

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Faculdade de Engenharia**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção**

Thalles Vinícius Frade Mota

**UMA ABORDAGEM DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM  
APROXIMAÇÃO EXTERNA PARA A LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES COM  
REGRA DE ESCOLHA LIMITADA.**

Belo Horizonte

2024

Thalles Vinícius Frade Mota

**UMA ABORDAGEM DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM  
APROXIMAÇÃO EXTERNA PARA A LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES COM  
REGRA DE ESCOLHA LIMITADA.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Saraiva de Camargo

Belo Horizonte

2024

M917a

Mota, Thalles Vinícius Frade.

Uma abordagem de decomposição de Benders com aproximação externa para a localização de instalações com regra de escolha limitada [recurso eletrônico] / Thalles Vinícius Frade Mota. - 2024.

1 recurso online (51 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Ricardo Saraiva de Camargo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 49-51.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de produção - Teses. 2. Algoritmos - Teses.  
3. Programação (Computadores) - Teses. 4. Métodos numéricos - Teses.  
5. Modelos matemáticos - Teses. I. Camargo, Ricardo Saraiva de.  
II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.  
III. Título.

CDU: 658.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

## ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

### THALLES VINÍCIUS FRADE MOTA

Realizou-se, no dia 27 de fevereiro de 2024, às 09:00 horas, online em <https://meet.google.com/kmx-fguz-bsn?hs=224>, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 367ª defesa de dissertação, intitulada *Uma abordagem de decomposição de Benders com aproximação externa para a localização de instalações com regra de escolha limitada*, apresentada por THALLES VINÍCIUS FRADE MOTA, número de registro 2022665915, graduado no curso de ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Ricardo Saraiva de Camargo - Orientador (UFMG), Prof(a). Fatima Machado de Sousa Lima (UFMG), Prof(a). Gilberto de Miranda Jr. (UFOP), Prof(a). Ricardo Poley Martins Ferreira (UFMG).

A Comissão considerou a dissertação:

Aprovada

Reprovada

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.

**Belo Horizonte, 27 de fevereiro de 2024.**

Assinatura dos membros da banca examinadora:

Prof(a). Ricardo Saraiva de Camargo ( Doutor )

Prof(a). Fatima Machado de Souza Lima ( Doutora )

Prof(a). Gilberto de Miranda Jr. ( Doutor )

Prof(a). Ricardo Poley Martins Ferreira ( Doutor )



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Saraiva de Camargo, Professor do Magistério Superior**, em 06/03/2024, às 08:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fátima Machado de Souza Lima, Professora do Magistério Superior**, em 06/03/2024, às 08:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Gilberto de Miranda Junior, Usuário Externo**, em 06/03/2024, às 10:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Poley Martins Ferreira, Professor do Magistério Superior**, em 06/03/2024, às 15:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3056801** e o código CRC **D973A019**.

---

*Especialmente ao meu pai Flávio e a minha  
mãe Débora.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus por ter chegado até aqui e, principalmente, por ter permitido que tudo desse certo e se encaixasse para que este sonho fosse possível.

Ao meu orientador, Dr. Ricardo Saraiva de Camargo, agradeço por acreditar tanto em mim, pela paciência, incentivo e dedicação.

Expresso minha gratidão ao meu pai, Flávio Carneiro da Mota, e à minha mãe, Débora da Costa Frade Mota, pelo amor, orações, confiança e por terem suportado a distância quando foi necessária. Vocês são minha inspiração e minha força diária.

Agradeço ao meu irmão, Thiago, e sua família, por estarem sempre por perto me apoiando.

A você, Marcos, por ter acreditado que os sonhos não podem ser enterrados e por me impulsionar a fazer minha inscrição, e principalmente por ter sido meu apoio durante todo este sonho.

Aos amigos que permaneceram próximos e aos que fiz ao longo deste tempo, agradeço por colaborarem para que esta caminhada se tornasse um pouco mais leve.

Também agradeço à CAPES pela concessão da bolsa, contribuindo para uma dedicação integral à pesquisa realizada.

## RESUMO

Neste trabalho, uma nova abordagem exata para problemas de localização de instalações competitivas com regra de escolha limitada é proposta. A abordagem envolve a criação de um método híbrido baseado na decomposição de Benders com aproximação externa, em que o problema mestre da aproximação externa é resolvido usando um algoritmo de decomposição de Benders. Dada a estrutura de decomposição do problema, é possível separar um corte de viabilidade de Benders para cada cliente por vez. No entanto, em vez de adicioná-los todos de uma vez ao problema mestre, esses cortes foram agrupados seguindo uma clusterização dos clientes em pequenos grupos. Para otimizar ainda mais o processo de solução, os cortes de viabilidade de Benders foram separados por inspeção. Instâncias de médio e grande porte foram usadas para avaliar o desempenho computacional da abordagem proposta em relação aos métodos existentes na literatura. Os resultados encontrados evidenciam a superioridade do método proposto em relação aos métodos existentes na literatura, quando avaliados em instâncias de médio e grande porte.

Palavras-chave: localização de instalações competitivas; algoritmo de aproximação externa; decomposição de Benders; programação não linear inteira mista; problema de localização de instalações em dois níveis.

## ABSTRACT

In this study, a new exact approach for competitive facility location problems with limited choice rule is proposed. The approach involves the development of a hybrid method based on Benders decomposition with outer approximation, where the outer approximation master problem is solved using a Benders decomposition algorithm. Given the decomposition structure of the problem, it is possible to generate a Benders feasibility cut for each customer at a time. However, instead of adding them all at once to the master problem, these cuts were grouped following a clustering of customers into small groups. To further optimize the solution process, the Benders feasibility cuts were separated through inspection. Medium and large-scale instances were used to evaluate the computational performance of the proposed approach in comparison to existing methods in the literature. The results demonstrate the superiority of the proposed method over existing methods in the literature, particularly when evaluated on medium and large-scale instances.

Keywords: competitive facility location; outer approximation algorithm; Benders decomposition; mixed integer non-linear programming; two-level facility location problem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1	- Exemplo de um CFL. . . . .	22
Figura 5.1	- Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias de médio porte....	39
Figura 5.2	- Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias de grande porte...	42



## LISTA DE SIGLAS

$\gamma_i$	número máximo de instalações no conjunto de consideração para a zona de cliente
$A_j$	atratividade da instalação $j$
$b_i$	poder de compra na zona de cliente $i$
$d_{ij}$	distância entre a instalação $j$ e a zona de consumo do cliente $i$
$f_j$	custo fixo de abrir a instalação $j$
$I$	conjunto de zonas de consumo de clientes
$J$	conjunto de instalações candidatas
$u_{ij}$	utilidade da instalação $j$ ou da opção externa para a zona de cliente $i$
$x_j$	variável de decisão de abertura de instalação
$y_{ij}$	variável de decisão do conjunto de consideração
B&B	<i>branch-and-bound</i>
B&C	<i>branch-and-cut</i>
B&C-GBD	<i>branch-and-cut</i> baseado no método de decomposição generalizada de Benders
B&C-OA	<i>branch-and-cut</i> com cortes OA
BL	problema bilinear
CFL	problema de localização de instalações competitivas
DSP	subproblema dual de Benders
FO	função objetivo
GBC	cortes generalizados de Benders
GBDMP	problema mestre de decomposição generalizada de Benders
KKT	condições de Karush-Kuhn-Tucker

LB limite inferior

LP programação linear

MICQP programa quadrático cônico inteiro misto

MILP programa linear inteiro misto

MINLP programação não linear de inteiros misto

NLP subproblema não linear

OA técnica de aproximação externa

OABD abordagem de decomposição de Benders com técnica de OA proposta

OABDMP problema mestre de Benders

OAMP problema mestre de aproximação externa

PLI problemas de localização de instalações

PM problema mestre

PSP subproblema linear primal

RGBDMP problema mestre generalizado de Benders relaxado

SP subproblema

UB limite superior

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Descrição do Problema e formulações</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Métodos exatos de resolução</b>	<b>24</b>
4.1	B&C-OA . . . . .	24
4.2	B&C-GBD . . . . .	26
4.3	OABD . . . . .	28
4.3.1	Hibridização da técnica de aproximação externa com o método de decomposição de Benders . . . . .	28
4.3.2	O método de decomposição de Benders . . . . .	29
4.3.3	Resolvendo o subproblema dual de Benders (DSP) . . . . .	32
4.4	A estrutura das abordagens propostas . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>35</b>
5.1	Experimentos numéricos . . . . .	35
5.2	Resultados e discussões . . . . .	36
5.2.1	Instâncias de médio porte . . . . .	36
5.2.2	Instâncias de grande porte . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>43</b>
6.1	Considerações finais . . . . .	43
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	44
6.2.1	Proposta de decomposição generalizada de Benders . . . . .	44
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os problemas de localização de instalações (PLI) têm sido o foco de estudos constantes há mais de um século devido à sua alta aplicabilidade ([Drezner, 2009](#)). No entanto, muitos desses estudos abordam a versão mais comum do problema, que consiste em atribuir o caminho mais curto ao cliente, sem considerar outras variáveis que podem compor restrições reais. Por isso, novas vertentes do problema foram surgindo na literatura devido à necessidade de aproximá-las do mundo real, e uma delas é o problema de localização de instalações competitivas (CFL).

[Hotelling \(1929\)](#) é considerado o pioneiro ao introduzir a abordagem de disputa espacial entre duas empresas que competem para maximizar a receita através da melhor localização ao longo de um segmento. Desde então, fatores ligados ao cenário competitivo passaram a ser mais abordados. Uma vez que a concorrência por espaço no mercado é inserida no modelo, o processo de tomada de decisão do cliente também precisa ser investigado e incorporado. Por isso, alguns estudos se tornaram referência justamente por abordar esses aspectos relacionados ao comportamento do indivíduo.

[Luce \(1959\)](#), descreveu como representar as preferências individuais matematicamente em modelos de escolha. A axioma de Luce, sugere que a probabilidade de se escolher uma alternativa em detrimento de outra é diretamente proporcional às preferências do indivíduo por essa alternativa em relação às demais disponíveis.

Já [Huff \(1964\)](#) foi o primeiro a considerar o comportamento paternalista dos clientes em um modelo baseado em probabilidades. Seu método ficou conhecido como a regra baseada na gravidade de Huff, em que a função de utilidade do cliente em relação a uma instalação é diretamente proporcional às características da instalação e inversamente proporcional a uma função da distância entre a instalação e o cliente.

Essas regras se tornaram essenciais em modelos que restringem a escolha do cliente. Geralmente, em CFLs, cada cliente tem um conjunto de instalações para escolher e esse conjunto pode ou não ser limitado. Em modelos que não limitam o tamanho do conjunto todas as alternativas serão consideradas pelo cliente. Já em modelos que restringem o tamanho do conjunto de escolha, uma regra é aplicada para limitar o número de instalações

que ele pode escolher.

Recentemente, [Mishra et al. \(2023\)](#) conduziram uma revisão abrangente dos problemas CFLs até o ano de 2021, destacando suas diferenças-chave em relação a outros problemas de localização de instalações. Um dos problemas revisados por [Mishra et al. \(2023\)](#) é o desafiador problema de localização de instalações com a regra de escolha limitada.

Três regras de escolha são comumente encontradas na literatura para CFLs: regra de escolha binária, regra de escolha proporcional e regra de escolha parcialmente binária. Em resumo, a regra binária impõe a restrição de que uma demanda de cliente seja atendida integralmente pela instalação de maior utilidade. A regra de escolha proporcional permite que os clientes dividam seu poder de compra entre todas as instalações proporcionalmente, com base em sua utilidade. Já a regra parcialmente binária considera tanto a instalação de maior utilidade no conjunto de instalações abertas quanto a opção externa. Em seguida, a demanda é dividida entre essas duas opções proporcionalmente à sua utilidade.

Neste estudo, serão investigados modelos de localização de instalações competitivas com regra de escolha limitada. Para isso, presumimos que o cliente, ao ter à sua disposição um conjunto de instalações abertas, forma um conjunto de consideração. Esse conjunto é composto pelas instalações abertas que o cliente está disposto a frequentar. A partir da formação desse subconjunto, ele distribui seu poder de compra entre esse conjunto de consideração e uma opção externa (concorrente) seguindo a regra parcialmente binária.

Assim sendo, tendo esses conceitos definidos, nosso objetivo é implementar um método híbrido eficiente combinando a técnica de aproximação externa (OA) ([Duran e Grossmann, 1986](#)) com cortes de Benders ([Benders, 1962](#)) para o problema de localização de instalações com uma regra de escolha limitada. O problema consiste em localizar um conjunto de instalações para atender a um conjunto de clientes, de forma a maximizar o lucro a partir das receitas potencialmente capturadas e ao menor custo fixo envolvido.

[Lin e Tian \(2021a\)](#) propuseram um algoritmo de *branch-and-cut* baseado no método de decomposição generalizada de Benders (B&C-GBD) para resolver o problema, superando uma abordagem de OA e um solucionador exato de ponta que abordava uma formulação cônica para o problema, tanto em termos de tempo de execução computacional quanto de número de instâncias resolvidas até a otimalidade.

Aqui, aplicamos o OA, resolvendo o problema mestre de aproximação externa (OAMP) com um algoritmo de decomposição de Benders. Dada a estrutura de decomposição do problema, podemos separar um corte de viabilidade de Benders por cliente por vez. No entanto, em vez de adicioná-los todos de uma vez ao OAMP, agrupamos esses cortes seguindo uma clusterização dos clientes em pequenos grupos. Isso evita sobrecarregar o OAMP em cada nó de *branch-and-bound* (B&B), mantendo alguns dos benefícios de adicionar vários cortes por nó de B&B. Para acelerar ainda mais o processo de solução, separamos os cortes de viabilidade de Benders por inspeção. Todas as abordagens são melhores descritas no Capítulo 4.

Os experimentos e bem como os resultados obtidos mostram que a estratégia proposta é muito competitiva quando comparada ao B&C-GBD, sendo, portanto, uma alternativa viável para solução deste tipo de problema.

As principais contribuições deste estudo são destacadas abaixo:

- propomos um método híbrido que combina a **técnica de aproximação externa** com o **método de decomposição de Benders**, incluindo a separação analítica de cortes de viabilidade de Benders. Esse método é capaz de resolver problemas de grande porte de forma mais rápida do que as abordagens existentes na literatura;
- método analítico para separar cortes de viabilidade e otimalidade de Benders de forma mais eficiente do que o uso do método Simplex;
- método capaz de separar cortes a partir de soluções fracionárias, preenchendo uma lacuna na literatura.

Este trabalho segue então organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica . O Capítulo 3 descreve detalhadamente o problema original de localização de instalações competitivas. Enquanto, o Capítulo 4 detalha os modelos em estudo. O capítulo 5 explica como o experimento foi realizado e os resultados encontrados. Finalizando, o Capítulo 6 conclui este estudo e apresenta planos para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Revisão da Literatura

O problema de localização de instalações competitivas é vastamente estudado e abordado na literatura. [Seyhan et al. \(2018\)](#) define um CFL como qualquer problema de localização de instalações em que existe competição espacial entre duas ou mais empresas, e as decisões dessas empresas são interdependentes e afetam a participação de mercado umas das outras.

Esses problemas começaram a ser abordados em um trabalho pioneiro de [Hotelling \(1929\)](#), que descreve a competição entre duas empresas que visam maximizar seus lucros considerando a localização de um ponto ao longo de um segmento localizado a distâncias  $a$  e  $b$  das extremidades, respectivamente. A demanda foi assumida por uma distribuição uniforme ao longo do segmento, e considerou-se que os clientes frequentavam a instalação mais próxima. Após essa pesquisa, o tema começou a ser extensamente discutido.

Com o passar do tempo, novos estudos contribuíram para o surgimento de novas abordagens e métodos como alternativas para resolver CFLs. [Lin e Tian \(2021a\)](#) em seu estudo categorizam esses métodos em duas classes distintas: métodos exatos, que são comumente resolvidos reformulando o modelo original em um programa linear inteiro misto (MILP) e depois resolvendo-o usando solucionadores; e heurísticas, muitas das quais são baseadas em meta-heurísticas ou heurísticas que aplicam o teorema de Lagrange. Abaixo, um resumo de vários estudos que aplicam métodos exatos relacionados a CFLs é apresentado por ser a categoria de foco nesta pesquisa.

*Abordagens exatas* Inúmeros estudos aplicaram métodos exatos para resolver CFLs, e entre eles, podemos destacar os seguintes de forma resumida: [Drezner e Drezner \(2004\)](#) propôs um algoritmo eficiente de *branch-and-bound* para resolver o modelo baseado na gravidade de [Huff \(1964\)](#); [Aboolian et al. \(2009\)](#) decompôs o CFL em dois subproblemas e utilizou o CPLEX para resolvê-los; [Fernández et al. \(2014\)](#) empregou um método de *branch-and-bound* para resolver vários CFLs de tamanho médio; [Gentile et al. \(2018\)](#) usou uma abordagem de *branch-and-cut* (B&C) para otimizar um CFL em que a competição foi modelada usando o jogo de Stackelberg. Indica-se ao leitor interessado que revise os trabalhos acima mencionados para maiores entendimentos. Outros estudos foram mais detalhados a seguir.

Para abordar um problema de captura máxima CFL com utilidades aleatórias, [Ljubić e Moreno \(2018\)](#) consideraram dois modelos de programação linear inteiro misto esparsos com um número exponencial de restrições. O primeiro modelo depende de uma relaxação da função objetivo (FO) do OA, enquanto o segundo explora a submodularidade da FO. Eles avaliaram quando cortes de aproximação externa são incorporados na estrutura de *branch-and-cut* (B&C-OA) em comparação com métodos exatos de ponta. Os resultados obtidos demonstraram que a metodologia proposta superou significativamente todas as abordagens anteriormente estudadas na literatura.

No seu estudo, [Mai e Lodi \(2020\)](#) implementaram uma versão aprimorada do algoritmo multi-corte OA, que permite a criação de um conjunto de funções lineares por partes para uma aproximação externa das diferentes partes da função objetivo, por meio do agrupamento estratégico de clientes. O método opera em um estilo de plano de corte, resolvendo um MILP em cada iteração, mas permite gerar vários cortes por iteração, em vez de apenas um, como no *framework* original. Os experimentos computacionais conduzidos no estudo demonstraram que a abordagem proposta foi mais eficiente e robusta em comparação com o estado da arte.

Em [Lin e Tian \(2020\)](#), abordagens exatas para CFLs com atratividade discreta foram apresentadas. Além do método B&C-OA, demonstrou-se como esses problemas podem ser facilmente formulados como um programa quadrático cônico inteiro misto (MICQP) e resolvidos usando solucionadores cônicos de segunda ordem. Os resultados destacaram que a abordagem MICQP supera as outras em termos de tempo computacional.

[Lin e Tian \(2021b\)](#) abordaram um CFL em um mercado com demanda elástica, onde um novo entrante concorre por demanda com um concorrente, e as escolhas dos clientes são geralmente explicadas probabilisticamente. Eles se concentraram no modelo de um único nível com a regra da gravidade e consideraram a elasticidade da demanda das zonas de consumo. Como solução para o problema, eles propuseram um algoritmo de decomposição de Benders que mantém apenas um pequeno subconjunto das variáveis de decisão (decisões de localização) e projeta as variáveis contínuas de alta dimensionalidade (decisões de atratividade). Os resultados sugeriram que o método supera abordagens de referência em grande medida.

Em outro estudo, [Lin e Tian \(2021a\)](#) propuseram uma abordagem de B&C com base no esquema de decomposição generalizada de Benders para CFLs. A ideia central é manter a decisão de localização no problema mestre e projetar a variável contínua usada para modelar o conjunto de consideração do cliente. Portanto, cortes de viabilidade e otimalidade de Benders são gerados dinamicamente dentro da estrutura de B&C. Com a ajuda desses cortes, o B&C-GBD só precisa operar dentro do espaço de decisão projetado. Experimentos indicaram a superioridade do método proposto em relação às abordagens B&C-OA e MICQP.

Como focaremos aqui em uma abordagem exata para o problema, limitamos nossa

revisão a trabalhos relacionados com métodos exatos. No entanto, o leitor interessado pode consultar os trabalhos de [Drezner et al. \(2007\)](#), [Aboolian et al. \(2007\)](#), [Ashtiani et al. \(2013\)](#), [Ivanov e Morozova \(2016\)](#), [Seyhan et al. \(2018\)](#) e [Levanova e Gnusarev \(2018\)](#) para métodos heurísticos de resolução.

## Capítulo 3

# Descrição do Problema e formulações

Iremos adotar neste capítulo as mesmas notações e definições de [Lin e Tian \(2021a\)](#). Sejam  $I$  e  $J$  os conjuntos de zonas de clientes e instalações candidatas, respectivamente. Considerando um mercado em que já existe a presença de um concorrente, cada instalação  $j \in J$  possui uma atratividade ou utilidade intrínseca não negativa  $u_{ij} \geq 0$  para a zona de cliente  $i \in I$ .

A atratividade ou utilidade do concorrente para a zona de cliente  $i \in I$  é dada por  $u_{i0} \geq 0$ . Isso representa a opção de não utilizar o serviço do novo participante ou de procurar serviço em outro lugar. Cada instalação  $j \in J$  possui um custo de instalação  $f_j \geq 0$ , enquanto cada zona de cliente  $i \in I$  possui um poder de compra  $b_i$ . A escolha de instalações abertas para o conjunto de consideração de cada zona de cliente  $i \in I$  é limitada a no máximo  $\gamma_i$ . A Tabela 3.1 lista as principais notações adotadas.

Tabela 3.1: Um resumo da notação adotada

---

### Conjuntos

$I$  : conjunto de zonas de consumo de clientes.  $|I| = m$ .

$J$  : conjunto de instalações candidatas.  $|J| = n$ .

### Parâmetros

$b_i$  : poder de compra na zona de cliente  $i$ ,  $\forall i \in I$ .

$f_j$  : custo fixo de abrir a instalação  $j$ ,  $\forall j \in J$ .

$\gamma_i$  : número máximo de instalações no conjunto de consideração para a zona de cliente  $i$ ,  $\forall i \in I$ .

$A_j$  : atratividade da instalação  $j$ ,  $\forall j \in J$ .

$d_{ij}$  : distância entre a instalação  $j$  e a zona de consumo do cliente  $i$ ,  $\forall i \in I, j \in J$ .

$u_{ij}$  : utilidade da instalação  $j$  ou da opção externa para a zona de cliente  $i$ ,  $\forall i \in I, j \in J \cup \{0\}$ .

### Variáveis de Decisão

$x_j$  : binário. Se a instalação  $j$  estiver aberta,  $x_j$  é igual a 1; caso contrário, é 0,  $\forall j \in J$ .

$y_{ij}$  : binário. Se a instalação  $j$  estiver no conjunto de consideração do cliente  $i$ ,  $y_{ij}$  é igual a 1; caso contrário, é 0,  $\forall i \in I, j \in J$ .

---

Para modelar o conjunto de consideração, devemos primeiro introduzir a variável de decisão  $y_{ij} \in \{0, 1\}$ , que é igual a 1 se a instalação  $j \in J$  pertence ao conjunto de

consideração da zona de cliente  $i \in I$ ; 0, caso contrário. Assume-se que a zona de cliente  $i \in I$  divide seu poder de compra entre as instalações no conjunto de consideração e uma externa de acordo com a seguinte regra de probabilidade:

$$P_{ij}(y) = \frac{u_{ij}y_{ij}}{\sum_{j \in J} u_{ij}y_{ij} + u_{i0}} = \frac{\pi_{ij}y_{ij}}{\sum_{j \in J} \pi_{ij}y_{ij} + 1}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (3.1)$$

onde  $\pi_{ij} = \frac{u_{ij}}{u_{i0}}$ . Além disso, a instalação  $j \in J$  só pode estar no conjunto de consideração de  $i \in I$ , ou seja,  $y_{ij} = 1$ , se estiver instalada ou se a variável de decisão de abertura da instalação  $x_j \in \{0, 1\}$  for igual a 1; caso contrário,  $y_{ij} = 0$ . Quando a instalação  $j \in J$  não está instalada, temos  $x_j = 0$ . O problema pode então ser formulado como o seguinte programa não linear inteiro de dois níveis:

$$\text{BL} \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\substack{x \in \{0, 1\}^{|J|} \\ y \in \{0, 1\}^{|I| \times |J|}}} \sum_{i \in I} b_i \sum_{j \in J} P_{ij}(y_i) - \sum_{j \in J} f_j x_j & (3.2) \\ \text{s.t.: } y_i = \arg \max_{y \in \{0, 1\}^{|I| \times |J|}} \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} & \forall i \in I \quad (3.3) \\ \text{s.t.: } \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i & \forall i \in I \quad (3.4) \\ y_{ij} \leq x_j & \forall j \in J \quad (3.5) \end{array} \right.$$

A função objetivo (3.2) maximiza o lucro esperado dado pela receita total potencial capturada menos os custos de abertura das instalações. O problema interno (3.3)-(3.4) retorna o vetor  $y_i$  com a seleção de até  $\gamma_i$  instalações abertas, imposto pelas restrições (3.4), mas contendo as maiores utilidades, garantidas pela função objetivo interna (3.3). Finalmente, as restrições (3.5) garantem que uma instalação  $j \in J$  só pode estar no conjunto de consideração da zona de cliente  $i \in I$  se  $j$  estiver instalada.

Embora BL seja um problema bilinear, pode ser trivialmente reformulado como um problema de um único nível. Observe que, para um  $\bar{x}$  viável fixo, os clientes escolhem as instalações abertas que possuem as maiores utilidades para formar seu conjunto de consideração. Essas escolhas naturalmente levam aos lucros mais altos, uma vez que a função objetivo (3.2) é crescente e côncava para  $y$ . Portanto, isso nos permite reescrever BL como um programa de um único nível. Além disso, em vez de maximizar o lucro esperado, pode-se usar uma função objetivo equivalente que é a minimização do poder de compra não capturado e dos custos fixos de instalação, ou:

$$\begin{cases}
 \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{i \in I} \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + \sum_{j \in J} f_j x_j & (3.6) \\
 \text{s.t.:} \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i & \forall i \in I & (3.7) \\
 y_{ij} \leq x_j & \forall j \in J & (3.8) \\
 0 \leq y_{ij} \leq 1 & \forall j \in J & (3.9)
 \end{cases}$$

sendo a formulação M1 equivalente ao modelo BL, mas é um problema de minimização de um único nível. Observe que [Lin e Tian \(2021a\)](#) relaxaram a restrição de integralidade de  $y_{ij}$ , veja a restrição (3.9), uma vez que as restrições de conjunto de consideração ou cardinalidade (3.7) e a monotonicidade da função objetivo em  $y$  permitem isso.

Uma vez que a formulação do problema tenha sido delineada, um exemplo prático do problema de localização de instalações competitivas pode oferecer uma compreensão mais aprofundada. A figura 3.1 apresenta uma solução para um CFL, onde são consideradas 10 zonas de consumo de clientes  $i$ , e 10 instalações entrantes candidatas  $j$ . Adicionalmente, observa-se a restrição de que cada zona de cliente  $i$  pode ter no máximo 2,  $\gamma = 2$ , instalações candidatas por conjunto de consideração  $y_{ij}$ .

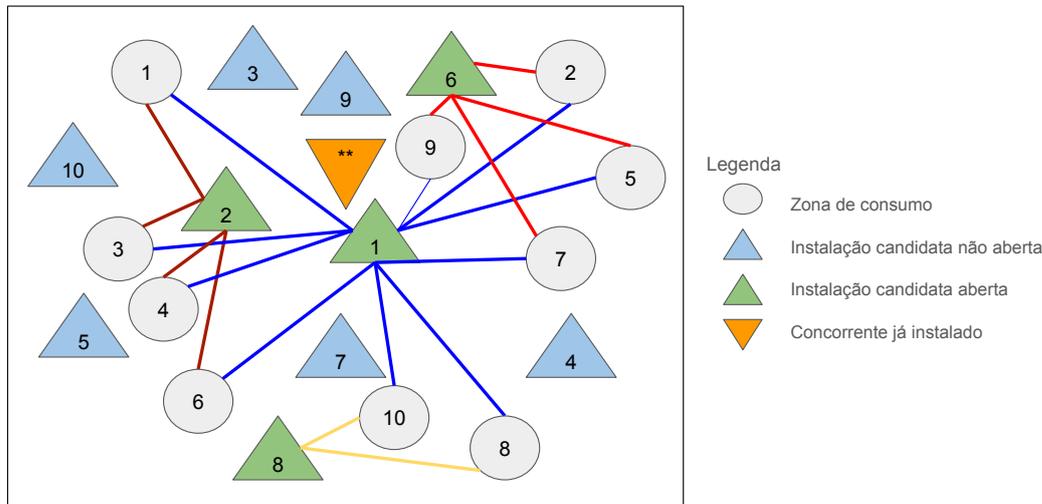


Figura 3.1: Exemplo de um CFL.

A solução apresentada indica que apenas 4 das 10 instalações candidatas  $x_j$  estão ativas na função objetivo, sendo elas: 1, 2, 6 e 8. Dessa forma, cada zona de consumo dos clientes pode ter em seu conjunto de consideração apenas 2 delas. Assim, a instalação candidata 1 está presente em todos os conjuntos de consideração. A instalação 2 está presente nos conjuntos de consideração das zonas de clientes 1, 3, 4 e 6. A instalação 6 está presente nos conjuntos de consideração das zonas de clientes 2, 5, 7 e 9. Por fim,

a instalação 8 está presente nos conjuntos de consideração das zonas de clientes 8 e 10. Além disso, é importante considerar a presença do concorrente.

Uma vez que tenha sido formado o conjunto de consideração de cada zona de consumo do cliente  $i$ , o poder de compra  $b_i$  é então dividido entre a opção de maior utilidade desse conjunto e a opção externa, de forma proporcional. Além disso, deve-se considerar o custo de abertura das instalações ativas na função objetivo.

## Capítulo 4

# Métodos exatos de resolução

Neste capítulo, abordamos métodos exatos para resolver o problema apresentado em (3.6)-(3.9). Para facilitar a fluidez do estudo, a tabela 4.1 apresenta as nomenclaturas que serão utilizadas para abreviar os nomes dos métodos aplicados.

Tabela 4.1: Nomenclaturas para os métodos exatos abordados.

Nomenclatura	Método
B&C-OA	<i>Branch-and-cut</i> com cortes OA abordado em Lin e Tian (2021a)
B&C-GBD	<i>Branch-and-cut</i> baseado na decomposição generalizada de Benders de Lin e Tian (2021a)
OABD	Abordagem de decomposição de Benders com técnica de OA proposta

### 4.1 B&C-OA

O método B&C-OA, abordado por Lin e Tian (2021a), foi inicialmente aplicado por Ljubić e Moreno (2018) em problemas de localização com captura máxima e utilidades aleatórias. Essa abordagem explora uma única árvore *branch-and-cut* e utiliza cortes de aproximação externa gerados dinamicamente para aproximar o envelope convexo.

Definindo a função  $F_i(y)$  como

$$F_i(y) = \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1}, \quad \forall i \in I \quad (4.1)$$

é possível reescrever (3.6)-(3.9) na forma de epígrafe de  $F_i$

$$\min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{i \in I} \beta_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \quad (4.2)$$

$$\text{s.a.: } \beta_i \geq F_i(y) \quad \forall i \in I \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i \quad \forall i \in I \quad (4.4)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall j \in J \quad (4.5)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.6)$$

Como  $F_i(y)$  é uma função convexa, ao fixar qualquer ponto  $\bar{y}$ , um limite inferior pode ser obtido pela aproximação linear de primeira ordem em  $\bar{y}$ . Isso não exclui nenhuma região factível em (4.2)-(4.6) e a restrição a seguir passa a ser válida

$$\beta_i \geq \sum_{j \in J} \frac{\partial F_i(\bar{y})}{\partial y_{ij}} (y_{ij} - \bar{y}_{ij}) + F_i(\bar{y}), \quad \forall i \in I \quad (4.7)$$

onde  $\frac{\partial F_i(\bar{y})}{\partial y_{ij}}$  é a derivada parcial de  $F_i$  em relação a  $y_{ij}$  e avaliada em  $\bar{y}$ . Isso é dado por

$$\frac{\partial F_i(\bar{y})}{\partial y_{ij}} = \frac{-b_i \pi_{ij}}{(\sum_{j \in J} \pi_{ij} \bar{y}_{ij} + 1)^2} \quad (4.8)$$

A restrição (4.7) gera os cortes OA para cada zona de cliente  $i$ , o que nos permite remodelar (4.2)-(4.6) usando uma formulação MILP

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{i \in I} \beta_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ & \text{s.a. : } \beta_i \geq \sum_{j \in J} \frac{\partial F_i(\bar{y})}{\partial y_{ij}} (y_{ij} - \bar{y}_{ij}) + F_i(\bar{y}) \quad \forall i \in I, \bar{y} \in T \\ & \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i \quad \forall i \in I, j \in J \\ & y_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in I, j \in J \\ & y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo  $T$  o conjunto de pontos  $y$  registrados encontrados durante o processo B&C. São esses pontos que definem os cortes OA que apontam a direção para otimização.

## 4.2 B&C-GBD

A abordagem B&C-GBD, proposta por [Lin e Tian \(2021a\)](#), baseia-se na ideia de manter um pequeno subconjunto de variáveis de decisão no problema mestre e projetar a variável contínua complicada seguindo o esquema de decomposição de Benders. No caso de um problema CFL, quando  $x$  é fixado em um ponto factível, (3.6) se reduz a um problema de otimização trivial com diferença dual zero, e a solução ótima para  $y$  acaba sendo um valor inteiro.

Considerando essa propriedade, o método utiliza uma abordagem de decomposição generalizada de Benders que projeta as variáveis  $y$  e as substitui por cortes generalizados de Benders. Para alcançar isso, (3.6) é decomposta, mantendo a variável inteira  $x$  no problema mestre (PM), enquanto os subproblemas (SP) lidam com a não linearidade associada a  $y$ . Assim, o PM no espaço  $x$  é representado por

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \quad & \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ \text{s.a. : } \quad & w_i \geq \phi_i(x) \quad \forall i \in I \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde a função  $\phi_i(x)$  é obtida resolvendo um subproblema convexo, ou seja,  $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = \min_y \quad & \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} \\ \text{s.a. : } \quad & y_{ij} \leq x_j \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i \\ & y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \end{aligned} \tag{4.11}$$

Com base nessa formulação, algumas observações podem ser feitas. Para qualquer solução factível  $x$ , o SP se torna trivial de resolver porque o objetivo pode ser substituído por  $\max \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij}$ . Desta forma, ele pode ser resolvido simplesmente classificando as localizações de acordo com o valor de  $\pi$ . Além disso,  $\phi_i(x)$  é uma função convexa em relação a  $x$ , tornando o PM em um programa convexo inteiro misto. Como tal, ele pode ser tratado por meio da abordagem de *branch-and-cut* MILP, onde  $\phi_i(x)$  é aproximado por cortes generalizados de Benders.

Assim, para uma solução  $\bar{x}$  qualquer, a função convexa  $\phi_i(x)$  pode ser aproximada pelo seu subestimador linear em  $\bar{x}$ . O seguinte corte linear é, portanto, globalmente válido

$$w_i \geq \phi_i(x) \geq \phi_i(\bar{x}) + s_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall i \in I \quad (4.12)$$

onde  $s_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$  é o subgradiente de  $\phi_i(x)$  em  $\bar{x}$ . Como a variável  $x$  está presente somente na primeira restrição do SP, aplica-se a dualidade Lagrangiana e assume-se as qualificações de restrições válidas. Um subgradiente pode então ser obtido da seguinte forma

$$s_{ij}(\bar{x}) = -\bar{\lambda}_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (4.13)$$

onde  $\bar{\lambda}_{ij}$  é a variável dual ótima (não negativa) associada à restrição  $y_{ij} \leq x_j$ , produzindo uma versão desagregada dos cortes generalizados de Benders em  $\bar{x}$

$$w_i \geq \phi_i(\bar{x}) - \sum_{j \in J} \bar{\lambda}_{ij}(x_j - \bar{x}_j), \quad \forall i \in I \quad (4.14)$$

É possível ainda adicionar um corte de otimalidade à relaxação do problema linear usando a função de *lazy-cut callback* do *solver*

$$\sum_{i \in I} w_i \geq \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\bar{x}) \right) \left( 1 - \sum_{j \in J; \bar{x}_j = 0} x_j \right) \quad (4.15)$$

o que garante que um poder de compra não satisfeito abaixo de  $\sum_{i \in I} \phi_i(\bar{x})$  só pode ser alcançado pela abertura de uma ou mais instalações além da solução atual de  $\bar{x}$ . Assim, (3.6) pode ser modelado pelo seguinte MILP

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \quad & \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ \text{s.a. :} \quad & w_i \geq \phi_i(\bar{x}) - \sum_{j \in J} \bar{\lambda}_{ij}(x_j - \bar{x}_j), \quad \forall i \in I, \bar{x} \in T \\ & \sum_{i \in I} w_i \geq \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\bar{x}) \right) \left( 1 - \sum_{j \in J; \bar{x}_j = 0} x_j \right), \quad \forall \bar{x} \in T \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde o conjunto  $T$  consiste nos pontos inteiros  $x$  encontrados após a resolução de certas relaxações da programação linear (LP) da árvore de busca. Esses pontos são aqueles que definem os cortes de Benders e cortes de otimalidade que eliminam soluções não ótimas.

## 4.3 OABD

### 4.3.1 Hibridização da técnica de aproximação externa com o método de decomposição de Benders

Duran e Grossmann (1986) desenvolveram a técnica de aproximação externa para tratar problemas de programação não linear de inteiros misto (MINLP). O método OA resolve um MINLP alternando entre a solução de um MILP e a geração de cortes OA. O MILP inclui as variáveis de decisão originais e suas respectivas restrições lineares, junto com os cortes OA, que são adicionados cumulativamente ao MILP em cada iteração. Os cortes OA são aproximações lineares das não linearidades avaliadas na solução do MILP em cada iteração. À medida que o método avança, uma aproximação cada vez melhor do problema original MINLP é alcançada, juntamente com novos valores para as variáveis de decisão e limites duais mais precisos. O método OA itera até convergir para uma solução ótima, caso exista.

Geralmente, o método OA demonstra eficácia em instâncias de pequeno e médio porte. No entanto, a sua aplicabilidade pode ser limitada para instâncias de grande porte, devido ao custo computacional proibitivo associado ao seu MILP. Para contornar essa limitação, propomos abordar o problema mestre OA por meio de um algoritmo de decomposição de Benders (Benders, 1962). Antes de apresentarmos nosso método desenvolvido, explicamos inicialmente a aplicação da técnica OA ao CFL.

Para aplicar o método OA à formulação M1, introduzimos inicialmente uma variável fictícia  $z_i \geq 0$ , para cada  $i \in I$ , a fim de substituir o denominador na função objetivo (3.6), ou seja, definimos  $z_i = \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij}$ . Em seguida, estabelecemos  $\phi_i(z_i) = \frac{b_i}{z_i + 1}$ , permitindo-nos reescrever M1 da seguinte forma

$$\text{M2} \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{i \in I} \phi_i(z_i) + \sum_{j \in J} f_j x_j & (4.17) \\ \text{s.a.: } (x, y) \in \Omega & (4.18) \\ z_i = \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} & \forall j \in J \quad (4.19) \\ z_i \geq 0 & \forall i \in I \quad (4.20) \end{array} \right.$$

onde  $\Omega = (x, y) : (3.7) - (3.9)$ . É importante observar que  $\phi_i(\bar{z}_i)$  é uma função suave, diferenciável e convexa para um valor viável  $\bar{z}_i \in \mathcal{Z}$ , sendo  $\mathcal{Z}$  o conjunto de valores viáveis para  $z$ . Assim, podemos empregar aproximações de primeira ordem em  $\bar{z} \in \mathcal{Z}$  ou

$$\text{OAMP} \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{i \in I} \eta_i + \sum_{j \in J} f_j x_j & \\ \text{s.a.: } (x, y) \in \Omega & \\ z_i = \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} & \forall j \in J \\ z_i \geq 0 & \forall i \in I \\ \eta_i \geq \phi_i(\bar{z}_i) + \frac{\partial \phi_i(\bar{z}_i)}{\partial z_i} (z_i - \bar{z}_i) & \forall i \in I, \bar{z}_i \in \mathcal{Z} \\ \eta_i \geq 0 & \forall i \in I \end{array} \right. \quad (4.21)$$

onde (4.21) são os cortes OA derivados das soluções do conjunto  $\mathcal{Z}$ , e  $\frac{\partial \phi_i(\bar{z}_i)}{\partial z_i} = \frac{-b_i}{\bar{z}_i^2}$ .

O conjunto  $\mathcal{Z}$  pode ser construído iterativamente a partir das soluções encontradas pelo OAMP durante cada ciclo do método ou durante um procedimento de B&C utilizado para resolver o OAMP. A partir de cada vetor de solução registrado  $\bar{z}$ , um corte OA é extraído, o qual é adicionado ao OAMP se estiver violado. Esses cortes OA aproximam eficientemente a função  $\phi_i(z_i)$ . Importante ressaltar que o método OA requer apenas um número finito de cortes OA para convergir para uma solução ótima, caso exista (Duran e Grossmann, 1986). Além disso, vale observar que todas as restrições de M1 são lineares, tornando desnecessária a aproximação externa de sua região viável. Um exemplo deste ciclo de cortes é fornecido no algoritmo 1.

**Algoritmo 1:** Um ciclo de corte para um algoritmo de aproximação externa

```

1 [1]  $UB, LB \leftarrow \infty, -\infty$ 
2  $Z \leftarrow \{\}$ 
3 while  $UB - LB \geq 0$  do
4    $(LB, \bar{z}, \bar{x}, \bar{y}) \leftarrow \text{OAMP}(Z)$ 
5    $UB \leftarrow \min(UB, \sum_{j \in J} f_j \bar{x}_j + \sum_{i \in I} \frac{b_i}{\bar{z}_i + 1})$ 
6    $Z \leftarrow Z \cup \{\bar{z}\}$ 
7 end

```

### 4.3.2 O método de decomposição de Benders

O OAMP é um MILP que cresce rapidamente com o número de zonas de clientes, devido às variáveis  $y$ , cujo tamanho pode dificultar a solução do OAMP para instâncias grandes. No entanto, essa dificuldade pode ser mitigada ao projetar as variáveis  $y$ , desde que algumas manipulações algébricas sejam realizadas. A proposta consiste em resolver o OAMP por meio de um algoritmo de decomposição de Benders.

O método de [Benders \(1962\)](#) divide um MILP em dois problemas mais gerenciáveis computacionalmente: um problema mestre e um conjunto de subproblemas. O problema mestre contém as variáveis inteiras originais e suas respectivas restrições, junto com os cortes de Benders. Esses cortes de Benders são restrições que substituem as variáveis projetadas, sendo extraídos conforme necessário a partir da solução do subproblema. Por sua vez, o subproblema é o dual do programa linear obtido após a fixação temporária das variáveis inteiras pelo PM. O método opera iterativamente, alternando entre as soluções do PM e do subproblema implícito. A cada iteração, um corte de Benders, separado da solução do subproblema implícito, é adicionado ao PM.

Os cortes de Benders podem ser de viabilidade ou de otimalidade. Os cortes de viabilidade eliminam soluções que seriam inviáveis para o problema original, enquanto os cortes de otimalidade contribuem para a melhoria do limite dual fornecido pelo PM. Um limite primal é prontamente disponível quando combinamos as soluções do PM e dos subproblemas. À medida que adicionamos cortes de Benders ao PM, o limite dual é aprimorado até convergir em um número finito de iterações para uma solução ótima, se existir. Essa solução ótima é então considerada ótima para o MILP original. O método de decomposição de Benders tem sido aplicado com sucesso a uma ampla gama de problemas de otimização, conforme evidenciado pelas extensas pesquisas de [Rahmaniani et al. \(2017\)](#), [Real et al. \(2018\)](#), [Real et al. \(2021\)](#) e [Oliveira et al. \(2021\)](#) sobre o método.

Aqui, realizamos a projeção das variáveis  $y$ . Para valores fixos de  $x = \bar{x}$  e  $z = \bar{z}$ , obtemos o seguinte subproblema linear primal

$$\text{PSP} \left\{ \begin{array}{ll} \min 0 & \\ \text{s.a.:} & \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} = \bar{z}_i \quad \forall i \in I \\ & - \sum_{j \in J} y_{ij} \geq -\gamma_i \quad \forall i \in I \\ & - y_{ij} \geq -\bar{x}_j \quad \forall i \in I, j \in J \\ & - y_{ij} \geq -1 \quad \forall i \in I, j \in J \\ & y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \end{array} \right.$$

observe que o PSP é um programa linear com uma função objetivo fictícia, o que se configura, portanto, como um problema de viabilidade. Além disso, note que temos  $|I|$  subproblemas independentes, o que nos permite decompor o PSP em um subproblema para cada  $i \in I$ . Dessa forma, podemos expressar o seguinte subproblema dual para cada  $i \in I$ , fazendo uso das variáveis duais  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \geq 0$ ,  $v_{ij} \geq 0$ , e  $\sigma_{ij} \geq 0$

$$\text{DSP} \left\{ \begin{array}{l} \max \bar{z}_i \beta_i - \gamma_i u_i - \sum_{j \in J} \bar{x}_j v_{ij} - \sum_{j \in J} \sigma_{ij} \\ \text{s.a.: } \pi_{ij} \beta_i - u_i - v_{ij} - \sigma_{ij} \leq 0 \quad \forall j \in J, \beta_i \in \mathbb{R} \\ u_i \geq 0 \\ v_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J \\ \sigma_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

Com base na teoria da dualidade da programação linear, quando o PSP é inviável, o DSP é ilimitado. Podemos, portanto, obter uma direção extrema  $(\bar{\beta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\sigma})$  associada ao DSP ilimitado para identificar um corte de Benders violado, o qual precisa ser adicionado ao problema mestre. Esse corte de viabilidade de Benders pode ser expresso da seguinte forma

$$z_i \bar{\beta}_i - \sum_{j \in J} x_j \bar{v}_{ij} \leq \gamma_i \bar{u}_i + \sum_{j \in J} \bar{\sigma}_{ij}$$

registrando todas as direções extremas encontradas ao longo das iterações do método com a ajuda do conjunto  $H$ , podemos então formular o seguinte problema equivalente ao OAMP:

$$\text{OABDMP} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i \in I} \eta_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ \text{s.a.: } \bar{\beta}_i z_i - \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} x_j \leq \gamma_i \bar{u}_i + \sum_{j \in J} \bar{\sigma}_{ij} \quad \forall (\bar{\beta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\sigma}) \in H \quad (4.22) \\ \eta_i \geq \phi_i(\bar{z}_i) + \frac{\partial \phi_i(\bar{z}_i)}{\partial z_i} (z_i - \bar{z}_i) \quad \forall i \in I, \bar{z}_i \in \mathcal{Z} \quad (4.23) \\ z_i \geq 0 \quad \forall i \in I \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \\ \eta_i \geq 0 \quad \forall i \in I \end{array} \right.$$

OABDMP é reconhecido como o problema mestre de Benders e possui a mesma solução ótima do OAMP, caso exista. As restrições (4.22) representam os cortes de viabilidade de Benders, enquanto (4.23) referem-se aos cortes de aproximação externa. Note que esses cortes são independentes, podendo ser adicionados ao OABDMP em qualquer ordem, seja separadamente ou em conjunto. Além disso, eles podem ser derivados não apenas a partir de soluções inteiras viáveis do OABDMP, mas também de soluções fracionárias.

O algoritmo 2 ilustra como a abordagem de decomposição de Benders pode resolver o OAMP. O OABDMP retorna um limite inferior (LB) válido para o OAMP, que, por sua

vez, é um LB válido para o problema original. Para valores fixos de  $\bar{z}$  e  $\bar{x}$ , o subproblema dual de Benders é resolvido para cada  $i \in I$ . Sempre que o DSP retornar uma solução ótima não nula para um  $i \in I$ , um corte de viabilidade de Benders é separado para ser adicionado ao OABDMP. Se nenhum  $i$  retornar uma solução ótima não nula, então a solução proposta pelo OABDMP é viável para o OAMP, e um limite superior (UB) pode ser obtido. Em cada iteração, um corte de aproximação externa é separado até que o LB e o UB convirjam para uma solução ótima, se existir.

**Algoritmo 2:** Um laço de corte para um algoritmo de decomposição de Benders para resolver um problema mestre relaxado de aproximação externa

```

1  $UB, LB \leftarrow \infty, -\infty$ 
2  $Z \leftarrow \{\}$ 
3  $\mathcal{H}_i \leftarrow \{\} \quad \forall i \in I$ 
4 while  $UB - LB \geq 0$  do
5    $(LB, \bar{z}, \bar{x}) \leftarrow OABDMP(Z \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i)$ 
6    $\phi_T \leftarrow 0$ 
7   for  $i \in I$  do
8      $(\bar{\phi}_i, \bar{u}_i, \bar{\beta}_i, \bar{v}_i) \leftarrow DSP(\bar{z}, \bar{x})$ 
9      $\phi_T \leftarrow \phi_T + \bar{\phi}_i$ 
10    if  $\bar{\phi}_i > 0$  then
11       $\mathcal{H}_i \leftarrow \mathcal{H}_i \cup \{(\bar{u}_i, \bar{\beta}_i, \bar{v}_i)\}$ 
12    end
13  end
14  if  $\phi_T = 0$  then
15     $UB \leftarrow \min \left( UB, \sum_{j \in J} f_j \bar{x}_j + \sum_{i \in I} \frac{b_i}{\bar{z}_i + 1} \right)$ 
16  end
17   $Z \leftarrow Z \cup \{\bar{z}\}$ 
18 end

```

### 4.3.3 Resolvendo o subproblema dual de Benders (DSP)

A forma como separamos os cortes de viabilidade de Benders tem um impacto substancial no desempenho geral do método. Embora seja tentador utilizar um solver de programação linear para resolver os problemas DSP, isso muitas vezes reduz a convergência do método. Os *solvers* de programação linear frequentemente retornam direções extremas arbitrárias para problemas ilimitados. Como resultado, os cortes de Benders derivados dessas direções costumam ter eficácia limitada (Fischetti et al., 2010).

Para superar isso, a literatura (Brandenberg e Stursberg, 2021; Conforti e Wolsey, 2019; Ljubić et al., 2012; Fischetti et al., 2010) nos sugere o uso de subproblemas de Benders normalizados. A abordagem para a separação de cortes de Benders normalizados

envolve a resolução dos DSPs sobre um poliedro limitado, ao em vez de um cone ilimitado. Isso via de regra exige a introdução de restrições de normalização no subproblema dual de Benders, o que frequentemente demanda o uso de um solver de programação linear. Quando é possível separar cortes de Benders de viabilidade normalizados de maneira analítica, observa-se uma melhoria significativa no desempenho do método. Portanto, neste método proposto, sugerimos a adoção de uma estratégia simples de normalização que nos permite separar cortes de viabilidade de Benders resolvendo um problema contínuo da mochila.

Introduzimos a variável de erro  $e_i$  ao PSP, resultando no  $ePSP_i$ , um para cada  $i \in I$ :

$$ePSP_i = \min \left\{ e_i : \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + e_i = \bar{z}_i, \quad \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i, \quad y_{ij} \leq \bar{x}_j \quad \forall j \in J, \quad 0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \right\}$$

e após algumas manipulações algébricas e substituições, podemos transformar o  $ePSP_i$  no seguinte problema:

$$PSP_{\max_i} = \max \left\{ \sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} - \bar{z}_i : \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i, \quad y_{ij} \leq \bar{x}_j \quad \forall j \in J, \quad 0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \right\}$$

cuja forma dual é:

$$\begin{aligned} DSPK_i = \min \left\{ \gamma_i u_i + \sum_{j \in J} (\bar{x}_j v_{ij} + \sigma_{ij}) - \bar{z}_i : \right. \\ \left. u_i + v_{ij} + \sigma_{ij} \geq \pi_{ij}, \quad u_i \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J, \quad \sigma_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J \right\} \end{aligned}$$

observe que  $PSP_{\max_i}$  é um problema contínuo da mochila, uma vez que  $y_{ij} \in [0, 1]$ . Portanto, é facilmente resolvível: para cada  $i \in I$ , se  $\sum_{j \in J} \bar{x}_j < \gamma_i$ , então  $y_{ij} = \bar{x}_j$ , para cada  $j \in J$ ; caso contrário, forme um conjunto ordenado  $\mathcal{L}_i \subseteq J$  de índices ordenados não crescentemente por seus respectivos valores de  $\pi_{ij}$ . Em seguida, identifique o índice crítico  $j^*$  tal que:

$$\sum_{j \in \mathcal{L}_i: o(j) < o(j^*)} \bar{x}_j < \gamma_i \leq \sum_{j \in \mathcal{L}_i: o(j) \leq o(j^*)} \bar{x}_j$$

onde  $o(j)$  é uma função que retorna a posição do índice  $j$  na lista  $\mathcal{L}_i$ . O índice crítico  $j^*$  pode ser interpretado como o primeiro índice da lista ordenada  $\mathcal{L}_i$  cuja soma acumulativa, começando do primeiro índice da lista, coincide ou ultrapassa o limiar de  $\gamma_i$ . Defina o conjunto  $S$  como  $\{j \in \mathcal{L}_i : o(j) \leq o(j^*)\}$  e  $\bar{S} = S \setminus \{j^*\}$ . Então, uma vez que o índice

crítico  $j^*$  é identificado, a solução ótima para  $y_{ij}$  pode ser obtida definindo:  $y_{ij} = \bar{x}_j$  para todos  $j \in \bar{S}$ ,  $y_{ij^*} = \gamma_i - \sum_{j \in \bar{S}} \bar{x}_j$ , e  $y_{ij} = 0$  para  $j \in \mathcal{L}_i \setminus S$ .

Os valores duais ótimos  $(u^*, v^*, \sigma^*)$  também estão prontamente disponíveis. Lembre-se de que  $u_i \geq 0$ ,  $v_{ij} \geq 0$ , e  $\sigma_{ij} \geq 0$ , para  $j \in J$ , são as variáveis duais associadas às restrições de capacidade, ativação e limite superior geral, respectivamente. Se  $\sum_{j \in J} \bar{x}_j < \gamma_i$ , então o valor dual ótimo  $u_i^*$  é igual a 0. Para cada  $j \in J$ , se  $\bar{x}_j > 0$ , então  $v_{ij}^* = 0$  e  $\sigma_{ij}^* = \pi_{ij}$ ; caso contrário,  $v_{ij}^* = \pi_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^* = 0$ . Se  $\sum_{j \in J} \bar{x}_j \geq \gamma_i$ , então o valor dual ótimo para  $u_i^*$  é igual a  $\pi_{ij^*}$ , enquanto os valores duais ótimos para  $v_{ij}^*$ ,  $j \in J$ , são iguais a  $v_{ij}^* = \pi_{ij} - u_i^*$ , para todos  $j \in \bar{S}$ , e  $v_{ij}^* = 0$ , para todos  $j \in \mathcal{L}_i \setminus \bar{S}$ . Todos os resultados acima derivam da teoria da mochila (Martello e Toth, 1990), e a otimalidade das soluções primal e dual é assegurada pelas teorias de dualidade forte e folga complementar.

Uma vez calculados os valores ótimos de  $(u^*, v^*, \sigma^*)$ , retornamos ao problema DSP para obter o valor ótimo de  $\beta_i^*$ . Lembre-se das restrições do problema DSP,  $\pi_{ij} + \beta_i \leq u_i + v_{ij}$ , para todos  $j \in J$ . Portanto, o valor ótimo de  $\beta_i^*$  é dado por  $\min_{j \in J} \left\{ \frac{u_i + v_{ij}}{\pi_{ij}} \right\}$ .

## 4.4 A estrutura das abordagens propostas

Os métodos propostos seguiram a mesma abordagem de Lin e Tian (2021a) ao gerar dinamicamente os cortes dentro da estrutura *branch-and-cut*, trabalhando com a ideia de uma única árvore de busca. Após a geração dos cortes, eles são adicionados à árvore de *branch-and-cut* usando a função de *lazy-cut callback* em um *solver* MILP.

# Capítulo 5

## Resultados Computacionais

### 5.1 Experimentos numéricos

Para os experimentos numéricos, utilizamos *Python* como linguagem de programação e o Cplex como solver. As instâncias foram criadas seguindo o mesmo padrão abordado por [Lin e Tian \(2021a\)](#). Geramos dois conjuntos de instâncias de teste artificialmente, optando por trabalhar com instâncias de médio e grande porte, uma vez que essas demandam mais dos métodos em estudo. Além disso, escolhemos explorar essas instâncias, visto que no estudo de [Lin e Tian \(2021a\)](#), o método B&C-OA teve seu desempenho testado apenas nas instâncias de pequeno porte. Assim, o estudo se torna completo em termos de comparação de desempenho de todos os métodos citados.

Os experimentos foram executados com um critério de parada de  $\text{gap} \leq 10^{-6}$  ou um tempo de execução máximo de 7200 segundos.

*Instâncias de médio porte* Um total de 36 instâncias de médio porte foram testadas. Foram considerados dois tipos de  $\gamma$ : homogêneo e não homogêneo. No caso homogêneo, os valores foram selecionados no conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , enquanto no conjunto não homogêneo, os valores de  $\gamma_i$  foram distribuídos aleatoriamente dentro da faixa  $[1, 5]$  para cada  $i \in I$ .

Os demais parâmetros utilizados para gerar as instâncias estão descritos abaixo:

- Número de zonas de clientes  $|I| = \{800, 1000\}$ ;
- Número de instalações candidatas  $|J| = \{100, 150, 200\}$ ;
- Custo fixo de abertura de instalação  $f = \{2000\}$ ;
- As localizações das zonas de clientes e instalações foram geradas aleatoriamente dentro de uma distribuição uniforme bidimensional no intervalo  $[0, 1000]^2$ .
- A matriz de distâncias  $d$  foi calculada usando a distância euclidiana.
- O poder de compra  $b_i$  foi gerado a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[10, 1000]$ .

- Para a opção externa, adotou-se  $u_{i0} = 1/50^2$ .

*Instâncias de grande porte* As instâncias de grande porte foram geradas de forma semelhante às de médio porte, distinguindo-se pelo número de conjuntos de zonas de clientes e de instalações candidatas. Ao todo, 30 instâncias foram criadas, adotando os conjuntos  $|I| = \{1500, 2000, 3000\}$  e  $|J| = \{100, 200, 300\}$ .

Todos os testes computacionais foram realizados em uma estação de trabalho Dell Power Edge T620, equipada com uma CPU Intel(R) Xeon(R) E5-2609 @ 2.40GHz e 98 GB de RAM, rodando em um ambiente Linux de 64 bits. O Cplex foi configurado para operação sequencial, ou seja, processamento em apenas uma *thread*.

## 5.2 Resultados e discussões

### 5.2.1 Instâncias de médio porte

Os resultados encontrados nos experimentos computacionais evidenciam que o método OABD proposto é altamente competitivo em comparação com os abordados por [Lin e Tian \(2021a\)](#). Na tabela [5.1](#), são apresentados os gaps obtidos pelos modelos para as 36 instâncias de médio porte.

Os testes de desempenho indicam a superioridade do método OABD em 30 instâncias, perdendo apenas uma vez para o B&C-GBD e cinco vezes para a abordagem B&C-OA. Além disso, o OABD destaca-se como a única abordagem que atinge o ótimo, ocorrendo em uma instância específica. A análise da média geométrica dos gaps reforça essa performance do OABD, sendo quase seis vezes menor que a do B&C-OA e aproximadamente sete vezes menor que a do B&C-GBD. Isso indica que, de forma geral, os gaps encontrados pelo OABD são significativamente menores em comparação com os demais.

Consequentemente, em termos de tempo computacional, apenas o método OABD atingiu o gap esperado antes do tempo máximo estipulado em uma das instâncias, ao passo que nenhum dos demais métodos conseguiu, como evidenciado na tabela [5.2](#).

Para melhor ilustrar o desempenho dos métodos, a figura [5.1](#) apresenta os perfis de desempenho propostos por [Dolan e Moré \(2002\)](#). Ao analisar a figura, observa-se que, para valores de  $\tau$  variando de 1 a 1.5, o método OABD resolve 100% dos problemas, conforme indicado pela altura consistente de seu perfil de desempenho ao longo de todo o intervalo de  $\tau$ . Em contraste, os métodos apresentados por [Lin e Tian \(2021a\)](#), B&C-OA e B&C-GBD, inicialmente não atingem 100% de desempenho. No entanto, antes mesmo de alcançar o intervalo  $\tau \geq 1.4$ , ambos métodos atingem essa marca.

## 5.2.2 Instâncias de grande porte

As instâncias de grande porte também evidenciaram a superioridade do método OABD proposto. Na tabela 5.3, são apresentados os gaps encontrados durante os experimentos.

Tabela 5.1: Resultados para instâncias de médio porte.

$ I $	$ J $	$\gamma$	B&C-OA GAP (%)	B&C-GBD GAP (%)	OABD GAP (%)
800	100		0.77586	1.29148	<b>0.34535</b>
	150		2.87435	3.81162	<b>0.26533</b>
	200		5.13977	4.33479	<b>0.22761</b>
1000	100	1	<b>0.24879</b>	1.75943	1.04805
	150		2.21409	2.69361	<b>0.80228</b>
	200		7.28062	5.74332	<b>0.52172</b>
800	100		1.07643	1.37318	<b>0.68953</b>
	150		3.23266	4.70182	<b>2.15209</b>
	200		15.51011	6.45967	<b>4.02731</b>
1000	100	2	0.96158	1.64876	<b>0.66365</b>
	150		3.73281	3.09659	<b>0.15070</b>
	200		11.21744	8.24217	<b>0.84360</b>
800	100		1.18160	2.36758	<b>0.07570</b>
	150		6.86650	4.15291	<b>0.54479</b>
	200		6.63999	7.38141	<b>1.14979</b>
1000	100	3	1.00955	1.35565	<b>0.41240</b>
	150		4.51442	7.34500	<b>0.59460</b>
	200		14.27682	14.15623	<b>3.09134</b>
800	100		<b>1.41435</b>	3.17558	1.69806
	150		3.99937	5.12335	<b>0.95199</b>
	200		6.37387	5.23308	<b>2.96088</b>
1000	100	NH1	1.28142	1.44623	<b>0.35606</b>
	150		6.07895	4.82988	<b>2.00305</b>
	200		9.05890	<b>6.18901</b>	6.92442
800	100		<b>1.17188</b>	3.15673	1.67015
	150		4.38448	10.94750	<b>2.73344</b>
	200		4.80153	6.40124	<b>1.72730</b>
1000	100	NH2	0.55737	0.91505	<b>0.00000</b>
	150		6.58817	7.81849	<b>0.12024</b>
	200		14.38949	6.31847	<b>0.86084</b>
800	100		<b>0.73561</b>	2.21623	2.33939
	150		4.52415	11.96523	<b>2.52364</b>
	200		7.89366	7.15614	<b>1.04534</b>
1000	100	NH3	<b>1.30703</b>	1.99455	1.95818
	150		2.76690	5.98203	<b>0.25933</b>
	200		10.71345	13.92803	<b>9.67796</b>
geometric mean			3.17700	4.10596	0.57072

Tabela 5.2: Tempo computacional obtido para instâncias de médio porte.

$ I $	$ J $	$\gamma$	B&C-OA	B&C-GBD	OABD
			Time (s)	Time (s)	Time (s)
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	1	7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	2	7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	3	7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	NH1	7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	NH2	7200.00	7200.00	<b>5372.55</b>
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
800	100		7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
1000	100	NH3	7200.00	7200.00	7200.00
	150		7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00

Em 23 instâncias, o método OABD demonstrou superioridade, empatou em uma instância com o método B&C-OA e foi superado em cinco instâncias por este último método. Notavelmente, o método B&C-GBD mostrou-se superior em apenas uma das 30 instâncias testadas. Além disso, o OABD atingiu o ótimo em três destas instâncias, sendo uma delas

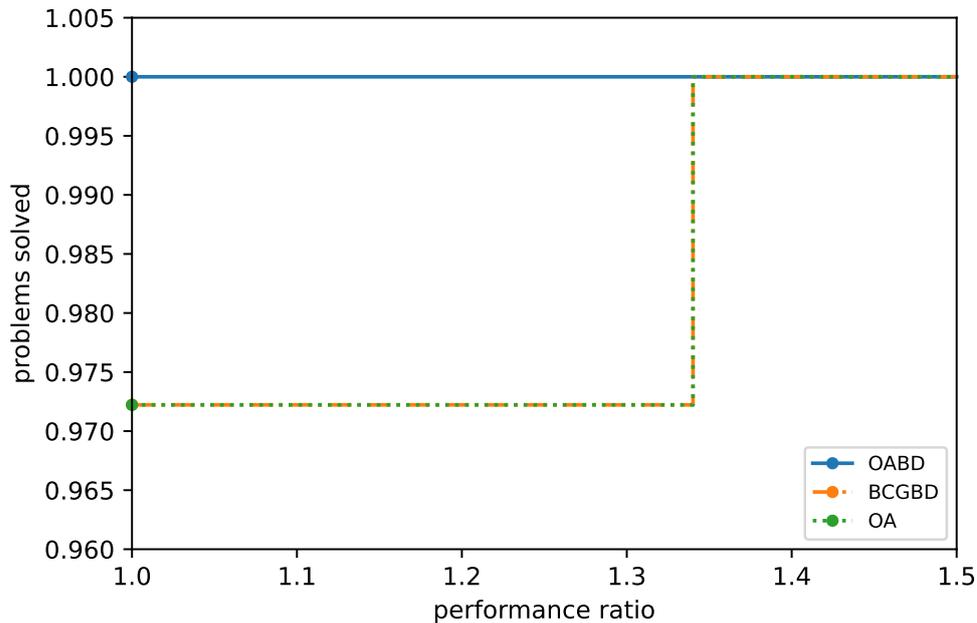


Figura 5.1: Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias de médio porte.

a mesma em que empatou com o B&C-OA, que, por sua vez, só alcançou o ótimo nesta instância específica. O método B&C-GBD não alcançou o ótimo em nenhuma instância.

Ao analisar a média geométrica, o OABD mantém o melhor desempenho em relação aos demais, sendo três vezes menor que a média do B&C-OA e duas vezes menor que o B&C-GBD. Embora não tenha se destaque como superior em nenhuma instância, a média geométrica do B&C-GBD é inferior à do B&C-OA, que conseguiu destacar-se em algumas instâncias. Isso indica que, de maneira geral, os gaps encontrados pelo B&C-GBD são melhores que os do B&C-OA.

Em relação ao desempenho computacional, conforme representado na Tabela 5.4, ocorre um empate entre os métodos OABD e B&C-OA, já que ambos alcançam o ótimo ou um gap de tolerância ( $\leq 10^{-6}$ ) dentro do tempo máximo determinado em três instâncias. Cada método atingiu o ótimo em uma instância distinta do outro, mas em duas instâncias específicas, ambos alcançaram o ótimo. Nessas, o método OABD parou significativamente antes do B&C-OA, comprovando sua superioridade computacional. Vale ressaltar que o método B&C-GBD não atingiu o ótimo em nenhuma instância.

A Figura 5.2 apresenta os perfis de desempenho dos métodos para instâncias de grande porte. Novamente, o método OABD demonstra superioridade sobre os demais métodos, não alcançando 100% de efetividade apenas no intervalo  $1 \leq \tau \leq 2$ , mas atingindo essa marca nos demais intervalos. Quanto aos métodos apresentados por Lin e Tian (2021a), o método B&C-OA destaca-se como superior ao B&C-GBD na maior parte do intervalo de  $\tau$ . Nos intervalos em que a superioridade não ocorre para o B&C-OA, os

Tabela 5.3: Resultados para instâncias de grande porte.

$ I $	$ J $	$\gamma$	B&C-OA GAP (%)	B&C-GBD GAP (%)	OABD GAP (%)
1500	100	1	0.10889	1.54997	<b>0.00000</b>
	200		9.76324	4.70906	<b>0.90238</b>
	300		40.35565	8.16694	<b>2.29742</b>
2000	100	1	<b>0.00006</b>	0.62784	37.35874
	200		8.61410	6.75393	<b>2.08780</b>
	300		74.47927	7.97467	<b>2.37505</b>
3000	100	1	<b>0.03638</b>	0.18065	0.06654
	200		4.08299	2.90878	<b>1.85385</b>
	300		73.83519	<b>7.07117</b>	8.07629
1500	100	2	0.45027	1.14675	<b>0.14587</b>
	200		17.43123	5.97451	<b>1.86034</b>
	300		81.13870	12.46602	<b>1.61144</b>
2000	100	2	<b>0.16062</b>	0.65375	0.60553
	200		74.99780	4.75540	<b>0.81019</b>
	300		100.00000	8.06533	<b>1.76485</b>
1500	100	3	0.60318	0.99750	<b>0.34633</b>
	200		11.93425	7.81863	<b>0.69063</b>
	300		84.92879	14.51583	<b>1.91681</b>
2000	100	3	<b>0.00000</b>	0.23907	<b>0.00000</b>
	200		78.72836	4.95612	<b>1.05772</b>
	300		100.00000	9.98169	<b>2.30622</b>
1500	100	NH	<b>0.54862</b>	1.03220	5.80574
	200		26.24899	50.82971	<b>2.80276</b>
	300		100.00000	13.36943	<b>1.63357</b>
2000	100	NH	<b>0.43356</b>	0.45145	4.53364
	200		74.42595	19.55073	<b>0.63050</b>
	300		100.00000	8.51475	<b>2.67804</b>
3000	100	NH	0.00008	0.28061	<b>0.00000</b>
	200		78.15963	7.22182	<b>3.76668</b>
	300		100.00000	7.44276	<b>3.62999</b>
geometric mean			5.00974	3.47599	1.61959

métodos empatam em desempenho, e em nenhum intervalo o método B&C-GBD se mostra superior. Ressalta-se que apenas o método OABD atingiu 100% de efetividade.

Tabela 5.4: Tempo computacional obtidos para instâncias de grande porte.

$ I $	$ J $	$\gamma$	B&C-OA	B&C-GBD	OABD
			Time (s)	Time (s)	Time (s)
1500	100	1	7200.00	7200.00	<b>498.56</b>
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
2000	100	1	<b>3951.20</b>	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
3000	100	1	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
1500	100	2	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
2000	100	2	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
1500	100	3	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
2000	100	3	<b>5081.65</b>	7200.00	<b>946.55</b>
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
1500	100	NH	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
2000	100	NH	7200.00	7200.00	7200.00
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00
3000	100	NH	<b>2758.61</b>	7200.00	<b>973.07</b>
	200		7200.00	7200.00	7200.00
	300		7200.00	7200.00	7200.00

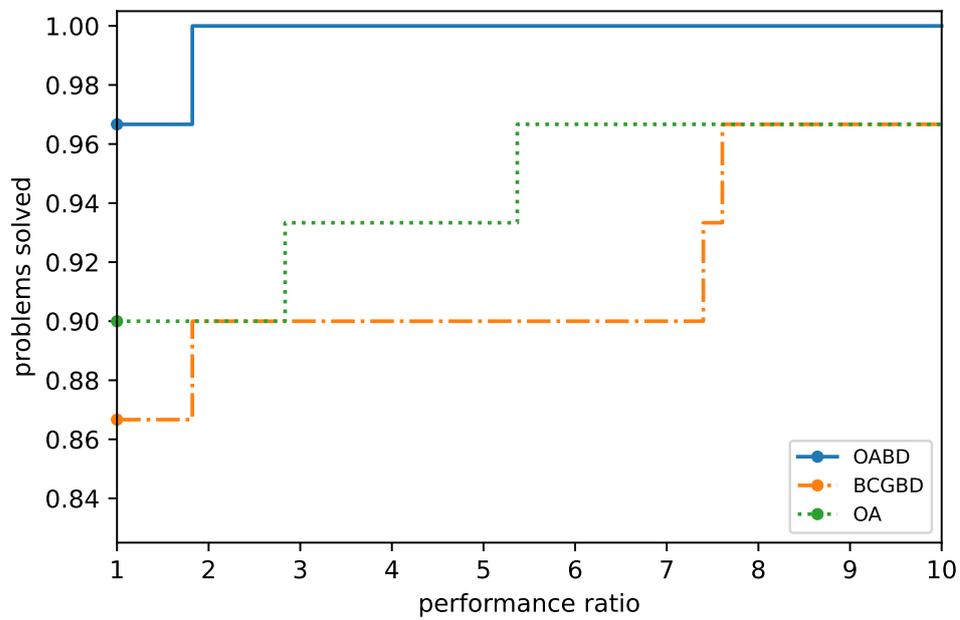


Figura 5.2: Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias de grande porte.

# Capítulo 6

## Conclusão

### 6.1 Considerações finais

Esta dissertação apresentou uma nova abordagem para a técnica de aproximação externa para problemas de localização de instalações competitivas com regra de escolha limitada. Além dos métodos já existentes na literatura, como B&C-OA e B&C-GBD apresentados por [Lin e Tian \(2021a\)](#), desenvolvemos o método exato híbrido OABD.

O método OABD resolve o problema mestre de OA com um algoritmo de decomposição de Benders. Utilizando a estratégia de separar um corte de viabilidade de Benders por cliente em cada turno e agrupando esses cortes em pequenos conjuntos, o problema mestre não fica sobrecarregado ao carregar esses cortes. Além disso, para acelerar ainda mais o processo de encontrar a solução ótima, os cortes de viabilidade de Benders são separados por inspeção.

Os extensos experimentos realizados para os métodos B&C-OA, B&C-GBD e OABD evidenciam que a estratégia proposta é bastante competitiva quando comparada com os métodos encontrados em [Lin e Tian \(2021a\)](#). O desempenho do OABD demonstra uma significativa superioridade em termos de qualidade de solução e tempo de execução.

No estudo de [Lin e Tian \(2021a\)](#), o desempenho de B&C-OA já mostrava-se bastante eficiente para instâncias com regra de escolha parcialmente binária. No entanto, não foram realizados testes com instâncias de médio e grande porte para obter conclusões mais abrangentes sobre seu desempenho em comparação com os demais métodos do estudo. Surpreendentemente, o desempenho apresentado aqui evidencia a sua superioridade em relação ao B&C-GBD, sendo o segundo melhor desempenho neste estudo.

Assim, fica claro que a abordagem OABD se configura como uma alternativa viável e competitiva para resolver problemas de CFLs.

## 6.2 Trabalhos futuros

Após os resultados apresentados pelo método OABD e a realização dos testes numéricos, acredita-se que uma abordagem ainda mais robusta possa ser implementada, abrangendo as técnicas estudadas aqui: OA associado ao algoritmo de Benders proposto, juntamente à decomposição generalizada de Benders proposta por [Lin e Tian \(2021a\)](#). O modelo que representa a associação das técnicas é apresentado em [6.2.1](#). A implementação do método e bem como a realização de testes computacionais são uma aposta de trabalhos futuros.

Além disso, estudos recentes introduziram o conceito de jogo de precificação e equilíbrio de Nash para problemas de localização de instalações competitivas. [Shan et al. \(2019\)](#) apresentam um modelo que considera o jogo de preços entre a empresa entrante e o concorrente existente. O modelo otimiza a localização maximizando o benefício sob o princípio do equilíbrio de Nash. Estes são conceitos que também podem ser inseridos e agregados aos trabalhos futuros, uma vez que jogos de preços são inevitáveis entre as duas empresas.

### 6.2.1 Proposta de decomposição generalizada de Benders

Outra forma de lidar com o problema de localização de instalações competitivas é por meio de uma abordagem de decomposição generalizada de Benders, como discutido em [Lin e Tian \(2021a\)](#). [Geoffrion \(1972\)](#) propôs uma extensão do método de decomposição de Benders ([Benders, 1962](#)) para lidar com programação não linear inteira mista, resultando no método de decomposição generalizada de Benders.

Para o problema M1, a abordagem envolve projetar as variáveis contínuas em grande escala  $y$ , usadas para modelar o conjunto de consideração, resultando assim em um MILP com apenas as variáveis de decisão de localização e cortes derivados de um subproblema parametrizado. As não linearidades do MINLP são então transferidas para um SP não linear (NLP) no qual as variáveis de localização são fixadas em valores propostos pelo MILP.

Posteriormente, a teoria da dualidade não linear convexa permite a separação de cortes a partir da solução deste NLP. Esses cortes, chamados cortes generalizados de Benders, também são separados conforme necessário em um processo iterativo. Ao projetar as variáveis em grande escala, o MILP resultante fica mais gerenciável computacionalmente e escalável para o tamanho das instâncias.

Para o problema M1, ao projetar o problema no espaço das variáveis  $x$ , obtemos a seguinte formulação equivalente

$$\min_{x \in \{0,1\}^{|J|}} \sum_{j \in J} f_j x_j + \sum_{i \in I} \phi_i(x)$$

onde  $\Phi_i(x)$  representa o seguinte problema

$$\phi_i(x) = \min \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} : \sum_{j \in J} y_{ij} \leq \gamma_i, \quad y_{ij} \leq x_j \quad \forall j \in J, \quad 0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \right\}$$

Apesar de ser um problema não linear convexo,  $\phi_i(x)$  é facilmente resolvido. [Lin e Tian \(2021a\)](#) demonstraram que sua solução é equivalente ao problema interno de BL. Em outras palavras, basta ordenar de forma não crescente as localizações com base em seus valores  $\pi$ , obedecendo à restrição do conjunto condicional.

Além disso, é importante notar que tanto  $\phi_i(x)$  quanto M1 são sempre viáveis para qualquer configuração  $x \in \{0, 1\}^{|J|}$ . Como  $\phi_i(x)$  possui uma função objetiva convexa e diferenciável sujeita a restrições lineares, suas condições de Karush-Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para a otimalidade. Assim,  $\phi_i(x)$  é suscetível a aplicação de técnicas de dualização. Ao associar os vetores de variáveis duais  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ , e  $\sigma \geq 0$  às restrições (3.7)-(3.9), respectivamente, e considerando a ausência de uma lacuna de dualidade, podemos reescrever  $\phi_i(x)$  como

$$\phi_i(x) = \max_{u, v, \sigma} \left\{ \min_{y \geq 0} \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + u_i \left( \sum_{j \in J} y_{ij} - \gamma_i \right) + \sum_{j \in J} v_{ij} (y_{ij} - x_j) + \sum_{j \in J} \sigma_{ij} (y_{ij} - 1) \right\} \right\}$$

Dado que o supremo é o menor limite superior e com a introdução da variável  $z_i \geq 0$ , o problema M1 pode ser reformulado como o seguinte problema mestre de decomposição generalizada de Benders

$$\text{GBDMP} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i \in I} z_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ \text{s.a.: } z_i \geq \min_{y \geq 0} \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + \sum_{j \in J} (u_i + v_{ij} + \sigma_{ij}) y_{ij} \right\} - u_i \gamma_i - \sum_{j \in J} v_{ij} x_j - \sum_{j \in J} \sigma_{ij} \quad \forall (u, v, \sigma), i \in I \quad (6.1) \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \\ z_i \geq 0 \quad \forall i \in I \end{array} \right.$$

Observe que o número de restrições no GBDMP (6.1) é hipoteticamente exponencial. No entanto, muitas dessas restrições provavelmente não serão vinculativas na otimalidade. Podemos aplicar uma estratégia de inicialmente relaxar todas as restrições, introduzindo gradualmente apenas algumas selecionadas conforme necessário no GBDMP. Para uma dada iteração  $h$  e valores fixos de  $x = \bar{x}^h$ , podemos resolver eficientemente o subproblema

$\phi_i(\bar{x}^h)$  e obter os valores ótimos de  $(\bar{u}^h, \bar{v}^h, \bar{\sigma}^h)$  para alcançar uma solução ótima para  $\phi_i(\bar{x}^h)$  ou

$$\phi_i(\bar{x}^h) = \min_{y \geq 0} \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + \sum_{j \in J} (\bar{u}_i^h + \bar{v}_{ij}^h + \bar{\sigma}_{ij}^h) y_{ij} \right\} - \bar{u}_i^h \gamma_i - \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij}^h \bar{x}_j^h - \sum_{j \in J} \bar{\sigma}_{ij}^h$$

o que nos permite isolar o problema de minimização interno como

$$\min_{y \geq 0} \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + \sum_{j \in J} (\bar{u}_i^h + \bar{v}_{ij}^h + \bar{\sigma}_{ij}^h) y_{ij} \right\} = \phi_i(\bar{x}^h) + \bar{u}_i^h \gamma_i + \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij}^h \bar{x}_j^h + \sum_{j \in J} \bar{\sigma}_{ij}^h$$

Antes de prosseguir, podemos expressar a restrição (6.1) para uma iteração  $h$  da seguinte forma

$$z_i \geq \min_{y \geq 0} \left\{ \frac{b_i}{\sum_{j \in J} \pi_{ij} y_{ij} + 1} + \sum_{j \in J} (\bar{u}_i^h + \bar{v}_{ij}^h + \bar{\sigma}_{ij}^h) y_{ij} \right\} - \bar{u}_i^h \gamma_i - \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij}^h x_j - \sum_{j \in J} \bar{\sigma}_{ij}^h \quad \forall i \in I$$

e substituir o problema de minimização interno pela equação anterior, resultando no seguinte problema mestre generalizado de Benders relaxado:

$$\text{RGBDMP} \begin{cases} \min \sum_{i \in I} z_i + \sum_{j \in J} f_j x_j \\ \text{s.a.: } z_i \geq \phi_i(\bar{x}^h) + \sum_{j \in J} v_{ij} (\bar{x}_j - x_j) & \forall h = 1, \dots, H, i \in I \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j \in J \\ z_i \geq 0 & \forall i \in I \end{cases} \quad (6.2)$$

onde a restrição (6.2) é conhecida como cortes generalizados de Benders (GBC), e  $H$  é o número máximo de iterações necessárias para alcançar a otimalidade, se uma solução ótima existir. Note que um GBC aproxima a função  $\phi_i(\bar{x}^h)$  pelo seu subestimador linear em  $\bar{x}^h$ . Além disso, como  $\phi_i(x)$  é viável para qualquer valor de  $x \in [0, 1]^{|J|}$ , não precisamos adicionar mais restrições de viabilidade, por exemplo, restrições de viabilidade de Benders, ao RGBDMP.

Um aspecto crucial de um algoritmo de decomposição de Benders reside na separação de cortes de Benders. O desempenho do algoritmo de Benders é sensível não apenas aos valores ótimos das variáveis duais, mas também ao método usado para obtê-los. Aqui, apresentamos um procedimento simples, mas eficaz, projetado para separar cortes de

Benders (6.2) a partir de soluções fornecidas pelo RGBDMP, quer sejam fracionárias ou inteiras. Vale ressaltar esse ponto, já que o procedimento proposto por Lin e Tian (2021a) para a separação de cortes de Benders só pode ser aplicado a soluções inteiras. Essa limitação restringe significativamente a eficácia potencial do método de decomposição de Benders. Além disso, nosso procedimento é versátil, permitindo a separação de cortes de Pareto-ótimos dentro do esquema proposto por Papadakos (2008).

Para calcular os valores ótimos das variáveis duais  $v$ , utilizamos as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associadas ao espaço viável de  $\phi_i(\bar{x}^h)$  em  $\bar{x}^h$ , após obter sua solução ótima  $\bar{y}^h$ . Lembre-se de que  $\bar{y}^h$  é facilmente obtido para um dado  $\bar{x}^h$ . Para cada  $i \in I$ , a função Lagrangeana é dada por  $L_i(y, u, v, \sigma, \theta) = \frac{b_i}{(\sum_{j \in J} \pi_{ij} \bar{y}_{ij} + 1)} + u_i(\sum_{j \in J} \bar{y}_{ij} - \gamma_i) + \sum_{j \in J} v_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J} \sigma_{ij}(\bar{y}_{ij} - 1) + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \bar{y}_{ij}$ . Então, dados  $\bar{x}$  e uma solução ótima  $\bar{y}$  associada a  $\bar{x}$ , temos as seguintes condições KKT, i.e., o seguinte conjunto de equações lineares para as variáveis duais, uma para cada  $i \in I$ , ou:

$$\text{KKT} \begin{cases} \frac{-b_i \pi_{ij}}{(\sum_{j \in J} \pi_{ij} \bar{y}_{ij} + 1)^2} + u_i + v_{ij} + \sigma_{ij} - \theta_{ij} = 0 & \forall j \in J & (6.3) \\ u_i(\sum_{j \in J} \bar{y}_{ij} - \gamma_i) = 0 & & (6.4) \\ v_{ij}(\bar{y}_{ij} - \bar{x}_j) = 0 & \forall j \in J & (6.5) \\ \sigma_{ij}(\bar{y}_{ij} - 1) = 0 & \forall j \in J & (6.6) \\ \theta_{ij} \bar{y}_{ij} = 0 & \forall j \in J & (6.7) \end{cases}$$

Uma forma de resolver o conjunto de equações lineares KKT é a de empregar um procedimento prático e direto para calcular uma das infinitas soluções disponíveis. Para cada  $i \in I$ , primeiro calculamos  $\bar{y}_{ij}$  da mesma forma que fizemos na seção 4.3.3.

Primeiro, verificamos se  $\sum_{j \in J} \bar{x}_j < \gamma_i$ . Se este for o caso, fazemos  $y_{ij} = \bar{x}_j$ , para cada  $j \in J$ . Caso contrário, formamos um conjunto ordenado  $\mathcal{L}_i \subseteq J$  de índices ordenados não crescentemente por seus respectivos valores de  $\pi_{ij}$ . Em seguida, identificamos o índice crítico  $j^*$  tal que  $\sum_{j \in \mathcal{L}_i: o(j) < o(j^*)} \bar{x}_j < \gamma_i \leq \sum_{j \in \mathcal{L}_i: o(j) \leq o(j^*)} \bar{x}_j$ . Lembre-se de que a função  $o(j)$  retorna a posição do índice  $j$  na lista  $\mathcal{L}_i$ . Também criamos conjuntos  $S = \{j \in \mathcal{L}_i : o(j) \leq o(j^*)\}$  e  $\bar{S} = S \setminus \{j^*\}$ .

Podemos, então, obter a solução ótima para  $y_{ij}$  definindo:  $y_{ij} = \bar{x}_j$ , para todos  $j \in \bar{S}$ ,  $y_{ij^*} = \gamma_i - \sum_{j \in \bar{S}} \bar{x}_j$ , e  $y_{ij} = 0$ , para  $j \in \mathcal{L}_i \setminus S$ . Uma vez que os valores ótimos de  $\bar{y}$  são obtidos, definimos  $\tilde{b}_j = \frac{-b_i \pi_{ij}}{(\sum_{k \in J} \pi_{ik} \bar{y}_{ik} + 1)^2}$  e calculamos o valor dual  $u_i$ .

Se  $\sum_{j \in J} \bar{x}_j < \gamma_i$ , ou seja, a restrição do conjunto condicional não é vinculante, então  $u_i = 0$ ; caso contrário, definimos  $u_i = \tilde{b}_{j^*}$ . Em seguida, definimos os outros valores duais verificando se suas condições KKT são atendidas. Para todos  $j \in \mathcal{L}_i$ , primeiro verificamos se  $j \in S$ . Se for o caso, definimos  $\theta_{ij} = 0$  e verificamos se  $\bar{x}_j = 1$ . Se isso for verdade, definimos  $v_{ij} = 0$  e  $\sigma_{ij} = -\tilde{b}_j - u_i$ ; caso contrário, definimos  $v_{ij} = -\tilde{b}_j - u_i$  e  $\sigma_{ij} = 0$ . Se  $j \notin S$ , fazemos  $v_{ij} = 0$ ,  $\sigma_{ij} = 0$  e  $\theta_{ij} = \tilde{b}_j + u_i$ .

Este procedimento simples nos permite separar cortes generalizados de Benders a partir de soluções fracionárias e inteiras  $\bar{x}$ . Isso é importante, pois podemos usar esse procedimento para separar cortes Pareto-ótimos usando o esquema de Papadakos (2008) e realizar um aquecimento do método conforme proposto por McDaniel e Devine (1977). Ambas as estratégias, quando realizadas judiciosamente, melhoram significativamente o desempenho do método. Como o problema dual de Lagrange é degenerado, a primeira estratégia ajuda a encontrar cortes que não são dominados por outros cortes; enquanto a segunda explora a ideia de que, nas iterações iniciais, o RGBDMP tem poucos ou nenhum corte para encontrar a solução ótima. Portanto, ter cortes separados de forma computacional mais barata melhora substancialmente o desempenho do método.

Papadakos utilizou o conceito de *core-point* proposto por Magnanti e Wong (1981) para separar cortes Pareto-ótimos. Um corte é considerado Pareto-ótimo quando não há nenhum outro corte que o domine para um mesmo ponto de referência ou *core-point*. No contexto do método de decomposição de Benders, um *core-point* é uma solução para as variáveis inteiras que pertence ao interior relativo do problema mestre de Benders ou, no caso presente, ao interior relativo de RGBDMP.

Como não há restrições adicionais no RGBDMP, além dos cortes de otimalidade de Benders e do domínio das variáveis  $x$ , qualquer valor para  $x_j \in [0, 1]$ ,  $j \in J$ , seria considerado um *core-point* válido. Após testes preliminares, optamos por definir o valor de  $x_j^c = 0,98$ ,  $j \in J$ , onde  $x^c$  representa o *core-point*.

Para separar cortes Pareto-ótimos, Papadakos propôs a resolução de um subproblema adicional a cada iteração, antes da resolução do problema mestre de Benders. Este SP adicional é solucionado usando o *core-point* no lugar das variáveis temporariamente fixadas pelo problema mestre. Além disso, o *core-point* deve ser atualizado a cada iteração por meio da combinação linear da nova solução proposta pelo PM com o *core-point* utilizado, ou seja,  $x_j^c = \lambda x_j + (1 - \lambda)x_j^c$ ,  $j \in J$ , onde  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Aqui, o problema adicional proposto por Papadakos consiste em resolver o sistema de equações lineares das condições de KKT usando  $x^c$  no lugar de  $\bar{x}$  e calculando o  $\bar{y}$  associado ao  $x^c$ . Ressaltamos que  $\bar{y}$  pode ser facilmente calculado, conforme demonstrado no final da Seção 4.3.3, utilizando a teoria do problema da mochila para obter esses valores.

Finalmente, McDaniel e Devine observaram que as primeiras iterações do método de decomposição de Benders têm pouca ou nenhuma informação poliédrica para encontrar a solução ótima. Eles sugerem, portanto, executar inicialmente o método com as variáveis inteiras relaxadas, obtendo assim um conjunto inicial de cortes a um custo computacional mais acessível. Esse ciclo inicial é conhecido como aquecimento, ou *warm-start*. Aqui, implementamos o aquecimento para todos os métodos propostos por nós. O aquecimento ocorre por um número fixo de iterações ou até que o limite da programação linear do problema mestre de Benders seja atingido.

## Referências Bibliográficas

- Aboolian, R., Berman, O., e Krass, D. (2007). Competitive facility location and design problem. *European Journal of Operational Research*, 182(1):40–62.
- Aboolian, R., Sun, Y., e Koehler, G. J. (2009). A location–allocation problem for a web services provider in a competitive market. *European Journal of Operational Research*, 194(1):64–77.
- Ashtiani, G., Makui, A., e Ramezani, R. (2013). A robust model for a leader–follower competitive facility location problem in a discrete space. *Applied Mathematical Modelling*, 37(1-2):62–71.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4:238–252.
- Brandenberg, R. e Stursberg, P. (2021). Refined cut selection for benders decomposition: applied to network capacity expansion problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 94:1–30.
- Conforti, M. e Wolsey, L. A. (2019). “facet” separation with one linear program. *Mathematical Programming*, 178:361–380.
- Dolan, E. D. e Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2):201–213.
- Drezner, T. (2009). *Competitive facility location* *Competitive Facility Location*, pages 396–401. Springer US, Boston, MA.
- Drezner, T. e Drezner, Z. (2004). Finding the optimal solution to the huff based competitive location model. *Computational Management Science*, 1(2):193–208.
- Drezner, Z., Suzuki, A., e Drezner, T. (2007). Locating multiple facilities in a planar competitive environment. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 50(3):250–263.
- Duran, M. e Grossmann, I. (1986). An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical Programming*, 36:307–339.

- Fernández, J., Salhi, S., e Boglárka, G. (2014). Location equilibria for a continuous competitive facility location problem under delivered pricing. *Computers Operations Research*, 41:185–195.
- Fischetti, M., Salvagnin, D., e Zanette, A. (2010). A note on the selection of Benders' cuts. *Mathematical Programming*, 124:175–182.
- Gentile, J., Pessoa, A. A., Poss, M., e Roboredo, M. C. (2018). Integer programming formulations for three sequential discrete competitive location problems with foresight. *European Journal of Operational Research*, 265(3):872–881.
- Geoffrion, A. (1972). Generalized benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10:237–260.
- Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *Economic Journal*, 39:41–57.
- Huff, D. L. (1964). Defining and estimating a trade area. *Journal of Marketing*, 28:34–38.
- Ivanov, S. V. e Morozova, M. V. (2016). Stochastic problem of competitive location of facilities with quantile criterion. *Automation and Remote Control*, 77(3):451–461.
- Levanova, T. e Gnusarev, A. (2018). Ant colony optimization for competitive facility location problem with elastic demand. *OPTA-SCL*, 2018.
- Lin, Y. H. e Tian, Q. (2020). Exact approaches for competitive facility location with discrete attractiveness. *Optimization Letters*, 15:377–389.
- Lin, Y. H. e Tian, Q. (2021a). Branch-and-cut approach based on generalized benders decomposition for facility location with limited choice rule. *European journal of operational research*, 293:109–119.
- Lin, Y. H. e Tian, Q. (2021b). Generalized benders decomposition for competitive facility location with concave demand and zone-specialized variable attractiveness. *Computers and Operations Research*, 130.
- Ljubić, I., Putz, P., e Salazar-González, J.-J. (2012). Exact approaches to the single-source network loading problem. *Networks*, 59(1):89–106.
- Ljubić, I. e Moreno, E. (2018). Outer approximation and submodular cuts for maximum capture facility location problems with random utilities. *European Journal of Operational Research*, 266.
- Luce, R. D. (1959). *Individual choice behavior*. John Wiley.
- Magnanti, T. e Wong, R. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29(3):464–484.

- Mai, T. e Lodi, A. (2020). A multicut outer-approximation approach for competitive facility location under random utilities. *European Journal of Operational Research*, 284:874–881.
- Martello, S. e Toth, P. (1990). *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc.
- McDaniel, D. e Devine, M. (1977). A modified benders' partitioning algorithm for mixed integer programming. *Management Science*, 24(3):312–319.
- Mishra, M., Singh, S. P., e Gupta, M. P. (2023). Location of competitive facilities: a comprehensive review and future research agenda. *Benchmarking: An International Journal*, 30(4):1171–1230.
- Oliveira, P. B. d., Camargo, R. S. d., Miranda, G. d., e Martins, A. X. (2021). A computational study of a decomposition approach for the dynamic two-level uncapacitated facility location problem with single and multiple allocation. *Computers Industrial Engineering*, 151:106964.
- Papadakos, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti–wong method. *Operations Research Letters*, 36(4):444–449.
- Rahmaniani, R., Crainic, T. G., Gendreau, M., e Rei, W. (2017). The benders decomposition algorithm: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 259(3):801–817.
- Real, L. B., Contreras, I., Cordeau, J.-F., Camargo, R. S. d., e Miranda, G. d. (2021). Multimodal hub network design with flexible routes. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 146:102188.
- Real, L. B., O'Kelly, M., Miranda, G. d., e Camargo, R. S. d. (2018). The gateway hub location problem. *Journal of Air Transport Management*, 73:95–112.
- Seyhan, T. H., Snyder, L. V., e Zhang, Y. (2018). A new heuristic formulation for a competitive maximal covering location problem. *Transportation Science*, 52:1156–1173.
- Shan, W., Yan, Q., Chen, C., Zhang, M., Yao, B., e Fu, X. (2019). Optimization of competitive facility location for chain stores. *Annals of Operations Research*, 273:187–205.