

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Yuri Garcia Vilela

**Sobre o Centro de Massa em
Diferentes Geometrias**

Belo Horizonte

2020

Yuri Garcia Vilela

**Sobre o Centro de Massa em
Diferentes Geometrias**

Versão final

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Heleno da Silva Cunha

Coorientador: Mario Jorge Dias Carneiro

Belo Horizonte

2020

Vilela, Yuri Garcia

V699s Sobre o centro de massa em diferentes geometrias
[manuscrito] / Yuri Garcia Vilela. Belo Horizonte - 2020.
66 f. : il. ; 29cm

Orientador: Heleno da Silva Cunha.
Coorientador: Mario Jorge Dias Carneiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Matemática.
Referências: f. 66

1. Matemática – Teses. 2. Geometria - Teses. 3.
Espaços de curvatura constante – Teses. 4. Centro de
massa – Teses. 4. Centro de gravidade - Teses. I.
Cunha, Heleno da Silva. II. Carneiro, Mário Jorge Dias.
III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de
Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz CRB 6ª nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre o Centro de Massa em Diferentes Geometrias

YURI GARCIA VILELA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Heleno S. C.
Prof. Heleno da Silva Cunha
UFMG

Mário Jorge Dias Carneiro
Prof. Mário Jorge Dias Carneiro
UFMG

Celso dos Santos Viana
Prof. Celso dos Santos Viana
UFMG

Ad
Prof. Julian Eduardo Haddad
UFMG

Гусевский
Prof. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii
UFMG

Belo Horizonte, 31 de julho de 2020.

A todos educadores que me guiaram até aqui.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e irmãos, permitiram que eu me dedicasse aos estudos e, desde cedo, estiveram ao meu lado neste percurso.

Agradeço a todos meus educadores, sobretudo ao meu orientador, Heleno, que sempre acreditou em mim e se tornou muito mais que um professor: é um enorme prazer te chamar de amigo.

Aos meus amigos Marioza, Matheus, Carreta, Peixoto, Nicholas e Délisson, que estão ao meu lado a quase 10 anos e ainda representam o mundo pra mim, e Nicholas, Rafael e PO, que estiveram comigo em todos os momentos da faculdade. Sem vocês, eu não seria metade do que sou hoje.

Grato por todos os momentos vividos em MatComp, em especial com meus amigos Louise, Chicão, Comprova, Pedrão, Matheus, Isabela, Eder, Callado, Mirian e Fábio. Afinal, nem só de aulas é feita a experiência acadêmica.

Sou grato à UFMG e às agências de fomento CNPq e CAPES, sem as quais eu (assim como vários pesquisadores) não seriam capazes de desenvolver seus trabalhos.

Por fim, meus mais sinceros agradecimentos ao meu irmão Patrick, que está ao meu lado desde os meus primeiros passos e sempre me fez querer ir além. Obrigado, irmão.

"Se você quer saber a verdade, alimente a dúvida"
Gilberto Garcia Leão

Resumo

Ao longo deste trabalho queremos demonstrar a existência e a unicidade do centro de massa em espaços de curvatura constante, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$. Começamos com uma breve introdução aos espaços, passando em seguida para uma construção do centro de massa utilizando técnicas descritas por Galperin em (GALPERIN, 1993). Na sequência, definimos formalmente o conceito, e demonstramos que a construção feita, de fato, nos leva ao único centro de massa existente. Por fim, apresentamos uma construção original do centro de massa que independe de imersões do espaço estudado e pode ser estendido localmente para o espaço projetivo.

Palavras-chave: centro de massa. centro de gravidade. baricentro.

Abstract

We aim to prove the existence and uniqueness of the mass center in constant curvature spaces, that is, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ and $\mathbb{S}^n$. After a short introduction to these spaces, we present the mass center as proposed by Galperin in (GALPERIN, 1993), following with an axiomatic description of such object. Finally, we exhibit an original construction for the mass center in the hiperbolic, spheric and projective spaces, with local restrictions in the last one.

Palavras-chave: mass center. gravity center. barycenter.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Balanças Antes e Depois de Mover o Eixo	12
Figura 2 – Modelo do Hiperplano	17
Figura 3 – Modelo do Hiperboloide	18
Figura 4 – Modelo da Esfera	19
Figura 5 – Triângulo Isósceles	22
Figura 6 – Centroide Modelado Em $\mathbb{R}^n$	30
Figura 7 – Centroide Modelado Em $\mathbb{H}^n$	32
Figura 8 – Configuração da Proposição 6.2	38
Figura 9 – Configuração da Proposição 6.3	38
Figura 10 – Contra-exemplo para $f \equiv 1$	42
Figura 11 – Sistemas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$	44
Figura 12 – Configuração dos Pontos Materiais	45
Figura 13 – Centroide Modelado Em $\mathbb{S}^n$	50
Figura 14 – Triângulo Hiperbólico	61
Figura 15 – Contra-exemplo do Produto em $\mathbb{P}^n$	63

Sumário

	Introdução	12
I	PREÂMBULO	14
1	APRESENTAÇÃO DAS GEOMETRIAS	15
1.1	Comentários Finais Sobre as Geometrias	18
2	PONTO MÉDIO E TRIGONOMETRIA	20
II	EXISTÊNCIA DO CENTRO DE MASSA	24
3	SISTEMAS MATERIAIS	25
4	CENTROIDE MODELADO	27
4.1	O Centroide Modelado em $\mathbb{R}^n$	29
4.1.1	Sistemas de Cardinalidade 2	30
4.2	O Centroide Modelado em $\mathbb{H}^n$	30
4.2.1	Sistemas de Cardinalidade 2	31
III	UNICIDADE DO CENTRO DE MASSA	33
5	CENTROIDE AXIOMÁTICO	34
6	UNICIDADE	36
6.1	A Função de Massa	36
6.1.1	Propriedades da Função de Massa	37
6.1.2	Possíveis Formas da Função de Massa	39
6.1.3	A Função de Massa nos Espaços	40
6.2	Sistemas Diádicos	43
IV	O CASO ESFÉRICO	47
7	O CENTROIDE MODELADO NA ESFERA	48
7.1	Sistemas de Cardinalidade 2	50
8	O CENTROIDE AXIOMÁTICO E A UNICIDADE NA ESFERA	52
8.1	A Unicidade na Esfera	54
V	CONSTRUÇÃO FUNCIONAL DO CENTRO DE MASSA	55
9	CONSTRUÇÃO COM PRODUTO INTERNO	56
9.1	Geometria Hiperbólica	59
9.2	Geometria Esférica	61

9.3	Espaço Projetivo	62
9.4	O Espaço Euclidiano e a Escolha de δ	63
10	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	66

Introdução

O centro de massa é um objeto físico que surge com o estudo do equilíbrio e da simplificação de sistemas grandes. Este objeto é estudado desde a Grécia Antiga e, como poderíamos esperar, já é bem entendido e explicado na física clássica. Entre os estudiosos que trabalharam neste conceito estão Arquimedes, Pappus de Alexandria e Alexis Clairautx.

Uma apresentação clássica do centro de massa é dada com o exemplo da balança. Imagine inicialmente que temos uma balança com dois pratos a uma distância fixa e que colocamos objetos com massa m_1 e m_2 neles. Do nosso cotidiano, sabemos que o prato com o objeto de maior massa, digamos m_1 , abaixa enquanto o outro levanta. Agora suponha que podemos mover o eixo da balança, alterando a distância dos pratos até ele. O que observamos é que os pratos sobem ou descem de acordo com a posição do eixo, e que, em um ponto específico, o equilíbrio é atingido com os dois pratos na mesma altura.

Chamamos este ponto de equilíbrio de posição do centro de massa do sistema composto por m_1 e m_2 . Nos cursos básicos de física, sabemos que este ponto pode ser determinado pela relação $m_1 d_1 = m_2 d_2$, onde d_1 e d_2 são as distâncias dos pratos até o eixo.

De forma mais geral, aprendemos que o centro de massa de um sistema com massas $m_1, \dots, m_k$ posicionadas sobre os pontos $p_1, \dots, p_k$ de $\mathbb{R}^3$ está localizado no ponto $p = \frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i}$ e, neste contexto, o centro de massa nasce como um ponto de equilíbrio estático para sistemas com várias massas.

Mas o que é, de uma perspectiva matemática, o centro de massa? Podemos definir este objeto em outros espaços que não o $\mathbb{R}^3$? Mais do que isso, podemos definir outros objetos com as mesmas características do centro de massa nesses espaços?

Em seu trabalho "A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces"(GALPERIN, 1993), G.A. Galperin responde algumas dessas perguntas definindo e demonstrando a unicidade do centro de massa em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$. Entretanto sua construção é fortemente condicionada à apresentação destas geometrias como subvariedades de codimensão de dimensão 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ e a estrutura deste como espaço vetorial.

Aqui vamos além: exibimos a construção de Galperin como uma prova da existência do centro de massa, mas também apresentamos uma forma de obtê-lo sem depender do comportamento da geometria em relação ao espaço no qual está imerso. Esta nova técnica coincide com construção anterior nos espaços hiperbólico e esférico (localmente), possibilita a apresentação do centro de massa no espaço projetivo e abre margem para trabalhar em várias outras geometrias, como a geometria hiperbólico complexa.

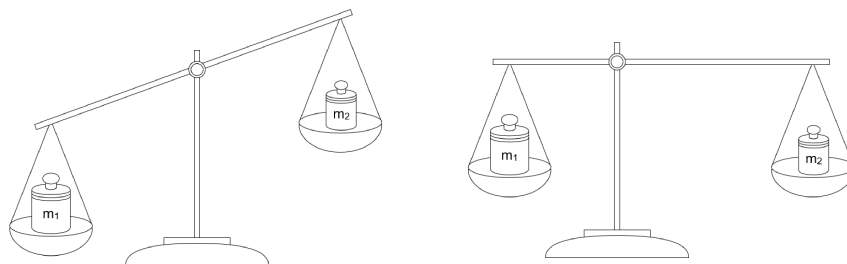


Figura 1 – Balanças Antes e Depois de Mover o Eixo

Este texto é dividido em cinco partes:

Na primeira, apresentamos as geometrias com as quais trabalharemos, expondo os conceitos necessários para este texto.

Na segunda parte, demonstramos a existência do centro de massa nos espaços euclidiano e hiperbólico através da construção do que chamamos de centroide modelado e, na terceira parte, demonstramos que qualquer outro objeto que satisfaça determinados axiomas deve coincidir com este centroide.

Na quarta parte demonstramos a existência e unicidade em $\mathbb{S}^n$. Esta construção é feita a parte, já que o caso esférico apresenta uma particularidade que requer cuidado para tratar.

Para finalizar o trabalho exibimos na parte 5 o centroide do produto que, como prometido, nos dá uma forma de exibir o centro de massa sem precisar recorrer à imersão em espaços conveniente.

Sem mais delongas, vamos ao trabalho.

Parte I

Preâmbulo

1 Apresentação das Geometrias

Dedicamos o primeiro capítulo deste texto à apresentação do elemento fundamental para o nosso trabalho: as geometrias. Naturalmente, não iremos entrar em detalhes das construções, mas a breve descrição que faremos será suficiente para o nosso trabalho. Existe uma abundante literatura voltada para a construções das geometrias, o leitor interessado pode se aventurar em textos como (IVERSEN; BIRGER, 1992) ou (RATCLIFFE; AXLER; RIBET, 1994).

Ao longo deste trabalho, entendemos por **geometria** (ou **modelo da geometria**) um conjunto de pontos M , sobre o qual podemos medir distâncias, identificar isometrias (funções que preservam distância) e geodésicas (curvas de comprimento mínimo, localmente). Vale ressaltar que as noções aqui estabelecidas são compatíveis com as definições Riemannianas mas, novamente, não é nossa intenção nos estender neste tópico. Um ótimo livro para conhecer o assunto é (CARMO, 2015).

Durante o texto, denotaremos por d a função distância da geometria em questão e Γ o seu grupo de isometrias. Para dois pontos arbitrários $p_1, p_2 \in M$, a geodésica entre estes pontos será denotada por $p_1 p_2(t)$. Entre qualquer par de pontos das geometrias estudadas existe, a menos de reparametrização, uma geodésica e esta é única, excetuando o caso de pontos antípodas na esfera, onde existem infinitas.

Vamos agora apresentar os modelos para a geometria euclidiana ($\mathbb{R}^n$), hiperbólica ($\mathbb{H}^n$) e esférica ($\mathbb{S}^n$) com os quais trabalharemos.

- **Geometria Euclidiana**($\mathbb{R}^n$):

Na seção II.2 de (IVERSEN; BIRGER, 1992) Iversen constrói a geometria euclidiana em um espaço euclidiano E ^[1] de dimensão n qualquer. Nesta construção, temos a distância $d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2|$, onde $|\cdot|$ é a norma induzida pelo produto interno daquele espaço, e que as geodésicas passando pelo ponto p_1 são da forma

$$\sigma(t) = p_1 + vt$$

onde $v \in E$ é um vetor unitário.

Observe que se definimos $v = \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)}$, teremos que a geodésica $p_1 p_2$ é dada por

$$p_1 p_2(t) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)} t$$

Nesta mesma seção, temos duas caracterizações para as isometrias do espaço: no Teorema II.2.7 vemos as isometrias como a composição de até $n+1$ reflexões por hiperplanos, enquanto no Lema II.2.9 as isometrias são apresentadas como a composição de uma transformação ortogonal de E com uma translação por um vetor $e \in E$.

A partir desta construção, podemos apresentar o modelo que usaremos ao longo deste trabalho para a geometria euclidiana: o **modelo do hiperplano**. Apesar de não ser muito usual, este modelo será mais conveniente que o anterior por ser uma superfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ que não contém a origem, o que possibilitará descrever o centro de massa de maneira muito simples.

Para este modelo utilizamos, naturalmente, um hiperplano imerso em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais especificamente, vamos considerar o conjunto

$$M = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$$

[1] Um $\mathbb{R}$ espaço vetorial munido de produto interno

onde x_{n+1} é a última coordenada do vetor p .

Definindo $f(p) = p - e_{n+1}$ ^[2], temos uma bijeção entre o espaço euclidiano $E = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ e este conjunto e

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= d_E(f(p_1), f(p_2)) \\ p_1 p_2(t) &= f^{-1}\left(f(p_1) + \frac{f(p_2) - f(p_1)}{d_E(f(p_1), f(p_2))}t\right) \\ \Gamma &= \{f^{-1} \circ \gamma_E \circ f : \gamma_E \in \Gamma_E\} \end{aligned}$$

Podemos reescrever as expressões da distância e das geodésicas sem fazer referências à função f ou ao espaço E desenvolvendo

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= |(p_1 - e_{n+1}) - (p_2 - e_{n+1})| = |p_1 - p_2| \\ p_1 p_2(t) &= f^{-1}\left((p_1 - e_{n+1}) + \frac{(p_2 - e_{n+1}) - (p_1 - e_{n+1})}{d(p_1, p_2)}t\right) \\ &= \left[p_1 - e_{n+1} + \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)}t\right] + e_{n+1} \\ &= p_1 + \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)}t \end{aligned}$$

ou seja, a distância e as geodésicas neste modelo são descritas pelas mesmas equações do modelo canônico.

De forma geral, podemos escolher qualquer hiperplano para trabalhar com este modelo. O que nos leva a escolher um que não passa pela origem, é a seguinte propriedade:

Proposição 1.1. *O traço da geodésica $p_1 p_2(t)$ no modelo do hiperplano coincide com a interseção entre o conjunto M e o plano $Op_1 p_2$, onde O é a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. De fato, como

$$tr(p_1 p_2) = \left\{ p_1 + \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)}t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

a continência $tr(p_1 p_2) \subset M \cap Op_1 p_2$ é clara.

Por outro lado, se $p = \alpha p_1 + \beta p_2 \in M \cap Op_1 p_2$ então sua última coordenada deve ser igual a 1 e, como a última coordenada de p_1 e p_2 também valem 1, temos $\alpha + \beta = 1$ e, consequentemente, $\alpha = 1 - \beta$. Assim, temos

$$p = p_1 + (p_2 - p_1)\beta = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{d(p_1, p_2)}\beta d(p_1, p_2)$$

ou seja, $p \in tr(p_1 p_2)$.

Assim, temos a igualdade enunciada: $tr(p_1 p_2) = M \cap Op_1 p_2$. □

• Geometria Hiperbólica($\mathbb{H}^n$):

Para a geometria hiperbólica utilizaremos o **modelo do hiperboloide**, visto numa folha de um hiperboloide de duas folhas imerso em $\mathbb{R}^{n+1}$. Este modelo é construído de forma mais geral na seção II.4 de (IVERSEN; BIRGER, 1992), onde o autor exhibe o espaço hiperbólico partindo de uma forma quadrática de assinatura $(-n, 1)$.

^[2] e_{n+1} é o $n+1$ -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}_{n+1}$, ou seja, $(0, \dots, 0, 1)$

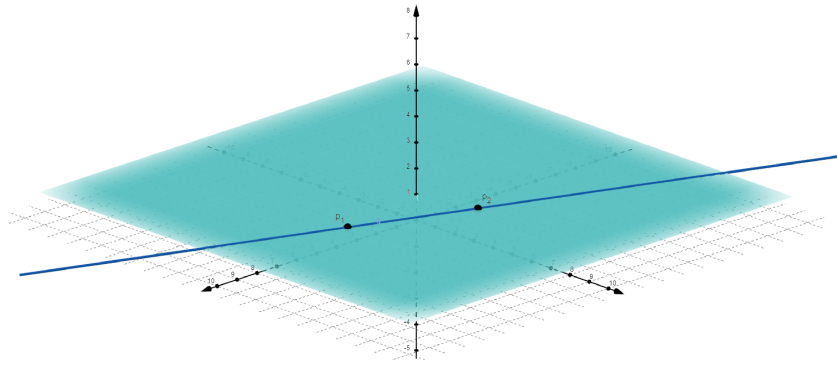


Figura 2 – Modelo do Hiperplano

Mutatis mutandis, o espaço pode ser obtido a partir de formas quadráticas de assinatura $(n, -1)$, e esta será a nossa forma de encarar o espaço hiperbólico. Utilizaremos o **produto de Minkowski**, uma forma quadrática de assinatura $(n, -1)$ dado por

$$\langle (x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \rangle_M = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

A partir do Lema I.6.2 e da Proposição I.6.4 do mesmo livro, derivamos as seguintes propriedades:

Proposição 1.2. *Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazem $\langle p_i, p_i \rangle_M = -1$, então $-\langle p_1, p_2 \rangle_M \geq 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $p_1 = p_2$.*

Proposição 1.3. *Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazem $\langle p_i, p_i \rangle_M < 0$, então para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ vale*

$$\langle \alpha p_1 + \beta p_2, \alpha p_1 + \beta p_2 \rangle_M < 0$$

Com isto em mãos, apresentamos o modelo do hiperboloide na folha

$$M = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p \rangle_M = -1, x_{n+1} > 0\}$$

do hiperboloide $\{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p \rangle_M = -1\}$, onde x_{n+1} é a última coordenada do vetor p . A distância entre os pontos p_1 e p_2 de M é dada implicitamente por

$$\cosh(d(p_1, p_2)) = -\langle p_1, p_2 \rangle_M$$

e a geodésica entre estes é

$$p_1 p_2(t) = p_1 \cosh(t) + \frac{p_2 - p_1 \cosh(d(p_1, p_2))}{\sinh(d(p_1, p_2))} \sinh(t)$$

ou seja, a geodésica é um ramo de hipérbole passando pelos pontos.

As isometrias deste espaço são transformações de Lorentz de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam o conjunto M , ou seja, transformações ortogonais do espaço munido com o produto de Minkowski que preservam as folhas do hiperboloide. O leitor interessado, pode encontrar uma ótima introdução destas transformações na seção I.6 de (IVERSEN; BIRGER, 1992).

- **Geometria Esférica($\mathbb{S}^n$):**

Utilizaremos como modelo para a geometria esférica uma esfera imersa $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais especificamente, vamos considerar o conjunto de pontos

$$M = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$$

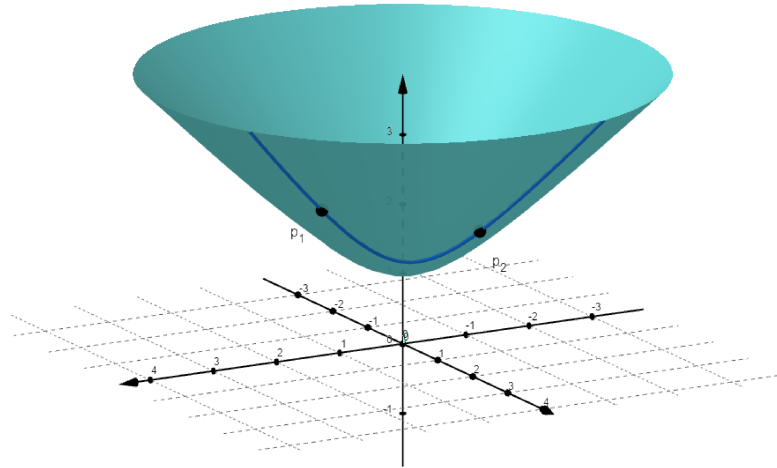


Figura 3 – Modelo do Hiperboloide

Esta geometria é construída na seção II.3 de (IVERSEN; BIRGER, 1992), donde tiramos a distância entre os pontos p_1 e p_2 de M como ângulo entre os vetores $\vec{Op_1}$ e $\vec{Op_2}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, dada implicitamente por

$$\cos(d(p_1, p_2)) = \langle p_1, p_2 \rangle$$

.

Note que esta distância está limitada por π , e quando $d(p_1, p_2) = \pi$, dizemos que p_1 e p_2 são pontos antípodas (ou antipodais). Pode ser verificado que, se p_1 e p_2 são antípodas, então $p_1 = -p_2$ ^[3].

Se p_1 e p_2 não são antípodas, a única geodésica entre eles é dada por

$$p_1 p_2(t) = p_1 \cos(t) + \frac{p_2 - p_1 \cos(d(p_1, p_2))}{\sin(d(p_1, p_2))} \sin(t)$$

Caso contrário, para qualquer vetor unitário v tangente a p_1 (consequentemente, tangente a p_2) teremos uma geodésica passando por p_1 e p_2 descrita por

$$p_1 p_2(v, t) = p_1 \cos(t) + v \sin(t)$$

Geometricamente, esta expressão nos diz que as geodésicas entre p_1 e p_2 em $\mathbb{S}^n$ são grandes círculos que passam por estes pontos.

Por fim, temos que as isometrias nesta geometria são transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{n+1}$ restritas à esfera, como pode ser conferido no Teorema II.3.11 do livro já citado.

1.1 Comentários Finais Sobre as Geometrias

Com isto, finalizamos a apresentação das geometrias. Antes de seguirmos para a próxima seção, cabem alguns comentários:

Dizemos que um ponto p pertence à (ou está sobre a) geodésica $p_1 p_2$ se $p \in tr(p_1 p_2)$. Nas nossas geometrias, isto equivale a dizer que $d(p, p_1) + d(p, p_2) = d(p_1, p_2)$. Além disso, em todos os modelos

^[3] O ponto $-p$ é obtido de p trocando o sinal de cada coordenada.

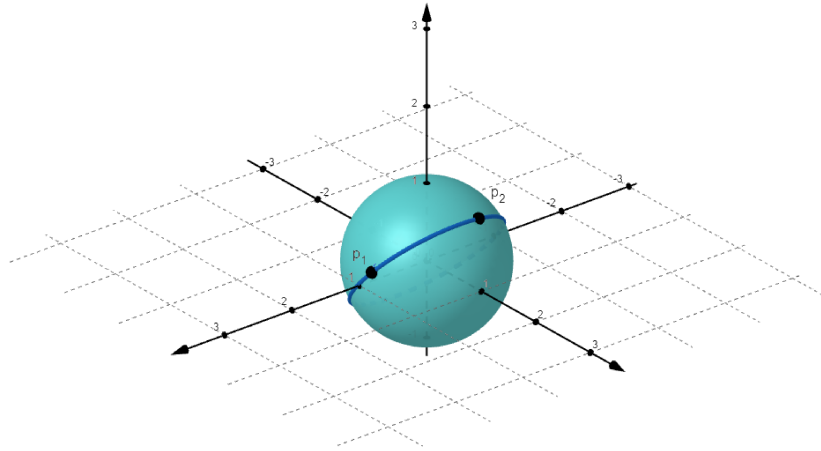


Figura 4 – Modelo da Esfera

apresentados vale a Proposição 1.1, cuja demonstração em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$ segue as mesmas linhas da apresentada para o caso euclidiano.

Por fim, note que não fizemos muitos comentários sobre o grupo de isometrias para nenhum dos modelos. Sobre estas, deixamos apenas o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Se os pontos $p_1, \dots, p_k$ e $q_1, \dots, q_k$ de M satisfazem $d(p_i, p_j) = d(q_i, q_j)$ para todo $i, j = 1, \dots, k$, então existe uma isometria $\gamma \in \Gamma$ deste modelo tal que $\gamma(p_i) = q_i$.*

Este resultado pode ser conferido nos Lemas II.2.4, II.3.10 e II.4.8 de (IVERSEN; BIRGER, 1992), para as geometrias euclidiana, esférica e hiperbólica, respectivamente.

2 Ponto Médio e Trigonometria

Nesta seção apresentaremos alguns outros resultados que, juntamente com os anteriores, serão indispensáveis para seguirmos com nosso estudo sobre o centro de massa: com o que já foi feito, provaremos a existência e com o que está por vir, provaremos a unicidade.

Começamos com uma breve discussão sobre o ponto médio.

Definimos o **ponto médio** entre dois pontos distintos $p_1, p_2 \in M$ como um ponto equidistante destes sobre a geodésica que os liga, ou seja, um ponto $p_m \in M$ tal que

1. $d(p_1, p_m) + d(p_2, p_m) = d(p_1, p_2)$
2. $d(p_1, p_m) = d(p_2, p_m)$

Quando este ponto é único, vamos denotá-lo por $\frac{p_1 p_2}{2}$.

Se M é o espaço euclidiano ou hiperbólico, existe um único ponto médio para qualquer par de pontos, enquanto em $M = \mathbb{S}^n$ existe um ponto médio para quaisquer dois pontos e, se $d(p_1, p_2) < \pi$, este ponto é único.

De fato, para notar a existência basta tomar uma geodésica entre os dois pontos e avaliá-la em $t = d(p_1, p_2)/2$. Para a unicidade, observe que nos casos em que esta é afirmada existe uma única geodésica entre os pontos e que, substituindo a segunda condição da definição na primeira, temos

$$d(p_1, p_m) = d(p_2, p_m) = d(p_1, p_2)/2$$

o que garante que $p_1 p_2 (d(p_1, p_2)/2)$ é o único ponto médio possível.

Dizemos que uma isometria $\gamma \in \Gamma$ "troca" os pontos p_1 e p_2 se $\gamma(p_1) = p_2$ e $\gamma(p_2) = p_1$, e denotamos por Γ_{p_1, p_2} o subconjunto das isometrias de um espaço que trocam os pontos p_1 e p_2 . Se definimos $q_1 = p_2$ e $q_2 = p_1$, o Teorema 1.1 implica que este conjunto é não vazio.

Veremos mais a frente que a invariância por isometrias, num sentido a ser precisado, possui um papel muito importante para o centro de massa. Dito isto, o próximo Teorema justifica nosso interesse no ponto médio:

Teorema 2.1. *Em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, único ponto fixo por todas as isometrias de Γ_{p_1, p_2} é $\frac{p_1 p_2}{2}$.*

Se $d(p_1, p_2) < \pi$ em $\mathbb{S}^n$, somente o ponto médio e seu antípoda possuem esta propriedade.

Demonstração. Basta notar que se p é fixo por qualquer $\gamma \in \Gamma_{p_1, p_2}$, então

$$d(p, p_1) = d(\gamma(p), \gamma(p_1)) = d(p, p_2)$$

Se além disso p não está na geodésica $p_1 p_2$, então $d(p, p_1), d(p, p_2) > d(p_1, p_2)/2$, o que implica que as bolas $B_{p_1}(d(p, p_1))$ e $B_{p_2}(d(p, p_2))$ se intersectam em dois pontos: p e $p' \neq p$.

Ora se definimos as triplas (p_1, p_2, p) e (p_2, p_1, p') , o Teorema 1.1 garante que existe uma isometria γ' tal que

$$\gamma'(p_1) = p_2 \quad \gamma'(p_2) = p_1 \quad \gamma'(p) = p'$$

Absurdo, uma vez que $\gamma' \in \Gamma_{p_1, p_2}$ e não fixa p . Assim, temos que um p fixo por todas as isometrias que trocam p_1 e p_2 deve estar na geodésica e, portanto, é o ponto médio entre estes ou o seu antípoda, no caso de $\mathbb{S}^n$. $\square$

Com isto, encerramos o assunto ponto médio. Sobre triângulos, nos será suficiente lembrar algumas propriedades trigonométricas nas nossas geometrias.

Assim como na geometria euclidiana, algumas relações interessantes também podem ser observadas entre os lados e ângulos de triângulos hiperbólicos e esféricos. Dado um triângulo com lados medindo a , b e c e ângulos opostos α , β e γ , vale:

Lei dos Cossenos:

Em $\mathbb{R}^n$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Em H^n :

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$$

Em S^n :

$$\cos a = -\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Lei dos Senos:

Em $\mathbb{R}^n$:

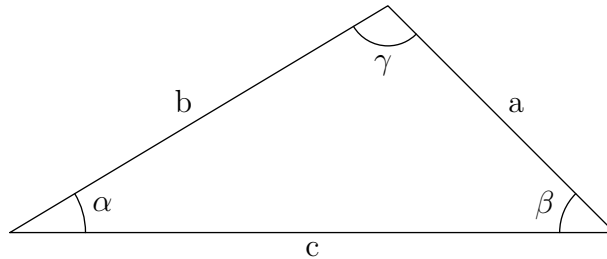
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Em H^n :

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}$$

Em S^n :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$



Uma prova completa das leis em $\mathbb{H}^n$ pode ser vista na seção III.5 de (IVERSEN; BIRGER, 1992), enquanto uma indicação da prova da lei do cosseno pode ser encontrada na seção II.3 do mesmo livro.

Usaremos estas relações em vários momentos, começando pela demonstração de que a seguinte propriedade, que é válida na geometria euclidiana, não vale nas geometrias hiperbólica e esférica.

Proposição 2.1. *Seja ABC um triângulo isósceles com os lados AB e AC medindo a e ângulos opostos α , e o lado BC medindo b com ângulo oposto β . Considere também os pontos médios L , M e N dos lados AB , AC e BC , respectivamente, e os pontos médios E e F de AN e LM (figura 5).*

Então os pontos E e F coincidem.

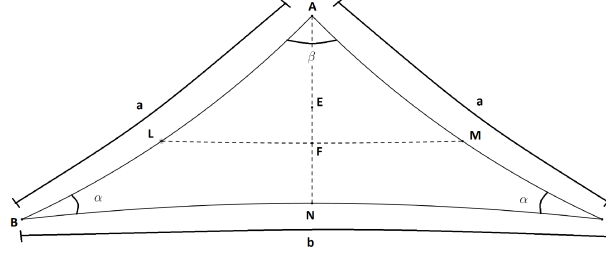


Figura 5 – Triângulo Isósceles

Na geometria euclidiana, isto é facilmente demonstrado observando que F está na geodésica AN e utilizando o Teorema de Thales: Como LM é paralelo à BC , vale a relação

$$\frac{d(A, M)}{d(A, C)} = \frac{d(A, E)}{d(A, N)}$$

e, como $d(A, M)/d(A, C) = 1/2$, concluímos que

$$d(A, E) = \frac{d(A, N)}{2}$$

Porém, para as outras geometrias, podemos construir contra-exemplos. De fato, considere no espaço hiperbólico um triângulo tal que as medidas a e b satisfaçam $\cosh(a) = 3$ e $\cosh(b) = 5$ ^[1].

Vamos mostrar que $d(A, E) \neq d(A, F)$ e, como consequência, que $E \neq F$. Antes de mais nada, vamos calcular α e β . Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cosh(d(A, B)) - \cosh(d(A, C)) \cosh(d(B, C))}{-\sinh(d(A, C)) \sinh(d(B, C))} \\ &= \frac{3 - 3 * 5}{-\sqrt{8}\sqrt{24}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\beta) &= \frac{\cosh(d(B, C)) - \cosh(d(A, B)) \cosh(d(A, C))}{-\sinh(d(A, B)) \sinh(d(A, C))} \\ &= \frac{5 - 3 * 3}{-\sqrt{8}\sqrt{8}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, temos $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Considerando o triângulo ANC , temos, pela lei dos senos

$$\frac{\sinh(d(A, N))}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(d(A, C))}{\sin(\pi/2)} \Rightarrow \sinh(d(A, N)) = \sqrt{8} * \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

Portanto, temos $d(A, E) = \frac{d(A, N)}{2} = \frac{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2})}{2} \approx 0,57$.

Considerando agora o triângulo AFM , temos

$$\frac{\sinh(d(F, M))}{\sin(\beta/2)} = \frac{\sinh(d(A, M))}{\sin(\pi/2)} \Rightarrow \sinh(d(F, M)) = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

[1] Estas medidas foram escolhidas para facilitar contas.

Ainda neste triângulo, podemos usar a lei dos cossenos para efetuar

$$\cosh(d(A, M)) = \cosh(d(A, F)) \cosh(d(F, M)) \Rightarrow \cosh(d(A, F)) = \sqrt{2}/\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Segue que $d(A, F) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \approx 0,89$.

Comparando $d(A, E)$ e $d(A, F)$, temos que $E \neq F$, como queríamos verificar.

Para triângulos esféricos, o mesmo pode ser verificado tomando um triângulo isósceles conveniente.

Com isto, encerramos o preâmbulo e entramos efetivamente no assunto principal: o centro de massa.

Parte II

Existência do Centro de Massa

3 Sistemas Materiais

Na introdução deste texto, vimos uma breve apresentação do centro de massa como um objeto físico. Abordaremos agora o centro de massa como objeto matemático e, conseqüentemente, precisamos apresentar algumas definições.

O primeiro objeto que precisamos definir é o **sistema material**, uma abstração do conceito físico de um sistema com massas pontuais. Num primeiro momento, um sistema material será um multiconjunto finito de duplas

$$\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$$

onde p_i são pontos e m_i são números reais **estritamente** positivos. Cada uma destas duplas será chamado de **ponto material**.

Note que não estamos exigindo que os pontos p_i sejam distintos. Fazemos isto para que seja possível comparar sistemas de cardinalidades diferentes.

Naturalmente, diremos que $\mathcal{A}$ é um sistema de uma determinada geometria se cada ponto pertence ao modelo M dessa geometria.

Definimos o conjunto $\mathcal{M}_k(M)$ como o conjunto dos sistemas com k pontos materiais nessa geometria e por fim

$$\mathcal{M}(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}_k(M)$$

o conjunto de todos os sistemas materiais nela. Como normalmente a geometria estará clara pelo contexto, vamos escrever simplesmente $\mathcal{M}_k$ e $\mathcal{M}$.

Por abuso de notação, denotaremos um sistema material com somente um ponto como $\mathcal{A} = (p, m)$, sem as chaves. Também chamaremos um sistema em $\mathcal{M}_1$ de ponto material.

Algumas operações podem ser naturalmente definidas no conjunto dos sistemas materiais:

Soma de Sistemas:

Considere os sistemas $\mathcal{A}_1 = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{(p'_1, m'_1), \dots, (p'_l, m'_l)\}$ e assumamos, sem perda de generalidade, que os κ primeiros pontos dos sistemas coincidam, ou seja, $p_i = p'_i$ para $i \leq \kappa$.

A soma dos dois sistemas é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = & \{(p_1, m_1 + m'_1), \dots, (p_\kappa, m_\kappa + m'_\kappa), \\ & (p_{\kappa+1}, m_{\kappa+1}), \dots, (p_k, m_k), \\ & (p'_{\kappa+1}, m'_{\kappa+1}), \dots, (p'_l, m'_l)\} \end{aligned}$$

ou seja, somamos as massas dos pontos comuns aos dois sistemas e mantemos os outros.

Multiplicação por Escalares:

Considere o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e o número real positivo λ .

A multiplicação de $\mathcal{A}$ por λ é definida como

$$\lambda \mathcal{A} = \{(p_1, \lambda m_1), \dots, (p_k, \lambda m_k)\}$$

ou seja, multiplicamos a massa de cada ponto material por λ .

Ação de Isometrias:

Considere o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e a isometria γ .

A ação de γ em $\mathcal{A}$ é definida como

$$\gamma\mathcal{A} = \{(\gamma(p_1), m_1), \dots, (\gamma(p_k), m_k)\}$$

ou seja, aplicamos a isometria γ no ponto de cada ponto material.

Obs.: Diretamente da definição, notamos que a multiplicação, a ação por isometrias e a soma de sistemas comutam, ou seja

$$\lambda(\gamma\mathcal{A}) = \gamma(\lambda\mathcal{A})$$

$$\gamma(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = (\gamma\mathcal{A}_1) + (\gamma\mathcal{A}_2)$$

$$\lambda(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = (\lambda\mathcal{A}_1) + (\lambda\mathcal{A}_2)$$

Por fim, é desejável dar uma noção de distância entre sistemas de mesma cardinalidade: se $\mathcal{A}_1 = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{(p'_1, m'_1), \dots, (p'_k, m'_k)\}$, definimos a distância destes sistemas como

$$d_{\mathcal{M}_k}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \min_{\sigma \in S_k} \max_i \{d(p_i, p'_{\sigma(i)}), |m_i - m'_{\sigma(i)}|\}$$

onde S_k é o grupo de permutações de k elementos.

Em outras palavras, dois sistemas estão próximos se, a menos de reindexação, p_i está próximo de p'_i na geometria e m_i está próximo de m'_i na reta, para todo $i = 1, \dots, k$.

4 Centroide Modelado

No capítulo 1, observamos que todas as geometrias com as quais trabalhamos podem ser representadas naturalmente como um hiperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$. Vamos nos aproveitar disso e da estrutura de espaço vetorial existente neste para dar a nossa primeira definição do centro de massa..

Seja M um conjunto em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ um sistema material com pontos neste conjunto.

Chamaremos o vetor $v_{\mathcal{A}} = \sum m_i p_i$ de **vetor de massa** do sistema e a semi-reta $r_{\mathcal{A}}$ partindo da origem nesta direção de **semi-reta de massa**.

Dizemos que $\mathcal{A}$ **satisfaz a condição de existência (CE)** se $r_{\mathcal{A}}$ intersecta M em **exatamente** um ponto, ou seja, existe um ponto p tal que $p \in M \cap r_{\mathcal{A}}$.

Como $r_{\mathcal{A}}(t) = tv_{\mathcal{A}}$, isto é o mesmo que dizer que existe um único real positivo t_0 tal que

$$p = r_{\mathcal{A}}(t_0) = t_0 v_{\mathcal{A}} \in M$$

Uma vez que $t_0 \neq 0$, fica bem definido $m = \frac{1}{t_0}$ e vale

$$mp = v_{\mathcal{A}} \tag{4.1}$$

Sob estas condições, dizemos que o par $(p, m) = (r_{\mathcal{A}}(t_0), 1/t_0)$ é o **centro de massa modelado** do sistema $\mathcal{A}$.

Note que se o par $(p', m') \in \mathcal{M}(M)$ também satisfaz 4.1, então

$$p' \in M \text{ e } p' = \frac{1}{m'} v_{\mathcal{A}} \in r_{\mathcal{A}}$$

ou seja então $p' = p$ e $m' = m$. Portanto o centro de massa modelado é o único ponto material de M que satisfaz 4.1.

Isto nos leva a definir o centro de massa modelado como uma função:

Se todo sistema de $\mathcal{M}(M)$ satisfaz a CE, então definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{mod} : \mathcal{M}(M) &\longrightarrow \mathcal{M}_1(M) \\ \mathcal{A} &\longmapsto (p_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}) \end{aligned}$$

onde $(p_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}})$ é o único ponto material de M que satisfaz 4.1.

Vejamos algumas propriedades imediatas do centroide modelado.

Proposição 4.1. *Se $v_{\mathcal{A}_1} = v_{\mathcal{A}_2}$, então $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2)$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) = (p, m)$.

Por 4.1 e pela hipótese temos que $mp = v_{\mathcal{A}_1} = v_{\mathcal{A}_2}$, logo, pela definição do centroide modelado, segue que

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2) = (p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1)$$

□

Proposição 4.2. Se $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1$, então $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Demonstração. Se $\mathcal{A} = (p, m)$ então $v_{\mathcal{A}} = mp$. Logo, pela definição do centroide modelado, temos

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = (p, m) = \mathcal{A}$$

□

Proposição 4.3. Para quaisquer dois sistemas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$ vale

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) + \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2))$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1 = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{(p'_1, m'_1), \dots, (p'_l, m'_l)\}$ e suponha, sem perda de generalidade, que os κ primeiros pontos coincidam entre os sistemas.

Temos

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k), (p'_1, m'_1), \dots, (p'_l, m'_l)\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 &= \{(p_1, m_1 + m'_1), \dots, (p_\kappa, m_\kappa + m'_\kappa), \\ &\quad (p_{\kappa+1}, m_{\kappa+1}), \dots, (p_k, m_k), \\ &\quad (p'_{\kappa+1}, m'_{\kappa+1}), \dots, (p'_l, m'_l)\} \end{aligned}$$

Pela definição, o vetor de massa desses sistemas é

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2} &= \sum_{i=1}^k m_i p_i + \sum_{i=1}^l m'_i p'_i \\ v_{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2} &= \sum_{i=1}^{\kappa} (m_i + m'_i) p_i + \sum_{i=\kappa+1}^k m_i p_i + \sum_{i=\kappa+1}^l m'_i p'_i \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} m_i p_i + \sum_{i=1}^{\kappa} m'_i p'_i + \sum_{i=\kappa+1}^k m_i p_i + \sum_{i=\kappa+1}^l m'_i p'_i \\ &= \sum_{i=1}^k m_i p_i + \sum_{i=1}^l m'_i p'_i \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.1, isto mostra a primeira igualdade.

Defina $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1)$ e $(p', m') = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2)$ e vamos calcular o vetor de massa de $\mathcal{A} = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) \cup \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2) = \{(p, m), (p', m')\}$:

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{A}} &= mp + m'p' \\ &= v_{\mathcal{A}_1} + v_{\mathcal{A}_2} \\ &= \sum_{i=1}^k m_i p_i + \sum_{i=1}^l m'_i p'_i = v_{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2} \end{aligned}$$

Como esse vetor de massa coincide com o de $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) + \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2)$, temos o resultado desejado.

□

Proposição 4.4. Para qualquer sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ e qualquer real positivo λ vale

$$\mathbb{U}_{mod}(\lambda \mathcal{A}) = \lambda \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ e (p, m) o centroide de massa modelado deste sistema.

Temos $\lambda\mathcal{A} = \{(p_1, \lambda m_1), \dots, (p_k, \lambda m_k)\}$ e $\lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = (p, \lambda m)$. Consequentemente

$$v_{\lambda\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^k \lambda m_i p_i = \lambda \sum_{i=1}^k m_i p_i$$

$$v_{\lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})} = \lambda m p = \lambda \sum_{i=1}^k m_i p_i$$

Como $\lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) \in \mathcal{M}_1$, a Proposição 4.2 implica que $\mathbb{U}_{mod}(\lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})) = \lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ e segue a igualdade desejada. $\square$

Obs.: Pelas propriedades 4.2 e 4.3, basta entendermos como o centro de massa modelado funciona nos sistemas de $\mathcal{M}_2$, pois podemos particionar qualquer sistema em sub-sistemas de cardinalidade 2 ou 1 e resolvê-los separadamente.

Nas próximas duas seções, vamos estudaremos as particularidades do centroide modelado em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$. Os principais resultados demonstrados serão:

Proposição 4.5. *O centroide de massa modelado em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$ é invariante por isometrias, no sentido que se γ é uma isometria e $\mathcal{A}$ um sistema material do espaço em questão, então*

$$\mathbb{U}_{mod}(\gamma\mathcal{A}) = \gamma\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Proposição 4.6. *O centroide de massa modelado em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$ é uma função contínua, no sentido que para todo $\epsilon > 0$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_k$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \mathcal{A}) > 0$ tal que*

$$d_{\mathcal{M}_k}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}), \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}')) < \epsilon \quad \forall \mathcal{A}' \in \mathcal{M}_k$$

Proposição 4.7. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ é um sistema em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$, então seu centro de massa modelado $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ está localizado na geodésica entre p_1 e p_2 . Além disso, ele está mais próximo do ponto com maior massa, estando equidistante de p_1 e p_2 se, e somente se, $m_1 = m_2$.*

4.1 O Centroid Modelado em $\mathbb{R}^n$

Como já foi visto, um modelo da geometria euclidiana é realizado pelo conjunto $M = \{(x_1, \dots, x_n, 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se consideramos o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ em M e denotamos $p_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}, 1)$, temos

$$v_{\mathcal{A}} = \left(\sum x_{i,1} m_i, \dots, \sum x_{i,n} m_i, \sum m_i \right)$$

Observe que a semi-reta $r_{\mathcal{A}}$ intersecta M no ponto $t_0 = 1/\sum m_i$, pois

$$r_{\mathcal{A}}\left(1/\sum m_i\right) = \frac{1}{\sum m_i} v_{\mathcal{A}} = \left(\frac{\sum x_{i,1} m_i}{\sum m_i}, \dots, \frac{\sum x_{i,n} m_i}{\sum m_i}, 1 \right)$$

Se $r_{\mathcal{A}}(t_1) \in M$, temos $t_1 \sum m_i = 1$, ou seja, $t_1 = 1/\sum m_i = t_0$.

Logo, a condição de existência é satisfeita e temos

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \left(\sum m_i p_i / \sum m_i, \sum m_i \right) \tag{4.2}$$

Note que as equações em 4.2 variam continuamente em função de p_i e m_i , o que demonstra a Proposição 4.6 em $\mathbb{R}^n$.

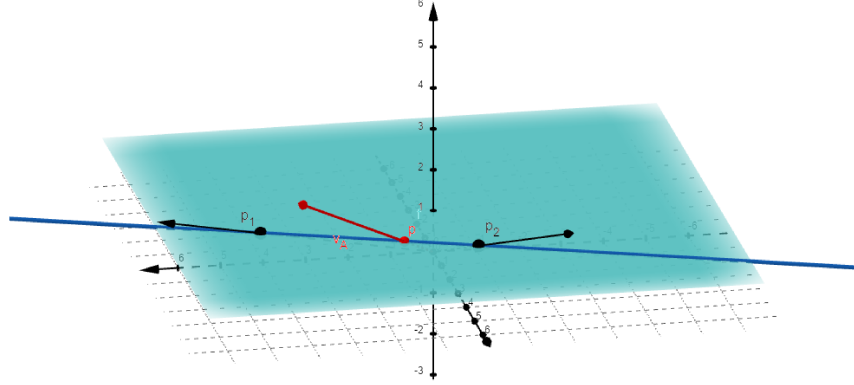


Figura 6 – Centroide Modelado Em $\mathbb{R}^n$

4.1.1 Sistemas de Cardinalidade 2

No caso particular em que $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\} \in \mathcal{M}_2$, definindo $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ temos

$$m = m_1 + m_2 \quad \text{e} \quad p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m} \quad (4.3)$$

Antes de mais nada, observe que p pertence à interseção da superfície M com o plano que contém a origem, p_1 e p_2 e, portanto, está na geodésica que passa por estes pontos. Isto justifica a primeira parte da Proposição 4.7.

Denotando por $d_i = d(p, p_i)$ e $d = d(p_1, p_2)$, podemos aplicar a definição de distância neste espaço para chegar a

$$d_1 = \frac{m_2}{m} d \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{m_1}{m} d \quad (4.4)$$

e, conseqüentemente,

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad (4.5)$$

Como p está na geodésica $p_1 p_2$, sua posição no espaço pode ser determinada por 4.4 e a massa m pela primeira equação de 4.3. Como estas equações só dependem das massas e da distância $d(p_1, p_2)$, isso demonstra a Proposição 4.5.

Por fim, notamos que a equação (4.5) implica que o centro de massa modelado está mais próximo do ponto com maior massa e que a distância do mesmo até os pontos do sistema é igual se, e somente se, as massas são iguais, o que prova a segunda afirmação de 4.7.

4.2 O Centroide Modelado em $\mathbb{H}^n$

Nesta seção trabalharemos com o modelo do hiperbolóide para a geometria hiperbólica, ou seja, vamos considerar $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x \rangle_M = -1, x_{n+1} > 0\}$

Vamos novamente considerar o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ em M .

Pelos comentários feitos no capítulo 1 temos que $\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M < 0$. Se definimos $t_0 = \sqrt{-1/\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M}$ temos que

$$\langle r_{\mathcal{A}}(t_0), r_{\mathcal{A}}(t_0) \rangle_M = \left\langle \sqrt{\frac{-1}{\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M}} v_{\mathcal{A}}, \sqrt{\frac{-1}{\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M}} v_{\mathcal{A}} \right\rangle_M = \left| \frac{-1}{\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M} \right| \langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M = -1$$

Como a última coordenada de cada p_i é maior que zero, temos que a última coordenada de $v_{\mathcal{A}}$ também é e portanto $r_{\mathcal{A}}(t_0) \in M$.

Se $r_{\mathcal{A}}(t_1) \in M$, então

$$t_1^2 \langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M = \langle r_{\mathcal{A}}(t_1), r_{\mathcal{A}}(t_1) \rangle_M = -1 = \langle r_{\mathcal{A}}(t_0), r_{\mathcal{A}}(t_0) \rangle_M = t_0^2 \langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M$$

Como $\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M \neq 0$ e $t_0, t_1 > 0$, segue que $t_1 = t_0$. Com isto temos que a condição de existência é satisfeita no espaço hiperbólico, ou seja, a função de centro de massa modelada está bem definida neste espaço.

Além disso, se desenvolvemos $\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M$, temos

$$\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle_M = \left\langle \sum_i m_i p_i, \sum_j m_j p_j \right\rangle_M = \sum_{i,j} m_i m_j \langle p_i, p_j \rangle_M = - \sum_{i,j} m_i m_j \cosh(d(p_i, p_j))$$

Consequentemente, o centroide modelado em $\mathbb{H}^n$ é dado por

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \left(\sum m_i p_i / \sqrt{\sum_{i,j} m_i m_j \cosh(d_{ij})}, \sqrt{\sum_{i,j} m_i m_j \cosh(d_{ij})} \right) \quad (4.6)$$

, onde $d_{ij} = d(p_i, p_j)$.

Mais uma vez, temos uma variação contínua de $\mathbb{U}_{mod}$ em relação a p_i e m_i e portanto, no espaço hiperbólico também vale a Proposição 4.6.

Obs.: Se $d_{ij} \approx 0$, temos que $\cosh(d_{ij}) \approx 1$ e, consequentemente

$$m \approx \sqrt{\sum_{i,j=1}^k m_i m_j} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k m_i \right)^2} = \sum_{i=1}^k m_i$$

ou seja, em sistemas com pontos próximos o centro de massa hiperbólico se assemelha ao euclidiano.

4.2.1 Sistemas de Cardinalidade 2

Considere agora $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ e defina $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$, $d_i = d(p, p_i)$ e $d = d(p_1, p_2)$.

Por (4.6), temos

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cosh(d)} \quad \text{e} \quad p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m} \quad (4.7)$$

Mais uma vez, notamos que p está na interseção do plano que passa pela origem, p_1 e p_2 com o hiperboloide e portanto, pertence à geodésica $p_1 p_2$, demonstrando a primeira parte da Proposição 4.7.

Lembrando da definição da distância em M , temos

$$\begin{aligned} \cosh(d_1) &= -\langle p_1, p \rangle_M \\ &= -\langle p_1, (m_1 p_1 + m_2 p_2)/m \rangle_M \\ &= -\frac{1}{m} [m_1 \langle p_1, p_1 \rangle_M + m_2 \langle p_1, p_2 \rangle_M] \\ &= \frac{m_1 + m_2 \cosh(d)}{m} \end{aligned}$$

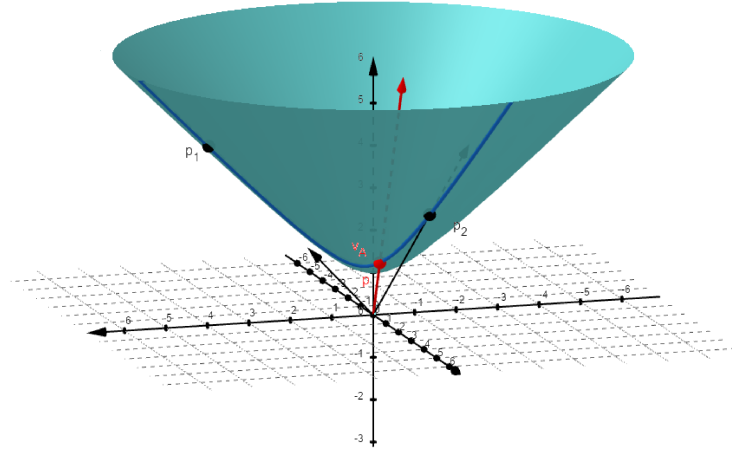


Figura 7 – Centroide Modelado Em $\mathbb{H}^n$

Segue que

$$\begin{aligned}
 \sinh^2(d_1) &= \cosh^2(d_1) - 1 \\
 &= \frac{m_1^2 + 2m_1m_2 \cosh(d) + m_2^2 \cosh^2(d)}{m^2} - 1 \\
 &= \frac{m_1^2 + 2m_1m_2 \cosh(d) + m_2^2 \cosh^2(d) - m^2}{m^2} \\
 &= \frac{m_2^2 \cosh^2(d) - m_2^2}{m^2} \\
 &= \frac{m_2^2 (\cosh^2(d) - 1)}{m^2} \\
 &= \frac{m_2^2 \sinh^2(d)}{m^2}
 \end{aligned}$$

Como $d_1 \geq 0$, temos que $\sinh(d_1) = m_2 \sinh(d)/m$.

Analogamente, segue que $\sinh(d_2) = m_1 \sinh(d)/m$ e, conseqüentemente

$$m_1 \sinh(d_1) = m_2 \sinh(d_2) \quad (4.8)$$

As equações

$$\sinh(d_1) = m_2 \sinh(d)/m \quad \text{e} \quad \sinh(d_2) = m_1 \sinh(d)/m \quad (4.9)$$

juntamente com 4.7 e a primeira parte da Proposição 4.7 provam 4.5.

Como $\sinh$ é uma função injetiva e crescente, a equação (4.8) nos diz que o centro de massa modelado na geometria hiperbólica também se encontra mais próximo da maior massa, sendo equidistante dos dois pontos se, e somente se, as massas forem iguais, terminando a demonstração de 4.7.

Parte III

Unicidade do Centro de Massa

5 Centroide Axiomático

Neste capítulo vamos estudar o centro de massa de uma perspectiva axiomática, ou seja, vamos definir as condições para que uma função seja chamada de centro de massa e trabalhar sobre elas.

Nosso objetivo final será mostrar que uma função que satisfaz tais propriedades no espaço euclidiano e hiperbólico deve ser o centroide modelado exibido no capítulo anterior.

Quando não especificado, um modelo M neste capítulo representará a geometria euclidiana ou hiperbólica com a construção feita no capítulo 1.

Uma **função centro de massa**, ou centroide de massa, num modelo M de uma geometria é uma função $\mathbb{U} : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}_1(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Imobilidade:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow \mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

2. Indução:

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}(\mathbb{U}(\mathcal{A}_1) + \mathbb{U}(\mathcal{A}_2))$$

3. Multiplicação:

$$\mathbb{U}(\lambda \mathcal{A}) = \lambda \mathbb{U}(\mathcal{A}), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

4. Invariancia por Isometrias:

$$\mathbb{U}(\gamma \mathcal{A}) = \gamma \mathbb{U}(\mathcal{A}), \forall \gamma \in \Gamma$$

5. Continuidade:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta(\epsilon, \mathcal{A}) > 0 : d_{\mathcal{M}_k}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}(\mathcal{A}), \mathbb{U}(\mathcal{A}'))$$

Vamos nos referir a estas propriedades também como axiomas (do centro de massa).

Pela discussão feita no capítulo anterior, é imediato notar que $\mathbb{U}_{mod}$ é uma função centro de massa em $\mathbb{R}^n$ e H^n .

Além disso, como os modelos de uma geometria são todos isométricos, uma função de centro de massa em um modelo induz o centroide em todos os outros.

Vamos derivar algumas propriedades diretamente da definição:

Proposição 5.1. *Se duas funções centro de massa coincidem em $\mathcal{M}_2(M)$, então elas são iguais.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{U}'$ duas funções de centro de massa em M .

Pelo axioma da imobilidade estas funções coincidem em $\mathcal{M}_1$ e por hipótese elas coincidem em $\mathcal{M}_2$. Vamos utilizar indução para mostrar que elas coincidem em $\mathcal{M}$.

Suponha que $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{U}'(\mathcal{A})$ para qualquer sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_K$, com $K < k$ e tome um sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\} \in \mathcal{M}_k$.

Utilizando o axioma da indução e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\{(p_1, m_1), \dots, (p_{k-1}, m_{k-1})\} \cup (p_k, m_k)) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(p_1, m_1), \dots, (p_{k-1}, m_{k-1})\}) + \mathbb{U}(p_k, m_k)) \\
 &= \mathbb{U}'(\mathbb{U}'(\{(p_1, m_1), \dots, (p_{k-1}, m_{k-1})\}) + \mathbb{U}'(p_k, m_k)) \\
 &= \mathbb{U}'(\{(p_1, m_1), \dots, (p_{k-1}, m_{k-1})\} \cup (p_k, m_k)) \\
 &= \mathbb{U}'(\mathcal{A})
 \end{aligned}$$

Ou seja, as funções também coincidem em $\mathcal{M}_k$.

Com isto concluímos a indução e a demonstração da Proposição. $\square$

Proposição 5.2. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ é um sistema em M então o centro de massa de $\mathcal{A}$ se encontra no ponto médio entre p_1 e p_2 .*

Demonstração. Tome $\gamma \in \Gamma_{p_1 p_2}$ qualquer e defina $(p, m) = \mathbb{U}(\mathcal{A})$.

Como $\gamma\mathcal{A} = \mathcal{A}$, a invariância por isometrias implica

$$(p, m) = \mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{U}(\gamma\mathcal{A}) = \gamma\mathbb{U}(\mathcal{A}) = (\gamma p, m)$$

, ou seja, o centro de massa é invariante pela isometria γ .

Ora, como γ foi tomada arbitrariamente em $\Gamma_{p_1 p_2}$, concluímos que o centro de massa de $\mathcal{A}$ é invariante por qualquer isometria deste conjunto.

Pelo teorema 2.1 temos o resultado. $\square$

6 Unicidade

Um ponto importante a ser ressaltado sobre a Proposição 5.2 é que não pedimos nenhuma condição sobre a função $\mathbb{U}$ além de que ela fosse um centro de massa. Isto implica que a propriedade demonstrada vale para **qualquer** função deste tipo. Ao longo deste capítulo vamos sempre assumir que $\mathbb{U}$ é uma função de centro de massa arbitrária e portanto todas as conclusões serão válidas para qualquer função desta classe.

Uma vez que sabemos que o centroide modelado é uma função centro de massa, nosso objetivo será mostrar que uma função centro de massa qualquer coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ e, pela Proposição 5.1, basta mostrar que esta coincidência ocorre em $\mathcal{M}_2$.

Antes disso, vamos mostrar que ela ocorre em uma classe menor de sistemas: os sistemas de cardinalidade 2 com massas iguais, ou seja, o conjunto de sistemas da forma $\{(p_1, m), (p_2, m)\}$. Vamos denotar o conjunto desses sistemas por $\mathcal{M}_2^*$.

Pela Proposição 5.2, se $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^*(X)$ então já sabemos a posição do centro de massa de $\mathcal{A}$ e só precisamos determinar a massa no mesmo. Para isto, vamos definir algo que chamamos de **função de massa**.

6.1 A Função de Massa

A função de massa de um centro de massa é uma função $f_{\mathbb{U}} : \mathcal{M}_2^*(X) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ com o número real

$$f_{\mathbb{U}}(\mathcal{A}) = \frac{\overline{m}}{2m}$$

onde $\overline{m}$ é a massa em $\mathbb{U}(\mathcal{A})$. Em outras palavras, esta função nos dá uma razão entre a massa no centroide dado por uma função $\mathbb{U}$ e a soma das massas no sistema.

Consequentemente, temos

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \left(\frac{\overline{p_1 p_2}}{2}, 2m f_{\mathbb{U}}(\mathcal{A}) \right)$$

Para simplificar as notações, sempre que tratarmos de um centroide de massa arbitrário vamos denotar a função de massa simplesmente por f .

Quando tratamos do centroide modelado, as equações (4.3) e (4.7) nos indicam que as funções de massa são

$$f_{\mathbb{U}_{mod}}(\mathcal{A}) = \frac{2m}{2m} = 1$$

em $\mathbb{R}^n$ e

$$f_{\mathbb{U}_{mod}}(\mathcal{A}) = \frac{\sqrt{2m^2[1 + \cosh(d(p_1, p_2))]} }{2m} = \sqrt{\frac{1 + \cosh(d(p_1, p_2))}{2}} = \cosh\left(\frac{d(p_1, p_2)}{2}\right)$$

em $\mathbb{H}^n$.

Observe que estas funções não dependem de nenhuma propriedade do sistema além da distância entre os pontos p_1 e p_2 , o que nos leva a enunciar

Proposição 6.1. *A função de massa em $\mathbb{R}^n$ e H^n depende **somente** da distância entre os pontos do sistema. Ou seja, se $\mathcal{A}_1 = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{(p_3, m'), (p_4, m')\}$ satisfazem $d(p_1, p_2) = d(p_3, p_4)$, então $f(\mathcal{A}_1) = f(\mathcal{A}_2)$.*

Demonstração. Defina $(p, \bar{m}) = \mathbb{U}(\mathcal{A}_1)$ e $(p', \bar{m}') = \mathbb{U}(\mathcal{A}_2)$.

Uma vez que $d(p_1, p_2) = d(p_3, p_4)$, o Teorema 1.1 garante que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(p_1) = p_3$ e $\gamma(p_2) = p_4$. Pela invariância do centroide por isometrias, temos

$$\mathbb{U}(\gamma\mathcal{A}_2) = \gamma\mathbb{U}(\mathcal{A}_2) = (\gamma p', \bar{m}')$$

ou seja, $f(\gamma\mathcal{A}_2) = f(\mathcal{A}_2)$.

Note agora que $\mathcal{A}_1 = \frac{m}{m'}\gamma\mathcal{A}_2$, logo, pelo axioma da multiplicação, temos

$$(p, \bar{m}) = \mathbb{U}(\mathcal{A}_1) = \mathbb{U}\left(\frac{m}{m'}\gamma\mathcal{A}_2\right) = \frac{m}{m'}\mathbb{U}(\gamma\mathcal{A}_2) = \left(\gamma p', \frac{m\bar{m}'}{m'}\right)$$

ou seja, $\bar{m} = \frac{m\bar{m}'}{m'}$.

Pela definição de f , temos

$$f(\mathcal{A}_1) = \frac{\bar{m}}{2m} = \frac{m\bar{m}'/m'}{2m} = \frac{\bar{m}'}{2m'} = f(\mathcal{A}_2)$$

como queríamos. $\square$

Com esta Proposição, concluímos que a função de massa pode ser vista como uma função real que, para cada distância entre pontos, associa a razão entre a massa no centroide e a soma das massas no sistema arbitrariamente escolhido dentre aqueles com a distância fixada. Uma vez que $\mathbb{U}$ é contínua, vamos agora considerar f como uma função $[0, \infty) \xrightarrow{C^0} (0, \infty)$.

Por questões de simplificação, vamos considerar como argumento da função de massa **metade** da distância entre os pontos de um sistema material em $\mathcal{M}_2^*$, ou seja, se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$, então

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \left(\frac{\overline{p_1 p_2}}{2}, 2mf\left(\frac{d(p_1, p_2)}{2}\right) \right)$$

Com esta definição, a função de massa do centroide modelado é $f(r) \equiv 1$ em $\mathbb{R}^n$ e $f(r) = \cosh(r)$ em $\mathbb{H}^n$.

Observe que se tomamos $\mathcal{A} = \{(p, m), (p, m)\}$, podemos usar o axioma da indução e da imobilidade para mostrar que

$$(p, 2m) = \mathbb{U}(\mathcal{A}) = (p, 2mf(0))$$

e, consequentemente, temos que $f(0) = 1$.

6.1.1 Propriedades da Função de Massa

Vejamos agora duas proposições que vão nos ajudar a caracterizar a função de massa nos espaços euclidiano e hiperbólico:

Proposição 6.2. *Se $0 \leq r_2 \leq r_1$, então $f(r_1)f(r_2) = \frac{f(r_1 - r_2) + f(r_1 + r_2)}{2}$.*

Demonstração. Considere um segmento geodésico $\overline{p_1 p_2}$ de comprimento $2r_1$ e nas suas extremidades dois segmentos $\overline{q_1 q_2}$ e $\overline{q_3 q_4}$ paralelos ao primeiro e de comprimento $2r_2$ como na figura 8.

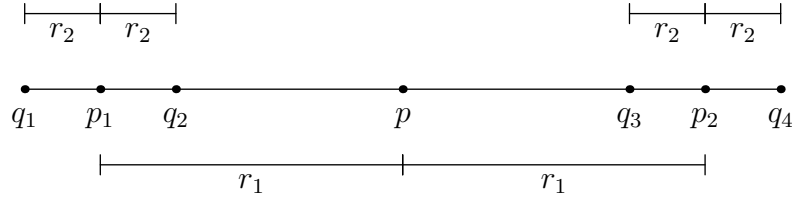


Figura 8 – Configuração da Proposição 6.2

Desta forma, temos $p = \frac{\overline{p_1 p_2}}{2}$, $p_1 = \frac{\overline{q_1 q_2}}{2}$ e $p_2 = \frac{\overline{q_3 q_4}}{2}$.

Defina o sistema $\mathcal{A} := \{(q_1, m), (q_2, m), (q_3, m), (q_4, m)\}$.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_2, m)\} \cup \{(q_3, m), (q_4, m)\}) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_2, m)\}) + \mathbb{U}(\{(q_3, m), (q_4, m)\})) \\
 &= \mathbb{U}((p_1, 2mf(r_2)) + (p_2, 2mf(r_2))) \\
 &= \mathbb{U}(\{(p_1, 2mf(r_2)), (p_2, 2mf(r_2))\}) \\
 &= (p, 4mf(r_2)f(r_1))
 \end{aligned}$$

Mas calculando de outra forma temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_4, m)\} \cup \{(q_2, m), (q_3, m)\}) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_4, m)\}) + \mathbb{U}(\{(q_2, m), (q_3, m)\})) \\
 &= \mathbb{U}((p, 2mf(r_1 + r_2)) + (p, 2mf(r_1 - r_2))) \\
 &= \mathbb{U}(p, 2m[f(r_1 + r_2) + f(r_1 - r_2)]) \\
 &= (p, 2m[f(r_1 + r_2) + f(r_1 - r_2)])
 \end{aligned}$$

Igualando as duas equações, temos

$$f(r_1)f(r_2) = \frac{f(r_1 - r_2) + f(r_1 + r_2)}{2} \quad (6.1)$$

□

Proposição 6.3. *Se r_1 e r_2 são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa medindo l , então $f(l) = f(r_1)f(r_2)$.*

Demonstração. Considere um segmento geodésico $\overline{p_1 p_2}$ de comprimento $2r_1$ e nas suas extremidades dois segmentos $\overline{q_1 q_2}$ e $\overline{q_3 q_4}$ coplanares e perpendiculares ao primeiro e de comprimento $2r_2$ como na figura 9.

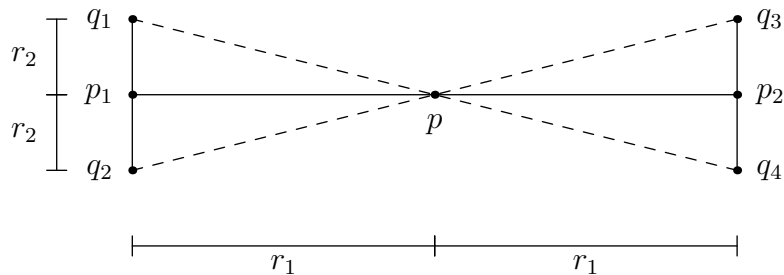


Figura 9 – Configuração da Proposição 6.3

Desta forma, temos $p = \frac{\overline{p_1 p_2}}{2} = \frac{\overline{q_1 q_4}}{2} = \frac{\overline{q_2 q_3}}{2}$, $p_1 = \frac{\overline{q_1 q_2}}{2}$ e $p_2 = \frac{\overline{q_3 q_4}}{2}$. Além disso, observe que $d(q_1, q_4) = d(q_2, q_3) = 2l$.

Defina o sistema $\mathcal{A} := \{(q_1, m), (q_2, m), (q_3, m), (q_4, m)\}$. Mais uma vez, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_2, m)\} \cup \{(q_3, m), (q_4, m)\}) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_2, m)\}) + \mathbb{U}(\{(q_3, m), (q_4, m)\})) \\
 &= \mathbb{U}((p_1, 2mf(r_2)) + (p_2, 2mf(r_2))) \\
 &= \mathbb{U}(\{(p_1, 2mf(r_2)), (p_2, 2mf(r_2))\}) \\
 &= (p, 4mf(r_2)f(r_1))
 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_4, m)\} \cup \{(q_2, m), (q_3, m)\}) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(q_1, m), (q_4, m)\}) + \mathbb{U}(\{(q_2, m), (q_3, m)\})) \\
 &= \mathbb{U}((p, 2mf(l)) + (p, 2mf(l))) \\
 &= \mathbb{U}(p, 4mf(l)) \\
 &= (p, 4mf(l))
 \end{aligned}$$

Igualando as duas equações, temos

$$f(l) = f(r_1)f(r_2) \tag{6.2}$$

□

6.1.2 Possíveis Formas da Função de Massa

O objetivo desta seção é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 6.1. *Se existe $r_0 > 0$ tal que:*

- (a) $f(r_0) > 1$, então $f(r) = \cosh(cr)$, para alguma constante real $c > 0$.
- (b) $f(r_0) = 1$, então $f(r) \equiv 1$.
- (c) $f(r_0) < 1$, então $f(r) = \cos(cr)$, para alguma constante real $c > 0$.

Comece supondo que existe $r_0 > 0$ tal que $f(r_0) > 1$. Uma vez que $\cosh$ é uma bijeção entre $[0, \infty)$ e $[1, \infty)$, isto quer dizer que existe $\alpha > 0$ tal que $f(r_0) = \cosh(\alpha)$.

Observe que pela Proposição 6.2 temos que

$$f^2(r) = \frac{f(r-r) + f(r+r)}{2} = \frac{1 + f(2r)}{2}$$

para todo $r \geq 0$. Em particular, temos

$$f^2(r_0/2) = \frac{1 + f(r_0)}{2} = \frac{1 + \cosh(\alpha)}{2}$$

Ora, mas sabemos que $\cosh(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + \cosh(\alpha)}{2}}$ e portanto, uma vez que $f \geq 0$, temos que

$$f(r_0/2) = \cosh(\alpha/2)$$

Repetindo este processo, podemos concluir que

$$f\left(\frac{r_0}{2^k}\right) = \cosh\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.3}$$

Mais do que isso, note que para todo natural n não nulo vale

$$f\left(\frac{r_0}{2^k}\right)f\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{(n-1)r_0}{2^k}\right) + f\left(\frac{(n+1)r_0}{2^k}\right) \right]$$

, ou seja,

$$f\left(\frac{(n+1)r_0}{2^k}\right) = 2f\left(\frac{r_0}{2^k}\right)f\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) - f\left(\frac{(n-1)r_0}{2^k}\right)$$

Assumindo que $f(nr_0/2^k) = \cosh(n\alpha/2^k)$ e $f((n-1)r_0/2^k) = \cosh((n-1)\alpha/2^k)$, chegamos a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(n+1)r_0}{2^k}\right) &= 2 \cosh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \cosh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) - \cosh\left(\frac{(n-1)r_0}{2^k}\right) \\ &= 2 \cosh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \cosh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) - \left[\cosh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \cosh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) + \sinh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \sinh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) \right] \\ &= \cosh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \cosh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) - \sinh\left(\frac{r_0}{2^k}\right) \sinh\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) \\ &= \cosh\left(\frac{(n+1)r_0}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Ora, uma vez que $f(0r_0/2^k) = \cosh(0\alpha/2^k)$ e $f(r_0/2^k) = \cosh(\alpha/2^k)$, usamos indução para mostrar que

$$f\left(\frac{nr_0}{2^k}\right) = \cosh\left(\frac{n\alpha}{2^k}\right) \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \quad (6.4)$$

Como a função f é contínua e números da forma $\frac{n}{2^k}$ são densos na reta (números diádicos), concluímos que

$$f(r) = \cosh\left(\frac{\alpha}{r_0}r\right)$$

Definindo $c = \alpha/r_0$, temos exatamente o resultado do item (a) do Teorema 6.1 e, através de demonstrações análogas, chegamos aos outros dois resultados.

6.1.3 A Função de Massa nos Espaços

Observe que os resultados que obtivemos para o centroide modelado condiz com o que acabamos de provar, mas para provar a unicidade precisamos de um resultado mais forte: precisamos mostrar que no espaço euclidiano a única função de massa possível é $f(r) \equiv 1$ e no espaço hiperbólico é $f(r) = \cosh(r)$.

Antes de mais nada, note que $f(r) = \cos(cr)$ não pode ocorrer nos espaços euclidiano ou hiperbólico, pois em sistemas com distância $2r = 2\frac{3\pi}{2c}$ entre os pontos teríamos $f(r) = -1$ e, conseqüentemente, um sistema com massa negativa.

Vamos trabalhar nos outros dois casos e, para isso, vamos considerar um triângulo retângulo com catetos medindo r_1 e r_2 e hipotenusa l . Tomando o logaritmo natural de ambos os lados da identidade obtida em (6.2), temos

$$\ln(f(l)) = \ln(f(r_1)f(r_2)) = \ln(f(r_1)) + \ln(f(r_2))$$

Como f é uma função estritamente positiva, podemos definir $g(x) = \ln(f(x))$, obtendo a relação

$$g(l) = g(r_1) + g(r_2)$$

Se consideramos l como uma função de r_1 e r_2 , podemos derivar^[1] a equação acima em relação a r_1 , resultando em

$$\frac{\partial}{\partial r_1} g(l) = \frac{\partial}{\partial r_1} g(r_1) + \frac{\partial}{\partial r_1} g(r_2) \Rightarrow g'(l) \frac{\partial l}{\partial r_1} = g'(r_1)$$

Finalmente, derivando em relação a r_2 chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_2} \left[g'(l) \frac{\partial l}{\partial r_1} \right] &= \frac{\partial}{\partial r_2} g'(r_1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_2} g'(l) \frac{\partial l}{\partial r_1} + g'(l) \frac{\partial^2 l}{\partial r_2 \partial r_1} = 0 \\ &\Rightarrow g''(l) \frac{\partial l}{\partial r_2} \frac{\partial l}{\partial r_1} = -g'(l) \frac{\partial^2 l}{\partial r_2 \partial r_1} \end{aligned}$$

Queremos então encontrar soluções para a equação diferencial

$$\frac{g''(l)}{g'(l)} = -\frac{\partial^2 l}{\partial r_2 \partial r_1} \bigg/ \frac{\partial l}{\partial r_1} \frac{\partial l}{\partial r_2} \quad (6.5)$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos que $l = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial r_1} &= \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \\ \frac{\partial l}{\partial r_2} &= \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial r_2 \partial r_1} &= -\frac{r_1 r_2}{(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Consequentemente, neste espaço a equação (6.5) é

$$\frac{g''(l)}{g'(l)} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{1}{l}$$

Assim, temos que $g'(l) = \lambda_1 l$ e $g(l) = \lambda l^2 + \alpha$. Como $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$ temos $\alpha = 0$ e, consequentemente, $g(l) = \lambda l^2$. Pela definição de g , concluímos que

$$f(l) = e^{\lambda l^2}$$

Se $f(l) = \cosh(cl)$, então deveria valer o limite

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\cosh(cl)}{e^{\lambda l^2}} = 1$$

Uma vez que isto só ocorre se $\lambda = c = 0$, concluímos que

Teorema 6.2. *A única função de massa possível em $\mathbb{R}^n$ é $f(r) \equiv 1$.*

Em $\mathbb{H}^n$, a lei dos cossenos nos dá

$$\cosh(l) = \cosh(r_1) \cosh(r_2)$$

Assim, derivando implicitamente, temos

$$\frac{\partial l}{\partial r_1} = \frac{\sinh(r_1) \cosh(r_2)}{\sinh(l)}$$

^[1] Uma vez que todas as possíveis formas da função de massa nos nossos espaços são diferenciáveis, podemos considerar f sendo diferenciável

$$\frac{\partial l}{\partial r_2} = \frac{\cosh(r_1) \sinh(r_2)}{\sinh(l)}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial r_2 \partial r_1} = -\frac{\sinh(r_1) \sinh(r_2)}{\sinh^3(l)}$$

Dessa forma, a equação (6.5) no espaço hiperbólico pode ser escrita como

$$\frac{g''(l)}{g'(l)} = \frac{1}{\cosh(l) \sinh(l)}$$

Resolvendo esta equação, temos $g'(l) = \lambda \tanh(l)$ e, integrando novamente, temos $g(l) = \lambda \ln(\cosh(l)) + \alpha$. Como $g(0) = 0$, temos que, novamente, $\alpha = 0$ e $g(l) = \lambda \ln(\cosh(l))$. Segue que

$$f(l) = \cosh^\lambda(l)$$

Novamente, computando os limites $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\cosh(cl)}{\cosh^\lambda(l)}$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\cosh^\lambda(l)}$, temos que, no espaço hiperbólico, $f(r) \equiv 1$ ou $f(r) = \cosh(r)$.

Para descartar a possibilidade $f(r) \equiv 1$, considere um triângulo isósceles com vértices p_1 e p_2 opostos aos lados iguais e o último vértice p_3 . Considere também os pontos p e p' como o ponto médio da altura em relação ao lado p_1p_2 e o ponto médio entre os pontos médios dos lados p_1p_3 e p_2p_3 , respectivamente.

Defina então o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m), (p_3, 2m)\}$, como na figura 10.

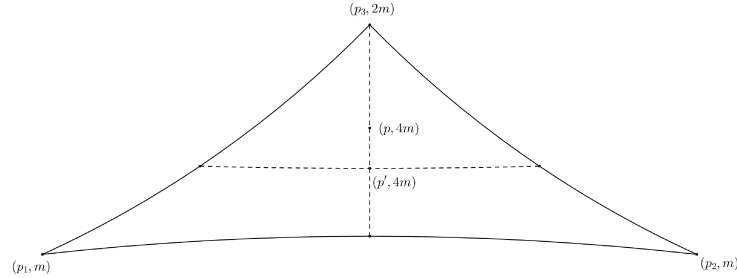


Figura 10 – Contra-exemplo para $f \equiv 1$

Se a função de massa em $\mathbb{H}^n$ é $f(r) \equiv 1$, temos os seguintes cálculos para $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(p_1, m), (p_2, m)\}) \cup \mathbb{U}(\{(p_3, 2m)\})) \\ &= \mathbb{U}((\frac{p_1 p_2}{2}, 2m) \cup (p_3, 2m)) \\ &= (p, 4m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(p_1, m), (p_3, m)\}) \cup \mathbb{U}(\{(p_2, m), (p_3, m)\})) \\ &= \mathbb{U}((\frac{p_1 p_3}{2}, 2m) \cup (\frac{p_2 p_3}{2}, 2m)) \\ &= (p', 4m) \end{aligned}$$

Ou seja, teríamos que para qualquer triângulo isósceles vale $p = p'$. Como vimos no capítulo 1, isto não é verdade. Portanto, a função de massa do espaço hiperbólico não pode ser $f(r) \equiv 1$ e, conseqüentemente

Teorema 6.3. *A única função de massa possível em $\mathbb{H}^n$ é $f(r) = \cosh(r)$.*

E segue que

Teorema 6.4. *Nos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, qualquer centroide de massa coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}_2^*$.*

6.2 Sistemas Diádicos

Note que os resultados da subseção anterior nos dizem que, em $\mathcal{M}_2^*$, qualquer função de centro de massa deve coincidir com $\mathbb{U}_{mod}$. Nesta seção vamos expandir essa propriedade para uma classe mais abrangente de sistemas: os sistemas diádicos.

Um sistema material $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ é dito diádico se existem $k, l, q \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$k \cdot d(p_1, p) = l \cdot d(p_2, p) \quad \text{e} \quad k + l = 2^q \quad (6.6)$$

, onde $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ é o centroide **modelado** de $\mathcal{A}$.

Denotaremos o conjunto de todos os sistemas diádicos por $\mathcal{M}_2^d$.

Claramente, $\mathcal{M}_2^* \subset \mathcal{M}_2^d$. De fato, como em $\mathcal{M}_2^*$ temos $d(p_1, p) = d(p_2, p)$, basta tomar as constantes k, l e q iguais a 1.

A motivação para mostrar que os centros de massa coincidem neste novo conjunto é dada no seguinte Teorema:

Teorema 6.5. *Sistemas diádicos são densos em $\mathcal{M}_2$.*

Demonstração. Queremos mostrar que dado qualquer $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\} \in \mathcal{M}_2$ e $\epsilon > 0$, existe $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_2^d$ tal que

$$d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') < \epsilon$$

Defina $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$, $d = d(p_1, p_2)$, $d_i = d(p_i, p)$ e

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } M = \mathbb{R}^n \\ \sinh(x), & \text{se } M = \mathbb{H}^n \end{cases}$$

Como g é contínua, existe $\delta = \delta(\epsilon, d_1) > 0$ tal que

$$h < \delta \Rightarrow |g(d_1) - g(d_1 - h)| < \epsilon \frac{g(d_2)}{m_1}$$

Além disso, como números da forma $\frac{2^q}{l} - 1$, $q \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{N}^*$, são densos em $[0, \infty)$, existe $h \geq 0$ tal que

$$0 \leq d_2 \cdot h < \min\{\epsilon, \delta, d_1\} \text{ e } \frac{d_1}{d_2} - h = \frac{2^q}{l} - 1$$

, para algum $q \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{N}^*$.

Definindo $k = 2^q - l$, temos

$$k.d_2 = (2^q - l).d_2 = l.\left(\frac{2^q}{l} - 1\right).d_2 = l.\left(\frac{d_1}{d_2} - h\right).d_2 = l.(d_1 - d_2.h) \quad (6.7)$$

Defina p'_1 como o ponto na geodésica p_1p_2 tal que $d(p'_1, p_1) = d_2h$ e $d(p'_1, p) = d_1 - d_2h$ e $m'_2 = \frac{m_1g(d_1 - d_2h)}{g(d_2)}$ (figura 11).

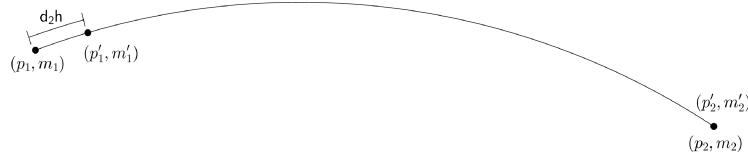


Figura 11 – Sistemas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$

Com isso em mãos, defina $\mathcal{A}' = \{(p'_1, m_1), (p_2, m'_2)\}$. Vamos mostrar que este sistema é diádico e está ϵ -próximo de $\mathcal{A}$.

De fato, note que

$$m'_2.g(d(p, p_2)) = \frac{m_1g(d_1 - d_2h)}{g(d_2)}.g(d_2) = m_1.g(d_1 - d_2h) = m_1.g(d(p'_1, p))$$

, ou seja, a regra da gangorra é satisfeita por p . Portanto, o centroide modelado de $\mathcal{A}'$ está localizado em p .

Por (6.7), temos que $\mathcal{A}'$ é um sistema diádico.

Além disso, temos que

$$d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \leq \max\{|m_1 - m_1|, d(p_1, p'_1), |m_2 - m'_2|, d(p_2, p_2)\}$$

.

Ora, trivialmente, $|m_1 - m_1| = d(p_2, p_2) = 0$.

Por definição, temos que $d(p_1, p'_1) = d_2h < \epsilon$.

Por fim, como p também é o centroide modelado de $\mathcal{A}$, vale a regra da gangorra $m_1.g(d_1) = m_2.g(d_2)$ e consequentemente

$$|m_2 - m'_2| = \left| m_1 \cdot \frac{g(d_1)}{g(d_2)} - m_1 \cdot \frac{g(d_1 - d_2h)}{g(d_2)} \right| = \frac{m_1}{g(d_2)} |g(d_1) - g(d_1 - d_2h)|$$

Como $d_2h < \delta$, a continuidade implica que $|g(d_1) - g(d_1 - d_2h)| < \epsilon \frac{g(d_2)}{m_1}$ e portanto $|m_2 - m'_2| < \epsilon$.

Concluimos portanto que $d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') < \epsilon$, e segue o resultado. $\square$

Note que se provarmos que $\mathbb{U}$ coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}_2^d$, então a continuidade do centro de massa garante que $\mathbb{U} = \mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}_2$.

Com efeito, se tal coincidência ocorre, podemos aproximar qualquer sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2$ por sistemas diádicos $\mathcal{A}_i$ cada vez mais próximos de $\mathcal{A}$ e obter o centro de massa do primeiro pelo limite

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \lim_i \mathbb{U}(\mathcal{A}_i) = \lim_i \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_i) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Vamos então provar a nossa hipótese:

Teorema 6.6. $\mathbb{U}$ coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}_2^d$

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ um sistema diádico, $(p, m) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ seu centroide modelado e $(p', m) = \mathbb{U}(\mathcal{A})$ seu centro de massa pela função $\mathbb{U}$.

Considere também k, l e q constantes que satisfazem (6.6).

Façamos indução em q .

Se $q = 1$, temos $k = l = 1$ e, conseqüentemente, $d(p_1, p) = d(p_2, p)$.

Pela propriedade 4.7 temos que $m_1 = m_2$, ou seja, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^*$ e (6.4) implica que $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$.

Suponhamos agora que o Teorema é válido para $q < Q$ e que $k + l = 2^Q$.

Se $m_1 = m_2$, o sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2^*$ e o resultado segue de (6.4).

Assuma então, sem perda de generalidade, que $m_1 < m_2$ e defina o sistema $\mathcal{A}' = \{(p_1, m_1), (p_2, m_1)\}$. Dessa forma temos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + (p_2, m_2 - m_1)$$

Como $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_2^*$, temos

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}') = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}') = (p_m, \bar{m})$$

, onde $p_m = \frac{p_1 p_2}{2}$ e $\bar{m} = 2m_1 f(d(p_1, p_2)/2)$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{mod}(\{(p_m, \bar{m}), (p_2, m_2 - m_1)\}) &= \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}') \cup \mathbb{U}_{mod}((p_2, m_2 - m_1))) \\ &= \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}') + \mathbb{U}_{mod}(p_2, m_2 - m_1)) \\ &= \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) \\ &= (p, m) \end{aligned}$$

Pela propriedade 4.7, temos que p está na geodésica que passa por p_1 e p_2 e, uma vez que $m_1 < m_2$, que p está mais próximo de p_2 , ou seja, o ponto médio p_m se encontra entre p_1 e p (figura 12).

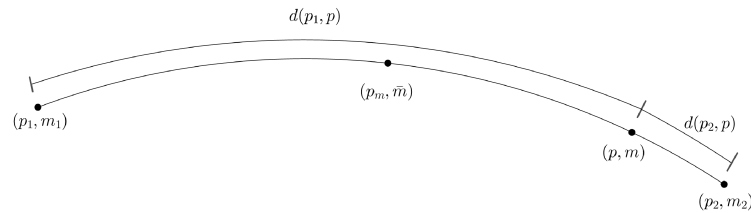


Figura 12 – Configuração dos Pontos Materiais

Consequentemente, temos que $d(p_1, p) = d(p_1, p_m) + d(p_m, p)$ e segue

$$\begin{aligned}
 d(p_m, p) &= d(p_1, p) - d(p_1, p_m) \\
 &= d(p_1, p) - \frac{d(p_1, p_2)}{2} \\
 &= d(p_1, p) - \frac{d(p_1, p) + d(p_2, p)}{2} \\
 &= \frac{2d(p_1, p) - d(p_1, p) - d(p_2, p)}{2} \\
 &= \frac{d(p_1, p) - d(p_2, p)}{2}
 \end{aligned}$$

Usando a equação dos sistemas diádicos

$$k.d(p_m, p) = \frac{k.d(p_1, p) - k.d(p_2, p)}{2} = \frac{l.d(p_2, p) - k.d(p_2, p)}{2} = \frac{l-k}{2}.d(p_2, p)$$

Ora, como $m_1 < m_2$ a propriedade 4.7 implica que $d(p_1, p) > d(p_2, p)$ e, consequentemente, $k < l$, ou seja, $\frac{l-k}{2} \in \mathbb{N}^*$ [2].

Além disso,

$$\frac{l-k}{2} + k = \frac{l+k}{2} = \frac{2^Q}{2} = 2^{Q-1}$$

, ou seja, $\{(p_m, \overline{m}), (p_2, m_2 - m_1)\}$ é um sistema diádico cujo centroide dado por $\mathbb{U}$ coincide com o dado por $\mathbb{U}_{mod}$ (pela hipótese de indução).

Pelo axioma da indução, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\mathcal{A}) &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\mathcal{A}') + \mathbb{U}(p_2, m_2 - m_1)) \\
 &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\mathcal{A}') \cup \mathbb{U}((p_2, m_2 - m_1))) \\
 &= \mathbb{U}(\{(p_m, \overline{m}), (p_2, m_2 - m_1)\}) \\
 &= \mathbb{U}_{mod}(\{(p_m, \overline{m}), (p_2, m_2 - m_1)\}) \\
 &= \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}') \cup \mathbb{U}_{mod}((p_2, m_2 - m_1))) \\
 &= \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}') + \mathbb{U}_{mod}(p_2, m_2 - m_1)) \\
 &= \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})
 \end{aligned}$$

, como queríamos demonstrar. □

Com este Teorema, podemos finalmente afirmar que $\mathbb{U} = \mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}_2$. Ora, mas pela propriedade 5.1, isto implica que $\mathbb{U}$ coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ em $\mathcal{M}$. Segue, portanto, o principal resultado desta dissertação como um Corolário:

Corolário. *A única função de centro de massa possível é $\mathbb{U}_{mod}$*

Finalizamos, com isto, a terceira parte do nosso texto. O leitor deve ter notado que apesar de apresentarmos a geometria esférica, ainda não discutimos nada sobre ela. Este será, portanto, o tema da próxima parte.

[2] Uma vez que $l+k$ é par, temos que $l-k$ é divisível por 2.

Parte IV

O Caso Esférico

7 O Centroide Modelado na Esfera

Assim como em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, vamos iniciar o estudo do centro de massa na esfera provando a sua existência, e assim como nos outros casos, faremos isto construindo um centro de massa.

Uma vez que o modelo adotado por nós para a geometria esférica também é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$, é muito tentador definir o centroide modelado neste conjunto como fizemos no capítulo 4.

Porém, não vamos muito longe neste caminho: se pegamos um sistema composto por dois pontos antípodas com a mesma massa, digamos $\mathcal{A} = \{(p, m), (-p, m)\}$, teremos o vetor de massa

$$v_{\mathcal{A}} = m.p + m.(-p) = 0$$

, ou seja, a semi-reta de massa $r_{\mathcal{A}}$ não intersecta o conjunto M em nenhum ponto.

Uma vez que a condição de existência não é satisfeita para qualquer sistema, a definição dada para o centroide modelado fica vaga.

Para contornar este problema, definimos um sistema a parte que chamamos de **sistema de massa nula**^[1], denotado por $\mathcal{A}_0$.

Este sistema serve como um elemento neutro para nossas operações, no sentido que ele possui as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_0 = \mathcal{A} + \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$
2. $\lambda \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$
3. $\gamma \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$

Além disso, consideramos $\mathcal{A}_0$ arbitrariamente próximo de qualquer outro sistema, ou seja, para qualquer sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_k$ e qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$d_{\mathcal{M}_k}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0) < \epsilon$$

Vamos denotar o conjunto $\mathcal{M} \cup \mathcal{A}_0$ por $\overline{\mathcal{M}}$ e, naturalmente, $\mathcal{M}_k \cup \mathcal{A}_0$ por $\overline{\mathcal{M}}_k$.

Com isto, em mãos, definimos o centroide de massa modelado na esfera da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_{mod} : & \overline{\mathcal{M}} & \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_1 \\ & \mathcal{A} & \longmapsto \begin{cases} (p_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}}) & , \text{ se } \mathcal{A} \text{ satisfaz a CE} \\ \mathcal{A}_0 & , \text{ se } \mathcal{A} \text{ não satisfaz a CE ou } \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \end{cases} \end{array}$$

onde $(p_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{A}})$ é o único ponto material de M que satisfaz 4.1.

Vejamos algumas propriedades desta função:

Proposição 7.1. *O centroide modelado de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ é $\mathcal{A}_0$ se, e somente se, $v_{\mathcal{A}} = 0$.*

^[1] O nome "massa nula" se justifica se olharmos a motivação para a criação do sistema: a massa centro de massa modelado do sistema $\{(p, m), (-p, m)\}$ seria 0, se simplesmente estendêssemos a definição.

Demonstração. Se $v_{\mathcal{A}} = 0$ então a reta de massa de $\mathcal{A}$ não intersecta M e, portanto, este sistema não satisfaz a condição de existência. Pela definição de $\mathbb{U}_{mod}$, segue a volta.

Por outro lado, se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$, então $r_{\mathcal{A}}(t) = tv_{\mathcal{A}}$ não intersecta M .

Ora, se $v_{\mathcal{A}} \neq 0$, então $r(1/||v_{\mathcal{A}}||) \in M$, e, consequentemente, concluímos $v_{\mathcal{A}} = 0$ como queríamos. $\square$

Corolário. Um sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ satisfaz a CE se, e somente se, $v_{\mathcal{A}} \neq 0$.

Com pequenas modificações, podemos demonstrar as propriedades vistas no capítulo 4 para a função definida em $\mathbb{S}^n$:

Proposição 7.2. Se $v_{\mathcal{A}_1} = v_{\mathcal{A}_2}$, então $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2)$, quaisquer que sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$.

Proposição 7.3. Se $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{M}_1}$, então $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Proposição 7.4. Para quaisquer dois sistemas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \overline{\mathcal{M}}$ vale

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathbb{U}_{mod}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_1) + \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_2))$$

Proposição 7.5. Para qualquer sistema $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{M}}$ e qualquer real positivo λ vale

$$\mathbb{U}_{mod}(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Com estas propriedades em mãos, vamos construir uma forma explicita para $\mathbb{U}_{mod}$ em $\mathbb{S}^n$. Consideremos um sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)\}$ que satisfaz a CE.

Como $\langle v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{A}} \rangle > 0$, de forma análoga ao que foi feito para $\mathbb{H}^n$ podemos concluir que o centroide modelado do sistema é dado por

$$\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \left(\sum m_i p_i / \sqrt{\sum_{i,j} m_i m_j \cos(d_{ij})}, \sqrt{\sum_{i,j} m_i m_j \cosh(d_{ij})} \right) \quad (7.1)$$

, onde $d_{ij} = d(p_i, p_j)$.

Como esta expressão é contínua, segue que o centroide modelado na esfera é contínuo nos sistemas que satisfazem a condição de existência, no sentido estabelecido nos axiomas.

Se, por outro lado, $\mathcal{A}$ não satisfaz a CE, então $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$ e consequentemente $d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}), \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}')) < \epsilon$ para todo sistema $\mathcal{A}'$ e $\epsilon > 0$, ou seja

Proposição 7.6. O centroide de massa modelado em $\mathbb{S}^n$ é uma função contínua, no sentido que para todo $\epsilon > 0$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_k$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \mathcal{A}) > 0$ tal que

$$d_{\mathcal{M}_k}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}), \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}')) < \epsilon \quad \forall \mathcal{A}' \in \mathcal{M}_k$$

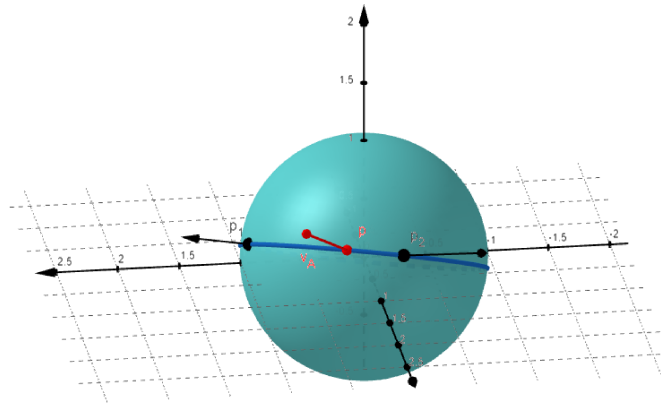


Figura 13 – Centroide Modelado Em S^n

7.1 Sistemas de Cardinalidade 2

Se tomamos $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$, algumas análises adicionais podem ser feitas.

Com contas análogas às de $\mathbb{H}^n$, podemos concluir que se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = (p, m) \neq \mathcal{A}_0$, então valem as equações

$$m_1 \sin(d_1) = m_2 \sin(d_2) \quad (7.2)$$

$$\sin(d_1) = m_2 \sin(d)/m \quad \text{e} \quad \sin(d_2) = m_1 \sin(d)/m \quad (7.3)$$

, onde $d_i = d(p, p_i)$ e $d = d(p_1, p_2)$.

Novamente notamos que o centro de massa modelado de $\mathcal{A}$, quando diferente de $\mathcal{A}_0$, se encontra na geodésica entre p_1 e p_2 , o que implica que p está unicamente determinado se sabemos d_1 e d_2 .

Portanto, a equação (7.3) juntamente com (7.1) implicam que o centroide modelado desses sistemas é invariante por isometrias do espaço.

Da Proposição 7.1, sabemos que $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$ se, e somente se, $v_{\mathcal{A}} = m_1 p_1 + m_2 p_2 = 0$, o que por sua vez ocorre se, e somente se, $p_1 = -p_2$ e $m_1 = m_2$, pois $m_1, m_2 > 0$. Ou seja, os sistemas de $(M)_2$ mapeados para $\mathcal{A}_0$ são exatamente aqueles que cujos pontos distam π .

Segue que se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$, então para qualquer isometria γ da esfera vale

$$\mathbb{U}_{mod}(\gamma\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 = \gamma\mathcal{A}_0 = \gamma\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

, e concluimos

Proposição 7.7. *O centroide de massa modelado em $\mathbb{S}^n$ é invariante por isometrias, no sentido que se γ é uma isometria e $\mathcal{A}$ um sistema material do espaço em questão, então*

$$\mathbb{U}_{mod}(\gamma\mathcal{A}) = \gamma\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Por fim, é natural querer demonstrar algo semelhante à Proposição 4.7.

Já sabemos que, quando o sistema satisfaz a CE, o centro de massa modelado se encontra na geodésica p_1p_2 , mas não parece fazer sentido falar da posição do centro de massa se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$, o que nos leva a enunciar a propriedade da seguinte forma:

Proposição 7.8. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ é um sistema em $\mathbb{S}^n$ e satisfaz a condição de existência, então seu centro de massa modelado $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$ está localizado na geodésica entre p_1 e p_2 . Além disso, ele está mais próximo do ponto com maior massa, estando equidistante de p_1 e p_2 se, e somente se, $m_1 = m_2$.*

Demonstração. Como já comentamos, a primeira parte foi demonstrada alguns parágrafos atrás.

Para a segunda parte, observamos que se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = (p, m) \neq \mathcal{A}_0$, então $d(p_1, p_2) < \pi$ ou $d(p_1, p_2) = \pi$ e $m_1 \neq m_2$.

- $d(p_1, p_2) < \pi$

Suponha que $d(p_1, p) < d(p_2, p)$, ou seja, o centroide está mais próximo de p_1 .

Se $d(p_2, p) \leq \pi/2$, então $\sin(d(p_1, p)) < \sin(d(p_2, p))$, pois $\sin$ é uma função crescente em $[0, \pi/2]$.

Por outro lado, se $d(p_2, p) > \pi/2$, então $d(p_1, p) < \pi - d(p_2, p) < \pi/2$ e também vale $\sin(d(p_1, p)) < \sin(\pi - d(p_2, p)) = \sin(d(p_2, p))$.

Portanto, pela equação (7.2), temos $m_1 > m_2$, como queríamos verificar. De forma análoga, se $d(p_1, p) > d(p_2, p)$ teremos $m_1 < m_2$.

Se $d(p_1, p) = d(p_2, p)$ a mesma equação implica $m_1 = m_2$ e, por outro lado, se $m_1 = m_2$ temos $\sin(d(p_1, p)) = \sin(d(p_2, p))$, ou seja, $d(p_1, p) = d(p_2, p)$ ou $d(p_1, p) = \pi - d(p_2, p)$ (pois $d(p_1, p), d(p_2, p) < \pi$).

No segundo caso teríamos $d(p_1, p) + d(p_2, p) = \pi$ que é um absurdo e, portanto, concluímos $d(p_1, p) = d(p_2, p)$, como queríamos.

- $d(p_1, p_2) = \pi$ e $m_1 \neq m_2$

Como $d(p_1, p_2) = \pi$, temos $p_2 = -p_1$

De (7.1), temos

$$p = \frac{m_1 - m_2}{|m_1 - m_2|} p_1 \quad m = |m_1 - m_2|$$

Se $m_1 > m_2$, temos $p = p_1$, ou seja, $d(p_1, p) = 0 < \pi = d(p_2, p)$.

Se $m_1 < m_2$, temos $p = -p_1 = p_2$ e, como esperado, $d(p_1, p) > d(p_2, p)$.

□

Obs.: Assim como no caso hiperbólico, se $d_{ij} \approx 0$, temos que $\cos(d_{ij}) \approx 1$ e, consequentemente

$$m \approx \sqrt{\sum_{i,j=1}^k m_i m_j} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k m_i\right)^2} = \sum_{i=1}^k m_i$$

ou seja, em sistemas com pontos próximos o centro de massa esférico se assemelha ao euclidiano.

8 O Centroide Axiomático e a Unicidade na Esfera

Assim como no capítulo 5, queremos agora definir o centro de massa na esfera de uma perspectiva axiomática para mostrar a sua unicidade. Utilizaremos o mesmo conjunto de axiomas para definir uma função centro de massa, mas alguns detalhes de demonstrações são ligeiramente diferentes.

Mais uma vez, começamos demonstrando algumas propriedades que decorrem diretamente dos axiomas do centro de massa:

Proposição 8.1. *O centro de massa de $\mathcal{A}_0$ é $\mathcal{A}_0$.*

Demonstração. Suponha que, para alguma função centro de massa $\mathbb{U}$, tenhamos $\mathbb{U}(\mathcal{A}_0) = (p, m)$ e tome $\lambda \neq 1$.

Pelas propriedades do sistema de massa zero, temos

$$\mathbb{U}(\lambda\mathcal{A}_0) = \mathbb{U}(\mathcal{A}_0) = (p, m) \neq (p, \lambda m) = \lambda\mathbb{U}(\mathcal{A}_0)$$

o que contradiz o axioma da multiplicação.

Logo, temos que $\mathbb{U}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0$. □

Proposição 8.2. *Se duas funções centro de massa coincidem em $\overline{\mathcal{M}}_2(X)$, então elas são iguais.*

Demonstração. A demonstração segue como no capítulo 5, tratando o caso de $\mathcal{A}_0$ pela Proposição 8.1. □

Proposição 8.3. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\} \in \mathcal{M}_2^*$, então $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$ se, e somente se, $d(p_1, p_2) = \pi$.*

Demonstração. Suponha que $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$ mas $d(p_1, p_2) < \pi$.

Neste caso, existe $p_3 \neq p_2$ tal que $d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2)$ e uma isometria γ da esfera tal que $\gamma(p_1) = p_1$ e $\gamma(p_2) = p_3$.

Consequentemente, pela invariância por isometrias, temos

$$\mathbb{U}(\{(p_1, m), (p_3, m)\}) = \mathbb{U}(\gamma\mathcal{A}) = \gamma\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \gamma\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$$

Definindo o sistema $\mathcal{A}' := \{(p_1, m), (p_2, m), (p_3, m)\}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathcal{A}') &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(p_1, m), (p_2, m)\}) \cup \mathbb{U}(p_3, m)) \\ &= \mathbb{U}(\mathcal{A}_0 \cup (p_3, m)) \\ &= \mathbb{U}(p_3, m) \\ &= (p_3, m) \end{aligned}$$

Porém, computando o centro de massa com outra partição de $\mathcal{A}'$, temos também

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathcal{A}') &= \mathbb{U}(\mathbb{U}(\{(p_1, m), (p_3, m)\}) \cup \mathbb{U}(p_2, m)) \\ &= \mathbb{U}(\mathcal{A}_0 \cup (p_2, m)) \\ &= \mathbb{U}(p_2, m) \\ &= (p_2, m) \end{aligned}$$

Como escolhermos $p_3 \neq p_2$, chegamos a um absurdo e portanto $d(p_1, p_2) = \pi$.

Se, por outro lado, $d(p_1, p_2) = \pi$ e $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = (p', m') \neq \mathcal{A}_0$, o seguinte ocorre:

Tomando γ_1 uma rotação de $\theta \neq 2\pi n$ em torno do eixo op_1 , temos uma isometria cujos únicos pontos fixos são p_1 e p_2 . Assim, temos

$$\mathbb{U}(\gamma_1 \mathcal{A}) = \mathbb{U}(\mathcal{A}) = (p', m') \text{ e } \gamma_1 \mathbb{U}(\mathcal{A}) = (\gamma_1(p'), m')$$

Portanto, pelo axioma da isometria, temos $p' = p_1$ ou $p' = p_2$. Sem perda de generalidade, digamos que o primeiro ocorre, ou seja, $p' = p_1$ e $\gamma_2 \in \Gamma_{p_1 p_2}$ uma isometria que troca os dois pontos do sistema. Temos, portanto

$$\mathbb{U}(\gamma_2 \mathcal{A}) = \mathbb{U}(\mathcal{A}) = (p_1, m') \text{ e } \gamma_2 \mathbb{U}(\mathcal{A}) = (\gamma_2(p_1), m') = (p_2, m')$$

Uma vez que $p_1 \neq p_2$ (já que $d(p_1, p_2) = \pi$), chegamos a um absurdo, e temos que $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0$. $\square$

Proposição 8.4. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ e $d = d(p_1, p_2) < \pi$, então o centroide de $\mathcal{A}$ está localizado no ponto médio de $p_1 p_2$ ou no seu antípoda.*

Demonstração. A demonstração segue as mesmas linhas da Proposição 5.2. $\square$

Proposição 8.5. *Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ e $d = d(p_1, p_2) < \pi$, então o centroide de $\mathcal{A}$ está localizado no ponto médio de $p_1 p_2$, $p_m = \frac{p_1 p_2}{2}$.*

Demonstração. Considere a geodésica $p_1 p_2$ parametrizada de forma que $p_1 p_2(0) = p_1$ e $p_1 p_2(d) = p_2$ e defina a família de sistemas

$$\mathcal{A}_t = \{(p_1 p_2(t), m), (p_1 p_2(d-t), m)\}, \quad t \in I = [0, d/2]$$

Pelo Teorema anterior, $\mathcal{A}_t$ está localizado em p_m ou $-p_m$, para todo t .

Defina os conjuntos

$$U^+ = \{t : \mathbb{U}(\mathcal{A}_t) \text{ está em } p_m\}; \quad U^- = \{t : \mathbb{U}(\mathcal{A}_t) \text{ está em } -p_m\}$$

Pela continuidade do centroide, para todo t , existe $\delta > 0$ tal que $d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}_t, \mathcal{A}') < \delta$ implica que $d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}(\mathcal{A}_t), \mathbb{U}(\mathcal{A}')) < \pi$.

Em particular, se $t' \in (t - \delta, t + \delta) \cap I$, então $d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}_t, \mathcal{A}_{t'}) < \delta$ e $d_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{U}(\mathcal{A}_t), \mathbb{U}(\mathcal{A}_{t'})) < \pi$. Assim, $t \in U^+$ implica que $t' \in U^+$ e $t \in U^-$ implica que $t' \in U^-$. Concluimos, portanto, que U^+ e U^- são conjuntos abertos.

Se centroide de $\mathcal{A}$ está em $-p_m$, então U^- é não vazio.

Além disso, observe que $\mathcal{A}_{d/2} = \{(p_m, m), (p_m, m)\}$ e portanto

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}_{d/2}) = \mathbb{U}((p_m, m) + (p_m, m)) = \mathbb{U}((p_m, 2m)) = (p_m, 2m)$$

, ou seja $d/2 \in U^+$.

Como todo t está em U^+ ou U^- , encontramos uma cisão não trivial do intervalo $[0, d/2]$, que é conexo. Absurdo.

Logo, o centroide de $\mathcal{A}$ está em p_m . $\square$

Com isso, concluimos que o centro de massa de sistemas em $\mathcal{M}_2^*$ está sempre localizado no mesmo lugar, independente da função $\mathbb{U}$: no ponto médio entre os pontos do sistema.

8.1 A Unicidade na Esfera

De forma análoga aos casos euclidiano e hiperbólico, a demonstração da unicidade na esfera se resume à demonstração da coincidência de $\mathbb{U}$ com $\mathbb{U}_{mod}$ em $\tilde{\mathcal{M}}_2$. Para tanto, vamos decompor o conjunto de pontos materiais da esfera em três conjuntos distintos: o sistema de massa nula, $\mathcal{A}_0$, os sistemas de $\mathcal{M}_2$ que satisfazem a condição e existência e os sistemas de $\mathcal{M}_2$ que **não** satisfazem a condição e existência.

Ora, pela Proposição 8.1, temos que, de fato, $\mathbb{U}(\mathcal{A}_0) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}_0)$.

Além disso, como já observamos na Proposição 7.8, um sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ **não** satisfaz a condição de existência se, e somente se, $d(p_1, p_2) = \pi$ e $m_1 = m_2$. Portanto, a coincidência das funções de massa nesse conjunto é garantida pela Proposição 8.3.

Resta, portanto, demonstrar a coincidência das funções nos sistemas que satisfazem a condição de existência. Aqui podemos aplicar sem medo as técnicas utilizadas no capítulo 5.

Se $\mathcal{A} = \{(p_1, m), (p_2, m)\}$ satisfaz a condição de existência, então $d(p_1, p_2) < \pi$ e, através de análises semelhantes às feitas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, podemos concluir que

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = (p_1 p_2 / 2, 2m \cos(d(p_1, p_2)/2)) = \mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A})$$

Com isso em mãos, utilizamos uma demonstração análoga à do Teorema 6.6, substituindo a Proposição 4.7 por 7.8, para concluir que as funções de massa coincidem nos sistemas diádicos.

Por fim, provamos o Teorema

Teorema 8.1. *O sistemas diádicos da esfera são densos em dentre aqueles que satisfazem a condição de existência.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ um sistema que satisfaz a condição de existência e $\epsilon > 0$ qualquer.

Se $d(p_1, p_2) < \pi$, a demonstração é análoga à do Teorema 6.5 utilizando a função $g(x) = \sin(x)$.

Se $d(p_1, p_2) = \pi$, basta tomar p'_1 tal que $d(p'_1, p_1) < \frac{\epsilon}{2}$ e definir $\mathcal{A}' = \{(p'_1, m_1), (p_2, m_2)\}$.

Tomando $\mathcal{A}''$ diádico $\frac{\epsilon}{2}$ -próximo de $\mathcal{A}'$ (que existe pelo caso anterior), e temos $d_{\mathcal{M}_2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}'') < \epsilon$, como queríamos. $\square$

Concluimos portanto que na esfera o centro de massa também é único, como queríamos.

Parte V

Construção Funcional do Centro de Massa

9 Construção com Produto Interno

Na última parte do nosso trabalho exibiremos uma forma original de construir o centro de massa: o centroide do produto, denotado por $\mathbb{U}_{prod}$. Ao contrário do centroide modelado, nossa construção não dependerá da escolha de um modelo ou outro da geometria e sim da escolha de uma função conveniente que, em todos os casos que veremos, possui uma boa candidata.

A ideia para esta construção nasceu da busca por uma métrica em $\mathcal{M}_2(M)$ sobre a qual o ponto médio entre (p_1, m_1) e (p_2, m_2) fosse o centro de massa do sistema $\{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$. Procuramos, portanto, um produto interno no espaço dos pontos materiais.

Com algum trabalho, encontramos o produto

$$\langle (p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m = m_1 m_2 \delta(p_1, p_2)$$

sobre o conjunto dos pontos materiais de uma geometria arbitrária M e denotamos por $\|(p, m)\|_m$ a aplicação $\langle (p, m), (p, m) \rangle_m$ e por $\oplus$, uma operação binária qualquer em $\mathcal{M}_2(M)$ que linearizasse tal produto, ou seja, que torne verdadeira a identidade

$$\langle (p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m = \langle (p_1, m_1), (p_3, m_3) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m \quad (9.1)$$

Porém, sem mais nenhuma suposição, não vamos muito longe. Por exemplo, se tomamos $\delta \equiv c \in \mathbb{R}$, a soma $(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2) = (p, m_1 + m_2)$ lineariza o produto, independente do valor de p . Se além disso $c = 0$, **qualquer** operação binária lineariza o produto.

Por outro lado, se dizemos que $(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2) = (p_1, m_1)$, o produto é linearizado se, e somente se, $\delta \equiv 0$.

Vemos então a necessidade de impor mais condições sobre a função δ . Pedimos que esta função seja:

- simétrica
- contínua
- não assuma o valor -1
- assuma o valor 1 se, e somente se, $p_1 = p_2$

Temos então que:

Proposição 9.1. *Para quaisquer pontos materiais de M , vale:*

$$\|(p, m)\|_m = m m \delta(p, p) = m^2 \quad (9.2)$$

$$\langle (p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m = \langle (p_2, m_2), (p_1, m_1) \rangle_m \quad (9.3)$$

Demonstração. Basta aplicar a definição do produto e notar que $\delta(p, p) = 1$ e $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_2, p_1)$. $\square$

Lema 9.1. *Se $\langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m = \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m$ para todo (p, m) , então $(p_1, m_1) = (p_2, m_2)$*

Demonstração. Se tomamos $(p, m) = (p_2, m_2)$, a igualdade da hipótese nos dá

$$m_1 m_2 \delta(p_1, p_2) = \langle (p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m = \langle (p_2, m_2), (p_2, m_2) \rangle_m = m_2^2$$

ou seja $m_2 = m_1 \delta(p_1, p_2)$ e, analogamente, temos $m_1 = m_2 \delta(p_1, p_2)$.

Substituindo a segunda igualdade na primeira, obtemos

$$m_2 = m_2 \delta(p_1, p_2) \delta(p_1, p_2) \Rightarrow \delta(p_1, p_2)^2 = 1 \Rightarrow \delta(p_1, p_2) = 1$$

Assim, temos $p_1 = p_2$ e, consequentemente, $m_1 = m_2$. □

Lema 9.2. *Uma operação que satisfaz 9.1 é comutativa e associativa.*

Demonstração. Sejam (p_1, m_1) , (p_2, m_2) , (p_3, m_3) e (p, m) pontos materiais quaisquer. Aplicando 9.1, temos:

$$\begin{aligned} \langle (p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m &= \langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \\ &= \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m + \langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m \\ &= \langle (p_2, m_2) \oplus (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 9.1, temos

$$(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2) = (p_2, m_2) \oplus (p_1, m_1)$$

ou seja, a operação é comutativa.

Para demonstrar a associatividade, fazemos

$$\begin{aligned} \langle [(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)] \oplus (p_3, m_3), (p, m) \rangle_m &= \langle (p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \\ &\quad + \langle (p_3, m_3), (p, m) \rangle_m \\ &= \langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m \\ &\quad + \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \\ &\quad + \langle (p_3, m_3), (p, m) \rangle_m \\ &= \langle (p_1, m_1) \oplus [(p_2, m_2) \oplus (p_3, m_3)], (p, m) \rangle_m \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 9.1, temos

$$[(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)] \oplus (p_3, m_3) = (p_1, m_1) \oplus [(p_2, m_2) \oplus (p_3, m_3)]$$

ou seja, a soma é associativa. □

Além disso, considerando o produto natural de pontos materiais por reais positivos, temos

$$\langle \lambda(p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m = \langle (p_1, \lambda m_1), (p_2, m_2) \rangle_m = \lambda m_1 m_2 \delta(p_1, p_2) = \lambda \langle (p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m \quad (9.4)$$

o que nos leva a enunciar a seguinte propriedade:

Lema 9.3. *Para quaisquer $(p_1, m_1), (p_2, m_2) \in \mathcal{M}_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, vale*

$$\lambda[(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)] = (p_1, \lambda m_1) \oplus (p_2, \lambda m_2)$$

Demonstração. Sejam (p_1, m_1) , (p_2, m_2) e (p, m) pontos materiais quaisquer e $\lambda > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda[(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)], (p, m) \rangle_m &= \lambda \langle (p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \\
 &= \lambda \left[\langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \right] \\
 &= \left[\lambda \langle (p_1, m_1), (p, m) \rangle_m \right] + \left[\lambda \langle (p_2, m_2), (p, m) \rangle_m \right] \\
 &= \langle (p_1, \lambda m_1) \oplus (p_2, \lambda m_2), (p, m) \rangle_m
 \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 9.1, temos

$$\lambda[(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)] = (p_1, \lambda m_1) \oplus (p_2, \lambda m_2)$$

□

Ora, com isso em mãos, podemos definir uma função $\mathbb{U}_{prod}$ de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{M}_1$ como

$$\mathbb{U}_{prod}(\mathcal{A}) = (p_1, m_1) \oplus \cdots \oplus (p_k, m_k) \quad [^1]$$

que, pelos lemas acima, satisfaz os três primeiros axiomas do centro de massa.

Vamos utilizar agora o sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ para demonstrar as duas outras propriedades.

Aplicando o nosso produto no ponto $(p, m) = \mathbb{U}_{prod}(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
 m^2 &= ||(p, m)||_m \\
 &= ||(p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2)||_m \\
 &= ||(p_1, m_1)||_m + ||(p_2, m_2)||_m + 2\langle (p_1, m_1), (p_2, m_2) \rangle_m \\
 &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \delta(p_1, p_2)
 \end{aligned}$$

Assim, temos a uma expressão para a massa como

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \delta(p_1, p_2)} \quad (9.5)$$

Podemos obter mais algumas relações interessantes utilizando o produto de (p, m) com (p_1, m_1)

$$\begin{aligned}
 m m_1 \delta(p, p_1) &= \langle (p, m), (p_1, m_1) \rangle_m \\
 &= \langle (p_1, m_1) \oplus (p_2, m_2), (p_1, m_1) \rangle_m \\
 &= m_1^2 + m_1 m_2 \delta(p_1, p_2)
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$m m_2 \delta(p, p_2) = m_2^2 + m_1 m_2 \delta(p_1, p_2)$$

Somando estas expressões, chegamos a

$$m m_1 \delta(p, p_1) + m m_2 \delta(p, p_2) = m_1^2 + 2m_1 m_2 \delta(p_1, p_2) + m_2^2 = m^2$$

que, simplificando, nos dá uma fórmula alternativa para a massa

$$m = m_1 \delta(p, p_1) + m_2 \delta(p, p_2) \quad (9.6)$$

[¹] Observe que a ordem da soma não importa, uma vez que a operação é comutativa e associativa.

Por outro lado, se subtraímos as expressões obtidas temos

$$\begin{aligned}
 m_1^2 - m_2^2 &= mm_1\delta(p, p_1) - mm_2\delta(p, p_2) \\
 &= m[m_1\delta(p, p_1) - m_2\delta(p, p_2)] \\
 &= [m_1\delta(p, p_1) + m_2\delta(p, p_2)][m_1\delta(p, p_1) - m_2\delta(p, p_2)] \\
 &= m_1^2\delta^2(p, p_1) - m_2^2\delta^2(p, p_2)
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a identidade $m_1^2[1 - \delta(p, p_1)^2] = m_2^2[1 - \delta(p, p_2)^2]$. Tomando o módulo de ambos os lados desta equação, chegamos a

$$m_1^2|1 - \delta(p, p_1)^2| = m_2^2|1 - \delta(p, p_2)^2|$$

que, se definimos $\bar{\delta}(p, p_i) = \sqrt{|1 - \delta(p, p_i)^2|}$, pode ser reescrita como uma regra da gangorra:

$$m_1\bar{\delta}(p, p_1) = m_2\bar{\delta}(p, p_2) \quad [2] \quad (9.7)$$

A partir daqui, não podemos fazer muita coisa sem explicitarmos nossos atores. Mas antes disso, precisamos observar um detalhe extremamente importante do que fizemos ao longo deste capítulo.

A partir de da equação 9.1, obtivemos expressões que descrevem o nosso centro de massa, bem como propriedades extremamente importantes, como a comutatividade e associatividade de $\oplus$. Entretanto, devemos notar não basta escolher uma função δ arbitrária e substituir em 9.5 e 9.7 para obter o centro de massa, é necessário verificar que 9.1 seja satisfeita! Como veremos nas próximas seções isto não é um fato trivial, mesmo se partimos das equações derivadas.

9.1 Geometria Hiperbólica

Dado todo o estudo feito até aqui, uma boa candidata à função δ é

$$\delta(p_1, p_2) = \cosh(d(p_1, p_2))$$

Uma vez $\delta(p_1, p_2) = \cosh(d(p_1, p_2)) \geq 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $p_1 = p_2$, as condições necessárias são atendidas. De fato, se tomamos esta função temos que as expressões 9.5 e 9.7 coincidem com a expressão da massa em 4.7 e 4.8.

Além disso, observando que $\bar{\delta}(p_1, p_2) = \sinh(d(p_1, p_2))$, podemos derivar uma relação que garante que o centroide do produto está localizado na geodésica entre p_1p_2 .

Denotando por d_i a distância entre p_i e p e d a distância entre p_1 e p_2 , elevamos ao quadrado a identidade $m_1 \sinh(d_1) - m_2 \sinh(d_2) = 0$, que deriva diretamente da regra da gangorra, para obter

$$m_1^2 \sinh(d_1)^2 + m_2^2 \sinh(d_2)^2 = 2m_1m_2 \sinh(d_1) \sinh(d_2)$$

que pode ser reescrita como

$$-m_1^2 + m_1^2 \cosh(d_1)^2 - m_2^2 + m_2^2 \cosh(d_2)^2 = 2m_1m_2 \sinh(d_1) \sinh(d_2)$$

observando que $\sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 - 1$.

Agora, elevando ambos os lados da equação (9.6) ao quadrado, obtemos

$$m^2 = m_1^2 \cosh(d_1)^2 + m_2^2 \cosh(d_2)^2 + 2m_1m_2 \cosh(d_1) \cosh(d_2)$$

[2] Tiramos a raiz de ambos os lados da equação, já que todos os fatores são positivos.

Ora, somando as duas equações temos

$$m^2 - m_1^2 - m_2^2 = 2m_1m_2 \cosh(d_1) \cosh(d_2) + 2m_1m_2 \sinh(d_1) \sinh(d_2)$$

e, por fim, substituindo (9.5) e dividindo toda a equação por $2m_1m_2$, concluímos que

$$\cosh(d) = \cosh(d_1) \cosh(d_2) + \sinh(d_1) \sinh(d_2) = \cosh(d_1 + d_2) \quad (9.8)$$

Uma vez que $\cosh$ é uma função bijetiva em $[0, \infty)$, segue que $d = d_1 + d_2$, ou seja, p está, de fato, na geodésica p_1p_2 . Mais do que isso, se substituirmos a identidade $d_2 = d - d_1$ na regra da gangorra, podemos isolar d_1 para encontrarmos a posição de p explicitamente:

$$\begin{aligned} m_1 \sinh(d_1) = m_2 \sinh(d_2) &\Leftrightarrow m_1 \sinh(d_1) = m_2 \sinh(d - d_1) \\ &\Leftrightarrow m_1 \sinh(d_1) = m_2 [\sinh(d) \cosh(d_1) - \sinh(d_1) \cosh(d)] \\ &\Leftrightarrow \sinh(d_1) [m_1 + m_2 \cosh(d)] = m_2 \sinh(d) \cosh(d_1) \\ &\Leftrightarrow \tanh(d_1) = \frac{m_2 \sinh(d)}{m_1 + m_2 \cosh(d)} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$d_1 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{m_2 \sinh(d)}{m_1 + m_2 \cosh(d)}\right) \quad [3]$$

Analogamente, temos

$$d_2 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{m_1 \sinh(d)}{m_2 + m_1 \cosh(d)}\right)$$

e podemos obter a posição do centro de massa do produto e, dada que as expressões de d_1 , d_2 e m dependem somente das massas e das distâncias **entre os pontos**, segue que esta função é invariante por isometrias. A continuidade segue do fato que todas as expressões citadas acima são contínuas em relação às massas e à distância d .

Como já observamos, para concluir que $\mathbb{U}_{prod}$ é um centro de massa ainda devemos verificar a validade da equação 9.1, ou seja, queremos verificar que dado um ponto material (p_3, m_3) arbitrário, vale

$$\langle (p, m), (p_3, m_3) \rangle_m = \langle (p_1, m_1), (p_3, m_3) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m$$

Se definimos $d_3 = d(p, p_3)$, temos $\langle (p, m), (p_3, m_3) \rangle_m = mm_3 \cosh(d_3)$ que, por 9.6, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle (p, m), (p_3, m_3) \rangle_m &= [m_1 \cosh(d_1) + m_2 \cosh(d_2)] m_3 \cosh(d_3) \\ &= m_1 m_3 \cosh(d_1) \cosh(d_3) + m_2 m_3 \cosh(d_2) \cosh(d_3) \end{aligned}$$

Se denotamos por α e β os ângulos $p_1\hat{p}p_3$ e $p_2\hat{p}p_3$, respectivamente (figura 14), a lei dos cossenos para a geometria hiperbólica nos dá

$$\cosh(d_1) \cosh(d_3) = \cosh(d(p_1, p_3)) + \sinh(d_1) \sinh(d_3) \cos(\alpha)$$

$$\cosh(d_2) \cosh(d_3) = \cosh(d(p_2, p_3)) + \sinh(d_2) \sinh(d_3) \cos(\beta)$$

Substituindo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (p, m), (p_3, m_3) \rangle_m &= m_1 m_3 [\cosh(d(p_1, p_3)) + \sinh(d_1) \sinh(d_3) \cos(\alpha)] \\ &\quad + m_2 m_3 [\cosh(d(p_2, p_3)) + \sinh(d_2) \sinh(d_3) \cos(\beta)] \\ &= \langle (p_1, m_1), (p_3, m_3) \rangle_m + m_1 m_3 \sinh(d_1) \sinh(d_3) \cos(\alpha) \\ &\quad + \langle (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m + m_2 m_3 \sinh(d_2) \sinh(d_3) \cos(\beta) \end{aligned}$$

[3] Uma vez que o lado direito da última equação está entre 0 e 1, o arco tangente hiperbólico está bem definido.

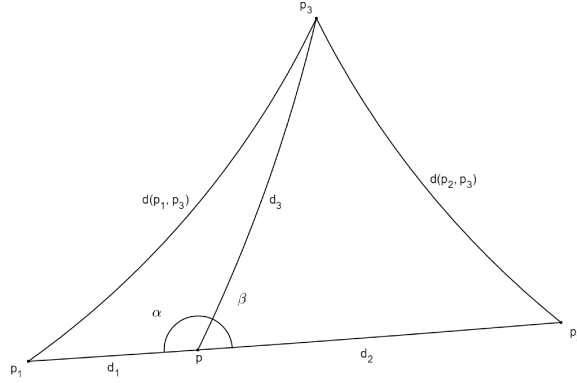


Figura 14 – Triângulo Hiperbólico

Ora, utilizando a regra da gangorra e observando que $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$ ^[4], chegamos finalmente

a

$$\begin{aligned} \langle (p, m), (p_3, m_3) \rangle_m &= \langle (p_1, m_1), (p_3, m_3) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m \\ &\quad - m_2 m_3 \sinh(d_2) \sinh(d_3) \cos(\beta) + m_2 m_3 \sinh(d_2) \sinh(d_3) \cos(\beta) \\ &= \langle (p_1, m_1), (p_3, m_3) \rangle_m + \langle (p_2, m_2), (p_3, m_3) \rangle_m \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\mathbb{U}_{prod}$ satisfaz os axiomas do centro de massa em $\mathbb{H}^n$ e portanto deve ser igual a $\mathbb{U}_{mod}$. De fato, as expressões para a massa no centroide modelado e no centroide do produto é a mesma e se $\mathbb{U}_{mod}(\mathcal{A}) = (p', m)$ e denotamos por $d'_i = d(p', p_i)$, a equação 4.9 nos dá $\sinh(d'_1) = \frac{m_2 \sinh(d)}{m}$, donde derivamos

$$\begin{aligned} \cosh(d'_1) &= \frac{1 + \sinh(d'_1)^2}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{m_2^2 \sinh(d)^2}{m^2}}{2} \\ &= \frac{m^2 + m_2^2 \sinh(d)^2}{2m^2} \\ &= \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cosh(d) + m_2^2 \sinh(d)^2}{m^2} \\ &= \frac{m_1^2 + m_2^2 [1 + \sinh(d)^2] + 2m_1 m_2 \cosh(d)}{m^2} \\ &= \frac{m_1^2 + m_2^2 \cosh(d)^2 + 2m_1 m_2 \cosh(d)}{m^2} \\ &= \frac{[m_1 + m_2 \cosh(d)]^2}{m^2} \end{aligned}$$

ou seja, $\cosh(d'_1) = \frac{m_1 + m_2 \cosh(d)}{m}$. Consequentemente, temos

$$\tanh(d'_1) = \frac{m_2 \sinh(d)/m}{[m_1 + m_2 \cosh(d)]/m} = \frac{m_2 \sinh(d)}{m_1 + m_2 \cosh(d)}$$

Analogamente temos $\tanh(d'_2) = \frac{m_1 \sinh(d)}{m_2 + m_1 \cosh(d)}$, ou seja, $d_1 = d'_1$ e $d_2 = d'_2$. Portanto, como esperávamos, os pontos p e p' coincidem, o que mostra a coincidência de $\mathbb{U}_{prod}$ e $\mathbb{U}_{mod}$ nesse espaço.

9.2 Geometria Esférica

Na geometria esférica, a candidata natural para δ é

$$\delta(p_1, p_2) = \cos(d(p_1, p_2))$$

porém, esta função não satisfaz as hipóteses impostas se consideramos $M = \mathbb{S}^n$: se tomamos pontos antípodas, ou seja, a uma distância $d(p_1, p_2) = \frac{\pi}{2}$, temos $\cos(d(p_1, p_2)) = -1$. Portanto, com esta tecnologia,

[4] Uma vez que $\alpha + \beta = \pi$

somente conseguimos estudar o centro de massa **localmente**. Ao longo dessa seção, portanto, vamos considerar M como uma bola aberta em $\mathbb{S}^n$ de raio menor ou igual a $\pi/2$ e centro arbitrário.

Em M , temos $-1 < \delta(p_1, p_2) \leq 1$, valendo a igualdade à direita se, e somente se, $p_1 = p_2$, ou seja, as condições necessárias são atendidas. E de fato, se tomamos esta função, as expressões 9.5 e 9.7 coincidem com a expressão da massa para dois pontos em 7.1 e 7.2, respectivamente.

Observando agora que $\bar{\delta}(p_1, p_2) = \sin(d(p_1, p_2))$ e que em $[0, \pi/2)$ o $\cos$ é uma função injetiva, podemos fazer operações análogas às da seção anterior para concluir que o centro de massa do produto para dois pontos nesse conjunto está na geodésica entre estes, que a equação 9.1 satisfeita e, finalmente, que $\mathbb{U}_{prod}$ é um centro de massa e, como esperávamos, coincide com $\mathbb{U}_{mod}$ restrita a M .

O estudo neste espaço evidencia um problema em nossa construção^[5]: em alguns casos, a função $\mathbb{U}_{prod}$ deverá ser tratada localmente em uma geometria, mesmo que exista uma função de centro de massa global. Isto provavelmente seria resolvido se incluíssemos mais hipóteses para esta função, assim como fizemos para $\mathbb{U}_{mod}$.

9.3 Espaço Projetivo

A geometria projetiva nasce do quociente de um espaço métrico, utilizando a ideia que "retas paralelas se encontram no infinito". As descrições canônicas deste espaço são abundantes na literatura e podem ser encontradas em (BARROS; ANDRADE, 2010) e em (CARMO, 2015), de uma perspectiva da geometria diferencial e riemanniana, respectivamente.

Veremos aqui o espaço projetivo de dimensão n , denotado por $\mathbb{P}^n$, como o quociente de $\mathbb{S}^{n+1}$ pela relação

$$p \sim q \Leftrightarrow p = q \text{ ou } p = -q$$

ou seja, $M = \mathbb{P}^n = \{\bar{p} = \{p, -p\} : p \in \mathbb{S}^{n+1}\}$. A distância neste espaço é dada através de representantes, mas independe da escolha dos mesmos: dados $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ no espaço projetivo, definimos a distância implicitamente como

$$\cos(d(\bar{p}_1, \bar{p}_2)) = |\langle p_1, p_2 \rangle|$$

Note que se $\langle p_1, p_2 \rangle \geq 0$, a distância dos pontos projetivos $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ é igual à distância de seus representantes na esfera representantes. Como sempre é possível escolher tais representantes, quando estivermos falando de **dois pontos** vamos assumir que

$$d(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = d(p_1, p_2)$$

onde a distância dos representantes é tomada na esfera.

Dito isto, podemos escolher $\delta(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \cos(d(\bar{p}_1, \bar{p}_2))$ e teremos uma função que satisfaz as condições impostas. Mais do que isso, as equações que obtemos em 9.5 e 9.7 são idênticas às obtidas para a esfera.

De fato, se (p, m) é o centro de massa do sistema $\mathcal{A} = \{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ na esfera, temos que centroide do produto do sistema projetivo $\bar{\mathcal{A}} = \{(\bar{p}_1, m_1), (\bar{p}_2, m_2)\}$ é dado por

$$(\bar{p}_1, m_1) \oplus (\bar{p}_2, m_2) = \mathbb{U}_{prod}(\bar{\mathcal{A}}) = (\bar{p}, m)$$

Porém, isto não basta para caracterizar a função $\mathbb{U}_{prod}$ como um centro de massa no espaço projetivo, pois ainda precisamos demonstrar que 9.1 é satisfeita. Infelizmente, ela não é.

^[5] Também presente na construção de Galperin.

Tome, por exemplo $p_1 = (0, \cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$, $p_2 = (0, \cos(\pi/6), -\sin(\pi/6))$ em $\mathbb{S}^2$ e os pontos materiais $(\bar{p}_1, 1)$ e $(\bar{p}_2, 1)$ do espaço projetivo. Calculando o centro de massa de $\{(\bar{p}_1, 1), (\bar{p}_2, 1)\}$ temos

$$(\bar{p}, m) = (\bar{p}_1, 1) \oplus (\bar{p}_2, 1) = ((0, 1, 0), \sqrt{3})$$

Escolhendo $p_3 = (0, 0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \langle (\bar{p}, m), (\bar{p}_3, 1) \rangle &= \sqrt{3} \cos(d(\bar{p}, \bar{p}_3)) \\ &= \sqrt{3} \cos(\pi/2) = 0 \end{aligned}$$

e, por outro lado

$$\begin{aligned} \langle (\bar{p}_1, 1), (\bar{p}_3, 1) \rangle + \langle (\bar{p}_2, 1), (\bar{p}_3, 1) \rangle &= \cos(d(\bar{p}_1, \bar{p}_3)) + \cos(d(\bar{p}_2, \bar{p}_3)) \\ &= \cos(\pi/6) + \cos(\pi/6) = 1 \end{aligned}$$

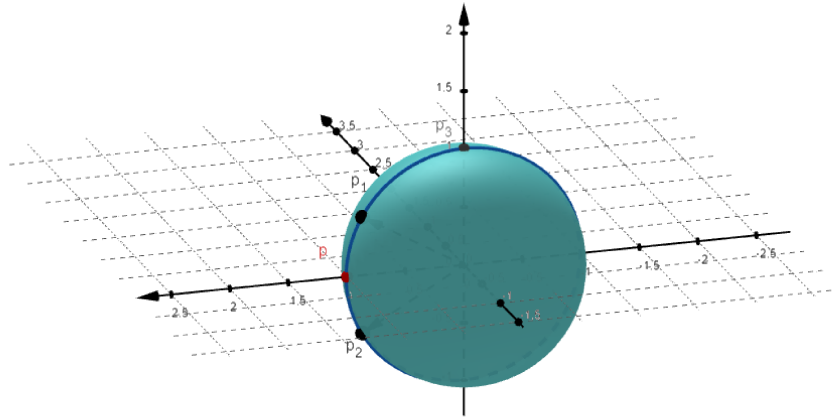


Figura 15 – Contra-exemplo do Produto em $\mathbb{P}^n$

Portanto, como 9.1 não é satisfeita, não podemos afirmar que $\mathbb{U}_{prod}$ é um centro de massa neste espaço mas, por outro lado, também não é o suficiente para afirmar que não é.

De fato, se restringimos o suficiente^[6] 9.1 é satisfeita, dando um caráter local a este centro de massa.

9.4 O Espaço Euclidiano e a Escolha de δ

Por fim, faremos uma breve discussão sobre o centroide do produto em $\mathbb{R}^n$. Naturalmente, com o que sabemos sobre o centro de massa nesse espaço, sabemos que um sistema $\{(p_1, m_1), (p_2, m_2)\}$ deve possuir uma massa $m = m_1 + m_2$ em seu centro de massa.

Portanto, isto quer dizer que deveríamos escolher $\delta \equiv 1$ para que $\mathbb{U}_{prod} = \mathbb{U}_{mod}$ neste espaço e, consequentemente, sabemos que não podemos construir um centro de massa neste espaço utilizando as ferramentas deste capítulo.

[6] Basta tomar pontos projetivos contidos em uma bola fechada de raio $\pi/4$, de forma que a projeção restrita à bola seja uma isometria sobre sua imagem na esfera.

De fato, poderíamos pensar em tomar $\delta(p_1, p_2) = \cosh(d(p_1, p_2))$, já que, para esta função, $\delta(p_1, p_2) = 1$ se, e somente se, $p_1 = p_2$. Porém, neste caso, a hipótese do produto não seria satisfeita.

Isto reafirma o que concluimos na seção passada, que a escolha arbitrária da função δ não resulta necessariamente em um centro de massa. Mais precisamente, acreditamos que esta escolha seja única, e que a função de cada espaço pode ser obtida com análises semelhantes àquelas feitas para obter a função de massa f .

Encerramos, portanto, com a afirmação

Afirmação: As únicas funções δ que resultam em um centro de massa do produto são $\cosh \circ d$ e $\cos \circ d$ em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$, respectivamente. Além disso, utilizando o produto proposto, não existe tal função para o espaço Euclidiano.

10 Conclusão

Ao longo deste trabalho, exibimos duas formas de construir o centro de massa: o centroide modelado, de Galperin, e nosso centroide do produto. Naturalmente, o objeto das duas construções coincide aonde bem definidos, porém podemos observar diferenças fundamentais em sua obtenção:

Na construção de Galperin, temos uma construção muito simples quando podemos encontrar um modelo imerso em $\mathbb{R}^{n+1}$, além de possuir um forte apelo físico, já que utiliza o mesmo princípio da física newtoniana para encontrar a localização do centro de massa de um corpo - multiplicar cada ponto pela massa existente nele e dividir por uma "massa total" do sistema.

Uma falha desta construção, que não existe no centroide do produto, é a necessidade deste modelo "conveniente". Por ser uma construção **intrínseca** o centro de massa do produto pode ser obtido a partir de qualquer modelo da geometria, basta encontrar a função δ que lineariza o produto descrito nas primeiras linhas do capítulo 9.

Porém, como vimos no mesmo capítulo, a escolha desta função não é trivial, e acreditamos ser necessário um trabalho de análise semelhante ao empregado para encontrar a função de massa, no capítulo 6, para chegarmos a um bom candidato.

Um ponto fraco comum às duas construções é a sua limitação, a priori, a sistemas com uma quantidade finita de pontos. De fato, fazendo hipóteses sobre a convergência, podemos pensar em estender as fórmulas obtidas no capítulo 4 e 7 para versões que se adequam ao caso de distribuições contínuas de massa mas, mais uma vez, ficamos dependentes de uma imersão conveniente do modelo no espaço.

Em seu artigo "Riemannian Center of Mass and Mollifier Smoothing" (KARCHER, 1977), Karcher constrói uma forma mais geral de se estudar o centro de massa: um centro de massa Riemanniano. O leitor interessado pode encontrar uma abordagem completa no artigo mas, com as adaptações necessárias, o artigo localiza o centro de massa de uma bola convexa B com uma distribuição de massa $m : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ como o ponto de mínimo^[1] da função

$$P_m(p) = \frac{1}{2} \int_B d^2(p, x) m(x) dx$$

O artigo não dá uma descrição para a massa do centroide, o que impossibilita o estudo do axioma da indução porém, no que tange à posição do centro de massa, podemos de fato notar que esta construção nasce satisfazendo os outros 4 axiomas apresentados no capítulo 5.

Futuramente, acreditamos que trabalhando no centroide do produto e na construção de Karcher podemos obter o centro de massa em diversos espaços cuja imersão em $\mathbb{R}^n$ não é tão natural ou não possibilita a construção do modelo como $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ou o espaço projetivo complexo.

[1] Observe que, assim como no centroide do produto, aqui também vemos um caráter local do centro de massa.

Referências

BARROS, A. de; ANDRADE, P. de A. *Introdução à Geometria Projetiva*. [S.l.]: SBM, 2010. (Textos universitários). ISBN 9788585818470. Citado na página 62.

CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015. ISBN 9788524400360. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 62.

GALPERIN, G. A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 154, n. 1, p. 63–84, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 7, 8 e 12.

IVERSEN, B.; BIRGER, I. *Hyperbolic geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. v. 25. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18, 19 e 21.

KARCHER, H. Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, v. 30, n. 5, p. 509–541, 1977. Citado na página 65.

RATCLIFFE, J. G.; AXLER, S.; RIBET, K. *Foundations of hyperbolic manifolds*. [S.l.]: Springer, 1994. v. 3. Citado na página 15.