecionei em duas escolas estaduais. Concluí o curso de licenciatura em matemática ao final de 2008 e lecionei em uma escola particular para turmas do 6º, 7º, 8º e 9º anos, de 2009 a 2012.

Ingressei no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas no início de 2010. Nesse programa, pude construir novos conhecimentos sobre o ensino de matemática, por meio das disciplinas cursadas e da pesquisa que ocorreu na minha própria sala de aula com alunos do oitavo ano. Assim, elaborei a dissertação intitulada “O desenvolvimento do pensamento geométrico: trabalhando polígonos, especialmente, quadriláteros” (Amâncio, 2013). Quando estava iniciando a pesquisa, a minha orientadora, Dra. Eliane Gazire, indicou-me o livro “A matemática no ensino fundamental: Formação de professores e Aplicação em sala de aula” (Van de Walle, 2009), para que eu pudesse ler o capítulo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Li o capítulo várias vezes e resolvi adquirir esse livro que, desde então, influenciou e continua influenciando muito a minha prática docente.

Em 2013, atuei no Centro Pedagógico da UFMG (CP) como professora substituta, lecionando para turmas de 1º e 2º ano do Ensino Fundamental. Foi um grande desafio! Precisei estudar muito para ensinar matemática para crianças pequenas. Nesse mesmo ano, participei do concurso para professores efetivos do CP e tomei posse em janeiro de 2014.

Ao me tornar professora efetiva, foi como se eu estivesse em outra Instituição! Além do ensino de matemática para turmas do ensino fundamental, passei a exercer atividades de pesquisa, extensão, administração. Também, ao longo destes anos, tive a oportunidade de orientar estudantes de diferentes licenciaturas da UFMG que participavam do Programa Imersão Docente[4] e supervisionar estágios curriculares de estudantes da licenciatura em matemática. Além disso, atuei como professora formadora no Curso Residência Docente[5] de 2014 a 2020. Em todas essas atividades aprendi muito com meus colegas professores do Centro Pedagógico, em especial, os do Núcleo de Matemática.

Com o ingresso no doutorado, realizei esta investigação na qual eu desenvolvo um duplo papel: de pesquisadora e formadora. Descrevo como foi o meu percurso no doutorado na subseção 4.4.3 – Minha trajetória como doutoranda.

---

[4] O Programa Imersão Docente do CP visa a contribuir para a formação inicial de professores e outros profissionais que podem atuar no contexto escolar. Assim, participam do projeto estudantes de várias licenciaturas da UFMG e outros cursos de graduação, como Psicologia e Terapia Ocupacional.

[5] O curso de pós-graduação Residência Docente tem como objetivo geral contribuir para a formação de professores da rede pública de Educação Básica com base em vivências e reflexões sobre o fazer pedagógico, no Ensino Fundamental, nas dimensões teóricas e práticas.

4.3 O contexto de desenvolvimento da pesquisa

4.3.1 A escola e as turmas

A pesquisa empírica foi realizada em três turmas de oitavo ano e duas turmas de nono ano de uma escola municipal de Belo Horizonte que atende alunos do 1º ao 9º ano de Ensino Fundamental. Quase todos os estudantes residem no bairro em que está localizada a Escola ou em bairro vizinhos, e vários deles moram em vilas.

A Escola possui uma ótima estrutura física, com jardim, biblioteca, quadra coberta e refeitório. As salas de aula estavam bem pintadas e limpas, eram equipadas com dois quadros brancos e um computador. As mesas e cadeiras utilizadas pelos estudantes pareciam novas. Porém, o tamanho das salas de aula não era adequado para mais de 25 alunos de forma que as mesas nas salas do nono ano ficavam muito próximas umas das outras para acomodar os estudantes. A tabela 5 exibe a quantidade de meninos e meninas de cada uma das turmas.

Tabela 5 – Número de alunos por turma

Turma	Meninas	Meninos	Total
8º ano A	11	17	28
8º ano B	10	13	23
8º ano C	15	10	25
9º ano A	15	16	31
9º ano B	19	13	32

Fonte: Informações fornecidas pela secretária da Escola

Os estudantes tinham cinco horários de aula por dia, no turno da manhã, com duração de 50 minutos. Como forma de evitar maiores aglomerações em detrimento da pandemia de covid-19, os horários de intervalos ocorriam de forma que as turmas de oitavo e nono anos não coincidiam com os do sexto e sétimo anos.

Percebemos que ocorria um bom relacionamento entre os docentes pelas conversas na sala dos professores. Sobre a receptividade dos professores, Marília escreveu em seu relatório de estágio: ‘Os professores nos receberam muito bem na escola e eu me senti muito acolhida por eles’.

Os estudantes pareciam ter um bom relacionamento entre eles e com a maioria dos professores. Durante o período de acompanhamento das aulas, tivemos ciência da ocorrência de apenas um conflito mais sério entre dois estudantes. Pelo relato dos professores e em conversas com os próprios alunos, pudemos constatar que vários estudantes da Escola pensavam em terminar o ensino médio e buscar uma colocação no mercado de trabalho, poucos tinham planos de cursar o ensino superior.

Durante as aulas, os estagiários e a pesquisadora tiveram oportunidade de auxiliar os estudantes do oitavo e nono anos na realização das tarefas propostas e logo constatamos que a maioria deles ainda precisava aprender vários conceitos e procedimentos que são esperados para anos iniciais do Ensino Fundamental, como: efetuar algoritmo da multiplicação e da divisão, reconhecer uma figura que representa uma fração imprópria, identificar frações equivalentes. Alguns alunos precisavam de ajuda para obter o valor de subtrações, multiplicações e divisões envolvendo números de apenas um algarismo. Porém, nas turmas também havia alunos com um bom cálculo mental e boa escrita.

4.3.2 As aulas do professor Tiago

O professor Tiago, geralmente, entrava na sala de aula interagindo com os alunos e, em seguida, indicava a posição que vários alunos deviam sentar-se (somente a partir de junho é que foi estabelecido um mapa de sala[6]), que segundo ele, tinha objetivo de evitar a proximidade dos estudantes que, geralmente, conversavam muito. A organização da sala era concluída em torno de dez minutos, que não era um tempo pequeno para cada aula.

O professor Tiago lecionava quatro aulas semanais em cada turma e destinava uma delas para trabalhar conteúdos de geometria. Ele utilizava um livro da década de 1980 para ensinar matemática que, segundo ele, é muito bom, pois inicia os conteúdos com definições que são seguidas de exercícios e, depois, propõe aplicações. As aulas do professor Tiago, na maioria das vezes, foram expositivas e pautadas em exercícios. Ele organizava o quadro muito bem, expondo a matéria e os exercícios para os alunos copiarem no caderno. Enquanto copiavam, os estudantes tinham liberdade para conversar, utilizar o celular no silencioso ou com fones de ouvido. Depois que terminava de copiar a matéria no quadro, incluindo os exercícios propostos, solicitava a atenção dos estudantes que quase sempre o atendiam, fazendo silêncio para ouvi-lo explicar o conteúdo exposto e a maneira que deveriam proceder para resolver os exercícios. Quando necessário, ele chamava os alunos por nome até que todos fizessem silêncio. Em várias aulas, o professor Tiago fez perguntas aos alunos, principalmente em relação aos procedimentos que deveriam ser feitos para resolver os exercícios, e houve também ocasiões em que ele procurou relacionar os conteúdos a situações

[6] Mapa de sala é uma organização que fixa a posição de cada estudante em um determinado lugar na sala de aula.

que faziam parte do cotidiano dos alunos, citando lojas do bairro e produtos que eles poderiam ter interesse.

Na maioria das aulas, observamos que, do tempo total de 50 minutos, geralmente 30 minutos ou mais eram usados para organização da posição das carteiras dos estudantes, cópia da matéria e de exercícios da lousa e explicações do professor. Desse modo, restavam em torno de 20 minutos, ou menos, para realização de atividades. Em algumas aulas, o professor Tiago propôs trabalhos em grupos que envolveram exercícios numéricos e alguns problemas.

> As aulas dele seguiam um mesmo padrão: ele passava a matéria no quadro, explicava, fazia alguns exemplos no quadro com a participação dos alunos e depois passava alguns exercícios para os alunos fazerem. Quando os alunos terminavam, mostravam para o professor que dava um visto no caderno, pois as atividades realizadas faziam parte da distribuição dos pontos da etapa. (Relatório de estágio, elaborado por Peterson, 2022).

Quando iniciamos o acompanhamento das aulas, estava próximo do período de avaliações e o professor Tiago estava revendo os seguintes conteúdos nas turmas de oitavo e nono ano: operações com números inteiros; operações com números fracionários; cálculo de potências; cálculo de raízes quadradas e cúbicas; soma de ângulos internos de um triângulo. Sobre isso, Peterson fez o seguinte registro em seu relatório de estágio: “Algo que me chamou a atenção, logo no início do estágio, foi que o professor Tiago estava trabalhando os mesmos conteúdos no oitavo e nono anos”.

Após a revisão, o professor Tiago trabalhou com as turmas do oitavo ano: resolução de equações de 1º grau; classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos; posições relativas de retas; classificação de quadriláteros. Nas turmas de nono ano, além dos conteúdos trabalhados nas de oitavo, ele ensinou resolução de equações completas do 2º grau.

4.4 O processo desenvolvido na pesquisa

Nesta seção, irei apresentar os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa, o processo formativo desenvolvido com a estagiária Marília e o estagiário Peterson e a minha trajetória como doutoranda.

4.4.1 Procedimentos metodológicos

Conforme anunciamos, realizamos uma pesquisa com abordagem colaborativa. De acordo com Desgagné (2007), a pesquisa colaborativa entre pesquisadores e docentes compreende, ao mesmo tempo, atividades de pesquisa e de formação, possuindo dupla perspectiva, pois será considerada como um processo formativo para os docentes e um projeto de pesquisa para o pesquisador. Assim, é propícia para o desenvolvimento profissional dos docentes, tendo em vista que eles podem ter a oportunidade de questionar ou explorar um aspecto de sua prática profissional. Também pode favorecer a produção de conhecimento por parte do pesquisador.

Segundo o autor, a abordagem de pesquisa colaborativa em educação supõe a contribuição dos professores no processo de investigação de um objeto de pesquisa, de forma que eles se tornem coconstrutores do conhecimento que está sendo produzido. Desse modo, demanda a colaboração dos professores na investigação de um dado objeto, como a utilização de dispositivos para a coleta e análise de dados que favoreçam a produção de conhecimentos. Por outro lado, confere aos professores uma oportunidade de pesquisar a própria prática, visto que eles precisarão participar, com o pesquisador, de um processo de compreensão e reflexão sobre aspectos ligados às suas práticas.

Em relação ao/à pesquisador(a), Desgagné (2007) observa que ele/ela precisa evitar ter um olhar normativo e exterior sobre o que os professores fazem, porém deve procurar com eles, no interior do contexto em que atuam, a compreender em que se apoiam suas ações. Desse modo, precisa considerar o ponto de vista dos docentes e os limites de sua atuação profissional. Da mesma forma, torna-se necessário que os professores considerem o ponto de vista do pesquisador e os limites da investigação.

Assim, o conceito de colaboração se apoia na compreensão recíproca das preocupações e dos respectivos interesses que motivam, tanto o pesquisador como os docentes a participarem do projeto de investigação.

Além disso, Desgagné (2007) ainda afirma que a duplicidade também ocorre em relação ao pesquisador, que exerce tanto o papel de formador como de investigador. Porém, para evitar que o pesquisador se torne mais formador do que pesquisador, de forma que a sua preocupação seja mais em relação a favorecer o desenvolvimento dos professores do que realizar uma atividade de pesquisa, é preciso que sejam desenvolvidos procedimentos que sustentem a investigação. Desse modo, faz-se necessário que a pesquisa colaborativa contemple a definição de um objeto de pesquisa, a metodologia de construção e análise de dados e de uma apresentação de resultados.

Realizamos uma pesquisa colaborativa, nessa perspectiva, desenvolvendo o processo formativo Estudo de Aula com um estagiário e uma estagiária da licenciatura em matemática, e contando com participações pontuais do professor supervisor. Os nomes mencionados são fictícios.

Os dados produzidos foram compostos pelas gravações em áudio das reuniões realizadas para o desenvolvimento do Estudo de Aula (estudos, planejamentos e análise das aulas lecionadas pelos estagiários); pelas imagens do quadro que foram fotografadas durante as aulas lecionadas pelos estagiários; pelos registros realizados pela pesquisadora em seu caderno de campo, pelos relatórios produzidos pelos estagiários e por uma entrevista individual realizada com cada estagiário ao final do estágio.

Alvarado-Prada, Freitas e Freitas (2010) afirmam que as concepções de formação de professores e suas interpretações, geralmente, não mostram pensamentos de quem as vivenciam, sendo estes analisados pelos olhares de outros sujeitos. Considerando esse alerta, procuramos conhecer as percepções dos estagiários em relação ao Estudo de Aula que participaram durante o estágio curricular supervisionado.

Oliveira, Fonseca e Santos (2010) destacam a relevância da entrevista para obtenção de dados subjetivos:

> A entrevista torna-se relevante para obtenção de dados de caráter subjetivo, principalmente na pesquisa qualitativa, na medida em que essa, ao estabelecer uma relação de interdependência entre o sujeito e o objeto, destaca o sujeito, que tem um papel fundamental no processo de investigação ao interpretar os fenômenos atribuindo-lhes significados. (Oliveira, Fonseca e Santos, 2010, p. 38)

Ibiapina (2008) ressalta a importância das entrevistas individuais ou coletivas para as pesquisas colaborativas, pois considera que os questionamentos do entrevistador ajudam na verbalização, trazem a tona condutas não refletidas e auxiliam na compreensão das ações materiais e mentais vivenciadas pelos grupos sociais.

Como os dados apresentados são predominantemente descritivos, contendo muitas falas dos participantes, optamos por inserir os diálogos em molduras, com formatação simples e espaço de três pontos após cada parágrafo para que a leitura ficasse mais agradável.

4.4.2 O percurso trilhado na realização de um estágio diferenciado

O estágio de Marília e Peterson teve início no dia 19 de abril do ano de 2022. Nessa ocasião, o professor Frederico, já como diretor da escola em que atuamos, recebeu os estagiários na escola, mostrou-lhes o espaço físico e os apresentou ao professor Tiago, que lhes informou sobre a escola e acerca dos estudantes. A partir do dia 26 de abril, começamos a acompanhar as aulas do professor Tiago em três turmas de oitavo ano e duas turmas do nono ano.

Marília e Peterson acompanharam as aulas do professor Tiago na escola e participaram das aulas da disciplina "Análise da prática pedagógica estágio II" com professores na universidade que contemplaram a elaboração de relatórios sobre o estágio, os quais fizeram parte dos dados desta pesquisa. Eles também participaram de outras atividades durante o período de estágio para o desenvolvimento do Estudo de Aula: reuniões realizadas com a pesquisadora, conversas em um grupo de *WhatsApp*, postagens de materiais em um arquivo compartilhado em um *drive* e produção de materiais para as aulas que eles lecionaram. Desse modo, consideramos que Marília e Peterson realizaram um estágio diferenciado.

Foram realizadas quatro reuniões na Escola, com a participação do professor supervisor, dos estagiários e da pesquisadora, que ocorreram no 1º horário de terça-feira, de sete às oito horas, pois, nesse horário, os alunos da turma em que o Professor Tiago iria lecionar matemática participavam de um projeto com estudantes de Psicologia de uma faculdade privada. Nesses momentos, o professor Tiago compartilhou conosco informações sobre a comunidade escolar, sobre as turmas e sobre alguns alunos específicos. Discutimos várias questões, como: relação professor-aluno, disciplina/indisciplina, mudança no perfil dos alunos ao longo dos anos, impactos da pandemia na aprendizagem dos alunos que demandavam trabalhar conteúdos de anos anteriores. Nesses momentos, foram definidos os temas das aulas que os estagiários iriam lecionar e ocorreram algumas discussões sobre planejamento das aulas sobre tabuadas da multiplicação. Porém, a partir do dia 24 de maio, os horários das aulas foram alterados e não pudemos mais contar com esse tempo conjunto. Assim, o professor Tiago se dispôs a discutir as questões do estágio durante os intervalos, mas nem sempre isso foi possível, pois o intervalo era de apenas vinte minutos e, muitas vezes, ele precisou resolver outros assuntos. Mesmo assim, os estagiários apresentaram os planejamentos das aulas para o professor supervisor e consideraram as recomendações feitas por ele para desenvolver as aulas.

Também, foram realizadas treze reuniões semanais, com a presença da pesquisadora, do estagiário Peterson e da estagiária Marília, das quais sete ocorreram em uma sala na Universidade disponibilizada por uma professora da casa; três ocorreram de forma virtual; duas ocorreram na Escola em que a pesquisadora atua como professora, para que os estagiários pudessem utilizar uma lousa, possibilitando simular a aula antes de lecioná-la, e uma ocorreu na escola que era o campo do estágio após o horário das aulas. Nessas reuniões, foram realizados estudos de textos sobre educação matemática, analisados livros didáticos, elaborados os planejamentos e feitas as análises das aulas lecionadas pelos estagiários. Também, nesses momentos, foram discutidas algumas questões relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem da matemática que foram suscitadas com base no acompanhamento das aulas do professor Tiago, conforme mostrado no quadro 2 .

Quadro 2– Reuniões realizadas com Peterson e Marília

Data	Descrição
27 de abril	Na 1ª reunião, Peterson e Marília compartilharam suas primeiras impressões sobre a Escola, os estudantes e as aulas que haviam acompanhado que possibilitou algumas reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, inclusive as maneiras de auxiliar os estudantes na realização das tarefas.
04 de maio	Na 2ª reunião, os estagiários compartilharam suas impressões sobre as aulas que observaram que foram propícias para refletirmos sobre alguns aspectos do processo de ensino e aprendizagem da matemática e sobre maneiras de auxiliar os estudantes na realização das tarefas propostas. Posteriormente, iniciamos o planejamento da primeira aula que os estagiários iriam lecionar que iria abordar as tabuadas de multiplicação do 4 e do 8. Ao final desse encontro, discutimos alguns pontos do *artigo "*Comunicação Matemática na sala de aula: Um campo de desenvolvimento profissional do professor*" (*Martinho e Ponte, 2005), com atenção aos tipos de pergunta que um professor pode fazer.
11 de maio	No 3º encontro, realizado de forma virtual, os estagiários compartilharam suas primeiras ideias sobre a aula que iriam lecionar relativa ao teorema de Pitágoras, depois discutimos alguns pontos do artigo "Investigar, ensinar e aprender" (Ponte, 2003). Ao final, decidimos mudar o jogo que seria proposto na primeira aula que iria abordar as tabuadas de multiplicação de 4 e 8.
18 de maio	Na 4ª reunião, a pesquisadora entregou, para os estagiários, o artigo impresso "Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios" (Canavarro, 2011), pois o Peterson gostaria de entender mais sobre atividades exploratórias, porém esse texto não foi discutido coletivamente. Depois compartilharam suas impressões sobre a primeira aula que abordou as tabuadas do 4 e do 8 que eles haviam lecionado no dia 13 de maio. Em seguida, consultamos alguns livros didáticos para subsidiar o planejamento da aula sobre teorema de Pitágoras. Assim, os estagiários pensaram em planejar a aula de forma que os alunos pudessem descobrir a relação entre as áreas dos quadrados da hipotenusa e dos catetos, por meio da exploração de alguns recortes com a forma de triângulos e quadrados, antes de apresentarem a fórmula. Além disso, começam a questionar se seria adequado apresentar uma demonstração do teorema considerando os conhecimentos prévios dos estudantes.
25 de maio	Na primeira parte da 5ª reunião, que foi realizada de forma presencial, lemos e refletimos sobre cada parte do planejamento da aula que havíamos elaborado na Escola e iria abordar as tabuadas da multiplicação por 3 e por 9 que culminou em algumas alterações. Depois, refletimos sobre os conhecimentos prévios que os alunos precisavam ter para compreender duas demonstrações do teorema de Pitágoras. Diante disso, os estagiários descartam a possibilidade de apresentar uma demonstração do teorema de Pitágoras. Assim, passamos a discutir de que forma poderia ser utilizado papel quadriculado para possibilitar que os alunos verificassem com mais facilidade a área dos quadrados. Por fim, os estagiários refletiram sobre como seria possível conduzir a aula para que os próprios estudantes descobrissem a relação pitagórica e começaram a pensar como elaborar uma tabela para ajudar os alunos a organizarem os dados dos triângulos que iriam explorar.

01 de junho	Iniciamos a 6ª reunião consultando as habilidades indicadas pela BNCC referentes ao teorema de Pitágoras e, em seguida, definimos um objetivo para cada uma das duas aulas que os estagiários iriam lecionar. Foi decidido que, na primeira aula, haveria um momento inicial em que os estagiários explorariam um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados feitos em EVA com toda a turma, depois os alunos iriam explorar três triângulos com seus respectivos quadrados (recortes de papel) e preencheriam uma tabela com os dados dessas figuras e registrar suas descobertas. Ao final, seria conduzido um momento de socialização.
06 de junho	Por sugestão dos estagiários, resolvemos fazer esta reunião extra (7ª), de forma virtual, para revisarmos o que havíamos planejado para a primeira aula sobre teorema de Pitágoras e, também, pensarmos em alguns detalhes, como: escala a ser utilizada para produzir as figuras em EVA; quantidade de kits dos alunos que seriam produzidos; ações dos estagiários nos vários momentos da aula; forma de apresentar o enunciado do teorema de Pitágoras. A análise da segunda aula sobre tabuadas que ocorreu no dia 03 de junho foi feita de modo sucinto na Escola.
08 de junho	A 8ª reunião foi realizada na escola em que a pesquisadora atua como professora para que os estagiários pudessem simular a primeira aula planejada em uma sala de aula, inclusive utilizando o quadro. Essa simulação proporcionou reflexões sobre cada momentos da aula que culminou em outras alterações no planejamento, além de possibilitar que os estagiários pudessem pensar em como organizar o quadro e fazer alterações na tarefa que seria proposta aos estudantes.
15 de junho	Na 9ª reunião, iniciamos o planejamento da segunda aula sobre teorema de Pitágoras. Nesse dia, decidimos que o "Desafio" seria proposto na segunda aula. Discutimos maneiras de continuar utilizando a representação geométrica do teorema de Pitágoras para chegar à representação algébrica. Os estagiários também selecionaram duas questões que seriam apresentadas como exemplo de utilização da fórmula, tendo o cuidado de que, em uma delas, a incógnita seria a medida da hipotenusa, e na outra, um dos catetos. Também selecionaram dois problemas de aplicação desse teorema para os estudantes resolverem.
17 de junho	Os estagiários sugeriram fazer este encontro extra, de forma virtual, com objetivo de continuarmos nos dedicando ao planejamento da segunda aula sobre o teorema de Pitágoras para que eles pudessem simular a execução da aula na semana seguinte, pois as aulas estavam previstas para ocorrer nos dias 01 e 04 de julho. Esta 10ª reunião envolveu a discussão se poderíamos afirmar que, em um dos problemas, os ângulos do portão mediam realmente 90 graus baseando-se apenas no seu formato retangular; a revisão de cada momento do plano elaborado; a alteração dos enunciados dos dois problemas que seriam propostos na segunda aula e, também, outros pontos que ainda não haviam sido contemplados, como: organização dos alunos (duplas); possíveis estratégias e dúvidas dos estudantes ao resolver os dois problemas que seriam propostos.
22 de junho	A 11ª reunião ocorreu na escola em que a pesquisadora atua como professora. No início desse encontro, Marília e Peterson compartilharam alguns sentimentos e reflexões sobre o curso de licenciatura em Matemática que ambos estavam concluindo nesse semestre. Em seguida, Peterson simulou a execução da segunda aula sobre teorema de Pitágoras, Marília e a pesquisadora foram respondendo as perguntas feitas por ele como se fossem estudantes do nono ano. Ao final da reunião, discutimos alguns pontos do artigo "Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras" (Vieira, Imafuku e Pereira, 2019).
06 de julho	Na 12ª reunião, analisamos a 1ª aula sobre o Teorema de Pitágoras que foi lecionada por Marilia na turma do 9º ano A e por Peterson na turma do 9º ano B no

	dia 05 de julho.
12 de julho	Na 13ª reunião, analisamos a 2ª aula sobre o Teorema de Pitágoras que foi lecionada por Marilia na turma do 9º ano A e por Peterson na turma do 9º ano B, as quais ocorreram neste mesmo dia (12/07).

Durante o estágio, Marília e Peterson tiveram a oportunidade de lecionar quatro aulas: as duas primeiras foram realizadas durante o mês de maio nas turmas de oitavo e nono ano, com a intenção de auxiliar os estudantes a desenvolverem estratégias para obter os resultados de algumas tabuadas da multiplicação; as duas últimas foram lecionadas no mês de julho, nas duas turmas do nono ano, e abordaram o Teorema de Pitágoras. Os planos dessas aulas encontram-se nos apêndices.

O planejamento das duas aulas referente às tabuadas foi elaborado com o desafio de buscar formas de tratar um assunto tão básico para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. O professor Tiago acompanhou mais de perto o planejamento dessas aulas, inclusive indicou quais as multiplicações que deveriam ser abordadas e testou os jogos que foram propostos. Consideramos que o planejamento e a condução das duas aulas sobre as tabuadas foram importantes para que os estagiários tivessem mais oportunidades de planejarem e conduzirem aulas durante o estágio, mas elas não foram realizadas com todas as etapas e detalhes previstos no Estudo de Aula, pois o tempo de um semestre não seria suficiente para desenvolver esse processo sobre dois temas, tendo em vista que o estágio foi iniciado no dia 19 de abril e finalizado no dia 15 de julho.

Para subsidiar o planejamento das duas aulas sobre o Teorema de Pitágoras, foram realizados estudos de artigos e análises de livros didáticos, buscando considerar os conhecimentos prévios, possíveis dúvidas, equívocos e estratégias dos estudantes e, também, pensar nas ações dos estagiários nos vários momentos das aulas. O professor Tiago teve pouca participação em relação ao planejamento dessas aulas: sugeriu o tema, que foi aceito prontamente pelos estagiários, restringiu-se a dizer que a fórmula que representa o Teorema deveria ser apresentada da seguinte maneira: $a^2=b^2+ c^2$, e solicitou que fossem mostrados, no quadro, dois exemplos de utilização dessa fórmula, antes de os alunos resolverem as tarefas que seriam propostas. Não sugeriu nenhuma alteração nos planejamentos que lhe foram apresentados. Pareceu-nos que a opção do grupo em abordar a relação pitagórica por meio da composição de figuras, de forma que os próprios estudantes verificassem que a igualdade era válida apenas nos triângulos retângulos e, com base nisso, generalizar essa relação para chegar à representação algébrica do Teorema de Pitágoras, tratava-se de uma abordagem pouco comum àquela prática.

Com a intenção de conhecer a visão particular de Marília e de Peterson sobre o Estudo de Aula, realizamos uma entrevista individual ao final do estágio. As entrevistas foram semiestruturadas, de forma que as conversas foram guiadas por perguntas, contudo foram feitas buscando dar liberdade para que os entrevistados pudessem compartilhar vivências, ideias e sentimentos que desejassem, sem ficar restritos a responder às questões. Essas conversas foram gravadas em áudio, transcritas e textualizadas. Por meio da leitura desse material, identificamos os elementos que se destacaram nos depoimentos dos futuros professores.

4.4.3 Minha trajetória como doutoranda

Ao ingressar no doutorado em 2020, como já dito, eu já tinha a intenção de desenvolver uma pesquisa com estudantes da licenciatura em Matemática durante a realização do estágio curricular supervisionado. O primeiro ano foi difícil, com muitos desafios a superar, mas também com realizações e aprendizados! Com o início da pandemia da covid-19, em março de 2020, as aulas foram suspensas e, depois, retornaram de forma virtual. Ao ter de conciliar as atividades de professora com as da pós-graduação, passava em torno de doze horas diárias usando o computador. Nesse ano, aprimorei o projeto de pesquisa, cursei disciplinas da pós-graduação que envolveram muitas leituras e trabalhos. Em relação as minhas atividades no CP, foram inúmeras reuniões virtuais para organizar o ensino remoto, discutir o Projeto Político Pedagógico e tantos outros assuntos. Além disso, eu estava lecionando para crianças do 5º ano, e, para favorecer a aprendizagem delas, estruturei o ensino de uma forma que eu considero que foi adequada, considerando as condições existentes, porém que me exigiu muito: produzi uma videoaula por semana; elaborei/adaptei diversas tarefas para os alunos realizarem em seus cadernos, pois não considerei que o livro didático adotado era adequado ao ensino remoto; preparei material para as aulas on-line; elaborei um pequeno questionário on-line para os estudantes responderem, a cada semana, objetivando verificação de aprendizagem. Além disso, precisava postar todos esses materiais na plataforma *Moodle* e depois conferir as tarefas realizadas pelos estudantes. Assim, além de confinada em casa, distanciada da família e amigos, precisei trabalhar/estudar quase todos os finais de semana.

No ano de 2020, também ocorreram coisas boas. Um dos pontos positivos foi que pude contar com a parceria de vários professores do CP, principalmente, dos docentes de matemática, que se reuniram para pensar em um currículo possível de ser desenvolvido no ensino remoto, priorizando certas habilidades, e o apoio para aprender utilizar recursos do *Moodle*, gravar aulas, utilizar aplicativos. Contei com o apoio contínuo da minha orientadora e, também, com outros colegas e professores da linha de Educação Matemática, que leram meu projeto e indicaram pontos a serem melhorados. Também pude conviver bem de perto com meu marido e meus filhos.

O ano de 2021 não foi muito diferente. Continuei cursando matérias da pós-graduação de forma virtual, submeti o projeto ao Comitê de Ética, fiz outras alterações no projeto, continuei realizando estudos sobre as temáticas relacionadas à pesquisa. No CP, a carga de trabalho continuou muito alta, com a permanência do ensino remoto que se manteve até o final do ano letivo, e, a partir de outubro foi concomitante com aulas presenciais que demandou a organização dos alunos em "bolhas" com número reduzido e todo um protocolo para evitar a transmissão do vírus. Nesse ano, consegui organizar o ensino sem produção de videoaulas, o que, para mim, foi um alívio! Além disso, já tinha experiência do ano anterior com o ensino remoto. Também apresentei trabalhos em um evento nacional e um internacional, relacionados à Educação Matemática.

Fui liberada das minhas atividades do CP no ano de 2022 para me dedicar integralmente ao doutorado, mas mesmo assim, esse ano teve início de forma muito tensa, conforme relatei na seção 4.1 - Movimentos para desenvolver o Estudo de Aula. Com a definição dos participantes da pesquisa, principalmente, após as entrevistas realizadas com os estagiários, fiquei aliviada e com ótimas expectativas do que viria pela frente.

Assim, com o início do estágio de Peterson e Marília, passei a acompanhar, com eles, as aulas do professor Tiago às terças-feiras e sextas-feiras; a participar das reuniões/conversas realizadas com o professor Tiago e os estagiários na Escola; a preparar as reuniões semanais que foram realizadas com os estagiários para o desenvolvimento do Estudo de Aula; a fazer registros em meu diário de campo. Também, no primeiro semestre de 2022, tive a oportunidade de cursar uma disciplina de forma presencial – Narrativas e História Oral – a qual foi riquíssima em termos de formação humana e de aprendizados sobre temas que foram novos para mim. Além disso, realizei um levantamento de trabalhos brasileiros, chilenos e portugueses sobre o Estudo de Aula que foram realizados na formação inicial de professores de matemática.

No segundo semestre de 2022, eu precisei de um tempo de afastamento dos dados para colocar as minhas emoções 'no lugar'. Então, depois de duas semanas que o estágio havia sido concluído, iniciei o processo de transcrição dos áudios das entrevistas, das reuniões e das aulas lecionadas pelos estagiários que me demandaram mais de dois meses. Depois disso, fiz a textualização dos arquivos, retirando vícios de linguagens, mudando a posição de algumas informações no texto e excluindo conversas que tinham conteúdos muito pessoais ou que eram sobre assuntos que não tinham relação com a pesquisa. Também nesse semestre, elaborei uma revisão de literatura das produções brasileiras sobre o Estudo de Aula que foram desenvolvidas no contexto da formação inicial de professores de matemática, apresentei um trabalho em um evento internacional e submeti um artigo[7] a um periódico de Educação Matemática que até o momento de finalização desta tese ainda não foi avaliado. Em dezembro, comecei a elaborar o texto para o exame de qualificação exigido pelo Programa de pós-graduação.

O ano de 2023 iniciou sem que eu percebesse o término de 2022, talvez porque eu estava me dedicando a preparar o texto para o exame de qualificação. Nessa ocasião, eu sentia que os dias passavam tão rapidamente! Porém, quando comecei a reler os textos das reuniões com a intenção de identificar conhecimentos para o ensino de matemática que foram mobilizados pelos participantes, fui percebendo que os estagiários foram mobilizando vários conhecimentos no processo de planejamento das aulas e fui elegendo alguns temas que eu considerei interessantes por permearem vários encontros. Esse processo, ainda que muito inicial, possibilitou-me constatar que o material produzido com a pesquisa é rico, então tentei elaborar um texto com a estrutura que teria a tese, com indicação dos capítulos e seções de modo que algumas partes estavam mais desenvolvidas e outras com informações sobre o que eu pretendia inserir. No intervalo entre o envio do texto para os componentes da banca e a realização do exame de qualificação, escrevi outro artigo[8], o qual já foi publicado.

O exame de qualificação foi muito importante para reconhecer potencialidades, indicar fragilidades e pontos que poderiam ser melhor explorados e, principalmente, apontar caminhos para a continuidade da pesquisa, principalmente em relação à análise dos dados que ainda estava muito incipiente. Diante disso, continuei a me dedicar à elaboração desta tese e apresentei um trabalho em um evento internacional, porém ao final de maio realizei um procedimento médico que me exigiu ausentar das atividades por trinta dias. Então, logo que me recuperei, uma tia muito próxima adoeceu e depois de 24 dias de internação veio a falecer. Tudo isso comprometeu a minha dedicação à realização desta pesquisa. Mesmo assim, no

[7] O Estudo de Aula no Brasil e a formação inicial de professores de matemática

[8] O Estudo de Aula no estágio curricular supervisionado: percepções de futuros professores de matemática (Amâncio e Zaidan, 2023a).

segundo semestre de 2023, elaborei outro artigo[9] e avancei na realização deste trabalho com o intuito de finalizá-lo para que a defesa ocorresse ainda no final do ano.

Coloquei estas linhas questões acadêmicas, profissionais e outras tão pessoais, que muitas vezes não são expostas em trabalhos acadêmicos, mas que permitem ao leitor saber como ocorreu esse processo, do ponto de vista da autora.

[9] Princípios do Estudo de Aula: aproximações e distanciamentos em uma experiência realizada com futuros professores (Amâncio e Zaidan, 2023b)

5. CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS PELOS ESTAGIÁRIOS

Inicialmente, tivemos a intenção de identificar os conhecimentos construídos pelos estagiários, de acordo com os domínios de conhecimentos que compõem o modelo MKT - *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT, proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). Contudo, ao percorrer os arquivos textualizados das primeiras reuniões buscando identificar trechos que se relacionavam a esses domínios de conhecimento, logo percebemos que em vários deles tínhamos identificado tanto o "conhecimento do conteúdo e do ensino" como o "conhecimento do conteúdo e dos estudantes". Em um menor número de episódios, identificamos apenas uma dessas categorias. Além disso, localizamos algumas discussões que envolveram conhecimentos curriculares.

Então, começamos a considerar que o Estudo de Aula proporcionou uma forte conexão entre esses domínios de conhecimento que pode ser justificada por um dos princípios fundamentais do Estudo de Aula, que se refere a pensar no conteúdo abordado na perspectiva de seu ensino com foco na aprendizagem dos estudantes.

Além disso, entendemos que mais do que identificar trechos relacionados a cada domínio de conhecimento para, em um segundo momento, poder verificar quais deles foram construídos ou não, nossa intenção era buscar compreensões sobre os conhecimentos construídos pelos futuros professores ao participarem de um Estudo de Aula, durante o estágio. Desse modo, refletimos como poderíamos organizar os dados de modo a favorecer a identificação dos conhecimentos sem dissociá-los do processo em que se deu a construção.

Assim, optamos por analisar os dados, organizando-os por temáticas relevantes para a docência da matemática na educação básica, que se destacam no material empírico produzido, buscando dialogar com autores da Educação Matemática que abordam os temas que elegemos, os quais são: justificação; tarefas; comunicação; recursos didáticos e dinâmica de sala de aula.

5.1 Justificação

A justificação de propriedades na matemática escolar, como qualquer outro processo matemático, precisa ter como objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. A maneira de justificar a veracidade de uma sentença em sala de aula pode diferir do modo como matemáticos profissionais provam a validade de uma conjectura.

Balacheff (1987) considera prova uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. O autor afirma que, para a comunidade dos matemáticos, uma explicação pode ser aceita como prova se for composta por uma série de enunciados organizados segundo regras determinadas: um enunciado é conhecido como verdadeiro ou então é deduzido daqueles que o precedem, por meio de uma regra de dedução tomada com base em um conjunto de regras bem definidas. A esse tipo particular de prova, Balacheff (1987) denomina demonstração.

Algumas pesquisas (Pietropaolo, 2005; Aguilar Junior, Nascer, 2014) mostram que mesmo professores experientes têm dificuldades de desenvolver um trabalho com provas na educação básica.

A investigação realizada por Pietropaolo (2005), com professores universitários vinculados à educação matemática e professores de matemática da educação básica, salienta que esses dois grupos, em seus discursos, consideraram que, nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, deveriam ser ensinadas provas menos formais que teriam o objetivo de convencer a comunidade de sala de aula sobre a veracidade de alguma propriedade ou teorema. Contudo, quando os professores da educação básica analisaram justificações produzidas por estudantes de 14 e 15 anos, a maioria, mesmo que elogiasse as experimentações, conferiu notas baixas àqueles que tiveram esse tipo de iniciativa e atribuíram maiores notas aos que produziram provas mais formais.

Pietropaolo (2005) explica que essas concepções, aparentemente contraditórias, podem ser explicadas pela sedução ao rigor e formalismos das provas formais. Os professores participantes eram, provavelmente, oriundos de licenciaturas que se baseavam no pressuposto de que o objetivo de uma demonstração formal é simplesmente validar e comunicar o conhecimento matemático. Assim, mesmo que a maioria tenha reconhecido a criatividade dos estudantes em fazer experimentações e elogiado a maneira pelas quais alguns encontraram soluções para as provas solicitadas, comunicando seus raciocínios com palavras, eles consideraram que suas produções estavam aquém do ideal técnico. Aguilar Junior e Nascer (2014) encontraram resultados semelhantes ao evidenciar que professores da educação básica também mostraram preferência por argumentos e provas que se aproximam do modelo acadêmico de prova matemática.

Pietropaolo (2005) ainda destaca que os docentes pesquisados salientaram a dificuldade de se trabalhar com provas na educação básica e relataram que consideram importante que futuros professores vivenciem, na Licenciatura, situações similares àquelas almejadas para que eles futuramente desenvolvam suas aulas com vistas a construírem um caminho possível para esse trabalho na educação básica.

Garnica (2001) observa que a matemática da educação matemática é distinta da matemática dos matemáticos profissionais e que, portanto, os estudantes poderão produzir outras formas de argumentar sobre objetos matemáticos.

> [...] a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica de Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da ideologia do conhecimento absoluto para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas de tratamento alternativas às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais (Garnica, 2001, p. 14).

De acordo com Fiorentini e Oliveira (2013), o professor precisa saber que, em situações de ensino e aprendizagem, há diferentes maneiras de construir justificativas para conjecturas, que podem ser aceitas como válidas no contexto de uma sala de aula. A depender do nível de aprendizagem dos alunos, a exigência de rigor pode ser danosa, impedindo que o estudante "possa fruir, explorar e experienciar o processo de criação da matemática" (Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 925). Diante disso, os autores destacam a necessidade de os futuros professores experimentarem como podem ser e funcionar as provas em ambientes exploratórios nas disciplinas matemáticas da licenciatura, pois o conhecimento apenas teórico é ineficiente.

A discussão sobre maneiras de justificar propriedades, teoremas e até definições esteve presente em vários dos nossos encontros. Descrevemos, a seguir, alguns episódios que evidenciam que os futuros professores refletiram sobre maneiras diversas de convencer os estudantes de sala de aula sobre a veracidade de sentenças matemáticas, considerando os tópicos do currículo e a aprendizagem de estudantes com diferentes níveis de conhecimento matemático.

Todo número elevado a zero dá 1!

Logo na primeira reunião, Peterson fez um comentário sobre uma aula que havíamos observado.

Peterson: Eu fiquei pensando sobre uma fala do professor Tiago quando apareceu uma situação de potência com expoente zero: "Lembrem-se de que eu falei com vocês que a demonstração não cabe aqui, mas é importante vocês se lembrarem de que todo número elevado a zero dá um", e eu me lembrei de algumas vezes que discutimos sobre isso em uma

disciplina que eu fiz com uma professora da licenciatura. Por que algumas propriedades não são demonstradas em sala de aula? Será que os alunos não têm capacidade? Será que o professor não está preparado para demonstrar de uma forma que os alunos compreendam para não ficar apenas decorando? Nas minhas aulas particulares, eu demonstro que todo número elevado a zero dá um. Eu acho que têm assuntos que, realmente, são muito complexos, mas coisas básicas assim, estudando, pensando, dá para encontrar uma maneira de provar.

Pesquisadora: Quando você se refere a demonstrar, o que você pensa?

Peterson: Por exemplo, a fórmula do teorema de Pitágoras que é “a” ao quadrado é igual a “b” ao quadrado, mais “c” ao quadrado, nós podemos mostrar como chegar nessa fórmula, em vez de, simplesmente, apresentá-la para os alunos memorizarem.

Pesquisadora: Vamos pensar no caso que você citou: “todo número elevado a zero é igual a um”. É possível uma demonstração nesse caso?

Peterson fez o registro mostrado na figura 2 e explicou: Eu mostro uma sequência com potências de mesma base e os expoentes sempre vão diminuindo um. Dois elevado a quatro dá dezesseis, dois elevado a três dá oito, dois elevado a dois dá quatro, dois elevado a um dá dois. Depois pergunto: Quanto é dois elevado a zero? Eu faço setinhas e mostro que os resultados vão sendo divididos por 2. Pela lógica, dá para concluir que dois elevado a zero dá um.

$$\begin{array}{ll} 2^4 = 16 & \\ & \div 2 \\ 2^3 = 8 & \\ & \div 2 \\ 2^2 = 4 & \\ & \div 2 \\ 2^1 = 2 & \\ & \div 2 \\ 2^0 = ? & \end{array}$$

Figura 2 – Registro semelhante ao feito por Peterson para mostrar que dois elevado a zero é 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

A discussão prosseguiu:

Marília: Eu aprendi que é por definição. Gostei do jeito que o Peterson mostrou, porque os alunos podem entender porque dá 1.

Pesquisadora: Vamos pensar... Com base em um único exemplo, podemos generalizar que todo número elevado a zero dá um?

Peterson: Eu costumo mostrar apenas um exemplo, mas, em matemática, um exemplo não é suficiente, eu não tinha pensado nisso.

Pesquisadora: Eu também já usei essa maneira com meus alunos, que é apresentada em vários livros didáticos, porém, eu apresento dois exemplos para a turma. Um deles costuma ser esse que você fez, porque é fácil para os alunos perceberem que, nessa sequência, um resultado é sempre metade do anterior e, depois, eu coloco um desafio para eles criarem outras sequências com bases diferentes e, então, convido alguns alunos para mostrarem no quadro. Com isso, eles percebem que esse padrão sempre se repete. Então, eu enfatizo que, se a base for três, ao final teremos $3 \div 3$, se a base for quatro, teremos $4 \div 4$. Se for dez, teremos 10÷ 10, então se a base for x, teremos x divido por x que dá 1.

Marília: Desse modo, não fica apenas na memorização.

Peterson: Eu gostei dessa ideia de pedir que os alunos testem várias bases diferentes e generalizem.

Marília: Realmente, eu acho que falar que é apenas por definição...

Pesquisadora: Foi definido com base em algum critério. Por que não se definiu que todo número elevado a zero dá treze, dá vinte e um?

Marília: Não daria certo.

Pesquisadora: Por quê?

Marília: Porque quando dividimos, por exemplo, x elevado a três por x elevado a três, conservamos a base e subtraímos o expoente, então iria dar x elevado a zero que é 1.

Pesquisadora: Sim, então a comunidade de matemáticos definiu esse valor porque faz sentido.

O trecho acima mostra que a discussão abordou uma concepção de matemática escolar que tem valores e formas próprias (Moreira e David, 2011). Na matemática acadêmica, é suficiente a definição – todo número elevado a zero é 1 –, contudo, na matemática escolar é preciso que os alunos compreendam a veracidade dessa afirmação de forma significativa. Moreira e David (2011) destacam que a matemática escolar demanda sentidos distintos da matemática acadêmica, pois precisa priorizar a construção dos conceitos pelos estudantes e negociação de significados que ocorrem nos processos de ensino e de aprendizagem na escola.

Nessa situação, Peterson e a pesquisadora compartilharam experiências e entendimentos ao ensinar esse conteúdo que foram propícios para que o grupo refletisse sobre vários aspectos relacionados ao ensino de matemática.

Um primeiro aspecto contemplado foi que, na educação básica, não é adequado apenas informar que uma propriedade é definida, pois o objetivo é que os estudantes aprendam os conteúdos de forma significativa, e não apenas memorizem definições. Outro aspecto se relaciona ao fato de que a aula pode ser conduzida de forma que a exploração de vários exemplos venha a favorecer a identificação de um padrão que culmine em uma generalização, colaborando para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes e para uma participação mais ativa durante as aulas. Outras reuniões envolveram discussões referentes à qualidade e quantidade de exemplos que contribuíram para que os estagiários pudessem refletir que os casos observados pelos alunos podem cooperar para a construção de conceitos ou gerar equívocos.

Além disso, esse episódio mostra que o estágio, com observação e reflexão sobre a prática, pode ser muito rico e, também, remete-nos à necessidade de os licenciandos desenvolverem conhecimentos sobre maneiras de justificar definições, propriedades e teoremas na educação básica.

Demonstrações do teorema de Pitágoras

De acordo com Silva, Fanti e Pedroso (2016), há mais de 400 demonstrações do teorema de Pitágoras. Então podemos pensar que a chance de pelo menos uma demonstração ser adequada para promover a aprendizagem dos estudantes dos nonos anos da Escola deveria ser grande. Contudo, o grupo construiu um entendimento diferente que influenciou a preparação das aulas, conforme mostrado a seguir.

Na terceira reunião, com a definição do tema das aulas que eles iriam lecionar no final do semestre, os estagiários começaram a compartilhar suas primeiras ideias sobre como poderiam ensinar o teorema de Pitágoras para as duas turmas do nono ano.

Peterson sugeriu iniciar a aula desenhando, no quadro, um triângulo retângulo com as medidas dos lados para mostrar a relação pitagórica.

Marília: Eu gostei da ideia do Peterson de fazer no quadro, mostrando as áreas, e pensei, também, em construir um material para que os alunos possam recortar os quadrados dos catetos e montá-los sobre a hipotenusa, como se fosse um quebra-cabeça, para verificarem que a área é a mesma.

Peterson: Começamos a aula fazendo no quadro e, depois, os alunos verificam.

Pesquisadora: Apenas um exemplo será suficiente?

Peterson: Não, eu me lembrei do que já discutimos sobre a necessidade de os alunos terem acesso a vários exemplos. Eles podem observar triângulos com outras medidas para que possam verificar de modo mais geral.

Marília: É bom colocar situações para os alunos pensarem, do tipo: deu certo neste exemplo, será que vai dar para todos?

Peterson: A demonstração é importante para que eles compreendam que sempre vai dar certo, e não apenas memorizarem a fórmula.

Pesquisadora: Vocês ficaram de consultar alguns livros didáticos para ver como tratam o teorema de Pitágoras.

Marília: Eu consultei três livros e fiquei me imaginando apresentando para os alunos da forma que eles mostram. Então, não é que os meninos não tenham capacidade, mas, nos livros, têm demonstrações que eu não sei se eles iriam compreender. Eu achei uma interessante que usa relações métricas. A gente poderia pedir que o professor Tiago trabalhasse esses conteúdos antes da nossa aula. Eu achei tranquila a demonstração com base nas relações métricas, mas não sei como eles receberiam. Eu quero saber a opinião de vocês, porque eu penso que é importante os alunos terem contato com a demonstração teórica e uma forma prática, mas precisamos considerar o que eles sabem.

Pesquisadora: Como podemos descobrir o que os alunos já sabem?

Peterson: Podemos perguntar para o professor Tiago. Nós também vamos percebendo as dúvidas e o que os alunos sabem observando as aulas, ajudando os alunos nas atividades.

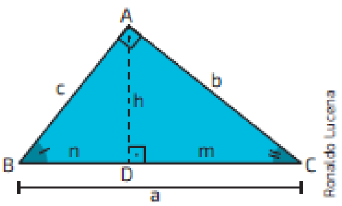
Pesquisadora: Conversem com o professor Tiago para saber quais as principais dúvidas que os alunos geralmente têm quando estudam o teorema de Pitágoras, perguntem sobre o que ele gostaria de sugerir para a aula.

Peterson: Eu consultei dois livros. Eu observei as atividades, gostei de algumas que envolvem aplicação do teorema em construções. Vou consultar outros livros para tentar achar uma demonstração que os alunos possam entender.

Assim, os estagiários revelaram que tinham intenção de apresentar uma demonstração do teorema de Pitágoras que os alunos pudessem entender e pensaram na possibilidade de o professor supervisor ensinar os conteúdos que seriam pré-requisitos para tal entendimento.

Na quarta reunião, Peterson sugeriu a utilização da demonstração exibida na figura 3.

Observe uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando algumas das relações métricas estudadas anteriormente.



Nesse triângulo, temos que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$. Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \longleftarrow$ fatoramos am + an colocando a em evidência

$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \longleftarrow$ como m + n = a, substituimos m + n por a

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 3 – Demonstração do teorema de Pitágoras que se baseia nas relações métricas.
Fonte: Pataro e Balestri. (2018, p. 195).

Ocorreu, então, o seguinte diálogo:

Peterson: Eu gostei da demonstração que é apresentada no livro Matemática Essencial, porém, para entendê-la, é necessário saber as relações métricas.

Pesquisadora: Os alunos já estudaram relações métricas?

Peterson: O professor Tiago disse que, sobre triângulos, os alunos só estudaram as classificações quanto aos lados e aos ângulos.

Marília: E se a gente pedir que o professor Tiago ensine as relações métricas antes da nossa aula?

Pesquisadora: O que os alunos precisam saber para aprender relações métricas?

Então, os estagiários consultam alguns livros que a pesquisadora havia disponibilizado, e depois de alguns minutos...

Peterson: Os livros usam semelhança de triângulos para se chegar às relações métricas dos triângulos retângulos.

Marília: Ai! Ai! Os alunos também não aprenderam isso!

Peterson: Tá difícil!

Pesquisadora: Por isso, é importante pensar nos pré-requisitos com calma. Para planejarmos uma aula que vai contribuir para a aprendizagem dos alunos, precisamos considerar o que eles já sabem e pensar em formas de abordar esse assunto. Há muitas demonstrações desse teorema, vocês podem procurar outras.

O grupo continuou a compartilhar ideias acerca de como as aulas poderiam ser realizadas, e Marília voltou a expressar seus desejos e ideias em relação à apresentação de uma demonstração do teorema de Pitágoras.

Marília: [...] Eu queria mostrar uma demonstração, eu não quero menosprezar os alunos, mas, com a pandemia, eles não aprenderam vários conteúdos.

[...]

Marília: Eu estou achando que apresentar uma demonstração não iria ajudar. Talvez até atrapalhe, porque os alunos iriam ficar perdidos, só se a gente encontrasse uma que fosse mais fácil.

Pesquisadora: Procurem nos livros, na internet, continuem pensando se será adequado trabalhar uma demonstração, refletindo sempre como favorecer a aprendizagem dos alunos. Também seria importante pesquisar, nos livros, formas em que o teorema é explorado geometricamente, com as áreas dos quadrados dos lados, conforme nós temos pensado. Nós não temos que fazer igual a nenhum dos livros, mas, conhecer várias formas de abordar o teorema, pode nos ajudar a fazermos nossas escolhas.

Marília: Eu e o Peterson podemos analisar os livros e conversarmos antes da reunião da semana que vem para já começarmos a reunião com mais ideias, já termos pensado antes.

Pesquisadora: Será ótimo!

Os episódios anteriores revelam que os estagiários consideraram importante que as aulas contemplassem a apresentação de uma demonstração do teorema de Pitágoras, porém, diante da constatação de que, para os alunos entenderem a demonstração selecionada por Peterson, era necessário que tivessem aprendido as relações métricas de triângulos retângulos que, por sua vez, demandariam identificar triângulos semelhantes e obter a razão entre lados correspondentes, concluíram que os estudantes ainda não haviam estudado os conteúdos necessários para compreendê-la. Então a pesquisadora os incentivou novamente a consultar outros livros didáticos para conhecerem outras demonstrações.

Quando parecia que essa discussão estaria encerrada naquela reunião, Marília deu prosseguimento ao assunto.

Marília: Rose, eu queria saber a sua opinião como professora, se você acha que, se os alunos entenderem o teorema de Pitágoras observando a relação das áreas em alguns triângulos e depois chegarmos à fórmula, ainda é necessário apresentar uma demonstração formal. Porque eu, como professora, nem que fosse uma mais fácil, eu levaria.

Pesquisadora: Para pensarmos nisso, eu gostaria de conversar com vocês sobre a matemática acadêmica e a matemática escolar. Para algumas pessoas, é preciso fazer uma transposição didática da matemática acadêmica para os alunos da educação básica, ou seja, é preciso criar maneiras de apresentar os conteúdos para que eles sejam acessíveis aos estudantes, mas mantendo os mesmos princípios da matemática acadêmica. Em outra concepção, a matemática escolar tem características próprias que, em alguma medida, divergem da matemática acadêmica, pois, na matemática escolar, é necessário haver uma negociação de significados, os conceitos serem refinados ao longo da escolaridade. Na matemática acadêmica, para provar que uma propriedade é verdadeira, o que é necessário?

Marília: Uma demonstração. É preciso usar raciocínio lógico para provar que uma propriedade é sempre verdade.

Pesquisadora: Na matemática escolar, também é preciso uma demonstração?

Marília: Essa que é a minha dúvida!

Peterson: Eu acho que nem sempre é possível.

Pesquisadora: Eu não gostaria de responder, nesse momento, o que eu penso. Por isso, estou incentivando vocês a analisarem livros, se quiserem podem também ler artigos que abordam o teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental, mantendo sempre o foco na aprendizagem dos alunos do 9º A e 9º ano B.

Peterson: Hum! A matemática da escola tem diferenças da matemática da universidade... Vou pensar mais nisso aí!

Marília: Eu não entendi isso direito.

Percebemos que a pesquisadora tentou não expressar sua opinião sobre a pertinência de se abordar uma demonstração do Teorema nas aulas que seriam lecionadas pelos estagiários, pois tinha o intuito de que as decisões sobre as aulas fossem feitas de modo coletivo e reflexivo. Então, ela iniciou uma explicação sobre as diferenças entre matemática acadêmica e matemática escolar baseada nas ideias de Moreira e David (2011). As falas de Peterson e Marília indicam que eles ainda não haviam pensado sobre esse assunto. Então, a pesquisadora deu continuidade à discussão:

Pesquisadora: Eu vou exemplificar. Se eu tiver vários recortes de figuras com a forma de quadriláteros e pedir que um aluno do 6º ano pegue um losango e ele pegar um quadrado, os colegas da turma, provavelmente, irão dizer que esse aluno pegou a figura errada, porque eles ainda não entendem que um quadrado é um losango de ângulos retos; para eles, são figuras distintas. Na matemática escolar, os conceitos se refinam, se aprimoram ao longo da escolarização, e é preciso considerar isso, mas na matemática acadêmica, os conceitos são absolutos.

Marília: Agora eu entendi, dependendo da série, do conhecimento dos alunos, pode ser interessante uma demonstração formal ou não.

Pesquisadora: Essa questão é interessante e não é simples. Há pessoas que consideram que a Geometria se iniciou com os Elementos de Euclides, com o pensamento rigoroso, antes disso havia ideias sobre formas, mas ainda não existia Geometria. Porém, há outra concepção que considera que a Geometria se iniciou com a humanidade; o homem, ao observar o seu entorno, percebeu padrões, criou objetos, pinturas. A sistematização dos conhecimentos aconteceu muito depois, principalmente na Grécia Antiga, e contou com contribuições de diversos povos, de diferentes tempos da história humana. Uma matemática que é usada por uma tribo indígena pode ter maneiras diferentes da que conhecemos de contagem, de medição....

Marília: A matemática surgiu para resolver problemas.

Pesquisadora: E, também, por recreação, por vontade de aprimorar os conhecimentos.

Peterson: Isso é legal! Eu estou pensando até se esse teorema é de Pitágoras mesmo! Eu pensava que a fórmula da equação de segundo grau era de Bhaskara! Aprendi assim... Depois fui descobrir que a fórmula já existia, mas que Bhaskara que ficou com a fama! Eu vou procurar informações sobre isso.

Marília: Vou ver se acho uma demonstração mais simples que não exige relações métricas, mas também, estou pensando sobre isso, se os alunos podem desenvolver o raciocínio matemático sem demonstração. Estou preocupada de usarmos uma demonstração e os alunos não entenderem.

Peterson: O correto é pensar se vai fazer sentido para os alunos. Igual na situação do elevado a zero (discussão que ocorreu na primeira reunião), dá para mostrar que faz sentido. Eu fico pensando que, se os alunos entenderem o Teorema e conseguirem resolver as atividades, nós podemos considerar que eles aprenderam.

Marília: Agora, já estou achando que seria melhor a gente provar de forma intuitiva, fazendo como se fosse um quebra-cabeça, eu já vi isso em algum lugar. Move as peças dos quadrados dos catetos e dá a mesma área do quadrado da hipotenusa. Se fizermos assim, podemos considerar uma demonstração?

Pesquisadora: Eu acho que pode ser uma forma de justificar.

Peterson: Para mim, o mais importante é que eles mesmos descubram o teorema, entendam e consigam aplicá-lo.

Marília: Pelas aulas que estamos vendo, eles quase nunca têm que observar padrões, fazerem descobertas. Eu ainda estou em dúvida se poderíamos usar uma maneira mais intuitiva, como a que eu falei, parecendo um quebra-cabeça... O que acha, Rose?

Pesquisadora: Eu acho que nós precisamos estudar mais sobre esse assunto para vocês mesmo chegarem as suas conclusões.

Marília: Mas como estamos fazendo um trabalho juntos, queria saber a sua opinião.

O episódio acima evidencia que as discussões desencadeadas pelo questionamento de Marília, sobre a necessidade de apresentar uma demonstração do teorema de Pitágoras, contemplaram outros assuntos relacionados a concepções de matemática; à construção de conceitos pelos estudantes; à flexibilidade que um professor precisar ter na condução das aulas considerando os conhecimentos dos estudantes; à generalização de propriedades pela identificação de padrões; aos objetivos de aprendizagem.

Para Peterson, o principal objetivo seria os alunos compreenderem o teorema de Pitágoras, ou seja, a relação entre os lados de um triângulo retângulo, e saberem utilizá-lo na resolução de tarefas.

A discussão continuou...

Pesquisadora: Eu gosto da ideia de que a matemática é a ciência dos padrões. Então, penso que os alunos, desde pequenos, devem ter oportunidade de observar regularidades, de generalizar, buscar justificativas para suas ideias. Assim, eles poderão desenvolver o senso numérico, o pensamento geométrico, algébrico. O ideal seria se as justificativas se tornassem mais elaboradas ao longo da escolaridade. Por exemplo, um dos livros que eu disponibilizei para vocês é "Matemática Imenes e Lellis". Eu gosto muito dessa coleção! Acho que já comentei sobre isso com vocês. No livro do nono ano, é apresentada a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, são propostos vários problemas e está escrito que as fórmulas não caem do céu, mas que essa é mostrada pronta (figura 4), ou seja, irá cair! (risos). Ao final do capítulo é que é trabalhada a demonstração.

Marília: Uma fórmula caindo do céu! (risos).

A fórmula de Bhaskara pode ser usada em todo tipo de equação de 2º grau, inclusive naquelas que você já sabia resolver por outros métodos. Por exemplo, pode-se resolver $7x^2 - 3x = 0$ colocando **x** em evidência ou, com um pouco mais de trabalho, aplicando a fórmula. Nesse caso, temos: $a = 7$, $b = -3$ e $c = 0$.

Só mais uma coisinha: a fórmula de Bhaskara, curiosamente, não foi deduzida por Bhaskara.

Figura 4 – Explicação sobre a fórmula de resolução de uma equação do 2º grau.
Fonte: Imenes e Lellis (2012b, p. 119).

Pesquisadora: Quando eu lecionava para alunos do nono ano, ensinava a resolução de equações completas de 2º grau completando os quadrados. Vocês se lembram disso, completamento de quadrados?

Peterson: Sim, eu aprendi na licenciatura.

Pesquisadora: Os alunos faziam desenhos para pensar na representação geométrica e conseguiam resolver. Depois que eles se tornavam bons nisso, eu propunha um desafio: eles iriam resolver uma equação do segundo grau genérica, completando quadrados. É difícil, precisa de muito cálculo algébrico, eles começavam, uns iam desanimando, outros continuavam e eu ia dando uns toques, sempre alguns conseguiam. Então eu convidava um aluno para resolver no quadro, e os outros, mesmo que não tivessem concluído, conseguiam acompanhar o raciocínio, total ou em parte, mas a fórmula não caía do céu para a turma. Depois que a fórmula estava no quadro, eu pedia que um aluno lesse o que estava escrito no livro e aproveitava essa situação para levantar a moral da turma: "Meus alunos são demais! Conseguiram obter a fórmula! Estão superando as expectativas dos autores do livro, que apresentam a fórmula somente no final do capítulo." Era muito legal! Sempre que é possível, eu acho que vale trabalhar a matemática com compreensão, sem regras que caem do céu, mas as justificativas podem variar.

Peterson: O cálculo algébrico é pesado! Eu achei isso muito legal!
Marília: A demonstração é importante, mas os alunos precisam entendê-la.
Pesquisadora: Se eles não entenderem, qual é o objetivo?
Marília: O professor precisa conhecer os alunos, o que eles sabem...

O trecho acima mostra que a pesquisadora, ao compartilhar sua experiência quando ensinou outro conteúdo – resolução de equações de segundo grau –, foi instigando os estagiários a refletirem que a decisão por abordar uma demonstração não deveria ser um fato isolado, e sim, considerada como uma forma de colaborar para a aprendizagem dos estudantes. A conversa prosseguiu ...

Pesquisadora: É importante fazer um trabalho que considere a realidade dos alunos e que os ajude a avançar na aprendizagem da matemática. Por exemplo, no sexto ano, eu costumo entregar uma folha A4 para cada aluno desenhar e recortar um triângulo qualquer, depois peço que eles coloram os ângulos internos com cores diferentes, então eles dobram o triângulo de maneira que os ângulos juntos formem um ângulo de meia volta e observam que, em todos os triângulos que a turma fez a soma dos ângulos, deu 180 graus. É uma demonstração?

Peterson: Não, mas dá para generalizar.

Pesquisadora: Sim, com base em vários exemplos. Quando eles estão no oitavo ano e já estudaram ângulos formados por retas paralelas e uma transversal, podem entender uma demonstração sobre essa propriedade com base nesse conhecimento.

Marília: Então, vamos tentar planejar a aula sem ser mais uma fórmula a ser decorada: “a” ao quadrado é igual a “b” ao quadrado mais “c” ao quadrado.

Pesquisadora: Por isso que eu estou recomendando que vocês examinem os livros, observando diferentes maneiras que o Teorema é abordado.

Assim, os trechos anteriores revelam que a pesquisadora procurou compartilhar experiências que mostram que, na Educação Básica, as justificativas devem favorecer a aprendizagem dos estudantes, e que o papel do docente é fundamental para possibilitar que os alunos enriqueçam seu repertório sobre formas de justificar à medida que avançam na aprendizagem da matemática. Desse modo, os estagiários puderam refletir sobre diferentes maneiras de provar a veracidade de uma proposição, a depender do conteúdo abordado e do nível de conhecimento que os alunos possuem.

Na quinta reunião, mais uma vez se discutiu a pertinência de a aula contemplar uma demonstração do teorema.

Pesquisadora: Ao analisar outros livros didáticos, o que vocês pensaram?

Peterson: Eu acho que uma demonstração formal não iria ajudar os alunos. Eu acho que as demonstrações usando álgebra não irão ajudá-los a compreender o teorema.

Marília: Podemos pedir que o professor Tiago ensine alguns conteúdos que forneçam base para os alunos entenderem, como áreas de quadrados. Eu inseri, lá no *drive*, os conhecimentos prévios que pensei. (Marília havia listado: catetos e hipotenusa no triângulo retângulo; área de quadrados e de triângulos; semelhança de triângulos).

Pesquisadora: É importante pensar nos conhecimentos que são necessários para os estudantes explorarem as relações entre os lados de um triângulo retângulo de forma experimental; os conhecimentos prévios para entenderem uma demonstração, se forem usar esse tipo de justificação; e, também, para resolver os problemas que serão propostos.

Peterson: Eu acho que será difícil os alunos compreenderem uma demonstração algébrica, mesmo com ajuda de figuras, porque eles não estão acostumados ao uso de letras.

Marília, até o momento, tinha se referido a conteúdos geométricos. Peterson trouxe mais um aspecto que eles não tinham considerado anteriormente: os estudantes precisariam entender que as letras representavam variáveis.

Marília mostrou as páginas exibidas na figura 5 e disse: Neste aqui, que é do oitavo ano, mostrando as páginas exibidas, é preciso entender área de quadrados, de triângulos e cálculo algébrico.

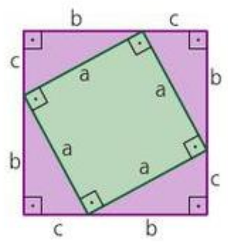
A demonstração do teorema

Não se sabe como Pitágoras provou o teorema. Demonstrações de outros matemáticos gregos antigos chegaram até nós, mas são um tanto complicadas, em especial porque eles não conheciam Álgebra. Vamos apresentar aqui uma prova algébrica.

Começamos com quatro triângulos retângulos de mesmo tamanho, com catetos medindo **b** e **c** e hipotenusa medindo **a**. Qualquer que seja o tamanho desses triângulos, sempre é possível arrumá-los de modo que formem um quadrado.

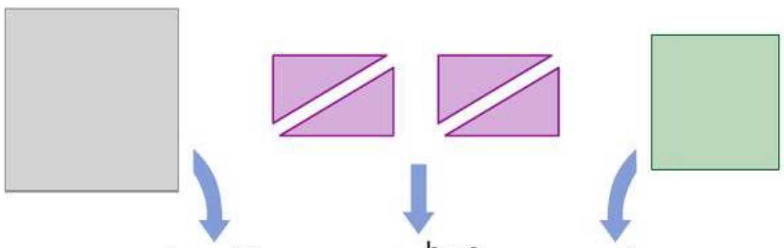
As áreas dessas figuras são:

- área de cada triângulo: $\frac{b \cdot c}{2}$
- soma das áreas dos quatro triângulos:
  $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} = 2bc$
- área do quadrado interior: a^2
- área do quadrado maior (ou da figura toda):
  $(b + c)^2$



NELSON MATSUDA

A área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado menor. Ou seja:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

$$\underbrace{(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2}$$

$$(b + c)^2 = 2bc + a^2$$

Vamos agora simplificar a igualdade obtida. Primeiro, efetuamos o quadrado da soma **b** + **c**, como vimos no capítulo **9**:

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

Subtraindo **2bc** dos dois lados da igualdade, resulta:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

E, assim, provamos o teorema de Pitágoras.

Figura 5 – Demonstração do teorema de Pitágoras, baseada no cálculo de áreas de triângulos e quadrados.
Fonte: Imenes e Lellis (2012a, p. 234 e 235).

Peterson: Quadrado da soma! Hum... Eles não estudaram produtos notáveis! Nos outros livros que nós vimos, são usadas semelhanças de triângulos, como este aqui (figura 6). Não vai dar mesmo!

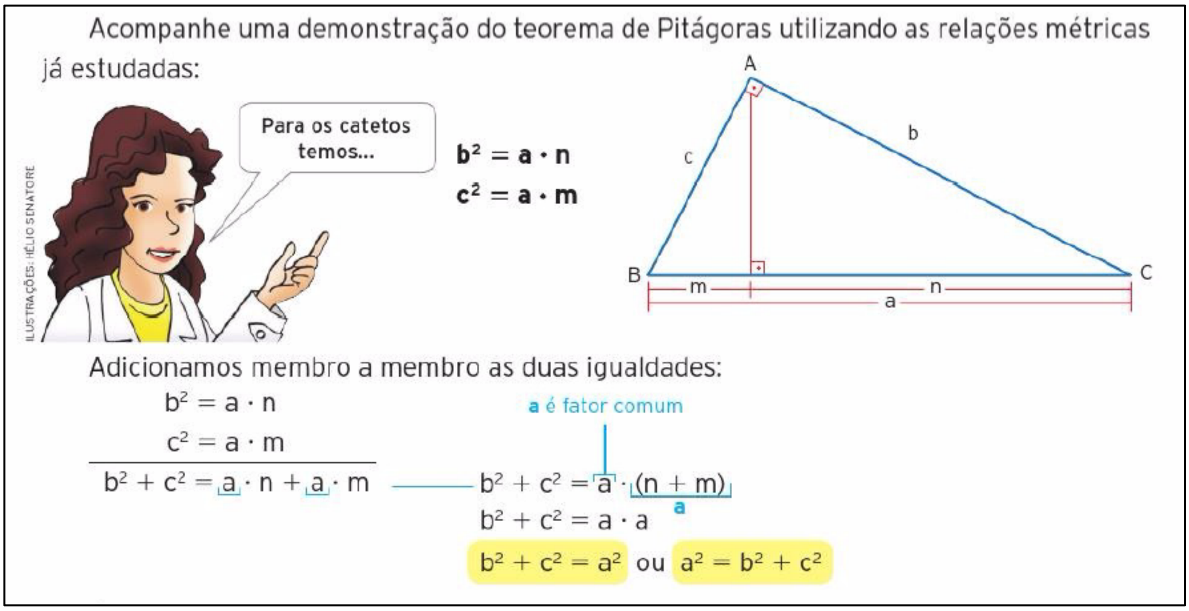


Figura 6 – Demonstração do teorema de Pitágoras, baseada em outras relações métricas
Fonte: Mori e Onaga (2015, p. 133).

Marília: Eu não quero dizer que os alunos não têm capacidade, de jeito nenhum, mas também acho que uma demonstração não vai ajudá-los. Eu tenho medo de a gente falar grego para eles!

Peterson: Vamos planejar a aula sem apresentar uma prova. Eles irão descobrir o teorema, explorando os triângulos, depois nós mostramos a fórmula e contamos a história de Pitágoras.

O Estudo de Aula é um processo coletivo e refletivo que requer um planejamento detalhado e embasado de uma aula em que os estudantes têm participação ativa. Assim, os participantes realizam estudos, consultam materiais e, também, baseiam-se em suas experiências para planejar uma aula com foco na aprendizagem dos estudantes, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e o objetivo definido pelo grupo. Desse modo, o grupo consultou vários livros didáticos com a intenção de pensar em maneiras de ensinar o teorema de Pitágoras, inclusive buscou encontrar uma demonstração desse Teorema que favorecesse a aprendizagem dos estudantes das turmas de nono ano para as quais as aulas seriam lecionadas. Porém, os alunos ainda não haviam estudado os conteúdos necessários para compreender as demonstrações analisadas: semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, cálculo de área de quadrados e triângulos, quadrado da soma de dois números.

Na sexta reunião, o grupo ponderou sobre as habilidades indicadas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) referentes ao teorema de Pitágoras e definiu os objetivos das duas aulas. O episódio descrito, a seguir, mostra como ocorreu a definição do objetivo da primeira aula.

Marília leu as habilidades (EF09MA13) e (EF09MA14) definidas pela BNCC (BRASIL, 2017) para o nono ano: “Demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” e “Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade **envolvendo retas paralelas cortadas por secantes”.**

Marília continuou: Utilizar semelhança de triângulos não dá, pois os alunos ainda não estudaram isso. [...]. Para mim, já está claro que não devemos apresentar uma demonstração.

Pesquisadora: Qual será o objetivo da primeira aula?

Marília: Apresentar o teorema de Pitágoras.

Pesquisadora: Você irá apresentar para os estudantes aprenderem o quê?

Marília: Para os alunos conhecerem o teorema de Pitágoras.

Pesquisadora: Conhecer é suficiente?

Marília: Não. Eles precisam entender a relação entre os lados.

Peterson complementou: Saber utilizá-lo, aplicar no cotidiano ou em situações de matemática pura.

Pesquisadora: Os objetos de conhecimento, de acordo com a BNCC, em relação ao teorema de Pitágoras, são verificações experimentais e demonstrações.

Marília: Os alunos irão fazer verificações experimentais, não é isso?

Peterson: Sim. Eles vão aprender o teorema com a experimentação.

Marília: Os meninos podem nos perguntar o que é um teorema... Hum! Será que o objetivo da primeira aula é a aprendizagem do teorema?

Pesquisadora: Vamos pensar ... O que é um teorema?

Peterson: São propriedades que deduzimos, mas na aula não iremos apresentar uma demonstração. Eles vão observar a relação entre as áreas dos quadrados.

Marília: Podemos colocar que o objetivo da aula é aprender a relação entre os lados de um triângulo retângulo?

Peterson: Eu concordo.

Marília: Está me faltando uma palavra...

Pesquisadora: Compreender?

Marília: Sim, compreender mostra que nós queremos que os alunos entendam.

Peterson: O objetivo é que os alunos compreendam a relação envolvida no Teorema, de forma experimental.

Pesquisadora: A relação envolvida no teorema de Pitágoras pode ser chamada de relação pitagórica.

Marília: Então, vamos colocar assim: compreender a relação pitagórica de forma experimental!

Portanto, o grupo definiu o seguinte objetivo para a primeira aula: compreender a relação pitagórica de forma experimental. Ainda na sexta reunião, foi discutido o objetivo da segunda aula e resolvido que seria: resolver problemas que envolvem o teorema de Pitágoras.

Conforme já anunciado, precisamos considerar que os estudantes dos nonos anos em que as aulas foram lecionadas, praticamente, não estudaram matemática no 7º e 8º ano devido à pandemia de covid-19 que causou a suspensão das aulas presenciais em março de 2020, e o retorno gradual e, sem obrigatoriedade, ocorreu em 2021. Além de eles não terem estudado os conteúdos que seriam necessários para que compreendessem os passos realizados nas demonstrações analisadas, pelo que observamos em sala de aula e pelas conversas com o professor supervisor, constatamos que os alunos não haviam desenvolvido o pensamento algébrico para que pudessem entender a universalidade de uma prova formal.

Assim, o grupo concluiu que abordar uma demonstração do Teorema não seria adequado para essas turmas, diante da situação de aprendizagem encontrada. Contudo, essa decisão não foi simples para estudantes da Licenciatura que estão anos imersos na matemática acadêmica, tendo poucas oportunidades de refletir sobre a matemática escolar e os desafios reais das escolas. Peterson, por ter contato com alunos, por meio das aulas particulares que lecionava e dos projetos que participou, estava mais próximo da matemática escolar e da realidade de alunos que precisam de mais apoio para avançar na aprendizagem da matemática. Então, para ele, mesmo que inicialmente também teve a intenção de apresentar uma demonstração do teorema mais facilmente, passou a considerar que a aula poderia ser conduzida de forma que o teorema de Pitágoras se tornasse compreensível para os estudantes, ainda que de maneira menos formal. Marília tentou, um pouco mais, encontrar uma demonstração que pudesse ser compreendida pelos alunos e, também, fez vários questionamentos sobre a necessidade de uma demonstração para ensinar o teorema e acabou, também, considerando que não seria adequado abordar uma demonstração diante da situação de aprendizagem encontrada.

Assim, concordamos com Albuquerque *et al* (2006) quando destacam a complexidade do estabelecimento de relações entre a matemática acadêmica e a escolar; e com Paiva e Gualandi (2023) quando salientam a importância de os futuros professores participarem de discussões que envolvam as relações entre a matemática acadêmica e a escolar, possibilitando ressignificações voltadas à prática docente.

Nas reuniões seguintes, o grupo se debruçou sobre formas de preparar as aulas com o intuito de possibilitar que os estudantes, por meio de explorações, percebessem o padrão existente na relação entre os quadrados dos lados de triângulos retângulos e que, também, a mesma relação não ocorre quando o triângulo não é retângulo. Além disso, o grupo buscou associar a experiência prática a uma atividade intelectual em que os alunos foram estimulados a comunicar suas ideias de forma oral e escrita, usando linguagem familiar para, posteriormente, ser trabalhada a enunciação do Teorema em linguagem algébrica.

De acordo com Alro e Skovsmose (2010), é importante que o professor solicite, sempre que oportuno, que os próprios alunos justifiquem suas ideias. Ponte, Brocardo e Oliveira (2008) afirmam que as tarefas investigativas têm potencial de ajudar os alunos a elaborarem conjecturas e a procurarem uma justificativa aceitável, baseada em raciocínios plausíveis e nos conhecimentos que eles possuem. Segundo os autores, o professor deve incentivar a realização de testes para o estabelecimento de conjecturas e, por outro lado, levar os alunos a compreenderem que os testes, por si sós, não conferem o estatuto de conclusão aos resultados observados. Eles também explicam que a procura por uma prova pode ser feita gradualmente, à medida que os estudantes vão compreendendo sua necessidade e suas ferramentas matemáticas vão ficando mais sofisticadas, tornando-se mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.

O grupo não analisou mais de 400 demonstrações do teorema de Pitágoras! Na verdade, foram consultados em torno de dez livros didáticos que foram suficientes para os estagiários ampliarem de modo entrelaçado conhecimentos matemáticos, curriculares e pedagógicos. Ao buscar compreender as demonstrações e a identificar os conhecimentos necessários para entendê-las, observaram como um conteúdo se relaciona com outro, verificaram os anos escolares em que alguns desses conteúdos são abordados nos livros didáticos, refletiram sobre de que maneira uma demonstração poderia favorecer ou não a aprendizagem dos estudantes.

A análise das demonstrações foi permeada de discussões sobre diferentes formas de justificar definições (todo número elevado a zero é um), propriedades (a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus); obter uma fórmula (resolução de uma equação de 2º grau) que possibilitaram que os estagiários construíssem de maneira entrelaçada conhecimentos que constam no modelo MKT (Ball, Thames e Phelps, 2008), ou seja: conhecimento matemático específico para o ensino; conhecimento curricular; conhecimento do conteúdo e do ensino; conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Eles também perceberam como alguns conteúdos se relacionam com outros que diz respeito ao Conhecimento do Horizonte do Conteúdo, conforme o modelo MKT (Ball, Thames e Phelps, 2008).

A preparação das aulas foi realizada com olhares voltados para os estudantes das turmas do 9º A e 9º B da Escola e envolveu uma concepção de matemática que se distanciou dos pressupostos da matemática acadêmica. Desse modo, destacamos a relevância de os estagiários terem refletido sobre as exigências para comprovar validade de sentenças matemáticas do ponto de vista da comunidade dos matemáticos profissionais, e maneiras distintas de convencer estudantes na sala de aula da veracidade de proposições.

Assim, o Estudo de Aula foi desenvolvido englobando um entrelaçamento de conhecimentos matemáticos, curriculares, pedagógicos e de criação de um ambiente favorável à aprendizagem da matemática que continuamos a descrever e analisar nas demais seções deste capítulo.

5.2 Tarefas

Nesta seção, descrevemos episódios ocorridos nas reuniões que envolveram: estudos sobre tipos de tarefas matemáticas; elaboração da tarefa "Explorando triângulos" que foi proposta na primeira aula; elaboração da tarefa "Desafio" que foi proposta no início da segunda aula; e o processo ocorrido na seleção e na alteração dos enunciados dos dois problemas que constaram no planejamento da segunda aula.

A pesquisadora havia disponibilizado o artigo "Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do Estudo de Aula" (Martins, Mata-Pereira e Ponte, 2021) para que os estagiários pudessem lê-lo antes da primeira reunião realizada. Além de os estagiários conhecerem uma experiência em que o Estudo de Aula foi desenvolvido na formação inicial, esse texto também propiciou que o grupo iniciasse uma discussão sobre diferentes tipos de tarefas.

Peterson: Eu li e fiquei pensando no que seriam aulas exploratórias. É sala de aula invertida?

Marília: Eu também li e achei interessante a parte que fala sobre a preparação para a aula, pensando no que o aluno pode perguntar, formas de ensinar um conteúdo.

Peterson: Eu achei interessante que os alunos podem resolver uma tarefa de modos diferentes. Uma das estagiárias tinha pensado mais nisso e ficou mais tranquila durante a aula, a outra ficou mais nervosa. O texto mostrou que a preparação da aula ajuda na segurança, principalmente para professores que ainda não têm experiência.

Pesquisadora: Sobre as atividades exploratórias, eu gosto muito de um texto (Ponte, 2003) que explica alguns tipos de tarefas que podem ser propostas em uma aula de matemática. Eu posso disponibilizá-lo para vocês depois. Agora vou tentar explicar de uma maneira resumida. O tipo de tarefa que é mais comum no ensino de matemática brasileiro e, em várias partes do mundo, é o exercício. Outro tipo de tarefa poderia ser um problema. Vamos pensar, inicialmente, nesses dois tipos. Quais as características de um exercício e de um problema?

Marília: O exercício é mais uma aplicação direta, o uso de um algoritmo. Para resolver um problema, o aluno precisa pensar um pouco mais e é mais voltado para situações do cotidiano.

Peterson: Exercício é uma aplicação direta de uma fórmula, de um algoritmo. Já no problema, é preciso escrever um raciocínio. Por exemplo, a partir dos dados a pessoa precisa montar uma equação e usar um algoritmo para resolvê-la.

Pesquisadora: As respostas de vocês estão bem coerentes com o que tem sido discutido sobre isso na educação matemática. Por exemplo, quando você vai à academia fazer musculação, você pode dizer que fez exercícios, é uma atividade mais repetitiva. O exercício tem como objetivo melhorar em uma técnica já conhecida, aplicar um conceito. Já o problema, demanda pensar em uma estratégia.

Peterson: A pessoa lê o enunciado e fica pensando o que deve fazer para resolver.

Pesquisadora: Pode usar um algoritmo ou não. Há problemas que podem ser resolvidos com desenhos, com diagramas, cálculos numéricos, algébricos. Marília, você relacionou problemas a situações do cotidiano, mas é possível usar uma situação do dia a dia em uma tarefa que é um exercício, pois a pessoa lê e já tem em mente como irá resolver. Podemos ter problemas puramente matemáticos. Por exemplo, ano passado eu estava lecionando para o 6º ano de forma remota e trabalhei o algoritmo da divisão. Então eu mostrava uma divisão com alguns valores faltando, então, para o aluno completar, era necessário entender o algoritmo. Para alguns, isso foi um problema.

Peterson: Porque como eles ainda não dominavam o algoritmo, tiveram de pensar para conseguir descobrir os valores que estavam faltando, mas, para quem já sabia, foi um exercício.

Pesquisadora: Isso mesmo! Então uma atividade vai ser um exercício ou um problema de acordo com quem resolve, mas tanto o exercício como o problema pressupõe uma resposta que é considerada correta. No entanto, as atividades exploratórias ou investigativas possibilitam que os alunos as explorem de formas diferentes.

A discussão acima revela a existência de uma noção dos estagiários sobre exercícios e problemas que precisava ser refinada e o desconhecimento deles sobre as características das tarefas exploratórias e investigativas. Então, na terceira reunião, realizada virtualmente, discutimos alguns pontos do artigo "Investigar, ensinar e aprender" (Ponte, 2003), pois consideramos que conhecer as características de diferentes tipos de tarefas e saber selecionar, adaptar e elaborar tarefas que podem favorecer a aprendizagem dos alunos são conhecimentos muito importantes para a docência.

A pesquisadora pediu que os estagiários analisassem as tarefas mostradas na figura 7 e relatassem suas observações.

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica: a) $\frac{6}{12} =$ b) $\frac{3\times(10-7)}{17-2} =$ c) $\frac{\frac{20}{18-9}}{\frac{(15-10)\times 2}{3}} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade. 2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.

Figura 7 – Tipos de tarefas
Fonte: Ponte (2003, p. 4).

Peterson: As letras a, b e c são exercícios mesmo, aplicação direta de procedimentos com objetivo de fixação. Problema é quando uma pessoa usa o que aprendeu na aula em um contexto, pode ser do cotidiano ou não. A tarefa de investigação é algo mais cauteloso, precisa fazer com mais atenção.

Marília: Eu fiquei pensando como os alunos iriam observar os algarismos, verem regularidades. Dependendo da idade dos alunos, para descobrir as regularidades nas tabuadas, precisariam realmente fazer uma investigação.

Peterson: Os livros costumam começar com exercícios e, depois, propõem alguns problemas.

Pesquisadora: Existem algumas formas de abordar o ensino de matemática. Em uma delas, o ensino tem como meta preparar os alunos para resolver problemas. Desse modo, a resolução de problemas é uma meta de aprendizagem. Nesse caso, tem sentido iniciar com exercícios e, depois, propor problemas. Porém, existe outra perspectiva em que os alunos resolvem problemas para aprender Matemática. Para pensarmos melhor nos tipos de tarefa, vamos ler o parágrafo acima do quadro. Propositalmente, não mostrei este parágrafo antes:

> A Matemática tem também as suas tarefas características. A mais conhecida de todas, é o exercício. Mas há outros tipos de tarefa, como os problemas e as investigações. Por vezes também se fala em tarefas de modelação e projetos. É de notar que as características de uma tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza. Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício. (Ponte 2003, p. 4).

Pesquisadora: O item "a" é um exercício?

Peterson: Se a pessoa sabe que, para obter uma fração mais simples, divide-se o numerador e o denominador pelo máximo divisor comum, é sim.

Pesquisadora: Tem jeito de uma pessoa conseguir simplificar uma fração sem saber isso?

Marília: Se ela tiver o conceito de fração equivalente, pode ir simplificando aos poucos até chegar em um meio. Eu acho que ainda continua sendo um exercício.

Pesquisadora: Essa questão pode ser um problema?

Marília: Se ela nunca tiver ouvido falar em simplificação de fração, pode ser.

Pesquisadora: Agora, gostaria que vocês resolvessem a tarefa que está identificada como problema. Resolvam com calma, quando terminarem, avisem-me.

Marília: Estou pensando aqui. O menor número...

Peterson: Como resolver?... ai, ai, ai!

Passados alguns minutos, Marília disse: Eles não têm múltiplos comuns, são dois números primos e o seis, então, multipliquei o cinco por seis que deu 30. Depois multipliquei por sete e obtive 210. Como precisa dar resto três, eu somei três e o resultado foi 213.

Em seguida, Peterson falou: Deu certo o modo como a Marília fez, porque cinco, seis e sete são primos entre si. Eu calculei o mínimo múltiplo comum dos três números que deu 210 e, depois, somei três.

Pesquisadora: Vocês tiveram de pensar em uma estratégia para resolver?

Marília: Sim, eu pensei um pouco.

Peterson: Eu também tive de pensar. Então foi um problema, mesmo que simples, não foi exercício.

Os estagiários fizeram comentários que mostram a necessidade de ambos pensarem em uma estratégia para resolver a tarefa. Segundo Alevatto (2005, p. 41), "uma questão é um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la". Desse modo, essa tarefa pode ser classificada como problema, como expressou Peterson.

O estudo permeado por realização de tarefas prosseguiu:

Pesquisadora: Vamos pensar nesta tarefa sobre a tabuada de nove. Quais regularidades nós podemos descobrir?

Peterson: Se fosse até o dez, podemos perceber que a dezena vai aumentando, mas até o doze. Hum...

Marília: Alterna entre resultados pares e ímpares.

Pesquisadora: Quando é que dá ímpar?

Marília: Quando multiplica o nove por outro número ímpar. Porque ímpar vezes ímpar é ímpar. Quando multiplica nove por par, dá par.

Peterson: A unidade começa com nove, depois oito, e vai decrescendo até nove vezes dez. Depois recomeça com o nove e volta a diminuir de um em um.

Marília: Eu nunca tinha reparado isso. Faz todo sentido, porque nove é dez menos um. Que legal! (risos)

Pesquisadora: Vocês perceberam que pensaram em regularidades diferentes? Se fossemos continuar investigando, poderíamos descobrir outros padrões. As tarefas investigativas são mais abertas.

Marília: Pode haver várias respostas corretas.

Em seguida, a pesquisadora instigou os estagiários a pensarem no esquema mostrado na figura 8.

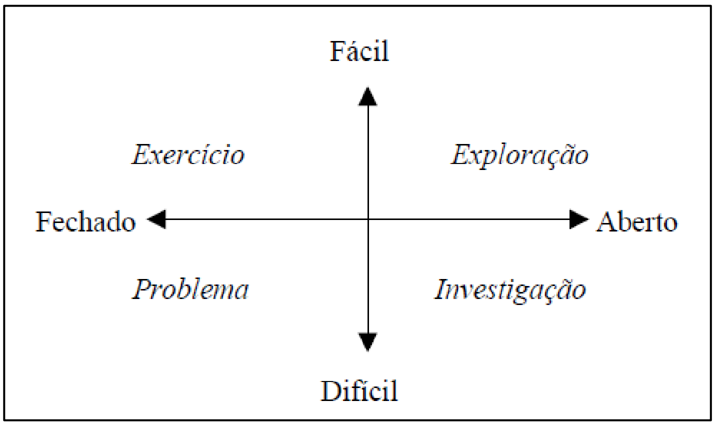


Figura 8 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura
Fonte: Ponte (2003, p. 5).

Pesquisadora: Quais tipos de tarefas são fechadas?

Peterson: Exercício e problema.

Pesquisadora: E as abertas?

Peterson: Exploração e investigação. O exercício e a exploração são mais fáceis, e o problema e a investigação, mais difíceis.

Marília: Um problema pode ser resolvido de várias formas, mas o resultado é o mesmo.

Marília: A tarefa da tabuada pode ser uma exploração ou investigação, dependendo dos conhecimentos dos alunos, mas acho que está mais para exploração, não é complicado perceber regularidades.

Pesquisadora: O próprio autor coloca que é difícil determinar se uma tarefa é uma exploração ou uma investigação, já os projetos são investigações mais longas. É importante um professor de matemática pensar nos tipos de tarefa que propõe em sala de aula.

Desse modo, o grupo refletiu sobre as características dos exercícios, problemas, explorações e investigações. Em sua fala, Marilia reforça que a classificação de uma tarefa é subjetiva, pois a sua dificuldade irá depender do conhecimento dos alunos.

Em seguida, emergiu da discussão aspectos que relacionam os tipos de tarefas propostas à aprendizagem dos estudantes.

Peterson: Eu acho importante variar os tipos de atividade, principalmente para não ficar só nos exercícios.

Marília: Eu acho que os problemas, as investigações colaboram para desenvolver o raciocínio matemático, porque, se o aluno faz só exercício, a aprendizagem fica muito limitada.

Os estagiários destacaram a importância de propor atividades diversificadas durante as aulas. Marília ainda acrescentou que considera os exercícios limitados para desenvolver o raciocínio matemático.

A pesquisadora exibiu a tarefa mostrada na figura 9 para dar continuidade ao estudo teórico-prático.

1. Repara que $2^2 = 4$ e que $2 \times 2 = 4$.

- Será sempre verdade que $a^n = a \times n$?
- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$0^2 =$	$0 \times 2 =$	$10^2 =$	$10 \times 2 =$
$4^2 =$	$4 \times 2 =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	$\left(\frac{1}{2}\right) \times 3 =$
$3^3 =$	$3 \times 3 =$	$\left(\frac{5}{3}\right)^4 =$	$\left(\frac{5}{4}\right) \times 4 =$

Figura 9 – Atividade de exploração: propriedades verdadeiras e falsas
Fonte: Ponte (2003, p. 7).

Pesquisadora: Para termos mais ideias sobre atividades exploratórias, vamos observar, na página 7, algumas tarefas. Observem a primeira pergunta da tarefa 1 (figura 9): Será sempre verdade que $a^n = a \times n$?

Marília: Três elevado a dois dá nove, três vezes dois é seis, não será sempre verdade.

Peterson: Isso tem a ver com o que você tinha comentado sobre não mostrar um único exemplo. Essa propriedade não é verdadeira, nesse caso foi uma coincidência.

Pesquisadora: Sim. Vocês observaram que foi solicitado que os alunos verifiquem a propriedade nos itens indicados e, também, em outros que eles irão escolher?

Marília: É para ter possibilidade de outras respostas, para ser uma investigação.

Peterson: Um contraexemplo já é suficiente para perceber que é falsa.

Pesquisadora: Do ponto de vista da matemática acadêmica, nem mil exemplos são suficientes para comprovar uma propriedade, mas do ponto de vista da matemática escolar, observando vários exemplos, os alunos podem fazer hipóteses sobre propriedades e procurarem justificá-las com base nos conhecimentos que possuem.

Peterson: Como no caso que discutimos sobre um número elevado a zero.

Marília: Eles vão observar um padrão. Eu estou percebendo que, nessas atividades, o professor não explica, os alunos é que descobrem. Eu acho interessante!

Pesquisadora: Cabe ao professor propor tarefas adequadas; criar um ambiente para que os estudantes se envolvam com o que está sendo proposto; auxiliar os alunos, buscando dar espaço para eles pensarem; incentivá-los a organizar os registros, explicar suas ideias. Ao final de uma aula investigativa, o professor deve conduzir um momento de socialização das ideias, refinando conceitos e procedimentos. Ele tem um papel muito importante nesse tipo de aula.

Peterson: É bem diferente de uma aula tradicional.

O trecho acima mostra que os estagiários vão constatando que atividades exploratórias demandam uma aula que não está ancorada em um modelo expositivo de ensino e requerem posturas diferenciadas por parte do professor. Além disso, Peterson fez referência ao que havíamos discutido na primeira reunião sobre a importância de os alunos observarem padrões para generalizar uma propriedade quando conversamos sobre a definição ‘todo número elevado a zero’.

A discussão prosseguiu:

Marília: Os alunos podem descobrir muitas propriedades, fazendo investigações.

Pesquisadora: Vocês acham que as ideias que discutimos com base neste artigo podem nos ajudar no planejamento das aulas?

Marília: Sim, tem a ver com o que já tínhamos pensado antes, mas agora ficou mais claro. Antes, eu tinha pensado em apresentar a fórmula e a demonstração, para depois os alunos verificarem que o Teorema como se fosse um quebra-cabeça. Agora, estou pensando que podíamos entregar alguns triângulos para os alunos investigarem, antes de apresentar a fórmula. Pode ser uma boa maneira de chegar ao teorema de Pitágoras.

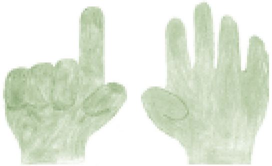
Peterson: Eu gostei da ideia de eles descobrirem, mas teremos que pensar em um jeito de os alunos terem ideia de juntar os quadrados dos catetos para ver que é igual ao quadrado da hipotenusa.

Marília: É muita coisa que temos de pensar!

Percebemos que, ao ampliar seus conhecimentos sobre diferentes tipos de tarefas, os estagiários começaram a mudar seus planos sobre a maneira que as aulas seriam conduzidas e passaram a cogitar que seria mais adequado preparar a aula de forma que os próprios alunos descobrissem a relação pitagórica. Entre outros aspectos, podemos perceber o papel formador das trocas e compartilhamento de propostas de ensino. Ao final dessa discussão, ficaram incumbidos de pensar em como isso poderia ser feito.

Após a realização desse estudo, Peterson comentou que queria entender melhor as tarefas exploratórias. Então, a pesquisadora aproveitou um horário na Escola em que o professor supervisor dispensou os estagiários de acompanhar uma de suas aulas, a qual foi destinada a verificar os cadernos dos estudantes, para propor que os estagiários resolvessem uma atividade exploratória (figura 10) que consta no artigo “Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios” (Canavarro, 2011).

Depois da festa, o João e a Teresa ficaram apenas com um Mon Chéri (um bombom de chocolate com licor e uma cereja). Para decidir quem o vai comer, resolvem tirar à sorte: par ou ímpar. Já estão habituados a fazer isso: cada um esconde uma mão atrás das costas e escolhe mostrar 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos; em seguida mostram as mãos ao mesmo tempo e a soma dos dedos das suas mãos determina o vencedor: se for par, ganha quem escolheu par previamente, se for ímpar, ganha quem escolheu ímpar.



1. Através da construção de um esquema, uma tabela, ou do registo que entenderes, mostra as diferentes situações que podem ocorrer;
2. A Teresa escolhe ímpar e o João escolhe par. Achas que algum tem maior probabilidade de ganhar? Fundamenta a tua resposta.

Figura 10– Enunciado da tarefa sobre jogo par ou ímpar
Fonte: Canavarro, 2011, p. 12.

Então na quarta reunião, a pesquisadora entregou, para os estagiários, esse artigo impresso.

Pesquisadora: Como o Peterson havia comentado que gostaria de entender mais as atividades exploratórias, imprimi para vocês o artigo: “Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios” que é de uma pesquisadora portuguesa chamada Ana Paula Canavarro. No texto, são apresentadas e discutidas várias tarefas exploratórias, inclusive a que vocês fizeram sobre as possibilidades de se obter par ou ímpar.

Peterson: Você pediu para gente fazer já pensando nesse texto?

Pesquisadora: Sim, porque como vocês já fizeram a tarefa e compartilharam o modo como cada um resolveu, poderão relacionar o que está descrito no texto com a própria experiência de vocês. Eu acho bem interessante o modo que o texto apresenta os vários momentos de uma aula exploratória: introdução, exploração da tarefa pelos alunos e momento de socialização. Fiquem à vontade para ler, marcar as partes que acharem interessantes ou mesmo algo que considerem estranho. Depois nós podemos discuti-lo, com base nas impressões de vocês.

Peterson: Muito obrigado. Os textos nos ajudam a pensar em formas de ensinar matemática, eu gosto quando a gente discute.

Também na quarta reunião, os estagiários compartilharam suas ideias sobre as aulas.

Peterson: Eu estou com algumas ideias. Eu tentaria explicar um pouquinho da história de Pitágoras, vou procurar informações sobre isso. Eu usaria os quadradinhos, como eu e a Marília já tínhamos comentado, mostrando um exemplo no quadro e alguns triângulos para os alunos verificarem o teorema.

Marília: Eu pensei também de a gente propor alguns problemas de aplicação do Teorema em alguma situação prática: em um telhado, uma ponte. Eu daria vários triângulos de exemplos para mostrar a eles que o quadrado da hipotenusa é sempre igual à soma dos quadrados dos catetos, pra eles mesmos verificarem. Poderíamos dar as medidas dos três lados e pedir que eles verifiquem se a fórmula dá certo.

Peterson: Seria mais interessante se os próprios alunos explorassem os triângulos com os quadrados e descobrissem a relação entre as áreas!

Marília: Isso mesmo! Eu acho que, se usássemos papel quadriculado, eles poderiam descobrir a relação entre as áreas, antes de mostrarmos a fórmula.

Peterson: Depois de mostrar a fórmula, a gente contaria um pouco sobre a história de Pitágoras, até para eles entenderem por que o Teorema tem este nome.

Pesquisadora: A ideia, então, é os alunos explorarem alguns triângulos, com os quadrados sobre os lados, para generalizarem.

Peterson: Estou achando melhor a gente mostrar a fórmula só depois de eles já terem explorado os triângulos. Na segunda aula, eles podem resolver problemas com aplicações no cotidiano.

Peterson: Eu ainda não sei como iremos fazer para os alunos terem ideia de somar os quadrados dos catetos e verem que vai dar o mesmo resultado da hipotenusa.

Pesquisadora: Vocês podem observar, no artigo que eu entreguei para vocês hoje, que os alunos fizeram diferentes registros para resolver as tarefas. Nós podemos pensar em uma ou mais maneiras de ajudar os alunos a fazerem registros de forma que os ajudem a perceber a relação pitagórica.

É interessante notar que foi ocorrendo um movimento crescente da forma de conduzir a aula que foi se distanciando de um modelo expositivo de ensino e se aproximando de uma aula em que os estudantes desempenham papel mais ativo em sua aprendizagem. Inicialmente, os estagiários haviam pensado em iniciar a aula apresentando o Teorema utilizando de um exemplo com a representação geométrica, apresentação de sua fórmula, seguida de uma demonstração para, depois, os estudantes utilizarem algum material a fim de verificarem sua validade. Na terceira reunião, cogitaram de conduzir a aula de forma que os alunos pudessem descobrir a relação pitagórica. Já na quarta, pensaram que os estudantes poderiam descobrir a relação pitagórica por meio da exploração de figuras, e que essa exploração deveria ocorrer antes da apresentação da fórmula do Teorema. Além disso, Peterson sugeriu contemplar a história de Pitágoras, e Marília manifestou a ideia de propor problemas de aplicação em situações do cotidiano (semirreais de acordo com Skovsmose, 2000). Ao final da quarta reunião, permaneceu a dúvida de como levar os alunos a pensarem que devem somar os quadrados dos catetos para observarem que obtém valor igual ao quadrado da hipotenusa.

Então, na quinta reunião, o grupo se dedicou a pensar em uma forma que possibilitasse os estudantes, baseados na exploração de alguns recortes de papel com a forma de triângulos e quadrados (figura 11), descobrirem que a área do quadrado do lado maior é igual à soma das áreas dos quadrados dos lados menores nos triângulos retângulos.

Figura 11 – Figuras feitas em papel cartão
Fonte: Dados da pesquisa.

Marília: Nós vamos pedir aos alunos que somem as áreas?

Pesquisadora: Como os livros usam a representação geométrica?

Marília: Eles apresentam o teorema e mostram o desenho para os alunos entenderem melhor.

Peterson: Eu acho mais interessante que eles descubram a relação em vez de a gente já contar de cara.

Marília: Nós podemos pedir que eles registrem as medidas.

Pesquisadora: Quais medidas?

Marília: As medidas das áreas.

Pesquisadora: Vocês acham que, com o registro das áreas, os alunos irão perceber a relação entre os quadrados dos lados?

Marília: Temos que pensar em um jeito.

Pesquisadora: Podemos solicitar que eles preencham uma tabela.

Assim, Peterson enfatizou que os alunos deveriam descobrir a relação entre os quadrados, propondo uma abordagem diferente dos livros que havíamos consultado.

Logo, Marília começou a elaborar a tabela mostrada abaixo:

Tabela 6 – 1ª tabela proposta por Marília

Triângulo	Medida do cateto 1	Quadrado do cateto 1	Medida do cateto 2	Quadrado do cateto 2	Medida da hipotenusa	Quadrado da hipotenusa

Marília: Eu estou achando essa tabela muito complicada... Será que ficaria melhor colocarmos CAT^2, HIP^2?

Peterson: Vai ficar mais complicado.

Marília: Vou tentar melhorar a tabela e compartilho com vocês.

Na sexta reunião, o grupo discutiu como a aula poderia ser conduzida para que os alunos pudessem somar as áreas dos quadrados dos catetos e observarem que é igual ao quadrado da hipotenusa nos triângulos retângulos.

Marília: [...] não sei como podemos fazer para ajudar os alunos a ter ideia de somar os quadrados dos catetos para descobrirem que é igual ao quadrado da hipotenusa.

Peterson: Precisamos pensar em um jeito de eles terem essa ideia, sem a gente falar...

Pesquisadora: Eu gostei da maneira que o livro do Imenes do 8º ano inicia esse assunto. Ele mostra um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados e faz uma pergunta.

Marília leu a pergunta: “Qual é a maior área, a do quadrado violeta ou a dos dois quadrados verdes, juntos?” (Imenes; Lellis, 2012, p. 233).

Peterson: Eu acho uma boa, pois a nossa dúvida era esta, em como fazer os alunos relacionarem as áreas.

Marília: Eu gostei também, porque eles vão ter que somar as áreas para descobrir qual é maior, sem a gente falar que é igual.

Assim, os estagiários concordam com a sugestão da pesquisadora em propor uma pergunta que levasse os alunos a compararem as áreas dos quadrados dos catetos com a área da hipotenusa. Em seguida, o grupo voltou a se dedicar a elaboração da tabela que iria constar na tarefa proposta na primeira aula. Marília havia compartilhado no grupo de *WhatsApp* uma segunda versão (tabela 8).

Tabela 7 – 2ª tabela proposta por Marília

Triângulo	Lado 1	Área do quadrado do lado 1	Lado 2	Área do quadrado do lado 2	Lado 3	Área do quadrado do lado 3
1						
2						
3						

.

Marília: Eu estou achando que a tabela está complicada, tem muitos números.

Pesquisadora: Em vez de identificar os triângulos por números, podemos colocar as cores.

Peterson: Já fica melhor.

Marília: É melhor, mas ainda estou achando ela complicada. Em vez de lado 1, lado 2, podemos escrever cateto e hipotenusa.

Pesquisadora: Eu acho que não precisa ter colunas para indicar as medidas dos lados.

Marília: Vamos ver. Vou fazer colocando as informações (Tabela 8).

Então, Marília fez uma nova tabela, mostrada a seguir.

Tabela 8 – 3ª versão da tabela que seria utilizada para ajudar os alunos organizarem as informações das áreas dos quadrados dos lados dos triângulos

Triângulo	Área do quadrado do cateto	Área do quadrado do cateto	Área do quadrado da hipotenusa
Verde			
Laranja			
Roxo			

Peterson: Ficou mais simples. Mas vai ter um triângulo que não é retângulo. **Pesquisadora:** Não podemos colocar cateto e hipotenusa. **Marília:** Ah! **Pesquisadora:** Podemos chamar de quadrado menor, médio e maior. **Peterson:** Assim dá certo.

Depois da discussão, combinamos de apresentar a tabela sem utilizar os termos: catetos e hipotenusa, conforme mostrado a seguir.

Tabela 9 – 4ª versão da tabela que constou na tarefa proposta na primeira aula

Triângulo	Área do quadrado menor	Área do quadrado médio	Área do quadrado maior
Azul			
Amarelo			
Laranja			

Percebemos que o grupo foi fazendo alterações cuidadosas na tabela para torná-la mais concisa e simples, com o intuito de facilitar a organização das informações referentes às áreas dos quadrados dos lados dos triângulos que seriam explorados durante a aula. Houve um reconhecimento da importância de se pensar nas palavras que seriam utilizadas, considerando tanto a facilidade em identificar os triângulos e seus respectivos lados como os conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, o trabalho coletivo e reflexivo permeou a elaboração da tabela, bem como as perguntas que constaram no enunciado da tarefa, conforme mostramos a seguir.

Por sugestão dos estagiários, resolvemos fazer esta reunião extra (sétima) de forma virtual, para revisarmos o que havíamos planejado para a primeira aula sobre teorema de Pitágoras e, também, pensarmos em alguns detalhes que ainda não tinham sido contemplados.

Pesquisadora: Após a tabela, nós tínhamos combinado de escrever: "observe a tabela e escreva o que vocês descobriram".

Peterson: Eu estou gostando demais! Eu acho que os alunos vão perceber que a soma vai dar igual nos triângulos retângulos.

Marília: Eu também acho que esta aula vai ajudá-los a identificar triângulos retângulos.

Marília: Mas se não responderem o que nós queremos que eles descubram...

Pesquisadora: O que nós queremos que eles descubram?

Marília: Que a soma dos quadrados dos catetos é igual à hipotenusa nos triângulos retângulos.

Peterson: Na primeira aula, nós não vamos falar nada de hipotenusa e cateto, então os alunos não devem responder assim.

Marília: É mesmo! Talvez eles falem assim: "Em dois triângulos a soma deu igual e em um triângulo deu diferente".

Peterson: Então podemos perguntar: "Em quais triângulos deu igual?", para ajudá-los a perceber que a relação é válida nos triângulos retângulos.

Marília: Como vamos colocar o símbolo de ângulo reto, vai ficar fácil para perceberem que, no triângulo que não é reto, deu valor da área diferente.

Desse modo, os estagiários refletiram que a questão – O que vocês observaram? – poderia ser muito aberta, e começam a considerar que poderiam fazer perguntas mais direcionadas para ajudar os alunos a observarem que a relação pitagórica é válida apenas nos triângulos retângulos.

A oitava reunião foi realizada na escola em que a pesquisadora atua como professora, para que os estagiários pudessem simular a aula planejada em uma sala de aula, inclusive utilizando o quadro. Ao executar a aula, o grupo refletiu, mais uma vez, sobre cada momento que culminou em outras alterações no planejamento, além de possibilitar que os estagiários pudessem pensar em como organizar o quadro e fazer algumas alterações na tarefa que seria proposta.

Quando Peterson estava simulando o momento de socialização da resolução das tarefas, ocorreu a discussão descrita a seguir.

Peterson: Depois da tabela preenchida no quadro, podemos perguntar de maneira geral: O que vocês descobriram? Ou podemos perguntar: Quais triângulos a área do quadrado maior deu igual à soma da área dos outros dois? Quais triângulos a área do quadrado maior deu valor diferente da soma dos outros quadrados?

Marília: Eu achei boa esta ideia de perguntar em quais triângulos deu igual e em quais triângulos deu diferente.

Peterson: Podemos perguntar abaixo da tabela, em quais triângulos a área do quadrado maior é maior do que a soma da área dos outros dois quadrados?

Marília: Apareceu a palavra maior duas vezes: ficou a área do quadrado maior é maior...

Pesquisadora: Hum! Podemos perguntar assim: Em quais triângulos a área do quadrado

maior é diferente da soma da área dos outros dois quadrados?
Marília: Depois perguntamos: Em quais triângulos a área do quadrado maior é igual a soma da área dos outros dois quadrados?
Peterson: Eu achei melhor. Assim, vai ficar mais fácil de eles observarem que deu igual nos triângulos retângulos, e deu diferente no triângulo que não é retângulo.
Marília: Nós vamos tirar a pergunta geral: O que vocês descobriram?
Peterson: Eu acho que não.
Marília: Se eles escreverem que não descobriram nada.
Pesquisadora: Podemos mudar um pouquinho esta pergunta, em vez de perguntar o que eles descobriram, podemos perguntar o que eles podem observar.
Marília: Podemos perguntar: "O que vocês podem observar sobre os triângulos?".
Peterson: Achei melhor.

Com a simulação da aula, o grupo decidiu que seria adequado inserir, na primeira linha da tabela, as informações referentes ao triângulo rosa que seria explorado no momento inicial da aula com toda a turma.

Além disso, inicialmente o grupo tinha optado por elaborar uma tarefa mais aberta, porém, por considerar que, possivelmente, os estudantes não teriam autonomia para explorar a situação e elaborar conjecturas, decidiram inserir algumas questões para ajudá-los a perceber um padrão na relação entre os quadrados dos lados dos triângulos retângulos que exploraram e, também, a constatarem que esse padrão (relação pitagórica) só é válido em triângulos retângulos. Assim, foi definido que a tarefa seria proposta com a tabela e as questões mostradas na figura 12.

Agora é o momento de vocês explorarem os triângulos e os quadrados recebidos e completar a tabela:

Triângulo	Área do quadrado menor	Área do quadrado médio	Área do quadrado maior
Rosa	9 x 9 = 81	12 x 12 = 144	15 x 15 = 225
Azul			
Amarelo			
Laranja			

a) Em quais triângulos a área do quadrado maior é diferente da área dos outros dois quadrados juntos?

b) Em quais triângulos a área do quadrado maior é igual à área dos outros dois quadrados juntos?

c) Analisando os triângulos, o que vocês podem observar?

Figura 12 – Tarefa "Explorando triângulos"
Fonte: Dados da pesquisa.

A nona reunião foi dedicada ao planejamento da segunda aula sobre Teorema de Pitágoras, porém o grupo ainda precisava decidir se iria propor a tarefa mostrada na figura 13, a qual foi denominada como desafio.

Descubra qual é a medida do lado maior do triângulo retângulo abaixo:

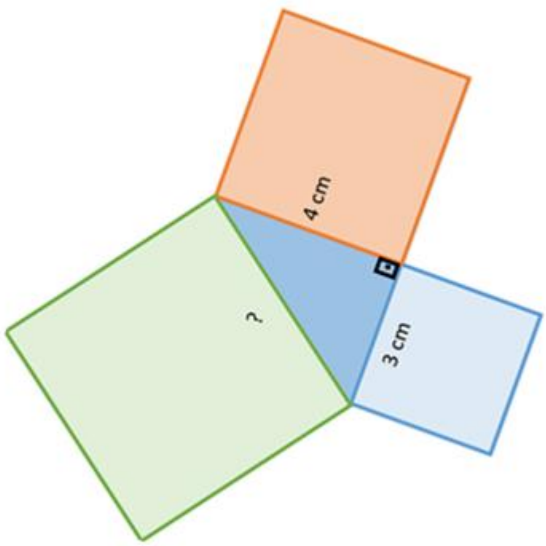


Figura 13 – Desafio proposto no início da segunda aula
Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisadora: Hoje vamos iniciar o planejamento da segunda.
Marília: Nós ainda precisamos decidir sobre o desafio.
Peterson: O tempo vai ficar muito apertado para propor na primeira aula.

Marília: Eu amei o desafio! Eu acho que ele faz muito mais sentido na primeira aula.

Peterson: Marília, vamos pensar que cada aula você vai construindo um pouquinho de conhecimento, como o professor Tiago falou.

Marília: Na segunda aula, iremos propor problemas de aplicação, então não vamos usar o desafio?

Peterson: Eu tinha pensado em apresentar a fórmula, contar um pouco sobre Pitágoras, colocar os dois exemplos que vamos fazer no quadro em uma folha para os alunos colarem no caderno e não terem que gastar tempo copiando.

Marília: Eu acho que podemos entregar em uma folha, mas, primeiro, temos que fazer no quadro com eles, explicando, detalhando os passos...

Pesquisadora: Existem alguns jeitos de conceber o ensino de matemática. Tem um modo que o professor apresenta e explica o conteúdo, mostra exemplos e propõe exercício, isso aí é uma aula mais...

Marília: Tradicional, não é?

Pesquisadora: Sim. Tem outras maneiras de ensinar em que os alunos têm uma participação mais ativa na aprendizagem. Eu penso que a primeira aula está mais nesse sentido, pois vocês colocam o aluno em movimento e vão conduzindo de forma que eles possam verificar que a relação pitagórica é válida nos triângulos retângulos, expressar suas ideias, não está assim?

Marília: Está.

Pesquisadora: Poderíamos iniciar a segunda aula, propondo o desafio.

Marília: Logo no início?

Pesquisadora: Sim. Podemos conversar sobre o que eles descobriram na aula anterior e propor o desafio em seguida.

Peterson: Como podemos fazer isso?

A pesquisadora percebeu que os estagiários estranharam a proposta e continuou: Quando lecionava para sétimos anos, eu começava um trabalho que envolvia situações com balanças para, depois, introduzir equações. Então, observei que, quando trabalhava com balança, os alunos conseguiam descobrir os valores desconhecidos, mas, quando passava para equações, a maioria não conseguia, por quê? Porque a transição de uma coisa pra outra não tinha feito sentido, então busquei maneira de fazer essa transição e melhorou bastante. Talvez o desafio possa ajudar na transição da representação geométrica do teorema para a algébrica.

Pesquisadora: Podemos propor o desafio, os alunos resolvem. Depois um aluno mostra para a turma como resolveu. Então, vocês podem fazer um desenho de outro triângulo retângulo com os quadrados e dizer para a turma: Nós não sabemos as medidas dos lados desse triângulo, ele pode ser qualquer triângulo retângulo, então, como vocês sabem, podemos indicar valores desconhecidos por letras.

Podemos constatar que a construção de novas aprendizagens, em relação ao ensino de matemática, é complexa e lenta. Embora tenhamos realizados estudos sobre diferentes tipos de tarefas e acerca da comunicação matemática em sala de aula, ainda era necessário que os estagiários desenvolvessem uma maior compreensão sobre uma abordagem de resolução de problemas para aprender matemática. É preciso considerar que, habituados ao ensino expositivo e que dá ênfase a uma matemática enraizada na matemática científica e sem terem vivenciado experiências como estudantes da educação básica e, também, na licenciatura com uma abordagem de ensino de matemática que se distancia de um modelo expositivo, seria esperado que esse desconforto inicial ocorresse.

A discussão prosseguiu:

Marília: Acho que, antes de mostrar a fórmula, a gente tem que falar que os dois lados menores chamam cateto, e o maior, hipotenusa.

Peterson: Podemos desenhar um triângulo retângulo, explicar os nomes e colocar as letras para indicar os lados: a, b e c.

Marília: Eles só usaram a, b e c nas equações de segundo grau.

Pesquisadora: É preciso conduzir de uma forma que os alunos entendam o que significam as variáveis.

Marília: Nós podemos falar assim: “Vocês já aprenderam com o professor Tiago que, quando nós não sabemos um valor, podemos usar letras, como nas equações. Então, vamos representar a medida da hipotenusa com a letra a; vamos chamar um cateto de b; o outro cateto de c”.

Peterson: Eu estou pensando em como obter a fórmula.

Pesquisadora: O que vocês acham de desenhar os quadrados sobre os lados do triângulo com lados a, b e c, e perguntar para os alunos qual seria a área?

Marília: Podemos perguntar: “Como devemos fazer para obter a área deste quadrado?” Algum aluno deve responder a vezes a.

Peterson: Eu acho que nós não deveríamos apagar a resolução do desafio, porque podemos mostrar que, no quadrado com lado que mede 3, multiplicamos 3 x 3 para descobrir a área; no quadrado de lado 4, fizemos 4 x 4. E perguntar: “Este lado mede a, qual cálculo devemos fazer?”

Marília: Isso!

Peterson: Então, nós falamos: a vezes a, podemos indicar por a elevado a 2, b x b será b elevado a 2, c x c será c elevado a 2.

Pesquisadora: Seria bom indicar esses cálculos dentro ou próximo de cada quadrado.

Marília: Dentro, vai ficar melhor para eles perceberem.

Pesquisadora: Eu estou achando até bom o desafio ter ficado para a segunda aula.

Marília: É, está encaixando, agora eu estou concordando com você, as áreas dos quadrados estão sendo usadas para obtermos a fórmula.

Peterson: Com certeza.

Marília: Então, podemos perguntar quais áreas devemos somar para ver se eles respondem, e obtemos a fórmula. De certa forma, nós estamos fazendo com que eles descubram a fórmula.

Assim, os estagiários concordaram com a sugestão da pesquisadora em iniciar a segunda aula com a resolução do desafio para, em seguida, baseando-se na representação geométrica de um triângulo retângulo com medidas desconhecidas, obter a fórmula do Teorema de Pitágoras. Também pensaram nos detalhes que envolveriam essa parte da aula.

O professor supervisor havia solicitado que, após a apresentação da fórmula, deveriam ser mostrados dois exemplos de sua utilização. A fala de Marília, descrita a seguir, mostra que ela considerou importante pensar nos exemplos que seriam apresentados.

Marília: Eu acho que precisamos pensar nos exemplos que vamos colocar. Na aula que o professor Tiago trabalhou a propriedade distributiva, todos os exemplos deram resultados positivos; então uma aula aluna perguntou: “Professor, sempre vai dar positivo?”. Foi legal porque ele modificou os valores para mostrar que era possível que o resultado fosse negativo e, também, elogiou a aluna por ela fazer essa pergunta.

Então, o grupo decidiu utilizar um exemplo em que a incógnita é a medida da hipotenusa, e outro, em que a incógnita é a medida de um cateto. Os estagiários também observaram que seria melhor desenhar os triângulos em posições diferentes, conforme haviam aprendido na disciplina “Geometria na Educação Básica” que os alunos devem ter contato com figuras com diferentes formas e posições. Então elaboraram os exemplos mostrados na figura 14.

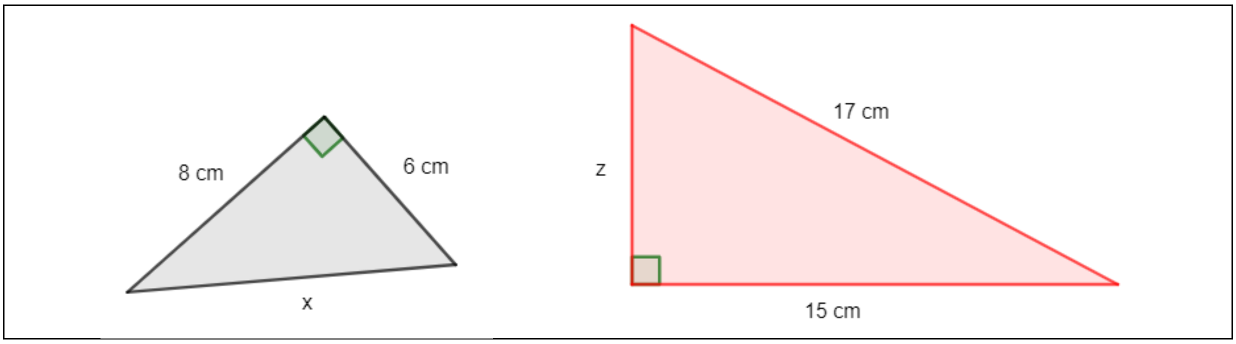
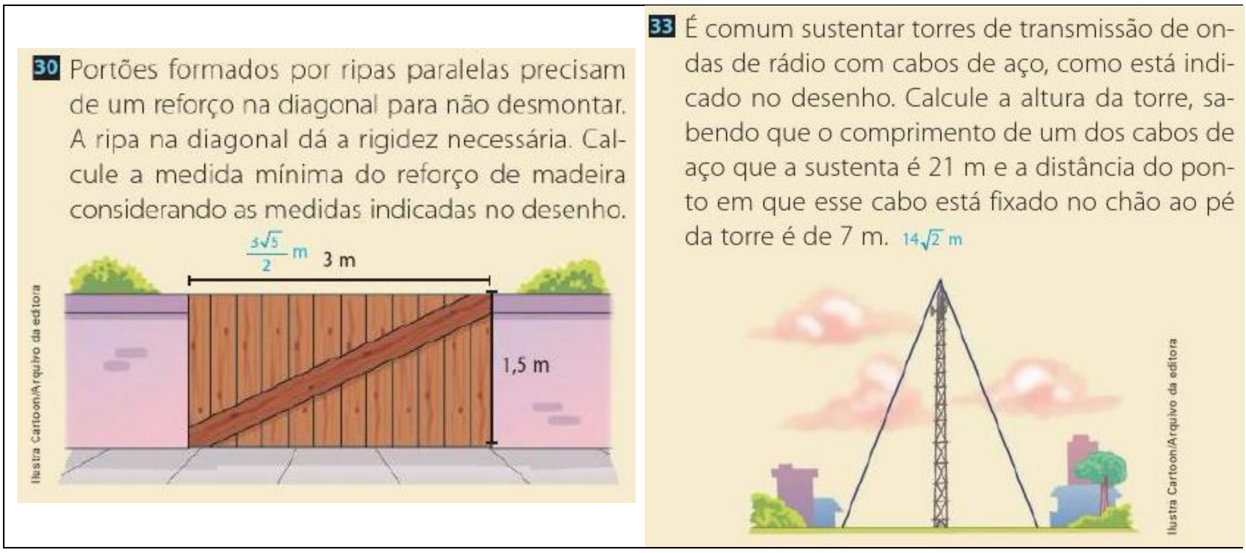


Figura 14– Triângulos usados para mostrar a utilização da fórmula do teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa.

Eles também selecionaram dois problemas para serem propostos na segunda aula (figura 15).



30 Portões formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não desmontar. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Calcule a medida mínima do reforço de madeira considerando as medidas indicadas no desenho. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ m

33 É comum sustentar torres de transmissão de ondas de rádio com cabos de aço, como está indicado no desenho. Calcule a altura da torre, sabendo que o comprimento de um dos cabos de aço que a sustenta é 21 m e a distância do ponto em que esse cabo está fixado no chão ao pé da torre é de 7 m. $14\sqrt{2}$ m

Figura 15 – Problemas selecionados pelos estagiários
Fonte: Bigode, 2015, p. 147.

As discussões seguintes revelam que o grupo ponderou sobre as medidas que constavam nos enunciados e decidiu fazer algumas alterações.

Peterson: No problema do portão, a incógnita está na hipotenusa, e no da ponte, está em um cateto. Nós pensamos em alterar as medidas porque, nos dois problemas, as respostas não dão raízes exatas.

Pesquisadora: Quais medidas vocês sugerem?

Peterson: Eu iria colocar 25 no lugar de 21. Desse modo, a resposta seria exata: 24 metros.

Marília: Eu acho que para eles vai ser difícil descobrir que a raiz de 576 é 24.

Peterson: Eles não sabem fatorar...

Pesquisadora: E se mudássemos o enunciado para eles terem que calcular a distância da ponte ao cabo de aço?

Peterson: Iria simplificar, porque eles teriam que descobrir a raiz de 49.

Marília: Achei melhor! A incógnita continua em um cateto.

Pesquisadora: Vocês observaram que, do modo como resolveram a equação (figura 16), a incógnita ficou no segundo membro?

Peterson: O professor Tiago sempre diz aos alunos para as letras ficarem no primeiro membro e os números no segundo.

Marília: Nesse caso, se for mudar de membro, vai complicar, em vez de ajudar. Vai ser bom para eles verem que nem sempre precisamos seguir essa regra. Regras demais não ajudam os alunos a pensarem e, às vezes, trazem mais dificuldades!

Peterson: Eu não acho que eles irão usar raiz quadrada. Eles devem pensar que 7x7=49.

Pesquisadora: Se os alunos tiverem dúvida nisso, podemos perguntar: “Qual número que elevado a 2 dá 49?”

Peterson: Eu costumo perguntar assim.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$
$$\mathbf{25^2 = 24^2 + c^2}$$
$$\mathbf{625 = 576 + c^2}$$
$$\mathbf{625 - 576 = c^2}$$
$$\mathbf{49 = c^2}$$
$$\mathbf{c = \pm\sqrt{49}}$$
$$\mathbf{c = 7\ metros}$$

Figura 16– Resolução do problema da torre com as medidas sugeridas por Peterson
Fonte: Dados da pesquisa.

Por um lado, o grupo decidiu alterar a incógnita para que a dificuldade que os alunos pudessem ter, ao obter a raiz quadrada de 576, não dificultasse demasiadamente a resolução do problema da torre; de outro lado, considerou pertinente que esse problema poderia ser resolvido mantendo-se a incógnita no segundo membro, algo que contrariava a regra frisada pelo supervisor, para que os estudantes pudessem ter oportunidade de ampliar seu repertório em relação à maneira que uma equação pode ser resolvida. Outro aspecto contemplado na discussão anterior se refere à antecipação de possíveis estratégias dos estudantes, nesse caso, pensar na potenciação em vez da raiz quadrada.

Em seguida, o grupo refletiu sobre o problema do portão.

Marília: Eu pensei em alterar as medidas do portão para ficar com 12 metros de comprimento e 5 metros de altura.

Pesquisadora: Esse portão não ficaria grande demais?

Marília: As medidas ficaram exageradas!

Peterson: Os valores ficaram bons para calcular, mas não tem sentido na vida real.

Marília: Poderíamos usar as medidas 3, 4 e 5, mas já usamos no desafio.

Pesquisadora: Essa situação é interessante para pensarmos como que, em situações de medida, trabalhar com números naturais fica muito restrito. Eu até brinco com meus alunos, eu falo assim: “Vai lá e compra um quilo de carne, se você conseguir comprar um quilo de carne, eu te dou cem reais.” “Ah, moleza professora.” Aí, eu falo: “Vocês precisam me mostrar o cupom”. Ninguém consegue!

Marília: Eu acho que nós estamos querendo fugir das raízes inexatas, dos números racionais e está ficando muito forçado!

Pesquisadora: Quais medidas teriam um portão na realidade?

Marília: No livro, estão com 3m de largura e 1,5 metros de altura. Eu acho que poderíamos manter a largura e colocar 2 metros de altura.

Então Marilia usou a fórmula do teorema de Pitágoras com as medidas que haveria sugerido (figura 17).

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 3^2 + 2^2$$
$$a^2 = 9 + 4$$
$$a^2 = 13$$
$$a = \pm\sqrt{13}$$
$$a = \sqrt{13}\ metros$$

Figura 17- Resolução do problema do portão com as novas medidas sugeridas por Marília
Fonte: Dados da pesquisa.

A discussão prosseguiu:

Peterson: Eles vão achar estranho que a resposta seja raiz de 13.

Pesquisadora: É estranho mesmo. Imagina que você peça para um carpinteiro cortar uma ripa de madeira com a medida de $\sqrt{13}$ metros. O que ele iria achar?

Marília: Estranho mesmo!

Peterson: Ele iria cortar na medida aproximada.

Pesquisadora: Sim, vai dar entre 3 e 4 metros. Vou usar a calculadora... Deu 3,6055512755.

Peterson: A calculadora trabalha com aproximação. Deu quantas casas após a vírgula?

Pesquisadora: Dez. Três após a vírgula já seriam suficientes para fabricar o portão, pois a medida estaria em milímetros.

Marília: Podemos perguntar: “Qual que é a raiz mais próxima de 13?”. A raiz de 9 é 3, a raiz de 16 é 4. Já passou de 13. Também podemos falar: “Se você quiser descobrir o valor aproximado, use a calculadora, mas pode deixar a resposta como raiz de 13”.

Pesquisadora: Então o portão vai ficar com dois metros de altura e três metros de comprimento? Está bom assim?

Marília e Peterson concordaram.

Assim, o grupo construiu um entendimento de que as medidas do portão não deveriam se distanciar da realidade, e que, também, em uma situação real, a medida de comprimento de uma ripa não seria indicada como raiz de 13.

De acordo com Skovsmose (2000), tarefas matemáticas podem ter três tipos de referência: exclusivamente a matemática; a uma semirrealidade (trata-se de uma situação criada por quem elaborou a tarefa); e a uma situação da vida real. Consideramos que conhecimentos sobre diferentes tipos de tarefas e, também, sobre diferentes tipos de referências são relevantes para a docência da matemática na educação básica, pois, determinadas respostas podem ser apropriadas de acordo com o contexto que se baseiam e com o nível de aprendizagem dos alunos.

Em seguida, Marília sugeriu alterar o enunciado do problema que estávamos discutindo.

Marília: Eu também pensei em mudar um pouco o enunciado...

Pesquisadora: Leia, por favor.

Marília: "Portões formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não desmontar. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Calcule a medida mínima do reforço de madeira, considerando as medidas indicadas no desenho". Eu achei que ficaria melhor se pedisse para calcular a medida da ripa em vez do reforço.

Pesquisadora: Concordo.

Outra vez, os estagiários sugeriram fazer um encontro extra, de forma virtual, com objetivo de continuar nos dedicando ao planejamento da segunda aula sobre o teorema de Pitágoras para que eles pudessem simular a execução dessa aula na semana seguinte. Então, a décima reunião foi iniciada com um questionamento feito por Peterson:

Peterson: Eu fiquei pensando se podemos afirmar que os ângulos realmente medem 90 graus. Será que deveríamos indicar os ângulos retos nos cantos do portão?

Marília: No desenho do livro, não tem. Eu acho que não é necessário. Não sei... eu acho que talvez seria bom eles perceberem que existem ângulos retos em muitos objetos, construções, para trazerem a matemática para a vida mesmo.

Pesquisadora: Essa pergunta envolve aspectos dos conceitos matemáticos e aplicação em situações reais. Eu me lembro de uma banca de mestrado a qual assisti há vários anos sobre recursos didáticos e, em alguns trechos do texto, o autor se referiu a um objeto feito de madeira como um cubo. Então um dos avaliadores alertou que um objeto físico não pode ser considerado um ente matemático, mas apenas uma representação. Há um autor chamado Fischbein (1993) que considera os entes geométricos dotados de natureza conceitual e figural. A natureza conceitual se relaciona com idealidade, generalidade e perfeição. A figural se refere à posição, à forma, à localização de uma figura. Dessa forma, em situações práticas, sempre é esperado algum grau de imperfeição, pois somente os conceitos são perfeitos. Mas será que se o ângulo do portão não medir exatamente 90 graus, mas próximo disso, iria dar uma diferença considerável na medida da ripa?

Marília: A variação será pequena, que pode ser desconsiderada.

Pesquisadora: Nós preparamos um material para os alunos e estamos dizendo que iremos entregar triângulos e quadrados feitos em papel cartão, mas, realmente, iremos entregar quadrados e triângulos?

Marília: Sim.

Pesquisadora: As figuras terão alguma espessura, então nós não poderíamos considerar que elas sejam planas. Além disso, os lados de cada quadrado não serão realmente iguais, pois até no modo como recortamos ocorre alguma variação, porém podemos utilizá-las considerando que elas estão representando quadrados e triângulos.

Marília: Nós podemos pensar que aplicamos a Matemática em situações reais, desconsiderando pequenas imperfeições.

Peterson: Se os ângulos forem um pouquinho maiores ou menores do que 90 graus, não irão influenciar na medida da diagonal, não é?

Marília: Sim, eu acho que indicar o símbolo de ângulo reto no desenho do portão vai ficar muito forçado!

Peterson: Eu estou pensando assim: em situações puramente matemáticas precisamos usar símbolo do ângulo reto para ter certeza de que mede 90 graus, mas, em situações do cotidiano, podemos considerar ângulo reto pela própria situação. Nesse caso, o portão tem formato retangular, então podemos considerar que os ângulos são retos.

Marília: Eu acho importante que os meninos saibam identificar ângulos retos no dia a dia, em uma porta, nas folhas do caderno.

Pesquisadora: Podemos também escrever no enunciado que o portão tem formato retangular.

Peterson: Vamos deixar como está, porque senão vai ficar muita informação e pode complicar. Quando algum aluno pedir ajuda, podemos perguntar qual a forma do portão, quando eles responderem que é retângulo, lembraremos que os ângulos dos retângulos são retos.

O episódio acima mostra que o grupo pôde refletir, outra vez, sobre as diferentes maneiras que os entes geométricos são tratados quando se referem a situações puramente matemáticas e em situações relacionadas à realidade. Albuquerque *et al.*(2006) afirmam que a formação de futuros professores deve abranger o conhecimento da matemática como ciência aplicada, que historicamente tem sido utilizada para resolver problemas em diversas áreas ou contextos.

Em seguida, o grupo continuou a pensar sobre possíveis dúvidas dos alunos ao resolverem o problema do portão.

Peterson: Eu acho que eles podem pensar: qual triângulo que eu devo considerar se tem dois? Eu preciso calcular os dois triângulos? Mas acho que vai ser bom para eles pensarem um pouquinho e perceber que os dois triângulos são iguais, que podem escolher um dos dois triângulos.

Pesquisadora: Também podemos pedir que os alunos desenhem um dos triângulos retângulos abaixo ou ao lado da figura, e indiquem as medidas no desenho**.**

Marília: Vamos fazendo perguntas que coloquem eles para pensar.

Pesquisadora: Em uma aula de resolução de problemas, um dos desafios do professor é não deixar o estudante totalmente no ar, mas não fornecer ajuda demais...

Marília: Não podemos deixar que eles fiquem estagnados!

Pesquisadora: Mas também não podemos fornecer informações demais, tirar do aluno a oportunidade de resolver o problema.

Peterson: Verdade.

Pesquisadora: Se um aluno disser: "eu não sei como resolver!", "Não sei o que é para fazer!", então, você pode pedir que ele leia o enunciado em voz alta. Ao ler em voz alta, geralmente eles compreendem melhor a situação do problema. Depois vocês podem perguntar: "O que está pedindo que você descubra?".

Peterson: Eu também pensei que alguns alunos podem achar estranho resolver uma equação sem x, porque eles não estão acostumados a usar outras letras.

Pesquisadora: Sim, além disso, não usaram uma equação com ideia de função, que tem várias variáveis.

Marília: Eu acho que o que eles irão achar mais estranho é a resposta ser raiz de 13. Talvez eles parem nessa parte.

Pesquisadora: Pode ser que isso ocorra mesmo, porém, mesmo que não consigam finalizar a resolução do problema, se chegarem até nessa parte, está muito bom! Eu li um artigo que explica que, na resolução de problemas, o objetivo é encontrar um caminho para chegar a um local que não está logo acessível (Serrazina *et al*., 2002). Eu penso que, mesmo que o aluno não chegue ao destino que desejamos, se ele fez um trajeto coerente, mas se agarrou em algum ponto da estrada, valeu demais! O professor precisa ter muito cuidado para não valorizar apenas as respostas corretas, porque isso acaba frustrando-o e os alunos. É preciso pensar no processo!

Peterson: Se os alunos conseguirem entender o enunciado, indicar as medidas na figura, utilizar a fórmula é porque aprenderam muita coisa!

Marília: Como é importante esta reflexão sobre valorizar o que o aluno aprendeu! Parece que há tantas coisas que são óbvias que eu nunca tinha pensado e eu estou quase me formando...

Pesquisadora: Não são óbvias, são muito importantes.

Em seguida, o grupo passou a discutir o problema da torre.

Marília: Será que os alunos sabem que a altura forma um ângulo de 90 graus?

Peterson: Eu tenho quase certeza de que não, vamos ter que ajudá-los a ver que é reto, comparando com o canto de uma folha, apelar pelo visual. Talvez possam considerar o triângulo formado pelos dois triângulos retângulos no problema da torre.

Pesquisadora: Vocês podem explicar que a altura sempre faz um ângulo de 90 graus, pedir que se lembrem de que, quando alguém mediu a altura deles em uma consulta médica ou usando uma trena em casa, foi necessário posicionar o instrumento formando um ângulo reto com o piso.

Peterson: Trazer para a realidade deles.

O grupo resolveu modificar algumas partes do enunciado do problema da torre, de modo que os dois problemas foram propostos como mostrados na figura 18.

1) É comum sustentar torres de transmissão de ondas de rádio com cabos de aço, como está indicado no desenho. A altura da torre é de 24 metros, e o comprimento de cada um dos cabos de aço é de 25 metros. Qual é a distância do ponto em que esse cabo está fixado no chão ao pé da torre?

2) Portões de madeira formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não se desmontarem. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Observe as medidas indicadas no desenho abaixo. Qual é a medida da ripa de madeira que foi colocada na diagonal?

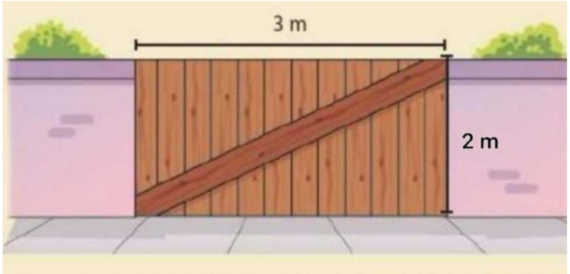


Figura 18 – Problemas com os enunciados alterados.
Fonte: Adaptado de Bigode, 2015, p. 147.

A décima primeira reunião foi realizada na escola em que a pesquisadora trabalha para que os estagiários pudessem simular a execução da segunda aula planejada. O grupo trocou ideias a respeito do artigo "Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras" (Vieira, Imafuku e Pereira, 2019) que haviam lido previamente.

Peterson: Eu li, achei interessante para pensar nos erros que os alunos podem cometer.

Marília: Parecia que alguns alunos não tinham aprendido o Teorema; outros, usavam a fórmula de maneira errada. Eu acho que as aulas que estamos planejando estão focando nos pontos certos.

Peterson: Também acho. Erros de somar ou subtrair as medidas dos lados, eu acho que os alunos não irão cometer. Talvez aconteçam erros de cálculos que é bem comum nessas turmas.

Marília: Como o professor Tiago permite que eles usem celular, vários devem fazer os cálculos com calculadora, mas, se usarem a fórmula corretamente, já vai ser ótimo!

Pesquisadora: No problema proposto no artigo, a incógnita estava na hipotenusa. Se estivesse em um dos catetos, provavelmente ocorreriam mais erros.

Peterson: Este tipo de erro eu já vi com meus alunos (em aulas particulares).

Marília: A exploração do material na 1ª aula vai ajudar nisso, eles mesmos vão perceber que a soma sempre é o quadrado do maior lado.

Peterson: Os exemplos da segunda aula também devem ajudar.

Marília: Eu fiquei pensando que a pesquisa foi feita com estudantes do ensino médio de uma escola federal de São Paulo e teve alunos que nem conheciam o teorema de Pitágoras!

Peterson: Isso também me chamou atenção.

Pesquisadora: Tem mais alguma observação sobre o artigo que vocês gostariam de fazer?

Peterson: Não. Eu acho que os alunos vão ter mais dificuldades é de interpretar o problema, indicar as medidas nas figuras, talvez usar a fórmula.

Marília: Concordo, porque eles não estão acostumados a resolver questões de aplicação da matemática, mas vai dar certo!

Pesquisadora: Nós planejamos as aulas com bastante cuidado, procurando considerar o que os alunos já sabem e formas de favorecer a aprendizagem deles. Então devemos ficar tranquilos com o trabalho que fizemos. Depois, iremos analisar como as aulas ocorreram.

Marília: Dá um frio na barriga, só de pensar.

Peterson: Dá mesmo.

Ao simular a aula, o grupo refletiu sobre as várias partes da aula que haviam delineado que culminou em alguns novos combinados. Um deles foi que, nos momentos da generalização da relação pitagórica e da resolução dos exemplos, os estagiários iriam fazer uma seta partindo do ângulo reto e indo em direção ao lado oposto para destacar que o maior lado de um triângulo retângulo é oposto a esse ângulo. Outro foi organizar as informações no quadro de modo que a resolução do desafio não fosse apagada para possibilitar que os alunos observassem a correspondência entre os cálculos numéricos e os algébricos (figuras 19 e 20).

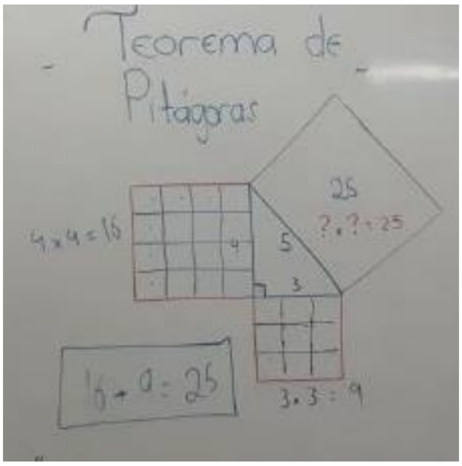


Figura 19– Registro feito por Peterson para mostrar a solução do desafio durante a simulação da aula
Fonte: Dados da pesquisa.

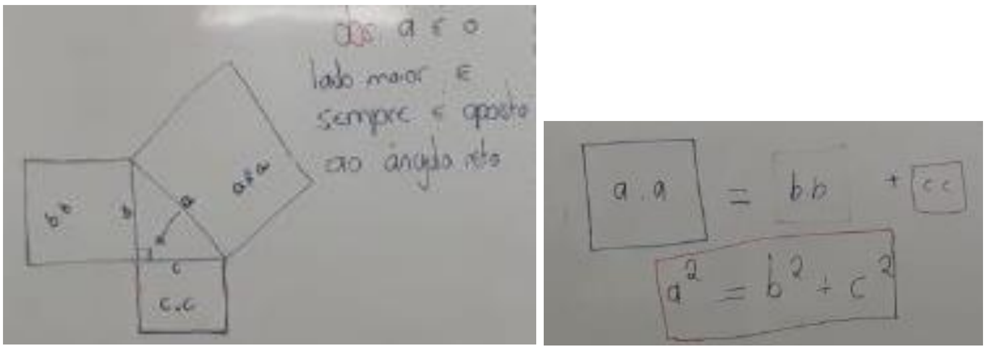


Figura 20 – Registro feito por Peterson para representar os quadrados dos lados de um triângulo retângulo qualquer e obter a fórmula do Teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, Marília observou que Peterson não havia indicado as duas raízes da equação (figura 21). Então o grupo concluiu que seria importante mostrar as duas raízes nos momentos de utilização da fórmula do Teorema.

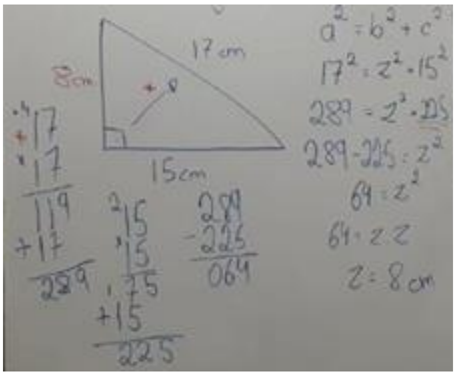


Figura 21 – Primeiro exemplo de utilização da fórmula do teorema de Pitágoras feito por Peterson durante a simulação da aula
Fonte: Dados da pesquisa.

Marília: Eu estou observando o quadro e pensei que seria importante nós escrevermos as duas raízes nos exemplos 1 e no 2.

Peterson: Eu falei, mas não escrevi.

Marília: Podemos escrever z = -8 e colocar que não satisfaz.

Pesquisadora: Importante explicar que não é um valor válido, porque não tem sentido uma medida de comprimento ser negativa.

A simulação da aula também foi importante para o grupo constatar que o tempo não seria suficiente para propor os dois problemas de aplicação do Teorema, o que já tinha sido objeto de reflexão em reuniões anteriores. Contudo, os estagiários continuaram querendo propor os dois problemas e decidiram mantê-los com o intuito de solicitar a permissão do professor supervisor para que eles dessem continuidade na aula seguinte, caso fosse necessário.

Na décima segunda reunião, antes de iniciar a análise da primeira aula, o grupo voltou a pensar nos exemplos.

Peterson: Eu fiquei pensando sobre os dois exemplos de utilização da fórmula do teorema de Pitágoras. Antes tínhamos decidido usar letras para indicar as medidas dos lados desconhecidos, depois pensamos em colocar apenas interrogação, mas achei que ficou mais confuso! Eu tinha gostado do primeiro jeito porque tínhamos colocado a letra z em um dos exemplos para que os alunos possam usar outra letra além de x.

Pesquisadora: Na fórmula do teorema terá letras diferentes: a, b e c.

Peterson: Desse jeito, iríamos trocar a por x, e, no outro exemplo, b por z. Ah! Vai ficar muita letra, né?

Marília: Com a interrogação, se a incógnita é o lado maior, continua a; se é um cateto, pode continuar usando a mesma letra da fórmula.

Peterson: Então, seria melhor usar, no primeiro exemplo, a letra a.

Pesquisadora: Vamos pensar na sua sugestão. Por que seria bom indicar a medida deste lado pela letra a?

Marília: Porque é a hipotenusa.

Peterson: Facilita usar a fórmula. Os catetos b e c já têm a medida. Então, está faltando o valor de a.

Pesquisadora: E, no segundo exemplo, qual letra você sugere indicar no lado com medida desconhecida?

Peterson: b ou c.

Pesquisadora: Desse modo, o aluno não precisará identificar qual lado é o maior, ele irá substituir os valores de acordo com as letras da fórmula, é isso?

Marília: Eu acho importante eles entenderem que a letra “a” representa o maior lado de um triângulo retângulo, e que o lado desconhecido nem sempre vai ser esse para pensarem em como utilizar a fórmula.

Peterson: Realmente, faz sentido... Não dá para colocar “a” e “b” direto, porque é importante eles pensarem como devem substituir os valores na fórmula, vão ter que pensar nisso até para resolver os problemas que nós vamos propor.

Marília: Eu achei melhor com interrogação para eles não terem que trocar de letra.

Peterson: Concordo.

Pesquisadora: Você concorda que não devemos indicar as letras da fórmula para que eles tenham de pensar, mas qual modo que ficará melhor, usando x e z ou deixando apenas interrogação?

Peterson: Estou pensando... Eu tinha gostado de colocar outras letras até para ficar em sintonia com o que o professor Tiago tem falado esta semana, que os alunos podem escolher qualquer letra para representar valores desconhecidos.

Marília: Ele falou, mas mostrou?

Peterson: Não. Seria uma oportunidade para eles usarem.

Marília: Eu acho que não precisa, porque já estaremos usando as letras a, b e c.

Peterson: Sim. Talvez mais letras possa trazer mais confusão. Por outro lado, fico pensando se não estamos subestimando os meninos, a nossa aula mostrou isso! Às vezes, ficamos tão preocupados com as dúvidas, mas eles mostraram que são capazes!

Pesquisadora: Em que você acha que nós subestimamos os alunos?

Peterson: Quando a gente estava planejando a primeira aula, pensamos que eles poderiam ter muitas dúvidas para completar a tabela, ficamos pensando em maneiras de a tabela ficar simples, e eles completaram a tabela sem dificuldades, foram poucos trios que eu precisei ajudar.

Pesquisadora: Então a tabela ficou boa!

Marília: Sim, valeu o esforço!

Algumas investigações realizadas com futuros professores mostram que ocorreram dificuldades na seleção de tarefas (Silva, 2020) ou que, embora tarefas desafiadoras tenham sido selecionadas pelos futuros professores, a aula foi conduzida de forma expositiva e pouco dinâmica (Oliveira, 2020; Souza (2021). Desse modo, a nossa pesquisa vai ao encontro de trabalhos que salientam a importância de contar com experiências anteriores (Neves e Fiorentini, 2021) ou realizar estudos (Rincon e Fiorentini, 2017; Carvalho, 2020) acerca de tarefas desafiadoras (exploratórias ou problemas) para que os estagiários tenham mais condições de planejar e conduzir as aulas com esses tipos de tarefas.

Os dados revelam que os estudos teórico-práticos realizados e o trabalho coletivo e reflexivo que envolveu a elaboração, seleção e alteração das tarefas propostas foram realizados com foco na aprendizagem dos estudantes e contribuíram para que os estagiários: construíssem vários conhecimentos sobre diferentes tipos de tarefas e suas potencialidades para a aprendizagem dos estudantes; considerassem que existe uma subjetividade na classificação das tarefas; refletissem que os conceitos matemáticos podem ser tratados de formas diferenciadas de acordo com o contexto abordado (puramente matemático, semirreal, real); identificassem os conhecimentos prévios dos estudantes; procurassem antecipar possíveis estratégias, dúvidas ou equívocos dos estudantes; ampliassem seu repertório sobre maneiras de conduzir as aulas em que os alunos são incentivados a explorar situações, resolver problemas e compartilhar ideias e estratégias, e que requerem ações do professor, nos diferentes momentos da aula, para favorecer a aprendizagem da matemática.

5.3 Comunicação

A ampliação de conhecimentos relacionados às maneiras de favorecer a comunicação em sala de aula, e a tomada de consciência de que, geralmente, os estudantes costumam ter poucas oportunidades para expressar suas opiniões, é muito importante para que os futuros professores possam lecionar aulas em que os alunos tenham uma participação ativa.

De acordo com Menezes (2010), a comunicação matemática tem natureza transversal, estando presente na própria matemática (utiliza uma linguagem própria conjugada com a língua materna), na forma de conduzir o ensino (por exemplo, no papel do professor e no tipo de tarefas propostas), na maneira de organizar a aprendizagem (por exemplo, na valorização ou não da discussão, na negociação de significados, na compreensão de conceitos matemáticos).

Brendefur e Frykholm (2000) apresentam quatro tipos de comunicação matemática: unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva.

Na *comunicação unidirecional*, o docente domina o discurso em sala de aula com palestras e perguntas fechadas que dão raras oportunidades para os alunos exporem suas estratégias e pensamentos. Assim, a comunicação é estruturada na fala do professor e na escuta dos estudantes.

A *comunicação contributiva* dá espaço para as interações entre os alunos e entre o docente e os alunos, nas quais a conversa se limita à assistência ou compartilhamento com pouca reflexão. Por exemplo, os professores podem oferecer oportunidades para os alunos discutirem tarefas entre si, ajudar uns aos outros no desenvolvimento de estratégias para resolver problemas e apresentar estratégias de resolução para a turma, porém essas conversas têm foco nas correções, e o professor ocupa posição de validador das afirmações.

A *comunicação reflexiva* é semelhante à comunicação contributiva, na medida em que os alunos compartilham suas ideias, estratégias e soluções com colegas e professores. Todavia, na comunicação reflexiva, ocorre a reflexão dos alunos sobre as ações realizadas, de forma que as ações dos alunos e do professor se tornam, posteriormente, um objeto explícito de discussão. Nessa concepção de comunicação, estudantes e o docente argumentam sobre estratégias e ideias, buscando justificar ou refutar conjecturas.

A *comunicação instrutiva* vai além das interações entre alunos e professores, pois o ensino da matemática é baseado no estímulo a reflexões e na integração de ideias dos alunos e do docente. As conversas propiciam que os alunos reflitam sobre suas ações e que o docente compreenda as ideias e dúvidas dos estudantes, possibilitando a reflexão sobre sua própria prática e a alteração de sequências de ensino para modificar as compreensões matemáticas dos alunos.

Brendefur e Frykholm (2000) afirmam que essas categorias se baseiam na noção de que os níveis de comunicação são sucessivos e cada um assume as características de seu antecessor. Então, explicam que:

> [...] se os alunos estão se comunicando de forma reflexiva, pode-se presumir que também está ocorrendo alguma comunicação contributiva e unidirecional. Da mesma forma, para que a comunicação em sala de aula alcance o nível instrutivo – em que as conversas revelem insights sobre o pensamento dos alunos que, por fim, afetam as decisões dos professores sobre a instrução futura – o discurso deve ser desenvolvido de maneira rica o suficiente para solicitar os tipos de reflexões e insights dos alunos normalmente evidenciados nos níveis anteriores. (Brendefur e Frykholm, 2000, p. 128, tradução nossa).[10]

[10] Texto original em língua inglesa: [...] if students are communicating reflectively, one can presume that some contributive and uni-directional communication is also taking place. Similarly, in order for classroom communication to reach the instructive level – where the conversations reveal insights about students' thinking that ultimately impact teachers' decisions about future instruction – the discourse must be developed richly enough so as to solicit the kinds of student reflections and insights typically evidenced at preceding levels.

No nosso entendimento, as comunicações reflexiva e instrutiva envolvem o processo metacognitivo que é defendido por Smole e Diniz (2009):

> [...] ao comunicar ideias e maneiras de agir, o aluno mergulha num processo metacognitivo. Isto é, ele precisa refletir sobre o que fez ou pensou, construir esquemas mais elaborados de pensamento, organizar mentalmente pensamentos e ações, para aprender de novo e com maior qualidade e profundidade. (Smole; Diniz, 2009, p. 11).

De acordo com Martinho e Ponte (2005), o professor tem um papel dominante na estruturação do discurso produzido em sala de aula que é influenciado pelos tipos de pergunta que coloca. Os autores recorrem a Love e Mason (1995) para apresentar três tipos de perguntas principais: *focalização*, *confirmação* e *inquirição*. O professor faz uma pergunta de *focalização* quando deseja chamar a atenção do aluno para um aspecto específico associado a um raciocínio, a um conceito ou a um procedimento. Quando pretende testar os conhecimentos dos estudantes sabendo a resposta que deseja ouvir, faz uma pergunta de *confirmação*, a qual induz respostas curtas e imediatas. Já as perguntas de *inquirição* são realizadas quando o professor tem a intenção de conhecer alguma ideia do estudante.

Martinho e Ponte (2005) explicam que é comum que, na sala de aula, ocorra uma forma de interação constituída por três momentos: iniciação – resposta – avaliação/seguimento – que é denominada por fala sanduiche. Esse tipo de interação permite ao professor orientar as aprendizagens e, também, controlar o discurso, enfatizando determinadas respostas e ignorando outras.

Os autores também salientam que as interações entre o professor e os estudantes podem variar muito de acordo com o tipo de aula. Em aulas em que o professor expõe o conteúdo e os alunos fazem exercícios, o discurso tende a ser mais controlado. Porém, em aulas em que os estudantes resolvem problemas, realizam tarefas investigativas ou se envolvem em projetos, torna-se possível que as interações entre os estudantes sejam mais ricas.

Outro aspecto considerado por Martinho e Ponte (2005) é a negociação de significados. Eles explicam que os estudantes vão construindo, progressivamente, significados para conceitos matemáticos por meio do estabelecimento de conexões entre a ideia nova e os conhecimentos prévios. Contudo, observam que, quando o discurso é muito controlado, a negociação de significados tende a diminuir durante as aulas. Também sublinham a importância de o ambiente em sala de aula ser de respeito mútuo e de confiança favorecendo que os alunos se sintam confortáveis para argumentar e discutir ideias uns dos outros.

Salgado e Losano (2022) apresentam uma revisão sistemática da literatura, com foco na comunicação na aula de matemática que evidenciam: a complexidade envolvida no processo de transformação da comunicação na aula de matemática; a importância das ações reflexivas do professor e as potencialidades da colaboração para sustentar e incentivar esses processos; a forte conexão entre a natureza das tarefas propostas e a comunicação que se estabelece na aula de matemática; a necessidade de que professores e alunos se empenhem no processo de aprender novas formas de comunicar ideias matemáticas dentro da sala de aula.

As autoras afirmam que várias pesquisas (Alro; Skovsmose, 2010; Menezes, 2010; Martinho; Ponte, 2005) mostram que a comunicação na aula de matemática, comumente, ocorre de forma unidirecional, dominada pelo discurso do professor que, ao fazer perguntas fechadas, confere raras oportunidades para os alunos comunicarem suas ideias e opiniões. Além disso, destacam que "o rompimento dessa dinâmica comunicativa e o estabelecimento de formas comunicativas dialógicas constitui um grande desafio para muitos professores" (Salgado e Losano, 2022, p. 2).

Esse panorama nos aponta para a importância de os futuros professores desenvolverem conhecimentos teórico-práticos que possibilitem planejar e conduzir aulas mais dialogadas, que conferem aos estudantes oportunidades de interagirem entre si e com o professor, de compartilharem suas estratégias, expressarem seus pensamentos e refletir sobre as ideias uns dos outros. Além disso, converge com a revisão de literatura apresentada na seção 2.2 – Estudo de Aula na formação inicial de professores no Brasil – mostrando que, em algumas pesquisas (Coelho, 2014; Oliveira, 2020; Souza, 2021), os futuros professores planejaram aulas com tarefas exploratórias ou problemas, mas, no momento de conduzi-las, acabaram direcionando muito os alunos e dando pouco espaço para que eles comunicassem suas ideias, desviando-se desse modo dos princípios do Estudo de Aula. Pois, conforme explicam Isoda e Ofos (2009), as aulas de matemática no Japão são preparadas para que os alunos reflitam, expressem ideias e discutam.

Com o propósito de favorecer a ampliação de conhecimentos relativos à comunicação em sala de aula e possibilitar o planejamento e condução de aulas mais dialogadas, na segunda reunião, discutimos alguns pontos do artigo "Comunicação matemática na sala de aula" (Martinho; Ponte, 2005) que havia sido lido pelos estagiários previamente.

Marília: Eu gostei do texto, achei interessante que a professora direcionava muito os alunos e não tinha consciência. No final, ela disse que percebeu isso e que não sabia como irá fazer para mudar. Também achei interessante que eles valorizam os trabalhos em grupo. Ah! Eu podia ter anotado o que achei mais interessante!

Peterson: A professora Matilde perguntava de modo que fazia que as respostas dos alunos fossem curtas, não dava muito espaço para eles, e não percebia que fazia isso.

Pesquisadora: Vamos pensar nos três tipos de perguntas que são abordadas no texto. O que vocês entenderam sobre a pergunta de focalização?

Peterson: É para ver se os alunos estão prestando atenção na matéria.

Marília: O professor faz para chamar atenção do aluno, para ele se concentrar naquilo que o professor está falando.

Pesquisadora: Isso mesmo! A pergunta de focalização tem como objetivo direcionar que o aluno foque naquilo que o professor está apresentando, discutindo. E o outro tipo é chamado de confirmação?

Peterson: É para confirmar se o aluno sabe o que o professor perguntou, se ele está entendendo a matéria.

Pesquisadora: Nesse tipo de pergunta, espera-se apenas uma resposta correta. O aluno responde e o professor confirma se está certa ou não. E o outro tipo é chamado de inquirição?

Marília: Faz o aluno ter que pensar, sair da caixinha.

Pesquisadora: Os autores consideram que essas são as verdadeiras perguntas, pois são feitas para conhecer as ideias dos alunos sobre um assunto, saber o que eles pensam. Tentem pensar nas aulas que vocês observaram do professor Tiago. Ele fez esses três tipos de pergunta?

Peterson: Ele fez mais perguntas de confirmação. Ele pergunta e espera que o aluno dê a resposta correta, são mais diretas. Tem hora que ele diz: "Foca aqui!" E chama o aluno pelo nome para ele prestar atenção, mas não é pergunta.

Marilia: Várias vezes, ele explica a matéria e faz perguntas para ver se o aluno aprendeu: "Quando a base é negativa e o expoente é par, o resultado é par ou ímpar?".

Pesquisadora: Vocês se lembram de alguma pergunta de inquirição?

Peterson: Acho que não.

Marília: Quando ele estava mostrando como resolver uma equação, perguntou: "O que devo fazer quando um número muda de membro?" Eu acho que foi de inquirição. A Jane respondeu: "Muda a operação". Então ele usou a fala dela: "A Jane disse que é para mudar de operação, se está subtraindo, qual será a operação no outro membro?" Aí já foi pergunta de confirmação de novo. Eu acho que é a mais comum.

Pesquisadora: Quando vocês estão auxiliando os alunos em sala de aula, é possível fazer perguntas de inquirição?

Marília: Eu posso perguntar como ele acha que deve resolver uma questão antes de explicar o que deve ser feito.

Pesquisadora: Na situação do triângulo que nós discutimos hoje (figura 22), poderíamos perguntar: Como você acha que pode fazer para descobrir a medida deste ângulo?

Peterson: Vou observar mais os tipos de pergunta que o professor Tiago faz e que eu também faço.

O trecho acima mostra que a pesquisadora instigou os estagiários a refletirem sobre os diferentes tipos de questões apresentadas no artigo e a pensar na possibilidade de propor questões de inquirição quando auxiliam os estudantes a realizarem as tarefas propostas nas aulas conduzidas pelo professor supervisor. Ela fez referência a uma situação específica que

Marília havia compartilhado no início dessa reunião relacionada à tarefa mostrada na figura 22.

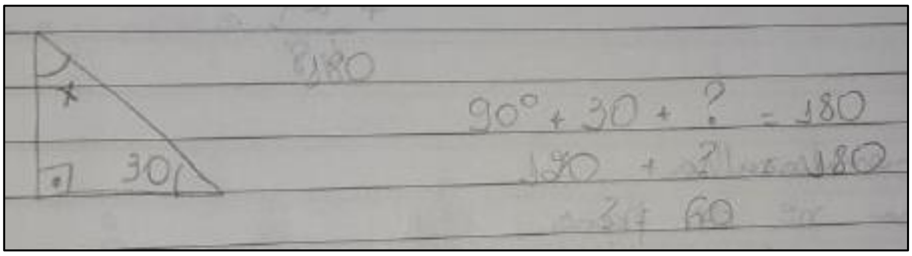


Figura 22 – Registro feito por Marília para mostrar a uma aluna como poderia descobrir o valor de um ângulo desconhecido de um triângulo
Fonte: Dados da pesquisa.

Marília: Então, eu dei uma retomada, lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180. Perguntei quanto valia o ângulo que estava identificado com um quadradinho, ela sabia que era 90 graus, que chamava ângulo reto. Então indiquei o ângulo desconhecido com uma interrogação. Depois perguntei quanto é noventa mais trinta, mas ela não conseguiu calcular mentalmente, e observei que ela tem vergonha de contar nos dedos. Então, eu comecei a fazer nos dedos com ela. “Vamos lá! 100, 110 e 120. Nós temos que somar algum valor com 120 para obter 180.” Então, ela usou os dedos e foi contando: 130, 140, 150, 160, 170, 180 e descobriu que era 60. No segundo exemplo, eu falei: “Como vocês estão aprendendo equação do 1º grau, nós vamos usar o x para indicar o ângulo desconhecido”. Assim, montamos: $90 + 45 + x = 180$. Eu achei interessante que ela já conseguiu resolver o segundo exemplo.

O relato anterior evidencia que Marília direcionou a maneira como as questões deveriam ser resolvidas, procurando favorecer o cálculo mental e o uso de dois símbolos diferentes para representar a incógnita. Porém, com a discussão do texto, ela cogitou que poderia fazer perguntas para conhecer como a estudante pensava que poderia resolver essa tarefa, antes de fornecer explicações. Então, a pesquisadora sugeriu uma questão de inquirição que poderia ter sido feita nessa situação que pode favorecer uma comunicação reflexiva.

A discussão prosseguiu...

Pesquisadora: Vocês observaram que o texto faz analogia do discurso, que é comum durante as aulas de matemática, com um sanduíche?

Marília: Eu não me lembro dessa parte.

Peterson: A fala do aluno fica no meio.

Pesquisadora: Sim, o professor pergunta, o aluno responde, e o professor valida se a resposta do aluno está correta ou não. Desse modo, a fala do aluno fica sempre entre as falas do professor.

Marília: Com as perguntas mais abertas, dá para o professor saber melhor o que os alunos pensam sobre um assunto, em vez de apenas responder uma pergunta direta, o aluno pode explicar o seu pensamento. Nas próximas aulas que formos planejar, podemos pensar mais nas perguntas.

Peterson: Depois que a gente tiver a experiência com as aulas das tabuadas, podemos planejar melhor a aula sobre o teorema de Pitágoras. Eu acho que nesta aula nós vamos poder revisar o que o professor Tiago já ensinou sobre triângulos, podemos perguntar: "O que vocês já sabem sobre os triângulos?". Depois apresentamos o Teorema, explicando que ele é importante, porque toda vez que você sabe a medida de dois lados de um triângulo retângulo, pode descobrir a medida do lado que está faltando.

Podemos constatar que a discussão do artigo sobre comunicação, na sala de aula, proposto pela pesquisadora, propiciou que os estagiários pudessem refletir sobre os principais tipos de pergunta que podem ocorrer durante as aulas; reconhecer que as perguntas de confirmação eram as mais frequentes nas aulas observadas; atentar para o potencial das questões mais abertas de possibilitar que o professor conheça as ideias dos alunos; e a cogitar em propor esse tipo de questão nas aulas que iriam lecionar. Além disso, Marília considerou que poderia fazer perguntas para conhecer as ideias dos alunos nos momentos em que os auxiliava a resolver as tarefas. Assim, o estudo foi realizado de modo a favorecer a ampliação de conhecimentos relacionados a uma comunicação reflexiva.

A seguir, descrevemos alguns episódios ocorridos nas reuniões, evidenciando que o planejamento das aulas foi propício para que os estagiários construíssem conhecimentos relativos a maneiras de favorecer a comunicação em relação aos seguintes aspectos: elaboração de perguntas; palavras utilizadas, informações fornecidas pelo professor (estagiário), interação entre os alunos; socialização das resoluções das tarefas.

Elaboração de perguntas

Na preparação das aulas, o grupo pensou nas perguntas que seriam feitas nos momentos de diálogos com toda a turma; nas questões que iriam constar nos enunciados das tarefas propostas; nos questionamentos que poderiam ajudar os estudantes na realização das tarefas.

A situação descrita abaixo ocorreu, na sexta reunião, quando o grupo estava com dúvida em como conduzir os estudantes a somar as áreas dos quadrados dos catetos para observarem que seria igual ao quadrado da hipotenusa:

Marília: Eu pensei em fixar no quadro as figuras feitas em EVA, mas não sei como podemos fazer para ajudar os alunos a ter ideia de somar os quadrados dos catetos para descobrir que é igual ao quadrado da hipotenusa.

Peterson: Precisamos pensar em um jeito de eles terem essa ideia, sem a gente falar...

Pesquisadora: Eu gostei da maneira que o livro do Imenes do 8º ano inicia esse assunto, mostrando um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados e faz uma pergunta.

Marília abriu o livro e leu a pergunta: "Qual é a maior área, a do quadrado violeta ou a dos dois quadrados verdes, juntos?" (Imenes; Lellis, 2012a, p. 233).

Peterson: Eu acho uma boa, pois a nossa dúvida era esta, de como fazer os alunos relacionarem as áreas.

Marília: Eu gostei também, porque eles vão ter que somar as áreas para descobrir qual é maior, sem a gente falar que é igual, pra gente não chegar já falando o Teorema.

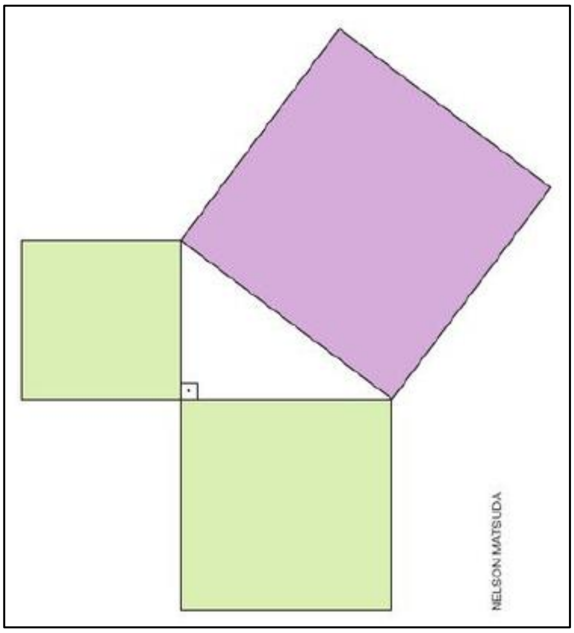


Figura 23 – Representação geométrica da relação pitagórica
Fonte: Imenes e Lellis (2012a, p. 234).

O trecho acima mostra que os estagiários tinham o propósito de que os alunos tivessem uma participação ativa na aula, não queriam conduzi-la de maneira expositiva, então consideraram que a pergunta sugerida pela pesquisadora seria adequada para levar os alunos a somarem as áreas dos catetos para descobrirem uma resposta, e não como um simples comando a ser seguido.

A discussão prosseguiu...

Pesquisadora: E se, antes de calcular as áreas, perguntarmos a opinião dos alunos: Quem acha que a área do quadrado violeta é maior, quem acha que a área dos dois quadrados verdes é maior?

Marília: Ah! A gente anota no quadro quantos alunos escolheram cada opção e, depois, diz que a gente vai verificar. Eu acho que, assim, os meninos podem se interessar mais para descobrir a resposta!

Então, o grupo decidiu fazer uma enquete com o propósito de estimular a curiosidade dos estudantes, de engajá-los na exploração do triângulo retângulo que seria fixado no quadro com seus respectivos quadrados. De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2008, p. 23), "o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vistas a atingir um objetivo".

Na sétima reunião, também notamos o cuidado com as questões que seriam feitas para não direcionar muito a aula, procurando dar espaço para os alunos explorarem algumas figuras (exemplos e um contraexemplo) e perceberem a relação entre os quadrados dos lados nos triângulos retângulos.

Peterson: Depois de calcular as áreas, podemos perguntar para os alunos o que devemos fazer para descobrir quem acertou a enquete.

Marília: Sim, então nós somamos os quadrados dos catetos e os alunos vão ver que deu a mesma área da hipotenusa. Então, nós falamos: "o que aconteceu? Nem quem pensou que era do amarelo, nem quem pensou que era do azul acertou."

Pesquisadora: O segundo momento está assim: "alunos vão explorar figuras", como que vocês pensaram em começar esse segundo momento?

Peterson: Será que a gente fala que é para eles verificarem que os dois quadrados menores sempre vão dar a mesma área do maior no triangulo retângulo ou não?

Marília: Eu acho que a gente não pode falar que vai dar só no retângulo.

Peterson: É, eles que irão descobrir. Então diremos que eles irão verificar o que acontece em triângulos com outras medidas.

Em relação aos enunciados das tarefas propostas, apresentamos alguns episódios e tecemos considerações na subseção 5.2 - Elaboração, seleção e alteração de tarefas - mostrando que o grupo se empenhou em elaborar questões que constavam na tarefa "Explorando triângulos" visando a propiciar que os estudantes percebessem a relação pitagórica e comunicassem suas ideias por escrito.

O trecho descrito, a seguir, mostra que os estagiários refletiram sobre a pertinência das questões elaboradas quando analisaram essa aula.

Marília: Eu vi que muitos alunos acharam a pergunta do item 'c' estranha: "Analisando os triângulos, o que vocês podem observar?". É uma pergunta bem geral, então, no início, os alunos ficaram meio perdidos sobre o que eles deveriam responder.

Peterson: Vários alunos me perguntaram o que eles tinham de observar. Eu expliquei que era para eles observarem os triângulos e pensarem nas informações que colocaram na tabela.

Marília: Eu acho que se os meninos tivessem mais experiência em fazer descobertas, em vez de receber o conteúdo pronto, iriam melhorar nisso.

Peterson: Eles escreveram de forma diferente, mas as respostas mostram que eles perceberam que, nos triângulos retângulos, a soma dos quadrados dos lados menores é igual a área do maior lado, mesmo que algumas respostas não estejam muito claras. Esse aluno escreveu: "a soma do quadrado pequeno com o médio é igual ao grande quando tem ângulo reto".

Marília: Eu achei bonitinha esta resposta: "O triângulo tem um lado maior, um médio e um pequeno e que, se você somar o médio e o pequeno, dá o grandão". Essa aluna não explicou que essa igualdade acontece apenas nos triângulos retângulos, que a área dos quadrados é somada para obter a área do maior, mas dá para ver que, a ideia principal, ela pegou.

A fala de Marília de que a questão ‘c’ é uma pergunta ‘bem geral’ mostra que esse questionamento pode ser considerado uma questão de inquirição, elaborada para conhecer as ideias dos estudantes e possibilitar que eles refletissem sobre a situação explorada e comunicassem suas ideias por escrito.

Também foram elaboradas algumas questões que poderiam ser feitas aos estudantes para auxiliá-los na resolução das tarefas. De acordo com Milani (2020), quando intentamos saber o que o aluno pensa, podemos desconfiar de algo, mas não temos a certeza do que ele irá responder. Contudo, procuramos prever alguns equívocos e dúvidas dos estudantes e possíveis ações dos estagiários, conforme preconiza o Estudo de Aula.

A seguir, descrevemos parte do planejamento da primeira aula que contém possíveis formas de os estagiários ajudarem os estudantes a resolver a tarefa “Explorando triângulos”.

Ir passando nos trios para ver como eles estão fazendo a tarefa, incentivar o trabalho em equipe e evitar fornecer respostas. Se necessário:

- Pedir que observem o exemplo do quadro e pedir que eles próprios expliquem como a 1ª linha da tabela foi preenchida.
- Fazer perguntas que os ajudem a avançar, como: O que você precisa descobrir? Como se calcula a área de um quadrado? Como você pode fazer para descobrir qual é a área dos dois quadrados menores, juntos?
- Se os alunos não tiverem percebido que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores apenas nos triângulos retângulos, incentivá-los a descobrir em quais triângulos essa soma é igual e diferente e, depois, perguntar: Os triângulos em que a soma é igual têm algo especial?
- Se os alunos não tiverem verificado que há um triângulo que não é retângulo, apontar para o símbolo de identificação de ângulo reto e perguntar o que significa. Lembrar que há ângulos retos nos ‘cantos’ dos retângulos e pedir que os alunos verifiquem isso, colocando um dos triângulos retângulos no ‘canto’ de uma folha ou do caderno, e perguntar: há ângulos retos em todos os triângulos que vocês receberam? Por sobreposição, eles também podem conferir que o triângulo amarelo não tem ângulo reto.

Podemos observar, no trecho acima, que algumas questões visam a ajudar os alunos a compreender o enunciado do problema (O que você precisa descobrir?); outras têm o intuito de ajudar os alunos a pensarem em estratégias para resolver o problema (Como você pode fazer para descobrir qual é a área dos dois quadrados menores, juntos?).

A parte descrita abaixo consta no planejamento da segunda aula e se refere a possíveis equívocos e às respectivas questões que poderiam ser feitas para favorecer a resolução da tarefa intitulada “Desafio”.

- Se alguma dupla apenas somar as medidas dos lados, podemos perguntar: Na aula passada, quando vocês exploraram os triângulos, vocês consideraram apenas as medidas dos lados ou as áreas dos quadrados?

- Se alguma dupla calcular as áreas de cada quadrado e apenas somá-las, obtendo como resposta 25 (9+16), podemos perguntar: O que você precisa descobrir? Se responderem que é a medida de um lado do triângulo, questionar: Você acha que esse lado pode medir 25 cm? Se ele disser que sim, perguntar: Você obteve a área do quadrado ou a medida do lado?

Assim, os estagiários tiveram a oportunidade de pensar nas questões que seriam feitas nos momentos de discussão com toda a turma; nas perguntas que constaram nos enunciados das tarefas e, também, em possíveis questões que poderiam auxiliar os estudantes na realização das tarefas.

Palavras utilizadas

Outro aspecto que se refere à comunicação em sala de aula, o qual foi evidenciado no processo de preparação das aulas, relaciona-se ao cuidado com as palavras usadas para comunicar ideias matemáticas.

Na sétima reunião, houve uma reflexão sobre como os estudantes poderiam se expressar.

Marília: Depois que preenchermos a tabela, vamos perguntar o que eles descobriram [...] Mas, se não responderem o que nós queremos que eles descubram...
Pesquisadora: O que nós queremos que eles descubram?
Marília: A soma dos quadrados dos catetos é igual à hipotenusa nos triângulos retângulos.
Peterson: Na primeira aula, nós não vamos falar nada sobre hipotenusa e cateto, então os alunos não devem responder assim.
Marília: É mesmo! Talvez eles falem assim: "Em dois, a soma deu igual, e em um triângulo, deu diferente".
Peterson: Então podemos perguntar: "Em quais triângulos, deu igual?", para ajudá-los a perceber que a relação é válida nos triângulos retângulos.
Marília: Como vamos colocar o símbolo de ângulo reto, vai ficar fácil para perceberem que, no triângulo que não é reto, deu valor diferente.
Peterson: Para concluir a aula, nós podemos escrever o enunciado do teorema no quadro.
Marília: Também acho.
Pesquisadora: Como seria o enunciado, baseado no que vai ser trabalhado na primeira aula?
Marília: A área do quadrado menor mais a área do quadrado médio é igual à área do quadrado maior.
Peterson: Nos triângulos retângulos, a área do quadrado menor mais a área do quadrado médio é igual à área do quadrado maior.
Marília: Isso mesmo! Então, na segunda aula, a gente apresenta a fórmula.
Peterson: Eu gostei do jeito que a gente tinha pensado antes. Deixe-me ver aqui: "Nos triângulos retângulos, a área do quadrado do lado maior é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados".

Marília: Ficou bom.

É interessante notar que os estagiários refletiram sobre as possíveis maneiras que os estudantes poderiam se expressar para descrever a relação pitagórica e, também, pensaram em uma maneira pela qual eles poderiam apresentar o enunciado do teorema de Pitágoras ao final da primeira aula.

Na décima primeira reunião, quando Peterson estava simulando a segunda aula, o grupo voltou a refletir sobre o momento que seria adequado para ensinar novos termos matemáticos: cateto e hipotenusa.

Peterson: Será que depois da fórmula, nós explicamos o que são os catetos, a hipotenusa?
Pesquisadora: É importante eles conhecerem esses nomes, até para aprenderem outros conteúdos, como seno, cosseno, tangente. Mas, neste momento, saber esses nomes irá ajudá-los a entender o teorema de Pitágoras?
Peterson: Não!
Pesquisadora: Como eles poderão utilizar a fórmula sem saber o que é hipotenusa, cateto?
Peterson: Eles precisam saber que o lado maior vai ser identificado com a letra ‘a’.
Pesquisadora: O lado maior de um triângulo é sempre oposto ao maior ângulo, então no caso do triângulo retângulo, o lado maior vai ser oposto ao ângulo reto.
Peterson: Precisamos frisar isso.
Marília: Isso que eu estou achando incrível, como que eles vão aprender o Teorema sem saber este vocabulário!
Pesquisadora: Muitas vezes, o ensino de um conteúdo é iniciado com a definição de conceitos, explicação de novos termos matemáticos. O professor explica o que é uma equação, o que é uma incógnita, mas sem os alunos terem tido alguma experiência que os ajude a entender esses significados. Eu penso que tem mais sentido os alunos irem ampliando o vocabulário à medida que vão construindo os conceitos. Nesse caso, depois de todo este caminho que vai ser trilhado, tem muito sentido introduzir esses termos, porque os alunos já vivenciaram situações que precisaram identificar o lado maior e os lados menores de triângulos retângulos. Mas vocês precisam pensar se vão querer ensinar esses termos nesta aula ou deixar para o professor Tiago fazer esse trabalho.
Peterson: Eu acho melhor deixar para o professor Tiago. Ele vai dar sequência com esse conteúdo e vai ficar fácil para os meninos aprenderem esses termos depois das nossas aulas.

Assim, os estagiários reconheceram a importância de utilizar a linguagem natural para expressar a relação pitagórica a fim de que os estudantes compreendessem as ideias matemáticas abordadas, pois consideraram que, após as aulas que eles iriam lecionar, os alunos estariam mais preparados para compreender o significado de hipotenusa e de cateto.

Outra situação ocorrida no mesmo encontro, quando Peterson estava simulando a aula, diz respeito a escolhas de palavras que poderiam ajudar os estudantes a compreenderem os conceitos abordados. Ele fez a tabela 11 na lousa.

Tabela 10 – Tabela feita por Peterson para registrar o resultado da enquete

Área verde	Área laranja

Pesquisadora: Eu gostei do jeito que você fez a tabela, colocando área verde e área laranja.
Peterson: Eu fiz diferente?
Pesquisadora: Nós tínhamos pensado em colocar “Quadrado verde” e “Quadrados laranjas”.
Marília: Ficou muito melhor assim, Peterson! Vou anotar aqui para não nos esquecermos de alterar o planejamento.

Assim, notamos que o grupo se importou com as palavras usadas para expressar os conceitos envolvidos e considerou o momento que seria apropriado para ampliar o vocabulário dos estudantes com a introdução de novos termos matemáticos. Essas posturas vão ao encontro das recomendações de Bello e Mazzei (2016) quando afirmam que o docente deve utilizar a linguagem natural de maneira a possibilitar que os estudantes estabeleçam relação entre essa e a linguagem matemática e vice-versa para favorecer a compreensão dos conceitos.

Informações fornecidas pelos estagiários

Na sétima reunião, Marília sugeriu informar aos estudantes como a aula seria desenvolvida.

Marília: Eu acho que seria bom explicar logo no início como vai ser a dinâmica da aula para os alunos. O professor Tiago sempre inicia a aula recordando o que os alunos fizeram na aula anterior e explicando como será a aula do dia.
Peterson: Na nossa aula, não precisamos explicar o que foi a aula anterior, porque iremos introduzir um novo conteúdo.
Pesquisadora: Eu acho que isso é muito bom, porque os alunos já sabem o que esperar da aula.

Então, o grupo elaborou informações que seriam fornecidas pelos estagiários acerca dos momentos de cada aula.

A seguir, descrevemos a fala de Marília, quando estava simulando a introdução da primeira aula, e de Peterson, quando estava treinando a segunda, que mostram que eles explicaram, de forma resumida, o que estava previsto para ocorrer.

Marília: Hoje teremos uma aula em que vocês irão descobrir coisas novas sobre triângulos e que terá três partes. No início, iremos fixar algumas figuras no quadro. Será importante prestarem bastante atenção, pois iremos fazer algumas perguntas para saber a opinião de vocês. Na segunda parte da aula, cada trio irá receber um envelope para explorar algumas figuras e fazer descobertas. Cuidem bem das figuras, porque vocês precisarão devolvê-las! Depois, vocês vão contar para a gente o que descobriram.

Peterson: Oi pessoal, nós vamos começar a aula com um desafio. Então esse desafio vai ser sobre o que vocês observaram na última aula. Depois do desafio, iremos dar continuidade ao assunto e iremos explicar o que é o teorema de Pitágoras, que é o teorema mais usado da matemática, depois vocês irão fazer uma atividade.

O trecho a seguir se refere a um momento, durante a simulação da primeira aula, no qual a pesquisadora incentivou Marília a explicar o propósito de suas ações.

Pesquisadora: Marília, eu acho que seria bom você explicar para os alunos o motivo de você desenhar essa tabela, porque se os alunos não sabem o que vai acontecer, a tendência é de ficarem dispersos. Você pode falar: "Pessoal, eu vou fazer uma tabelinha para organizar as respostas".

Marília: Concordo.

Marília continuou: Levantem a mão quem acha que a área dos dois quadrados laranjas, juntos, são maiores; agora levantem a mão quem acha que a área do quadrado verde é maior.

[...]

Marília: Agora vamos calcular as áreas para ver quem acertou. Eu vou retirar estes quadrados e colocar outros.

Pesquisadora: Para que você vai retirá-los?

Marília: Eu vou substituir estes quadrados por outros da mesma cor e do mesmo tamanho que tem quadriculado para nos ajudar a pensar no cálculo das áreas.

Podemos observar, no trecho anterior, que a pesquisadora sugeriu que Marília explicasse, para os alunos, o motivo de fazer a tabela. Diante disso, Marília, ao efetuar uma nova ação, informou que iria retirar os quadrados e substituí-los por outros com malha quadriculada. Então, a pesquisadora questionou a finalidade de ela fazer isso, e Marília explicou que os quadrados seriam trocados para facilitar a obtenção do valor das áreas. Assim, os estagiários puderam tomar consciência sobre mais um aspecto da comunicação que se refere à importância de os alunos entenderem as ações que ocorrem durante a aula. Esse tipo de comunicação unidirecional também ocorre em um ambiente que prevalecem outros tipos de comunicação, como explicam Brendefur e Frykholm (2000).

Interação entre os alunos

Para possibilitar a troca de ideia entre os estudantes, os estagiários consideraram que deveriam dar oportunidade para que eles trabalhassem em pequenos grupos. Assim, na primeira aula sobre o teorema de Pitágoras eles trabalharam em trios e, na segunda, em duplas. Os trechos, a seguir, referem-se à decisão sobre o número de estudantes de cada grupo.

Peterson: Entregamos a tabela impressa para os alunos preencherem. Cada grupo terá apenas dois exemplos?

Marília: Eu pensei em três exemplos para eles verem que o padrão está se repetindo em vários triângulos, irem generalizando ...

Peterson: Quantos alunos em cada grupo?

Marília: Pode ser quatro.

Peterson: Então seria bom ter quatro triângulos.

Marília: Podemos fazer trios para darmos três triângulos para cada grupo. Vai ser até bom porque geralmente eles pedem para fazer grupos com mais alunos e nós podemos responder que não dá pela quantidade de figuras.

Peterson: Eu considero que dupla será melhor para os meninos terem que pensar. Quando o grupo tem muitos alunos, acaba que uns fazem e outros copiam. Na dupla, mesmo que um saiba mais, ele pode ensinar para o colega, eu acho que tem mais chance de os alunos participarem melhor.
Marília: Então vamos fazer em dupla. Eu acho que individual não é bom. [...] Eu acho que só de você explicar o seu pensamento para os colegas, vem novas ideias, te ajuda a pensar. O intuito da dupla, eu acho que é para eles falarem o que pensam, exporem um pro outro e tal.

Ao analisar as aulas, o grupo constatou que vários estudantes precisaram ser incentivados pelos estagiários a trocar ideias com seus colegas de equipe. Em relação à primeira aula, o grupo observou que a quantidade de triângulos fornecida para cada trio influenciou para que os estudantes realizassem a tarefa de modo que cada um analisasse apenas um triângulo e compartilhasse as informações desse triângulo para seus colegas de equipe, pois os estudantes foram organizados em trios e receberam três triângulos.

Marília: O que eu achei de negativo foi que cada aluno explorou um triângulo e preencheu a linha correspondente a esse triângulo e, depois, passou as informações para os outros copiarem. Foram poucos os trios que fizeram em equipe. Então, tive que incentivar os alunos: “Vamos pensar todo mundo junto!”.
Pesquisadora: Será que ter três triângulos para três pessoas influenciou nisso?
Marília: Eu acho que se tivessem recebido uma folha por trio poderia ter facilitado mais o

trabalho em equipe, ter mais interação entre eles.
Peterson: Nas duas turmas aconteceu isso, mas tiveram trios que os alunos trabalharam juntos, analisando um triângulo de cada vez. Já quando foram responder às questões, mais estudantes conversaram para elaborar as respostas.
Marília: Mesmo assim, a participação foi muito boa. Todos fizeram!
Peterson: O que é bem raro nas aulas.
Marília: Eu só vi uma aluna que demonstrou pouco interesse, que parecia fazer a tarefa por obrigação.

Assim, os estagiários concluíram que o planejamento da primeira aula deveria ser alterado em dois pontos para favorecer a interação dos estudantes: entregar apenas uma folha com a tarefa impressa para cada trio e fornecer quatro triângulos para serem explorados. Também avaliaram que houve mais troca de ideias no momento de responder às questões que constavam no enunciado da tarefa proposta.

Na segunda aula, os estagiários observaram que quase todas as duplas trabalharam melhor em equipe. Como os estudantes resolveram o problema, que seria um "Desafio", com bastante facilidade e rapidez, ocorreu menos troca de ideias, mas, mesmo assim, podemos observar que eles conversaram sobre suas soluções. Houve intensa troca de ideias ao resolver o "Problema da ponte", e o grupo concluiu que isso ocorreu porque os estudantes precisaram pensar bastante para compreender o enunciado dos problemas, pensar como poderiam indicar as medidas fornecidas na figura. Além disso, foi necessário ajudar algumas duplas a identificar um dos triângulos retângulos. Depois que conseguiam visualizar o triângulo retângulo com as medidas de dois lados, quase todas as duplas conseguiram utilizar a fórmula para descobrir o valor da incógnita, mas também precisaram conversar para efetuar as substituições e os cálculos. Percebemos que os estudantes conversaram entre si sobre os passos efetuados, pois estavam poucos habituados a resolverem problemas de aplicação da matemática e, além disso, não tinham experiência com uso de variáveis.

Essa situação vai ao encontro da pesquisa de Milani (2020) na qual a autora afirma que é possível entender diálogo de diversas formas e que uma delas é a de movimento, ou seja, "estar com o outro, é escutar ativamente o outro, é mover-se em direção ao outro" (MILANI, 2020, p. 1054).

Observamos que os estudantes discutiram mais entre si quando precisaram expressar, por escrito, a relação entre os lados dos triângulos retângulos, e no momento que resolveram os problemas de aplicação do teorema de Pitágoras em situações de semirrealidade, ou seja, em situações que trouxeram mais desafios para eles. Assim, como salienta Martinho (2013), a criação de um ambiente que é capaz de transformar a comunicação na sala de aula depende dos conhecimentos e da disposição do professor, mas também de tarefas que despertem questionamentos e contribuam para que os estudantes construam significados por meio da interação com os colegas.

Socialização

Outro aspecto da comunicação que se destaca nos dados é a importância dos momentos de socialização. As aulas foram preparadas para que os alunos tivessem oportunidade de apresentar suas resoluções e expor suas ideias para a turma.

Na sexta reunião, Peterson sugeriu que alguns alunos mostrassem, no quadro, como preencheram a tabela com dados dos triângulos explorados e, depois, explicassem, para a turma, o que observaram.

Peterson: [...] Podemos dar um tempo para eles preencherem a tabela, depois copiar no quadro e pedir que os alunos preencham. Quando a tabela estiver pronta no quadro, podemos conferir com os alunos em quais triângulos a área da hipotenusa deu igual à soma das áreas dos catetos.

Marília: A aula vai terminar assim?

Peterson: Seria bom que alguns alunos explicassem para turma o que descobriram. Então, fazemos um fechamento da aula.

Marília: No início da segunda aula, a gente recorda com eles o que foi descoberto. Quem me dera que eu tivesse aprendido o teorema de Pitágoras desse jeito!

Outra situação, que ocorreu quando Peterson estava simulando a segunda aula, mostra que os estagiários refletiram sobre maneiras de incentivar os estudantes a apresentarem suas soluções e comunicarem suas ideias para a turma.

Peterson: Quando eu observar que algumas duplas já resolveram, irei fazer o desenho do desafio no quadro para adiantar. Agora, vamos imaginar que o tempo já passou e irei convidar um aluno para mostrar como resolveu no quadro.
Marília: E se nenhum aluno quiser resolver no quadro? Eu estava pensando nisso, porque eles não estão acostumados.
Peterson: Podemos já ir convidando alguns alunos quando eles tiverem resolvendo o desafio.
Marília: Boa ideia! Eu acho que assim eles podem se sentir mais à vontade. [...] Às vezes eles irão resolver calados, sem explicar. Então, podemos falar assim: Você colocou aqui 3 x 3 = 9, por que você fez este cálculo? Fazer perguntas.
Peterson: Eles podem resolver e explicar ou escrever a resolução e, depois, nós pedirmos que eles expliquem.

Nas reuniões destinadas a análise das aulas, os estagiários concluíram que os estudantes se mostraram mais dispostos a apresentar suas resoluções no quadro e a explicar suas ideias para a turma do que havíamos imaginado. O trecho, a seguir, refere-se à análise da segunda aula.

Peterson: Hoje, novamente, o Adriano queria mostrar como resolveu a atividade, mas sua colega de dupla também queria, então, ele falou que ela apresentasse. Nessas duas aulas, ele participou muito bem.

Marília: Ela explicou bonitinho demais! Os alunos até bateram palmas!

Pesquisadora: Na aula do 9º B, também gostei da participação dos alunos. Uma aluna foi ao quadro e resolveu o desafio, porém disse que não queria explicar, então sua colega explicou.

Peterson: O que aconteceu foi o seguinte: eu tinha convidado uma aluna, a Marília convidou outra, e as duas aceitaram.

Marília: Eu achei importante os alunos mostrarem no quadro como resolveram. Observei que os alunos prestaram atenção na explicação dos colegas.

Peterson: E nós tínhamos ficado com receio de que ninguém aceitasse o nosso convite!

Podemos perceber, com todos esses relatos, que, ao longo do desenvolvimento do Estudo de Aula, os estagiários foram construindo conhecimentos e desenvolvendo uma consciência crescente sobre maneiras de promover maior participação dos alunos durante as aulas, de forma que eles tivessem oportunidade de raciocinar sobre conceitos e procedimentos, de expressar suas ideias e dúvidas, tanto nos momentos de interação com toda a turma, bem como nos momentos de resolução das tarefas.

Os estagiários construíram conhecimentos sobre formas de favorecer a comunicação matemática em sala de aula que envolveram vários aspectos, entre os quais, destacamos: elaboração de perguntas; uso dos termos matemáticos; informações fornecidas pelo professor (estagiário); interação entre os estudantes; e socialização das resoluções dos estudantes. Esses aspectos não são os únicos que podem contribuir para que os estudantes tenham oportunidades de comunicar-se entre si e com a professora ou o professor, contudo, revelam que as aulas foram delineadas com o propósito de possibilitar mais vozes, diálogos em mais direções, de comunicar ideias matemáticas oralmente e por escrito, com acolhimento das ideias e dúvidas dos estudantes, e assim, promover um ambiente que se diferencia de uma aula expositiva na qual o professor fala e acredita que o aluno aprende ouvindo, como observa Milani (2020).

Outro ponto a considerar é que os conhecimentos acerca de maneiras de fomentar a comunicação oral e escrita em sala de aula não foram construídos de forma isolada, pois foram fortemente conectados a outros saberes relacionados às tarefas propostas; a utilização de recursos didáticos; e a criação de um ambiente favorável à aprendizagem da matemática que permitiram que os estudantes do 9º ano tivessem um maior envolvimento com o que foi proposto nas aulas lecionadas pelos estagiários do que era habitual nas aulas observadas durante o estágio, pois, como salienta Martinho (2013), a criação de um ambiente que é capaz de transformar a comunicação na sala de aula depende dos conhecimentos e da disposição do professor, mas também, de tarefas que despertem questionamentos e contribuam para que os estudantes construam significados por meio da interação com os colegas.

Assim, os dados mostram as contribuições do Estudo de Aula para que futuros professores construam conhecimentos que os possibilitem preparar e conduzir aulas em que os estudantes tenham uma participação ativa na aprendizagem.

5.4 Recursos didáticos

As concepções que os professores têm sobre a matemática influenciam na maneira que conduzem seu ensino. Albuquerque *et al.* (2006) destacam a importância de os futuros professores compreenderem que a matemática é um corpo de conhecimentos e, também, uma atividade humana que abrange várias etapas: criação, organização, comunicação e aplicação. Ainda afirmam que é fundamental os futuros professores terem uma ampla vivência com tarefas matemáticas que envolvam experimentação, intuição, dedução e outras abordagens, permitindo uma compreensão mais abrangente da natureza da matemática. Para tudo isso, a utilização de recursos didáticos é essencial.

Pais (1996) defende que o ensino de geometria envolva os aspectos intuitivo, experimental e teórico, destacando a importância dos objetos, dos desenhos e das imagens mentais para a construção dos conceitos geométricos. O autor explica que o objeto se refere a modelos ou materiais didáticos que representam algum conceito geométrico e, também, observa que a representação de figuras planas e espaciais, por meio de desenhos, é essencial no processo de conceitualização geométrica. De acordo com Pais (1996), tanto o objeto como o desenho são representações particulares de conceitos geométricos, de modo que trazem o desafio, aos professores, de possibilitar uma correlação entre o particular e o geral, o concreto e o abstrato.

Pais (1996, p. 70) relata que não é fácil definir imagem mental, mas considera que "uma pessoa tem uma dessas imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos". Além disso, afirma que imagens mentais relacionadas, não só aos conceitos, mas aos teoremas e situações geométricas, são essenciais na aprendizagem da geometria. Logo, segundo o autor, deve ser realizado um trabalho com objetos e desenhos que favoreça o enriquecimento das imagens mentais no aspecto quantitativo e qualitativo, possibilitando um raciocínio mais dinâmico para resolução de problemas ou novas aprendizagens.

Em um trabalho específico sobre os recursos didáticos no ensino de geometria, Pais (2000) alerta sobre duas concepções redutoras:

> uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos (PAIS, 2000, p. 14).

Os aspectos intuitivo, experimental e teórico se relacionam de perto com a utilização de materiais didáticos no ensino de geometria.

Lorenzato (2006, p. 18) explica que material didático é “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. Em relação aos materiais manipuláveis, o autor afirma que podem ser usados com diferentes objetivos: introduzir um assunto, inspirar os estudantes a se engajarem com a aprendizagem de um conteúdo, auxiliar na memorização de propriedades e contribuir com a realização de descobertas.

De acordo com Coelho e Gazire (2012), os materiais didáticos manipuláveis têm o potencial de impactar, significativamente, a aprendizagem dos alunos. Contudo, para que isso ocorra, é necessário que o professor tenha consciência de que nenhum recurso, isoladamente, garante o sucesso no processo de ensino-aprendizagem e pondere, criticamente, sobre como podem ser empregados em sala de aula para que os alunos reflitam sobre o objeto de estudo durante as atividades práticas.

Machado (2011) afirma que o ensino de geometria, muitas vezes, segue uma abordagem que polariza atividades empíricas e a sistematização de conceitos geométricos, de modo que, nos primeiros anos do ensino fundamental, é comum valorizar a observação e manipulação de objetos concretos, enquanto, nos anos finais, há uma ênfase na definição precisa de conceitos, no enunciado de propriedades e ao encadeamento de proposições. Contudo, o autor defende que, em qualquer que seja o nível considerado, é essencial estabelecer conexões sólidas entre atividades perceptivas e conceituais, de articular o conhecimento empírico e sua sistematização.

De acordo com Julio e Oliveira (2018), é comum que licenciandos, em estágio curricular supervisionado, tenham a intenção de utilizar recursos didáticos, como jogos, computadores e materiais manipulativos, por considerarem que podem facilitar a aprendizagem dos estudantes. No entanto, as autoras salientam a importância de os futuros professores construírem um entendimento de que os recursos didáticos podem ser importantes no processo educativo quando são usados como ferramentas para que os estudantes construam significados em um ambiente que permita interações e troca de ideias. Assim, destacam a necessidade de conhecerem os estudantes para, então, fazer escolhas metodológicas que atendam às intenções didáticas do professor/estagiário e favoreçam a constituição das aulas como espaços comunicativos.

Oliveira, Menezes e Canavarro (2012), ao realizar uma pesquisa pautada em uma prática de uma professora da educação básica, mostram que os materiais manipuláveis desempenham um papel significativo no contexto do ensino exploratório. Além disso, salientam a importância de serem utilizados com o propósito de apoiar o raciocínio dos alunos, promover a reflexão sobre as situações exploradas e a comunicação matemática, justificando seu uso para além de seu aspecto motivacional. Os autores também ressaltam a importância de os docentes refletirem sobre o uso dos materiais manipuláveis de modo conectado com as tarefas propostas, com maneiras de conduzir os vários momentos da aula para favorecer o engajamento dos estudantes e possibilitar que relacionem as novas ideias com o conhecimento que possuem.

Assim, concordamos com Coelho e Gazire (2012) quando colocam que professores, em formação inicial ou em serviço, precisam aprender a confeccionar e a utilizar recursos didáticos que poderão ser empregados em sua prática pedagógica,

A seguir, descrevemos alguns episódios que revelam que os estagiários refletiram sobre os materiais didáticos produzidos e sobre maneiras de utilizá-los para auxiliar a aprendizagem dos estudantes.

Na terceira reunião, Peterson sugeriu iniciar a aula fazendo um desenho, no quadro, de um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados, para os alunos observarem um exemplo em que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Então, Marília comentou sobre dois vídeos que ela havia visto e compartilhado com o Peterson.

Peterson: Eu já tinha visto este vídeo do líquido que mostra um triângulo com lados três, quatro e cinco. As figuras giram e o líquido que estava nos quadrados de lado três e quatro cai no quadrado de lado cinco. Mas fiquei pensando no que o professor Tiago disse que, se fossemos dar uma aula com vídeo, os alunos poderiam ficar muito dispersos, ter muita conversa e perderíamos muito tempo para conseguir que eles se concentrem. Eu pensei em usarmos os quadradinhos do quadro e pincéis de cores diferentes para fazer cada quadrado dos catetos de uma cor. E, no quadrado da hipotenusa, podemos usar as duas cores, indicando a quantidade de cada cateto, para os alunos verem que o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos (figura 24).

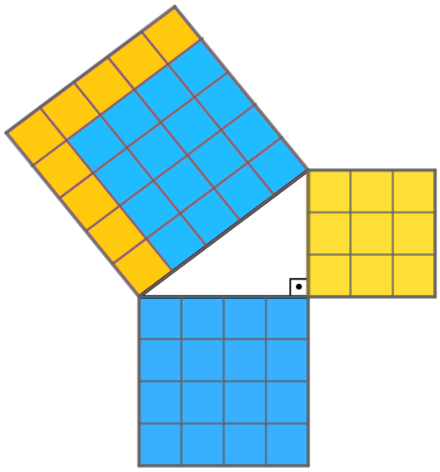


Figura 24 – Representação geométrica do teorema de Pitágoras com malha quadriculada
Fonte: Elaborado pela autora.

Então, Marília explicou a sua intenção ao compartilhar os vídeos:

Marília: Na verdade, eu não pensei em usar vídeos, eu queria é descobrir algo que ajude os alunos a verificar que o teorema de Pitágoras realmente funciona. Eu gostei da ideia do Peterson de fazer no quadro, mostrando as áreas, e pensei, também, em construir um material para que eles possam recortar os quadrados dos catetos e montá-los sobre a hipotenusa, como se fosse um quebra-cabeça, para verificar que a área é a mesma.

Assim, os estagiários compartilharam ideias sobre as aulas, e a terceira reunião foi finalizada com a intenção de iniciar a aula com um desenho de um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados (representação geométrica da relação pitagórica) e, após a apresentação, pelos estagiários, do teorema de Pitágoras, os próprios estudantes iriam manipular algum material para verificar a sua validade.

Na quarta reunião, influenciados pelos estudos realizados e pela troca de ideias sobre possibilidades de conduzir as aulas, os estagiários passaram a considerar que o material que os estudantes iriam explorar poderia ser usado com um propósito diferente, conforme mostrado no trecho a seguir.

Peterson: Seria mais interessante se os próprios alunos explorassem os triângulos com os quadrados e descobrissem a relação entre as áreas.

Marília: Isso mesmo! Eu acho que, se usássemos papel quadriculado, eles poderiam descobrir a relação entre as áreas, antes de mostrarmos a fórmula.

Peterson: Depois de mostrar a fórmula, a gente contaria um pouco sobre a história de Pitágoras, até para eles entenderem porque o teorema tem esse nome. Estou achando melhor a gente mostrar a fórmula só depois de eles já terem explorado os triângulos. Na segunda aula, eles podem resolver problemas com aplicações no cotidiano. Desse jeito, eu acho que eles iriam entender sem uma demonstração formal.

Portanto, na quarta reunião, os estagiários passaram a considerar que os estudantes poderiam descobrir a relação pitagórica por meio da exploração de algum material com a forma de triângulos retângulos com os respectivos quadrados sobre os lados. Anteriormente, eles haviam pensado em apresentar a fórmula e, em seguida, propor que os estudantes explorassem essas figuras para verificar a relação entre os quadrados das medidas dos lados. Essa mudança foi influenciada pelos estudos realizados sobre diferentes tipos de tarefas (Ponte, 2003). Observamos, então, como a ampliação do conhecimento teórico e prático sobre tipos de tarefas pode beneficiar a busca por maneiras de conduzir as aulas que favoreçam uma participação ativa dos estudantes na aprendizagem.

Na quinta reunião, utilizamos papel quadriculado para pensar como esse material poderia ser utilizado a fim de que os alunos percebessem a relação entre os quadrados dos lados de triângulos retângulos.

Pesquisadora: Como vocês já haviam comentado sobre a possibilidade de usar papel quadriculado, eu trouxe alguns para pensarmos em como podemos utilizá-los, porém, eu tinha milimetrado.

Marília: Não tem problema. Para os alunos, podemos usar quadriculado para ficar mais fácil.

Então, Peterson e Marília começaram a desenhar triângulos retângulos no papel milimetrado. Peterson desenhou um triângulo com os lados medindo 5 cm, 12 cm e 13 cm, e Marília, com 3 cm, 4 cm e 5 cm. Eles começaram pelos quadrados sobre os lados dos catetos. Porém, logo perceberam que não poderiam se basear na malha quadriculada para desenhar o quadrado sobre a hipotenusa (figura 25)

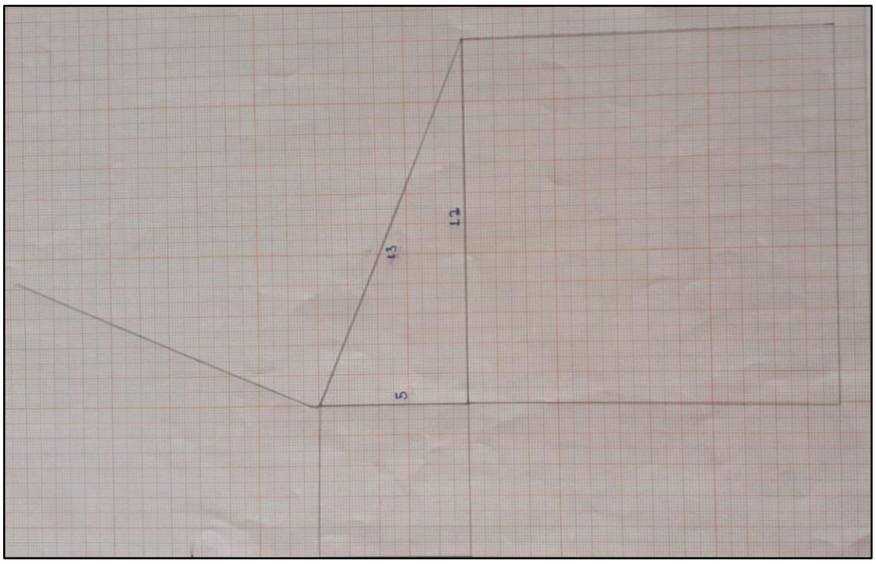


Figura 25 – Desenho de Peterson, mostrando que o quadrado sobre a hipotenusa não coincidiu com a malha quadriculada
Fonte: Dados da pesquisa.

Peterson: Como vamos desenhar o quadrado que fica sobre a hipotenusa?

Marília: O quadrado da hipotenusa não coincide com o do papel. Eu não havia pensado nisso!

Pesquisadora: Vamos observar como os quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo são mostrados nos livros didáticos.

Essa situação salienta a importância de os professores experimentarem previamente os materiais que pretendem usar em suas aulas, refletindo como podem ser empregados para favorecer a aprendizagem da matemática.

Marília e Peterson ficaram olhando para imagens do livro (figura 26), sem dizer nada.

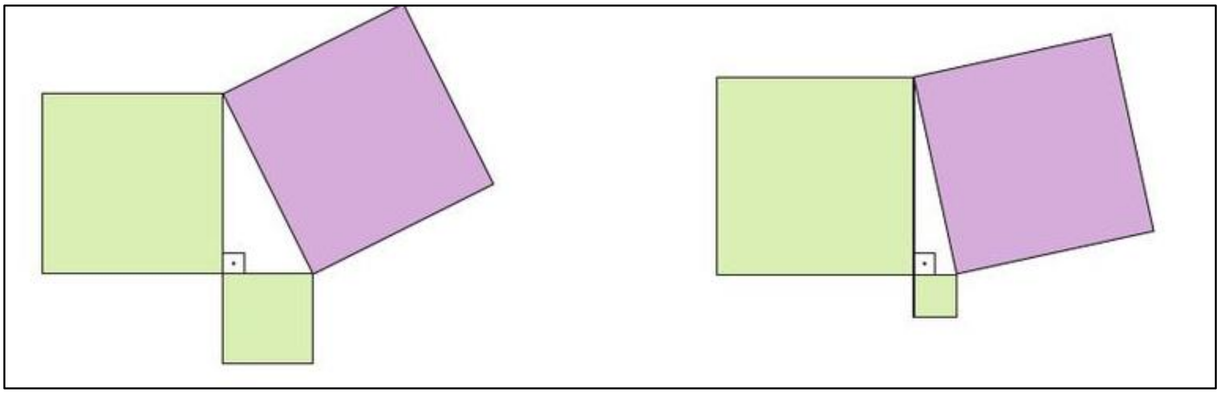


Figura 26 – Triângulos retângulos com os quadrados sobre os seus lados
Fonte: Imenes e Lellis (2012a, p. 234).

A pesquisadora interrompeu o silêncio com uma questão:

Pesquisadora: Como podemos usar o papel quadriculado para que os quadrados coincidam com a posição dos lados?

Marília: No papel quadriculado, não tem como.

Peterson: Hum... Como você acha que podemos fazer?

Pesquisadora: E se os quadrados estivessem recortados?

Marília: Será que eu preciso recortar cada quadradinho?

Peterson: Eu não sou muito bom com tesoura...

Pesquisadora: Pensem no tamanho do quadrado que ficará sobre a hipotenusa.

Marília: Ah! Entendi! Vou precisar recortar um quadrado 5 por 5 (ela havia desenhado um triângulo com lados medindo 3cm, 4cm e 5cm).

Diante disso, Marília recortou os quadrados e fez a composição das figuras (figura 27), depois disse: Agora ficou bom. Os alunos poderão ver que a área de um quadrado é 9, do outro é 16 e da hipotenusa dá 36.

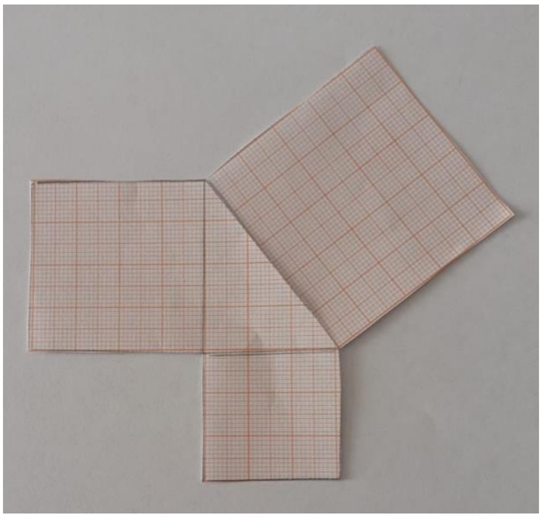


Figura 27 – Composição de figuras feitas por Marília no papel quadriculado para representar um triângulo retângulo e os quadrados sobre os seus lados
Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, Marília tentou sobrepor os quadrados dos catetos ao quadrado da hipotenusa para mostrar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Enquanto isso, Peterson começou a recortar um dos quadrados que correspondia ao cateto menor, para sobrepor os quadrados dos catetos ao da hipotenusa e verificar que a área dos dois juntos corresponde à área do quadrado da hipotenusa, e fez o comentário descrito abaixo.

Peterson: Para os alunos verem que é igual, precisaria recortar, pelo menos, o quadrado de um dos catetos, mas daria muita confusão na sala. Eu fico pensando... o professor Tiago disse para darmos uma aula objetiva, eu não sei se ele vai concordar.

Marília: Vamos usar materiais para ajudar os alunos a entender o teorema de Pitágoras. Eu aprendi apenas decorando a fórmula, mas quero que os alunos realmente entendam.

Peterson: Eu também não quero apenas apresentar o Teorema e colocar os alunos para fazer exercícios, mas acho que a gente vai precisar fazer de um modo que o professor Tiago também concorde.

Marília: Eu acho que, com os quadrados, usando papel quadriculado, eles poderão aprender melhor. O visual ajuda muito!

Pesquisadora: É importante que o professor supervisor considere a proposta adequada, pois a aula será executada nas turmas dele.

Marília: Eu percebi que ele gostou da 1ª aula de tabuadas, pareceu feliz em ver os alunos jogando.

Pesquisadora: Podemos entregar, para os alunos, os triângulos e os quadrados já recortados. O que vocês acham?

Peterson: Assim daria menos confusão.

Marília: Eu concordo, mas nós vamos ter que colocar a família para nos ajudar a recortar tantas figuras!

Peterson: Realmente!

Percebemos que os estagiários refletiram sobre como utilizar os materiais (recortes de papel quadriculado representando triângulos e quadrados) para favorecer a aprendizagem dos estudantes e, ao mesmo tempo, mostraram preocupação em utilizá-los de forma que a aula fluísse minimizando possíveis tumultos que poderiam ser gerados com os alunos recortando as figuras. Assim, as decisões sobre como utilizar os materiais também se relacionaram a ponderações sobre o ambiente de sala de aula.

A discussão prosseguiu.

Marília: Nós vamos pedir que os alunos somem as áreas?

Pesquisadora: Como os livros usam a representação geométrica?

Marília: Eles apresentam o teorema e mostram o desenho para os alunos entenderem melhor.

Peterson: Eu acho mais interessante que eles descubram a relação, em vez de nós contarmos, como vimos nas atividades exploratórias.

Os estagiários consideraram adequado preparar a aula com uma abordagem diferente dos livros consultados. Peterson enfatizou que o material deveria ser usado como meio de os estudantes descobrirem a relação entre os lados dos triângulos, associando essa opção, de modo explícito, a atividades exploratórias. Assim, percebemos uma forte conexão entre os conhecimentos relacionados a tarefas exploratórias e a maneira de utilizar os recursos didáticos.

Na sexta reunião, discutimos a proposta de Marília de produzir as figuras (um triângulo retângulo com os respectivos quadrados sobre os lados) em papel-cartão em EVA para fixar no quadro (figura 28), em vez de desenhá-las, para explorar com os estudantes no momento inicial da aula.

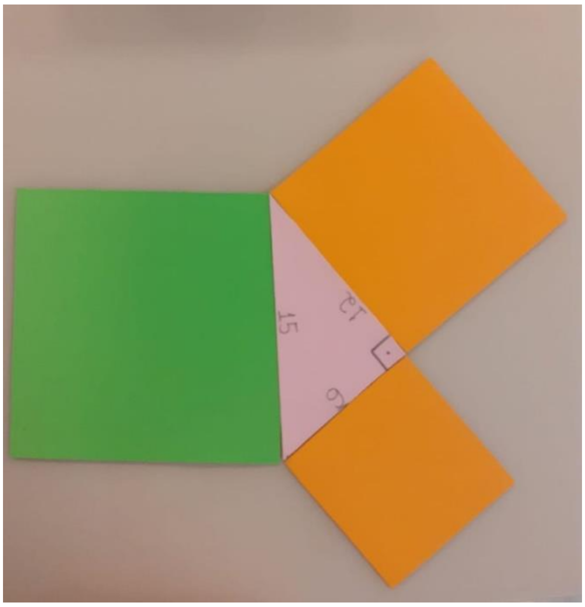


Figura 28 – Figuras em EVA que foram produzidas por Marília para serem fixadas no quadro na 1ª aula sobre o teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisadora: Marília, você escreveu uma mensagem, no nosso grupo do *WhatsApp*, sugerindo fazer um triângulo em EVA com os quadrados sobre os lados (figura 28).

Marília: Eu pensei em fixar as figuras no quadro.

A discussão prosseguiu envolvendo maneiras de explorar o triângulo retângulo que seria fixado no quadro com toda a turma. Então, Peterson mencionou que os alunos poderiam não saber calcular áreas de quadrados:

Peterson: Eu estou com receio de os alunos não saberem como calcular área do quadrado. O professor Tiago disse que iria ensinar cálculo de áreas, mas e se não der tempo?

Pesquisadora: E se colocássemos um quadriculado em cada quadrado para ajudar os alunos a perceberem que, se multiplicarem lado x lado, obtém-se o total de quadradinhos?

Peterson: Eu acho que o quadriculado vai ajudar. Podemos mostrar, primeiro, sem quadriculado, porque senão eles podem já ir calculando quando fizermos a enquete. Depois, colocamos o quadriculado. Também seria bom escrever a multiplicação e o valor da área ao lado de cada quadrado para os alunos verem que vai dar igual.

Em sua fala, Peterson alerta para que os quadrados com a malha quadriculada não fossem mostrados antes de os alunos responderem a enquete que seria feita para dar oportunidades aos estudantes de comparar, intuitivamente, a área da hipotenusa com a dos dois catetos. Então, o grupo decidiu que, primeiramente, seriam fixados os quadrados sobre os lados do triângulo e, depois, seriam substituídos por outros com a malha quadriculada para favorecer o cálculo das áreas dos quadrados.

O trecho descrito, a seguir, mostra que as discussões envolveram o número e qualidade dos triângulos que seriam fornecidos aos estudantes para explorarem, em pequenos grupos, a fim de possibilitar que percebessem a relação entre os lados dos triângulos retângulos.

Pesquisadora: Com esse exemplo (triângulo que seria fixado no quadro e explorado com toda a turma), eles vão descobrir a relação pitagórica?

Peterson: Não, os alunos irão perceber explorando as figuras. Vamos dar, pelo menos, dois triângulos para eles terem mais exemplos.

[...]

Marília: Eu pensei em dar vários triângulos para cada grupo.

Pesquisadora: Vamos pensar em quais medidas de lados iremos utilizar tanto no triângulo em EVA, que será fixado no quadro, como nos de papel-cartão que os alunos irão explorar?

Peterson: Precisamos pensar nas medidas para que os lados sejam números naturais, porque senão irá complicar!

Peterson consultou, no celular, algumas medidas de lados de triângulos retângulos que são números naturais, e disse: Não temos muitas opções, porque a maioria das medidas é grande.

Marília olhou as opções e disse: Será que 9, 12 e 15, para trabalhar no quadro, fica bom?

Peterson: Sim.

Marília: Nove centímetros não é um tamanho pequeno para os alunos verem?

Pesquisadora: Podemos fazer as figuras ampliadas.

Marília: Entendi. E se ampliarmos 3, 4 e 5?

Peterson: É melhor deixar esse triângulo para os alunos, pois é o mais fácil.

Marília: 6, 8 e 10, também para os alunos?

Pesquisadora: Seria bom mais um exemplo para os alunos explorarem, pois podem pensar que sempre é necessário obter medidas proporcionais a 3, 4 e 5.

Marília: Eu não tinha observado isso. Então, vamos usar 5, 12 e 13.

Peterson: Cada grupo terá apenas dois exemplos?

Marília: Eu pensei em três exemplos para eles verem que o padrão está se repetindo em vários triângulos; irem generalizando ...

Diante da situação de aprendizagem da turma, os estagiários consideraram que seria mais adequado fornecer exemplos de triângulo cujas medidas dos lados seriam números naturais, para evitar que os alunos tivessem dificuldades extras em relação à realização dos cálculos. O grupo também considerou adequada a sugestão da pesquisadora de ampliar as figuras que seriam expostas no quadro. Desse modo, ocorreram várias reflexões sobre os materiais que seriam produzidos, tanto em relação às figuras que seriam fixadas no quadro e exploradas com toda a turma quanto às que seriam exploradas pelos estudantes, em pequenos grupos.

A discussão prosseguiu.

Peterson: Quantos alunos em cada grupo?

Marília: Pode ser quatro.

Peterson: Então, seria bom ter 4 triângulos.

Marília: Podemos fazer trios, distribuindo 3 triângulos para cada grupo.

Peterson: Boa ideia! Um deles seria um triângulo que não é retângulo para eles verem que o Teorema funciona apenas em triângulos retângulos.

Marília: Eu acho interessante, porque, depois, podemos perguntar: por que será que, neste triângulo, a soma dos quadrados dos catetos não deu igual ao quadrado da hipotenusa? Será que pode confundir a cabeça deles?

Peterson: Eu acho que não.

Pesquisadora: Eu gostei dessa ideia! No ensino de matemática, geralmente os professores pensam sempre em mostrar exemplos, e pouco em contraexemplos. Os contraexemplos são muito importantes também!

O diálogo mostra que o grupo considerou adequada a sugestão de Peterson de um dos triângulos a serem explorados pelos estudantes não ter um ângulo reto, para eles perceberem que a relação pitagórica é válida apenas para os triângulos retângulos. A pesquisadora destacou a importância dos contraexemplos no ensino de matemática.

De acordo com Litster, Macdonald e Shumway (2020), exemplos e contraexemplos podem ser usados para desenvolver a compreensão de conceitos e procedimentos. Inclusive, as autoras sugerem que, nas disciplinas da formação inicial voltadas a conteúdos matemáticos, sejam propostas tarefas que confiram, aos futuros professores, oportunidade de analisar exemplos e contraexemplos.

O grupo continuou a pensar nos detalhes do material que seria produzido para os alunos explorarem.

Marília: Colocamos as medidas dos lados apenas nos triângulos? Colocamos nos quadrados também?

Peterson: Não precisa colocar nos quadrados. Eles podem ver pela quantidade de quadradinhos.

Pesquisadora: Eu acho melhor não indicar as medidas nos quadrados, para eles terem que verificar quantos quadradinhos tem em cada lado do quadrado e perceberem que este número é igual à medida do lado do triângulo que ele deve posicionar o quadrado (figura 29).

Marília: Concordo.

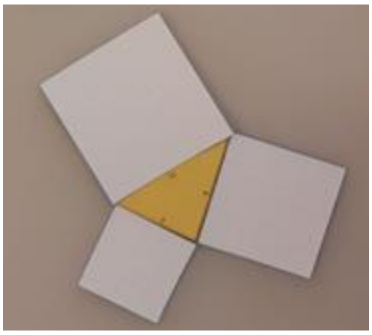


Figura 29 – Triângulo com medidas dos lados indicadas e os quadrados com malha quadriculada
Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, podemos constatar que a preparação das aulas contemplou várias reflexões sobre os materiais, com o propósito de possibilitar que os estudantes aprendessem a relação pitagórica de forma exploratória, aliando atividades intuitivas (enquete), experimentais (exploração de figuras que representam triângulos com quadrados sobre os lados) e conceituais (generalização da relação pitagórica). Os diálogos também revelam que as discussões sobre os materiais se relacionaram fortemente com outras dimensões da aula, como os conhecimentos prévios dos estudantes; a natureza das tarefas propostas; maneiras de favorecer a comunicação matemática; a importância dos exemplos e contraexemplos para formação de conceitos; as ações previstas dos estagiários e dos estudantes em cada momento da aula; o ambiente de sala de aula. Além disso, vimos que o uso de recursos didáticos exige preparação, incluindo uma experimentação prévia do professor, pois há detalhes que podem modificar situações desejadas, como ocorreu com o papel milimetrado.

Ao analisar a execução da primeira aula, foi nítida a observação de que a maioria dos estudantes percebeu que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao valor da hipotenusa nos triângulos retângulos e conseguiu expressar essa ideia por escrito, mesmo que nem todas as respostas estivessem completas ou explicitassem essa relação de modo geral.

Na análise da segunda aula, observamos que ao resolver o "Desafio", os estudantes facilmente pensaram em somar as áreas dos quadrados dos catetos para obter a área do quadrado da hipotenusa, mesmo que vários trios tenham necessitado de ajuda para obter a medida do lado da hipotenusa. Também consideramos que, ao resolver o problema da torre, muitos precisaram de ajuda para compreender o enunciado do problema, identificar um dos triângulos retângulos e indicar as medidas fornecidas na figura, porém quando visualizavam o triângulo retângulo com as medidas dos dois lados, conseguiam substituir os valores na fórmula de modo adequado. Vimos que não cometeram o equívoco, esperado pelo grupo, que seria substituir os valores desconsiderando que a incógnita era a medida de um dos catetos. Assim, reconhecemos que os materiais foram utilizados de modos a conectar atividades intuitivas, perceptivas e conceituais que possibilitaram a criação de imagens mentais que contribuíram para a formação conceitual, como defende Pais (1996, 2000).

Portanto, os dados revelam que o Estudo de Aula contribuiu para que os estagiários construíssem conhecimentos que envolveram a produção e a utilização de materiais didáticos que favoreceram o processo de ensino e aprendizagem do teorema de Pitágoras e que, de maneira mais ampla, possibilitaram novas aprendizagens que serão importantes para atuarem como professores de matemática da educação básica.

5.5 Dinâmica de sala de aula

O ambiente de sala de aula tem forte impacto na aprendizagem da matemática e é influenciado por fatores diversos, como a natureza das tarefas propostas e a maneira que o professor conduz sua realização; os recursos didáticos utilizados; a maneira como a comunicação é estabelecida, as posturas do professor, o modo como o docente se relaciona com os estudantes, as ações dos estudantes durante as aulas.

A seguir, descrevemos alguns episódios que revelam que as reuniões contemplaram várias reflexões sobre fatores relacionados à dinâmica de sala de aula.

Relação entre professor e alunos

A qualidade da relação estabelecida entre o docente e os estudantes tem grande influência no processo de ensino e aprendizagem.

Tassoni (2000) explica que toda aprendizagem é intrinsecamente influenciada pela dimensão afetiva, pois se desenvolve por meio de interações sociais. A autora afirma que no contexto da aprendizagem escolar, a complexa rede que se forma entre alunos, professores, conteúdo escolar, materiais didáticos, escrita e outros elementos não se restringe apenas ao âmbito cognitivo, pois há uma base afetiva que permeia essas relações. Assim, embora os fenômenos afetivos sejam de natureza subjetiva, são influenciados pelo contexto sociocultural, uma vez que estão intrinsecamente ligados à qualidade das interações entre os indivíduos. Assim, Tassoni (2000, p. 13) salienta que “o comportamento do professor, em sala de aula, expressa suas intenções, crenças, seus valores, sentimentos, desejos que afetam cada aluno individualmente”.

Fernandes (2008) cita algumas posturas dos docentes que podem contribuir para uma melhor relação com os estudantes, como: demonstração de respeito, ter coerência entre o que se diz e o que se faz, conhecer individualmente os alunos e ter atenção ao modo que interagem com eles.

Em relação às interações, Fernandes (2008) destaca três aspectos relacionados às ações do professor em sala de aula que podem favorecer a dinâmica de sala de aula. O primeiro se refere ao ‘*scanning* visual’, no qual o professor realiza uma espécie de ‘varredura’, dirigindo o olhar para todos os estudantes de forma frequente possibilitando uma comunicação mais eficaz face a face que reforça as relações sociais e afetivas e permite perceber as intenções, emoções e expectativas dos alunos.

Um segundo ponto refere-se às movimentações pelo espaço da sala de aula de modo que o professor evite restringir sua atuação apenas à área ao redor de sua mesa. Os alunos precisam sentir que o professor tem domínio de toda a sala de aula, não existindo zonas restritas a uns ou a outros. Isso desempenha um papel crucial na promoção de maiores níveis de engajamento e motivação dos alunos, especialmente no que se refere a atividades percebidas como mais longas ou complexas por parte dos alunos. Na pesquisa de Tassoni (2000), as crianças valorizaram a proximidade das professoras que propiciou reduzir a ansiedade, transmitir confiança e incentivar os alunos a se engajarem na realização das tarefas. O diálogo e a proximidade com os alunos também foram considerados elementos importantes na investigação de Veras e Ferreira (2010), realizada com alunos da graduação.

O terceiro aspecto se refere ao cuidado do professor em advertir um aluno ou um pequeno grupo de alunos sem causar grande interferência no fluxo da aula. Por exemplo, enquanto circula pela sala de aula, pode perceber que um aluno está prestes a perturbar um(a) colega e, nesse momento, dar um leve toque no ombro do aluno, fazendo uma advertência de forma discreta. Além disso, há situações em que o professor, apenas com um olhar, consegue reduzir ou até mesmo evitar que um incidente isolado se espalhe pelo resto da turma, procurando evitar chamadas de atenção em voz alta ou advertências públicas que interrompem o fluxo da aula e crie constrangimentos.

Veras e Ferreira (2010) afirmam que, quando o professor estimula a participação dos alunos por meio do diálogo, ele(a) cria um ambiente onde eles se sintam confortáveis na sala de aula, beneficia a relação professor-aluno e, como resultado, impulsiona a construção do conhecimento. Por outro lado, também afirmam que o bom engajamento dos alunos durante as aulas contribui para a boa relação com o professor. Já Tassoni (2000) relata que além das posturas do professor em sala de aula, o conteúdo de suas falas que tem intenção de incentivar e apoiar o trabalho dos estudantes foi considerado positivo pelos alunos.

Tassoni (2000) ainda observa que uma boa relação com os estudantes diz respeito a outros aspectos do ensino, como adaptar uma tarefa de acordo com as habilidades deles, oferecer suporte para que executem a tarefa com confiança em suas próprias capacidades, manifestar sensibilidade às suas dificuldades e desafios.

Em nosso trabalho, logo na primeira reunião, a pesquisadora instigou os estagiários a refletirem sobre a maneira que o professor supervisor se relacionava com os estudantes.

Pesquisadora: Tem aspectos interessantes para pensarmos. Por exemplo: eu observei que o professor Tiago vai caminhando pelo corredor e os alunos vão até ele, puxando assunto, brincando.

Peterson: Ele é querido pelos alunos!

Marília: Observar como ele se relaciona com os alunos é interessante mesmo, pois os meninos o respeitam, mas também são próximos dele, brincam.

Peterson: Eu achei isso muito legal!

Na segunda reunião, Marilia comentou sobre a relação que estava construindo com alguns estudantes mostrava que estavam se sentindo mais confortáveis com a sua ajuda.

Marília: Eu vi que é importante saber o nome dos alunos, desenvolver uma relação de confiança com eles. O Peterson já havia comentado comigo que parece que dá um bloqueio nos alunos porque eles já pensam que não sabem, têm vergonha, mas aos poucos eles vão se sentindo mais confortáveis com a minha ajuda.

Pesquisadora: É importante construir uma boa relação com os alunos, que favoreça o aprendizado.

Na quarta reunião, quando os estagiários estavam compartilhando suas observações sobre a aula que haviam lecionado relativa às tabuadas de multiplicação de 4 e de 8, Peterson declarou que achou difícil reter a atenção de um maior número de alunos às suas falas.

Peterson: Eu achei difícil fazer todos prestarem atenção, isso foi o mais desafiador. Percebi que preciso melhorar é na relação com os alunos.

Pesquisadora: Você está falando no sentido de você falar e os alunos prestarem atenção, seguirem suas orientações?

Peterson: Isso mesmo.

Pesquisadora: Como é possível melhorar nisso?

Peterson: Hum... Nossa! Eu acho que é com o tempo.

Marília: Eu acho que se o aluno estiver conversando, bagunçando, distraído, talvez a gente possa perguntar para ele o que ele pensa sobre o assunto, trazer ele para a aula. Na nossa aula aconteceu isso, tinha um aluno bagunçando. Eu fui lá e conversei com ele no cantinho, dei tipo uma bronca nele, expliquei que preparamos uma aula com carinho para eles, que ele estava atrapalhando.

Pesquisadora: Quando um aluno está atrapalhando a aula ou está muito disperso, o que o professor Tiago faz?

Marília: Ele chama o aluno pelo nome, quase sempre diz o nome do aluno e fala: "foca para mim!"

Peterson: Ele sabe o nome de todos os alunos, isso ajuda.

Marília: Ele vai citando o nome dos alunos que precisam se aquietar, faz quase sempre isso no início da aula.

Pesquisadora: Vocês já observaram quando ele está explicando algo, como ele dirige o olhar para a turma?

Peterson: Não.

Pesquisadora: Se ele faz uma pergunta e um aluno responde, a próxima pergunta que ele faz, ele olha novamente para esse aluno?

Marília: Não, ele olha para a turma toda, para um lado, para o outro.

Pesquisadora: Se, por exemplo, nós estamos conversando e eu só olho para o Peterson, como você vai se sentir, Marília?

Marília: Vou pensar que eu não estou participando da conversa. Ah! Entendi o que você está falando! Na aula eu acho que eu fiquei olhando apenas para os que estavam na minha frente.

Peterson: Em uma turma do oitavo ano, tinha um aluno que respondeu quase todas as perguntas e eu fiquei olhando para ele.

Pesquisadora: É bom pensarmos que o professor precisa buscar a atenção de todos os alunos, porém é quase impossível que em uma aula todos prestem atenção ao que o professor está dizendo o tempo todo.

Marília: A gente pode pedir que outros alunos respondam.

Pesquisadora: Se apenas um aluno está respondendo, o professor pode olhar para a turma de um lado a outro, pode convidar um aluno específico para responder.

Observamos que nessa ocasião, a pesquisadora incentivou os estagiários a refletirem sobre as ações do professor que poderiam contribuir para que os alunos fiquem mais concentrados nos momentos que ele fornece alguma informação, dá explicações ou conduz alguma discussão.

Essas ponderações convergem para as recomendações de Fernandes (2008) quando salienta a importância de o professor olhar regularmente para todos os alunos a fim de promover uma comunicação que auxilia mantê-los atentos ao seu discurso. Em relação ao professor se dirigir de modo específico para alguns alunos, chamando-os pelo nome, a pesquisa de Veras e Ferreira (2010) também mostra que essa atitude contribui para uma boa relação entre professor(a) e alunos.

Na décima segunda reunião, quando o estágio já estava finalizando, Peterson voltou a comentar sobre a relação do professor supervisor com os estudantes.

Peterson: Eu acho interessante que o professor Tiago é firme e, ao mesmo tempo, é próximo dos alunos. Enquanto ele copia no quadro, conversa sobre vários assuntos da vida com os alunos, em geral é mais sobre futebol, mas também sobre outros assuntos sobre o bairro, filmes, carros.

É interessante notar que Peterson observou que o professor supervisor tinha autoridade e proximidade com os alunos e, principalmente, no início das aulas conversava com eles sobre assuntos diferentes do conteúdo em estudo, referia-se a temas que os alunos tinham interesse. De acordo com Fernandes (2008), a fim de fomentar um ambiente de sala de aula favorável, é fundamental que os docentes conheçam a realidade dos alunos em diferentes dimensões, sejam elas pessoais, sociais, sejam econômicas.

Organização dos estudantes e posição das carteiras

Teixeira e Reis (2012) afirmam que há uma relação entre o ambiente de aprendizagem que se pretende estabelecer e a maneira como as carteiras estão dispostas em sala de aula. Em uma aula que privilegia o ensino expositivo, geralmente os professores preferem que as carteiras sejam organizadas em filas e colunas para que os alunos se concentrem na exposição do professor e trabalhem individualmente. Quando o docente desejar promover debates, as carteiras podem ser organizadas em círculos. O formato em 'U' possibilita contemplar momentos de exposição e de debates. Quando o professor pretende que os alunos compartilhem ideias ao realizar tarefas, as carteiras são organizadas de acordo com o número de integrantes de cada grupo, posicionando de forma a possibilitar o acompanhamento do que é registrado no quadro, ou não, dependendo se irá ocorrer momentos de discussão.

Os estagiários fizeram algumas observações em relação à organização das carteiras em sala de aula, as quais são descritas a seguir.

Na primeira reunião, Peterson fez uma observação sobre o tempo gasto para o professor organizar os alunos no início das aulas.

Peterson: Eu achei que o professor Tiago gasta tempo demais pedindo que os alunos mudem de lugar e alinhem as carteiras. Eu acho que como ele já conhece os alunos, ele vai separando aqueles que não devem ficar perto. Isso eu concordo, mas não focaria tanto na posição das mesas.

Marília: Eu acho que para uma aula expositiva é preciso que os alunos estejam organizados. Nos nonos anos, os alunos se organizaram rapidinho, mas nos oitavos, eu acho que seria impossível dar aula com as turmas da maneira que estavam e eles demoraram bastante tempo para se organizar. Mesmo demandando tempo, é necessário.

Podemos perceber, pelo trecho descrito acima, que Peterson não considerou pertinente gastar tempo com o alinhamento das carteiras, já Marília julgou importante.

Na segunda reunião, o grupo refletiu a respeito do momento que as carteiras seriam organizadas na aula sobre tabuadas na qual seria proposto um jogo em duplas.

Marília: Como você, geralmente, organiza os alunos em dupla, um de frente para o outro?

Pesquisadora: Eu costumo pedir que uma mesa seja posicionada ao lado da outra, de forma que todos os alunos fiquem de frente para o quadro (figura 30).

Peterson: Você acha que a gente inicia a aula com os alunos em posição individual e no momento do jogo pedimos que eles formem as duplas?

Pesquisadora: Eu acho que é melhor que eles fiquem em dupla, desde o início.

Marília: Então, podemos ir alinhando as carteiras no início da aula para não gastar muito tempo na organização.

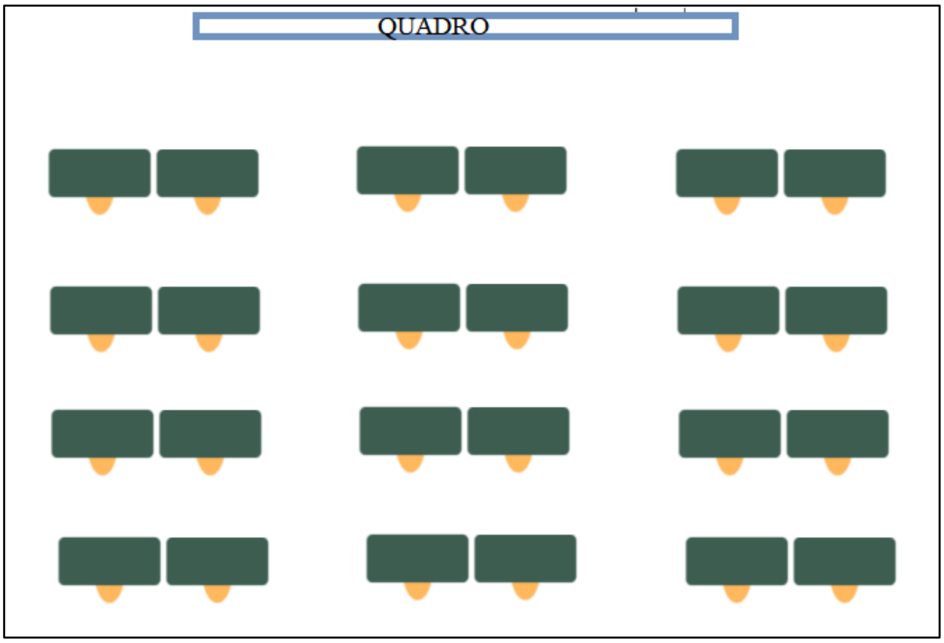


Figura 30 – Disposição das carteiras em duplas.
Fonte: elaborado pela autora.

Na segunda aula que os estagiários lecionaram tabuadas de multiplicação, os alunos trabalharam em trios e, mais uma vez a pesquisadora foi questionada em relação ao posicionamento das carteiras. Então a sala de aula foi organizada, conforme mostrado na figura 31, com o propósito de que nenhum estudante ficasse posicionado de costas para o quadro.

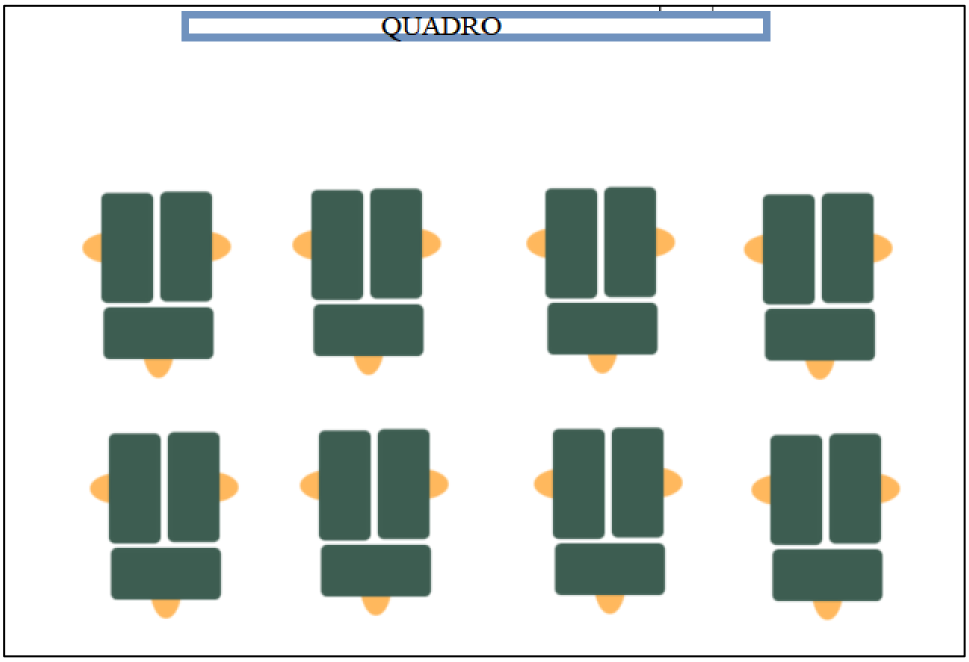


Figura 31 – Disposição das carteiras em grupos de 3 alunos.
Fonte: Elaborado pela autora.

Na sexta reunião, os estagiários ponderaram sobre a quantidade de alunos que iriam compor os grupos na primeira aula sobre o teorema de Pitágoras.

Peterson: Entregamos a tabela impressa para os alunos preencherem. Cada grupo terá apenas dois exemplos?

Marília: Eu pensei em três exemplos para eles verem que o padrão está se repetindo em vários triângulos, irem generalizando ...

Peterson: Quantos alunos em cada grupo?

Marília: Pode ser quatro.

Peterson: Então seria bom ter quatro triângulos.

Marília: Podemos fazer trios para darmos três triângulos para cada grupo. Vai ser até bom porque geralmente eles pedem para fazer grupos com mais alunos e nós podemos responder que não dá pela quantidade de figuras.

Nessa situação percebemos que Marília sugeriu que os alunos fossem organizados em trios para que se correspondesse o número de triângulos explorados ao número de alunos, porém, ao analisar a aula, o grupo percebeu que essa decisão não foi adequada, pois influenciou os alunos a pensarem que cada estudante deveria explorar um triângulo, havendo pouca troca de ideias nesse momento.

Quando estavam preparando a segunda aula sobre o teorema de Pitágoras, os estagiários fizeram algumas ponderações relativas à quantidade de alunos de cada grupo.

Pesquisadora: Vocês já pensaram na quantidade de alunos que terá cada grupo? **Peterson:** Eu acho que poderia ser dupla.

Marília: O problema que eu vejo em dupla é que serão em torno de 14, então fica mais difícil para observar o trabalho dos alunos e ajudar os que precisarem. Poderia ser trio.

Peterson: Eu considero que dupla será melhor para os meninos terem que pensar. Quando o grupo tem muitos alunos, acaba que uns fazem e outros copiam. Na dupla, mesmo que um saiba mais, ele pode ensinar para o colega, eu acho que tem mais chance de os alunos participarem melhor.

Marília: Então vamos fazer em dupla. Eu acho que individual não é bom. [...] Eu acho que só de você explicar o seu pensamento para os colegas, vem novas ideias, te ajuda a pensar. O intuito da dupla, eu acho que é para eles falarem o que pensam, exporem um pro outro e tal.

Peterson: Podemos pedir que os alunos organizem as carteiras virando-as para o quadro como fizemos nas aulas de tabuadas.

Na décima terceira reunião, os estagiários avaliaram positivamente a maneira como as carteiras foram organizadas nas aulas que lecionaram.

Marília: Eu achei que outro ponto positivo foi termos organizado as carteiras no início das aulas e dar liberdade de os alunos escolherem seus colegas de equipe. A sala ficou bem organizada, bem melhor do que nas aulas que eles fazem trabalho em grupos e algumas carteiras ficam viradas para um lado, outras para outro, muito perto das outras. Eu acho que esse combinado deveria ser feito no início do ano para os alunos já saberem como posicionar de forma organizada, conforme a quantidade de alunos dos grupos.

Peterson: Eu percebi a importância da organização das carteiras para o bom andamento das aulas. No início do estágio eu pensei que era perda de tempo, mas observei que, com a sala organizada, a aula flui melhor, parece que os alunos ficam até mais calmos.

Regras e combinados

Ortenzi (2006) observa que de um lado, o autoritarismo nas salas de aula não promove a disciplina, a autodisciplina, a liberdade e a autonomia dos estudantes, de outro, aulas em que não há autoridade ou limites definidos podem levar ao caos e à falta de respeito pelas normas, pelo professor e pelos próprios colegas. Nesse cenário, os estudantes podem ter dificuldade em concentrar-se e aprender.

Os estagiários valorizaram o estabelecimento de regras e combinados, conforme mostrado a seguir.

Na primeira reunião, o grupo fez algumas reflexões em relação a regras e combinados do professor supervisor com as turmas.

Pesquisadora: Quando o professor Tiago está copiando a matéria no quadro, ele permite que os alunos conversem, mas quando termina e solicita que prestem atenção, eles param de conversar.

Marília: Também deixa usarem o celular, uns usam fone enquanto copiam, mas tem aluno que demora a abrir o caderno.

Peterson: Eu percebi que ele deixou todos irem ao banheiro quando pediram.

Pesquisadora: Ele não falou claramente, mas deu para perceber que ele tem uma regra em relação a isso?

Marília: Vai um de cada vez.

Pesquisadora: Combinados que são simples podem facilitar a dinâmica da sala de aula. Continuem observando o processo de ensino e aprendizagem da matemática, mas tenham também atenção com outros aspectos que envolvem as aulas.

Na décima reunião, Marília mencionou a importância de o professor definir as regras e mantê-las.

Marília: Eu aprendi no estágio que o professor tem que conduzir muita coisa! Percebi que precisa dar as instruções e manter as regras. Teve uma aula em que o professor Tiago falou que era para fazer grupos de quatro, mas teve um grupo com sete. Eu achei que grupo muito grande não foi produtivo, uns fizeram e outros só copiaram.

Na décima reunião os estagiários voltaram a comentar sobre as regras e combinados.

Marília: Ele não aceita os alunos entrarem na sala atrasados sem pedir licença, exige que eles falem bom dia ao entrar na sala, peçam licença quando chegam atrasados.

Peterson: Quase todas as vezes que os alunos pedem, ele deixa ir ao banheiro. Não se importa deles conversarem quando ele está passando matéria no quadro, mas quando vai explicar, exige que os alunos fiquem calados.

Marília: Ele permite que os meninos usem o celular quando estão copiando do quadro, mas quando vai explicar a matéria, fala para eles guardarem. Tem um carinho com os alunos, mas às vezes fica bravo!

Pesquisadora: A maneira como os professores se relacionam com os alunos e administram a sala de aula é muito importante para possibilitar um ambiente favorável à aprendizagem.

Utilização do quadro

Segundo Isoda e Olfos (2009), o Estudo de aula no Japão também contempla um cuidado com os registros feitos no quadro com o intuito de manter tudo o que foi escrito durante a aula, sem apagar, se possível. Para os alunos, torna-se mais simples comparar diferentes métodos de resolução quando estes aparecem simultaneamente no quadro. Além disso, o quadro pode servir como um registro escrito de toda a aula.

O comentário de Marília, feito na quinta reunião, mostra que ela observou que o professor supervisor dispõe muito bem as informações no quadro, e levou os estagiários a refletirem sobre a importância de também desenvolver essa habilidade.

Marília: O quadro do professor Tiago é perfeito! Nós tínhamos que pensar em como vamos organizar as informações no quadro.

Pesquisadora: Nós podemos fazer uma reunião na escola em que eu trabalho para vocês poderem simular a aula, utilizando um quadro.

Peterson: Eu acho bom, porque é muita coisa para pensar na hora. Na primeira aula, eu escrevi a tabuada muito grande e o espaço não foi suficiente. Tive de desmanchar e aí percebi que deveria usar o quadriculado do quadro para ficar alinhado.

Na nona reunião, Peterson ponderou que não deveria apagar a resolução do desafio que seria proposto no início da segunda aula, para que os alunos pudessem observá-la e pensar nos cálculos algébricos que poderiam ser feitos a fim de obter a fórmula do teorema de Pitágoras.

Marília: Podemos perguntar: Como devemos fazer para obter a área deste quadrado? Algum aluno deve responder a vezes a.

Peterson: Eu acho que nós não deveríamos apagar a resolução do desafio porque podemos lembrar aos alunos, ir mostrando: no quadrado com lado que mede 3, multiplicamos 3 x 3 para descobrir a área; no quadrado de lado 4, fizemos 4 x 4. Este lado mede a, qual cálculo devemos fazer?

Marília: Isso!

Na oitava reunião os estagiários simularam a execução da primeira aula que iriam lecionar sobre o teorema de Pitágoras. Quando Marília começou a simulação, a pesquisadora fez um comentário que levou os estagiários a refletirem sobre a necessidade de conversar com os estudantes dirigindo o olhar para eles quando registram informações no quadro.

Marília: Hoje vocês irão fazer várias descobertas sobre triângulos. A aula terá quatro momentos: no primeiro nós iremos explorar...

Então a Pesquisadora interrompeu e perguntou para Marília: Você está conversando com quem?

Marília: Estou imaginando que eu estou dando aula para o nono ano.

Pesquisadora: Tenha cuidado para não falar virada para o quadro, converse com a turma.

Marília: Ah! Eu estou falando para o quadro...

Marília e Peterson tiveram a primeira experiência ao usar o quadro apenas neste último estágio, evidenciando mais um ponto de que a formação proporcionada pela licenciatura cursada está muito distante de favorecer esse tipo de saber, que pode ser considerado apenas procedimental, contudo faz parte de um conjunto de conhecimentos que, quando construídos, ajudam os docentes novatos a ingressar na profissão mais bem preparados.

Utilização de materiais e possíveis agitações em sala de aula

Fernandes (2008) coloca que o professor deve ter cuidado em como conduz a aula para que situações de agitação e desordem não afetem, negativamente, o ambiente de sala de aula e comprometam a rentabilidade do tempo da aprendizagem.

Na quinta reunião, houve discussão relacionada à maneira com a qual o papel quadriculado poderia ser usado de forma a amenizar possíveis tumultos nas aulas. Esse assunto foi iniciado quando Peterson estava recortando algumas figuras para pensar em uma maneira de os estudantes verificarem que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual à medida da área do quadrado da hipotenusa.

Peterson: Para os alunos virem que é igual, precisaria recortar pelo menos o quadrado de um dos catetos, mas daria muita confusão na sala. Eu fico pensando... O professor Tiago disse que quer que a gente dê uma aula objetiva, eu não sei se ele vai concordar.

Marília: Vamos usar materiais que ajudem os alunos a entender o teorema de Pitágoras. Eu aprendi apenas decorando a fórmula, quero que os alunos realmente entendam.

Peterson: Eu também não quero apenas apresentar o Teorema e colocar os alunos para fazer exercícios, mas acho que a gente vai precisar fazer de um modo que o professor Tiago também concorde.

Marília: Eu acho que com os quadrados, usando papel quadriculado, eles poderão aprender melhor, o visual ajuda muito.

Pesquisadora: Podemos entregar para os alunos os triângulos e os quadrados já recortados. O que vocês acham?

Peterson: Assim daria menos confusão.

Marília: Eu concordo, mas nós vamos ter que colocar a família para nos ajudar a recortar tantas figuras!

Peterson: Realmente!

Desse modo, os estagiários optaram por entregar para os estudantes recortes de papel que iriam representar os triângulos e quadrados prontos para evitar possíveis confusões durante a aula, conforme a sugestão da pesquisadora. Ao analisar a aula, os estagiários também consideraram que entregar um kit com as figuras prontas para cada grupo contribuiu para que o tempo da aula fosse bem aproveitado. Essa situação pode ser relacionada à observação de Fernandes (2008) quando cita Arends (1995) para salientar a importância de o professor desenvolver estratégias preventivas que proporcionem uma boa organização e estruturação das aulas.

Em importante salientarmos que consideramos que a construção de materiais pelos estudantes pode favorecer que eles participem mais das aulas, se sintam mais comprometidos em preservá-los, e, principalmente, contribua para a aprendizagem da geometria. De acordo com Machado (2011), o ensino de geometria deve contemplar atividades de percepção, construção, representação e concepção.

Gestão do tempo em sala de aula

Além das situações descritas anteriormente, que envolveram a organização das carteiras e a entrega de figuras já cortadas para os estudantes, os estagiários fizeram outras reflexões sobre como as aulas podem ser conduzidas de forma que o tempo seja melhor aproveitado.

O trecho descrito a seguir, ocorrido na segunda reunião, mostra algumas ponderações feitas pelos estagiários em relação ao tempo quando o grupo estava preparando a primeira aula sobre as tabuadas da multiplicação.

Marília: Podemos já ir alinhando as carteiras no início da aula para não perder muito tempo. Talvez, enquanto eles vão organizando a gente já escreve a tabuada no quadro?

Peterson: Eu acho melhor preencher os resultados com a participação dos alunos.

Marilia: Ah, tá! Será que dá tempo? Porque se gastarmos muito tempo nisso, vai sobrar pouco tempo para os alunos jogarem. Seria bom que metade da aula fosse para o jogo.

Também na segunda reunião, quando o grupo estava conversando sobre maneiras de auxiliar os estudantes na realização das tarefas propostas pelo professor supervisor, Marília fez uma observação em relação ao tempo que muitas vezes inviabiliza ensinar conteúdos de anos anteriores que seriam importantes para que os estudantes compreendessem os conteúdos que estavam sendo ensinados naquele momento. Também expressou preocupação por não conseguir auxiliar todos os alunos que solicitaram sua ajuda nas aulas pelo tempo limitado.

Marília: Nós não temos tempo para voltar em tudo que é necessário e, também, temos que seguir os exercícios que o prof. Tiago propõe. [...] Além disso, o tempo não é suficiente para ajudar todos os alunos que me chamam, muitas vezes gasto muito tempo somente com um aluno.

Na sexta reunião, os estagiários fizeram comentários relacionados ao tempo destinado à realização das tarefas nas aulas lecionadas pelo professor supervisor.

Marília: Vocês observaram como a aula que o professor Tiago propôs um trabalho em grupo rendeu?

Peterson: Sim, porque na maioria das aulas o maior tempo é gasto com o professor Tiago copiando matéria no quadro e explicando como os alunos deverão resolver os exercícios, sobra pouco tempo para eles fazerem as atividades.

Marília: Eu falei para o professor Tiago que os alunos produziram bem na primeira vez que ele deu trabalho em grupo, que o tempo da aula rendeu, talvez tenha ajudado a ele pensar nisso porque depois ele mesmo disse que daria mais trabalhos em grupo nesta etapa. Eu acho que eu falei de forma leve e ele foi receptivo.

A preocupação com o tempo destinado a várias atividades das aulas é pertinente, porém a ponderação sobre o investimento de um maior ou menor tempo usado em uma atividade precisa ser relacionada à possibilidade de contribuir com a aprendizagem dos estudantes. As preocupações com o tempo investido nos diferentes momentos das aulas planejadas estiveram presentes em várias reuniões.

Na oitava reunião, os estagiários resolveram registrar as respostas da enquete de uma forma que demandasse menos tempo.

Peterson: Iremos registrar o total ou colocar pauzinhos?

Pesquisadora: Se você for perguntar para cada aluno e registrar é melhor usar pauzinhos. Se perguntar para todos levantarem a mão que querem voltar em uma opção, então pode registrar o total.

Marília: Desse jeito fica mais rápido.

Peterson: Vamos pedir que levantem a mão para não gastar muito tempo nessa parte.

Na décima reunião, Peterson disse que faria o desenho, referente ao desafio, no quadro, deixando-o pronto para quando um aluno mostrasse a resolução, com o intuito de economizar tempo.

Peterson: Quando eu observar que umas duplas já resolveram, irei fazer o desenho do desafio no quadro para adiantar.

Nas duas aulas lecionadas que abordaram estratégias para obter resultados de tabuadas da multiplicação e, também, na primeira aula lecionada sobre teorema de Pitágoras, o tempo foi suficiente para desenvolver o que foi planejado. Porém, em relação à segunda aula sobre o teorema de Pitágoras, o grupo já havia observado que, provavelmente, o tempo não seria suficiente para que os estudantes resolvessem os dois problemas de aplicação que constavam no planejamento, o que ficou evidente quando essa aula foi simulada, na décima primeira reunião. Contudo, mesmo diante dessa constatação, os estagiários optaram por propor os dois problemas selecionados com a intenção de discutir, com os estudantes, a resolução de pelo menos um.

Peterson: Vamos ver como os alunos irão resolver os problemas.

Marília: Estou com muito medo de o tempo não ser suficiente.

Pesquisadora: Estamos vendo que o tempo não será suficiente para os estudantes resolverem os dois problemas e ainda discutirmos as resoluções.

Peterson: Podemos mudar a ordem dos problemas para que eles resolvam, pelo menos, o da torre que a incógnita está em um dos catetos. Porque se eles resolverem pelo menos esse, já vai dar para vermos se eles realmente aprenderam o teorema de Pitágoras.

Marília: Quem sabe o professor Tiago deixa os alunos terminarem o segundo problema na aula seguinte, se não der tempo de concluir nessa aula?

Peterson: Podemos perguntar para ele.

Marília: Eu acho muito importante os alunos terem oportunidade de resolver, pelo menos, dois problemas de aplicação da matemática. Se não der tempo, discutimos a resolução de apenas um.

Nessa ocasião, percebemos a relação afetiva dos estagiários com os problemas que haviam adaptado e, também, o propósito de dar oportunidade aos estudantes de resolverem problemas de aplicação da matemática em situações reais – semirreais, conforme classificação de Skovsmose (2000) –, já que a maioria das tarefas propostas nas aulas observadas durante o estágio eram exercícios que tinham, como referência, a própria matemática. Com a execução das aulas, o grupo ponderou que teria sido mais adequado propor somente um problema de aplicação.

Peterson ainda fez uma observação sobre a relação que eles tiveram com o tempo limitado para lecionar o teorema de Pitágoras, que será diferente quando eles atuarem como professores.

Peterson: Eu tinha comentado com a Marília que, se nós tivéssemos mais tempo, seria bem melhor, poderíamos explorar bem mais a história da matemática. Quando formos os professores, não precisaremos ficar tão preocupados com o tempo, pois se não for suficiente, podemos continuar na próxima aula. Mesmo assim, eu acho que trabalhamos o que foi essencial, depois o professor Tiago vai continuar ensinando o teorema de Pitágoras do jeito dele.

Assim, as observações, vivências e reflexões de Marília e Peterson, durante o estágio, possibilitaram a construção de vários conhecimentos sobre a dinâmica de sala de aula que são fundamentais para o exercício da docência, mesmo reconhecendo que a formação inicial tem seus limites e, muitos outros conhecimentos poderão ser construídos em processos de desenvolvimento profissional que ocorrem ao longo de toda a vida.

6. PERCEPÇÕES DOS ESTAGIÁRIOS SOBRE O ESTUDO DE AULA

Na análise a seguir, são apresentados e discutidos alguns aspectos que foram, por nós, destacados com base nos dados produzidos por meio de uma entrevista individual, realizada ao final do estágio, com o propósito de identificar a visão particular de cada estagiário sobre o Estudo de Aula.

6.1 Estudo de artigos e consulta a livros didáticos

Buscamos ampliar os conhecimentos dos estagiários relativos à comunicação matemática e os tipos de tarefas, dando atenção especial aos problemas e atividades exploratórias, por meio de estudos de artigos (Ponte, 2003; Martinho, Ponte, 2005; Canavarro, 2011) que, além da parte teórica, contemplaram a realização de várias tarefas que constavam nesses textos. Souza, Wrobel e Baldin (2018) defendem que os professores brasileiros precisam aprender a conduzir aulas de resolução de problemas centradas nas ações dos alunos e não na exposição de conteúdos. Segundo as autoras, a metodologia de resolução de problemas, especialmente os abertos ou investigativos, tem sido central no Estudo de Aula no Japão, por possibilitar aulas participativas e ensino por questionamentos.

Para subsidiar o planejamento das aulas, também consultamos vários livros didáticos, documentos curriculares e estudamos o artigo "Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras" (Vieira, Imafuku e Pereira, 2019), pois, como destacam Ponte *et al.* (2017), os participantes de um Estudo de Aula consultam orientações curriculares, analisam materiais de ensino, fazem um diagnóstico o mais preciso possível das dificuldades dos seus alunos, procuram também conhecer os resultados de pesquisas sobre as dificuldades dos alunos e estratégias de ensino relativas ao tópico selecionado.

Peterson destacou que os estudos dos artigos e a consulta aos livros didáticos foram importantes para subsidiar o planejamento das aulas e contribuíram para sua aprendizagem:

Peterson: Analisar vários materiais foi algo que contribuiu muito para o planejamento das aulas, porque, geralmente, eu não consultava tantos livros para minhas aulas [particulares], mas percebi que a consulta que fizemos em vários livros nos ajudou. A pergunta que fizemos para os alunos verificarem qual área era maior foi baseada em um livro, os problemas que selecionamos foi de outro. Eu aprendi muito com os textos também sobre os tipos de pergunta que um professor pode fazer, sobre as atividades exploratórias.

Peterson acrescentou que gostaria de ter estudado mais artigos, avaliou positivamente que os temas eram voltados para sala de aula e fez uma referência direta ao que aprendeu com o artigo de Martinho e Ponte (2005) sobre os tipos de perguntas, destacando a conexão entre teoria e prática:

Peterson: Eu queria que nós tivéssemos tido mais tempo para estudar outros textos, porque eu gostei muito, aprendemos coisas práticas para sala de aula e cada um pôde falar o que achou dos textos, o que aprendeu**.** Os textos nos ajudaram muito no planejamento, como o que estudamos sobre os erros que os alunos cometeram em relação ao teorema de Pitágoras e o artigo sobre a comunicação matemática. Nós vimos que o professor às vezes pergunta e ele mesmo responde, ou então ele faz uma pergunta muito direta, mas ele deve perguntar para que os alunos possam, realmente, dizer o que estão pensando, para dar oportunidade de eles participarem.

Marília ressaltou a importância dos estudos realizados e acrescentou que gostaria de constituir um grupo com outros professores recém-formados, para fazer estudos e planejar aulas sobre alguns temas que são mais difíceis de ensinar.

Marília: Os textos nos ajudaram muito, a consulta aos livros que fizemos sem dúvida nos ajudou demais para conhecer maneiras diferentes de ensinar. Os estudos ampliaram muito a minha visão, e nós fomos discutindo... Eu até fiquei pensando em convidar outros colegas que estão formando para termos um grupo para planejarmos algumas aulas. Por exemplo, eu não tenho ideia de como ensinar números irracionais para a aula não ser assim: definição, exemplos, exercícios. Mesmo que ainda não seja professora, eu já gostaria de pensar em como ensinar uns temas mais difíceis. Eu comecei a consultar uns livros para ver como se ensina operações de números inteiros para não ficar apenas nas regras: menos vezes menos dá mais!

Os relatos acima evidenciam que Marília e Peterson consideram que os estudos realizados contribuíram para ampliar seus conhecimentos sobre o ensino da matemática e para que pudessem planejar aulas com maior qualidade. Eles perceberam uma forte conexão entre teoria e prática. Além disso, a intenção de Marília de constituir um grupo, para planejar aulas sobre temas que ela considera difíceis, mostra-nos o potencial do Estudo de Aula para criação de uma cultura colaborativa que costuma ser rara nos sistemas educativos brasileiros, conforme afirmam Souza, Wrobel e Baldin (2018).

6.2 Planejamento coletivo das aulas

Um dos diferenciais do processo formativo Estudo de Aula é o planejamento colaborativo, sendo elaborado com foco na aprendizagem dos estudantes, contemplando a antecipação de possíveis dúvidas, equívocos, estratégias de resolução dos estudantes e as ações do professor nos vários momentos da aula.

Nas reuniões realizadas, Peterson e Marília foram encorajados a apresentar as suas ideias e a discutir as propostas dos outros participantes. A pesquisadora procurou instigá-los a refletir sobre as sugestões apresentadas e, em alguns momentos, compartilhou experiências e conhecimentos relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática, tendo o cuidado de procurar não direcionar as escolhas do grupo.

Os planos das duas aulas acerca do teorema de Pitágoras, que os estagiários lecionaram, foram elaborados considerando o nível de conhecimentos matemáticos dos estudantes e, de forma bastante detalhada, contendo: indicações do que estava previsto para ocorrer em cada momento da aula, ações dos futuros professores, utilização dos recursos didáticos, possíveis perguntas, respostas e dúvidas dos alunos.

Marília e Peterson deram especial valor à criação de um espaço de compartilhamento horizontalizado, que favoreceu a exposição de cada um e a construção coletiva das aulas:

Marília: Nossas reuniões foram muito ricas, nós construímos as nossas aulas pouco a pouco, todos nós trouxemos ideias, compartilhamos nossas opiniões, fomos pensando, agregando e organizando as aulas. O planejamento foi altamente democrático, foi muito discutido, nada foi imposto.

Peterson: Se eu tivesse feito o planejamento sozinho, eu acho que eu iria planejar uma vez, aplicar e depois pensar o que deu certo, o que não deu, mas como fizemos em trio, ficou muito melhor, porque, em vários momentos, você e a Marília pensaram em aspectos que eu não tinha nem imaginado.

Marília expressou o desafio que foi planejar aulas para duas turmas cujos alunos não tinham estudado vários conteúdos de anos anteriores. É preciso considerar que esses estudantes não tiveram aulas presenciais no sétimo e na maior parte do oitavo ano, em função da pandemia de covid-19.

Marília: No nosso caso, não foi fácil planejar as aulas sobre teorema de Pitágoras para alunos do nono ano que não tinham aprendido tantos conteúdos de anos anteriores.

Marília e Peterson também valorizaram a elaboração detalhada dos planos das aulas, destacando a importância da indicação do que estava previsto para ocorrer em cada momento da aula e citaram que o planejamento com alto nível de detalhe demanda muito tempo para ser elaborado.

Marília: Os momentos da aula foram bem organizados. Primeira aula: introdução, momento de investigar e socialização. Achei muito importante fazermos a conclusão com os alunos. Na segunda aula: desafio, apresentação do teorema, exemplos e atividades. [...] Acho que, como professora, irei planejar várias aulas seguindo o roteiro que nós usamos, com os momentos das aulas, isso vai ser para minha vida! Eu já tinha feito uma sequência didática, mas era diferente, não tinha descrito os momentos da aula. Eu sei também que não dá para planejar todas as aulas assim, pois leva muito tempo.

Peterson: O processo de elaborar o planejamento foi bem completo, mesmo que demorado, pois fomos pensando nas perguntas, nas dúvidas que os estudantes poderiam ter, nos momentos das aulas. Antes, eu pensava que um professor poderia planejar uma aula, lecioná-la e depois ver o que deu certo e o que poderia mudar, mas nós tentamos melhorar antes de ir para a sala de aula. Nós chegamos a fazer quatro versões do planejamento da primeira aula! Eu observei que o primeiro foi bem simples, o último ficou bem mais completo: com figuras, mais detalhes sobre a aula.

Marília ressaltou a importância de conhecer os alunos, seus processos de aprendizagem, suas principais dúvidas para planejar aulas e também para sua formação e, ainda, destacou o desafio de planejar aula sobre um conteúdo que demanda vários conhecimentos prévios que os estudantes da turma não tinham construído.

Marilia: Como o professor Tiago nos deu liberdade para ajudar os alunos em sala de aula, pudemos perceber o nível deles e aprender formas de ensinar. Se não tivéssemos esse contato, não iriamos perceber as dúvidas dos alunos, em que eles têm mais dificuldade, tudo isso foi importante para minha formação como professora e também para o planejamento das aulas. [...] Eu percebi a importância do planejamento para realizar uma boa aula, considerando o nível dos alunos.

Peterson ilustrou a colaboração ocorrida, citando a troca de ideias que ocorreu em relação à utilização de recursos didáticos:

Peterson: No início, queríamos usar o papel quadriculado, mas não sabíamos como, fomos descobrindo um jeito de usar para ajudar os alunos a descobrirem o teorema, foi muito legal isso! Eu tive a ideia de desenhar um triângulo no quadro, e a Marília teve a ideia de fazer as figuras em EVA, assim fomos trocando ideia e aperfeiçoando as aulas.

O depoimento de Peterson também mostra que o planejamento detalhado da aula amenizou a insegurança em conduzir as aulas:

Peterson: Os momentos de regência foram muito desafiadores para mim. Eu estava com receio de gaguejar, de travar, porém, foi tão bom! Eu realmente precisava dessa experiência! [...]. Se eu estivesse sozinho, eu iria me sentir mais inseguro. Na verdade, eu não fiquei tão nervoso como eu esperava, eu penso que, como planejamos com bastante detalhe, me senti mais seguro. [...] O planejamento me deu mais tranquilidade, pois eu pensava, já fiz essa parte, agora vou para próxima, mesmo que a aula não saiu idêntica ao planejamento, ajudou muito.

Os dados mostram que os estagiários consideraram que a participação no Estudo de Aula contribuiu significativamente para ampliar seus conhecimentos e habilidades em relação à elaboração de planos de aula, contribuiu para melhor qualidade das aulas e proporcionou maior confiança em conduzir as aulas. De maneira semelhante, Küster (2000) coloca que o

Estudo de Aula aumentou a capacidade dos futuros professores para fazer um melhor plano de aula e deu-lhes autoconfiança.

As opiniões dos futuros professores revelam que a colaboração que houve entre os participantes foi fundamental para elaboração dos planos de aula. Eles afirmaram que a troca constante de ideias, a valorização das sugestões de cada um resultaram em planejamentos de maior qualidade e com riqueza de detalhes. Em várias pesquisas realizadas no Brasil, os autores apontam a importância do trabalho coletivo, proporcionado pelo Estudo de Aula, na formação dos futuros professores de matemática, como Coelho (2014), Rincon e Fiorentini (2017), Carvalho (2020), Neves e Fiorentini (2021).

Os estagiários também destacaram a necessidade de tempo suficiente para a elaboração dos planos detalhados das aulas. Em algumas pesquisas desenvolvidas com futuros professores, os autores (Coelho, 2014; Silva, 2020) citam dificuldades vivenciadas em função do tempo restrito para o desenvolvimento do Estudo de Aula.

Uma questão interessante emerge da colocação de Peterson ao afirmar que a aula não aconteceu de forma idêntica ao plano e, pelo seu depoimento, constatamos que ele não considerou isso como um problema. Assim, sua reflexão está coerente com a explicação de Fujii (2014) ao esclarecer que o plano de aula não deve ser considerado um roteiro rígido a ser seguido, pois, devido à situação real da sala de aula, o que é realizado pode fugir um pouco do que foi escrito.

6.3 Aulas lecionadas

Conforme anunciado, o Estudo de Aula contemplou duas aulas sobre o teorema de Pitágoras, pois reconhecemos que não consideramos que pudemos ter o tempo necessário para preparar as aulas relativas às tabuadas de acordo com os princípios desse processo formativo.

A primeira aula foi delineada com o propósito de que os alunos compreendessem a relação pitagórica de forma experimental. Então, o ensino foi conduzido de forma a integrar as ideias dos alunos, emergidas por meio da exploração de alguns triângulos com os respectivos quadrados sobre seus lados, e o tratamento da relação pitagórica por parte dos estagiários. Assim, a aula iniciou com fixação de figuras em EVA que representavam um triângulo retângulo com os quadrados sobre os lados e a realização de uma enquete que foi feita para possibilitar que os estudantes comparassem as áreas dos quadrados da hipotenusa e dos catetos, de forma intuitiva. Em seguida, os quadrados fixados foram substituídos por outros com malha quadriculada para facilitar os cálculos das áreas e os estudantes puderam verificar que as áreas eram iguais. Logo após, os alunos, em trios, realizaram uma tarefa exploratória que teve o propósito de possibilitar que os estudantes descobrissem a relação pitagórica, por meio da exploração de triângulos com os respectivos quadrados sobre os lados, comunicando suas observações por escrito. Depois disso, um dos estagiários conduziu um momento de socialização das resoluções e a aula foi finalizada com a escrita da relação pitagórica no quadro.

A segunda aula foi preparada com a intenção de os alunos resolverem problemas que envolvem o teorema de Pitágoras. Para isso, a aula foi iniciada com a resolução de um desafio cujo propósito era ampliar a compreensão dos estudantes sobre a relação pitagórica e, também, como um exemplo particular que propiciou uma referência para auxiliar na compreensão dos cálculos algébricos efetuados a fim de obter a mesma relação para um triângulo retângulo genérico e, assim, obter a fórmula do teorema de Pitágoras. Em seguida, o estagiário ou a estagiária que conduzisse a aula contaria, de maneira sucinta, a história de Pitágoras, destacando os mistérios que o envolvem e frisando que, mesmo que a relação pitagórica já fosse utilizada por diferentes povos, o Teorema levou seu nome, pois se considera que ele foi o primeiro a provar sua validade para todos os triângulos retângulos. Em relação aos exemplos de utilização da fórmula, o grupo preparou esse momento para que fossem mostrados de maneira dialogada, incentivando a participação dos estudantes; os triângulos foram desenhados em posições diferentes; em um deles a incógnita era a medida da hipotenusa e, no outro, a medida de um dos catetos. Em seguida, seriam propostos dois problemas: o problema da torre e o do portão. Ao final, foi preparado um momento de socialização e discussão das resoluções dos estudantes.

Marília e Peterson fizeram algumas observações a respeito das aulas lecionadas:

Marília: Eu fiquei pensando que a gente construiu com os meninos todo o conceito, desde o início. Para qual triângulo vale, qual não vale... sabe?! Tudo construído passo a passo com eles. Fiquei muito alegre em ver os alunos explorando os triângulos, explicando o que tinham observado, mostrando como resolveram no quadro.

Marília: Nós vimos que as aulas que nós lecionamos foram mais atrativas e quase todos os alunos se envolveram! Eu aprendi que é preciso ter muito cuidado com a linguagem utilizada para que os alunos entendam os conceitos e não fiquem apenas na memorização. Nós fizemos isso nas aulas do teorema de Pitágoras, conseguimos atingir até uns alunos que eram mais desinteressados!

A percepção de Marilia de que os conceitos foram construídos pelos estudantes “passo a passo” vai ao encontro das observações de Isoda e Ofos (2009) sobre a aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas quando afirmam que, ao longo das aulas, o professor deve articular os conteúdos de modo que se produza o mínimo de saltos, com atividades ricas que desafiam os estudantes. Outro aspecto colocado por Marília, que diz respeito ao envolvimento dos estudantes, aproxima-se da concepção de resolução de problemas de Alevatto (2005, p. 41), segundo a qual “uma questão é um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la”.

Marília e Peterson fizeram algumas reflexões acerca da necessidade de o maior tempo das aulas ser destinado à realização de tarefas, e do docente exercer o papel de mediador da aprendizagem: escutando, buscando compreender o raciocínio e as dúvidas dos alunos e fazendo questionamentos que os levem a pensar sobre conceitos e/ou procedimentos:

Marília: [...] eu não tinha noção do quanto é importante que o maior tempo da aula seja para os alunos fazerem atividades, porque o aprendizado se constrói aos poucos, que o que mais ajuda não é a explicação do professor no quadro, mas é ajudá-los a pensar no momento que eles fazem as tarefas. [...] No Estudo de Aula, nós pensamos muito nas perguntas, então nos momentos que nós explicamos, nós incentivamos a participação dos alunos, não foi só exposição.

Peterson: Eu percebi que é possível ir fazendo perguntas, incentivando a participação como nós fizemos nas aulas que lecionamos. Um dos pontos que o estágio me fez pensar é que o professor precisa organizar a aula para dar mais tempo de os alunos fazerem atividade, ficar mais perto dos alunos.

Peterson: Eu acho que o estágio foi importante para mim e para Marília, mas foi também para os alunos. Nós ajudamos os alunos de forma individual, considerando suas dúvidas, mesmo que fosse para calcular 4 x 7, como aconteceu várias vezes de ajudarmos com operações básicas. Eu acho que isso foi muito importante para os alunos, porque somente com a aula expositiva muitos tinham vergonha de perguntar, mas como fomos nos relacionando com eles, foram se abrindo mais, pedindo ajuda. Eu vi que não é fácil para um professor com a turma cheia, mas é importante ajudar cada aluno na sua individualidade, mesmo que seja dedicar dois minutos com um aluno.

Os relatos acima mostram que os estagiários valorizaram uma abordagem problematizadora que exige do professor estimular o raciocínio dos estudantes por meio de questionamentos, em oposição a uma prática pedagógica tradicional, centrada na exposição dos conteúdos. Os estagiários destacaram a importância de se pensar nas perguntas que poderão ser feitas aos estudantes durante a aula, mostrando coerência com uma aula focalizada nos alunos que é um dos princípios do Estudo de Aula, conforme salientam Isoda e Ofos (2009).

Peterson destacou a importância dos momentos de simulação das aulas.

Peterson: Eu achei que a simulação das aulas foi muito importante para pensarmos em vários detalhes e estarmos mais preparados para lecionar as aulas nas turmas. Quando eu ingressei no curso, imaginei que teria muitos momentos assim, de preparar para ser professor mesmo.

Os estagiários também fizeram alguns comentários sobre as análises das aulas, ressaltando a importância desse momento e, também, indicaram que a antecipação de possíveis dúvidas ajudou na execução das aulas.

Peterson: Eu gostei muito dessa parte de analisar as aulas. Foi o momento de a gente respirar e ver o que deu certo, de pensar no que poderíamos melhorar. Eu gostei de poder falar o que observei e ouvir o que a Marília e você observaram sobre as aulas. Foi bom verificar na prática que alguns erros, dúvidas que havíamos pensado que os alunos poderiam ter, eles realmente tiveram. (...) Foi bom temos pensado nisso para ajudar os alunos a resolver os problemas.

Marília: Fazer a análise das aulas foi importante. Nós pudemos pensar em cada parte do que planejamos e indicar os pontos que poderiam ser melhorados. Nós concluímos que seria bom acrescentar mais um triângulo para os alunos explorarem para melhorar o trabalho em equipe, porque como entregamos três triângulos para cada trio, quase todos pensaram que cada aluno poderia explorar um triângulo. No mais, vimos que não era necessário fazer nenhuma alteração, mas que seria preciso três aulas para fazer tudo que preparamos. No momento que simulamos a segunda aula, nós já vimos que o tempo não seria suficiente para propor dois problemas, mas eu mesma não quis diminuir nada. Tudo isso serviu de aprendizado para mim.

6.4 Dinâmica de sala de aula

Os estagiários compartilharam ideias sobre alguns aspectos que interferem no ambiente da sala de aula que foram discutidos em algumas reuniões com base no acompanhamento das aulas do professor supervisor; nos momentos que os estagiários simularam as aulas antes de lecioná-las na Escola; e nos momentos que estavam conduzindo as aulas na Escola com os estudantes dos nonos anos.

Ponte et al. (2016) afirmam que a participação em um Estudo de Aula favorece que docentes aprendam questões importantes em relação à dinâmica da sala de aula.

Marília: Eu aprendi várias coisas sobre a sala de aula, como a organização do quadro, a necessidade de escrever e mudar a posição para conversar com os alunos, não dar aula para o quadro, como você disse. Mesmo assim, teve uma hora que eu percebi que estava totalmente virada para um lado da turma, então logo mudei. Antes de fazer o estágio, eu nunca tinha pensado na posição do professor, que é preciso escrever e olhar para a turma. Também vi que o modo da disposição das mesas dos alunos interfere muito na aula.

Peterson: Na primeira aula, eu vi que eu comecei a falar escrevendo no quadro, dando aula de costas e me lembrei do que você havia falado e como não conseguia falar e escrever ao mesmo tempo, eu escrevia, virava o corpo e falava. Essas dicas que você nos deu foram superimportantes, porque imagina não vivenciar isso, aí depois passar em um concurso, estas turmas são minhas e eu nunca lecionei?! Eu acho que, na primeira aula, eu fiquei muito preocupado em falar. Nas outras aulas, eu fiquei mais calmo e dei mais tempo para que os alunos respondessem, eu consegui fazer mais alunos participarem, olhar mais para a turma em geral, conforme tínhamos combinado.

Peterson: Eu também achei muito importante os combinados que o professor Tiago tem com os meninos em relação ao uso do celular, ir ao banheiro. Essas coisas parecem simples, mas percebi que fazem muita diferença! Eu não vi o professor Tiago dizer: 'você não vai'. Ele libera um por vez.

As posturas corporais, gestos, movimentos na sala de aula, assim como o olhar para os estudantes, compõem atitudes que interferem na relação que se estabelece entre docente e estudantes. A maneira de gerir e organizar a sala de aula também influencia na aprendizagem. Porém, tais conhecimentos, muitas vezes, não são abordados na licenciatura, somente verificados e aprendidos em situações práticas. O Estudo de Aula pode favorecer aprendizagens em relação a esses aspectos que foram valorizados por Marília e Peterson e que, de acordo com Isoda e Ofos (2009), são contemplados no Estudo de Aula no Japão.

Os autores explicam que os docentes japoneses, quando planejam as aulas, dão atenção à maneira como irão organizar as informações na lousa, decidem como os estudantes devem trabalhar (individualmente, em pequenos grupos ou em grupos um pouco maiores), estabelecem as ações do professor e o tempo previsto para cada fase da aula. Além disso, explicam que o Estudo de Aula pode favorecer que professores mais experientes e que fazem uma boa gestão de sala de aula, de forma a ter regras e ações absorvidas pelos estudantes (contrato pedagógico), compartilhem esses aspectos para que os demais participantes possam aprendê-los e venham a conduzir melhores aulas.

6.5 Desafios e sugestões

Quando questionados sobre os desafios para participar do Estudo de Aula durante o estágio e sobre o que eles avaliam que poderia ter ocorrido de outra forma, os estagiários responderam:

Marília: Eu vou ser bem sincera, como você já me conhece. Para mim, só teve ganho participar da pesquisa, ter oportunidade de fazer parte do Estudo de Aula. [...] O único ponto que eu pensei é que, se o professor supervisor pudesse ter participado das reuniões conosco, teria sido melhor. As aulas que nós lecionamos foram muito diferentes das aulas dele, e parece que ele ficou um pouco desconfortável com essa situação, mesmo ele concordando com os planejamentos que nós apresentamos.

Peterson: Eu acho que não foi um desafio, para mim, participar do Estudo de Aula durante o estágio, porque eu não estava cursando outras matérias. Porém, se eu estivesse cursando outras disciplinas, seria mais difícil de me dedicar, pela questão do tempo. No meu caso e no da Marília, não foi nenhum problema, porque só faltava o estágio para formarmos. Para outros estagiários, o tempo poderia trazer dificuldades, porque nós fizemos muitas reuniões, mas, para mim, foi tranquilo de participar.

Peterson continuou: Pensando em uma sugestão**,** poderia ter dias fixos para estudo de textos e de planejamento das aulas. Por exemplo: duas semanas para planejamento e uma semana

para estudo, porque eu gostaria de ter estudado mais textos. Essa é somente uma sugestão, porque não penso que o que fizemos precisasse ser modificado.

Assim, Marília considerou que a diferença de metodologias – usadas nas aulas que os estagiários lecionaram (atividade exploratória e resolução de problemas) e as aulas que o professor supervisor conduzia (aulas expositivas com exercícios) – trouxe certo desconforto para os participantes que poderia ter sido amenizado se o professor supervisor tivesse participado das reuniões destinadas ao Estudo de Aula. Mostofo (2014) coloca que o alinhamento com o professor do campo de estágio pode ser difícil devido ao cronograma, aos estilos de ensino e à necessidade de comunicação constante.

Para Peterson, o tempo pode ser um fator limitador para que outros estagiários participem do Estudo de Aula. Além disso, ele relatou que apreciou ter estudado textos de educação matemática e sugeriu a importância de haver dias fixos para estudos a fim de viabilizar que mais textos possam ser lidos e discutidos.

Portanto, a análise dos depoimentos evidencia que os estagiários consideraram que a participação em um Estudo de Aula, articulado ao estágio, oportunizou que desenvolvessem um trabalho de cunho colaborativo e reflexivo que possibilitou, a eles, aprender a planejar aulas detalhadas, ampliar conhecimentos teóricos e práticos voltados ao ensino de matemática, valorizar uma perspectiva de ensino centrada nos estudantes; ter mais confiança para conduzir as aulas do estágio, aprender aspectos relacionados à gestão de sala de aula.

7. CONCLUSÕES

A nossa investigação teve como propósito compreender os conhecimentos da docência, construídos por futuros professores de matemática quando participam de um Estudo de Aula durante o estágio curricular supervisionado. Também, ambicionou identificar as percepções dos futuros professores sobre a participação no Estudo de Aula.

Ao fazer um movimento inicial de analisar os dados, percebemos que classificar, separadamente, os conhecimentos construídos pelos estagiários não seria adequado, pois eles se mostravam entrelaçados. À medida que avançamos em nossas reflexões, passamos a compreender que essa interconexão era esperada, visto que, em contextos de ensino, os docentes mobilizam diversos saberes de forma simultânea. Diante disso, para compreender os conhecimentos construídos pelos estagiários, optamos por descrever e analisar alguns episódios, ocorridos nas reuniões, relacionados a temas relevantes para o ensino de matemática na educação básica, que se destacaram nos dados, os quais são: justificação; elaboração, seleção e adaptação de tarefas matemáticas; comunicação; recursos didáticos; e dinâmica de sala de aula.

No tocante à justificação, constatamos que o Estudo de Aula possibilitou, aos futuros professores, construírem conhecimentos sobre diferentes maneiras de convencer os estudantes em relação à veracidade de definições, propriedades e teoremas. As discussões sobre essa temática contemplaram vários aspectos relacionados ao ensino da matemática na educação básica.

É importante considerarmos que os estagiários, inicialmente, tinham a intenção de apresentar uma demonstração do teorema de Pitágoras nas aulas que iriam lecionar. Contudo, diante da constatação de que as várias demonstrações analisadas abordavam conteúdos que os estudantes não tinham estudado (semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, cálculo de área de quadrados e triângulos, quadrado da soma de dois números), eles concluíram que não seria adequado apresentar uma demonstração para essas turmas. Isso não significa que não consideraram a importância de o ensino de matemática favorecer o raciocínio dedutivo, pois vários episódios evidenciam que o grupo refletiu sobre a importância de os estudantes ampliarem o repertório sobre formas de elaborar justificativas à medida que avançam na aprendizagem da matemática, porém mostraram flexibilidade ao preparar as aulas, e priorizaram a aprendizagem significativa do conteúdo lecionado.

Assim, as análises de diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras, o compartilhamento de experiências e as trocas de ideias sobre maneiras de justificar, na educação básica, possibilitaram a construção de um entendimento de que as justificativas precisam ter o propósito de favorecer a aprendizagem da matemática e, para tal, torna-se necessário considerar os conhecimentos prévios dos estudantes. Desse modo, os estagiários concluíram que nem sempre é recomendável que as aulas contemplem demonstrações que são aceitas pela comunidade de matemáticos profissionais, podendo abordar explicações pautadas em experimentações, na observação de padrões que possibilitem aos estudantes generalizarem propriedades, comunicarem suas conjecturas e justificá-las ou refutá-las com base nos conhecimentos que possuem.

Além disso, os estagiários tiveram a oportunidade de identificar os conhecimentos necessários para entender as demonstrações analisadas; de observar os anos escolares em que diferentes conteúdos são abordados; de perceber como alguns conteúdos se relacionam com outros tópicos do currículo; de analisar como os livros apresentam as demonstrações do teorema de Pitágoras. Também verificaram a importância de o professor ter atenção com a qualidade e a quantidade dos exemplos explorados para favorecer a construção de conceitos de modo a evitar possíveis equívocos, e constataram que os contraexemplos podem beneficiar a construção conceitual. Ainda puderam refletir a respeito de que algumas afirmativas são consideradas verdadeiras porque foram definidas pela comunidade de matemáticos profissionais, contudo, na matemática escolar, não é suficiente apenas apresentar definições, pois é importante que os estudantes percebam que a matemática faz sentido.

Podemos constatar que essas aprendizagens não ocorreram de maneira fragmentada, pelo contrário, deram-se de forma que conhecimentos matemáticos, pedagógicos e curriculares foram construídos com forte conexão entre eles.

Em relação às <u>tarefas</u>, os futuros professores, no início do estágio, tinham uma noção sobre exercícios e problemas que precisava ser refinada e desconheciam as características das tarefas exploratórias e investigativas. Logo, os estudos, as trocas de ideias, a partilha de experiências relacionadas a diferentes tipos de tarefas matemáticas e o trabalho coletivo e reflexivo que envolveu a elaboração, a seleção e a alteração das tarefas propostas contribuíram para que os estagiários construíssem vários conhecimentos voltados ao ensino de matemática, e tiveram uma forte influência na natureza das tarefas propostas e na maneira como as aulas foram conduzidas.

Os futuros professores aprenderam a identificar diferentes tipos de tarefas; reconheceram que existe uma subjetividade na classificação das tarefas; perceberam suas potencialidades para a aprendizagem dos estudantes; refletiram que os conceitos matemáticos podem ser tratados de formas diferenciadas de acordo com o contexto abordado (puramente matemático, semirreal, real); construíram um entendimento de que tarefas exploratórias e problemas demandam ações diferenciadas por parte do professor e dos estudantes.

Os conhecimentos construídos, relacionados a diferentes tipos de tarefas matemáticas, influenciaram nas características das tarefas que foram propostas (na primeira aula, foi proposta uma atividade exploratória, e, na segunda, foram propostos problemas) e na maneira como as aulas foram conduzidas, possibilitando que os estudantes trabalhassem em pequenos grupos, fizessem descobertas, comunicassem suas ideias e dúvidas e compartilhassem suas resoluções para a turma. Desse modo, as características das tarefas propostas também decorreram das análises de diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras; dos objetivos estabelecidos para cada aula; do estudo realizado sobre comunicação matemática; da identificação dos conhecimentos prévios dos estudantes; das reflexões sobre formas de incentivar a interação entre os estudantes e os diálogos em sala de aula; das reflexões acerca de como os materiais poderiam ser usados nas aulas; do ambiente que se desejou estabelecer em sala de aula.

É preciso considerar, em relação às tarefas propostas, que os estagiários tinham ciência, no que foi possível conhecer sobre o Estudo de Aula, de que os professores japoneses, geralmente, propõem um único problema em uma aula, de forma que o tempo seja suficiente para que os alunos resolvam a tarefa proposta, sejam compartilhadas várias estratégias de resolução e o professor sistematize o conteúdo, destacando as ideias que considera mais importantes (Isoda e Olfos, 2009). Além disso, em algumas reuniões, o grupo já havia observado que, provavelmente, o tempo não seria suficiente para que os estudantes resolvessem os dois problemas de aplicação que constavam no planejamento da segunda aula, que ficou evidente quando a aula foi simulada. Porém, mesmo diante dessa constatação, os estagiários optaram por propor os dois problemas selecionados com a intenção de discutir, com os estudantes, a resolução de pelo menos um, pois consideraram que essa seria uma oportunidade para que resolvessem problemas de aplicação da matemática em situações reais – semirreais, conforme classificação de Skovsmose (2000) –, já que a maioria das tarefas propostas nas aulas observadas durante o estágio eram exercícios que tinham, como referência, a própria matemática. Ao analisar essa aula, os estagiários concluíram que deveriam ter proposto apenas um dos problemas.

No que diz respeito à <u>comunicação matemática</u>, constatamos que, ao longo do desenvolvimento do Estudo de Aula, os futuros professores construíram conhecimentos sobre maneiras de promover maior participação dos alunos durante as aulas. Observamos uma atenção especial com as questões que seriam feitas, oralmente, pelos estagiários nos momentos de interação com toda a turma; nas perguntas que constaram nos enunciados das tarefas; nas possíveis questões que os estagiários poderiam fazer para auxiliar os estudantes na realização das tarefas. Também houve um cuidado com os termos que seriam usados para comunicar ideias matemáticas e com a passagem da linguagem natural para a algébrica. Os estagiários ainda pensaram nas informações que seriam fornecidas aos alunos com o intuito de que tivessem ciência do que estava previsto ocorrer em diferentes momentos das aulas, e sobre a necessidade de informar algumas ações dos estagiários durante as aulas, como a que ocorreu no momento de fazer uma tabela no quadro para registrar as respostas da enquete. Além do mais, as aulas contemplaram trabalhos em pequenos grupos e momentos de socialização das resoluções dos estudantes que envolveram comunicação oral e escrita.

Desse modo, é possível constatar que os estudos coletivos sobre comunicação matemática e diferentes tarefas matemáticas, com atenção especial aos problemas e às tarefas exploratórias, e o trabalho coletivo e reflexivo que permeou o planejamento das aulas possibilitaram a construção de conhecimentos sobre maneiras de favorecer a comunicação oral e escrita em sala de aula. Mais uma vez, destacamos que esses conhecimentos não foram desenvolvidos de forma isolada, pelo contrário, foram construídos de maneira entrelaçada com outros saberes, entre os quais destacamos um forte vínculo com a natureza das tarefas propostas e os recursos didáticos utilizados.

Relativamente aos recursos didáticos, constatamos que, ao preparar as aulas, os estagiários refletiram sobre quais materiais poderiam ser utilizados e de que forma para possibilitar que os estudantes aprendessem a relação pitagórica. Embora, inicialmente, os futuros professores houvessem pensado em produzir um material para os estudantes verificarem a validade do teorema de Pitágoras, depois que eles já tivessem explicado esse conteúdo, com os estudos e as discussões realizadas, principalmente sobre as tarefas exploratórias, eles resolveram preparar a primeira aula de forma que os próprios alunos descobrissem a relação pitagórica. Também, mudaram a proposta inicial de desenhar um triângulo com respectivos quadrados na lousa e resolveram produzir essas figuras em EVA e fixá-las no quadro e, ainda, decidiram produzir quadrados com malhas quadriculadas para facilitar a obtenção das medidas das áreas. O grupo ainda pensou nas cores, nas medidas, na quantidade de figuras que seriam exploradas e decidiu inserir um triângulo sem ângulo reto para que os alunos percebessem que a relação pitagórica é válida apenas nos triângulos retângulos. Destacamos, ainda, a importância da preparação prévia que ocorreu com o uso do papel milimetrado e culminou na decisão de entregar recortes de figuras para os estudantes explorarem em pequenos grupos.

Além disso, observamos que os materiais foram utilizados de modo a possibilitar a conexão entre atividades intuitivas, experimentais e conceituais, conforme recomenda Pais (2000). Também constatamos que as reflexões relativas à utilização dos materiais didáticos foram aliadas a discussões que dizem respeito aos conhecimentos prévios dos estudantes; às tarefas propostas; às ações previstas para ocorrer em cada momento das aulas; à necessidade de informar, aos alunos, como a aula será desenvolvida, o motivo das ações realizadas pelos estagiários e as atitudes dos estudantes que são esperadas; a maneiras de favorecer a troca de ideias entre os estudantes e com os estagiários, à definição do número de participantes de cada grupo, possibilitando uma construção entrelaçada de conhecimentos para o ensino de matemática na educação básica.

No que diz respeito à <u>dinâmica de sala de aula</u>, várias reflexões emergiram da observação das aulas do professor supervisor, de forma que os estagiários puderam construir entendimentos que dizem respeito à relação entre docente e estudantes; a organização dos alunos e posição das carteiras; a regras e combinados; a utilização do quadro; a utilização de materiais manipulativos e formas de evitar possíveis tumultos em sala de aula; e a maneiras de administrar o tempo das aulas.

Portanto, a nossa investigação evidencia que a participação no Estudo de Aula, durante o estágio, proporcionou que os estagiários ampliassem conhecimentos matemáticos relacionados a demonstrações do teorema de Pitágoras; construíssem conhecimentos curriculares relacionados a alguns conteúdos, identificando os anos escolares que são abordados e percebendo a relação entre eles; construíssem conhecimentos que envolvem diferentes aspectos do processo de ensino e aprendizagem da matemática (justificação, diferentes tipos de tarefas, comunicação, materiais didáticos), bem como saberes que se relacionam à dinâmica de sala de aula. Também entendemos que outros saberes que são importantes para ensinar matemática não foram contemplados em nosso estudo, como utilização de recursos tecnológicos, procedimentos avaliativos.

Os dados referentes às percepções dos futuros professores mostram que eles consideraram que o Estudo de Aula enriqueceu a experiência do estágio curricular supervisionado em vários aspectos, que procuramos sintetizar, a seguir.

Eles valorizaram os estudos de artigos sobre temas voltados ao ensino e aprendizagem da matemática, as consultas a livros didáticos, reconheceram a importância do trabalho coletivo e reflexivo, com valorização das propostas de cada um, compartilhamento de experiências, ideias e dúvidas que possibilitaram a construção coletiva das aulas. Também destacaram a importância de terem aprendido a elaborar planos detalhados que consideram os conhecimentos prévios dos estudantes e contemplam as ações previstas para cada momento das aulas, com indicação das possíveis dúvidas e equívocos dos estudantes e formas de auxiliá-los. Ainda relataram que planejamentos com alto nível de detalhe demandam muito tempo.

Em relação às aulas lecionadas, Marília salientou o bom envolvimento dos estudantes com o que foi proposto, observando a importância dos materiais produzidos, das questões que foram feitas para que ocorresse maior interação e troca de ideias, e das tarefas diversificadas que foram propostas que possibilitaram aos estudantes explicarem, com suas palavras, o que haviam observado; mostrassem as resoluções no quadro. Ela ainda considerou que a execução das aulas mostrou como foi importante ter cuidado com a linguagem utilizada. Peterson frisou que as perguntas possibilitaram aulas mais dialogadas, que o grupo ter pensado nas possíveis dúvidas contribuiu para que pudessem auxiliar melhor os estudantes na realização das tarefas, que o planejamento detalhado amenizou a insegurança ao exercer a docência, e destacou a importância da experiência em conduzir as aulas para sua futura atuação como professor. Além disso, consideraram a importância de analisar as aulas lecionadas, expressando suas opiniões e ouvindo as dos outros participantes, e de indicar os pontos que consideraram que o planejamento poderia ser alterado.

Os futuros professores deram um especial valor à aprendizagem de questões relacionadas à dinâmica de sala de aula, como a posição corpórea do docente enquanto registra as informações no quadro e conversa com os alunos, o olhar do professor para toda a turma ou para algum aluno específico, a organização das informações no quadro, a quantidade de alunos em cada grupo, a posição das carteiras dos estudantes, as regras e combinados com os estudantes, a importância de a maior parte do tempo em sala de aula ser dedicada à realização das tarefas, enquanto o papel do professor é o de facilitador da aprendizagem.

Em relação aos desafios de participar do Estudo de Aula no estágio, Peterson considerou que o tempo pode trazer dificuldades para a participação de licenciandos que estejam cursando um maior número de disciplinas no período. Já Marília reconheceu que foi desafiador preparar aulas sobre o teorema de Pitágoras, dada a situação de aprendizagem encontrada, e avaliou que, se o professor supervisor tivesse participado das reuniões, poderia ter havido maior sintonia entre os participantes e evitado alguns desconfortos.

Sendo assim, os relatos dos futuros professores revelam que eles consideram que as atividades realizadas no desenvolvimento do Estudo de Aula proporcionaram a construção de conhecimentos para o exercício da docência da matemática que contribuíram para sua formação, possibilitando, a eles, lecionarem aulas com maior qualidade. Desse modo, mostram que reconheceram a formação realizada com forte conexão entre teoria e prática.

As falas de Marília e Peterson, descritas abaixo, sintetizam o significado atribuído por eles à experiência que lhes foi proporcionada por esta pesquisa ao participarem do Estudo de Aula no estágio curricular:

Marília: Participar do Estudo de Aula foi enriquecedor demais! Todos os alunos da licenciatura deveriam ter essa oportunidade! Não tem como medir o que eu aprendi! Não foi só em questão do planejamento das aulas, dos estudos, mas um jeito de olhar para os alunos.

Peterson: Nós formos muito abençoados de ter essa oportunidade de participar de um Estudo de Aula! [...]. Eu acho que todo estágio tinha que ser assim, com acompanhamento de perto como você nos acompanhou. Eu e a Marília tivemos uma experiência muito, muito mais completa do que os meus colegas; contribuiu muito para nossa formação.

Finalizamos esta tese com o entendimento de que a realização do Estudo de Aula, no estágio, possibilitou, aos futuros professores, o aprendizado de vários aspectos do ensino de matemática, de forma entrelaçada, com forte conexão entre teoria e prática. Assim, a nossa investigação converge para o entendimento de Murata (2011) quando afirma que o Estudo de Aula cria um contexto no qual os professores podem construir, de maneira integrada, diferentes tipos de conhecimento.

Portanto, salientamos que os princípios que fundamentam o Estudo de Aula proporcionam uma formação de professores que favorece a construção de saberes docentes relevantes para a docência da matemática de forma entrelaçada. Entendemos que uma das características-chave desse processo formativo que proporcionam esse entrelaçamento é que todas as atividades são realizadas com foco na aprendizagem dos estudantes de turmas específicas, desse modo, levam em consideração as demandas reais da escola, possibilitando uma forte conexão entre teoria e prática.

Assim, usamos a metáfora de um novelo com diferentes fios emaranhados (figura 32) para representar como os conhecimentos para a docência podem ser construídos no Estudo de Aula, pois, mesmo que, em algumas partes, alguns saberes estejam mais evidenciados, eles se conectam em muitos momentos do processo.

Figura 32 – Construção de saberes no Estudo de Aula
Fonte: Acervo da autora.

Ao final, temos consciência de que o processo que vivenciamos possui particularidades pelas condições existentes e pelas características pessoais, profissionais, e acadêmicas dos participantes. Assim, nossa experiência é, de certa forma, única, pois, conforme afirmam Cochran-Smith e Lytle (1999), o conhecimento não pode ser separado de quem o produz e nem do contexto que é produzido. Por outro lado, o estágio foi desenvolvido de modo a contemplar os princípios que fundamentam o Estudo de Aula e, desse modo, pode inspirar outros trabalhos que venham desenvolver esse processo formativo com futuros professores de matemática.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizei esta investigação e elaborei esta tese sem a pretensão de ofuscar meu lugar de professora da educação básica e, também, minha experiência como supervisora de estágio, pois, nessa condição, é que me propus a desempenhar, também, o papel de pesquisadora. Assim, procurei considerar os princípios do Estudo de Aula ao realizar este trabalho, contudo tenho consciência de que a maneira como conduzi esse processo formativo também foi marcada pelas condições existentes e por minhas concepções, vivências e conhecimentos com o ensino de matemática na educação básica, principalmente, no ensino fundamental.

A minha intenção em desenvolver o Estudo de Aula com estagiários, buscando compreender os conhecimentos construídos por eles e, também, identificar suas percepções sobre esse processo formativo, esteve pautada na suposição de que esse processo formativo contribuiria para a preparação dos futuros professores para o exercício da docência. Sendo assim, consideramos que a investigação realizada confirmou nossa hipótese, pois a análise dos dados revelou que o Estudo de Aula enriqueceu a experiência do estágio realizado por Marília e Peterson, contribuindo para que construíssem vários conhecimentos relevantes para ensinar matemática na educação básica. Além disso, os conhecimentos foram construídos de maneira emaranhada, aspecto tão importante para a formação de professores, ao qual, inicialmente não tínhamos atentado, mas que se revelou com a análise dos dados.

Não foram somente Marília e Peterson que ampliaram seus saberes; a experiência de observar outra escola, de acompanhar as aulas do professor Tiago, de observar estudantes de oitavo e nonos anos em um contexto pós-pandêmico, de estudar, planejar, observar e analisar as aulas com os futuros professores, procurando instigá-los a refletir sobre suas propostas e ideias foi muito enriquecedora para mim, tanto do ponto de vista profissional e acadêmico como do pessoal. A realização desta investigação proporcionou que eu ampliasse saberes sobre o Estudo de Aula e sobre seu desenvolvimento na formação inicial de professores. Também possibilitou que eu construísse novos entendimentos em relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática e à dinâmica de sala de aula. Ainda favoreceu que eu tomasse consciência de conhecimentos que fui desenvolvendo em minha experiência como docente e como supervisora de estágio, os quais não eram tão explícitos para mim. Além disso, certamente a aprendizagem dos princípios do Estudo de Aula impactará significativamente minha prática docente, em particular, em ter um maior cuidado ao olhar para a aprendizagem dos alunos de forma a não pairar no que eles ainda não sabem, mas sim, mirar em como eles podem aprender. Certamente, influenciará minha atuação como formadora de professores, principalmente, por constatar que a elaboração de planos detalhados gera inúmeras oportunidades de aprendizado e, ao mesmo tempo, proporciona maior qualidade das aulas e aumenta a confiança dos futuros professores na condução das aulas.

Ainda gostaria de enfatizar que a relação de confiança e um sentido de pertencimento dos participantes, que foram proporcionados pela valorização das ideias de cada um, pelo acolhimento de dúvidas, pelo compartilhar de experiências, marcaram profundamente este trabalho. O Estudo de Aula possui princípios que favorecem a realização de um trabalho cooperativo e reflexivo, conforme anunciado em diferentes partes desta tese, contudo a disposição de Marília e de Peterson foi crucial para a realização das ações. Eles se mostraram incansáveis em concretizar todas as propostas do grupo.

Uma situação diferenciada do nosso trabalho é que eu também acompanhei as aulas do professor supervisor com os estagiários, possibilitando conhecer, ao lado de Marília e Peterson, como ele conduzia o ensino de matemática, a situação de aprendizagem das turmas, suas principais dúvidas, o que, a meu ver, também cooperou para a construção coletiva das aulas.

Conforme relatado, eu tinha a intenção de contar com a participação do professor supervisor nas reuniões realizadas para o desenvolvimento do Estudo de Aula, porém, isso não foi possível. Em outros trabalhos realizados na formação inicial, também ocorreram dificuldades relacionadas à participação de professores ou de licenciandos no Estudo de Aula (Silva, 2020; Oliveira, 2020). Essa situação nos leva a questionar: como possibilitar que professores da universidade, professores da educação básica e estagiários da Licenciatura em Matemática participem do Estudo de Aula?

Por fim, termino este texto com a expectativa de que esta tese venha inspirar outros formadores de professores a desenvolver o Estudo de Aula.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Carlos; VELOSO, Eduardo; ROCHA, Isabel; SANTOS, Leonor; SERRAZINA, Lourdes; NÁPOLES, Suzana. **A Matemática na formação inicial de professores.** Lisboa: APM e SPCE, 2006.

AGUILAR JUNIOR, Carlos Augusto; NASSER, Lilian. Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 1012-1031, 2014.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.** 378 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2005

ALMEIDA, Patrícia Cristina Albieri; DAVIS, Claudia Leme Ferreira; CALIL, Ana Maria Gimenes Corrêa; VILALVA, Adriana Mallmann. Categorias teóricas de Shulman: revisão integrativa no campo da formação docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 49, p. 130-149, 2019.

ALRØ, Helle.; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

AMÂNCIO, Roselene Alves. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros**. 178 f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

AMÂNCIO, Roselene Alves; ZAIDAN, Samira. O Estudo de Aula no estágio curricular supervisionado: percepções de futuros professores de Matemática. **Boletim GEPEM**, n. 82, p. 44-65, 2023.

AMÂNCIO, Roselene Alves; ZAIDAN, Samira. Princípios do Estudo de Aula:: aproximações e distanciamentos em uma experiência com futuros professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 29, p. 291-313, 2023.

BALACHEFF, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

BALL, Debora; THAMES, Mark; PHELPS, Geofrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, Cirléia Pereira; LOPES, Celi Espasandin. Uma análise da produção acadêmica brasileira sobre o Estágio Curricular Supervisionado nos cursos de Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação Matemátic**a, n. 18, p. 8, 2021.

BELLO, Samuel Edmundo López; MAZZEI, Luis Davi. Leitura, Escrita e Argumentação na Educação Matemática do Ensino Médio: Possibilidades de Constituição de Significados Matemáticos. In: BRANDT, Célia Finck., MORETTI, Méricles Thadeu (org). **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática do cotidiano, 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Scipione, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais**. Brasília, DF. 2017.

BRENDEFUR, Jonathan; FRYKHOLM, Jeffrey. Promoting mathematical communication in the Lesson: Two preservice teachers' conceptions and practices. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 3, p. 125-153, 2000.

BURROUGHS, Elizabeth A.; LUEBECK, Jennifer L. Pre-service teachers in mathematics lesson study. **The Mathematics Enthusiast**, v. 7, n.2, p. 391-400, 2010.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, v. 115, p. 11-17, 2011.

CARVALHO, Mercedes. Metodologia Lesson Study na Licenciatura em Matemática: possibilidade para a formação inicial. **Boletim G**epem, n. 77, p. 1-13, 2020.

CASTRO, Franciana Carneiro. Aprendendo a ser Professor (a) na prática*:* estudo de uma experiência em prática de ensino de Matemática e estágio supervisionado. 155 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, São Paulo, 2002.

CHEVALLARD, Yves. La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble: Ed. **La pensée Sauvage**, 1991.

COCHRAN-SMITH, Marilyn; LYTLE, Susan L. Chapter 8: Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. **Review of research in education**, v. 24, n. 1, p. 249-305, 1999.

COELHO, Felipe Gomes. **A metodologia da Lesson study na formação de professores: uma experiência com licenciandos de matemática**. 321 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.

CRISTOVÂO, Eliane Matesco. Ana. Ensaio sobre a formação matemática do futuro professor de Matemática pautada nos conhecimentos matemáticos próprios da docência. No prelo.

DAVID, Maria Manuela; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; TOMAZ, Vanessa Sena. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, v.15, no. 1, p. 42-60, 2013.

DESGAGNÉ, Serge. O conceito de pesquisa colaborativa: a ideia de uma aproximação entre pesquisadores universitários e professores práticos. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 29, n. 15, p. 7-35, maio/ago., 2007.

DINIZ-PEREIRA, Júlio Emílio. Formação de professores, trabalho e saberes docentes| Training of teachers, work and teaching knowledge. **Trabalho e Educação**, v. 24, n. 3, p. 143-152, 2015.

ELIPANE, Levi Esteban. **Integrating the essential elements of lesson study in pre-service mathematics teacher education.** 404 f. Tese (Department of Science Education), Copenhagen University, Copenhagen, 2012.

FERNANDES, Luís Fernando de Pinho. **Clima de sala de aula e Relação Educativa: as representações dos alunos de 3º ciclo**. 116 f. Dissertação de Mestrado. Universidade do Algarve. 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Tereza Carvalho Correa. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, 2013, v. 27, n. 47, p. 917-938.

FISCHBEIN, Efraim. **The Theory of Figural Concepts**. Educational Studies in Mathematics, v. 24, n. 2, p**.** 139-162. Dordretch: Publishedby: Springer,1993.

FUJII, Toshiakira. Implementing Japanese lesson study in foreign countries: misconceptions revealed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 65-83, 2014.

GAIGHER, Vanessa Ribeiro; SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira; WROBEL, Julia Schaetzle. Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. **VIDYA**, v. 37, n. 1, p. 51-73, 2017.

GARNICA, Antonio Vicente M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato?: um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação. **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada.** Porto Alegre: EdiPUCRS, v. 49, p. 87, p. 1-32, 2001.

GUÈRIOS, Etiene. Influências e decorrências de diferentes concepções de sueprvisão na prática do estágio supervisionado em matemática. In: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina (org.). **O estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas: Companhia das Letras, p. 147-172, 2015.

IBIAPINA, Ivana Maria Lopes de Melo. Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos. **Brasília: Líber Livro Editora**, v. 1, 2008.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática – Imenes e Lellis – 8º ano**. São Paulo: Moderna, 2012a.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática – Imenes e Lellis – 9º ano**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012b.

ISODA, Masami; OLFOS, Raimundo. **El Enfoque de Resolución de Problems: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases**. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

JAKOBSEN, Arne; THAMES, Mark Hoover; RIBEIRO, Carlos Miguel; DELANEY, Seán. Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In: **12th International Congress in Mathematics Education** (12th ICME), p. 4635-4644, 2012.

JULIO, Rejane Siqueira; DE OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada. Estranhamento e descentramento na prática de formação de professores de Matemática. **Boletim Gepem**, n. 72, p. 112-123, 2018.

KÜSTER, Jéssica Schultz. **Formação de professores para aula de resolução de problemas a partir de um Lesson Study: contribuições, constrangimentos e desafios**. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vila Velha, 2020.

LEITE, Eliana Alves Pereira; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Considerações sobre lacunas decorrentes da formação oportunizada no curso de Licenciatura em Matemática no Brasil. **Revista de Educação Pública**, v. 29, 2020.

LITSTER, Kristy; MACDONALD, Beth; SHUMWAY, Jessica F. Experiencing active mathematics learning: Meeting the expectations for teaching and learning in mathematics Lessons. **The Mathematics Enthusiast**, v. 17, n. 2, p. 615-640, 2020.

LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina. Discussões sobre o estágio supervisionado. In: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina (org.). **O estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas: Companhia das Letras, p. 43-79, 2015.

LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; PEREIRA, Patrícia Sandalo; POZEBON, Simone; CEDRO, Wellington Lim. Estágio Curricular Supervisionado nas licenciaturas em Matemática: reflexões sobre as pesquisas brasileiras. **ZETETIKÉ**, v. 25, n. 1, p. 75-93, 2017.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, p. 3-38, 2006.

LOVE, Eric; MASON, John. Telling and asking. Subject learning in primary curriculum. In: MURPHY, Patricia; SELINGER, Michelle; BOURNE, Jill; BRIGGS, Mary (Editors). **Subject learning *in* primary curriculum**. London: Routledge, p. 241-256, 1995.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. Em Aberto, v. 5, n. 31, 1986.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez Editora, 6ª ed., 2011.

MARTINHO, Maria Helena; PONTE, João Pedro. A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor. **Actas do V CIBEM**, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

MARTINHO, Maria Helena. Comunicação nas aulas de matemática: perspectivas de uma professora. **Educação Matemática em Foco**, v. 2, p. 87-116, 2013.

MARTINS, Micaela; MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do Estudo de Aula. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 343-364, 2021.

MENEZES, Luís. Concepções sobre a comunicação matemática de uma futura professora. **Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática**, v. 1, p. 238-253, 2010.

MILANI, Raquel. Diálogo em Educação Matemática e suas Múltiplas Interpretações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, p. 1036-1055, 2020.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista brasileira de educação**, n. 28, p. 59-61, 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática acadêmica e matemática escolar: dissonâncias e conflitos. In: LOPES, E. M. T.; PEREIRA, M. R. (org.). **Conhecimento e inclusão social:** 40 anos de pesquisa em Educação. Belo Horizonte: Editora UFMG, p.193-224, 2011.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; FERREIRA, Ana Cristina. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 981-1005, 2013.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: Ideias e Desafios, 9º ano**. 18ª ed. São Paulo: Saraiva, 2015.

MORIEL JUNIOR, Jeferson Gomes; WIELEWSKI, Gladys Denise. Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017.

MOSTOFO, Jameel. The Impact of Using Lesson Study with Pre-Service Mathematics Teachers. **Journal of Instructional research**, v. 3, p. 55-63, 2014.

MURATA, Aki. Introduction: conceptual overview of lesson study. In: HART, L.; ALSTON, A.; MURATA, A. (Eds.). **Lesson study research and practice in mathematics education**. Dordrecht: Springer, p. 1-12, 2011.

MURATA, Aki; POTHEN, Bindu Elizabeth. Lesson study in preservice elementary mathematics methods courses: Connecting emerging practice and understanding. **Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together**, p. 103-116, 2011.

MYERS, Julia. Lesson study as a means for facilitating preservice teacher reflectivity. **International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning**, v. 6, n. 1, p. 1-21, 2012.

NEVES, Regina da Silva Pina; FIORENTINI, Dario. Aprendizagens de Futuros Professores de Matemática em um Estágio Curricular Supervisionado em Processo de Lesson Study. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-30, 2021.

OLFOS, Raimundo; ZAKARYAN, Diana; ESTRELLA, Soledad; MORALES, Sergio. Vínculos y Brechas entre el Conocimiento Teórico y el Conocimiento Práctico Perceptual de una Futura Profesora en la Ensenanza de la Multiplicación de Expresiones Algebraicas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v.. 33, n. 64, maio,-ago., p. 591-612, 2019.

OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno; FONSECA, Maria de Jesus; SANTOS, Tânia Regina Lobato. A entrevista na pesquisa educacional. In: MARCONDES, Maria Inês; TEIXEIRA, Elizabeth.; OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno. (Orgs.). **Metodologia e técnicas de pesquisa em educação**. Belém: EDUEPA, p. 37 - 53. 2010.

OLIVEIRA, Hélia; MENEZES, Luís; CANAVARRO, Ana Paula. Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. In CANAVARRO, Ana Paula, SANTOS, Leonor; BOAVIDA, Ana Maria; OLIVEIRA, Hélia; MENEZES. Luís; CARREIRA, Suzana (Eds.), **Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática.** Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p. 557-570, 2012.

OLIVEIRA, Michael Araújo**. (Res)significações de saberes por licenciandos que vivenciam Estudo de Aula sobre distância entre dois pontos**. 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Rio Branco: Universidade Federal do Acre, 2020.

ORTENZI, Alexandre. **A relação professor-aluno: contribuições para o ensino da matemática**. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, 2006.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; GUALANDI, Jorge Henrique. Investigação de conceito na formação inicial: saberes de matemática para o ensino. In: PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (org). **Matemática para o ensino na formação de professores**. Edifes, p. 140-158, 2023

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**. v. 4, n. 6, 1996.

PAIS, Luís Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. Reunião da ANPEd, v. 23, p. 24. **Anais**. Caxambu, MG, 2000.

PALANCH, Wagner Barbosa de Lima; FREITAS, Adriano Vargas. Estado da Arte Como Metodologia de Trabalho Científico na Área de Educação Matemática: Possibilidades e Limitações. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

PATARO, Patrícia Moreno, BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial - 9º ano: ensino fundamental, anos finais.** 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2018.
PIETROPAOLO, Ruy Cesar. (Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PIMENTA, Selma Garrido; LIMA, Maria Socorro Lucena. Estágio e docência: diferentes concepções. **Poiésis**, Florianópolis, v. 3, n. 3 e 4, p. 5-24, 2006.

PIRES, Célia Maria Carolino. Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. **Educação matemática em revista**, p. 44-56, 2002.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PONTE, João Pedro Mendes. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, p. 25-39, 2003.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. A adaptação dos estudos de aula ao contexto português. In: Seminário de Investigação em Educação Matemática, n. 28, 2017, Viseu. **Anais**. Viseu: Associação dos professores de Matemática, p. 129-141, 2017.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. O Estudo de Aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, n. 30, v. 56, p. 868-891, 2016.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 535-558, 2012.

RICHIT, Adriana. Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. **Revista Brasileira de Educação**, v. 25, 2020.

RINCÓN, Jenny Patricia Acevedo; FIORENTINI, Dario. A 'glocal' lesson study: The case of pedagogical practices in mathematics. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - RIPEM**, v. 7, n. 2, p. 24-44, 2017.

ROLDÃO, Maria do Céu. Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. **Revista brasileira de educaç**ão, v. 12, p. 94-103, 2007.

SALGADO, Maria Aparecida de Jesus; LOSANO, Ana Letícia. Comunicação na aula de Matemática: revisão da literatura na perspectiva do professor pesquisador. **Zetetike**, v. 30, p. 1-20, 2022.

SBEM – SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **A Formação do Professor de Matemática no Curso de Licenciatura: Reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM**. Boletim SBEM n. 21, Brasília: SBEM, 2013.

SERRAZINA, Lourdes; VALE, Isabel; FONSECA, Helena; PIMENTEL, Teresa. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, J.P *et al*. (Ed.), **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, p. 41-58, 2002.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform**. Harvard Educational Review,** v. 57, p. 1-22, 1987.

SILVA, Aluska Dias Ramos de Macedo. **Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado**. 261 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica), Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2020.

SILVA, João Evangelista Brito; FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; PEDROSO, Hermes Antonio. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2016.

SILVA, Maria Marta; CEDRO, Wellington Lima. O estágio supervisionado e a licenciatura em matemática: as particularidades de uma proposta de aprendizagem da docência. In: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina (org). **O estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas, SP: Companhia das Letras. p. 43-79, 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Artmed editora, 2009.

SOUZA, Christiane da Fonseca. **Estudo de Aula de matemática com robótica educacional na formação inicial do professor de matemática**. 449 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2021.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira; WROBEL, Julia Schaetzle; BALDIN, Yuriko Yamamoto. Lesson Study como Meio para a Formação Inicial e Continuada de Professores de

Matemática – Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. **Boletim Gepem**, n. 73, p. 115-130, 2018.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira. Lesson Study Sem Fronteiras: limitações, desafios e algumas soluções de implementação. In: Seminário internacional de Lesson Study no ensino de matemática. **Anais**. Vitória: Edifes, p. 49-57, 2022.

TASSONI, Elvira Cristina Martins. Afetividade e aprendizagem: a relação professor-aluno. **Psicologia, análise e crítica da prática educacional. Campinas: ANPED**, p. 1-17, 2000.

TEIXEIRA, Bruno Rodrigues; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. O estágio supervisionado como oportunidade de desenvolvimento profissional para futuros professores de matemática. *In*: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina. (org.). **O estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas, SP: Mercado de Letras, p. 81-112, 2015.

TEIXEIRA, Inês Assunção de Castro. Da condição docente: primeiras aproximações teóricas. **Educação e Sociedade**, v. 28, p. 426-443, 2007.

TEIXEIRA, Madalena Telles; REIS, Maria Filomena. A organização do espaço em sala de aula e as suas implicações na aprendizagem cooperativa. **Revista Meta: Avaliação**, v. 4, n. 11, p. 162-187, 2012.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERAS, Renata da Silva; FERREIRA, Sandra Patrícia Ataíde. A afetividade na relação professor-aluno e suas implicações na aprendizagem, em contexto universitário. **Educar em revista**, n. 38, p. 219-235, 2010.

VIEIRA, William; IMAFUKU, Roberto Seidi; PEREIRA, Emanoel Fabiano Menezes. Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras. **ForScience**, v. 7, n. 2, 2019.

YOUNG, Amy; CAVANAGH, Michael; MOLONEY, Robyn. Building a whole school approach to professional experience: Collaboration and community. **Asia-Pacific Journal of Teacher Education**, v. 46, n. 3, p. 279-291, 2018.

ZANOCCO, Pierina; RIPAMONTI, Constanza. Estudio de clases en didáctica de la matemática: proceso reflexivo de los estudiantes de pedagogía en educación básica en la Universidad Santo Tomás. **Actas.** VII CIBEM. Montevideo, Uruguai. 2013.

APÊNDICE A– Planos de aulas

Plano da 1ª aula sobre teorema de Pitágoras

Tema: Descobertas sobre triângulos

Objetivo: compreender a relação pitagórica de forma experimental

Recursos:

- Um triângulo com medidas 9 cm, 12 cm e 15 cm e três quadrados com as mesmas medidas dos lados do triângulo confeccionados em EVA em escala 3:1
- Doze envelopes contendo:
  - Recortes de papel cartão para representar três triângulos com as seguintes medidas de lados: 6 cm, 8cm e 10 cm; 5 cm, 12 cm e 13 cm; 7 cm, 9 cm e 11 cm (indicar ângulos retos nos triângulos retângulos)
  - Recortes de papel quadriculado para representar nove quadrados com as seguintes medidas de lados: 6 cm, 8 cm, 10 cm, 5 cm, 12 cm, 13 cm, 7 cm, 9 cm e 11 cm.
  - Atividade impressa em folha A4.

Organização dos estudantes: trios

Introdução: explicar como será a aula

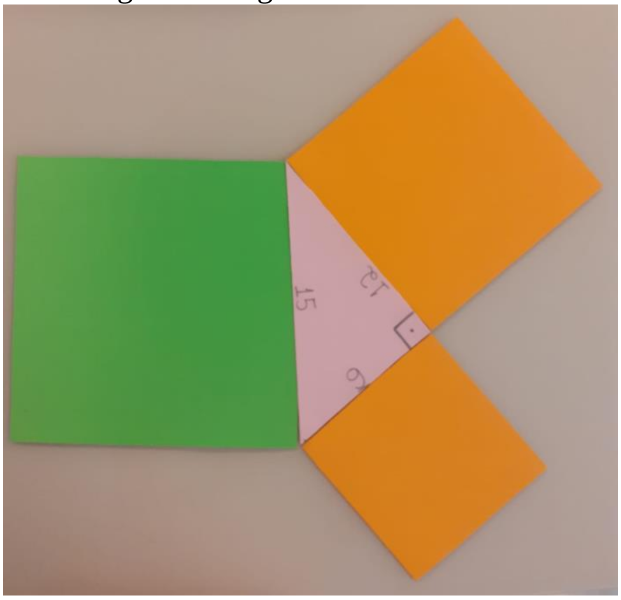
Hoje teremos uma aula em que vocês irão descobrir coisas novas sobre triângulos. No início iremos fixar algumas figuras no quadro. Será importante vocês prestarem bastante atenção, pois iremos fazer algumas perguntas para saber a opinião de vocês. Na segunda parte da aula, cada trio irá receber um envelope para explorar algumas figuras e fazer descobertas. Cuide bem das figuras porque vocês precisarão devolvê-las! Depois, vocês vão contar para a gente o que descobriram.

1º momento: Explorar triângulo retângulo feito em EVA com toda a turma

Mostrar triângulo em EVA e perguntar: Qual triângulo é este? Se ninguém responder, dizer: Ele tem um ângulo reto e perguntar: Qual dos ângulos é reto? (apontar para ângulos que não são retos primeiro e deixar o ângulo reto por último). Depois que eles responderem, lembrar que o ângulo reto é o ângulo dos cantos dos retângulos e que podem ser encontrados no caderno, na porta, no quadro. Então, fazer indicação de ângulo reto nos cantos do quadro.

Fixar no quadro o triângulo retângulo com os quadrados sobre cada um de seus lados feitos em EVA:

Figura 1 – Figuras feitas em EVA



Escrever a pergunta no quadro: **Qual é a maior área, a do quadrado verde ou a dos dois quadrados laranjas, juntos?**

Para que fique mais claro o conceito de área, perguntar em seguida: Vocês acham que utilizamos mais EVA laranja ou verde para fazer os quadrados? Eu vou fazer uma tabela no quadro para registrar a opinião de vocês!

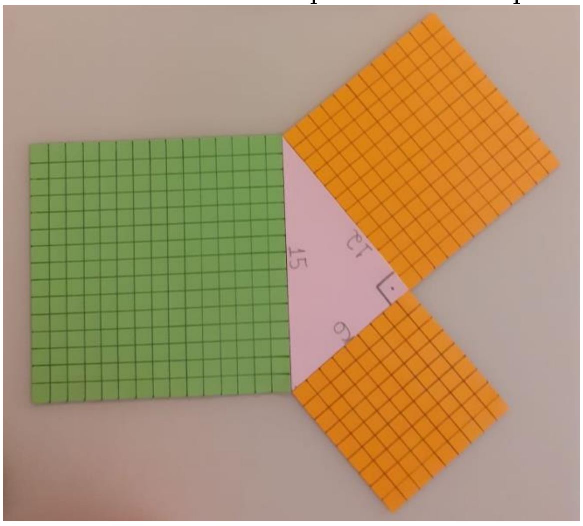
Fazer tabela no quadro:

Área Verde	Área laranja

Pedir para alunos levantarem a mão e anotar a quantidade de alunos que escolheu cada opção. Se algum aluno responder que as duas áreas tem o mesmo tamanho, escrever abaixo da tabela "Áreas iguais" e anotar quantidade de estudantes que acham que as áreas são iguais.

"Vamos descobrir quem acertou! Observem o que eu vou fazer para nós conferirmos as áreas dos quadrados! Substituir os quadrados por outros do mesmo tamanho com quadriculado (figura 2)" .

Figura 2 – figuras feitas em EVA com quadrados com quadriculados



Qual a área do quadrado menor? Se algum aluno responder, perguntar: Como que você calculou? Se não responderem, perguntar: Qual cálculo eu devo fazer para descobrir quantos quadradinhos há neste quadrado? Se necessário, mostrar que em cada linha há 9 quadrados e há 9 linhas, multiplicar 9 x 9 (fazer cálculo e colocar resultado ao lado da figura: 81 □).

Como podemos descobrir a área do quadrado médio? Mostrar o algoritmo da multiplicação passo a passo quando for multiplicar 12 x 12 e anotar resultado ao lado do respectivo quadrado = 144□. Proceder da mesma forma para calcular área do quadrado maior, incentivando a participação dos alunos = 125 □.

Agora que já sabemos a área de cada quadrado, vamos verificar se a área dos dois quadrados laranjas, juntos, é maior ou menor do que a área do quadrado verde! Somar as áreas para os alunos verificarem que elas são iguais.

Neste triângulo, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados. Então quem acertou a pergunta que eu tinha feito? Alguém pensou que quando nós somamos a área do quadrado menor e do médio poderia dar a mesma área do quadrado maior?

2º momento: Estudantes irão explorar as figuras

Agora cada grupo irá receber um envelope com várias figuras para descobrir o que acontece com as áreas dos quadrados em outros triângulos!

Atenção! Vocês precisarão montar as figuras do mesmo modo que eu fiz no quadro, colocando um quadrado sobre cada lado do triângulo de modo que eles tenham a mesma medida!

Entregar kit (figura 3) e folha da tarefa impressa para cada trio.

Figura 3 – Figura feitas em papel cartão para estudantes explorarem a relação entre os quadrados dos lados dos triângulos

Os alunos irão explorar as figuras e preencher a tabela abaixo (a 1ª linha estará preenchida com dados do triângulo e dos quadrados em EVA que foram exibidos no quadro):

Triângulo	Área do quadrado menor	Área do quadrado médio	Área do quadrado maior
Rosa	9 x 9 = 81	12 x 12 = 144	15 x 15 = 225
Azul			
Laranja			
Amarelo			

Ir passando nos trios para ver como eles estão fazendo a tarefa, incentivar o trabalho em equipe e evitar fornecer respostas. Se necessário:

- Pedir para observarem o exemplo do quadro e pedir para eles próprios explicarem como a 1ª linha da tabela foi preenchida.
- Fazer perguntas que os ajudem a avançar, como: O que você precisa descobrir? Como se calcula a área de um quadrado? Como você pode fazer para descobrir qual é a área dos dois quadrados menores, juntos?
- Se os alunos não tiverem percebido que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores apenas nos triângulos retângulos, incentivá-los a descobrir em

quais triângulos essa soma é igual e diferente e depois perguntar: Os triângulos que a soma é igual tem algo especial?

- Se os alunos não tiverem verificado que há um triângulo que não é retângulo, apontar para o símbolo de identificação de um ângulo reto e perguntar o que significa, lembrar que há ângulos retos nos “cantos” dos retângulos e pedir para os alunos verificarem isto, colocando um dos triângulos retângulos no “canto” de uma folha ou do caderno e perguntar: há ângulos retos em todos os triângulos que vocês receberam? Por sobreposição, eles também podem conferir que o triângulo amarelo não possui ângulo reto.

Quando já tiver 15 minutos que os alunos estiverem realizando a tarefa, fazer a tabela no quadro sem inserir dados.

3º momento: socialização

Preencher a tabela com a participação dos alunos, indicando alguns trios para responder cada item da tabela para que mais alunos participem. Após preencher, perguntar:

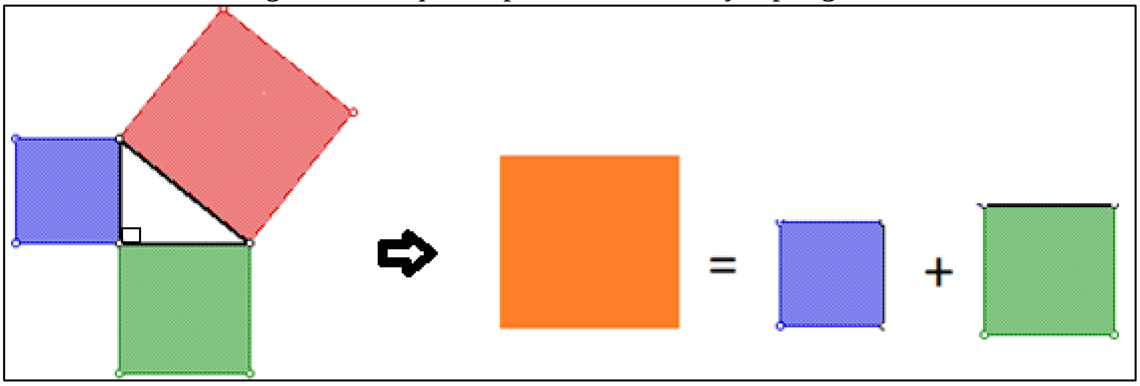
- Em quais quadrados a área do quadrado maior é <u>diferente</u> da área dos outros dois quadrados, juntos? (aguardar respostas dos alunos e somar áreas dos catetos para verificar)
- Por que vocês acham que em três quadrados a área do quadrado maior foi igual à soma da área dos menores e apenas em um triângulo foi diferente?

Se os alunos não responderem que nos triângulos retângulos a soma das áreas dos quadrados menores deu o mesmo valor da área do quadrado maior, fazer algumas perguntas mais direcionadas, como:

- Quais tipos de triângulos vocês exploraram?
- Quais dos triângulos são retângulos? (anotar no quadro)
- Qual triângulo não é retângulo?
- O que vocês perceberam em relação aos triângulos retângulos?

Depois que os alunos expressarem a relação pitagórica oralmente, desenhar o esquema (figura 4).

Figura 4 – Esquema para mostrar relação pitagórica



Em seguida, escrever o enunciado abaixo no quadro e solicitar que os alunos copiem no caderno: “Nos triângulos retângulos, a área do quadrado do lado maior é igual à soma das áreas dos quadrados dos outros dois lados”.

Plano da 2ª aula sobre teorema de Pitágoras

Tema: Teorema de Pitágoras

Objetivo: resolver problemas que envolvem o teorema de Pitágoras

Recursos: atividades impressas em folha A4

Duração: 60 minutos

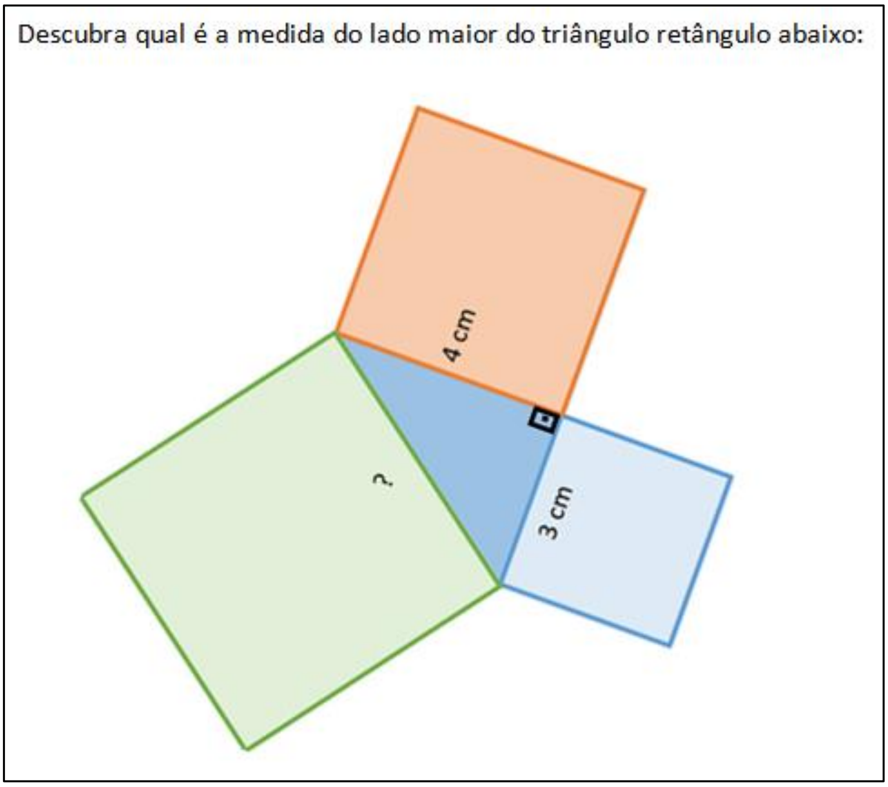
Organização dos estudantes: duplas

Introdução: explicar como será a aula

Hoje vamos começar a aula com um desafio que envolve as descobertas que vocês fizeram na última aula. O que vocês descobriram? Depois vou mostrar para vocês o teorema de Pitágoras que é o teorema mais conhecido da matemática. Então vou contar para vocês quem foi Pitágoras e depois vocês irão resolver dois exercícios.

O que vocês descobriram na última aula?

1º momento: resolução do desafio:



Ir passando nas duplas e verificar como os alunos estão resolvendo o problema, incentivando a troca de ideias entre os alunos de cada dupla.

- Se alguma dupla apenas somar as medidas dos lados, podemos perguntar: Na aula passada, quando vocês exploraram os triângulos, vocês consideraram apenas as medidas dos lados ou as áreas dos quadrados?

- Se alguma dupla calcular as áreas de cada quadrado e apenas somá-las, obtendo como resposta 25 (9+16), podemos perguntar: O que você precisa descobrir? Se responderem que é a medida de um lado do triângulo, questionar: Você acha que este lado pode medir 25 cm? Se ele disser que sim, perguntar: Você obteve a área do quadrado ou a medida do lado?
- Ter cuidado para não direcionar muito para que a resolução seja dos alunos. Lembrar-se de convidar um ou dois alunos para mostrar como resolveu o problema antes do momento de socialização.

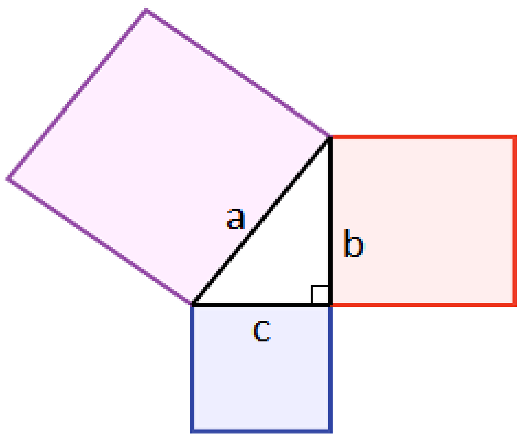
2º momento: Resolução do desafio no quadro por um aluno

Depois que um aluno resolver, pedir para explicar para a turma a resolução. Se o aluno que mostrar a resolução cometer algum erro, deixá-lo finalizar o processo e explicar como resolveu. Em vez de apontar os erros, fazer perguntas para que ele possa refletir sobre a sua resolução.

Mesmo que o aluno acerte a resolução e consiga explicar o processo para a turma, pode ser conveniente destacar algum ponto que não tenha ficado muito claro. Como temos percebido que vários alunos ainda não entenderam bem potenciação e raiz quadrada, talvez o esquema - ? . ? = 25 - possa ajudá-los a entender como poderiam descobrir a medida do lado do quadrado, sabendo que a área é 25.

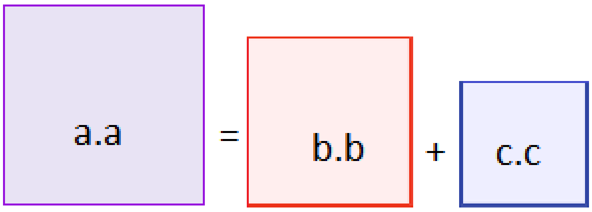
3º momento: Generalizar a relação entre os lados de um triângulo retângulo e contar de maneira resumida a história de Pitágoras

Fazer o desenho abaixo, usando uma cor de pincel diferente para cada quadrado, e explicar que iremos colocar uma letra para representar a medida de cada lado do triângulo retângulo, pois são medidas desconhecidas.



Perguntar: Qual é o maior lado? Depois que algum aluno responder, desenhar seta partindo do ângulo reto em direção ao lado oposto e escrever ao lado da figura: a é o maior lado e é sempre oposto ao ângulo reto.

Depois fazer o esquema abaixo, lembrando que a área do quadrado do lado maior é igual à soma da área dos outros dois quadrados (usando as mesmas cores dos quadrados desenhados anteriormente):



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Frisar que a fórmula acima representa o teorema de Pitágoras e nos ajuda a pensar nos cálculos que devemos fazer para descobrir a medida de um lado desconhecido de um triângulo retângulo. Lembrar que a fórmula mostra o que os alunos já haviam observado: a área do quadrado do lado maior é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.

<u>Contar a história de Pitágoras:</u>

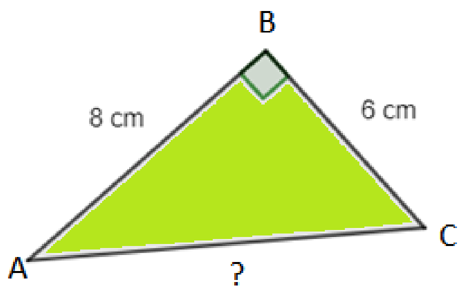
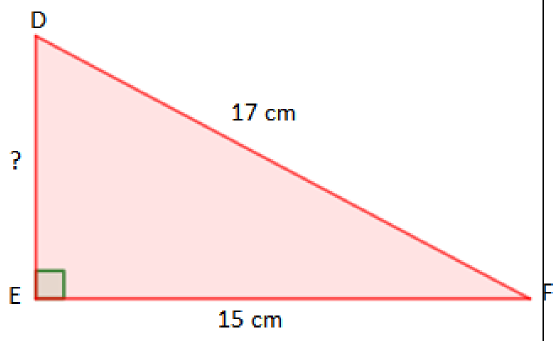
Pitágoras é uma das figuras mais conhecidas da Matemática e ao redor dele há um grande mistério. Para alguns, o matemático existiu e nasceu em Salmos, na Grécia, viveu entre 570 a 496 a.C (antes de Cristo). Para outros, Pitágoras foi um nome utilizado por um grupo de gregos estudiosos.

O teorema recebeu seu nome, pois ele conseguiu provar que a igualdade ($a^2 = b^2 + c^2$) vale para todos os triângulos retângulos. Porém, essa igualdade já era usada por povos mais antigos. Os egípcios, por exemplo, usaram esta fórmula em várias construções, inclusive para construir as pirâmides.

Pitágoras fundou a escola pitagórica, onde um grupo de pessoas (e por isso o mistério se Pitágoras existiu ou não) se reunia para estudar religião, ciências e filosofia. Essa escola inventou duas palavras: Filosofia que significa "amor à sabedoria" e Matemática que significa "aquilo que se aprende". A matemática da época envolvia geometria, aritmética, astronomia e música.

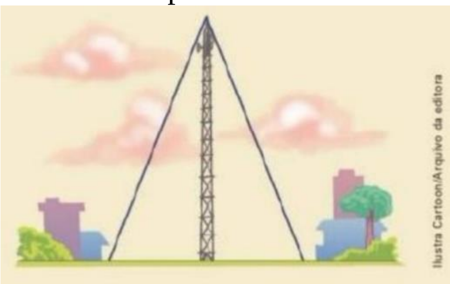
4º momento: Exemplos

Mostrar no quadro os dois exemplos, a seguir, de utilização da fórmula do teorema de Pitágoras: um em que a incógnita é a medida da hipotenusa e outro que é a medida de um dos catetos.

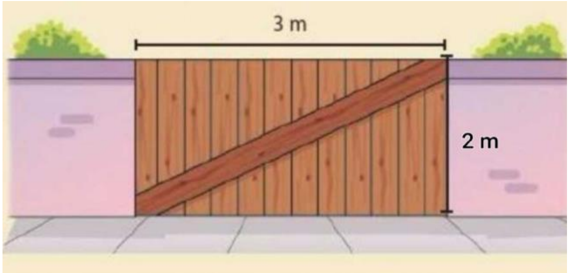
1º exemplo: Descubra a medida do lado AC.  	Fazer o desenho no quadro e perguntar: Qual é o maior lado? Por quê? Fazer seta partindo do ângulo reto para os alunos verem que o maior lado é sempre oposto ao ângulo reto. **Agora iremos usar a fórmula do teorema de Pitágoras para descobrir a medida do lado desconhecido deste triângulo.** $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ Ir fazendo perguntas e dar oportunidade para que os alunos respondam o que deve ser feito em cada passo de utilização da fórmula. $\boldsymbol{a^2 = 8^2 + 6^2}$ $\boldsymbol{a^2 = 64 + 36}$ $\boldsymbol{a^2 = 100}$ $\boldsymbol{a.a = 100}$ ***a = 10 ou*** ***a = -10 (não é válido)*** ***O lado AC mede 10 cm***
2º exemplo: Qual a medida do lado DE?  	Perguntar novamente: Qual é o maior lado? Por quê? Escrever a fórmula no quadro: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ Perguntar: Como podemos substituir as medidas dos lados dos triângulos na fórmula? Talvez eles possam pensar que podem somar os quadrados de 15 e 17. Neste caso, é importante lembrar que sempre precisamos somar os quadrados dos lados menores e que a representa o lado maior de um triângulo retângulo. $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ $\boldsymbol{17^2 = b^2 + 15^2}$ $\boldsymbol{289 = b^2 + 225}$ $\boldsymbol{289 - 225 = b^2}$ $\boldsymbol{64 = b^2}$ $\boldsymbol{64 = b.b}$ ***b = 8 ou*** ***b = -8 (não é válido)*** ***O lado DE mede 8 cm.***

5º momento: Resolução de dois problemas de aplicação do teorema de Pitágoras em situações práticas

1) É comum sustentar torres de transmissão de ondas de rádio com cabos de aço, como está indicado no desenho. A altura da torre é de 24 metros e o comprimento de cada um dos cabos de aço é de 25 metros. Qual é a distância do ponto em que esse cabo está fixado no chão ao pé da torre?



2) Portões de madeira formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não desmontar. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Observe as medidas indicadas no desenho abaixo. Qual é a medida da ripa de madeira que foi colocada na diagonal?



Fonte: Atividades adaptadas do livro de Antônio José Lopes Bigode, Matemática do cotidiano, 9º ano, p. 147

Entregar folha com problemas impressos para os alunos. Ir passando nas duplas para ver como estão resolvendo os problemas, tendo o cuidado de não ajudar demais. Observar se os alunos irão utilizar a fórmula ou irão se basear na representação geométrica dos quadrados dos lados.

Formas de auxiliar os alunos:

- Incentivá-los a ler o enunciado do problema em voz alta e perguntar: O que você precisa descobrir? Quais informações são fornecidas? Incentivá-los a escrever as medidas fornecidas nas figuras.
- Perguntar: Vocês identificaram um triângulo retângulo na figura? Onde está o ângulo reto? O que vocês aprenderam sobre triângulos retângulos nestas duas aulas?
- Estar atento aos possíveis equívocos dos alunos (encontrar o valor ao quadrado e não se lembrar de calcular a raiz quadrada) e também a possíveis erros de cálculo. Solicitar que os alunos expliquem como resolveram o problema para que eles possam refletir sobre o que fizeram e perceber algo que não está correto. Ter em mente que mesmo que não acertem todo o processo, podem demonstrar que estão compreendendo a relação pitagórica.
- No primeiro problema, talvez alguns não considerem que a incógnita é a medida de um dos catetos e somem os quadrados dos lados com valores conhecidos. No segundo problema os alunos podem tentar descobrir qual número elevado ao quadrado dá 13. Neste

caso, podemos incentivá-los a observar que: $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; então 13 não tem raiz quadrada exata, de forma que a resposta pode ser indicada como $\sqrt{13}$.

<u>6º momento</u>: Socialização da resolução dos problemas

Convidar um ou dois estudante para resolver o 1º problema no quadro e depois pedir que expliquem como resolveu para a turma. Caso necessário, enfatizar algum ponto da resolução feita pelo estudante após sua explicação (medida do lado desconhecido não é o maior). Seria interessante se um aluno resolvesse utilizando a fórmula e outro a representação geométrica.

Em seguida, convidar um ou dois estudantes para resolver o segundo problema e depois pedir que expliquem como resolveu para a turma. Caso necessário, enfatizar algum ponto da resolução feita pelo estudante após sua explicação. Seria interessante, pedir algum aluno para usar a calculadora para descobrir o valor aproximado de $\sqrt{13} = 3{,}06055512755$ (é um número com infinitas casas após a vírgula, mas para construir o portão podemos considerar a medida de 3,06 metros).

Plano de aula sobre tabuadas de multiplicação do 4 e do 8

Objetivo: Memorizar tabuada de multiplicação por 4, compreender que pode-se obter os resultados da tabuada do 8, dobrando-se os resultados da tabuada do 4.

Recursos: Jogo "Batalha das multiplicações" com fatores 4 e 8, cópia de tabela para estudantes registrarem as partidas.

Organização dos estudantes: Duplas (um ao lado do outro, de forma que fiquem de frente para o quadro).

Início da aula: Professor supervisor irá conduzir a formação das duplas (10 minutos) e irá explicar que a aula será conduzida pelos estagiários.

Introdução: Escrever os exemplos abaixo no quadro:

$$7 \text{ x } 7 = 49$$

$$49 \div 7 = 7$$

$$72 = 49$$

$$49 = 7$$

E perguntar aos alunos se eles sabem dizer o que todos estes exemplos têm em comum. E após algum aluno responder, explicar que a aula foi planejada com objetivo de auxiliar os estudantes na memorização dos resultados de algumas tabuadas da multiplicação para que tenham maior agilidade e precisão nos cálculos, pois várias operações dependem da multiplicação.

Também informar aos alunos que na primeira parte da aula eles precisarão ter muita atenção para se prepararem para participar de um jogo, que será proposto no segundo momento da aula.

1º momento:

Escrever a tabuada do 4 no quadro e preencher os produtos com a participação dos estudantes; Dar tempo para os estudantes memorizarem os resultados da tabuada do 4; Explicar para os estudantes que iremos dobrar os resultados da tabuada do 4 e escrever os resultados no quadro;

Perguntar: Quando dobramos os resultados da tabuada de 4, o que nós obtivemos?

Se necessário, perguntar: Qual tabuada foi obtida quando dobramos os resultados da tabuada de 4?

Após os alunos responderem que é a tabuada de 8, mostrar o exemplo abaixo:

4 x 6 = 24

Para descobrir o resultado de 8 x 6, podemos calcular o dobro de 24:

24 x 2 48	24 + 24 48

E depois perguntar: 4 x 8 = 32, então como podemos descobrir o resultado de 8 x 8?

2º momento: Explicar as regras do jogo:

1 - Embaralhar as cartas;

2 - Após embaralhar, fazer um monte com o baralho;

3 - Tirar par ou ímpar para ver quem irá iniciar o jogo;

4 - O primeiro jogador retira uma carta e em seguida, o segundo jogador retira outra carta do monte.

Lembrando que deve ser retirado apenas as cartas que estão em cima do monte;

5 - Em cada carta há uma multiplicação e os dois jogadores devem falar em voz alta o resultado da multiplicação que está escrita em sua carta. Quem estiver com o maior resultado, fica com a sua carta e a do adversário;

5 - Em caso de empate, ou seja, os dois jogadores acharem o mesmo resultado, cada um fica com sua própria carta;

6 - Ganha o jogador quem obter o maior número de cartas.

Entregar as cartas para as duplas e a folha para o registro das partidas (explicar que os alunos poderão efetuar cálculos na folha, mas não vale consultar as tabuadas, nem utilizar o caderno).

3º momento:

- Informar aos estudantes que agora é o momento para eles colocarem em prática as tabuadas do 4 e do 8, fazendo as seguintes multiplicações no caderno:

6783 x 4	5986 x 8

Desafio (Se der tempo):

Existem outras tabuadas que se você dobrar o resultado de uma, descobre o resultado da outra. Quais são elas?

Plano de aula sobre tabuadas de multiplicação do 3e do 9

Objetivo: Memorizar tabuada de multiplicação por 3, compreender que pode-se obter os resultados da tabuada do 9, triplicando os resultados da tabuada do 3.

Recursos: Jogo "Dominó" com fatores 3 e 9, regras do jogo e cópia de tabela para estudantes registrarem as partidas.

Organização dos estudantes: Duplas (um ao lado do outro, de forma que fiquem de frente para o quadro).

Início da aula: Professor supervisor irá conduzir a formação das duplas (10 minutos) e explicar que a aula será conduzida pelos estagiários.

Introdução: Explicar aos alunos que nesta aula eles irão aprender estratégias para descobrir os resultados de algumas tabuadas e depois irão participar de um jogo.

Escrever os exemplos abaixo no quadro:

4 x 3 = 12 8 x 3 = □	4 x 6 = 24 8 x 6 = □

Perguntar aos alunos quanto é 8x3 e depois quanto é 8 x 6. E após algum aluno responder, preencher os resultados das multiplicações com a ajuda deles. Para os alunos que responderem, perguntar: “C**omo vocês pensaram para descobriram esse resultado**? Caso nenhum aluno explique que utilizou a estratégia de dobrar o resultado de uma tabuada de 4, perguntar: **se você sabe quanto é 4 x 6, isso pode te ajudar a descobrir quanto é 8 x 6? .** Sentindo abertura, pedir a resposta de algum aluno específico e após algum aluno explicar que é o dobro fazer esquema com as setas.

1º momento: Explorar a relação entre outras tabuadas

Quais outras tabuadas que se dobrarmos o resultado de uma, podemos descobrir o resultado da outra?

Registrar no quadro o que os alunos responderam. Depois escrever no quadro as multiplicações abaixo:

- Escrever 3 x 7 = 21 e 6 x 7 = □ e perguntar: Como já sabemos que 3 x 7 = 21, como podemos usar esse resultado para descobrir quanto é 6 x 7?
- Escrever o próximo exemplo no quadro: 5 x 6 = 30 e 10 x 6 = □ e novamente, perguntar algum aluno se sabe dizer qual a resposta, registrar no quadro e depois perguntar: Qual a relação entre as tabuadas de 5 e de 10?

2º momento: Tabuadas do 3 e 9

- Explicar aos alunos que agora, com a ajuda deles, a tabuada do 3 será feita no quadro e depois disso, algumas observações serão feitas;
- Após completar a tabuada do 3 no quadro, fazer aos alunos duas perguntas: Quais são os produtos (resultados) que são números ímpares? E quais são pares? E após eles responderem, fazer outras perguntas: Quando o resultado da impar e quando o resultado da par? Essas perguntas são para ver se os alunos conseguem perceber que que o resultado será par, quando multiplicamos o 3 por um número par e o resultado será ímpar quando multiplicamos o 3 por um número ímpar.
- Após escutar algumas respostas, escrever no quadro o seguinte:

par x par = □

par x ímpar = □ Anotar pelo menos 2 exemplos numéricos sugeridos pelos alunos.

impar x par = □

ímpar x ímpar = □ Perguntar: Será que o resultado sempre será par?

Concluir o raciocínio escrevendo as respostas do quadro acima, podendo dar alguns exemplos para ver se os alunos entenderam o que se espera deles. Exemplo: Colocar 7 x 4 no quadro e perguntar se o resultado da impar ou par;

- Depois disso, multiplicar a tabuada do 3 por 3, a fim de encontrar a tabuada do 9, incentivando os alunos responderem. Mostrar como calcular 9 x 5, sabendo que 3 x 5 =15:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 3 \\ 45 \end{array}$$

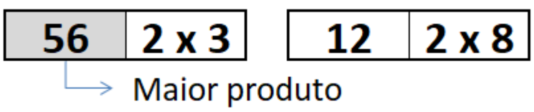
3º momento: Jogo do dominó

Ler as regras e mostrar como se joga

1 - Embaralhar e entregar 5 cartas a cada jogador, um jogador não pode ver as cartas do outro;

2 - Fazer um monte, virado para baixo, com o restante das cartas;

3 - O jogador com maior produto inicia o jogo;



4 - O jogador deve encaixar as cartas em uma das extremidades. Caso não tenha, compra no monte até encontrar um dos valores desejados, ele passa a vez quando encaixar uma peça ou quando o monte terminar..

Exemplo:

18	**4 x 6**	**24**	**2 x 6**	**12**	**2 x 8**	**16**	**4 x 5**

5 - Fim do jogo:

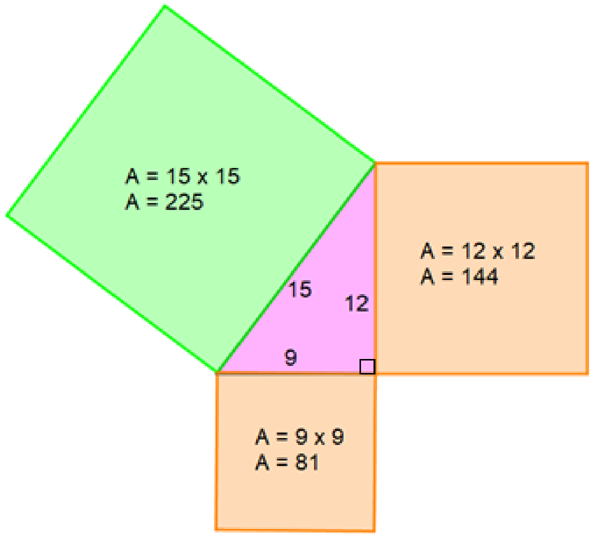
- Quando um dos jogadores terminar suas cartas (bater);
- Quando o jogo ficar fechado (sem possibilidades de encaixe) e não ter mais cartas no monte.

APÊNDICE B – Tarefas propostas durante as aulas

Tarefa proposta na 1ª aula

EXPLORANDO TRIÂNGULOS

Qual é a maior área, a do quadrado maior ou a dos outros dois quadrados juntos?



Agora é o momento de vocês explorarem os triângulos e os quadrados recebidos e completar a tabela:

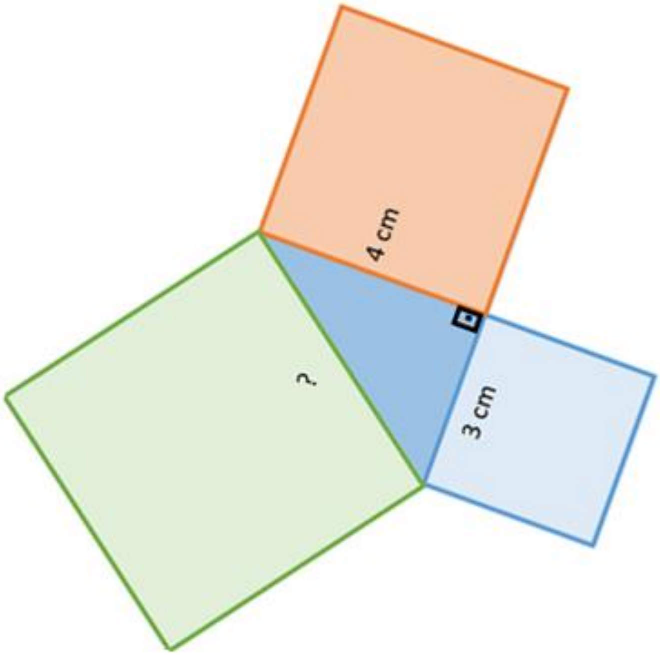
Triângulo	Área do quadrado menor	Área do quadrado médio	Área do quadrado maior
Rosa	9 x 9 = 81	12 x 12 = 144	15 x 15 = 225
Azul			
Amarelo			
Laranja			

a) Em quais triângulos a área do quadrado maior é diferente da área dos outros dois quadrados juntos?
b) Em quais triângulos a área do quadrado maior é igual à área dos outros dois quadrados juntos?
c) Analisando os triângulos, o que vocês podem observar?

Tarefas propostas na 2ª aula

Desafio

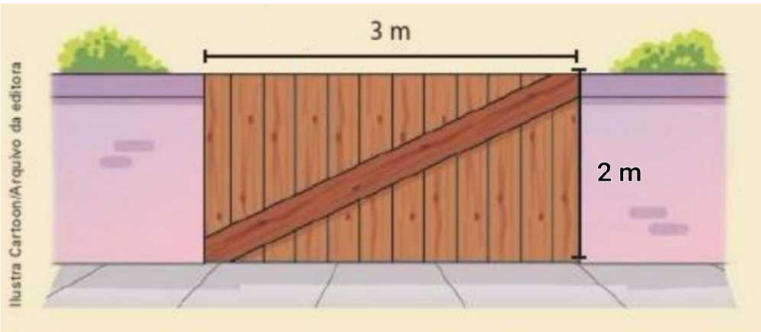
Descubra qual é a medida do lado maior do triângulo retângulo abaixo:



ATIVIDADES COM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS*

01) É comum sustentar torres de transmissão de ondas de rádio com cabos de aço, como está indicado no desenho. A altura da torre é de 24 metros e o comprimento de cada um dos cabos de aço é de 25 metros. Qual é a distância do ponto em que esse cabo está fixado no chão ao pé da torre?

02) Portões de madeira formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não se desmontarem. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Observe as medidas indicadas no desenho abaixo. Qual é a medida da ripa de madeira que foi colocada na diagonal?



* Atividades adaptadas do livro de Antônio José Lopes Bigode, Matemática do cotidiano, 9º ano, p. 147.

APÊNDICE C – Termo de consentimento livre e esclarecido para professores e estagiários

Enfatizamos que o risco que a pesquisa pode afetar negativamente qualquer sujeito participante é mínimo. Ainda assim, a participação neste estudo tem a possibilidade de provocar constrangimento diante do planejamento, execução ou análise das aulas. Desse modo, afirmamos o compromisso de desenvolver a pesquisa de modo que as ideias e os valores dos participantes sejam respeitados. Além disso, todo o material coletado será tratado de forma que não haja divulgação de imagens de professores, estagiários ou estudantes do Ensino Fundamental. Os nomes dos participantes serão substituídos por nomes fictícios. Mesmo assim, caso ocorram danos decorrentes de sua participação nessa pesquisa, você poderá buscar indenização.

Em caso de dúvidas com relação aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Minas Gerais, pelo telefone (31) 4909-4592 ou no endereço Av. Presidente Antônio Carlos, 6627, Unidade Administrativa II, 2º andar, sala 2005; Campus Pampulha, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil; CEP: 31270-901 ou pelo e-mail: coep@prpq.ufmg.br.

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade ___________________________ declaro que li e entendi as informações sobre a pesquisa "**CONHECIMENTOS PARA A DOCÊNCIA E O ESTUDO DE AULA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO**". Estou ciente de que a participação nessa pesquisa é voluntária e que, a qualquer momento, poderei solicitar novas explicações e modificar minha decisão sobre a participação na pesquisa.

Declaro que concordo em participar dessa pesquisa e que estou ciente que o este termo de consentimento livre e esclarecido foi emitido em duas vias, sendo que eu irei receber uma via assinada e datada.

Belo Horizonte, __________ de ____________________________ de 202__.

____
Assinatura do (a) participante

____
Assinatura da pesquisadora

____
Assinatura da orientadora da pesquisa

Roselene Alves Amâncio. Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Campus Pampulha; Belo Horizonte/MG. CEP: 31270-901; e-mail: roseleneamancio@ufmg.br; Telefone: (31) 99471-6695.

Drª Samira Zaidan. Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Campus Pampulha; Belo Horizonte/MG. EP: 31270-901; e-mail: samira@fae.ufmg.br.

APÊNDICE D – Carta de pedido de anuência institucional

Data: ___/__/2022

Assunto: pedido de anuência

À(ao)

Diretor(a) da Escola_____________________________

Prezado(a) diretor(a),

Como é de seu conhecimento, por nosso contato oral, estaremos realizando uma atividade de pesquisa na Escola Municipal Wladimir de Paula Gomes, sob sua direção, que visa compreender os conhecimentos para a docência que são mobilizados por estagiários quando participam do processo formativo “Estudo de Aula”, que reunirá um professor da escola (a que chamamos de supervisor) e dois estudantes de licenciatura em Matemática. Trata-se de uma proposta formativa que pretendemos que seja de apoio à aprendizagem dos estudantes, assim como de todos os demais participantes.

Vimos, por meio desta, solicitar sua anuência para tal, assinando o termo abaixo colocado.

Cordialmente,

___________________________________	___________________________________
Assinatura da pesquisadora	Assinatura da orientadora da pesquisa
Roselene Alves Amâncio. Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Campus Pampulha; Belo Horizonte/MG. CEP: 31270-901; e-mail: roseleneamancio@ufmg.br; Telefone: (31) 99471-6695.	Drª Samira Zaidan. Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Campus Pampulha; Belo Horizonte/MG. EP: 31270-901; e-mail: samira@fae.ufmg.br.

Declaramos que estamos de acordo com a execução de atividades de ensino vinculadas ao projeto de pesquisa intitulado “Conhecimentos para a docência e o Estudo de Aula no estágio supervisionado”, sob responsabilidade das pesquisadoras Roselene Alves Amâncio e Dra. Samira Zaidan. Assumimos o compromisso de apoiar o desenvolvimento da referida pesquisa a ser realizada nessa Instituição, após apresentação da Certidão de Aprovação por Comitê de Ética em Pesquisa.

____

Assinatura e carimbo do responsável pela instituição - _____/_____/2022

ANEXO - Carta da Profa. Dra Juliana Batista Faria - suplente da banca de defesa desta tese

Querida Rose,

Eu gostaria de primeiro te agradecer pelo convite para ler o trabalho e te dar os parabéns pela tese, em acordo com os elogios que eu tenho certeza de que você já terá recebido quando eu tiver a oportunidade de ler esta carta. Quero acrescentar mais um elogio, que tem a ver com o fato de sermos colegas de trabalho no CP! Tem a ver com a coerência de sua pesquisa com a sua prática pedagógica no ensino fundamental e na formação dos estagiários do nosso núcleo. Eu admiro seus materiais, seu jeito de pensar as aulas e a forma como você conduz a supervisão do estágio. Já bisbilhotei ou peguei carona nas conversas de vocês muitas vezes e, desde a leitura de seu projeto, eu já sabia que só poderia resultar em um lindo trabalho.

O que você fez na tese é de uma riqueza enorme para qualificar ainda mais o processo de supervisão dos estágios no CP, penso que ele toca em temas centrais para o estágio. Como você mesma escreveu, você sentiu falta da discussão sobre os recursos tecnológicos e sobre o tema da avaliação, mas a centralidade dada aos alunos em todo o processo já diz de uma avaliação formativa e que pode ser discutida com essa metodologia do Estudo de Aula. A tecnologia estará a serviço disso também, com o mesmo cuidado que você teve em proporcionar reflexões antes, durante e após o preparo dos outros recursos utilizados, que também são tecnológicos, de um ponto de vista mais amplo. Outros saberes estarão envolvidos, mas digamos que a conduta de quem faz a mediação e o eixo condutor do próprio Estudo de Aula, do jeito que você o fez, já nos dão elementos para pensar nesses temas e para imaginar como podemos realizar, no tempo que temos no CP para nos dedicar à supervisão, um trabalho que se aproxime pelo menos um pouquinho da qualidade de sua pesquisa.

Eu não aguentei guardar segredo, ontem mesmo eu já recomendei a leitura para nossos colegas do Núcleo de Matemática. O seu texto é também convidativo à leitura de estudantes da graduação e de professores da educação básica de um modo geral, pela linguagem acessível e pelo cuidado com os detalhes sobre como a gente aprende matemática na escola e como a gente aprende a ser professora de escola. Não é possível ler o seu trabalho sem refletir sobre a nossa formação e a nossa prática pedagógica em sala de aula.

Você é uma professora admirável e uma grande pesquisadora. O ser pesquisadora está aqui, comprovado na qualidade de sua tese, e está imbricado no seu jeito de ser professora. Você tem aquelas qualidades de que Paulo Freire fala: a amorosidade, a rigorosidade metódica e a curiosidade epistemológica. Então, antes da tese, eu já te via como grande pesquisadora. Estou dizendo isso não só porque eu te conheço, mas porque o seu texto diz isso. Alguém que vá fazer a leitura, do Norte ao Sul do país, de Leste a Oeste, terá aquele sentimento: "nossa, eu queria ter tido essa professora de Matemática na minha vida", "eu queria ter feito estágio com ela", "eu quero ser professora como ela!". De vez em quando, eu te vejo comentar que se sente muito mais professora que pesquisadora. Ok, é como você se vê. Mas quero te dizer que te vejo como pesquisadora exemplar na sua prática de professora.

Eu também vejo na tese a presença da Samira, que eu admiro tanto, que foi a primeira professora a me levar para a pesquisa na educação matemática, para a reflexão sobre os saberes docentes, de forma colaborativa, muito relacional, com professores da rede municipal, respeitando o saber e a condição desses professores. Eu a vejo na organização da tese e no diálogo respeitoso entre vocês no processo de análise. Consigo ver vocês conversando sobre todos aqueles temas. Isso também foi motivo de uma leitura afetuosa para mim.

Eu gostaria de sugerir que você pense sobre a possibilidade de dizer que seu trabalho tem dois objetivos em vez de um objetivo e uma ambição, um objetivo e um propósito, já que você tem duas questões de pesquisa que, pela natureza delas, talvez não possam ser enunciadas como um objetivo geral.

Também sugiro que em um futuro próximo você convide Marília e Peterson a estarem na posição de coautores em algum trabalho com você, como uma forma de reconhecê-los como sujeitos fundamentais na produção do conhecimento da tese e de estimulá-los a participar da escrita acadêmica também. Quem sabe nessa questão do envolvimento deles com a pesquisa (no capítulo mais dedicado ao segundo objetivo da pesquisa) vocês possam participar de eventos juntos, publicar algo juntos!?

Você receberá a tese impressa com meus registros, com algumas sugestões e alguns diálogos que eu escrevi para/com você, mas com uma condição: você tem que me devolvê-la depois, porque eu marquei partes de estudo que quero retomar para mim.

Por fim, quero dizer que minha admiração por você só aumentou e que você sempre pode contar comigo na escola e na vida. Parabéns! E obrigada pela oportunidade de ler o trabalho em primeira mão. Isso me emocionou muito e eu me senti muito honrada por poder estar aqui.

Meu abraço afetuoso,

Juliana Batista Faria
Belo Horizonte, 19 de dezembro de 2023