Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Dandara Oliveira Medeiros

CONJUNTOS DE NÍVEL DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS PARA O CÍRCULO E CURVATURA ESCALAR EM 3-VARIEDADES

Belo Horizonte
2024

Dandara Oliveira Medeiros

CONJUNTOS DE NÍVEL DE APLICAÇÕES HARMÔNICAS PARA O CÍRCULO E CURVATURA ESCALAR EM 3-VARIEDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Celso dos Santos Viana

Belo Horizonte
2024

Medeiros, Dandara Oliveira.

M488c Conjuntos de nível de aplicações harmônicas para o círculo e curvatura escalar em 3-variedades [recurso eletrônico] / Dandara Oliveira Medeiros – 2024.
74 f. il.

Orientador: Celso dos Santos Viana.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática
Referências: f.73-74.

1. Matemática – Teses. 2. Geometria diferencial – Teses. 3. Funções harmônicas – Teses. 4. Curvatura – Teses. I. Viana, Celso dos Santos. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLIA DE APROVAÇÃO

Conjuntos de nível de aplicações harmônicas para o círculo e curvatura escalar em 3-variedades

DANDARA OLIVEIRA MEDEIROS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Celso dos Santos Viana

Prof. Celso dos Santos Viana
UFMG

Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Prof. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
UFAL

Edno Alan Pereira

Prof. Edno Alan Pereira
UFSJ

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu
UFMG

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Prof. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante
UFAL

Belo Horizonte, 16 de fevereiro de 2024.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

À força feminina.

Agradecimentos

Agradeço superiormente ao meu Deus, que cuida de mim desde a seleção para o mestrado. Agradeço em primeiro plano a quem sem cuja ajuda eu não conseguiria concluir este curso: aos meus pais, Jaildo Medeiros e Ana Lúcia Medeiros, e ao meu orientador, Prof. Celso Viana.

Agradeço aos que sempre acreditaram em mim, até quando eu nem acreditava. Em primeiro lugar, minha irmã Débora Medeiros. Nesta sequência, os meus amigos de moradia estudantil, Douglas, Gustavo Rizzo, Laura, Victor Hugo e Éric.

Agradeço aos meus colegas de curso que sempre me apoiaram e por toda a companhia ao longo da minha passagem pela UFMG. Em especial, Ana Twayene, Solange, Luiz, Janaíne, Gabriel e Bryant. Agradeço também às amigas que a geometria me deu, Cíntia e Joyce. Um agradecimento especial também aos professores do programa, Israel Vainsencher, Remy Sanchis, Silas Luiz e Rafael Bezerra.

Os agradecimentos também vão para colegas e professores da UFAL, que de longe torciam por mim. Em especial ao meu amigo Marcos André, que esteve comigo quando o curso ainda era remoto. Neste grupo, agradeço especialmente aos professores Tiarlos Cruz, Wagner Ranter, Davi Lima e Diogo Santos.

Agradeço à FAPEMIG pelo suporte financeiro.

Tempo Rei

Não me iludo
Tudo permanecerá do jeito que tem sido
Transcorrendo, transformando
Tempo e espaço navegando todos os sentidos

Pães de Açúcar, Corcovados
Fustigados pela chuva e pelo eterno vento
Água mole, pedra dura
Tanto bate que não restará nem pensamento

Tempo rei, ó, tempo rei, ó, tempo rei
Transformai as velhas formas do viver
Ensinai-me, ó, pai, o que eu ainda não sei
Mãe Senhora do Perpétuo, socorrei

Pensamento
Mesmo o fundamento singular do ser humano
De um momento para o outro
Poderá não mais fundar nem gregos, nem baianos

Mães zelosas, pais corujas
Vejam como as águas de repente, ficam sujas
Não se iludam, não me iludo
Tudo agora mesmo pode estar por um segundo

Tempo rei, ó, tempo rei, ó, tempo rei
Transformai as velhas formas do viver
Ensinai-me, ó, pai, o que eu ainda não sei
Mãe Senhora do Perpétuo, socorrei

- Gilberto Gil

Resumo

Para superfícies fechadas em $\mathbb{R}^3$, o teorema de Gauss-Bonnet nos fornece uma relação entre a curvatura gaussiana e a topologia desta superfície. Tendo isto, existindo a busca para resultados em dimensão 3, assim como em outras dimensões, Schoen-Yau [22] traz uma relação entre curvatura escalar de variedades de dimensão 3 e superfícies mínimas estáveis. Apresentaremos uma relação integral entre curvatura escalar da variedade ambiente e a topologia de conjuntos de nível de aplicações harmônicas $u : M^3 \to \mathbb{S}^1$. Este resultado foi provado por D. Stern [26]. Para isto, apresentaremos algumas relações entre 1-formas harmônicas, no contexto da teoria de Hodge, e aplicações harmônicas, sendo estas ponto crítico do funcional energia de Dirichlet. Dado este resultado, apresentaremos como aplicação a prova da conjectura de Geroch, de que o toro $\mathbb{T}^3$ não admite métrica de curvatura escalar positiva.
Palavras-chave: curvatura escalar; aplicações harmônicas; 1-formas harmônicas.

Abstract

For closed surfaces in $\mathbb{R}^3$, the Gauss-Bonnet theorem gives us a relation between the Gaussian curvature and the topology of this surface. Given this, there is a search for results in dimension 3, as well as in other dimensions, Schoen-Yau [22] brings a relationship between scalar curvature of 3-dimensional manifolds and minimal stable surfaces. We will present an integral relationship between scalar curvature of the environment manifold and the topology of level sets of harmonic maps $u : M^3 \to \mathbb{S}^1$. This one result was proved by D. Stern [26]. To do this, we will present some relationships between 1-harmonic forms, in the context of Hodge theory, and harmonic maps, being these critical point of the Dirichet energy functional. Given this result, we will present as application of the proof of Geroch's conjecture, that the torus $\mathbb{T}^3$ does not admit metric of positive scalar curvature.
Key words: scalar curvature; harmonic maps; 1-harmonic forms.

Sumário

Introdução

O Teorema de Gauss-Bonnet tem em seu contexto superfícies regulares fechadas de dimensão dois, e nos dá a equação

$$\int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\Sigma = 2\pi \mathcal{X}(\Sigma),$$

onde K_{Σ} é a curvatura escalar e $\mathcal{X}(\Sigma)$ é a característica de Euler da superfície Σ. Assim, temos como uma aplicação direta deste teorema que se uma superfície tem curvatura gaussiana positiva, então sua característica de Euler é positiva. Em particular, o toro $\mathbb{T}^2$ não admite métrica de curvatura escalar positiva, pois sua característica de Euler é zero. O Teorema de Gauss-Bonnet é válido somente para dimensões 2 e 4, não existindo generalizações para dimensão 3, por exemplo. Desta forma, surge a busca de resultados para esta dimensão.

Motivados a encontrar provas alternativas com potencial de generalização da dimensão, apresentamos um argumento variacional bem conhecido. Como o primeiro grupo de cohomologia $H^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ não é trivial, é possível deduzir a existência de um objeto geométrico natural que detecta uma certa topologia. Este objeto é uma geodésica simples fechada de comprimento mínimo possível entre todas as curvas homotópicas a esta geodésica. Ao perturbar esta geodésica α na direção de um campo paralelo $X \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ ortogonal a α e de comprimento um, temos que o comprimento não pode decrescer, uma vez que a geodésica é minimizante. Além disso, temos por um cálculo bem conhecido, ver [6], a seguinte fórmula para primeira e segunda variação do comprimento $l(\alpha)$ para este tipo de variação

$$\partial^2 l(\alpha)(X,X) = \frac{d^2}{dt^2} l(\alpha_t)(X,X) = -\int_{\alpha} K_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}(s) ds.$$

Segue como aplicação desta fórmula que a curvatura de Gauss ao longo da geodésica minimizante α precisa ser necessariamente negativa em algum ponto. Com isto, recuperamos o resultado de que o toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ não admite métrica de curvatura gaussiana positiva.

Geodésicas são objetos variacionais dados ponto crítico do funcional comprimento. Analogamente, definimos superfícies mínimas como pontos críticos do funcional área. Assim como as geodésicas minimizam localmente a distância entre dois pontos, as superfícies mínimas minimizam localmente a área entre todas as superfícies com um dado contorno de fronteira fixada. Uma superfície mínima é *estável* quando a segunda variação de área é maior ou igual a zero. Como na equação acima relacionamos geodésicas com curvatura gaussiana, vamos agora relacionar as superfícies mínimas com o que vamos definir como curvatura escalar. Esta curvatura é a curvatura gaussiana das superfícies de dimensão dois, sendo generalizada em dimensão maior. A curvatura escalar mede o quanto o volume de uma bola geodésica na variedade, de raio suficientemente pequeno, se desvia do volume de uma bola também pequena do Espaço Euclidiano. Em particular, bolas geodésicas de raio pequeno tem volume menor que as respectivas euclidianas quando a curvatura escalar é positiva.

Vamos considerar estes objetos e a busca de resultados para dimensão 3, como foi dito no início do texto. Assim, apresentaremos o seguinte teorema em que são relacionados superfícies mínimas estáveis e um novo conceito de curvatura, que é a curvatura de Ricci que será denotada por Ric_M. Esta curvatura foi, em certo sentido, descoberta antes da curvatura escalar.

Teorema 0.1 (J.Simons)**.** *Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície mínima, estável e fechada com fibrado normal trivial. Se $Ric_M \geq 0$, então Σ^{n-1} é totalmente geodésica e $Ric_M(N, N) = 0$ em Σ^{n-1}, para N vetor normal unitário a Σ^{n-1}.*

Com isto, podemos apresentar o Teorema de Schoen-Yau [22], que nos mostra a relação entre superfícies mínimas estáveis e curvatura escalar positiva em M^3, e a influência de tal relação com a topologia desta variedade. A saber:

Teorema 0.2 (Schoen-Yau)**.** *Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma hipersuperfície mínima, estável e fechada com fibrado normal trivial. Se $R_M > 0$, então*

$$\int_{\Sigma} (R_M + |A|^2) \leq 4\pi \mathcal{X}(\Sigma) = 8\pi.$$

Em particular Σ^2 é difeomorfa a $\mathbb{S}^2$ ou um $\mathbb{RP}^2$.

Entre as demais aplicações obtidas deste teorema, podemos destacar a seguinte generalização do resultado mencionado acima:

Conjectura de Geroch: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ não admite métrica de curvatura escalar positiva.

Este resultado foi provado por Schoen-Yau [22]. Com generalização da dimensão, podemos destacar que a Conjectura de Geroch foi provada para dimensão $3 \leq n \leq 7$ por Schoen-Yau [24], utilizando regularidades de superfícies minimizantes, e mais tarde por Gromov-Lawson [9], para dimensão $n \geq 3$ utilizando o operador Dirac.

Neste trabalho, revisitaremos este teorema para dimensão 3 e apresentaremos uma prova desta afirmação. A prova da conjectura de Geroch será feita usando uma interpretação do argumento de Schoen-Yau [22] feita recentemente por D. Stern [26]. Um dos passos mais técnicos da prova de Schoen-Yau [22] é a existência e regularidade das superfícies mínimas estáveis nas variedades ambientes. Em vez disto, na interpretação de D. Stern [26], trabalha-se com a relação entre conjuntos de nível de aplicações harmônicas $u : M^3 \to \mathbb{S}^1$ e curvatura escalar de M^3. É sabido que aplicações harmônicas $u : M \to \mathbb{S}^1$ são sempre pontos críticos estáveis. Estes objetos possuem uma relação direta com outro elemento apresentado neste trabalho, que são as 1-formas harmônicas, que definiremos no terceiro capítulo.

O teorema principal deste trabalho é

Teorema 0.3 (Stern [26])**.** *Seja (M^3, g) uma 3-variedade fechada e orientada, e seja $u : M \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação harmônica. Então os conjuntos de nível $\Sigma_\theta = u^{-1}\{\theta\}$ de u satisfazem*

$$2\pi \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \mathcal{X}(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2} \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2} |Hess(u)|^2 + R_M).$$

Nesta inequação, $Hess(u)$ é a Hessiana de u e R_M é a curvatura escalar da variedade M. A importância desta desigualdade vem do fato que o sinal da curvatura escalar impõe restrições topológicas nas superfícies de nível de uma aplicação harmônica. Em certo sentido, isto nos traz uma analogia ao Teorema 0.2, ao qual traz a relação entre o sinal da curvatura escalar e a topologia das superfícies mínimas estáveis.

Na prova do Teorema 0.3 usaremos algumas equações bem conhecidas, como a identidade de Bochner para funções u em valores reais. Sendo ela

$$\frac{1}{2}\triangle|\nabla u|^2 = |Hess(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla \triangle(u)\rangle + Ric_M(\nabla u, \nabla u),$$

onde $\triangle u$ é o Laplaciano de funções reais e $Ric_M(\nabla u, \nabla u)$ é a curvatura de Ricci na direção ∇u. Podemos citar também que usaremos algumas outras equações, como a Equação de Gauss (Schoen-Yau), que provaremos no capítulo 2, dada por

$$Ric_M(N, N) = \frac{1}{2}[R_M - R_\Sigma + H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2],$$

onde $Ric_M(N, N)$ é a curvatura de Ricci da variedade M na direção do vetor N normal à Σ, R_M é a curvatura escalar de M, R_Σ é a curvatura escalar de Σ, H_Σ é o vetor curvatura média de Σ e A_Σ é a segunda forma fundamental, que será definida no Capítulo 1. Como podemos ver, a equação de Bochner envolve $Hess(u)$ e a curvatura de Ricci de M na direção do vetor normal a Σ, que é relacionada com a curvatura escalar de M na Equação de Gauss (Shoen-Yau). Estas equações são utilizadas por apresentarem termos que são escritos na inequação integral dada no Teorema 0.3.

A organização da dissertação é feita da seguinte maneira. No primeiro capítulo, serão definidos os conceitos básicos de geometria Riemanniana. Introduziremos as noções de métrica e conexão em variedades, e em seguida, o tensor curvatura. A partir disto, apresentaremos as curvaturas seccional, de Ricci e escalar.

Em seguida discutiremos brevemente imersões isométricas $f : M \to \overline{M}$, que é um dos conceitos mais importantes neste trabalho. Apresentamos a *segunda forma fundamental* de f, como sendo a aplicação

$$B_\eta(X, Y) = \langle A(X, Y), \eta\rangle, \quad X, Y \in T_pM,$$

sendo

$$A(X, X) = (\nabla_X X)^\perp,$$

e $\eta \in (T_pM)^\perp$, e seu operador forma S_η que é a transformação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$

$$\langle S_\eta(X), Y\rangle = \langle A(X, Y), \eta\rangle,$$

caracterizada por

$$S_\eta(X) = (\nabla_X N)^T,$$

onde N é a extensão local de η em $\overline{M}$. O teorema principal do Capítulo 1 será o Teorema de Gauss, que relaciona as curvaturas seccionais do ambiente e da subvariedade por meio da segunda forma fundamental. Este teorema nos fornece a seguinte equação

$$K(u, v) - \overline{K}(u, v) = \langle A(u, u), A(v, v)\rangle - |A(u, v)|^2,$$

onde $u, v \in T_pM$, $K(u,v)$ é a curvatura seccional de M e $\overline{K}(u,v)$ é a curvatura seccional de $\overline{M}$ quanto aos vetores u, v. Assim, usaremos este teorema para calcularmos a curvatura seccional de algumas variedades.

Ainda no Capítulo 1, definiremos também o *vetor curvatura média* H e o conceito de *imersão mínima*, como sendo aquela cujo vetor curvatura média é nulo. Finalizaremos o primeiro capítulo com os operadores diferenciáveis, que são relevantes para este trabalho. A saber, o *gradiente* de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, o *divergente* de um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ e o *laplaciano* de f. Apresentaremos estes operadores escritos tanto em bases ortonormais de $\mathcal{X}(M)$, quanto em coordenadas. Podemos destacar o laplaciano de f, isto é $\triangle_p f$, em coordenadas $\frac{\partial}{\partial x_i}$ como sendo

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i \sqrt{det(g)} \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \right).$$

No Capítulo 2, serão apresentadas a interpretação variacional das superfícies mínimas e sua relação com a curvatura ambiente. Associando a uma variação com suporte compacto $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, apresentaremos a *primeira fórmula de variação de área*

$$\frac{d}{dt} Vol(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma -\langle F_t^N, \overrightarrow{H} \rangle = \int_\Sigma Div_\Sigma F_t,$$

onde $Div_\Sigma F_t$ é o divergente do campo variacional $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$. Neste contexto, teremos que uma *superfície mínima* é aquela que é ponto crítico do funcional área.

Também no Capítulo 2, descreveremos a segunda fórmula de variação de área para uma superfície mínima

$$\frac{d^2}{dt^2} Vol(F(\Sigma, t)) = -\int_\Sigma |\langle A(\cdot,\cdot), F_t \rangle|^2 + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma^N F_t|^2 - \int_\Sigma Tr_\Sigma \langle R(\cdot, F_t)\cdot, F_t \rangle,$$

onde $Tr_\Sigma(R(\cdot, F_t))$ é o traço de $R(\cdot, F_t)$. Em especial, destacaremos a segunda variação de área de uma hipersuperfície mínima $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ sendo dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} Vol(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 - \eta^2(|A|^2 + Ric_M(N, N)),$$

onde η é uma função tal que $F_t^N = \eta N$, e N é o vetor normal unitário a Σ. Seguindo neste contexto, definiremos uma superfície mínima *estável* como sendo aquela cuja segunda variação de área é maior ou igual a zero. Por fim, discutiremos os Teoremas de Simons e Schoen-Yau descritos acima.

No terceiro capítulo, apresentaremos as p-formas harmônicas e as aplicações harmônicas, que são objetos que têm uma relação direta, como comentamos. Esta relação será mostrada ao fim deste mesmo capítulo e na prova do teorema principal. A teoria de Hodge será utilizada para definirmos as p-formas harmônicas. Apresentaremos os conceitos de p-formas ω, derivada exterior d, adjunta d^* e o laplaciano de Hodge $\triangle_H$. Assim, uma *p-forma harmônica* ω será aquela que satisfaz

$$\triangle_H \omega = 0.$$

Para a p-forma ω, teremos o seguinte resultado que nos será útil

$$d^*\omega = -Div(\omega^\#),$$

onde $\omega^\#$ é o vetor que satisfaz $\omega(v) = \langle \omega^\#, v\rangle$. Também no terceiro capítulo, apresentaremos o *p-grupo de cohomologia de de-Rham* e o Teorema de Hodge para nos garantir a existência de p-formas harmônicas na variedade sobre a qual aplicaremos o teorema principal.

Também no terceiro capítulo, apresentaremos o objeto central da dissertação, que são as aplicações harmônicas, que como dissemos anteriormente, são pontos críticos do funcional energia de Dirichlet. O objetivo desta seção será encontrar a equação que descreve aplicações harmônicas, e isto será feito estudando variações da aplicação $u : M \to \overline{M}$. Usaremos a imersão isométrica da variedade $\overline{M}$ no Espaço Euclidiano, provada por Nash, para apresentarmos a primeira fórmula de variação da energia de Dirichlet. Em particular, a aplicação $u : M \to \overline{M}$ é harmônica se e somente se satisfaz a equação fundamental de aplicações harmônicas que precisaremos na prova do teorema principal

$$\triangle_g u = -A^{\overline{M}}_{u(x)}(\nabla u, \nabla u).$$

No Capítulo 4, será exibida a prova da Identidade de Bochner para funções em variedades, e através dela apresentaremos a conexão entre a geometria das superfícies de nível com a curvatura ambiente feita via Equação de Gauss. Em seguida, temos a prova do teorema principal 4.1. Por fim, temos a aplicação deste teorema para o toro $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde faremos a prova da conjectura de Geroch descrita acima. Para esta prova, usaremos a existência de aplicações e 1-formas harmônicas nesta variedade via Teorema de Hodge. Além disto, traremos um resultado sobre a topologia de conjuntos de nível das aplicações harmônicas em $\mathbb{T}^3$, necessário para aplicarmos a desigualdade integral 4.1.

1

Preliminares de Riemanniana

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

2) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;

3) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima em relação às condições 1) e 2).

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação), com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, é dito um *sistema de coordenadas* (ou *parametrização*) de M em p. Assim, $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfaz as condições 1) e 2) é dita uma *estrutura diferenciável* em M.

Sobre a condição 3), podemos dizer que dada uma estrutura diferenciável em M, podemos completá-la em uma máxima, de modo que se agregármos a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição 2).

Definição 1.2. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é dita *diferenciável* em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Traremos agora algumas considerações que nos serão úteis para definirmos vetor tangente em variedades. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, com $\alpha(0) = p$. Vamos escrever

$$\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)),$$

$t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), ..., x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja agora f uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p. Vamos restringir f à curva α e escrever a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{t=0} \frac{dx_i}{dt}|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Desta forma, a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v. É com esta propriedade característica que definiremos vetor tangente em variedades.

Definição 1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O *vetor tangente à curva* α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente em* p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Dada uma parametrização $x : U \to M^n$ em $p = x(0)$, podemos exprimir a função f nesta parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, ..., x_n)), \quad q \in (x_1, ..., x_n) \in U,$$

bem como α, por

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)). \tag{1.1}$$

Portanto, restringindo f a α, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1, ..., x_n)|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \left(\sum_i x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) f. \end{aligned}$$

Desta forma, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização x por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right). \tag{1.2}$$

Vale observar que $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada"

$$x_i \mapsto x(0, ..., x_i, ..., 0).$$

A expressão 1.2 nos mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Além disto, 1.2 também nos diz que o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização $x : U \to M$ determina uma base associada

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

em T_pM. É imediato que a estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização x. O espaço vetorial T_pM é chamado o *espaço tangente* de M em p.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, vamos escolher uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Escrevemos $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Demonstração. Sejam $x : U \to M_1$ e $y : V \to M_2$ parametrização em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Exprimindo φ nestas parametrizações, podemos escrever

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x(q) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \,, \quad q = (x_1, ..., x_n) \in U, (y_1, ..., y_m) \in V.$$

Por outro lado, exprimindo α na parametrização x, temos

$$x^{-1} \circ \beta(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Portanto,

$$y^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), ..., x_n(t)), ..., y_m(x_1(t), ..., x_n(t)))\,.$$

Daí, temos que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})\}$ de $T_{\varphi(p)}M_2$, relacionado à parametrização y, é dada por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} x_j'(0), ..., \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} x_j'(0) \right). \tag{1.3}$$

A relação 1.3 nos mostra imediatamente que $\beta'(0)$ independe da escolha de α. Temos ainda que 1.3 pode ser escrita como

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x_j'(0)), \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n,$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ indica uma matriz $m \times n$ e $x_j'(0)$ indica uma matriz coluna com n elementos. Portando, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM_1 em $T_{\varphi(p)}M_2$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações x e y é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$. $\square$

Definição 1.4. A aplicação linear $d\varphi_p$ dada na Proposição 1.1 é dita a *diferencial* de φ em p.

Definição 1.5. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, biunívoca e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um *difeomorfismo local* em p se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.

O conceito de difeomorfismo conduz naturalmente a idéia de equivalência entre variedades diferenciáveis. É imediato que se $\varphi : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$. Em particular, as dimensões M_1 e M_2 são iguais. O teorema seguinte é uma recíproca local deste fato.

Teorema 1.1. *Seja $\varphi : M_1^n \to M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p.*

A demonstração é uma aplicação imediata do Teorema da Função Inversa do $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar alguns exemplos de variedades diferenciáveis:

Exemplo 1.1. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela identidade é uma variedade diferenciável.

Exemplo 1.2. A esfera $\mathbb{S}^n$ é dada por

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

A estrutura diferenciável $\{(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})\}$ usual de $\mathbb{S}^n$ pode ser obtida atravéz das parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1})$ e $(\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$, onde π_1 é a projeção estereográfica a partir do polo norte, e π_2 a projeção estereográfica a partir do polo sul. Assim, $\mathbb{S}^n$ é uma variedade diferenciável.

Exemplo 1.3. Generalizando o exemplo acima, temos o das *Hipersuperfícies Regulares do* $\mathbb{R}^n$. Estas são definidas como um subocnjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, tal que, para todo $p \in M^k$ existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$ tais que:

a) x é um homeomorfismo diferenciável.

b) $(dx)_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

Com tal parametrização x, M^k tem a sua estrutura diferenciável.

Para darmos um outro exemplo de variedade, vamos introduzir alguns conceitos. Dizemos que um grupo G age em uma variedade diferenciável M se existe uma aplicação $\varphi : G \times M \to M$ tal que

i) Para cada $g \in G$, a aplicação $\varphi_g : M \to M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$, é um difeomorfismo, e $\varphi_e =$ identidade.

ii) Se $g_1, g_2 \in G$, $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

Dizemos que uma ação é *propriamente descontínua* se todo $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$, tal que $U \cap g(U) = \emptyset$, para todo $g \neq e$.

Quando G age sobre M, a ação determina uma relação de equivalência $\backsim$ em M, onde $p_1 \backsim p_2$ se e só se $p_2 = g(p_1) = gp_1$, para algum $g \in G$. Indicamos por M/G o espaço quociente de M por esta relação de equivalência. A aplicação $\pi : M \to M/G$, dada por

$$\pi(p) = \text{classe de equivalência de } p = Gp$$

será chamada *projeção de* M em M/G.

Temos um resultado que diz que para uma variedade diferenciável M e $G \times M \to M$ uma ação propriamente descontínua, M/G possui uma estrutura diferenciável de modo que a projeção $\pi : M \to M/G$ é um difeomorfismo local.

Com efeito, para cada $p \in M$ vamos escolher uma parametrização $x : V \to M$ em p de modo que $x(V) = U$, onde $U \subset M$ é uma vizinhança de p tal que $U \cap g(U) = \emptyset$, $g \neq e$. Temos que $\pi|U$ é injetiva, donde $y = \pi \circ x : V \to M/G$ é também injetiva. Então, a família $\{(V, y)\}$ é uma estrutura diferenciável.

Exemplo 1.4. Vamos considerar o grupo G das translações por vetores de coordenadas inteiras do $\mathbb{R}^n$, onde a ação de G em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$G(x_1, ..., x_n) = (x_1 + z_1, ..., x_n + z_n),$$

para $z_1, ..., z_n \in \mathbb{Z}$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. A ação é propriamente descontínua de G em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, $G = \mathbb{Z}^n$.

Assim, o espaço quociente $\mathbb{R}^n/G$, com a estrutura diferenciável descrita no parágrafo acima é dito o $n-toro$ $\mathbb{T}^n$. No caso $n = 1$, corresponde ao círculo $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$. De forma geral, $\mathbb{T}^n$ é difeomorfo ao produto cartesiano $\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$. Se $k = 2$, o 2-toro $\mathbb{T}^2$ é difeomorfo ao toro de revolução de $\mathbb{R}^3$ dado como imagem inversa do zero da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a^2)^2 - r^2.$$

Definição 1.6. Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que

i) para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, dizemos que M é *não-orientável.* Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo i) é chamada uma *orientação* de M e assim, M é dita *orientada.* Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo i) *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda satisfazem i).

Exemplo 1.5. Vamos considerar a variedade diferenciável dada pelo conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem. Esta é nomeada $\mathbb{RP}^n$. Ela pode ser descrita como o espaço quociente da esfera unitária $\mathbb{S}^n$ pela relação de equivalência que identifica $p \in \mathbb{S}^n$ com seu ponto antípoda $A(p) = -p$. Neste caso, o grupo G é $\mathbb{Z}_2$. Logo, $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$. Tal descrição é feita por tomarmos cada reta que passa pela origem, que determina, portanto, dois pontos antípodas na esfera. Esta correspondência é então bijetiva.

A variedade diferenciável $\mathbb{RP}^n$ é orientável se, e somente se, n é ímpar. Com efeito, dada uma orientação de $\mathbb{S}^n$ definida pelo campo posição $N(p) = p$, temos que uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $T_p\mathbb{S}^n$ é positiva se, e somente se, $\{v_1, ..., v_n, p\}$ é base positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $det(v_1, ..., v_n, p) > 0$. Então, dada uma base positiva $\{v_1, ..., v_n\}$ de $T_p\mathbb{S}^n$, o isomorfismo $dA(p) = -Id$ preserva a orientação se, e somente se

$$det(-v_1, ..., -v_n, -p) = (-1)^{n+1} det(v_1, ..., v_n, p) > 0.$$

Isto nos diz que a orientação é preservada se, e somente se, n é ímpar.

Definição 1.7. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Este conjunto, chamado de *fibrado tangente*, possui uma estrutura diferenciável natural induzida por M (de dimensão 2n).

Definição 1.8. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável é uma correspondência em que para cada ponto $p \in M$ é associado um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_i X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

onde cada $X_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a x, com $i = 1, .., n$. Desta forma, X é diferenciável se, e somente se, as funções X_i são diferenciáveis para alguma (e portanto, para qualquer) parametrização.

Temos também que é conveniente absorver a idéia sugerida por (1.4) e pensar num campo de vetores como a aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, definida como

$$(Xf)(p) = \sum_i X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in \mathcal{D},$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização x. Esta operação é uma derivação, logo, obedece a regra de Leibniz (regra do produto).

Sejam X, Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Vale observar que a composição YX não é uma derivação, então não representa um campo vetorial. Por outro lado, existe um único campo vetorial Z tal que, para toda $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$. Aqui, como citamos acima, vale a regra do produto, ou seja, para a parametrização $x : U \to M$, temos

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Então, para todo $f \in \mathcal{D}(M)$

$$XY(f) = X\left(\sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$YX(f) = Y\left(\sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Logo, usando Schwarz, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, então

$$Z(f) = XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j}\left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Portanto, $[X, Y]$ é um campo vetorial.

Definição 1.9. O campo vetorial Z dado acima é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ *de* X *e* Y. $[X, Y]$ é evidentemente diferenciável.

1.2 Métrica Riemanniana

Uma *métrica Riemanniana* ou *estrutura Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $g(\cdot, \cdot)_p$, isto é, uma forma bilinear, simétrica, positiva definida, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, ..., x_n) = p \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$, então $g(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_i}(p))_p = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U. É evidente que g_{ij} não depende da escolha do sistema de coordenadas. Quando não houver risco de confusão sobre qual métrica Riemanniana está sendo considerada, iremos usar a notação

$$g(X, Y) = \langle X, Y\rangle.$$

Outra maneira de descrever a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é afirmar que para todo par X e Y de campo de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X, Y\rangle$ é diferenciável em V. Desta forma, verifica-se que esta definição é equivalente à anterior.

Será conveniente deixar de escrever o termo p em $g(\cdot,\cdot)_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são ditas *expressão da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Uma variedade diferenciável munida da estrutura Riemanniana diferenciável é chamada *variedade Riemanniana.* Vamos agora definir uma noção de equivalência para a estrutura Riemanniana.

Definição 1.10. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ é chamado uma *isometria* se

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \quad \text{para todo } p \in M_1, u, v \in T_pM_1. \tag{1.5}$$

Definição 1.11. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M_1 \to M_2$ é uma *isometria local* em $p \in M_1$ se existe uma vizinhança $U \subset M_1$ de p tal que $f : U \to f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.5).

Dizemos que a variedade Riemanniana M_1 é *localmente isométrica* à variedade Riemanniana M_2 se para todo p em M_1 existe uma vizinhança U de p em M_1 e uma isometria local $f : U \to f(U) \subset M_2$.

Agora, vamos descrever como uma métrica Riemanniana pode definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M.

Seja $p \in M$ e seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização, com $p \in x(U)$, na orientação de M (diremos que tal orientação é positiva). Vamos considerar uma base ortonormal positiva $\{E_1, ..., E_n\}$ em T_pM e escrever $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ na base $\{E_i\}$ como $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_j a_{ij}E_j$. Logo,

$$g_{ik}(p) = \langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij}a_{kl}\langle E_j, E_l\rangle = \sum_j a_{ij}a_{kj}.$$

Sabendo que o $vol(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ do paralelepípedo formado pelos vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ em T_pM é igual a $vol(E_1, ..., E_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}), temos que

$$vol(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}) = det(X_{ij}) = \sqrt{det(g_{ij})}(p). \tag{1.6}$$

Se $y : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é outra parametrização positiva em torno de p, com $h_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle(p)$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{det(g_{ij})}(p) &= vol(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}) \\ &= J \cdot vol(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}) \\ &= J \cdot \sqrt{det(h_{ij})}(p),\end{aligned}$$

onde $J = det(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}) = det(dy^{-1} \circ dx) > 0$ é o determinante da diferencial da mudança de coordenadas.

Seja agora $R \subset M$ uma região (conjunto aberto e conexo), cujo fecho é compacto. Vamos supor que R está contida em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de uma parametrização $x : U \to M$ positiva, e que a fronteira de $x^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (vale observar que a noção de medida nula em $\mathbb{R}^n$ é invariante por difeomorfismos). Desta forma, definimos o volume $vol(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 ... dx_n. \tag{1.7}$$

Esta expressão está bem definida. Com efeito, se R está contida em outra vizinhança coordenada $y(U)$ de uma parametrização positiva $y : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, teremos, com as notações acima e pela fórmula de mudança variáveis em integrais múltiplas,

$$\int_{x^{-1}(R)} \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 ... dx_n = \int_{y^{-1}(R)} \sqrt{det(h_{ij})} dy_1 ... dy_n = vol(R),$$

o que nos diz que a Definição 1.7 não depende do sistema de coordenadas escolhido (nisto, usou-se a hipótese da orientabilidade de M, para evitar que $vol(M)$ troque de sinal).

Para definir o volume de uma região compacta R, que não está contida em alguma vizinhança coordenada, podemos considerar uma partição da unidade $\{\varphi_i\}$ subordinada a uma cobertura (finita) de R por vizinhanças coordenadas $x(U_i)$ e escrever

$$Vol(R) = \sum_i \int_{x_i^{-1}(R)} \varphi_i v.$$

(Veja [16] para mais detalhes). Pode-se verificar que a expressão acima não depende da escolha da partição da unidade.

1.3 Conexão Riemanniana

Uma *conexão afim* ∇, em uma variedade diferenciável M, é uma aplicação ∇: $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(X) \to \mathcal{X}(M)$, denotada por $(X, Y) \overset{\nabla}{\mapsto} \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$;

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$;

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Pondo o sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em torno de p, temos

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

Daí,

$$\nabla_X Y = \nabla_{(\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i})} \left(\sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{ij} X_i Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ij} X_i \frac{\partial(Y_j)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Fazendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, em que definimos Γ_{ij}^k como os *Símbolos de Christoffel*, concluimos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{ij} X_i Y_j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{ij} X_i \frac{\partial(Y_j)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_k \left[\sum_{ij} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k + \sum_i X_i \frac{\partial(Y_k)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \sum_k \left[\sum_{ij} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k + X(Y_k) \right] \frac{\partial}{\partial x_k},
\end{aligned}$$

o que mostra que $\nabla_X Y$ depende dos valores de X, Y em p, e das derivadas de Y ao longo de X.

Definição 1.12. Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é *compatível com a métrica* se

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.13. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Observação 1. Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Afinal, pelo Teorema de Schwarz, para f função em valores reais

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \\
&\Rightarrow \\
&\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}$$

Nos permitindo então dizer que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$, o que justifica o nome dado.

Agora vamos enunciar o teorema principal desta seção:

Teorema 1.2 (Levi Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:*
i) ∇ é simétrica;
ii) ∇ é compatível com a métrica.

Esta conexão citada neste teorema é dita *conexão Levi Civita* ou *conexão Riemanniana* de M e é caracterizada pela fórmula abaixo

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}.\end{aligned}$$

Veja [8] para mais detalhes. Assim, podemos escrever a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos da métrica g_{ij}. Com efeito, dado $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$,

$$\begin{aligned}\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle = \sum_l \langle \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle - \frac{\partial}{\partial x_k}\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle\right\}. \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\right\}.\end{aligned}$$

Como a matriz g_{km} admite uma inversa g^{km}, teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum \left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\right\} g^{km}.$$

Exemplo 1.6. Para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, temos que $\Gamma_{ij}^k = 0$, pois $g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \delta_{ij}$ (constante). Segue da expressão da conexão em termos dos símbolos de Christoffel

$$\nabla_X Y = \sum_k \left[\sum_{ij} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k + X(Y_k)\right] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

que a conexão Levi-Civita no Espaço Euclidiano coincide com a derivada usual. Portanto, em $\mathbb{R}^n$, podemos escrever $\nabla_X Y = (XY_1, ..., XY_n)$, que é o mesmo que $dY(X)$.

1.4 Curvatura

Nesta seção, iremos introduzir os objetos mais importantes para este trabalho que são as noções de curvatura. A princípio, definiremos o tensor curvatura, como segue.

Definição 1.14. Chamaremos de *tensor curvatura* a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}&R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \\ &R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.\end{aligned}$$

Exemplo 1.7. Como vimos no Exemplo 1.6, a conexão Levi-Civita em $\mathbb{R}^n$ é dada por $\nabla_X Y = (XY_1, ..., XY_n)$. Com isto temos que, para $Z = (Z_1, ..., Z_n)$, e $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla_X Z = (XZ_1, ..., XZ_n)$ e $\nabla_Y Z = (YZ_1, ..., YZ_n)$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\nabla_Y \nabla_X Z = (YXZ_1, ..., YXZ_n);\\
&\nabla_X \nabla_Y Z = (XYZ_1, ..., XYZ_n);\\
&\nabla_{[X,Y]} Z = ((XY - YX)Z_1, ..., (XY - YX)Z_n).
\end{aligned}$$

Então

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Portanto, temos que o tensor curvatura de $\mathbb{R}^n$ é nulo.

Dado este exemplo, podemos pensar na curvatura de uma variedade diferenciável M como uma quantidade que mede, em certo sentido, o quanto M deixa de ser Euclidiana.

Dado um sistema de coordenadas x_i em $p \in M$, temos que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$. Como vimos na sessão anterior. Desta forma,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Logo, a curvatura mede, em certo sentido, a não-comutatividade da derivada covariante.

Exemplo 1.8. Considere o toro $\mathbb{T}^n$ do Exemplo 1.4. Temos uma métrica Riemanniana natural em $\mathbb{T}^n$ ao qual torna a projeção $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ uma isometria local. Nesse caso, $\mathbb{T}^n$ é localmente $\mathbb{R}^n$, e portanto sua curvatura é zero.

Seja o toro $\mathbb{T}^n$ descrito no Exemplo 1.4. Considerando que, localmente, $\mathbb{T}^n$ é $\mathbb{R}^n$, ou seja, cada ponto de $\mathbb{T}^n$ representa uma classe de pontos em $\mathbb{R}^n$, a curvatura de $\mathbb{T}^n$ é também zero.

Vamos explicar agora o porquê da palavra tensor na definição de curvatura.

Definição 1.15. Um tensor de ordem r é uma aplicação r-linear $T : \mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ tal que

$$\begin{aligned}
&T(X_1, ..., fX_i + Y_i, ..., X_r)\\
&= fT(X_1, ..., X_i, ..., X_r) + T(X_1, ..., Y_i, ..., X_r), \quad X_i \in \mathcal{X}(M), f \in C^\infty(M).
\end{aligned}$$

Um tensor depende apenas dos valores de $X_1, ..., X_r$ em dado ponto $p \in M$. De fato, dado um ponto $p \in M$, seja U uma vizinhança de p onde definimos campos $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(M^n)$, de forma que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}$, $i = 1, ..., n$, formam uma base de $T_q M$. Sejam então

$$X_1 = \sum_{i_1} X_{i_1} E_{i_1}, ..., X_r = \sum_{i_r} X_{i_r} E_{i_r}, \quad i_1, ..., i_r = 1, ..., n,$$

as restrições a U dos campos $X_1, ..., X_r$ escritas por $\{E_i\}$. Por linearidade,

$$T(X_1, ..., X_r) = \sum_{i_1, ..., i_r} X_{i_1} ... X_{i_r} T(E_{i_1}, ..., E_{i_r}).$$

Esta expressão nos diz que o valor de $T(X_1, ..., X_r)$ em um ponto $p \in M$, depende apenas dos valores em p de $T(E_{i_1}, ..., E_{i_r})$, e dos valores de $X_1, ..., X_r$ em p.

Com isto, podemos afirmar que a curvatura é um tensor. Com efeito, para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} R(X,Y)fZ &= \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ + \nabla_{[X,Y]} fZ \\ &= \nabla_Y (X(f)Z + f\nabla_X Z) - \nabla_X (Y(f)Z + f\nabla_Y Z) + \nabla_{XY-YX} fZ \\ &= YX(f)Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z \\ &- XY(f)Z - Y(f)\nabla_X Z - X(f)\nabla_Y Z - f\nabla_X \nabla_Y Z \\ &+ XY(f)Z + f\nabla_{XY} Z - YX(f)Z - f\nabla_{YX} Z \\ &= f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_X \nabla_Y Z + f\nabla_{XY} Z - f\nabla_{YX} Z \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{XY} Z + \nabla_{-YX} Z) \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

A linearidade das outras entradas segue diretamente.

Temos também outras propriedades de curvatura dadas nas seguintes proposições. Destacamos que a partir de agora usaremos a seguinte notação:

$$\langle R(X,Y)(Z), T \rangle = (X, Y, Z, T).$$

Proposição 1.2 (Primeira identidade de Bianchi)**.**

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Proposição 1.3. *a) (X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0;*

b) (X,Y,Z,T) = - (Y,X,Z,T);

c) (X,Y,Z,T) = - (X,Y,T,Z);

d) (X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y).

Para $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_pM$, vamos escrever

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}})\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_l R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

onde R^l_{ijk} são chamados de componentes da curvatura. Para escrevermos R^l_{ijk} em termos dos coefcientes Γ_{ij}^k da conexão Riemanniana, vamos fazer:

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\sum_l \Gamma_{ik}^l\frac{\partial}{\partial x_l}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\sum_l \Gamma_{jk}^l\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\\
&= \sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l} + \Gamma_{ik}^l\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_l}\right) - \sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_l} + \Gamma_{jk}^l\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\\
&= \sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l} + \Gamma_{ik}^l\sum_s\Gamma_{jl}^s\frac{\partial}{\partial x_s}\right) - \sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_l} + \Gamma_{jk}^l\sum_s\Gamma_{il}^s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\\
&= \sum_l\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \Gamma_{ik}^s\sum\Gamma_{jl}^l - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \Gamma_{jk}^s\sum\Gamma_{il}^l\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\\
&= \sum_l\left(\sum_s\Gamma_{ik}^s\Gamma_{js}^l - \sum_s\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^l\Gamma_{js}^l - \sum_l\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i},$$

que são os componentes da curvatura que procurávamos. Fazendo

$$\begin{aligned}
\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_s}\rangle &= \langle\sum_l R_{ijk}^l\frac{\partial}{\partial x_l},\frac{\partial}{\partial x_s}\rangle\\
&= \sum_l R_{ijk}^l g_{ls}\\
&= R_{ijks},
\end{aligned}$$

temos as identidades vistas nesta seção:

$$\begin{aligned}
&R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0\\
&R_{ijks} = -R_{jiks}\\
&R_{ijks} = -R_{ijsk}\\
&R_{ijks} = R_{ksij}.
\end{aligned}$$

1.4.1 Curvatura Seccional

Sejam um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$. Definimos a curvatura seccional $K(\sigma)$ no ponto p e na direção de σ pela expressão

$$K(\sigma) = K(v,u) = \frac{(v,u,v,u)}{|v\wedge u|^2},$$

onde $\{v,u\}$ é uma base qualquer de σ e $|v\wedge u|^2 = \sqrt{|v|^2|u|^2 - \langle v,u\rangle^2}$.

1.4.2 Curvatura Ricci e Curvatura Escalar

Seja $v = e_n \in T_pM$ um vetor unitário. Tomemos uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a v. Lembrando que $|v \wedge e_i|^2 = 1$, já que temos uma base ortonormal, vamos considerar os seguintes valores:

$$Ric_p(v) = \sum_i \langle R(v, e_i)v, e_i\rangle = \sum_i K(v, e_i),$$

$$R_M(p) = \sum_j Ric_p(e_i) = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle.$$

Respectivamente, os valores acima são chamados de *curvatura de Ricci* na direção v e *curvatura Escalar* de M em p. Vamos mostrar agora que as expressões acima independem das escolhas das bases ortonormais. Para fazer isto, vamos dar uma caracterização intrínseca das expressões acima. Primeiramente, vamos definir uma forma bilinear em T_pM: sejam $v, u \in T_pM$ e a aplicação bilinear:

$$Q(v, u) = \text{traço da aplicação} \quad e \mapsto R(v, e)u.$$

Agora, seja uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}, v\}$ de T_pM. Temos então

$$Q(v, u) = \text{traço de } R(v, e)u = \sum_i \langle R(v, e_i)u, e_i\rangle = Q(u, v).$$

A última igualdade se dá por $(v, u, e, f) = (e, f, v, u)$, como já vimos. Assim, podemos afirmar que Q é simétrica, seu traço está bem definido e não depende da base ortonormal escolhida. Também podemos dizer que $Q(v, v) = Ric_p(v)$, pois ao tomarmos a base ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}, v\}$, vale que $R(v, v, v, v) = 0$. Desta forma, podemos dizer que $Ric_p(v)$ está intrinsecamente definida. Por Q ser simétrica, temos que Q corresponde a uma aplicação linear auto-adjunta A, dada por

$$\langle A(v), u\rangle = Q(v, u).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{Traço de A} = \sum_j \langle A(e_j), e_j\rangle &= \sum_j Q(e_j, e_j) \\ &= \sum_j Ric_p(e_j) \\ &= R_M(p). \end{aligned}$$

Isto demonstra o que havíamos afirmado. A forma bilinear Q é chamada de *tensor de Ricci.*

Exemplo 1.9. É possível provar que para uma superfície bidimensional S, a curvatura seccional K de S é sua curvatura Gaussiana. Desta forma, dados $\{v, u\}$ base de T_pS,

$$Ric(v) = K(v, u);$$
$$Ric(u) = K(u, v).$$

Logo,

$$R_S = Ric(v) + Ric(u) = 2K(v,u).$$

O caso particular de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ segue da Equação de Gauss que iremos ver mais a frente, veja Teorema 1.6.

Vamos apresentar agora uma noção geométrica para a curvatura escalar.

Teorema 1.3. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $B_r(p)$ a bola geodésica de raio r centrada em p. Seja também ω_n o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Para r suficientemente pequeno,*

$$Vol(B_r(p)) = \omega_n r^n \left(1 - \frac{R_M(p)r^2}{6(n-2)} + O(r^3)\right).$$

Desta forma, a curvatura escalar mede o desvio do volume de uma bola geodésica de raio suficientemente pequeno para uma bola também pequena no Espaço Euclidiano.

1.5 Imersões Isométricas

Definição 1.16. Sejam M^m e $\overline{M}^n$ variedades diferenciáveis.

i) Uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma *imersão* se $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva;

ii) Se, além disto, em todo $p \in M$, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, dizemos que f é um *mergulho*;

iii) Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, dizemos que M é uma *subvariedade* de $\overline{M}$.

Vale observar que se $f : M^m \to \overline{M}^n$ é uma imersão, então $m \leq n$, e a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão f.

Dada uma imersão $f : M \to \overline{M}$, com $dimM = n$ e $dim\overline{M} = n + m$, a métrica de $\overline{M}$ induz naturalmente uma métrica em M: se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle df_pv_1, df_pv_2\rangle$. Com esta métrica induzida, aplicação f é chamada de *imersão isométrica.*

1.5.1 O Teorema de Gauss

Seja $p \in M$ e $f : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. A idéia nesta sessão é decompor $df_p(v)$ no espaço tangente a $f(U)$ com o espaço normal a $f(U)$. Para simplificar as notações no decorrer do texto, a partir de agora, escreveremos U em vez de $f(U)$, p em vez de $f(p)$, e $v \in T_p\overline{M}$, em vez de $df_p(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$.

Considerando estas notações, para $\overline{U} \subset \overline{M}$ uma vizinhança de p, estenderemos um campo local de vetores em U para um campo local de vetores em $\overline{U}$. Para cada $p \in \overline{M}$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ é decomposto na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Logo, se $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N,$$

onde $v^T \in T_pM$ e é chamado de componente tangencial de v e $v^N \in (T_pM)^\perp$ e é chamado de componente normal de v. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ é nomeada $\overline{\nabla}$. Desta forma, sejam X, Y campos locais de M e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$. Vamos definir

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

(A variedade M herda a conexão de Levi Civita de $\overline{M}$. Veja [8] para mais detalhes).

Para X, Y campos locais em M, definimos um campo local em $\overline{M}$ normal a M por

$$A(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = (\nabla_X Y)^N.$$

$A(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Além disso, temos

Teorema 1.4. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $A : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$A(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de conexão, já temos a aditividade de X, Y e que $A(fX, Y) = fA(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Vamos provar então que $A(X, fY) = fA(X,Y)$. Indicando $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, temos

$$\begin{aligned} A(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{fY}) - \nabla_X fY \\ &= \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} + \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - X(f)Y - f\nabla_X Y \\ &= \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y \\ &= fA(X,Y), \end{aligned}$$

pois em M, $\overline{f} = f$, então $\overline{X}(\overline{f})\overline{Y} = X(f)Y$. Para provar que A é simétrica, vamos utilizar a simetria da conexão Riemanniana. Então temos

$$\begin{aligned} A(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X \\ &= A(Y,X), \end{aligned}$$

pois em M, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$. □

Como A é bilinear, concluímos que A, exprimido em um sistema de coordenadas, tem seu valor dependendo apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $B_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, dada por

$$B_\eta(X,Y) = \langle A(X,Y), \eta \rangle, \quad X, Y \in T_pM,$$

é uma forma bilinear simétrica pela proposição anterior. Com isto, vamos à definição:

Definição 1.17. A forma quadrática

$$B_\eta(X,Y) = \langle A(X,Y), \eta\rangle$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

A aplicação B_η faz corresponder a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(X), Y\rangle = B_\eta(X,Y) = \langle A(X,Y), \eta\rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão desta aplicação em termos da derivada covariante.

Teorema 1.5. *Seja $p \in M$, $X \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(X) = -(\nabla_X N)^T.$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in T_pM$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(X), Y\rangle = B_\eta(X,Y) = \langle A(X,Y), N\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle \\ &= -\langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle,\end{aligned}$$

afinal, $X\langle Y, N\rangle = 0 = \langle \nabla_X Y, N\rangle + \langle Y, \nabla_X N\rangle$. □

Agora, vamos relacionar a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ atravez da segunda forma fundamental. Se $u, v \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(u,v)$ e $\overline{K}(u,v)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por u e v.

Teorema 1.6 (Teorema de Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e u, v vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(u,v) - \overline{K}(u,v) = \langle A(u,u), A(v,v)\rangle - |A(u,v)|^2.$$

Demonstração. Sejam X, Y extensões locais ortogonais de u, v, respectivamente, e tangentes a M. Sejam também $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais de X, Y, respectivamente, a $\overline{M}$. Então:

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_X\nabla_Y X - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}), Y\rangle.$$

Afinal,

$$\langle \nabla_{[X,Y]}X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X}, Y\rangle = \langle (\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{X})^N, Y\rangle = 0.$$

Vamos fazer $A(X,Y) = \sum_i B_i(X,Y)E_i$, para E_i, $i = 1,..,m$, $m = dim(\overline{M}) - dim(M)$, sendo componentes ortonormais de $(T_pM)^{\perp}$ e $B_i = B_{E_i}$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}(\sum_i B_i(X,X)E_i + \nabla_X X) \\
&= \sum_i \{B_i(X,X)\overline{\nabla}_{\overline{Y}}E_i + \overline{Y}B_i(X,X)E_i\} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X. \\
&\Rightarrow \\
\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}, Y\rangle &= \langle \sum_i \{B_i(X,X)\overline{\nabla}_{\overline{Y}}E_i + \overline{Y}B_i(X,X)E_i\} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\nabla_X X, Y\rangle \\
&= \langle \sum_i B_i(X,X)\overline{\nabla}_{\overline{Y}}E_i, Y\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle \\
&= -\langle \sum_i B_i(X,X)E_i, \overline{\nabla}_{\overline{Y}}Y\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle \\
&= -\sum_i \langle B_i(X,X)E_i, B_i(Y,Y)E_i\rangle\langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle \\
&= -\sum_i B_i(X,X)B_i(Y,Y) + \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, Y\rangle = -\sum_i B_i(X,Y)B_i(X,Y) + \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) &= \langle \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_X\nabla_Y X - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}), Y\rangle \\
&= \sum_i B_i(X,X)B_i(Y,Y) - \sum_i B_i(X,Y)B_i(X,Y).
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 1.10. Seja a aplicação $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$
x(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos(\theta), sen(\theta), cos(\varphi), sen(\varphi)), \quad (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2.
$$

Como x_θ e x_φ são L.I, dx é injetiva, então a aplicação é uma imersão. Esta aplicação é uma imersão de $\mathbb{R}^2$ na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, cuja imagem $x(\mathbb{R}^2)$ é o toro T^2, chamado *toro de Clifford.*

O vetor

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(-sen(\theta), cos(\theta), 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cos(\theta), -sen(\theta), 0, 0)
$$

é ortogonal a x_θ e x_φ. Logo, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-cos(\theta), -sen(\theta), 0, 0) = [\nabla_{x_\theta}x_\theta]^N = A(x_\theta, x_\theta)$. Temos também que

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -sen(\varphi), cos(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -cos(\varphi), -sen(\varphi))
$$

é normal a x_φ e x_θ. Logo, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-cos(\varphi),-sen(\varphi)) = [\nabla_{x_\varphi} x_\varphi]^N = A(x_\varphi, x_\varphi)$. Além disso, $[\nabla_{x_\theta} x_\varphi]^N = A(x_\theta, x_\varphi) = (0,0,0,0)$, pois $\frac{\partial^2 x}{\partial x_\theta \partial x_\varphi} = (0,0,0,0)$. Como a curvatura seccional de $\mathbb{R}^4$ é 0, temos que

$$K(x_\theta, x_\varphi) = \langle A(x_\theta, x_\theta), A(x_\varphi, x_\varphi)\rangle = 0.$$

Observação 2. No caso de hiperfície $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a equação de Gauss admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $S_\eta = S$ é diagonal, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores de S. Então $B(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $B(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto, temos que

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Exemplo 1.11. A partir deste caso, vamos dar o exemplo da esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para isto, vamos definir a aplicação de Gauss. Seja $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Seja também N uma extensão local de η, unitária e normal em M. A esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por: $\mathbb{S}^n_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\}$. Agora, seja a aplicação de Gauss: $g : M^n \to \mathbb{S}^n_1$. Vamos transladar a origem do campo N para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e ainda teremos que

$$\text{g(p) = ponto final do transladado de N(q).}$$

Como T_pM e $T_p\mathbb{S}^n_1$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que $dg_p : T_pM \to T_pM$ é dada por

$$dg_p(x) : \frac{d(N \circ c(t))}{dt}|_{t=0} = \nabla_x N = (\nabla_x N)^T = -S_\eta(x),$$

onde $c(0) = q$ e $c'(0) = x$, para $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$. Concluímos então que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Com isto, vamos orientar $\mathbb{S}^n$ pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$. Assim, a aplicação normal de Gauss é igual a $(-i)$, onde i é a identidade de $\mathbb{S}^n$, Daí, temos que a aplicação S_N tem todos os seus autovalores iguais a 1. Vejamos:

$$dg_q(v) = \frac{d(N \circ \alpha(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d(-\alpha(t))}{dt}|_{t=0} = -\alpha'(0) = -v = -S_N(v)$$
$$\Rightarrow$$
$$S_N(v) = v.$$

Isto significa que para todo $p \in \mathbb{S}^n$, todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$ é autovetor. Portanto, a curvatura seccional da esfera unitária $\mathbb{S}^n$ é dada por

$$K(e_i, e_j) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Como $\{e_i\}$ é base ortonormal de $T_p\mathbb{S}^n$, temos que $|e_i \wedge e_j|^2 = 1$, então $K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle = 1$. Podemos então calcular a curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^n$ em p na direção de e_i $Ric_p(e_i)$ e a curvatura escalar de $\mathbb{S}^n$ em p $R_{\mathbb{S}^n}(p)$ da seguinte maneira:

$$Ric_p(e_i) = \sum_{j=1}^{n-1} K(e_i, e_j) = n - 1, \quad \text{e}$$

$$R_{\mathbb{S}^n}(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric_p(e_i) = n \cdot (n-1).$$

Exemplo 1.12. Neste exemplo, vamos calcular a curvatura escalar de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Mas antes disso precisamos relembrar algumas identidades. Para uma variedade produto $M = M_1 \times M_2$, temos a *métrica produto*, donde para $X, Y \in TM$,

$$g_{n_1,n_2}^{M_1 \times M_2}(X,Y) := g_{n_1}^{M_1}(X_1,Y_1) + g_{n_2}^{M_2}(X_2,Y_2).$$

Com isto, a conexão com respeito à métrica produto é dada por

$$\nabla_Y X = \nabla_{Y_1} X_1 + \nabla_{Y_2} X_2,$$

pois $\nabla_{X_j} X_i = 0$, se $i \neq j$. Além disso, a curvatura com respeito a métrica produto é dada por

$$R(X,Y)Z = R_{M_1}(X_1,Y_1)Z_1 + R_{M_2}(X_2,Y_2)Z_2,$$

para $X, Y, Z \in TM$. Assim, vale mencionar que $K_M(X_1, X_2) = 0$. Usando o cálculo da curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ feito anteriormente, podemos calcular as curvaturas de $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Aqui, destacamos que o tensor curvatura de $\mathbb{S}^1$ é identicamente nulo, segundo os Exemplos 1.4 e 1.8. Tomando uma base ortonormal de TM $\{E_1, E_2, E_3)\}$, em que $\{E_1, E_2\}$ é base ortonormal de $T\mathbb{S}^2$ e $\{E_3\}$ é base ortonormal de $T\mathbb{S}^1$, temos que

$$\begin{aligned}
&K(E_1,E_2) = \langle R(E_1,E_2)E_1,E_2\rangle = K_{\mathbb{S}^2} = 1;\\
&K(E_1,E_3) = \langle R(E_1,E_3)E_1,E_3\rangle = \langle R(E_1,0)E_1,E_3\rangle + \langle R(0,E_3)0,E_3\rangle = 0;\\
&K(E_2,E_3) = \langle R(E_2,E_3)E_2,E_3\rangle = \langle R(E_2,0)E_2,E_3\rangle + \langle R(0,E_3)0,E_3\rangle = 0;\\
&Ric(E_1) = K(E_1,E_2) + K(E_1,E_3) = 1;\\
&Ric(E_2) = K(E_1,E_2) + K(E_2,E_3) = 1;\\
&Ric(E_3) = K(E_1,E_3) + K(E_2,E_3) = 0;\\
&R_M = Ric(E_1) + Ric(E_2) + Ric(E_3) = 2.
\end{aligned}$$

1.5.2 Geodésicas e Imersões Mínimas

Nesta subsessão, daremos uma interpretação geométrica da curvatura seccional, fazendo uma relação desta com a curvatura gaussiana estudada em geometria diferencial.

Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental B_η é identicamente nula em p. A imersão é *totalmente geodésica* se ela é geodésica pra todo $p \in M$.

Proposição 1.4. *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em p se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Demonstração. Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Sejam também N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N\rangle = 0$, obtemos em p

$$\begin{aligned}
B_\eta(X,X) = \langle S_\eta(X), X\rangle &= -\langle \overline{\nabla}_X N, X\rangle\\
&= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle\\
&= \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle.
\end{aligned}$$

Decorre daí que f é geodésica em p se e só se, para todo $X \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a X em p satisfaz à condição de $\overline{\nabla}_X X$ não ter componente normal, isto é, $\overline{\nabla}_X X = \nabla_X X$. Logo, se uma for nula, a outra também será. Portanto, toda geodésica γ partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

$\square$

Agora, seja $S = exp_p(B \cap \sigma)$, sendo $B \subset T_pM$ bola aberta, exp_p difeomorfismo (ver [8]) e $\sigma \subset T_pM$ subespaço de dimensão 2. S é, portanto, uma subvariedade de dimensão 2 passando por p. Intuitivamente, S é uma superfície formada por "pequenas"geodésicas que saem de p e são tangentes a σ em p.

Pela proposição anterior, S é geodésica em p, donde as segundas formas fundamentais da inclusão $i : S \hookrightarrow M$ são nulas em p. Temos que, para K_S a curvatura gaussiana de S,

$$K_S = K(p, \sigma).$$

O que nos diz que a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ é a curvatura gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que saem de p e são tangentes a σ.

E. Cartan demonstrou que se uma variedade Riemanniana M é tal que, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_pM$, σ subespaço de dimensão 2, existe uma subvariedade totalmente geodésica de M tangente a σ, então M tem curvatura seccional constante.

Definição 1.18. Seja $Tr(S_i)$ o traço do operador S_i e $\{E_i\}$ base ortonormal do fibrado normal da variedade M. Definimos o *vetor curvatura média* H por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (Tr(S_i))E_i, \quad S_i = S_{E_i}.$$

Definição 1.19. Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é *mínima* se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, tem-se $Tr(S_\eta) = 0$.

Desta forma, a imersão f é mínima se e somente se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$. Estas superfícies tem certas propriedades relevantes, cujas serão melhor definidas e caracterizadas no próximo capítulo.

Exemplo 1.13. Seja o toro de Clifford descrito no Exemplo 1.10. Este objeto está imerso na esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. O vetor posição

$$x(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos(\theta), sen(\theta), cos(\varphi), sen(\varphi))$$

é o vetor normal a esfera $\mathbb{S}^3$ quanto ao $\mathbb{R}^4$. Desta forma, temos que o seguinte vetor é tangente à esfera $\mathbb{S}^3$, pois seu produto escalar com $x(\theta, \varphi)$ é zero:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos(\theta), sen(\theta), -cos(\varphi), -sen(\varphi)).$$

Podemos perceber que o vetor N é normal aos vetores $X_\theta = (-sen(\theta), cos(\theta), 0, 0)$ e $X_\varphi = (0, 0, -sen(\varphi), cos(\varphi))$. Portanto, N é normal ao toro de Clifford quanto à esfera $\mathbb{S}^3$. Vamos calcular o vetor curvatura média do toro de Clifford quanto ao ambiente $\mathbb{S}^3$. Vale lembrar que

$$A(X_\theta, X_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cos(\theta), -sen(\theta), 0, 0);$$
$$A(X_\varphi, X_\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -cos(\varphi), -sen(\varphi)).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left(\langle A(\theta,\theta), N\rangle + \langle A(\varphi,\varphi), N\rangle\right) N \\
&= \left(-\frac{cos^2(\theta)}{2} - \frac{sen^2(\theta)}{2} + \frac{cos^2(\varphi)}{2} + \frac{cos^2(\varphi)}{2}\right) N \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) N \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, o toro de Clifford é uma imersão mínima quanto ao ambiente $\mathbb{S}^3$.

1.6 Operadores Diferenciáveis

Sejam M uma variedade Riemanniana, $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. O *gradiente de* f é o campo vetorial ∇f em M definido por

$$\langle \nabla f, v\rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_pM.$$

Sejam $v \in T_pM$, $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas de M e $\{E_i\}$ base ortonormal de T_pM. Segundo a Proposição 1.1, temos

$$df_p(v) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i'(0) = \langle \nabla f, v\rangle.$$

Então

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \sum_i E_i(f) E_i.$$

Mas podemos escrever também o gradiente de f em coordenadas:

$$
\begin{aligned}
& df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = \langle \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = \sum_j b_j g_{ji} \\
& \Rightarrow \\
& \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ik} = \left(\sum_j b_j g_{ji}\right) g^{ik} = \left(\sum_j b_j g_{ji} g^{ik}\right) \\
& \Rightarrow \\
& \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ik} = \sum_i \left(\sum_j b_j g_{ji} g^{ik}\right) = \sum_j b_j \left(\sum_i g_{ji} g^{ik}\right) = \sum_j b_j \delta_{jk} = b_k.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\nabla f = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Definimos o operador *Hessiana de* f como o 2-tensor simétrico dado por

$$Hess(f)(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle,$$

para $\{E_i\}$ base ortonormal de T_pM.

Vamos definir também o *divergente de* X como a função $Div(X) : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$Div(X)(p) = \text{traço da aplicação linear} \quad Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p), \quad p \in M.$$

Desta forma,

$$Div(X) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Assim, vale destacar a seguinte propriedade:

$$Div(fX) = fDiv(X) + \langle \nabla f, X \rangle. \tag{1.8}$$

Teorema 1.7 (Teorema do Divergente)**.** *Seja X um campo de classe C^1 em uma variedade M de dimensão n, e seja $M_0 \subset M$ um compacto com bordo de classe C^1 e dimensão n. Então*

$$\int_{M_0} Div(X) = \int_{\partial M_0} \langle X, v \rangle,$$

onde ∂M_0 tem a orientação induzida de M_0 e v é o campo vetorial unitário que aponta para fora de M_0.

Vamos escrever também $Div(X)$ em coordenadas. Escolheremos uma função f com suporte compacto. Pelo teorema acima e pela equação (1.8), podemos escrever

$$\int_M fDiv(X)\sqrt{det(g)}dx = -\int_M \langle \nabla f, X \rangle \sqrt{det(g)}dx.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, X \rangle &= \langle \sum_{j,i} \frac{df}{dx_i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle \\
&= \sum_k \sum_{i,j} \frac{df}{dx_i} X_k g^{ij} g_{jk} \\
&= \sum_k \frac{df}{dx_k} X_k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_M fDiv(X)\sqrt{det(g)}dx = -\int_M \langle \nabla f, X \rangle \sqrt{det(g)}dx &= -\int_M \sum_k \frac{df}{dx_k} X_k \sqrt{det(g)}dx \\
&= \int_M -\langle (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}), (X_1, ..., X_n)\sqrt{det(g)} \rangle dx \\
&= \int_M -\langle (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}), (\sqrt{det(g)}X_1, ..., \sqrt{det(g)}X_n) \rangle dx \\
&= \int_M fDiv_{\mathbb{R}^n}(\sqrt{det(g)}X_1, ..., \sqrt{det(g)}X_n)dx \\
&= \int_M f \sum_i \frac{\partial \sqrt{det(g)}X_i}{\partial x_i} dx.
\end{aligned}$$

Então,

$$Div(X)\sqrt{det(g)} = \sum_i \frac{\partial \sqrt{det(g)} X_i}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow$$

$$Div(X) = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \sum_i \frac{\partial \sqrt{det(g)} X_i}{\partial x_i}.$$

Com estes, definimos o operador $\triangle : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, dito o *laplaciano* de $f \in \mathcal{D}(M)$, como

$$\triangle f = Div \nabla f.$$

De acordo com as equações de ∇f e $Div(X)$ em coordenadas que escrevemos acima, temos

$$\triangle f = Div \nabla f = Div \left(\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i \sqrt{det(g)} \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \right).$$

2

Superfícies Mínimas em Variedades

2.1 Primeira Variação de Área

Nesta seção, discutiremos sobre variações de área de subvariedades com o objetivo de definirmos superfícies mínimas, que são objetos bastante estudados na geometria. A importância destes objetos, neste trabalho, se dá por relacionarmos estas superfícies com curvaturas Ric e escalar da variedade ambiente.

Seja M uma variedade e $\Sigma \subset M$ uma subvariedade. Uma variação de Σ é uma aplicação $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com suporte compacto e fronteira fixada. Assim, $F = Id$, se x está fora de um conjunto compacto, e

$$F(x, 0) = x;$$
$$F(x, t) = x, \forall x \in \partial\Sigma.$$

O campo de vetores $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$ é chamado de *campo variacional*. Vamos utilizá-lo para calcular as variações de área de Σ. Com efeito, seja

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j})$$
$$v(t) = \sqrt{det(g_{ij}(t))}\sqrt{detg^{ij}(0)}.$$

Dado isto, a fórmula da área é:

$$Vol(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma v(t)\sqrt{det(g_{ij}(0)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}Vol(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma \frac{d}{dt}v(t)\sqrt{det(g_{ij}(0))}.$$

Observação 3. Temos que $v(t)$ está bem definido, independente do sistema de coordenadas em Σ, afinal,

$$\sqrt{detg_{ij}(t)} = det(dy^{-1} \circ dx)\sqrt{deth_{ij}(t)}, \quad e$$
$$\sqrt{detg^{ij}(0)} = det(dx^{-1} \circ dy)\sqrt{deth^{ij}(0)}.$$

Então

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{det(g_{ij}(t))}\sqrt{detg^{ij}(0)} \\ &= det(dy^{-1}\circ dx)\sqrt{deth_{ij}(t)}det(dx^{-1}\circ dy)\sqrt{deth^{ij}(0)} \\ &= \sqrt{deth_{ij}(t)}\sqrt{deth^{ij}(0)}. \end{aligned}$$

Para calcular $\frac{d}{dt}v(t)$ em algum ponto $x \in M$, devemos escolher um sistema de coordenadas ortonormal, isto é, no ponto x, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, ou seja, $g_{ij}(0) = 0$ se $i \neq j$, e, $g_{ij}(0) = 1$ se $i = j$. Feito isto, vamos calcular $\frac{d}{dt}v(t)$ no ponto $g_{ij}(0)$ sob o vetor direção $g'_{ij}(0)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t)|_{t=0} &= \frac{1}{2}(detg_{ij}(0))^{-1/2}det'g_{ij}(t)|_{t=0}\sqrt{detg^{ij}(0)} \\ &= \frac{1}{2}det'g_{ij}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\partial det_{g_{ij}(0)}[g'_{ij}(0)] \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{traço de} \quad g'_{ij}(0). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} g'_{ij}(0) = \frac{\partial}{\partial t}\langle F_{x_i}, F_{x_j}\rangle &= \langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_j}\rangle + \langle F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_j}\rangle \\ &= \langle \nabla_{F_{x_i}}F_t, F_{x_j}\rangle + \langle F_{x_i}, \nabla_{F_{x_j}}F_t\rangle, \end{aligned}$$

pois, $[F_t, F_{x_i}] = \nabla_{F_t}F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}}F_t = 0$. Então

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{2}\sum_i 2\langle \nabla_{F_{x_i}}F_t, F_{x_i}\rangle = \sum_i \langle \nabla_{F_{x_i}}F_t, F_{x_i}\rangle = Div_\Sigma F_t.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}v(t) = Div_\Sigma F_t.$$

Agora, vamos relacionar esta fórmula com o vetor curvatura média $\overrightarrow{H} = \sum_i A(F_{x_i}, F_{x_i})$. Para fazer isto, escreveremos o campo de vetores F_t como a soma da sua componente tangente com a sua componente normal. Observe que $Div_\Sigma F_t = Div_\Sigma F_t^N + Div_\Sigma F_t^T$. Vamos calcular primeiramente $Div_\Sigma F_t^N$. Temos que, $Div_\Sigma F_t^N = \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}}F_t^N, F_{x_i}\rangle$ e $F_t^N = \sum_{l=1}^{n-k}\langle F_t^N, N_l\rangle N_l$. Com efeito,

$$\begin{aligned} Div_\Sigma F_t^N &= \sum_{i=1}^k\sum_{l=1}^{n-k}\langle \nabla_{F_{x_i}}\langle F_t^N, N_l\rangle N_l, F_{x_i}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k\sum_{l=1}^{n-k}\langle F_t^N, N_l\rangle\langle \nabla_{F_{x_i}}N_l, F_{x_i}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k\sum_{l=1}^{n-k}\langle F_t^N, N_l\rangle\langle -A(F_{x_i}, F_{x_i}), N_l\rangle. \end{aligned}$$

Mas $\sum_{i=1}^{k}\langle -A(F_{x_i},F_{x_i}),N_l\rangle = \langle -\overrightarrow{H},N_l\rangle$. Então

$$\begin{aligned} Div_\Sigma F_l^N &= \sum_{l=1}^{n-k}\langle F_t^N,N_l\rangle\langle -\overrightarrow{H},N_l\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{n-k}\langle F_t^N,\langle -\overrightarrow{H},N_l\rangle N_l\rangle \\ &= -\langle F_t^N,\overrightarrow{H}\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\langle F_t^N,\overrightarrow{H}\rangle + Div_\Sigma F_t^T.$$

Integrando ambos os lados e aplicando o teorema de Stokes, obtemos a Primeira Fórmula de Variação de Área

$$\frac{d}{dt}Vol(F(\Sigma,t)) = \int_\Sigma Div_\Sigma F_t = \int_\Sigma -\langle F_t^N,\overrightarrow{H}\rangle. \tag{2.1}$$

Definição 2.1. Uma subvariedade $\Sigma^k \subset M^n$ é um *ponto crítico do funcional área* se

$$\frac{d}{dt}Vol(F(\Sigma,t)) = 0,$$

para toda variação F de Σ, com suporte compacto.

Proposição 2.1. *Uma subvariedade $\Sigma^k \subset M$ é ponto crítico do funcional área se e somente se $\overrightarrow{H} = 0$, ou seja, Σ^k é mínima.*

Demonstração. Vamos supor que Σ é ponto crítico do funcional área, e que em um dado ponto $p \in \Sigma$, $\overrightarrow{H}$ não é zero. Vamos construir a seguinte variação

$$F(x,t) = exp_x(tf(x)H(x)),$$

onde $f: M \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $f(p) = 1$, $f(x) = 0$ para x fora de uma bola de raio r centralizada em p. Assim,

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = f(x)H(x).$$

Na equação da primeira variação de área de Σ, teremos

$$\frac{d}{dt}Vol(F(\Sigma,t)) = \int_\Sigma -\langle f(x)H(x),H(x)\rangle = \int_\Sigma -f(x)|H(x)|^2.$$

Em p,

$$\frac{d}{dt}Vol(F(\Sigma,t)) = -\int_\Sigma |H(x)|^2 < 0.$$

Contradição, pois Σ é ponto crítico do funcional área. A recíproca é imediata. $\square$

2.2 Segunda Variação de Área

Na seção anterior, conhecemos a primeira variação de área de uma subvariedade $\Sigma \subset M$, e como consequência, sua relação com o vetor curvatura média, o $Div_\Sigma F_t$ e as superfícies mínimas. Nesta seção, vamos calcular a segunda variação de área destes mesmos objetos para introduzirmos um conceito também relevante, que é o de estabilidade. Precisaremos disto para, no fim desta seção, apresentarmos o Teorema de Schoen-Yau que é motivação para o teorema principal deste trabalho.

A segunda variação de área pode ser escrita a princípio como

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}Vol(F(\Sigma,t)) = \int \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}v(t)\sqrt{detg_{ij}(0)}.$$

Podemos escrever

$$2\frac{d}{dt}v(t) = Tr(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))v(t).$$

Com efeito, se

$$\begin{aligned}((v(t))^2) &= detg_{ij}(t)detg^{ij}(0)\\ &= detg_{ij}(t)detg_{ij}(t_0)detg^{ij}(t_0)detg^{ij}(0)\\ &= det(g_{ij}(t)g^{ij}(t_0))(v(t_0))^2,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{d((v(t))^2)}{dt}|_{t=t_0} = 2v(t_0)\frac{dv(t)}{dt}|_{t=t_0} &= det'_{g_{ij}(t_0)g^{ij}(t_0)}[g'_{ij}(t_0)g^{ij}(t_0)](v(t_0))^2\\ &= det'_I[g'_{ij}(t_0)g^{ij}(t_0)](v(t_0))^2\\ &= Tr(g'_{ij}(t_0)g^{ij}(t_0))(v(t_0))^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$2\frac{dv(t)}{dt}|_{t=t_0} = Tr(g'_{ij}(t_0)g^{ij}(t_0))v(t_0).$$

Com isto, vamos fazer

$$\begin{aligned}2\frac{d^2}{dt^2}v(t)|_{t=0} &= Tr(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))'v(t) + Tr(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\frac{1}{2}Tr(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))v(t)\\ &= Tr(g''_{ij}(0)g^{lm}(0) + g'_{ij}(0)g'^{lm}(0)) + \frac{1}{2}Tr^2(g'_{ij}(0))\\ &= Tr(g''_{ij}(0)) + Tr(g'_{ij}(0)g'^{lm}(0)) + \frac{1}{2}Tr^2(g'_{ij}(0)).\end{aligned}$$

Mas $g'^{lm}(0) = -g'_{lm}(0)$. De fato,

$$\begin{aligned}&(g_{lm}g^{lm}) = I \Rightarrow (g_{lm}g^{lm})' = (I)'\\ &\Rightarrow\\ &g'_{lm}g^{lm} + g_{lm}g'^{lm} = 0 \Rightarrow g'^{lm} = -g'_{lm}.\end{aligned}$$

Então

$$2\frac{d^2}{dt^2}v(t)|_{t=0} = Tr(g''_{ij}(0)) + Tr(g'_{ij}(0)(-g'_{lm}(0))) + \frac{1}{2}Tr^2(g'_{ij}(0))$$
$$= Tr(g''_{ij}(0)) - Tr(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) + \frac{1}{2}Tr^2(g'_{ij}(0)).$$

Temos ainda que

$$Tr(g'_{ij}) = \sum \frac{\partial}{\partial t}\langle F_{x_i}, F_{x_i}\rangle = \sum 2\langle \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i}\rangle = \sum 2\langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i}\rangle$$
$$= \sum 2 - \langle A(F_{x_i}, F_{x_i}), F(t)\rangle$$
$$= -2\langle \overrightarrow{H}, F_t\rangle.$$

Se considerarmos que Σ é uma superfície mínima, $\overrightarrow{H} = 0$, então o termo descrito acima se anula. Daí,

$$2\frac{d^2}{dt^2}v(t)|_{t=0} = Tr(g''(0)) - Tr(g'(0)g'(0)).$$

Além disto, para uma matriz simétrica $\mathcal{A}$, $Tr(\mathcal{A}^2) = |\mathcal{A}|^2$. Portanto,

$$2\frac{d^2}{dt^2}v(t)|_{t=0} = Tr(g''(0)) - |g'(0)|^2.$$

Lema 2.1. *Em um ponto x, obtemos:*

$$|g'(0)|^2 = 4|\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2;$$
$$Tr(g''(0)) = 2|\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2 + 2|\nabla^N_\Sigma F_t|^2 + 2Tr\langle R(\cdot, F_t)F_t, \cdot\rangle + 2Div_\Sigma(F_{tt}).$$

Demonstração. Seja:

$$(g''(0)) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}g_{ij}(t)\right]|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\langle F_{x_i}, F_{x_j}\rangle\right]|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_j}\rangle + \langle F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_j}\rangle\right]|_{t=0}$$
$$= \langle \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_j}\rangle + \langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_j}\rangle + \langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_j}\rangle$$
$$+ \langle F_{x_i}, \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_j}\rangle.$$

Então

$$Tr(g''(0)) = \sum_{i=1}^{k} = [2\langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_i}\rangle + 2\langle \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_i}\rangle].$$

Ora,

$$R(F_{x_i}, F_t)F_t = \nabla_{F_t}\nabla_{F_{x_i}}F_t - \nabla_{x_i}\nabla_{F_t}F_t = \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}}\nabla_{F_t}F_t$$
$$\Rightarrow$$
$$\nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i} = R(F_{x_i}, F_t)F_t + \nabla_{F_{x_i}}\nabla_{F_t}F_t.$$

Então

$$\begin{aligned}
&2\langle \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_i}\rangle = 2\langle R(F_{x_i}, F_t)F_t, F_{x_i}\rangle + 2\langle \nabla_{F_{x_i}}\nabla_{F_t}F_t, F_{x_i}\rangle \\
&\Rightarrow \\
&\sum_{i=1}^{k} 2\langle \nabla_{F_t}\nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_i}\rangle = 2Tr\langle R(F_{x_i}, F_t)F_t, F_{x_i}\rangle + 2Div_\Sigma(\nabla_{F_t}F_t).
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_i}\rangle = \langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T\rangle + \langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^N, (\nabla_{F_t}F_{x_i})^N\rangle.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T\rangle &= \sum_j \langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T, F_{x_j}\rangle\langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T, F_{x_j}\rangle \\
&= \sum_j \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t\rangle\langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t\rangle.
\end{aligned}$$

Para F_{x_j} base ortonormal de $T_p\Sigma$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T, (\nabla_{F_t}F_{x_i})^T\rangle &= \sum_{i,j} \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t\rangle\langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t\rangle \\
&= |\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Ainda temos que,

$$\sum_i \langle (\nabla_{F_t}F_{x_i})^N, (\nabla_{F_t}F_{x_i})^N\rangle = \sum_i |(\nabla_{F_t}F_{x_i})^N|^2 := |\nabla_\Sigma^N F_t|^2.$$

Portanto,

$$Tr(g''(0)) = 2|\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2 + 2|\nabla_\Sigma^N F_t|^2 + 2Tr\langle R(F_{x_i}, F_t)F_t, F_{x_i}\rangle + 2Div_\Sigma(\nabla_{F_t}F_t).$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
g'(0) = \frac{d}{dt}\langle F_{x_i}, F_{x_i}\rangle &= \langle \nabla_{F_t}F_{x_i}, F_{x_j}\rangle + \langle F_{x_i}, \nabla_{F_t}F_{x_i}\rangle \\
&= -\langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t\rangle - \langle A(F_{x_j}, F_{x_i}), F_t\rangle \\
&= -2\langle A(F_{x_i}, A_{x_j}), F_t\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|g'(0)|^2 = |-2\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2 = 4|\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2.$$

□

Com isto, temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -|\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2 + |\nabla_\Sigma^N F_t|^2 - Tr\langle R(\cdot, F_t)\cdot, F_t\rangle + Div_\Sigma(\nabla_{F_t}F_t).$$

Portanto, para uma superfície mínima Σ, a segunda variação de área é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}Vol(F(\Sigma, t)) = -\int_\Sigma |\langle A(\cdot,\cdot), F_t\rangle|^2 + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma^N F_t|^2 - \int_\Sigma Tr_\Sigma\langle R(\cdot, F_t)\cdot, F_t\rangle.$$

Definição 2.2. Dizemos que Σ tem *fibrado normal trivial* se existe uma base ortonormal global para o fibrado normal. Quando Σ é uma hipersuperfície, isto é equivalente a dizer que Σ é *two-sided.*

Observe que quando M é orientável, então toda hipersuperfície orientável é two-sided. Vamos então destacar o caso particular das hipersuperfícies $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ two-sided. Neste caso, para o campo variacional F_t, temos que $F_t^N = \eta N$, para η função real em M, e N o vetor unitário normal à hipersuperfície. Tendo isto, vamos escrever cada termo da equação da segunda variação de área para o caso em questão. Com efeito,

$$\begin{aligned} |\langle A(.,.), \eta N\rangle|^2 &= \sum_{i,j} \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), \eta N\rangle \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), \eta N\rangle \\ &= \sum_{i,j} \eta^2 \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), N\rangle \langle A(F_{x_i}, F_{x_j}), N\rangle \\ &= \eta^2 |A|^2. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} Tr\langle R(\cdot, \eta N)\cdot, \eta N\rangle &= \eta^2 Tr\langle R(\cdot, N)\cdot, N\rangle \\ &= \eta^2 Ric_M(N, N). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\nabla_\Sigma^\perp \eta N|^2 = \sum_i |\nabla_{F_{x_i}}^\perp \eta N|^2 &= \sum_i \langle \nabla_{F_{x_i}}^\perp \eta N, \nabla_{F_{x_i}}^\perp \eta N\rangle \\ &= \sum_i \langle F_{x_i}(\eta) N + \eta \nabla_{F_{x_i}} N, F_{x_i}(\eta) N + \eta \nabla_{F_{x_i}} N\rangle \\ &= \sum_i \langle F_{x_i}(\eta) N, F_{x_i}(\eta) N\rangle \\ &= \sum_i (F_{x_i}(\eta))^2 \\ &= |\nabla_\Sigma \eta|^2. \end{aligned}$$

Pois, $\nabla_{F_{x_i}} N$ é tangente a Σ. De fato,

$$2\langle N, \nabla_{F_{x_i}} N\rangle = F_{x_i}(\langle N, N\rangle) = 0.$$

Portanto, para uma hipersuperfície mínima Σ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} Vol(F(\Sigma, t)) &= -\int_\Sigma \eta^2 |A|^2 + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 - \int_\Sigma \eta^2 Ric_M(N, N) \\ &= \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 - \eta^2(|A|^2 + Ric_M(N, N)). \end{aligned}$$

Definição 2.3. Dizemos que uma subvariedade mínima $\Sigma^k \subset M^n$ é *estável* se para toda variação F de Σ com fronteira fixada tivermos

$$\frac{d^2}{dt^2} Vol(F(\Sigma, t)) \geq 0.$$

Teorema 2.1 (J.Simons)**.** *Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície mínima, estável e fechada com fibrado normal trivial. Se $Ric_M \geq 0$, então Σ^{n-1} é totalmente geodésica e $Ric_M(N,N) = 0$ em Σ^{n-1}, para N vetor normal unitário a Σ^{n-1}.*

Em particular, não existem hipersuperfícies mínimas estáveis em ambientes de curvatura Ric positiva.

Demonstração. Tomando $\eta = 1$ em $F_t^N = \eta N$, e o fato de Σ ser mínima e estável,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 - (|A|^2 + Ric_M(N,N))\eta^2 = \int_\Sigma -(|A|^2 + Ric_M(N,N)) \geq 0 \\
&\Rightarrow \\
&\int_\Sigma |A|^2 + Ric_M(N,N) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $Ric_M(N,N) = 0$ em Σ e $|A|^2 = 0$, o que nos diz que $[\nabla_{E_i} E_i]^N = 0$, ou seja, Σ é totalmente geodésica. $\square$

Apresentaremos a seguir um exemplo de variedade que nos mostra que a curvatura escalar positiva do ambiente não impede a existência de superfícies mínimas estáveis.

Exemplo 2.1. Seja a variedade produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ descrita no Exemplo 1.12. Como vimos, a curvatura escalar $R_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1}$ é igual a 2. Para θ_0 uma constante, a superfície $\mathbb{S}^2 \times \theta_0$ é mínima e estável em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ com a métrica produto.

O teorema a seguir, citado no início desta seção, tem sua importância por ser uma motivação para o teorema principal apresentado neste trabalho. Esta relevância se dá pela forma como a curvatura escalar positiva do ambiente 3-dimensional influi na topologia das superfícies mínimas estáveis.

Teorema 2.2 (Schoen-Yau)**.** *Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma hipersuperfície mínima, estável e fechada com fibrado normal trivial. Se $R_M > 0$, então*

$$\int_\Sigma (R_M + |A|^2) \leq 4\pi \mathcal{X}(\Sigma) = 8\pi.$$

Em particular Σ^2 é difeomorfa a $\mathbb{S}^2$ ou um $\mathbb{RP}^2$.

Demonstração. Vamos primeiramente provar a seguinte equação:

$$Ric(N,N) = \frac{1}{2}[R_M - R_\Sigma + H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2],$$

onde N é o vetor normal unitário a Σ, R_M a curvatura escalar de M e R_Σ a curvatura escalar de Σ. Com efeito, para $\{E_1, E_2\}$ uma base ortonormal ao longo de Σ, temos que

$$
\begin{aligned}
R_M &= Ric(N,N) + Ric(E_1,E_1) + Ric(E_2,E_2) \\
&= 2Ric(N,N) + 2R_{1212}.
\end{aligned}
$$

Logo, $Ric(N,N) = \frac{1}{2}R_M - R_{1212}$. Pela equação de Gauss descrita no Teorema 1.6,

$$R_{1212} = K_\Sigma - det(A_\Sigma).$$

Logo,

$$Ric(N,N) = \frac{1}{2}R_M - K_\Sigma + det(A_\Sigma).$$

Também temos que $K_\Sigma = \frac{1}{2}R_\Sigma$. Além disso,

$$\begin{aligned}
&H_\Sigma^2 = |A_\Sigma|^2 + 2det(A_\Sigma)\\
&\Rightarrow\\
&det(A_\Sigma) = \frac{1}{2}[H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Ric(N,N) = \frac{1}{2}[R_M - R_\Sigma + H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2]. \tag{2.2}$$

Como no caso em questão Σ é mínima,

$$Ric(N,N) = \frac{1}{2}[R_M - R_\Sigma - |A_\Sigma|^2].$$

Ou ainda,

$$Ric(N,N) = \frac{1}{2}R_M - K_\Sigma - \frac{1}{2}|A_\Sigma|^2.$$

Usando o fato de Σ ser mínima e estável, e tomando $\eta = 1$ em $F_t^N = \eta N$, na equação da segunda variação de área, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma |A|^2 + \frac{1}{2}R_M - K_\Sigma - \frac{1}{2}|A|^2 \leq 0\\
&\Rightarrow\\
&\int_\Sigma \frac{1}{2}R_M + \frac{1}{2}|A|^2 - K_\Sigma \leq 0\\
&\Rightarrow\\
&\frac{1}{2}\int_\Sigma R_M + |A|^2 \leq \int_\Sigma K_\Sigma = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma),
\end{aligned}$$

pelo teorema de Gauss-Bonnet. Desta forma, como $R_M > 0$, temos que $\mathcal{X}(\Sigma) > 0$, isto é, $\mathcal{X}(\Sigma) = 2$. O que nos diz que $\Sigma = \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{RP}^2$ e

$$\int_\Sigma R_M + |A|^2 \leq 2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi.$$

$\square$

3

Formas Harmônicas e Aplicações Harmônicas

3.1 Formas Harmônicas

Neste capítulo, apresentaremos um conjunto de conceitos que são objetos úteis para o contexto do teorema principal do qual apresentaremos a prova, no capítulo 4. Nesta parte, introduziremos p-formas em variedades, dentro da teoria de Hodge, e mais adiante, aplicações harmônicas, com a ideia de mostrar a relação entre estes elementos. Grande parte dos conteúdos desta seção foram retirados do texto [11].

Para trabalharmos com os objetos que serão apresentados nesta seção, precisaremos introduzir algumas notações. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas locais. Assim, para $x \in M$, vamos usar a notação $T_x^*(M)$ para indicarmos o espaço dual de $T_x(M)$ para $\mathbb{R}$. Para a base deste espaço, escreveremos $\{dx_1, ..., dx_n\}$.

Podemos então definir o espaço de produto exterior em x como sendo

$$\Lambda^p(T_x^*(M)) = T_x^*(M) \wedge ... \wedge T_x^*(M) \quad \text{(p-vezes), e}$$

$\Lambda^p(M)$ o espaço de produto exterior sobre M com fibrado $T_x^*(M)$ sobre $x \in M$. Seja $\Omega^p(M)$ o espaço das seções de $\Lambda^p(M)$, isto é, o espaço cujos elementos ω são a soma de termos da forma

$$\omega_i = \eta(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Os elementos ω são aplicações multilineares e anti-simétricas, e são chamados de *p-formas*.

Definição 3.1. O produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\Lambda^p(M)$ é dado por

$$\langle dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_p} \rangle = det(\langle dx_i, dx_j \rangle),$$

onde $\langle dx_i, dx_j \rangle = g^{ij}$, sendo g^{ij} a matriz inversa da métrica Riemanniana g_{ij} de M.

Definição 3.2. A derivada exterior $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ é dada por

$$d(\eta(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = \sum_j \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Apresentadas as p-formas e o produto exterior, podemos enunciar agora um teorema que será bastante utilizado neste trabalho:

Teorema 3.1 (Teorema de Stokes)**.** *Sejam M^n uma variedade diferenciável, $M_p \subset M$ uma subvariedade de dimensão p com fronteira, compacta e orientável, ω uma (p-1)-forma diferenciável, $p \leq n$, em M_p. Então*

$$\int_{M_p} d\omega = \int_{\partial M_p} \omega.$$

Seguindo com o contexto das p-formas em variedades, vamos definir o *operador estrela de Hodge* $\star : \Lambda^p(T_x^*M) \to \Lambda^{n-p}(T_x^*M)$, como sendo

$$\langle v, w \rangle dM = v \wedge \star w,$$

sendo dM o elemento volume dado em (1.7). Em particular,

$$\star\, dM = 1;$$
$$\star\, 1 = dM.$$

Para $e_1, ..., e_n$ base ortonormal de T_x^*M,

$$\star\, (e_1 \wedge ... \wedge e_n) = 1;$$
$$\star\, 1 = e_1 \wedge ... \wedge e_n.$$

Também temos que

$$\star\, e_1 = e_2 \wedge ... \wedge e_n, \quad e$$
$$\star\, (e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge ... \wedge e_n.$$

Em coordenadas locais $\{x_1, ..., x_n\}$, podemos escrever

$$\star 1 = \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Esta expressão é chamada de *forma volume*. Em particular

$$Vol(M) := \int_M \star 1.$$

Apresentamos o seguinte lema (ver [11])

Lema 3.1. $\star\star = (-1)^{p(n-p)} : \Lambda^p(T_x^*M) \to \Lambda^p(T_x^*M)$.

O operador estrela é necessário para introduzirmos os conceitos de operação adjunta e laplaciano dentro da teoria de Hodge para p-formas. Vamos usá-lo para escrevermos a seguinte integral, onde é definido o L^2-produto. Assim, sejam $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ com suporte compacto. O L^2-produto em $\Omega^p(M)$ é definido como

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \star 1 = \int_M \alpha \wedge \star\beta.$$

Desta forma, vamos definir a adjunta de d, em relaçao ao produto interno L^2, o qual chamaremos de d^*. Esta, define que para $\alpha \in \Omega^{p-1}$ e $\beta \in \Omega^p(M)$,

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta).$$

Logo, d^* mapeia $\Omega^p(M)$ a $\Omega^{p-1}(M)$.

Lema 3.2. *$d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ satisfaz*

$$d^* = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star .$$

Demonstração. Para $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ e $\beta \in \Omega^p(M)$,

$$d(\alpha \wedge \star\beta) = (d\alpha \wedge \star\beta) + (-1)^{p-1}(\alpha \wedge d\star\beta).$$

Se quisermos aplicar $\star\star$ em $d\star\beta$, usamos o Lema 3.1. Com efeito, temos que $d\star\beta$ é uma (n-p+1)-forma, pois β é uma p-forma, $(\star\beta)$ é uma (n-p)-forma, e portanto, $(d\star\beta)$ é uma (n-p+1)-forma. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
(-1)^{(p-1)}(\alpha \wedge d\star\beta) &= (-1)^{(p-1)}(-1)^{(n-p+1)(n-(n-p+1))}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{(p-1)}(-1)^{(p-1)(n-p+1)}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{p-1+p-1+pn-p^2-n+p}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{2p-2+pn-p^2-n+p}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{np+n-2n+1-3+2p-p^2+p}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{np+n+1-2n-2-1+2p-p^2+p}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)^{2(-n-1+p)}(-1)^{-p^2+p-1}(-1)^{np+n+1}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= (-1)(-1)^{n(p+1)+1}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta),
\end{aligned}$$

observando que $-p^2+p-1$ é sempre ímpar. Portanto,

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \star\beta) &= (d\alpha \wedge \star\beta) - (-1)^{n(p+1)+1}(\alpha \wedge \star\star d\star\beta) \\
&= \pm\star(\langle d\alpha, \beta\rangle - (-1)^{n(p+1)+1}\langle \alpha, \star d\star\beta\rangle).
\end{aligned}$$

Integrando o lado esquerdo, temos que é igual a zero, pelo teorema de Stokes. Então, integrando o lado direito,

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle d\alpha, \beta\rangle \star 1 = \int_M (-1)^{n(p+1)+1}\langle \alpha, \star d\star\beta\rangle \star 1 \\
&\Rightarrow \\
&(d\alpha, \beta) = (\alpha, (-1)^{n(p+1)+1} \star d\star\beta).
\end{aligned}$$

□

Definimos assim o Laplaciano $\triangle_H$ de Hodge como sendo:

$$\triangle_H = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Definição 3.3. Uma p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ é chamada de *harmônica* se

$$\triangle_H \omega = 0.$$

Proposição 3.1. *$\triangle_H$ é auto-adjunto, isto é,*

$$(\triangle_H \alpha, \beta) = (\alpha, \triangle_H \beta),$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
((dd^* + d^*d)\alpha, \beta) &= (dd^*\alpha, \beta) + (d^*d\alpha, \beta) \\
&= (d^*\alpha, d^*\beta) + (d\alpha, d\beta) \\
&= (\alpha, dd^*\beta) + (\alpha, d^*d\beta) \\
&= (\alpha, (dd^* + d^*d)\beta).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 3.2. $\triangle_H \alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0$ *e* $d^*\alpha = 0$.

Demonstração. Seja

$$
\begin{aligned}
(\triangle_H \alpha, \alpha) &= (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) \\
&= (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha).
\end{aligned}
$$

Ambos os termos do lado direito são não-negativos. Logo, $d^*\alpha = 0$ e $d\alpha = 0$. A recíproca é imediata. □

Temos o seguinte resultado que usaremos mais adiante: Sejam $\omega \in \Omega^1(M)$, $\phi : M \to \mathbb{R}$ e $d\phi \in \Omega^1(M)$. Daí, temos que

Proposição 3.3.

$$d^*\omega = -Div(\omega^{\#}),$$

onde $\omega^{\#}$ *é o campo definido por* $\omega(v) = \langle \omega^{\#}, v \rangle$.

Demonstração. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(\omega, d\phi) = \int_M \langle \omega, d\phi \rangle dM = (d^*\omega, \phi) &= \int_M \phi . d^*\omega dM \\
&= \int_M \sum_i \langle \omega e_i, d\phi e_i \rangle dM \\
&= \int_M \sum_i \langle \langle \omega^{\#}, e_i \rangle, \langle d\phi^{\#}, e_i \rangle \rangle dM \\
&= \int_M \langle \omega^{\#}, d\phi^{\#} \rangle dM \\
&= \int_M \langle \omega^{\#}, \nabla \phi \rangle dM.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
Div(\phi\omega^{\#}) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \phi \omega^{\#}, E_i \rangle &= \sum_i \langle E_i(\phi)\omega^{\#} + \phi \nabla_{E_i} \omega^{\#}, E_i \rangle \\
&= \sum_i \langle E_i(\phi) E_i, \omega^{\#} \rangle + \sum^{i} \phi \langle \nabla_{E_i} \omega^{\#}, E_i \rangle \\
&= \langle \nabla \phi, \omega^{\#} \rangle + \phi Div(\omega^{\#}).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_M \langle \omega^\#, \nabla\phi \rangle dM = \int_M [Div(\phi\omega^\#) - \phi Div(\omega^\#)]dM.$$

Pelo Teorema de Stokes, $\int_M Div(\phi\omega^\#)dM = \int_{\partial M} \langle \phi\omega^\#, v\rangle d(\partial M) = 0$. Portanto,

$$\int_M \langle \omega^\#, \nabla\phi \rangle dM = \int_M -\phi Div(\omega^\#)dM.$$

O que nos diz que

$$d^*\omega = -Div(\omega^\#). \tag{3.1}$$

□

Corolário 3.1. *Em particular,*

$$d^*(d\phi) = -Div(\nabla\phi) = -\triangle\phi.$$

3.1.1 Cohomologia de deRham e Teorema de Hodge

Introduziremos agora alguns conceitos que nos serão úteis para enunciarmos o Teorema de Hodge, o qual aplicaremos em um exemplo importante para este trabalho. Porém, este só será mostrado no próximo capítulo.

Chamaremos de *p-forma fechada* uma p-forma com derivada exterior zero, isto é, uma $\omega \in \Omega^p(M)$, tal que $d\omega = 0$. Definimos também uma *p-forma exata*, como sendo uma p-forma, que é uma derivada exterior de uma (p-1)-forma, isto é, uma $\omega \in \Omega^p(M)$, tal que $\omega = d\eta$, para $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$. O espaço das p-formas fechadas é denotado por $Z^p(M)$, e o espaço das p-formas exatas é denotado por $d\Omega^{p-1}(M)$.

Temos que toda forma exata é fechada. Com efeito, dada $\eta \in \Omega^{p-1}$, temos que

$$d\eta = \sum_i \frac{df(x)}{dx_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \quad \text{e}$$
$$d(d\eta) = \sum_{i,j} \frac{d^2 f(x)}{dx_j x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Mas

$$\frac{d^2 f(x)}{dx_j x_i} = \frac{d^2 f(x)}{dx_i x_j}, \quad \text{e}$$
$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Então $d(d\eta) = 0$. Estamos interessados portanto nas formas fechadas que não são exatas para definir o que segue.

Uma *classe de cohomologia*, denotada por $[\omega]$, é um elemento definido como:

$$[\omega] = \{\omega + d\eta; \eta \in \Omega^{p-1}(M)\}.$$

As classes de cohomologia trazem uma invariância integral quando pareadas com subvariedades. Vejamos: sejam M_p subvariedade de dimensão p de M, $\omega \in Z^p(M)$, $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$, e $\omega_0 \in [\omega]$, tal que $\omega_0 = \omega + d\eta$. Daí, temos

$$\int_{M_p} \omega_0 = \int_{M_p} \omega + d\eta = \int_{M_p} \omega + \int_{M_p} d\eta = \int_{M_p} \omega + \int_{\partial M_p} \eta = \int_{M_p} \omega,$$

pelo Teorema de Stokes.

Desta forma, vamos definir o *p-grupo de Cohomologia de de-Rham*, que contém as classes de cohomologia. Este é denotado por $H^p(M)$, e se define como

$$H^p(M) = \frac{Z^p(M)}{d\Omega^{p-1}(M)}.$$

As operações de soma e produto por escalar deste espaço vetorial estão bem definidas. Sejam $\omega_1, \omega_2 \in Z^p(M)$, $\omega_1^0 \in [\omega_1]$ e $\omega_2^0 \in [\omega_2]$. Então

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 = (\omega_1 + d\eta_1) + (\omega_2 + d\eta_2) = (\omega_1 + \omega_2) + (d(\eta_1 + \eta_2)).$$

Com isto, a classe $[\omega_1 + \omega_2]$ está bem definida. Temos também que para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(\omega_1 + d\eta_1) = \alpha\omega_1 + d(\alpha\eta_1).$$

Assim, $\alpha[\omega] = [\alpha\omega]$ também está bem definida. No caso em que, toda p-forma fechada $\omega \in Z^p(M)$ for exata, dizemos que $H^p(M)$ é trivial, e escrevemos $H^p(M) = 0$. Caso contrário, dizemos que $H^p(M)$ é não-trivial e escrevemos $H^p(M) \neq 0$.

Exemplo 3.1. Dada uma variedade conexa e orientável M de dimensão n, o espaço $Z^0(M)$ é o espaço das funções em M com diferencial zero, que é o espaço das funções constantes. Vamos interpretar Ω^{-1} como o espaço vetorial trivial. Temos que, $H^0(M) \backsimeq Z^0(M) = \mathbb{R}$.

Podemos destacar também que $H^n(M) = \mathbb{R}$. Afinal, todas as n-formas serão geradas por $dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, então, como são geradas por um único elemento, o espaço $H^n(M)$ terá dimensão 1 e logo $H^n(M) = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. Em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, toda p-forma fechada é exata (Ver referência [14]). Assim, $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$, se $0 < p < n$. Além disso, segundo o exemplo anterior, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, e $H^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.3. Para a esfera $\mathbb{S}^n$, temos que $H^p(\mathbb{S}^n) = 0$, se $p \notin \{0, n\}$. Observando o Exemplo 3.1, $H^p(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$, se $p \in \{0, n\}$.

Exemplo 3.4. Seja o toro $\mathbb{T}^3$. Sabemos que, localmente, $\mathbb{T}^3$ é $\mathbb{R}^3$. Logo, toda 1-forma se escreve como combinação linear de dx, dy e dz. Mas dx não é exata. Afinal, se $dx = df$, sendo $f(x, y, z) = x + c$, f não está bem definida em $\mathbb{T}^3$. Para dy e dz é análogo. Isto nos diz que $H^1(\mathbb{T}^3)$ é não-trivial, e é gerado por $[dx]$, $[dy]$ e $[dz]$. Como este conjunto é linearmente independente, podemos dizer que $H^1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície fechada, orientável e de gênero g. $H^p(S) = \mathbb{R}$, se $p \in \{0, 2\}$, e $H^p(S) = \mathbb{R}^{2g}$, se $p = 1$.

Teorema 3.2 (Teorema de Hodge). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável. Então, toda classe de cohomologia de de-Rham em $H^p(M)$ $(0 \leq p \leq n)$ contém precisamente uma p-forma harmônica.*

3.2 Aplicações Harmônicas

Seja (M, g) variedade Riemanniana n-dimensional com sistema de coordenadas locais (x_α) e $(\overline{M}, h)$ variedade Riemanniana l-dimensional com sistema de coordenadas locais (y_i). Assim, vamos escrever $dv_g = \sqrt{g}dx = \sqrt{det(g_{\alpha\beta})}dx$ para o elemento de volume de (M, g), e $g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1}$. Para uma aplicação $u \in C^2(M, \overline{M})$, vamos definir sua energia de Dirichlet. Vamos tomar u_i como sistema de coodenadas de $u(M)$. Definimos assim a função

$$e(u)(x) = \frac{1}{2}|du|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u(x))\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}.$$

Vale destacar que, para sistemas de coordenadas ortonormais, teremos

$$e(u)(x) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)^2.$$

Com isto, o funcional *energia de Dirichlet* é definido por

$$E(u) = \int_M e(u)dv_g.$$

Vamos definir uma variação da aplicação u como sendo a aplicação $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \overline{M}$, tal que

i) $F(x, 0) = u(x)$;

ii) $F(x, t) = u_t(x)$; $\quad u_t(x) = u(x) + t\phi(x), \quad \phi \in C^2(M, \mathbb{R}^l)$.

Onde a soma $u(x) + t\phi(x)$ é dada em coordenadas. Assim, um *ponto crítico* do funcional energia de Dirichlet é uma aplicação u_t tal que

$$\frac{d}{dt}(E(u_t))|_{t=0} = 0,$$

para toda variação F de u.

Definição 3.4. Uma aplicação $u \in C^2(M, \overline{M})$ é *harmônica* se é um ponto crítico do funcional energia de Dirichlet, para toda variação F de u.

Exemplo 3.6. Uma geodésica α corresponde a uma aplicação harmônica $u : I \to M$, cuja imagem é α. Com efeito, temos que $du(t) = \alpha'(t)$. Daí,

$$E(u(t)) = \int_I e(u(t))dt = \int_I \frac{1}{2}|du(t)|^2 dt = \int_I \frac{1}{2}|\alpha'(t)|^2 dt.$$

Vamos definir uma variação de α como uma aplicação $\gamma : I \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, onde $I = [a, b]$, tal que

$$\begin{aligned} \gamma(a, s) &= \alpha(a); \\ \gamma(b, s) &= \alpha(b); \\ \gamma(t, 0) &= \alpha(t). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$E(u(t,s)) = \frac{1}{2}\int_I |\gamma'(t,s)|^2 dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(E(u(t,s)))|_{s=0} = \frac{1}{2}\int_I \frac{d}{ds}|\gamma'(t,s)|^2|_{s=0}dt &= \frac{1}{2}\int_I 2\langle\gamma'(t,s), \frac{d}{ds}\gamma'(t,s)\rangle|_{s=0}dt \\
&= \int_I \langle\gamma'(t,s), \frac{d}{ds}\gamma'(t,s)\rangle|_{s=0}dt \\
&= \int_I \langle\gamma'(t,0), \frac{d}{ds}\gamma'(t,0)\rangle dt.
\end{aligned}$$

Seja a primeira variação do funcional comprimento $l(\gamma(t,s))$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}l(\gamma(t,s))|_{s=0} &= \int_I \frac{d}{ds}|\gamma'(t,s)||_{s=0}dt \\
&= \int_I \frac{1}{2}(\langle\gamma'(t,s), \gamma'(t,s)\rangle)^{-1/2}2\langle\gamma'(t,s), \frac{d}{ds}\gamma'(t,s)\rangle|_{s=0}dt \\
&= \int_I \frac{\langle\gamma'(t,s), \frac{d}{ds}\gamma'(t,s)\rangle}{\langle\gamma'(t,s), \gamma'(t,s)\rangle^{1/2}}|_{s=0}dt \\
&= \int_I \frac{\langle\gamma'(t,0), \frac{d}{ds}\gamma'(t,0)\rangle}{|\gamma'(t,0)|}dt.
\end{aligned}$$

Se α é geodésica e é parametrizada pelo comprimento de arco, temos que α é ponto crítico do funcional comprimento e $|\gamma'(t,0)| = 1$, então

$$0 = \frac{d}{ds}l(\gamma(t,s))|_{s=0} = \int_I \langle\gamma'(t,0), \frac{d}{ds}\gamma'(t,0)\rangle dt = \frac{d}{ds}(E(u(t,s)))|_{s=0}.$$

O que nos diz que $u : I \to M$ é uma aplicação harmônica.

Exemplo 3.7. Uma superfície mínima $\Sigma \subset M$ corresponte a uma aplicação de inclusão $u : \Sigma \to M$ harmônica. Com efeito, tomando como a variação de Σ a variação descrita na seção 2.1 e $\{E_i\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(E(u))|_{t=0} = \int_\Sigma \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|du|^2|_{t=0}dv_g &= \int_\Sigma \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i |du(E_i)|^2|_{t=0}dv_g \\
&= \int_\Sigma \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_i \langle du(E_i), du(E_i)\rangle|_{t=0}dv_g \\
&= \int_\Sigma \sum_i \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle du(E_i), du(E_i)\rangle|_{t=0}dv_g \\
&= \int_\Sigma \sum_i \frac{1}{2}2\langle du(E_i), \nabla_{E_t}du(E_i)\rangle|_{t=0}dv_g \\
&== \int_\Sigma \sum_i \langle du(E_i), \nabla_{E_t}du(E_i)\rangle|_{t=0}dv_g.
\end{aligned}$$

Mas, em $t = 0$, temos a inclusão, logo $u(x) = x$ e $du(E_i) = E_i$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(E(u))|_{t=0} &= \int_\Sigma \sum_i \langle E_i, \nabla_{E_t} E_i \rangle dv_g \\
&= \int_\Sigma \sum_i \langle E_i, \nabla_{E_i} E_t \rangle dv_g \\
&= \int_\Sigma Div_\Sigma E_t dv_g \\
&= \frac{d}{dt}(Vol(\Sigma, t)),
\end{aligned}$$

pela equação 2.1. Por esta igualdade, temos que se Σ é ponto crítico do funcional área, ou seja, se Σ é superfície mínima, então $u : \Sigma \to M$ é uma aplicação de inclusão harmônica. Vale destacar também que se u é aplicação harmônica e imersão isométrica, então u é mínima.

Vamos ao primeiro resultado sobre uma aplicação $u \in C^2(M, \overline{M})$ harmônica. O objetivo é apresentar as equações de uma aplicação harmônica: a versão intrínseca e a versão extrínseca. Na proposição seguinte, estamos trabalhando com variações dadas pelo sistema de coordenadas locais. Estes resultados foram retirados do texto [19].

Proposição 3.4. *Uma aplicação $u \in C^2(M, \overline{M})$ é harmônica se, e somente se satisfaz*

$$\triangle_g u_i + g^{\alpha\beta}\Gamma^i_{jk}(u)\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} = 0 \quad \textit{em } M, \quad (1 \leq i \leq l),$$

onde $\triangle_g$ é o operador Laplaciano de Beltrami em (M, g), dado por

$$\triangle_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta})$$

e

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}h^{im}(h_{mj,k} + h_{kj,m} - h_{jk,m})$$

é o símbolo de Christoffel da métrica h em $\overline{M}$.

Demonstração. Sejam $U \subset M$, $V \subset \overline{M}$ e $\phi \in C^2_0(U, \mathbb{R}^l)$. Considerando a variação em coordenadas $u + t\phi : U \to V$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij}(u+t\phi)(u^i_\alpha + t\phi^i_\alpha)(u^j_\beta + t\phi^j_\beta)\sqrt{g}dM \\
&= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\frac{d}{dt}[h_{ij}(u+t\phi)]|_{t=0}(u^i_\alpha + t\phi^i_\alpha)(u^j_\beta + t\phi^j_\beta)\sqrt{g}dM \\
&+ \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij}(u+t\phi)\frac{d}{dt}[(u^i_\alpha + t\phi^i_\alpha)(u^j_\beta + t\phi^j_\beta)]|_{t=0}\sqrt{g}dM \\
&= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij,k}(u)(\phi^k)(u^i_\alpha)(u^j_\beta)\sqrt{g}dM \\
&+ \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij}(u)((\phi^i_\alpha . u^j_\beta) + (u^i_\alpha . \phi^j_\beta))\sqrt{g}dM \\
&= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij,k}(u)(\phi^k)(u^i_\alpha)(u^j_\beta)\sqrt{g}dM \\
&+ \int_M g^{\alpha\beta}h_{ij}(u)(u^i_\alpha\phi^j_\beta)\sqrt{g}dM.
\end{aligned}$$

Vejamos algumas notações:

$$
\begin{aligned}
&\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle a^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle \Rightarrow \\
&a^i g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Rightarrow \\
&a^i g_{ij} g^{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} \Rightarrow \\
&a^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Rightarrow \\
&\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$

Como também,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\alpha} h_{ij}(u) = h_{ij,k}(u) \frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha} \Rightarrow \\
&\nabla h_{ij}(u) = g^{\alpha\beta} h_{ij,k}(u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}.
\end{aligned}
$$

Seja:

$$
\begin{aligned}
\int_M g^{\alpha\beta} h_{ij}(u) u^i_\alpha \phi^j_\beta dv_g &= \int_M g^{\alpha\beta} \phi^j_\beta h_{ij}(u) u^i_\alpha g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma} dv_g \\
&= \int_M g^{\alpha\beta} \phi^j_\beta h_{ij}(u) u^i_\alpha g^{\alpha\gamma} \langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\rangle dv_g \\
&= \int_M \langle g^{\alpha\beta} \phi^j_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, h_{ij}(u) u^i_\alpha g^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\rangle dv_g.
\end{aligned}
$$

Pelas notações que escrevemos,

$$
\int_M \langle g^{\alpha\beta} \phi^j_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, h_{ij}(u) u^i_\alpha g^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\rangle dv_g = \int_M \langle \nabla \phi^j, h_{ij}(u) \nabla u^i \rangle dv_g.
$$

Pelo Teorema do Divergente,

$$
\begin{aligned}
\int_M \langle \nabla \phi^j, h_{ij}(u) \nabla u^i \rangle dv_g &= \int_M -\phi^j Div(h_{ij}(u) \nabla u^i) dv_g \\
&= \int_M -\phi^j [h_{ij}(u) \triangle u^i + \langle \nabla h_{ij}(u), \nabla u^i \rangle] dv_g \\
&= \int_M -\phi^j [h_{ij}(u) \triangle u^i + \langle g^{\alpha\beta} h_{ij,k}(u) \frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}, g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\rangle] dv_g \\
&= \int_M -\phi^j [h_{ij}(u) \triangle u^i + g^{\alpha\beta} h_{ij,k}(u) u^k_\alpha u^i_\beta] dv_g.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
-\int_M g^{\alpha\beta} h_{ij}(u) u^i_\alpha \phi^j_\beta dv_g &= \int_M \phi^j [h_{ij}(u) \triangle u^i + g^{\alpha\beta} h_{ij,k}(u) u^k_\alpha u^i_\beta] dv_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M g^{\alpha\beta} h_{ij,k}(u) (u^i_\alpha)(u^j_\beta)(\phi^k) dv_g.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\int_M \triangle u^i h_{ij}(u)\phi^j dv_g = \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h_{ij,k}(u)(u^i_\alpha)(u^j_\beta)(\phi^k)dv_g - \int_M g^{\alpha\beta}h_{ij,k}(u)u^k_\alpha u^i_\beta \phi^j dv_g.$$

Pondo $\phi^j = h^{ij}\eta_i$, para $\eta = (\eta_1, ..., \eta_l) \in C^2_0(U, \mathbb{R}^l)$, temos

$$\begin{aligned}&\int_M \triangle_g u^i \eta_i dv_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}h^{mk}(h_{ij,k}(u) - h_{ik,j}(u) - h_{jk,i}(u))u^i_\alpha u^j_\beta \eta_m dv_g \\ &= \int_M g^{\alpha\beta}\Gamma^m_{ij}u^i_\alpha u^j_\beta \eta_m dv_g.\end{aligned}$$

Observando as integrais temos o resultado desejado. □

Na proposição anterior, encontramos a equação diferencial parcial para aplicações harmônicas em termos de variações intrínsecas locais. Agora, apresentaremos uma versão extrínseca para as variações de aplicações harmônicas. Pelo teorema de imersão isométrica de Nash, podemos colocar $(\overline{M}, h)$ isometricamente imersa num espaço euclidiano $\mathbb{R}^L$, para $L \geq 1$. Com isto, podemos mostrar outro tipo de variação da aplicação u, em que podemos descrever geometricamente a variedade $\overline{M}$ e o vetor ϕ dado na proposição anterior. Assim,

$$C^2(M, \overline{M}) = \{u = (u_1, ..., u_L) \in C^2(M, \mathbb{R}^L)| \quad u(M) \subset \overline{M}\}.$$

Logo, para $u \in C^2(M, \overline{M})$,

$$e(u) = \frac{1}{2}g^{\alpha,\beta}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}.$$

Desta forma, como podemos assumir que $\overline{M} \subset \mathbb{R}^L$ é uma subvariedade compacta suave, então admitimos que existe $\delta = \delta(\overline{M}) > 0$, tal que a projeção de vizinhança $\Pi_{\overline{M}} : \overline{M}_\delta \to \overline{M}$ é suave, onde

$$\overline{M}_\delta = \{y \in \mathbb{R}^L; \quad d(y, \overline{M}) := inf_{z\in\overline{M}}|y - z| < \delta\},$$

e $\Pi_{\overline{M}}(y) \in \overline{M}$ é tal que $|y - \Pi_{\overline{M}}(y)| = d(y, \overline{M})$. Com isto, $P(y) = d(\Pi)_{\overline{M}(y)} : \mathbb{R}^L \to T_y\overline{M}$ é uma projeção ortogonal.

Proposição 3.5. *$u \in C^2(M, \overline{M})$ é harmônica se, e somente se, satisfaz*

$$\triangle_g u \perp T_u\overline{M}.$$

Demonstração. Para $\phi \in C^0(M, \mathbb{R}^L)$, vamos definir

$$\begin{aligned}u_t :&M \to \overline{M} \\ &x \mapsto u(x) + t\phi(x), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),\end{aligned}$$

para que $u_t = \Pi(u + t\phi)$. Desta forma, para x, t coordenadas locais em $M \times (-\epsilon, \epsilon)$,

$$E(u_t) = \frac{1}{2}\int_M \langle d_x u_t, d_x u_t\rangle dv_g.$$

Portanto, tomando u como harmônica,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}E(u_t)|_{t=0} &= \int_M \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle d_x u_t, d_x u_t\rangle|_{t=0} dv_g \\ &= \int_M \frac{1}{2} 2\langle \frac{d}{dt}(d_x u_t), d_x u_t\rangle|_{t=0} dv_g \\ &= \int_M \langle \frac{d}{dt}(d_x u_t)|_{t=0}, (d_x u_t)|_{t=0}\rangle dv_g \\ &= \int_M \langle \frac{d}{dt}(d_x u_t)|_{t=0}, du\rangle dv_g. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(d_x u_t) = \frac{d}{dt}(d(\Pi(u(x)t\phi(x)))) = d\left(\frac{d}{dt}(\Pi(u(x)t\phi(x)))\right),$$

por mudança de derivação. Em cada coordenada teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d_x u_t)_i &= d\left(\frac{d}{dt}(\Pi(u(x)+t\phi(x)))\right)_i |_{t=0} \\ &= d((d(\Pi(u(x)+t\phi(x))))(\phi(x)))_i|_{t=0} \\ &= d((d(\Pi(u)))(\phi))_i. \end{aligned}$$

Então, lembrando que $d(\Pi(u)) = P(u)$,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}E(u_t) = \int_M \langle d(P(u)(\phi)), du\rangle dv_g &= \int_M \sum_i \langle d(P(u)(\phi))(E_i), du(E_i)\rangle dv_g \\ &= \int_M \sum_{i,j} d(P(u)(\phi))_j(E_i), du_j(E_i) dv_g \\ &= \int_M \sum_{i,j} \langle \nabla (P(u)(\phi))_j, E_i\rangle \langle \nabla u_j, E_i\rangle dv_g \\ &= \int_M \sum_i \langle \nabla (P(u)(\phi))_i, \nabla u_i\rangle dv_g. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema do Divergente,

$$\int_M \langle \nabla (P(u)(\phi))_i, \nabla u_i\rangle dv_g = \int_M -(P(u)(\phi))_i \triangle_g u_i dv_g.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \sum_i \langle \nabla (P(u)(\phi))_i, \nabla u_i\rangle dv_g &= \int_M -\sum_i (P(u)(\phi))_i \triangle_g u_i dv_g \\ &= \int_M -\langle P(u)(\phi), \triangle_g u\rangle. \end{aligned}$$

Mas $P(u)$ é adjunta. Portanto,

$$0 = \int_M \langle \phi, P(u)(\triangle_g u)\rangle dv_g.$$

Isto nos diz que a projeção de $\triangle_g u$ é nula em $T_u\overline{M}$, ou seja, $\triangle_g u$ é ortogonal a $T_u\overline{M}$. $\square$

Provamos que $\triangle_g u \perp T\overline{M}$. Logo, podemos escrever $\{v_{l+1}, ..., v_L\}$ como base ortonormal de $T\overline{M}^{\perp}$. Desta forma,

$$\triangle_g u = \sum_{l+1}^{L} a_i(x) v_i(u), \tag{3.2}$$

para $a_i' s$ funções em M. Como também,

$$\triangle_g u = (\triangle_g u_1, ..., \triangle_g u_L) \in \mathbb{R}^L,$$

ou ainda,

$$\triangle_g u = \sum_{j=1}^{L} \triangle_g u_j E_j, \tag{3.3}$$

sendo $E_j = (0, ..., 1, ..., 0)$. Por (3.2),

$$a_i = \langle \triangle_g u, v_i \rangle,$$

e por (3.3),

$$\begin{aligned} a_i &= \langle \sum_{j=1}^{L} \triangle_g u_j E_j, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{L} \triangle_g u_j \langle v_i, E_j \rangle. \end{aligned}$$

Para simplificar a escrita, escreveremos apenas

$$a_i = \triangle_g u_j \langle v_i, E_j \rangle.$$

Usando a equação $Div(fX) = \langle X, \nabla f \rangle + f Div(X)$, temos

$$a_i = \triangle_g u \langle v_i, E_j \rangle = Div(\langle v_i, E_j \rangle \nabla u_j) - \langle \nabla u_j, \nabla \langle v_i, E_j \rangle \rangle. \tag{3.4}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} & du(w) = (du_1(w), ..., du_L(w)) \\ & \Rightarrow \\ & du_j(w) = \langle du(w), E_j \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\nabla u_j = du_j(e_k) e_k,$$

para e_k base ortonormal de TM. Portanto, em relação ao primeiro termo do lado direito da última igualdade de (3.4), temos

$$\begin{aligned} Div(\langle v_i, E_j \rangle \nabla u_j) &= Div(\langle v_i, E_j \rangle du_j(e_k) e_k) \\ &= Div(\langle v_i, E_j \rangle \langle du(e_k), E_j \rangle e_k) \\ &= Div(\langle v_i, du(e_k) \rangle e_k) = Div(0.e_k) = 0, \end{aligned}$$

já que $v_i \in T\overline{M}^{\perp}$ e $du(e_k) \in T\overline{M}$. Em relação ao segundo termo do lado direito da última igualdade de (3.4), temos

$$\begin{aligned}\nabla u_j &= du_j(e_k)e_k, \quad e\\ \nabla\langle v_i, E_j\rangle &= e_k(\langle v_i, E_j\rangle)e_k.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle \nabla u_j, \nabla\langle v_i, E_j\rangle\rangle &= \langle du_j(e_k)e_k, e_k(\langle v_i, E_j\rangle)e_k\rangle\\ &= du_j(e_k)e_k(\langle v_i, E_j\rangle)\\ &= du_j(e_k)(\langle \nabla^{\mathbb{R}^L}_{e_k} v_i, E_j\rangle + 0)\\ &= du_j(e_k)(\langle \nabla^{\mathbb{R}^L}_{e_k} v_i(u), E_j\rangle + 0)\\ &= du_j(e_k)\langle \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i, E_j\rangle\\ &= \langle du(e_k), E_j\rangle\langle \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i, E_j\rangle\\ &= \langle du(e_k), \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i\rangle\\ &= A_{v_i}(du(e_k), du(e_k))\\ &:= A_i(\nabla u, \nabla u).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\triangle_g u = \sum_{i=l+1}^{L} -A_i(\nabla u, \nabla u).v_i. \tag{3.5}$$

$$= -A^{\overline{M}}_{u(x)}(\nabla u, \nabla u). \tag{3.6}$$

Exemplo 3.8. Seja $u : M \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Temos que $A^{\mathbb{S}^n}_{u(x)}(.,.) = A(.,.)u(x) = \langle .,.\rangle u(x)$. Afinal, em $\mathbb{S}^n$ a segunda forma fundamental A tem auto-valor 1 e $v \in (T_{u(x)}\mathbb{S}^n)^{\perp}$ é o vetor posição $u(x)$. Desta forma, $A^{\mathbb{S}^n}_{u(x)}(\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|^2 u(x)$. Então, u é harmônica se, e somente se,

$$\triangle_g u = -|\nabla u|^2 u.$$

3.3 Aplicações para o Círculo e 1-Formas Fechadas

Nesta seção, mostraremos uma relação entre as aplicações para o círculo e as 1-formas diferenciais fechadas. Esta relação nos será útil na aplicação do teorema principal.

Seja M uma variedade fechada e orientável e seja a aplicação $u : M \to \mathbb{S}^1$. A 1-forma $d\theta \in \Lambda^1(\mathbb{S}^1)$ é fechada, pois $\mathbb{S}^1$ tem dimensão 1. Podemos construir uma 1-forma fechada em M através da aplicação u por meio do *pull-back*

$$u^*(d\theta) = d\theta \circ du \in \Lambda^1(M).$$

Temos que $u^*(d\theta)$ é também fechada. De fato, $d(u^*(d\theta)) = u^*(d(d\theta)) = u^*(0) = 0$. Em particular, a aplicação $u : M \to \mathbb{S}^1$ dá origem a uma classe de cohomologia $[u^*d\theta] \in H^1_{DR}(M)$. Além disso, segue do Teorema de Stokes que se $u : M \to \mathbb{S}^1$ e $v : M \to \mathbb{S}^1$ são homotópicas, então $[u^*d\theta] = [v^*d\theta]$. Vamos denotar o conjunto das classes de homotopia de aplicações $u : M \to \mathbb{S}^1$ por $[M, \mathbb{S}^1]$. Portanto temos bem definida a aplicação

$$[M, \mathbb{S}^1] \ni [u] \mapsto [u^*d\theta] \in H^1_{DR}(M) \tag{3.7}$$

e esta correspondência é injetiva.

Nos resultados abaixo usamos as seguintes notações: $H^p(M, \mathbb{Z})$ e $H_p(M, \mathbb{Z})$ denotam o p-ésimo grupo de cohomologia e homologia com coeficientes inteiros respectivamente. Para mais detalhes veja Hatcher [10], Lima [17] e Lima [18]:

Teorema 3.3. *Seja M uma variedade de dimensão n fechada e orientável. A aplicação $f : [M, \mathbb{S}^1] \to H_{n-1}(M, \mathbb{Z})$ dada por $f([u]) = [u^{-1}(\theta_0)]$ é um isomorfismo.*

Corolário 3.2 (Dualidade de Poincaré)**.** *Temos os seguintes isomorfismos:*

$$H_{n-1}(M, \mathbb{Z}) \cong [M, \mathbb{S}^1] \cong H^1(M, \mathbb{Z}).$$

Como a aplicação em (3.7) é injetiva e o posto de $H^1(M, \mathbb{Z})$ é igual ao posto de $H^1_{DR}(M)$, temos por fim a seguinte correspondência biunívoca:

Teorema 3.4. *Existe uma correspondência biunívoca entre $[M, \mathbb{S}^1]$ e a grade associada a uma base L.I do espaço vetorial $H^1_{DR}(M)$.*

4

Teorema Principal

Neste capítulo, vamos mostrar a prova do teorema principal deste trabalho, que é o seguinte:

Teorema 4.1 (Stern [26])**.** *Seja (M^3, g) uma 3-variedade fechada e orientada, e seja $u : M \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação harmônica. Então os conjuntos de nível $\Sigma_\theta = u^{-1}\{\theta\}$ de u satisfazem*

$$2\pi \int_{\theta\in\mathbb{S}^1} \mathcal{X}(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2}\int_{\theta\in\mathbb{S}^1}\int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|Hess(u)|^2 + R_M). \tag{4.1}$$

4.1 Identidade de Bochner

Na prova do teorema principal, dentre alguns resultados, utilizaremos a Identidade de Bochner, que é dada no seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Para u uma função de valores reais em uma variedade M,*

$$\frac{1}{2}\triangle|\nabla u|^2 = |Hess(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla\triangle(u)\rangle + Ric_M(\nabla u, \nabla u). \tag{4.2}$$

Demonstração. Para E_i base ortonormal de T_pM,

$$\triangle v = Div(\nabla v) = \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla v, E_i\rangle. \tag{4.3}$$

Defina $v = \frac{1}{2}|\nabla u|^2$. Temos que

$$\langle \nabla v, E_i\rangle = \langle \sum_j E_j(v)E_j, E_i\rangle = E_i(v) = E_i(\frac{1}{2}\langle\nabla(u), \nabla(u)\rangle = \frac{1}{2}E_i\langle\nabla u, \nabla u\rangle \tag{4.4}$$

$$= \langle \nabla_{E_i}\nabla u, \nabla u\rangle = Hess(u)(E_i, \nabla u) = Hess(u)(\nabla u, E_i) = \langle \nabla_{\nabla u}\nabla u, E_i\rangle, \tag{4.5}$$

onde a sexta e a oitava igualdades são a definição de $Hess(u)$, e a sétima se dá pela simetria de $Hess(u)$. Dados o primeiro e último termo destas igualdades, concluímos que

$$\nabla v = \nabla_{\nabla u}\nabla u.$$

Usando (4.3), obtemos

$$\triangle v = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{\nabla u} \nabla u, E_i \rangle \tag{4.6}$$

$$= \sum_i \langle \nabla_{\nabla u} \nabla_{E_i} \nabla u - \nabla_{[\nabla u, E_i]} \nabla u + R(\nabla u, E_i)\nabla u, E_i \rangle. \tag{4.7}$$

Ora, sabemos que $\sum_i \langle R(\nabla u, E_i)\nabla u, E_i \rangle = Ric_M(\nabla u, \nabla u)$, e o primeiro termo de (4.7) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \nabla_{\nabla u} \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle &= \sum_i \nabla u \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle \\ &= \langle \nabla u, \nabla \triangle u \rangle - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle.\end{aligned}$$

Em (4.7), então temos:

$$\triangle v = \langle \nabla u, \nabla \triangle u \rangle - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle \tag{4.8}$$

$$- \sum_i \langle \nabla_{[\nabla u, E_i]} \nabla u, E_i \rangle + Ric_M(\nabla u, \nabla u). \tag{4.9}$$

Em relação à $\sum_i \langle \nabla_{[\nabla u, E_i]} \nabla u, E_i \rangle$:

$$\begin{aligned}- \sum_i \langle \nabla_{[\nabla u, E_i]} \nabla u, E_i \rangle &= - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, [\nabla u, E_i] \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{E_i} \nabla u - \nabla_{\nabla u} E_i \rangle \\ &= |Hess(u)|^2 - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle.\end{aligned}$$

Logo, em (4.9),

$$\triangle v = |Hess(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla \triangle u \rangle - 2 \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle + Ric_M(\nabla u, \nabla u).$$

Para completar a prova, falta mostrar que $\sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle = 0$. Vamos escrever:

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i} \nabla u &= \sum_j X_{ij} E_j; \\ \nabla_{\nabla u} E_i &= \sum_j Y_{ij} E_j.\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, \nabla_{\nabla u} E_i \rangle = \sum_i \langle \sum_j X_{ij} E_j, \sum_j Y_{ij} E_j \rangle = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij}.$$

A prova segue de três fatos:

i) $X_{ij} = \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_j \rangle$ é simétrica, isto é, $X_{ij} = X_{ji}$.

ii) $Y_{ij} = \langle \nabla_{\nabla u} E_i, E_j \rangle$ é anti-simétrica, isto é, $Y_{ij} = -Y_{ji}$.

iii) Se X_{ij} é simétrica, e Y_{ij} é anti-simétrica, então $\sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij} = 0$.

O fato i) é provado pela simetria de $Hess(u)$. O fato ii) é provado por $\nabla u \langle E_i, E_j \rangle = 0 = \langle \nabla_{\nabla u} E_i, E_j \rangle + \langle \nabla_{\nabla u} E_j, E_i \rangle$. Portanto, se $i \neq j$,

$$\sum_{i,j} (X_{ij} Y_{ij}) = -\sum_{i,j} (X_{ij} Y_{ij}),$$

e se $i = j$, $Y_{ij} = 0$, pela anti-simetria descrita no fato ii). Isto prova o fato iii).

□

4.2 Prova do Teorema Principal

Primeiramente, vamos mostrar uma relação entre dois dos objetos mais trabalhados neste trabalho, que são as aplicações harmônicas e as 1-formas harmônicas. Assim, vamos mostrar que

Lema 4.1. *$u : M \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é harmônica se e somente se a 1-forma $\overline{h} := u^* d\theta$ é harmônica.*

Demonstração. Vamos relembrar da aplicação de recobrimento, que é dada por $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, onde

$$exp(\theta) = (cos(\theta), sen(\theta)).$$

Com isto, temos a seguinte afirmação:

Afirmação 1. $d\theta$ está bem definida.

Sejam p_1 e $p_2 \in \mathbb{S}^1$, sendo $p_1 \neq p_2$. Seja também

$$\begin{aligned} \theta_1 &: \mathbb{S}^1 - \{p_1\} \to [0, 2\pi), \quad e \\ \theta_2 &: \mathbb{S}^1 - \{p_2\} \to [t_0, t_0 + 2\pi). \end{aligned}$$

Segue que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = 2\pi n,$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1 - \{p_1, p_2\}$. Com isto

$$d(\theta_1(x) - \theta_2(x)) = d(\theta_1(x)) - d(\theta_2(x)) = d(2\pi n) = 0.$$

Portanto, $d\theta$ está bem definida.

Defina $\overline{u} = \theta \circ u$. Temos então o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \\ M \arrow[ur, "\overline{u}"] \arrow[r, "u"'] & \mathbb{S}^1. \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Embora $\overline{u}$ não esteja bem definida em $\mathbb{S}^1$, podemos considerar $d\overline{u}$ e $\nabla \overline{u}$, pois estes estão bem definidos, segundo a Afirmação (1). Daí, podemos escrever

i) $d\overline{u} = d\theta(du) = u^*d\theta = \overline{h}$.

ii) $\overline{h}(v) = d\overline{u}(v) = \langle \overline{h}^{\#}, v\rangle = \langle (d\overline{u})^{\#}, v\rangle = \langle \nabla\overline{u}, v\rangle$.

Definimos $h = \overline{h}^{\#} = \nabla\overline{u}$. Pela igualdade $d^*\omega = -Div(\omega^{\#})$, temos que $d^*\overline{h} = -Div(h)$. Logo,

$$-Div(h) = -Div(\nabla\overline{u}) = -\triangle\overline{u} = d^*\overline{h}. \tag{4.10}$$

Se esta igualdade se anula, então $\triangle_H\overline{h} = 0$, pelo Teorema 3.2. Segue que $\overline{h}$ é uma 1-forma harmônica. Portanto, provamos que $\overline{u}$ é harmônica se, e somente se $\overline{h}$ é 1-forma harmônica. □

Vamos agora provar o que segue.

Afirmação 2. u é uma aplicação harmônica, se e somente se, $\overline{u}$ é uma função harmônica local.

Demonstração. Com efeito, pelo Exemplo 3.8, temos que se u é harmônica, $\triangle u = -|\nabla u|^2 u$. Assim, considerando $u = (u_1, u_2)$, temos

$$\triangle u_1 = -|\nabla u|^2 u_1, \quad e \quad \triangle u_2 = -|\nabla u|^2 u_2. \tag{4.11}$$

Além disto,

$$cos(\overline{u}) = u_1, \quad e \quad sen(\overline{u}) = u_2. \tag{4.12}$$

Usando as equações $\triangle\phi(f) = \phi'(f)\triangle f + \phi''(f)|\nabla f|^2$, (4.11) e (4.12), temos:

$$\begin{aligned}
\triangle u_1 &= \triangle cos(\overline{u}) = -sen(\overline{u})\cdot\triangle\overline{u} - cos(\overline{u})|\nabla\overline{u}|^2 = -|\nabla u|^2 u_1 = -|\nabla u|^2 cos(\overline{u}), \quad e\\
\triangle u_2 &= \triangle sen(\overline{u}) = cos(\overline{u})\cdot\triangle\overline{u} - sen(\overline{u})|\nabla\overline{u}|^2 = -|\nabla u|^2 u_2 = -|\nabla u|^2 sen(\overline{u}).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
sen^2(\overline{u})\cdot\triangle\overline{u} + sen(\overline{u})cos(\overline{u})|\nabla\overline{u}|^2 &= |\nabla u|^2 sen(\overline{u})cos(\overline{u})\\
cos^2(\overline{u})\cdot\triangle\overline{u} - cos(\overline{u})sen(\overline{u})|\nabla\overline{u}|^2 &= -|\nabla u|^2 cos(\overline{u})sen(\overline{u}).
\end{aligned}$$

Somando estas duas equações, temos que $\triangle\overline{u} = 0$ e $\overline{u}$ é harmônica. □

Vamos escrever $\mathcal{D}h := Hess(u)$. Como $\overline{u}$ é harmônica, segue da identidade de Bochner (4.2) que

$$\triangle\frac{1}{2}|h|^2 = |\mathcal{D}h|^2 + Ric_M(h,h), \tag{4.13}$$

lembrando que $h = \nabla\overline{u}$.

Vamos definir

$$\phi_\delta := (|h|^2 + \delta)^{1/2}, \tag{4.14}$$

para algum $\delta > 0$. Observe que ϕ_δ é uma função diferenciável.

Afirmação 3. Temos que

$$\begin{aligned}\triangle\phi_\delta &= \frac{1}{\phi_\delta}\left[\frac{1}{2}\triangle|h|^2 - \frac{|h|^2}{\phi_\delta^2}|d|h||^2\right] \\ &\geq \frac{1}{\phi_\delta}[|\mathcal{D}h|^2 - |d|h||^2 + Ric_M(h,h)]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Demonstração. Já sabemos que $\triangle\phi(f) = \phi''|\nabla f|^2 + \phi'\triangle f$. Considerando $f(h) = |h|^2 + \delta$ e $\phi(y) = \sqrt{y}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\phi'(y) = 1/2y^{-1/2} \Rightarrow \phi'(f(h)) = 1/2(|h|^2+\delta)^{-1/2};\\ &\phi''(y) = -1/4y^{-3/2} \Rightarrow \phi''(f(h)) = -1/4(|h|^2+\delta)^{-3/2};\\ &\nabla f = \nabla|h|^2 \Rightarrow |\nabla f|^2 = |\nabla|h|^2|^2;\\ &\triangle f = \triangle(|h|^2+\delta) = \triangle(|h|^2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\triangle\phi(f) &= \triangle\sqrt{|h|^2+\delta} = \triangle\phi_\delta\\ &= -1/4(|h|^2+\delta)^{-3/2}|\nabla|h|^2|^2 + 1/2(|h|^2+\delta)^{-1/2}\triangle|h|^2\\ &= (|h|^2+\delta)^{-1/2}(-1/4(|h|^2+\delta)^{-1}|\nabla|h|^2|^2 + 1/2\triangle|h|^2).\end{aligned}$$

Mas $\nabla|h|^2 = 2|h|\nabla|h|$. Então

$$|\nabla|h|^2|^2 = \langle\nabla|h|^2, \nabla|h|^2\rangle = 4|h|^2|d|h||^2.$$

Logo, temos

$$\triangle\phi(f) = \triangle\phi_\delta = \frac{1}{\phi_\delta}\left(\frac{-|h|^2}{\phi_\delta^2}|d|h||^2 + \frac{1}{2}\triangle|h|^2\right).$$

Também temos que $\phi_\delta^2 > |h|^2$, então $-1 < -|h|^2/\phi_\delta^2$. Isto prova a inequação (4.15). $\square$

Seja Σ a imagem inversa de um valor regular de u. Note que $v := \frac{h}{|h|}$ é um vetor normal unitário de Σ. Vamos escrever a Equação de Gauss (2.2) para a variedade M e a superfície Σ. Temos então

$$Ric_M(v,v) = \frac{1}{2}(R_M - R_\Sigma + H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2), \tag{4.16}$$

onde R_M é a curvatura escalar de M, R_Σ a curvatura escalar de Σ, $H_\Sigma = Tr_\Sigma(A_\Sigma)$ a curvatura média de Σ e A_Σ a segunda forma fundamental de Σ. Usaremos esta equação para reescrever o termo $Ric_M(h,h)$ na inequação (4.15). Além do termo $Ric_M(h,h)$, reescreveremos os outros termos de (4.15). Para isto, precisaremos do que se segue.

4.2.1 Geometria de Superfícies de Nível

Por simplificação de notações, escreveremos a partir de agora $h = \nabla u$.

Proposição 4.1. *A segunda forma fundamental A_Σ é dada por $A_\Sigma = (|h|^{-1}\mathcal{D}h)|_\Sigma$.*

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} A_\Sigma(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, E_j \rangle &= |\nabla u|^{-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_j \rangle \\ &= |h|^{-1} Hess(u)(E_i, E_j) \\ &= |h|^{-1} \mathcal{D}h|_\Sigma. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.2.

$$|h|^2 |A_\Sigma|^2 = |\mathcal{D}h|^2 - 2|d|h||^2 + (\mathcal{D}h(v, v))^2. \tag{4.17}$$

Demonstração. Podemos escrever

$$|h|^2 |A_\Sigma|^2 = |\mathcal{D}h|^2 - 2 \sum_i (\mathcal{D}h(E_i, v))^2 - (\mathcal{D}h(v, v))^2.$$

Mas

$$\begin{aligned} -2 \sum_i (\mathcal{D}h(E_i, v))^2 - (\mathcal{D}h(v, v))^2 &= \sum_i -2 \langle \nabla_v \nabla u, E_i \rangle \langle \nabla_v \nabla u, E_i \rangle \\ &- \langle \nabla_v \nabla u, v \rangle \langle \nabla_v \nabla u, v \rangle \\ &= -2 |(\nabla_v \nabla u)^T|^2 - |(\nabla_v \nabla u)^N|^2 \\ &= -2 |\nabla_v \nabla u|^2 + 2 |(\nabla_v \nabla u)^N|^2 - |(\nabla_v \nabla u)^N|^2 \\ &= -2|d|h||^2 + 2(\mathcal{D}h(v, v))^2 - (\mathcal{D}h(v, v))^2 \\ &= -2|d|h||^2 + (\mathcal{D}h(v, v))^2. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.3. *A curvatura média* $H_\Sigma = Tr_\Sigma(A_\Sigma)$ *é dada por*

$$|h| H_\Sigma = Tr_M(\mathcal{D}h) - \mathcal{D}h(v, v) = -\mathcal{D}h(v, v). \tag{4.18}$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} Tr_M(\mathcal{D}h) &= \mathcal{D}h(E_1, E_1) + \mathcal{D}h(E_2, E_2) + \mathcal{D}h(v, v) \\ &= |h| A_\Sigma(E_1, E_1) + |h| A_\Sigma(E_2, E_2) + \mathcal{D}h(v, v) \\ &= |h| Tr_\Sigma(A_\Sigma) + \mathcal{D}h(v, v) \\ &= |h| H_\Sigma + \mathcal{D}h(v, v). \end{aligned}$$

Temos também que $\overline{h}$ é harmônica. O que diz que

$$Div \nabla u = 0 \Leftrightarrow \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle = 0 \Leftrightarrow Tr_M(\mathcal{D}h) = 0.$$

□

As equações (4.17) e (4.18) nos levam a

$$|h|^2 (H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2) = 2|d|h||^2 - |\mathcal{D}h|^2.$$

Logo, em (4.16),

$$\begin{aligned} Ric(h,h) = |h|^2 Ric(v,v) &= \frac{1}{2}|h|^2(R_M - R_\Sigma + H_\Sigma^2 - |A_\Sigma|^2) \\ &= \frac{1}{2}|h|^2(R_M - R_\Sigma) + \frac{1}{2}(2|d|h||^2 - |\mathcal{D}h|^2). \end{aligned}$$

Assim, na inequação (4.15), finalmente, temos que

$$\begin{aligned} \triangle\phi_\delta &\geq \frac{1}{\phi_\delta}\left[|\mathcal{D}h|^2 - |d|h||^2 + \frac{1}{2}|h|^2(R_M - R_\Sigma) + |d|h||^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{D}h|^2\right] \\ &= \frac{1}{\phi_\delta}\left[\frac{1}{2}|h|^2(R_M - R_\Sigma) + \frac{1}{2}|\mathcal{D}h|^2\right] \\ &= \frac{1}{2\phi_\delta}\left[|Hess(u)|^2 + |du|^2(R_M - R_\Sigma)\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, seja $E \subset S^1$ o conjunto fechado contendo o conjunto C dos valores críticos de u, e seja $F \subset Reg(u)$ o subconjunto complementar aberto dos valores regulares de u. Integrando (4.19) sobre $u^{-1}(F)$, temos

$$\int_{u^{-1}(F)} \frac{1}{2\phi_\delta}\left[|Hess(u)|^2 + |du|^2(R_M - R_\Sigma)\right] \leq -\int_{u^{-1}(E)} \triangle\phi_\delta. \tag{4.20}$$

Afinal, como $\int_M \triangle\phi_\delta = \int_{u^{-1}(E)} \triangle\phi_\delta + \int_{u^{-1}(F)} \triangle\phi_\delta$ e $\int_M \triangle\phi_\delta = 0$, obtemos

$$-\int_{u^{-1}(E)} \triangle\phi_\delta = \int_{u^{-1}(F)} \triangle\phi_\delta \geq \int_{u^{-1}(F)} \frac{1}{2\phi_\delta}\left[|Hess(u)|^2 + |du|^2(R_M - R_\Sigma)\right].$$

Afirmação 4. Além disso, temos que

$$\triangle\phi_\delta \geq \frac{1}{\phi_\delta}\left[|\mathcal{D}h|^2 - |d|h||^2 + Ric(h,h)\right] \geq -C_M|h|,$$

para C_M uma constante.

Demonstração. Com efeito,

$$|\mathcal{D}h|^2 - |d|h||^2 = |h|^2|A_\Sigma|^2 + |(\nabla_v \nabla u)^T|^2,$$

pela equação (4.17), e

$$\frac{|h|^2|A_\Sigma|^2 + |(\nabla_v\nabla u)^T|^2 + Ric(h,h)}{\phi_\delta} \geq \frac{Ric(h,h)}{\phi_\delta}.$$

Daí, como Ric é uma aplicação linear simétrica, faz corresponder a uma transformação linear auto-adjunta L tal que $Ric(h) = \langle L(h), h\rangle$. Mas $\langle L(h), h\rangle \leq |L||h||h| = |L||h|^2$. Logo, $Ric(h,h) \leq |L||h|^2$. Vamos escrever $C_M = sup_x\{|L|(x)\} \in M$, L contínua. Portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{Ric(h,h)}{\phi_\delta} \leq \frac{|L||h|^2}{\phi_\delta} \leq \frac{C_M|h|^2}{\phi_\delta} \leq \frac{C_M|h|^2}{|h|} = C_M|h| \\ &\Rightarrow \\ &\frac{Ric(h,h)}{\phi_\delta} \geq -C_M|h|. \end{aligned}$$

$\square$

Vamos relembrar a fórmula da coárea dada na seguinte proposição.

Proposição 4.4 (Fórmula da Coárea)**.** *Se Σ é uma variedade e*

$$f : \Sigma \to \mathbb{R}$$

é uma função tal que $f^{-1}((-\infty, t])$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$, então para toda função localmente integrável g em Σ e $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{f^{-1}((-\infty,t])} g|\nabla_\Sigma f| = \int_{-\infty}^{t} \int_{f=t} gdxdt.$$

Com esta proposição, globalmente em M temos que

$$-\int_{u^{-1}(E)} \triangle\phi_\delta \le \int_{u^{-1}(E)} C_M|h| = \int_E \int_{u=\theta} C_M = C_M \int_E \text{Área}(\Sigma_\theta).$$

Por outro lado, em $u^{-1}(F)$, temos que $h = \nabla u \neq 0$. Assim, podemos colocar o limite $\delta \to 0$ no lado esquerdo de (4.20), para termos

$$\int_{u^{-1}(F)} \frac{1}{2|du|}[|Hess(u)|^2 + |du|^2(R_M - R_\Sigma)] \le C_M \int_E \text{Área}(\Sigma_\theta). \tag{4.21}$$

Pela fórmula da coárea e pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned}
\int_{u^{-1}(F)} \frac{|du|}{2}\left[\frac{|Hess(u)|^2}{|du|^2} + (R_M - R_\Sigma)\right] &= \frac{1}{2}\int_F \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|Hess(u)|^2 + R_M) - \int_F \int_{\Sigma_\theta} \frac{R_\Sigma}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_F \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|Hess(u)|^2 + R_M) - \int_F \int_{\Sigma_\theta} K_\Sigma \\
&= \frac{1}{2}\int_F \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|Hess(u)|^2 + R_M) - \int_F 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_\theta).
\end{aligned}$$

Aplicando esta igualdade em (4.21), podemos escrever

$$\frac{1}{2}\int_F \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|Hess(u)|^2 + R_M) \le C_M \int_E \text{Área}(\Sigma_\theta) + \int_F 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_\theta). \tag{4.22}$$

Por fim, pelo Teorema de Sard, podemos colocar a medida de E arbitrariamente pequena, e, como $\theta \mapsto \text{Área}(\Sigma_\theta)$ é integrável sobre $\mathbb{S}^1$ (pela fórmula da coárea), podemos colocar $|E| \to 0$ em (4.22). Assim, temos a identidade esperada.

Com a desigualdade integral que provamos, podemos observar uma relação estabelecida entre a curvatura escalar de M e a característica de Euler das superfícies de nível da aplicação harmônica u. Se a curvatura escalar R_M é positiva, então a característica de Euler $\mathcal{X}(\Sigma_\theta)$ é positiva.

4.3 Aplicação do Teorema Principal

Nesta seção, vamos utilizar o teorema principal deste trabalho para provar o seguinte teorema descrito na introdução:

Teorema 4.3. $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *não admite métrica de curvatura escalar positiva.*

Para fazermos tal aplicação, precisaremos de alguns comentários a respeito da existência de formas harmônicas e aplicações harmônicas nesta variedade. Segundo o Exemplo 3.4, temos que $H^1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R}^3$. Desta forma, podemos aplicar o Teorema de Hodge em $\mathbb{T}^3$ e afirmar que existe uma 1-forma harmônica em cada classe de cohomologia em $H^1(\mathbb{T}^3)$. Além disto, como dissemos na seção 3.3, dada uma 1-forma ω fechada, temos que existe uma aplicação $u : M \to \mathbb{S}^1$, tal que $u^*(d\theta) = \omega$. Segue que u será harmônica, por (4.10) e pela Afirmação 2.

Observação 4. A aplicação harmônica u também pode ser obtida ao minimizar a energia de Dirichlet na classe de homotopia da aplicação $u_0 : M^3 \to \mathbb{S}^1$. A regularidade destes objetos minimizantes foi estudado por Schoen-Uhlenbeck [21].

Portanto, sabendo da existência de aplicações harmônicas e 1-formas harmônicas em $\mathbb{T}^3$, podemos aplicar o Teorema 4.1 nesta variedade. Mas antes vamos precisar do seguinte resultado, para $\Sigma_\theta = u^{-1}(\theta)$ superfície de nível da aplicação harmônica $u : M^3 \to \mathbb{S}^1$.

Proposição 4.5. *Cada componente S_i de Σ_θ, isto é, $\Sigma_\theta = S_1 \cup ... \cup S_k$, não é fronteira de um aberto $\Omega \subset \mathbb{T}^3$.*

Demonstração. Vamos relembrar a notação $u^*(d\theta) = \overline{h}$. Com efeito, sabendo que $\star\overline{h}$ é uma 2-forma, podemos escrever $\star\overline{h} = \psi e^* \wedge f^*$, para ψ uma função, e $\{e^*, f^*\}$ base dual, sendo $\{e, f\}$ base ortonormal de TS_i.

Afirmação 5. $\int_{S_i} \star\overline{h} = \int_{S_i} |\overline{h}| dS_i$.

Relembrando que $h \perp \Sigma_\theta$, vamos fazer

$$\begin{aligned} \star\overline{h} \wedge \overline{h}\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) &= \psi e^* \wedge f^* \wedge \overline{h}\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) \\ &= \psi det[\Phi], \end{aligned}$$

onde,

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^*(e) & 0 & 0 \\ 0 & f^*(f) & 0 \\ 0 & 0 & \overline{h}(\frac{h}{|h|})) \end{pmatrix}.$$

Então, $det[\Phi] = \overline{h}(\frac{h}{|h|}))$. Mas $\overline{h}(\frac{h}{|h|})) = \langle h, \frac{h}{|h|}\rangle = \frac{1}{|h|}|h|^2 = |h|$. Logo,

$$\star\overline{h} \wedge \overline{h}\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) = \psi|h|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \star\overline{h} \wedge \overline{h}\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) &= \langle \overline{h}, \overline{h}\rangle \star (1)\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) \\ &= \langle \overline{h}, \overline{h}\rangle Vol_M\left(e, f, \frac{h}{|h|}\right) \\ &= \langle \overline{h}, \overline{h}\rangle \\ &= |\overline{h}|^2 \\ &= |h|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi|h| = |h|^2$. Daí, $\psi = |h| = |\overline{h}|$ e podemos então escrever

$$\int_{S_i} \star\overline{h} = \int_{S_i} \psi dS_i = \int_{S_i} |\overline{h}| dS_i.$$

Por Stokes, se S_i é fronteira de Ω, então

$$\begin{aligned} 0 < \int_{S_i} \star\overline{h} = \int_{\Omega} d\star\overline{h} &= \int_{\Omega} \pm\star\star d\star\overline{h} \\ &= \int_{\Omega} \pm\star(d^*\overline{h}) \\ &= \int_{\Omega} \pm\star(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma contradição. Portanto, S_i não é fronteira de um aberto Ω. $\square$

Com esta proposição, podemos agora provar o Teorema 4.3. A proposição 4.5 nos diz que nenhuma componente S_i de Σ_θ é uma esfera. De fato, é sabido que toda superfície homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ no toro $\mathbb{T}^3$ é fronteira de uma bola topológica $\mathbb{B}^3$. Isto é consequência do fato de que o recobrimento universal de $\mathbb{T}^3$ é $\mathbb{R}^3$. Portanto, a proposição 4.5 impede que S_i seja uma esfera. Pela inequação (4.1) do Teorema 4.1,

$$0 \geq 2\pi \int_{\Sigma_\theta} \mathcal{X}(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2}\int_\theta \int_{\Sigma_\theta} |du|^2 |Hess(u)|^2 + R_{\mathbb{T}^3}.$$

Isto nos diz que $\mathbb{T}^3$ não admite métrica de curvatura escalar $R_{\mathbb{T}^3}$ positiva.

Este resultado, trazido pelo teorema principal deste trabalho, nos mostra uma generalização de um resultado particular de um dos teoremas mais conhecidos da geometria, que é o resultado do teorema de Gauss-Bonnet aplicado para $\mathbb{T}^2$.

REFERÊNCIAS

[1] BRAY, Hubert; BRENDLE, Simon; NEVES, Andre. *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds.* arXiv preprint arXiv:1002.2814, 2010.

[2] BRAY, Hubert L. et al. *Harmonic functions and the mass of 3-dimensional asymptotically flat Riemannian manifolds.* The Journal of Geometric Analysis, v. 32, n. 6, p. 184, 2022.

[3] CHODOSH, Otis; LI, Chao. *Stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$. arXiv preprint arXiv:2108.11462, 2021.

[4] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. *A course in minimal surfaces.* American Mathematical Soc., 2011.

[5] DASKALOPOULOS, Georgios; MESE, Chikako. *Notes on Harmonic Maps.* arXiv preprint arXiv:2301.04190, 2023.

[6] DO CARMO, Manfredo P. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition.* Courier Dover Publications, 2016.

[7] DO CARMO, Manfredo Perdigão. *Formas diferenciais e aplicações.* IMPA, 1971.

[8] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana-2a Edição.* Projeto Euclides–IMPA, 1988.

[9] GROMOV, Mikhael; LAWSON, H. Blaine. *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, v. 58, p. 83-196, 1983.

[10] HATCHER, Algebraic Topology-Allen. *Representation Theory And Quantum Mechanics.* Tsinghua University Press Co., Ltd., 2005.

[11] JOST, Jürgen; JOST, Jeurgen. *Riemannian geometry and geometric analysis.* Berlin: Springer, 2008.

[12] JOST, Jürgen. *The Laplace Operator and Harmonic Differential Forms.* In: Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer, 2008.

[13] KATZ, Gabriel. *Harmonic maps* $M^3 \to \mathbb{S}^1$ *and 2-cycles, realizing the Thurston norm.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 357, n. 3, p. 1177-1224, 2005.

[14] KRONHEIMER, Peter B.; MROWKA, Tomasz S. *Scalar curvature and the Thurston norm.* Mathematical Research Letters, v. 4, n. 6, p. 931-937, 1997.

[15] LEE, John M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature.* Springer Science & Business Media, 1997.

[16] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise, vol. 2*, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[17] LIMA, Elon Lages. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 2a edição.* IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.

[18] LIMA, Elon Lages. *Homologia básica.* IMPA, 2009.

[19] LIN, Fanghua; WANG, Changyou. *The analysis of harmonic maps and their heat flows.* World Scientific, 2008.

[20] PARK, Peter S. *Hodge Theory.* Cambridge, Massachusetts, USA: Department of Mathematics, Harvard University, p. 30, 2018.

[21] SCHOEN, Richard; UHLENBECK, Karen. *A regularity theory for harmonic maps.* Journal of Differential Geometry, v. 17, n. 2, p. 307-335, 1982.

[22] SCHOEN, Richard; YAU, Shing-Tung. *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature.* Annals of Mathematics, v. 110, n. 1, p. 127-142, 1979.

[23] SCHOEN, Richard; YAU, Shing-Tung. *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.* Communications in Mathematical Physics, v. 65, p. 45-76, 1979.

[24] SCHOEN, Richard; YAU, Shing-Tung. *On the structure of manifolds with positive scalar curvature.* Manuscripta Math, v. 28, n. 1-3, p. 159–183, 1979.

[25] SIMONS, James. *Minimal varieties in Riemannian manifolds.* Annals of Mathematics, p. 62-105, 1968.

[26] STERN, Daniel L. *Scalar curvature and harmonic maps to* S^1. Journal of Differential Geometry, v. 122, n. 2, p. 259-269, 2022.

[27] ZHU, Jintian. *Width estimate and doubly warped product.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 374, n. 2, p. 1497-1511, 2021.