UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Janaíne Geralda Mesquita Martins

PROPRIEDADE FRACA DE LEFSCHETZ E A CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE TOGLIATTI MINIMAIS MONOMIAIS

Belo Horizonte
2024

Janaíne Geralda Mesquita Martins

PROPRIEDADE FRACA DE LEFSCHETZ E A CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE TOGLIATTI MINIMAIS MONOMIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Aline Vilela Andrade

Belo Horizonte
2024

Martins, Janaíne Geralda Mesquita.

M386p Propriedade fraca de Lefschetz e a classificação de Sistemas de Togliatti minimais monomiais [recurso eletrônico] / Janaíne Geralda Mesquita Martins– 2024.
1 recurso online (95 f. il.) : pdf

Orientadora: Aline Vilela Andrade.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.93-95.

1. Matemática – Teses. 2. Geometria algébrica – Teses. 3. Equações diferenciais – Teses. 4. Laplace, Transformadas de – Teses. I. Andrade, Aline Vilela. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Propriedade Fraca de Lefschetz e a Classificação de Sistemas de Togliatti Minimais Monomiais

JANAÍNE GERALDA MESQUITA MARTINS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Profa. Aline Vilela Andrade
UFMG

André Luís Contiero

Prof. André Luis Contiero
UFMG

Prof. Rodrigo Gondim
UFRPE

Belo Horizonte, 22 de março de 2024.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Deixo a tristeza
e trago a esperança em seu lugar.

Palavras ao vento – Cássia Eller

Agradecimentos

A Deus, pelo sopro de vida, por cada amanhecer e pelo seu infinito amor.

Aos meus pais Édio e Maria de Lourdes (em memória), por serem minha fonte do amor e por me fazerem quem sou.

A minha irmã Ediane (em memória), por ser meu grande amor nessa vida e meu grande exemplo.

Aos meus afilhados, Ana, Pedro e William, por me mostrarem todos os dias o quão preciosa a vida é.

As minhas madrinhas, padrinhos, tios, tias, primos, por tanto me amarem e não medirem esforços para me verem feliz, sem eles, nada seria possível. Em especial, a minha madrinha Glória e minha dindinha Maria, por nunca soltarem minha mão e meus padrinhos Joice e Ademar (em memória), pela motivação e conselhos. A Cleusa, Elzi e Hélio, por todo carinho e suporte.

Ao Augusto, por estar ao meu lado em todos os momentos e acreditar em mim até quando eu não acreditava.

A Bianca, Fernanda, Isadora, Luan e Luiz pela amizade, por tanto me ouvirem e me aconselharem durante essa caminhada.

Agradeço profundamente a minha orientadora, Aline, por aceitar a responsabilidade de me guiar não apenas neste trabalho, mas também ao longo da jornada da vida. Além de ser uma orientadora excepcional, é também uma amiga, conselheira e, verdadeiramente, uma segunda mãe. Não há palavras que expressem minha gratidão.

Ao professores André Contiero, Charles Almeida, Israel Vainsencher, por tanto me ensinarem sobre matemática e sobre a vida.

Ao pessoal das secretarias do PGMAT e do DMAT por todo auxílio, carinho e atenção.

Aos membros da banca pela disponibilidade, correções e sugestões.

A todos os meus amigos.

Resumo

Classificar variedades suaves que satisfazem pelo menos uma equação de Laplace é um problema antigo em geometria algébrica e diferencial, como pode ser visto em [28] e [27], onde E. Togliatti forneceu uma das primeiras contribuições para este problema. Ele provou que existe um e apenas um exemplo de superfície racional em $\mathbb{P}^5$ parametrizada por cúbicas e satisfazendo uma equação de Laplace de ordem 2.

Em [20], E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e G. Ottaviani provaram que existe uma relação entre a existência de variedades projetivas $X \subset \mathbb{P}^N$ satisfazendo pelo menos uma equação de Laplace de ordem $s \geq 2$ e a existência de ideais artinianos homogêneos $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ gerados por formas de grau d que falham a propriedade fraca de Lefschetz no grau $d-1$. Eles mostraram que um ideal artiniano $I \subset R$ gerado por r formas de grau d, onde $r \leq \binom{d+n-1}{n-1}$, falha propriedade fraca de Lefschetz no grau $d-1$ se, e somente se, a projeção da variedade Veronese $V(n,d)$ pelo sistema linear $|I_d^{-1}|$, denotada por $X_{I_d^{-1}}$, possui defeito osculatório de ordem $d-1$. Neste caso, I é chamado de *sistema de Togliatti*.

Embora o problema de classificar todas as variedades projetivas que possuem defeito osculatório, e por conseguinte, todos os sistemas de Togiatti, pareça estar fora de alcance no momento, neste trabalho voltaremos nossos esforços para o estudo do caso monomial, uma vez que, neste caso, a variedade associada $X_{I_d^{-1}}$ é tórica, e diversas ferramentas combinatórias podem ser utilizadas para o estudo dos sistemas Togliatti.

Palavras-chave: álgebras artinianas; equações de Laplace; propriedade fraca de Lefschetz; sistemas de Togliatti monomiais.

Abstract

Classifying smooth varieties that satisfy at least one Laplace equation is an ancient problem in algebraic and differential geometry, as can be seen in [28] and [27], where E. Togliatti provided one of the earliest contributions to this problem. He proved that there exists one and only one example of a rational surface in $\mathbb{P}^5$ parametrized by cubics and satisfying a Laplace equation of order 2.

In [20], E. Mezzetti, G. Ottaviani and R. M. Miró-Roig proved that there is a relationship between the existence of projective varieties $X \subset \mathbb{P}^N$ satisfying at least one aplace equation of order $s \geq 2$ and the existence of homogeneous Artinian ideals $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ generated by forms of degree d that fail the weak Lefschetz property in degree $d-1$. They showed that an Artinian ideal $I \subset R$ generated by r forms of degree d, where $r \leq \binom{d+n-1}{n-1}$, fails the weak Lefschetz property in degree $d-1$ if, and only if, the projection of the Veronese variety $V(n,d)$ by the linear system $|I^{-1}d|$, denoted by $X_{I_d^{-1}}$, has osculatory defect of order $d-1$. In this case, I is called a *Togliatti system*.

Although the problem of classifying all projective varieties that have osculatory defect, and consequently, all Togliatti systems, seems to be out of reach at the moment, in this work, we will focus our efforts on the study of the monomial case, since in this case, the associated variety $X_{I_d^{-1}}$ is toric, and various combinatorial tools can be used for the study of Togliatti systems.

Keywords: artinian algebras; Laplace equations; weak Lefschetz property; monomials Togliatti system.

Sumário

Introdução

O estudo das propriedades de Lefschetz foi inspirado pela teoria de Lefschetz aplicada a variedades projetivas, desenvolvida por Solomon Lefschetz e consolidada nos anos 1950 [17]. Esta teoria teve origem em um contexto topológico e as propriedades fracas e fortes de Lefschetz são abstrações naturais do Teorema Hard Lefschetz (Seção 7.1, [12]). As propriedades de Lefschetz podem ser exploradas em muitos contextos, por exemplo, em 1980, R. Stanley usou, essencialmente, o Teorema Hard de Lefschetz para estudar propriedades sobre politopos convexos simpliciais [25]. Ainda no mesmo ano, ele usou novamente o Teorema Hard de Lefschetz, em [26], para mostrar que certos conjuntos parcialmente ordenados, decorrentes de uma classe de variedades algébricas, tem a propriedade Sperner.

A investigação das propriedades de Lefschetz em anéis artinianos locais foi sugerida pela primeira vez em um seminário conjunto Japão-EUA sobre combinatória e álgebra comutativa realizado em Kyoto, Japão, em 1985, onde R. Stanley e J. Watanabe apresentaram seus estudos sobre o assunto. No entanto, nos primeiros anos, poucos resultados foram alcançados nessa direção, devido à complexidade dos problemas envolvidos.

Um avanço significativo nesse campo de estudos, se deu pelas descobertas feitas por T. Harima, J. Migliore, U. Nagel, J. Watanabe, conforme apresentadas em [13], como um ideal artiniano em um anel de polinômios em duas variáveis, tem propriedade forte de Lefzchetz. Depois desse artigo, muitos resultados foram obtidos e muitas conexões com outras áreas da matemática começaram a surgir. Uma dessas conexões, envolve geometria algébrica, geometria diferencial, álgebra comutativa e combinatória algébrica e visa classificar variedades suaves que satisfazem pelo menos uma equação de Laplace. Este é um problema de longa data na geometria em geral, como podemos ver em [28] e [27], onde E. Togliatti estava interessado no estudo das superfícies cujo espaço osculador de ordem $s \geq 2$ possui dimensão menor do que a esperada. Dizemos que tais superfícies possuem defeito osculatório, e a partir disso, obtemos que elas satisfazem ao menos uma equação de Laplace de ordem s. Além disso, E. Togliatti provou que existe um, e apenas um exemplo de superfície racional em $\mathbb{P}^5$ parametrizada por cúbicas $x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2$, que satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2. Essa superfície ficou conhecida como superfície de Togliatti.

Em 1997, G. Ilardi investigou variedades racionais cujos espaços osculadores não possuem a dimensão esperada. Ela estabeleceu em [15] uma conexão entre a dimensão dos espaços osculatórios de projeções da variedade de Veronese e a posição do espaço linear a partir do qual a projeção é feita. Além disso, em 2002 ela apresenta de forma bastante geométrica, alguns exemplos em $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ de superfícies que satisfazem equações de Laplace, dando aos primeiros o nome de sistemas de Togliatti [16].

Em 2007, uma contribuição significativa para este problema foi apresentada por H. Brenner e A. Kaid, em [4]. Eles demonstraram que o ideal $(x_0^3, x_1^3, x_2^3, f\,(x_0, x_1, x_2)) \subset \kappa\,[x_0, x_1, x_2]$ não possui propriedade fraca de Lefschetz se, e somente se, $f \in (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$. Além disso, este é o único ideal artiniano monomial gerado por quatro cúbicas que falha nessa propriedade. A conexão crucial entre esse ideal e as equações de Laplace surge ao explorarmos o subespaço linear gerado pelos monômios que compõem o sistema inverso de $(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$ e vermos que se trata da superfície de Togliatti.

Um pouco mais tarde, em 2013, E. Mezzetti, G. Ottaviani e R. M. Miró-Roig provaram, em [20], que há uma relação entre a existência de variedades projetivas $X \subset \mathbb{P}^N$ satisfazendo pelo menos uma equação de Laplace de ordem $s \geq 2$ e a existência de ideais artinianos homogêneos $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ gerados por formas de grau d e que falham a propriedade fraca de Lefschetz em grau $d-1$. Eles provaram que um ideal artiniano $I \subset R$ gerado por r formas de grau d, $r \leq \binom{d+n-1}{n-1}$, falha essa propriedade em grau $d-1$, se, e somente se, a projeção da variedade de Veronese $V(n,d)$ pelo sistema linear $|I_d^{-1}|$, denotada por $X_{I_d^{-1}}$, possui defeito osculatório de ordem $d-1$. Neste caso I é um sistema de Togliatti (veja Definição 1.1.11 para mais detalhes).

Em [19], E. Mezzetti e R. M. Miró-Roig encontraram limitantes inferiores e superiores para o número mínimo de geradores $\mu(I)$ de um sistema de Togliatti minimal monomial $I \subset R$ de formas de grau $d \geq 3$, mais precisamente, provaram que $2n+1 \leq \mu(I) \leq \binom{n+d-1}{n-1}$. Já em [1], C. Almeida, A. V. Andrade e R. M. Miró-Roig mostraram que não existem sistemas de Togliatti minimais monomiais I de formas de grau $d \geq 3$ com número mínimo de geradores $\mu(I) \in [2n+3, 3n-1]$.

Na presente dissertação, estamos interessados em compreender a classificação desses sistemas para o caso minimal monomial. Para isso, elaboramos um capítulo introdutório no qual abordamos conceitos fundamentais, como álgebras artinianas, a propriedade fraca de Lefschetz, a função de Hilbert e o sistema inverso de Macaulay. No capítulo 1, focamos em estabelecer nosso objeto de estudo. Para isso, na primeira sessão, estudamos a relação entre equações de Laplace e geometria algébrica, para podermos entender quando uma dada variedade algébrica possui defeito osculatório. A partir disso, focamos em definir os sistemas de Togliatti, uma vez que neste ponto já estamos com todas as ferramentas em mãos. Na segunda sessão, relembramos o conceito de variedades tóricas, a fim de ter ferramentas combinatoriais para abordar o problema de classificação.

No segundo capítulo, nos concentramos na classificação dos sistemas de Togliatti monomiais minimais. Optamos por examinar especificamente o caso monomial, pois neste contexto é mais simples determinar o sistema inverso de Macaulay, além podermos usar ferramentas combinatórias uma vez que quando I é monomial, a variedade associada $X_{I_d^{-1}}$ é tórica; e trataremos do caso minimal, para evitar redundância na classificação. Para abordar essa classificação, iniciamos com os graus mais baixos, $d = 2, 3$ o que nos permite compreender o comportamento dos sistemas em relação ao grau. Já no caso $d \geq 4$, estudamos o intervalo admissível para o número mínimo de geradores de um sistema de Togliatti quando $2n+1 \leq \mu(I) \leq \binom{n+d-1}{n-1}$, para $n \geq 2$, conforme [1] e [19].

Preliminares

Durante todo texto, estamos assumindo conhecimentos prévios em álgebra comutativa e geometria algébrica, como em [2], [6], [9] e [14]. Além disso, R sempre denotará um anel comutativo com unidade e κ um corpo de característica zero e algebricamente fechado.

0.1 Álgebras Artinianas

As propriedades de Lefschetz podem ser exploradas em diversos contextos e em distintas estruturas algébricas. No nosso caso específico, estamos interessados em investigar essas propriedades em álgebras artinianas, compreendendo como se comportam e quais os desdobramentos. Para isso, inicialmente, apresentaremos a estrutura sobre a qual direcionaremos nossos estudos. Para maiores detalhes, o leitor interessado pode consultar [3] e [12].

0.1.1 Anel Graduado

Definição 0.1.1. Seja R um anel. Dizemos que R é um **anel** $(\mathbb{Z}_+-)$ **graduado**, se existe uma família $\{R_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ de subgrupos aditivos $R_d \subset R$, satisfazendo:

$$R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d$$

de modo que $R_iR_j \subset R_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$.

A partir disto, podemos induzir a seguinte aplicação linear:

$$R_i \times R_j \to R_{i+j}.$$

Exemplo 0.1.2. O anel $R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ é um exemplo de anel graduado onde R_d é o conjunto de polinômios homogêneos de grau d.

A menos que seja especificado de outra forma, assumiremos que R_0 é um corpo e R é Noetheriano. Neste caso, cada R_d, também chamada de parte homogênea de grau d, é um espaço vetorial de dimensão finita sobre R_0, além disso, seus elementos são chamados de elementos homogêneos de grau d. Os ideais de R gerados por elementos homogêneos são ditos ideais homogêneos.

Exemplo 0.1.3. Seja R um anel graduado. Então,

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{d>0} R_d$$

é um ideal homogêneo. Este é o ideal maximal homogêneo de R, em particular, é único. No caso em que $R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$, temos que $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$.

Observemos que, na definição de anel graduado, R_0 é um subanel de R e, para cada d, R_d é um módulo sobre R_0. Sendo assim, R é uma R_0-álgebra. Isto nos sugere a seguinte definição:

Definição 0.1.4. Seja $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ uma álgebra graduada sobre $\kappa := R_0$. Dizemos que a álgebra é **padrão** se

$$R = \kappa\,(R_1)\,.$$

Em outras palavras, R é padrão se é gerada por elementos homogêneos de grau 1.

De modo análogo a anéis graduados, dizemos que um ideal I em uma álgebra graduada padrão $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ é homogêneo se pode ser escrito como

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap R_d)\,.$$

Definiremos agora, nosso objeto central de estudo.

Definição 0.1.5. Seja R um anel graduado. Dizemos que R é **artiniano** se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $R_d = 0$ para todo $d > n$. Se o quociente $\frac{R}{I}$ é artiniano, dizemos também que I é artiniano.

Destacamos a seguinte caracterização sobre álgebras artinianas.

Proposição 0.1.6. Seja $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ um anel local Noetheriano. Então as seguintes condições são equivalentes.

(a) R é artiniano;

(b) Toda cadeia descendente de ideais de R é estacionária;

(c) $\mathfrak{m}^j = 0$ para algum número inteiro j;

(d) $\mathfrak{m}$ é o único ideal primo de R;

(e) A dimensão de Krull $\dim_\kappa R = 0$.

Demonstração: Veja [[12], Proposição 2.10]. ■

Exemplo 0.1.7. 1. Quociente de anéis polinomiais são álgebras artinianas.

De fato, considere o anel de polinômios $R = \kappa[x]$ e I um ideal finitamente gerado de R. Defina $A = R/I$.

Considerando a cadeia descendente de ideais por A:

$$A \supseteq A^2 \supseteq A^3 \supseteq \cdots\,,$$

onde A^n representa o n-ésimo produto de A por si mesmo. Note que A^n/A^{n-1} é um módulo sobre A/A^{n+1}, que é um subanel de A/A^n. Dessa forma, A^n/A^{n+1} é um módulo artiniano.

2. Considere $\frac{\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]}{(x_1^{j_1},\cdots,x_n^{j_n})}$, onde os $j_i's$ são inteiros.

Relembremos que, se um anel noetheriano tem dimensão de Krull zero, então este anel é artiniano. Também, relembre que

$$\dim_\kappa\left(\frac{R}{I}\right) + \mathrm{ht}(I) = \dim_\kappa(R),$$

onde ht(I) representa a altura do ideal.

Considere $R = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ e $I = (x_1^{j_1}, \cdots, x_n^{j_n})$. Uma vez que $\dim_\kappa \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] = n$, segue que

$$\dim_\kappa\left(\frac{R}{I}\right) + \mathrm{ht}(I) = n.$$

A partir de I, olhemos a cadeia dos $x_i's$ primários:

$$(0) \subset (x_1^{j_1}) \subset (x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \subset \cdots \subset (x_1^{j_1}, \cdots, x_n^{j_n})$$

veja que $ht(I) \geq n$, i.e., é no mínimo n, logo, $\dim_\kappa(\frac{A}{I}) = 0$ e, portanto, o anel é artiniano, e consequentemente a álgebra R/I é artiniana.

0.1.2 Função de Hilbert

Definição 0.1.8. Definimos por **função de Hilbert** de um anel R a função inteira $h_R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h_R(d) := \dim_\kappa(R_d),$$

Em outras palavras, tal função calcula a dimensão de R_d como um espaço vetorial sobre κ. Além disso, se R é artiniano, e para algum n, $R_n \neq 0$ e $R_d = 0$, para algum $d > n$. Definimos o vetor h de R como a sequência finita de inteiros positivos

$$h(R) := (h_R(0), \cdots, h_R(n)).$$

Tal vetor é chamado **vetor de Hilbert**.
Desse modo, podemos dizer que a função de Hilbert calcula o "tamanho" de cada uma das componentes homogêneas de um anel graduado.

Exemplo 0.1.9. Considere $R = \kappa[x_0, x_1, x_2]$ e $I = (x_0^2, x_1^2, x_2^2)$. Seja $A = \frac{\kappa[x_0,x_1,x_2]}{(x_0^2,x_1^2,x_2^2)}$ um anel, onde sua base é dada pelos monômios $\{1, x_0, x_1, x_2,\ x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_0x_1x_2\}$. Pela função de Hilbert,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \kappa\\
A_1 &= (x_0, x_1, x_2)\\
A_2 &= (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)\\
A_3 &= (x_0x_1x_2).
\end{aligned}$$

Logo, seu vetor de Hilbert é dado por $h(A)$ =(1, 3, 3, 1).

0.2 Propriedade Fraca de Lefschetz

As propriedades de Lefschetz, destacam as conexões entre diversas áreas, incluindo geometria algébrica, álgebra comutativa e combinatória. Tais propriedades, surgiram da teoria de Lefschetz para variedades projetivas, estabelecida por S. Lefschetz até a década de 1950. As álgebras artinianas, que desempenham um papel central neste estudo, frequentemente aparecem como anéis de cohomologia em variedades algébricas. Embora a teoria tenha inicialmente sido desenvolvida em contextos geométricos [26], avanços recentes expandiram sua aplicação para casos não geométricos e ainda há muitas questões em aberto [7]. Em diferentes campos de estudos deste assunto, diversas ferramentas são utilizadas, além de evidenciar conexões com problemas aparentemente não relacionados [20]. Alguns resultados e algumas associações, como o vetor de Hilbert, nos ajudam a compreender sistematicamente as propriedades de Lefschetz em álgebras artinianas que as possuem.

Definição 0.2.1. Seja $R = \bigoplus_{i=0}^{m} R_i$, com $R_m \neq 0$ uma álgebra artiniana graduada. Dizemos que tal álgebra possui **Propriedade Fraca de Lefschetz**, do inglês Weak Lefschtez Property (WLP), se existe um elemento $L \in R_1$ tal que o mapa multiplicativo

$$\begin{aligned} \times L : R_i &\rightarrow R_{i+1} \\ a &\mapsto aL \end{aligned}$$

possui posto máximo, isto é, é sobrejetivo ou injetivo. Neste caso, dizemos que o elemento $L \in R_1$ é um **elemento de Lefschetz**.

Vejamos alguns exemplos de álgebras artinianas que podem ou não ter WLP.

Exemplo 0.2.2. Sejam $R = \mathbb{C}[x_0, x_1]$, $I = (x_0^2, x_1^2)$ e $L = x_0 + x_1$. Denote $A = \frac{R}{I}$, seu vetor de Hilbert é:

$$h(A) = (\dim(A_0), \dim(A_1), \dim(A_2)) = (1, 2, 1).$$

Como $A_0 \rightarrow A_1$ é injetivo e $A_1 \rightarrow A_2$ é sobrejetivo, esta álgebra possui WLP e, portanto, $x_0 + x_1$ é um elemento de Lefschetz. No caso $A_i \rightarrow A_{i+1}$ para $i \geq 2$, temos que sempre será sobrejetivo, pois a função de Hilbert será nula.

Exemplo 0.2.3 ([4], Exemplo 3.1). Sejam $R = \kappa[x_0, x_1, x_2]$ e $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$. Desejamos ver se a álgebra $A = R/I$ possui WLP. Para isto, calculemos o seu vetor de Hilbert.

$$h(A) = (\dim(A_0), \dim(A_1), \dim(A_2), \dim(A_3), \dim(A_4)) = (1, 3, 6, 6, 3).$$

Observe que uma possível falha na WLP é no mapa

$$\times L : A_2 \rightarrow A_3$$

com as bases

$$A_2 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \text{ e } A_3 = \langle x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle.$$

De fato, existe um elemento $f = a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + abx_0x_1 + acx_0x_2 + bcx_1x_2$ não trivial no núcleo de $\times L$, induzido por $L = ax_0 + bx_1 + cx_2$. Portanto, o mapa não possui posto máximo e, consequentemente, A falha a WLP em grau 2.

Exemplo 0.2.4. Considere $R = \kappa[x_0, x_1, x_2]$ e $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1)$. A álgebra $A = \frac{R}{I}$ possui WLP. De fato, temos

$$h(A) = (\dim(A_0), \dim(A_1), \dim(A_2), \dim(A_3), \dim(A_4), \dim(A_5)) = (1, 3, 6, 6, 4, 1).$$

Veremos que o mapa $\times L : A_i \to A_{i+1}$, induzido por $L = x_0+x_1+x_2$, é sobrejetivo para $i > 2$, pois, para $i \leq 2$ já temos a injetividade. Para a sobrejetividade desejada, basta mostrarmos que $[A, L]_i = 0$ para $i \geq 3$. Faremos para o caso $i = 3$ e o restante segue em análogo.

$$\begin{aligned}
[A, L]_3 = \left[\frac{R}{I, L}\right]_3 &= \left(\frac{\kappa[x_0, x_1, x_2]}{x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0 + x_1 + x_2}\right)_3 \\
&= \left(\frac{\kappa[x_0, x_1, x_2]}{(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0^2x_2 + 3x_0x_2^2 + 3x_1x_2^2 + 3x_0x_1^2 + 3x_1^2x_2 + 6x_0x_1x_2)}\right)_3 \\
&= \left(\frac{\kappa[x_0, x_1, x_2]}{x_0^3, x_1^3, x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_0^2x_1}\right)_3 \\
&= \left(\frac{\kappa[x_0, x_1, x_2]}{x_0^3, x_1^3, x_0^3 + x_1^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_0^2x_1}\right)_3 \\
&= \left(\frac{\kappa[x_0, x_1, x_2]}{x_0^3, x_1^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2}\right)_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vamos agora fornecer algumas importantes ferramentas para o estudo da WLP.

Nos exemplos anteriores, percebe-se que para verificarmos se uma certa álgebra possui ou não WLP, uma das primeiras análises a serem feitas é no seu vetor de Hilbert. Sendo assim, surge o questionamento sobre a relação entre o comportamento das entradas no vetor de Hilbert e suas propriedades.

Definição 0.2.5. Uma sequência de números $h_1, \cdots, h_c$ é **unimodal** se existe um inteiro i tal que

$$h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_i \geq h_{i+1} \geq h_{i+2} \geq \cdots \geq h_c.$$

Proposição 0.2.6. Seja A uma álgebra artiniana graduada padrão sobre κ. Se A tem WLP, então A tem uma função de Hilbert unimodal.

Demonstração: Seja i o menor inteiro tal que $\dim(A_i) > \dim(A_{i+1})$. Uma vez que A tem WLP, temos que o mapa

$$\times L : A_i \to A_{i+1}$$

é sobrejetivo. Isto é, existe um elemento de Lefschetz $L \in A$ de modo que $L \cdot A_i = A_{i+1}$.

Considerando $\frac{A}{(L)}$ o cokernel do mapa

$$\times L : A \to A,$$

obtemos que

$$\left(\frac{A}{(L)}\right)_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{LA_i} = 0.$$

Como A é uma álgebra graduada padrão, a partir da igualdade anterior, vale que

$$\left(\frac{A}{(L)}\right)_{j+1} = A_{j-i}\left(\frac{A}{(L)}\right)_{i+1} = 0$$

para $i \leq j$. Logo, $\times L : A_j \to A_{j+1}$ é sobrejetivo e, consequentemente,

$$h_0(A) \leq h_1(A) \leq \cdots \leq h_i(A) \geq h_{i+1}(A) \geq h_{i+2}(A) \geq \cdots \geq h_c(A)$$

como queríamos provar. ■

Destacamos que a recíproca não é válida, como pode ser visto no Exemplo 0.2, onde o vetor de Hilbert é unimodal, mas a álgebra em questão não possui WLP.

O resultado é uma importante ferramenta para podermos identificar se uma dada álgebra falha a WLP, no sentido em que se o vetor de Hilbert não é unimodal então a álgebra não possui WLP, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 0.2.7. Seja $A = \frac{\kappa[x_0,x_1]}{(x_0^2,x_1^2)}$, com a graduação $|x_0| = 1$ e $|x_1| = 3$. Neste caso, como estamos em uma álgebra graduada, dizer que x_1 possui "graduação 3", corresponde a dizer que x_1 pertence à parte homogênea de grau 3 de tal álgebra. Seu vetor de Hilbert é dado por $h(A) =$ (1, 1, 0, 1, 1). Veja

$$\begin{aligned} A_0 &= \kappa \\ A_1 &= (x) \\ A_2 &= (0) \\ A_3 &= (y) \\ A_4 &= (xy). \end{aligned}$$

Como o vetor não é unimodal, então A não possui WLP.

Para a próxima ferramenta, relembramos que o **socle** é definido pelo ideal

$$(0 : \mathfrak{m}) := \{x \in R \mid \mathfrak{m}x = 0\}.$$

Em uma álgebra artiniana $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$, com $c \geq 0$ sendo o maior inteiro tal que $A_c \neq 0$, o inteiro c é dito grau máximo do socle de A, uma vez que A_c está no socle de A.

Isto nos sugere a seguinte definição.

Definição 0.2.8. Seja $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$, com $A_c \neq 0$, uma álgebra artiniana graduada. Dizemos que A é uma **álgebra de nível** se

$$(0 : \mathfrak{m}) = A_c,$$

onde $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} A_i$.

Em outras palavras, a definição acima nos diz que, uma álgebra é de nível se seu socle é concentrado apenas em grau homogêneo. No contexto de álgebras artinianas, dizemos que A é de nível se seu socle é concentrado em um grau.

Proposição 0.2.9. Sejam A uma álgebra artiniana graduada padrão e L uma forma linear geral. Considere o homomorfismo

$$\varphi_d : A_d \to A_{d+1}$$

definido pela multiplicação por L, com d um inteiro positivo. Então vale que:

(a) Se φ_{d_0} é sobrejetivo para algum d_0, então φ_d é sobrejetivo para todo $d \geq d_0$;

(b) Se A é de nível e φ_{d_0} é injetivo para alguma d_0, então φ_d é injetivo para todo $d \leq d_0$.

Demonstração: Veja [[22], Proposição 2.1]. ■

Pelos itens supracitados, temos, em particular, que se A é uma álgebra de nível e $\dim[A]_{d_0} = \dim[A]_{d_0+1}$, para algum d_0, então A tem WLP se, e só se, φ_{d_0} é injetivo e, consequentemente, é um isomorfismo.

Proposição 0.2.10. Sejam $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal artiniano monomial. Então, a álgebra $A = \frac{R}{I}$ tem WLP se, e só se, $x_0 + \cdots + x_n$ é um elemento de Lefschetz de A.

Demonstração: Seja $L = a_0x_0 + \cdots + a_nx_n$ uma forma linear geral. Neste caso, podemos assumir $a_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq r$ e, em particular, $a_n = 1$.

Considere $J \subset S := \kappa[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ o ideal gerado pelos elementos obtidos pelos geradores minimais de I após substituirmos $a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ por x_n. A partir disto, segue que $A/LA \cong S/J$.

Desse modo, temos que cada gerador minimal de J é da forma $x_0^{j_1} \cdots x_{n-1}^{j_{n-1}}(a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1})^{j_n}$. Ao substituir por $(a_0x_0)^{j_0} \cdots (a_{n-1}x_{n-1})^{j_{n-1}}(-a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1})^{j-1}$, vejamos que em nada altera o ideal J, uma vez que assumimos os $a_i's$ não nulos. Desse modo, segue do isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \kappa[y_0, \cdots, y_{r-1}] & \to & S \\ y_i & \mapsto & a_ix_i \end{array}$$

que A/LA e $A/(x_0 + \cdots + x_n)A$, tem a mesma função de Hilbert e, portanto, a equivalência está provada.[1] ■

Lema 0.2.11. Seja $I = (F_1, \cdots, F_r) \subset R$ um ideal artiniano gerado por r formas lineares de grau d, com $r \leq \binom{n-1+d}{n-1}$. Sejam também L uma forma linear, $\overline{R} = R/(L)$ e $\overline{I}$ (respectivamente $\overline{F_i}$) a imagem de I (respectivamente F_i) em $\overline{R}$. Então, I falha WLP em grau $d-1$ se, e somente se, $\overline{F_1}, \cdots, \overline{F_r}$ são $\kappa-$linearmente dependentes.

Demonstração: Inicialmente, observemos que para $1 \leq i \leq r$ e $\deg(F_i) = d$, temos que $[R/I]_{d-1} = R_{d-1}$ Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} \dim \overline{R_d} &= \binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1} \\ &= \frac{(n+d)! - d(n+d-1)!}{d!n!} \\ &= \frac{n(n+d-1)!}{d!n!} \\ &= \binom{n+d-1}{n-1} \end{aligned}$$

Se $I = (F_1, \cdots, F_r)$ e $\deg(F_i) = d$, então $\dim[R/I]_d = \binom{n+d}{d} - r$.

Sendo assim, considere

$$\varphi : (R/I)_{d-1} \to (R/I)_d$$

[1] Lembremos que é possível determinar se L é um elemento Lefschetz de A olhando apenas para a função Hilbert de A/LA.

o mapa multiplicativo em grau $d-1$.

Uma vez que $r \leq \binom{n+d-1}{d}$,temos que

$$\begin{aligned}\binom{n+d}{d} &= \binom{n+d-1}{n-1} + \binom{n+d-1}{d-1} \\ &= \binom{n+d-1}{d-1} + r\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\dim(R/I)_d \geq \dim(R/I)_{d-1}$$

e, consequentemente, φ não é sobrejetiva em grau $d-1$, a menos que $r = \binom{r+d-1}{d}$. Caso isto ocorra, temos que φ é sobrejetiva se, e só se, é injetiva. Logo, temos que φ não tem posto máximo no caso em que não é injetivo. Para isto, é suficiente e necessário que dim(Ker(φ)) $>$ 0. Isto ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Im}\varphi)) &= \dim(R/I)_{d-1} - \dim(\ker(\varphi))_{d-1} \\ &< \binom{n+d-1}{d-1}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{coker}(\varphi) &= ((R/I)_d)/\operatorname{Im}(\varphi) \\ &= ((R/I)_d)/(L(R/I)_{d-1}) \\ &\cong [R/(I,L)]_d\end{aligned}$$

e, então

$$\dim(R/(I,L))_d = \dim(R/I)_d - \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$$

implica que

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \binom{n+d}{d} - r - \dim(R/(I,L))_d.$$

Assim, φ não é injetiva se, e somente se,

$$\binom{n+d}{d} - r - \dim(R/(I,L))_d < \binom{n+d-1}{d-1}$$

que equivale a

$$dim[R/(I,L)]_d > \binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1} - r.$$

Como

$$R/(I,L) \cong (R/(L))/(I/(L)),$$

temos que

$$\dim R/(I,L) = \dim \overline{R} - \dim \overline{I}.$$

Sendo assim, dizer que φ não é injetivo, equivale a dizer que

$$\dim \overline{R} - \dim \overline{I} > \binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1} - r$$

e, para isto, é suficiente e necessário que dim$\langle \overline{F_1}, \cdots, \overline{F_r} \rangle < r$.

Portanto, a WLP falha se, e somente se, $\{\overline{F_1}, \cdots, \overline{F_r}\}$ é $\kappa-$linearmente dependente.

■

0.2.1 Sistema inverso de Macaulay

Em 1916, o matemático inglês Francis Sowerby Macaulay introduziu o conceito de sistema inverso no último capítulo de seu livro "The Algebraic Theory of Modular Systems" ([18]). Essa ideia, intrinsecamente ligada à ação de apolaridade, representa uma peça fundamental que relaciona os elementos de um anel de polinômios como operadores de derivadas parciais, uma vez que char(κ) $= 0$, tendo aplicabilidade tanto na teoria dos anéis polinomiais quanto nos sistemas de equações diferenciais parciais com coeficientes constantes. Na presente dissertação, estamos interessados em explorar a ação de apolaridade, bem como as propriedades essenciais associadas a um sistema inverso, para podermos desenvolver uma teoria paralela às propriedades de Lefschetz. Inicialmente, nosso foco é construir tal sistema.

Considere os anéis $Q = \kappa[X_0, \cdots, X_n]$ e $R = \kappa[X_0^{-1}, \cdots, X_n^{-1}]$. Queremos dar a R uma estrutura de $Q-$módulo. Para isto, definamos a operação $\varphi \in Q$ de R do seguinte modo: Seja $\varphi = X^E \in Q$ um monômio, este, por sua vez, opera com um monômio inverso X^{-F} pela contração:

$$X^E \cdot X^{-F} = \begin{cases} X^{-F+E} & \text{se todos os componentes de } -F+E \text{ são não positivos} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $E = (e_0, \cdots, e_n)$, $F = (f_0, \cdots, f_n)$ e, desse modo,

$$\begin{array}{rcl} X^E & = & X_0^{e_0} X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n} \\ X^{-F} & = & X_0^{-f_0} X_1^{-f_1} \cdots X_n^{-f_n}. \end{array}$$

Para um polinômio $\varphi \in Q$ e um polinômio inverso $f \in R$, a operação $\varphi \cdot f$ é definida como um elemento de R obtido pela expansão formal, apresentando-se como um polinômio de Laurent. No contexto de um anel comutativo R, um polinômio de Laurent é definido como $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k$, onde os coeficientes $a_k \in R$, e somente um número finito desses coeficientes são diferentes de zero. Essa expansão, no nosso caso, é realizada aplicando a regra específica para a multiplicação de monômios $X^E \cdot X^{-F}$, considerando as potências associadas E e F.

Observando o fato de que a injetividade é obtida ao olharmos para o corpo residual $\kappa = Q/(X_0, \cdots, X_n)$, temos que o $Q-$módulo R é um módulo injetivo e o definimos como sistema inverso.

Agora, considerando $R = \kappa[X_0^{-1}, \cdots, X_n^{-1}]$, por simplicidade de notação, vamos escrever $X_i = x_i^{-1}$ e, assim, $R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$, desse modo, um monômio em R pode ser visto como o produto

$$x_i^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

com os expoentes positivos.

O conjunto de todos os polinômios forma uma $\kappa-$base para o anel de polinômios R. Além disso, é possível que uma constante múltipla de um produto das potências do monômio $x_i^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ pode ser chamado de monomial e então um elemento da base para R, sendo este uma constante múltipla não nula, pode ser considerado como elemento básico.

Escreva

$$\frac{\partial}{\partial x_i}$$

e considere $Q = \kappa[\partial_0, \cdots, \partial_n]$. Não é difícil ver que R é um $Q-$módulo.

Tendo a correspondência

$$\begin{array}{rcl} \partial_0 & \leftrightarrow & x_i \\ X_i & \leftrightarrow & X_i^{-1} \end{array}$$

segue que

$$\frac{1}{a_0!a_1!\cdots a_n!}x_0^{a_0}x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} \leftrightarrow X_0^{-a_0}X_1^{-a_1}\cdots X_n^{-a_n}$$

e, a partir disto, R torna-se o sistema inverso para Q.

Além disto, tal correspondência nos dá o isomorfismo de anéis

$$\kappa[X_0, \cdots, X_n] \to \kappa[\partial_0, \cdots, \partial_n]$$

bem como o isomorfismo de módulos

$$\kappa[X_0^{-1}, \cdots, X_n^{-1}] \to \kappa[x_0, \cdots, x_n].$$

Em tese, a partir desta construção, podemos definir sobre os anéis $R = \kappa[X_0, \cdots, X_n]$ e $M = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ uma ação de R sobre M

$$\begin{array}{rcl} R_i \times M_j & \to & M_{j-i} \\ (R, G) & \mapsto & F\left(\dfrac{\partial}{\partial x_0}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)G \end{array}$$

dando a M a estrutura de $R-$módulo graduado.

Obtemos assim a definição de sistema inverso de Macaulay sobre um ideal, que será o caso de nossos estudos.

Para a próxima definição, vamos usar a mesma notação de usamos para ação acima.

Definição 0.2.12. Seja $I \subset R$ um ideal homogêneo. O **sistema inverso de Macaulay** é dado por

$$I^{-1} := \{N \in M; \forall F \in I, F \cdot N = 0\}$$

e este se trata de um $R-$módulo graduado de M.

Quando I é um ideal monomial, o módulo do sistema inverso $(I^{-1})_d$ é gerado pelos monômios em R_d correspondentes aos monômios em M_d, mas não em I_d.

Exemplo 0.2.13. Seja $R = \kappa[x_0, x_1, x_2]$. Consideremos o ideal artiniano $I \subset R$, com $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$. Então, seu sistema inverso de Macaulay é dado por

$$I^{-1} = (x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2).$$

Uma vez que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_0^2x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_0^2x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_0x_1^2}, \dfrac{\partial}{\partial x_0x_2^2}, \dfrac{\partial}{\partial x_1^2x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_1x_2^2}\right)$ anula $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$.

Exemplo 0.2.14. Seja $I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_0^3x_1, x_0^3x_2, x_0x_1^3, x_0x_2^3, x_1^3x_2, x_1x_2^3) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$, então

$$I^{-1} = \left(x_0^2x_1^2, x_0^2x_1x_2, x_0^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_0x_1x_2^2, x_1^2x_2^2\right).$$

Uma associação quase imediata que podemos fazer em relação ao sistema inverso de Macaulay é com a estrutura de um anulador de um anel. Dado $T \subset M$ um $R-$módulo graduado, temos que

$$\mathrm{Ann}(T) := \{F \in R; F \cdot N = 0, N \in T\}$$

é um ideal homogêneo em R.

Se $F \cdot N = 0$ e $\deg(F) = \deg(N)$, então F e N são considerados apolares entre si.

Relacionando os resultados da função de Hilbert com o sistema inverso de Macaulay, obtemos que

$$h_A(i) = \dim(A_i) = \dim(I^{-1})$$

onde $A = R/I$.

As observações acima nos sugerem o seguinte resultado.

Teorema 0.2.15. Temos a bijeção:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideais homogêneos } I \subset R\} & \leftrightarrow & \{R-\text{submódulos graduados de } M\} \\ I & \mapsto & I^{-1} \\ \mathrm{Ann}(T) & \leftarrow & T. \end{array}$$

Em particular, I^{-1} é um $R-$módulo finitamente gerado se, e somente se, R/I é um anel artiniano.

Capítulo 1

Sistemas de Togliatti

Neste capítulo, definiremos nosso objeto de trabalho, abordando sua relação com o problema de determinar variedades que satisfazem ao menos uma equação de Laplace e com a classificação de variedades tóricas.

Nos trabalhos de G. Ilardi, [15] e [16], foram apresentados resultados relevantes sobre sistemas de Togliatti e suas características. Posteriormente, em [20], E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e G. Ottaviani, propuseram uma nova abordagem para compreender esses sistemas. Em seguida, em [19], E. Mezzetti e R. M. Miró-Roig forneceram novas caracterizações para os sistemas de Togliatti, incluindo conceitos de suavidade e minimalidade. Neste capítulo, vamos introduzir ferramentas geométricas que nos ajudarão a compreender melhor esses sistemas.

1.1 Equações de Laplace

Um espaço bastante usado nos estudos da geometria algébrica e da geometria diferencial, é o espaço tangente. A partir do espaço tangente conseguimos informações sobre a variedade em questão, como, a suavidade. Além disso, também há uma conexão entre estes espaços e as conhecidas equações de Laplace. Neste capítulo estamos interessados em apresentar tal relação, utilizando o mesmo ponto de vista de D. Franco e G. Ilardi em [8].

Suponha que $\mathcal{X}$ é uma variedade quase projetiva de dimensão n contida em $\mathbb{P}^N$, e que x é um ponto suave em $\mathcal{X}$. Podemos escolher um sistema de N coordenadas afins em torno de x, juntamente com uma parametrização local $\mathcal{U}$ de x, tal que $f : \Delta \to \mathcal{U}$, onde Δ é um multidisco. A partir disto, temos a seguinte definição:

Seja $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$. Defina $I^{(1)} := \{f^{(1)} \ ; \ f \in I\}$ o espaço vetorial formado por todas as partes lineares dos elementos de I. Isto nos dá, por definição, um subespaço $(n+1)-$dimensional de $\kappa[x_0, \cdots, x_n]$ formado por todas as formas lineares do tipo

$$\{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n \ ; \ a_i \in \kappa\}.$$

Desse modo, temos que o conjunto dos zeros locais de $I^{(1)}$, $Z(I^{(1)})$, é um subespaço linear de $\mathbb{A}^n$ canonicamente dual a $\kappa[x_0, \cdots, x_n]^{(1)}/I^{(1)}$, como um espaço vetorial, desde que o pareamento

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\kappa[x_0, \cdots, x_n]^{(1)}}{I^{(1)}} \times Z(I^{(1)}) & \to & \kappa \\ (f, P) & \mapsto & f(P) \end{array}$$

seja não degenerado.

Definição 1.1.1. Seja x um ponto na variedade $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$. Tomando uma vizinhança de x, assuma que $x = (0, 0, \cdots, 0)$. Definimos o conjunto

$$T_x\mathcal{X} := \{Z(f^{(1)}) \ ; \ f \in I(x)\}$$

como sendo o **espaço tangente** de $\mathcal{X}$ em x.

Na definição acima, fazemos uma mudança linear de coordenadas. Vejamos como isto ocorre.

Considere $x = (a_0, \cdots, a_n) \in \mathcal{X}$. Escreva $y_i = x_i - a_i$. Podemos, pela expansão de Taylor, escrever qualquer polinômio $f \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ como

$$f(x_0, \cdots, x_n) = f(x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot y_i + (\text{termos ao menos quadráticos em } y_i).$$

Sendo assim, podemos "ver" o espaço tangente $T_x\mathcal{X}$, para qualquer $x = (a_0, \cdots, a_n) \in \mathcal{X}$, dado pelas equações

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(x_i - a_i) = 0$$

para todo $f \in I(x)$.

Em termos mais simples, o espaço tangente $T_x\mathcal{X}$ é o conjunto de todos os vetores cujas derivadas parciais em x se anulam nas equações polinomiais que definem a variedade.

Essa definição permite estender o conceito de espaço tangente para objetos geométricos definidos por equações polinomiais, como curvas algébricas e variedades algébricas mais gerais, dentro do contexto da geometria algébrica.

Vamos agora dar uma noção de espaço vetorial a partir do nosso próximo resultado para podermos falar de uma das nossas principais ferramentas: o critério Jacobiano.

Lema 1.1.2. Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e assuma $x = (0, \cdots, 0) \in \mathcal{X}$. Vale que

$$\frac{\kappa[x_0, \cdots, x_n]^{(1)}}{I(x)^{(1)}} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2},$$

onde $\mathfrak{m} = \{\varphi; \varphi(x) = 0\} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ é o ideal maximal do anel local de $\mathcal{X}$ em x.

Demonstração: Veja [[9], Lema 4.4.3]. ■

Em particular, esse lema nos fornece uma definição mais intrínseca do espaço tangente $T_x\mathcal{X}$. Podemos afirmar que $T_x\mathcal{X}$ é o dual do espaço vetorial $(n+1)-$dimensional $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Essa definição alternativa nos permite definir o espaço tangente para qualquer variedade $\mathcal{X}$ (que não seja necessariamente afim).

Definição 1.1.3. Uma variedade $\mathcal{X}$ é **suave** em um ponto $x \in \mathcal{X}$ se o espaço tangente $T_x\mathcal{X}$ tem ao menos a mesma dimensão de $\mathcal{X}$. Em símbolos, para $\mathcal{X}$ ser suave, é necessário que a seguinte implicação seja satisfeita:

$$\dim(\mathcal{X}) = w \Rightarrow \dim(T_x\mathcal{X}) \geq w.$$

Se $\mathcal{X}$ é suave em todo ponto, dizemos que a variedade é **suave** e se ela é suave em quase todo ponto, dizemos que é **quase suave**. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{X}$ é **singular**.

O resultado a seguir, nos dá um critério necessário e suficiente para sabermos se uma variedade é suave. Ele também será útil futuramente para obtermos a equação de Laplace desejada e as informações obtidas por meio dela.

Proposição 1.1.4 (Critério Jacobiano). Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim com $I(\mathcal{X}) = (f_0, \cdots, f_r)$ um ideal. Então, $\mathcal{X}$ é suave em um ponto $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, o posto da matriz Jacobiana $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{r\times n}$ é pelo menos $n - \dim \mathcal{X}$. O mesmo vale para $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$.

Demonstração: Como visto anteriormente, a linearização de uma função f_i sobre um ponto $x = (a_0, \cdots, a_n)$ é dada por $\displaystyle\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)(x_i - a_i)$.

Por definição, uma variedade afim $\mathcal{X}$ é suave em um ponto x se estas funções $(f_i's)$ definem um subespaço linear de $\mathbb{A}^n$ de dimensão ao menos w, onde $w = \dim(\mathcal{X})$. Ou seja, se, e somente se, o subespaço linear de $\kappa[x_0, \cdots, x_n]^{(1)}$ gerado pelas linearizações acima tem dimensão ao menos $n - w$. No entanto, a dimensão deste espaço linear é exatamente o posto da matriz cujas entradas são os coeficientes das funções lineares. O que prova nossa equivalência.

Para o caso projetivo, basta cobrir $\mathbb{P}^n$ por $n+1$ espaços afins $\{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ e aplicar o mesmo argumento do caso afim.

■

Em particular, temos que se o posto da matriz jacobiana é r (a quantidade de funções), então $\mathcal{X}$ é suave de dimensão $n - r$. Além disso, se $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ (ou $\mathbb{P}^n$), é tal que $\mathcal{X} = \overline{Im(\varphi)}$, com $\varphi := (f_0, \cdots, f_r)$, denotamos a matriz Jacobiana por $Jac\ \varphi(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$.

Exemplo 1.1.5. Sejam n e d inteiros não negativos. Considere $\mathcal{X}$ a hipersuperfície de Fermat:

$$\mathcal{X} = \{(x_0 : \cdots : x_n)\ ;\ x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$$

segue que a matriz jacobiana tem apenas uma linha, cujas as entradas são dadas pelas derivadas dx_i^{d-1}. Consequentemente, esta matriz tem posto 1 e, portanto, é suave.

Exemplo 1.1.6. Seja $\mathcal{X} = \{(s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \in \mathbb{P}^3\ ;\ (s:t) \in \mathbb{P}^1\}$ a cúbica torcida. Podemos reescrevê-la como

$$\mathcal{X} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3\ ;\ \underbrace{x_1^2 - x_0x_2}_{f_1} = \underbrace{x_2^2 - x_1x_3}_{f_2} = \underbrace{x_0x_3 - x_1x_2}_{f_3} = 0\}.$$

Sua matriz jacobiana será

$$\begin{pmatrix} -x_2 & 2x_1 & -x_0 & 0 \\ 0 & -x_3 & 2x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, obtemos a suavidade se, e somente se, esta matriz tem posto 2.

Na geometria diferencial, o espaço tangente está intrinsecamente ligado ao conceito de espaço osculador. Sob nossa perspectiva, o espaço osculador é uma ferramenta utilizada para explorar a geometria intrínseca de uma variedade algébrica em torno de um ponto específico. Para definir esse espaço em um ponto de uma variedade algébrica, partimos do espaço tangente discutido anteriormente.

O espaço osculador é construído por meio da adição de vetores que incorporam informações sobre a curvatura da variedade no ponto considerado. Ele é gerado tanto pelos vetores do espaço tangente quanto pelos vetores obtidos ao aplicar as derivadas de ordem superior das equações polinomiais nesse ponto. Esses vetores, que derivam das derivadas de ordem superior, fornecem detalhes sobre a curvatura da variedade nesse ponto específico. Sendo assim, temos a seguinte definição.

Definição 1.1.7. Seja x um ponto suave na variedade $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$. O espaço gerado por todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a s é dito **espaço osculador** e denotado por $T_x^s\mathcal{X}$.

Embora a dimensão esperada de $T_x^s\mathcal{X}$ seja dada por $\binom{n+s}{s}$ - 1, em geral, a dimensão real $\dim(T_x^s\mathcal{X})$ é menor ou igual a esse valor, neste caso, dizemos que a variedade em questão possui **defeito osculador** ou **osculatório**.

Para a próxima definição, relembremos que, em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, a equação de Laplace é definida por $\Delta f = 0$, onde Δ denota o operador de Laplace (ou laplaciano):

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

em que f é uma função de $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.8. Se, para todos os pontos suaves em $\mathcal{X}$, a dimensão real de $T_x^s\mathcal{X}$ é estritamente menor a $\binom{n+s}{s} - 1 - \delta$ para algum δ, dizemos que $\mathcal{X}$ **satisfaz δ equações de Laplace de ordem s.**

Em 1929, E. Togliatti trabalhou na busca por superfícies cujo espaço osculador possui dimensão menor do que a esperada e obteve, em [27], que há um único exemplo de superfície racional $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^5$ obtida pela projeção de Veronese $V(2,3) \subset \mathbb{P}^5$ e que satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2, sendo a imagem de $\mathbb{P}^2$ via o sistema linear

$$\langle x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3).$$

Como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.9. A superfície de Togliatti $\mathcal{X}$ é dada pelo fecho da imagem do mapa de projeção

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0^2x_1 : x_0^2x_2 : x_0x_1^2 : x_0x_2^2 : x_1^2x_2 : x_1x_2^2). \end{array}$$

Veremos que $\mathcal{X}$ satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2.

De fato, considere $x \in \mathcal{X}$ um ponto suave geral. A dimensão do segundo espaço osculador em x é dada pelo posto de

$$Jac^2\varphi(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0^2} \\ \partial_{x_0x_1} \\ \partial_{x_0x_2} \\ \partial_{x_1^2} \\ \partial_{x_1x_2} \\ \partial_{x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_0 & 0 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_0 & 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_0 & 0 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\mathrm{rk}(Jac^2\varphi(x)) = 4$ e a dimensão esperada é $\binom{4}{2} - 1 = 5$, ou seja, $\mathcal{X}$ satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2 dada por

$$x_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2} - x_0x_1y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0\partial x_1} - x_0x_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0\partial x_2} + x_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - x_1x_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} + x_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Em 2007, H. Brenner e A. Kaid, demonstraram que o ideal $(x_0^3, x_1^3, x_2^3, f(x_0, x_1, x_2)) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$ não possui a WLP se, e somente se, $f \in (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$. Adicionalmente, conforme observado no Exemplo 0.2.3, o ideal $(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$ não possui a WLP, e, mais notavelmente, este é o único ideal artiniano monomial gerado por quatro cúbicas que falha WLP. A conexão essencial entre esse ideal e as equações de Laplace surge quando explorado o subespaço linear gerado pelos monômios que compõem o sistema inverso de $(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_1x_2x_3)$, como no exemplo acima. Nesse contexto, percebemos que a variedade associada satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2.

Sendo assim, surge a seguinte questão: existe alguma relação entre um ideal artiniano $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ gerado por r formas lineares de grau d, que falha WLP e a projeção da variedade de Veronese $V(n, d)$ que satisfaz ao menos uma equação de Laplace de ordem $d-1$?

E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e G. Ottaviani mostram em [20] que sim, de fato, há uma estreita relação entre estes fatos. Antes de vermos o teorema que estabelece isto, fixaremos algumas notações e definições que se farão necessárias.

Sejam $I = (f_1, \cdots, f_r) \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal artiniano gerado por r formas lineares de grau d e I^{-1} seu sistema inverso de Macaulay, como definido na seção 0.2.1. Associando a $(I^{-1})_d$, existe um mapa racional

$$\varphi_{(I^{-1})_d} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-r-1}$$

e, uma vez que I é artiniano, existe um morfismo

$$\varphi_{I_d} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$$

associado a I_d.

Assim, definimos

$$X_{n,(I^{-1})_d} := \overline{\mathrm{Im}(\varphi_{(I^{-1})_d})}$$

que é a projeção de $V(n, d)$ por $\langle (I^{-1})_d \rangle$.

Também definimos

$$X_{n,I_d} := \mathrm{Im}(\varphi_{I_d})$$

que é a projeção de $V(n, d)$ por $\langle f_1, \cdots, f_r \rangle$.

A partir disto, temos o seguinte resultado que faz a conexão desejada:

Teorema 1.1.10 (Teorema do Chá). Seja $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal homogêneo artiniano gerado por r formas lineares $f_1, \cdots, f_r$ de grau d, com $r \leq \binom{n+d-1}{n-1}$. Então, são equivalentes

(a) I falha WLP em grau $d-1$;

(b) As formas homogêneas $f_1, \cdots, f_r$ se tornam linearmente dependentes em um hiperplano geral $H \subset \mathbb{P}^n$;

(c) A variedade $\mathcal{X} := X_{n,(I^{-1})_d}$satisfaz ao menos uma equação de Laplace de ordem $d-1$.

Demonstração: Vamos mostrar a equivalência entre (a) e (c).

Tendo em vista que $(R/I)_{d-1} = R_{d-1}$ e que

$$\begin{aligned}
\dim R_{d-1} &= \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-1}{n-1} \\
&\leq \binom{n+d}{n} - n \\
&= \dim(R/I)_d,
\end{aligned}$$

temos que I falha WLP em grau $d-1$ se, e somente se, para uma forma linear $L \in R_1$ o mapa multiplicativo

$$\times L : (R/I)_{d-1} \to (R/I)_d$$

não é injetivo.

Para isto, utilizaremos a dualidade de Macaulay-Matlis 0.2.1, que nos dá que

$$\dim(R/I)_i = \dim(I^{-1})_i.$$

Sendo assim, basta mostrar que o posto do mapa dual

$$(I^{-1})_d \to (I^{-1})_{d-1}$$

é $\binom{n+d-1}{n} - 1$. Isto equivale a dizer que o $(d-1)-$espaço osculatório $T_x^{d-1}\mathcal{X}$ é gerado por todas as suas derivadas parciais de ordem menos que $d-1$ de uma dada parametrização de $\mathcal{X}$, cuja dimensão é, no máximo, $\binom{n+d-1}{n} - 2$. Ou seja, $X_{n,(I^{-1})_d}$ satisfaz uma equação de Laplace de ordem $d-1$.

Já a equivalência entre (a) e (b), segue imediatamente do Lema 0.2.11 ■

A relação vista acima, por meio do Teorema do Chá (Teorema 1.1.10), nos sugere a seguinte definição.

Definição 1.1.11. Seja $I \subset R$ um ideal artiniano homogêneo gerado por r formas lineares $f_1, \cdots, f_r$ de grau d, com $r \leq \binom{n+d-1}{n-1}$. Definimos:

1. Se I satisfaz uma, e consequentemente todas as condições do Teorema 1.1.10, dizemos que I (ou I^{-1}) define um **sistema de Togliatti.**

2. I é um sistema de Togliatti **monomial** de I é gerado por monômios;

3. I é um sistema de Togliatti **suave** se a variedade é suave;

4. I é um sistema de Togliatti **minimal** monomial se I é gerado por monômios $m_1, \cdots, m_r$ e se não existe subconjunto próprio $m_{i_1}, \cdots, m_{i_{r-1}}$ que define um sistema de Togliatti.

Exemplo 1.1.12. Como vimos no Exemplo 0.2.3, o ideal

$$I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$$

falha WLP em grau 2.

Além disso, como vimos no Exemplo 0.2.13,

$$I^{-1} = (x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2),$$

e pelo Exemplo 1.1.9, a variedade $\mathcal{X} = X_{2,(I^{-1})_3}$ satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2. Assim, I define um sistema de Togliatti de cúbicas. Este é o exemplo conhecido como *Exemplo de Togliatti.* O termo "sistema de Togliatti" é atribuído como uma forma de homenagear o matemático Eugenio Togliatti, que foi o pioneiro a estudar essas relações a partir do ideal do exemplo acima.

Exemplo 1.1.13 ([29], Teorema 3.1)**.** Sejam $d = 2k+1$, onde k é um inteiro positivo, e $n = 2$. Sejam também $L_1, \cdots, L_d$ formas lineares em 3 variáveis. Então, o ideal $I = (L_1^d, \cdots, L_d^d, L_1 \cdots L_d)$ gerado por $d+1$ formas lineares, falha WLP, uma vez que $L_1^d, \cdots, L_d^d, L_1 \cdots L_d$ tornam-se linearmente dependentes em uma reta de $\mathbb{P}^2$. Sendo assim, I define um sistema de Togliatti de grau d.

Para o caso $d = 5$, considere as formas lineares

$$\begin{aligned}
L_1 &= (x_0 + x_1 + x_2) \\
L_2 &= (x_0 + x_1 - x_2) \\
L_3 &= (x_0 - x_1 - x_2) \\
L_4 &= (-x_0 - x_1 + x_2) \\
L_5 &= (x_0 - x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

e o ideal I gerado por $(L_1^d, \cdots, L_d^d, L_1 \cdots L_d)$:

$$\begin{aligned}
I = & ((x_0 + x_1 + x_2)^5, (x_0 + x_1 - x_2)^5, (x_0 - x_1 - x_2)^5, (-x_0 - x_1 + x_2)^5, (x_0 - x_1 + x_2)^5, \\
& (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1 - x_2)(x_0 - x_1 - x_2)(-x_0 - x_1 + x_2)(x_0 - x_1 + x_2)).
\end{aligned}$$

Com o auxílio do Macaulay2 [11], obtemos

$$\begin{aligned}
I^{-1} = & (x_0^2x_1 - x_0x_1^2 + x_0^2x_2 - x_1^2x_2 + x_0x_2^2 - x_1x_2^2, 42x_0x_1^2x_2 - 19x_1^3x_2 - 48x_0^2x_2^2 + 51x_1^2x_2^2 \\
& -42x_0x_2^3 + 19x_1x_2^3 - 3x_2^4, x_0^3x_2 - x_1^3x_2, -3x_0^2x_2^2 + 3x_1^2x_2^2 - x_0x_2^3 + x_1x_2^3, x_1^4 + 2x_1^3x_2 \\
& -2x_1x_2^3 - x_2^4, 14x_1^3x_2 - 16x_0^2x_2^2 - 14x_0x_1x_2^2 + 17x_1^2x_2^2 - 3x_1x_2^3 - x_2^4, x_0^4 + 2x_1^3x_2 \\
& +6x_0^2x_2^2 - 6x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 - x_2^4, x_2^6, x_1x_2^5, x_0x_2^5, x_0x_1x_2^4).
\end{aligned}$$

Pelo exemplo acima, podemos perceber que o cálculo de $(I^{-1})_d$ não é trivial em alguns casos. Entretanto, quando estamos no caso monomial o sistema linear $(I^{-1})_d$ pode ser obtido facilmente tomando-se os monômios de grau d que não estão em I, o que justifica nossa escolha por este tipo de ideais.

Exemplo 1.1.14. Considere o ideal $I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^2x_1^2x_2, x_0^2x_1x_2^2, x_0x_1^2x_2^2)$. Afirmamos que I é um sistema de Togliatti monomial minimal.

De fato, usando a Proposição 0.2.10 e o Lema 0.2.11, ao restringirmos I ao hiperplano $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e tomarmos $x_2 = -x_0 - x_1$, temos

$$\begin{aligned}
I &= (x_0^5, x_1^5, (-x_0 - x_1)^5, x_0^2x_1^2(-x_0 - x_1), x_0^2x_1(-x_0 - x_1)^2, x_0x_1^2(-x_0 - x_1)^2) \\
&= (\underbrace{x_0^5}_{A}, \underbrace{x_1^5}_{B}, \underbrace{-x_0^5 - 5x_0^4x_1 - 10x_0^3x_1^2 - 10x_0^2x_1^3 - 5x_0x_1^4 - x_1^5}_{C}, \underbrace{-x_0^2x_1 - x_0x_1^2}_{D}, \\
& \quad \underbrace{x_0^3x_1 + 2x_0^2x_1^2 + x_0x_1^3}_{E}, \underbrace{x_0^3x_1 + 2x_0^2x_1^2 + x_0x_1^3}_{F}).
\end{aligned}$$

Observe que

$$C = -A - B - 5(D + E + F),$$

assim, pelo Lema 0.2.11, como as formas lineares são linearmente dependentes, temos que I falha WLP. Logo, I é um sistema de Togliatti monomial. Mais ainda, I é um sistema de Togliatti minimal, uma vez que nenhum outro ideal contido em I forma um sistema de Togliatti, pois caso retiremos algum monômio I, e tomemos $x_2 = -x_0 - x_1$, não é possível obter uma combinação linear entre os monômios restantes. Por outro lado, observe que se considerarmos $J = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^2x_1^2x_2, x_0^2x_1x_2^2, x_0x_1^2x_2^2, x_0x_1x_2^3)$, que é essencialmente $J = I + x_0x_1x_2^3$, temos que J seria um sistema de Togliatti, assim como I. Por esse motivo, nos concentraremos nos sistemas de Togliatti minimais, onde a redundância da classificação é removida, pois como vimos pelo exemplo acima, se um ideal de grau d falha WLP, ao acrescentarmos monômios de grau d, o ideal continuará a falhar WLP.

Definição 1.1.15. Um sistema de Togliatti I de formas de grau d é dito **trivial** se existe uma forma F de grau $d-1$ tal que $(x_0F, \cdots, x_nF) \in I^{-1}$

Exemplo 1.1.16. Seja F uma forma homogênea de grau $d-1$. Uma vez que $x_0F, \cdots, x_nF$ se torna linearmente dependente no hiperplano $x_0 + \cdots + x_n = 0$, usando a Proposição 0.2.10, temos que qualquer ideal artiniano da forma

$$I = (x_0, \cdots, x_n)F + (F_1, \cdots, F_s),$$

onde cada F_i é uma forma de grau d, para $1 \leq i \leq s$, é um sistema de Togliatti e, em particular, é trivial.

1.2 Variedades Tóricas

As variedades tóricas são objetos algébricos-geométricos que estabelecem uma conexão entre teoria dos politopos, álgebra linear, álgebra homológica e geometria algébrica. Essas variedades fornecem ferramentas para o estudo soluções de sistemas de equações polinomiais e estão intimamente relacionadas à teoria dos toros algébricos. A teoria das variedades tóricas se originou na interface entre geometria algébrica e geometria convexa. Com elas, conseguimos classificar uma ampla classe de espaços algébricos, sendo este o nosso objetivo. Neste capítulo, estamos interessados em entender suas relações com os anéis de polinômios e quais informações que estas ferramentas nos dão com respeito às variedades algébricas.

Considere $V = \{w_0, \cdots, w_t\}$ como sendo o conjunto de pontos distintos em $\mathbb{Z}_+^n$ com $w_0 = \overrightarrow{0}$. Podemos associar a V o mapa monomial afim

$$\begin{aligned} v : \mathbb{C}^t &\to \mathbb{C}^{t+1}, \\ x &\mapsto (1, m_1, \cdots, m_t) \end{aligned}$$

onde m_i representa o monômio $x_1^{w_{i_1}} x_2^{w_{i_2}} \cdots x_n^{w_{i_n}}$.

Isto é, sendo $\{m_0, \cdots, m_N\} \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um conjunto de monômios de grau d, podemos associá-los a uma $(N+1)$-upla de inteiros não negativos:

$$m_i = x_0^{w_0^i} \cdots x_n^{w_n^i} \Rightarrow m_i \leftrightarrow w^{(i)} := (w_0^i, \cdots, w_n^i) \in \mathbb{Z}^{N+1}.$$

Sendo assim, $A := \left\{w^{(0)}, \cdots, w^{(N)}\right\}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^{N+1}$. Para qualquer $x = (x_0, \cdots, x_n) \in (\mathbb{C}^\star)^{n+1}$ e $w = (w_0, \cdots, w_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$, definimos $x^w := x_0^{w_0} \cdots x_n^{w_n}$.

Agora, defina

$$X_A^0 := \left\{\left(x^{w^{(0)}} : \cdots : x^{w^{(N)}}\right) \mid x = (x_0, \cdots, x_n) \in (\mathbb{C}^\star)^{n+1}\right\} \subset \mathbb{P}^N.$$

O seu fecho define uma variedade projetiva $X_A := \overline{X_A^0}$. Tal variedade, a partir de agora, será nosso principal objeto de estudo.

Definição 1.2.1. Dado um par (X, α), dizemos que ele define uma **variedade tórica** se satisfaz as condições

(a) X é uma variedade quase projetiva;

(b) $\alpha : (\mathbb{C}^{\star})^n \times X \to X$ é uma ação com uma órbita densa, ou seja, existe $x \in X$ tal que

$$\overline{O_\alpha(x)} = \overline{\{a \cdot x \mid a \in (\mathbb{C}^{\star})^n\}} = X.$$

Sendo assim, X_A^0 como definido anteriormente, é uma variedade tórica.

Proposição 1.2.2. Seja $A = \left\{w^{(0)}, \cdots, w^{(N)}\right\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^{n+1}$. Então X_A^0 é uma variedade tórica.

Demonstração: Seja

$$\begin{array}{rcl} \alpha : (\mathbb{C}^{\star})^{n+1} \times \mathbb{P}^N & \to & \mathbb{P}^N \\ x \cdot (z_0 : \cdots : z_N) & \mapsto & (x^{w^{(0)}} z_0 : \cdots : x^{w^{(N)}} z_N t). \end{array}$$

Por definição $X_A^0 = \left\{\left(x^{\omega^{(0)}} : \cdots : x^{w^{(N)}}\right) \mid x \in (^{\star})^{n+1}\right\} = O_\alpha((1 : \cdots : 1))$. Então $X_A^0 = O_\alpha((1 : \cdots : 1))$ é uma variedade tórica junto com $\alpha : (\mathbb{C}^{\star})^{n+1} \times X_A^0 \to X_A^0$.

■

Por abuso de notação, ao falar de variedades tóricas do tipo X_A, omitiremos a ação α.

Na primeira seção do artigo de Perkison [24], são introduzidas as inflexões de mapas afins monomiais. O objetivo central é demonstrar que as dimensões dos espaços osculatórios do mapa v, conforme definido, são determinadas pela função de Hilbert do conjunto de pontos do reticulado. Realizaremos uma breve discussão sobre essas inflexões para melhor compreensão de como isso pode ser aplicado no estudo das equações de Laplace. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [10] e [24].

Dado $s \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, denotaremos a s-ésima derivada parcial de v da seguinte maneira:

$$v_s := \frac{1}{s!} \frac{\partial^{|s|} v}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_n^{s_n}},$$

onde $|s| = \sum_{i=1}^n s_i$ e $s! = s_1! \cdots s_n!$.

Para estudar as inflexões de v, defina para cada inteiro $k \geq 0$ a matriz de k-jatos de v

$$J_k v := (v_s)_{0 \leq |s| \leq k}$$

cujas linhas são as derivadas parciais de v até a ordem k, escritas em qualquer ordem.

Neste contexto, podemos entender o k-ésimo espaço osculatório de v no ponto $p \in \mathbb{C}^n$, como sendo o espaço gerado pelos vetores $v_s(p)$ para $1 \leq |a| \leq k$, transladados para $v(p)$. Sendo assim, para $k = 1$, o espaço osculatório é o espaço tangente para v em p, e $k+1-$ésimo espaço osculatório é determinado pelos primeiros movimentos infinitesimais do

$k-$ésimo espaço osculatório. Como $\overrightarrow{0}$ está incluído em V, segue-se que v é linearmente independente de v_a com $|s| > 0$. Portanto,

$$\operatorname{rk}(J_k v(p)) = 1 + \dim(\operatorname{Osc}_k v(p)).$$

Se o posto for menor que $\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$, dizemos que p é um **ponto de inflexão**.

Uma consequência que pode ser visto em [24] (Proposição 1.1) é que o posto genérico de $J_k v$ é dado por

$$\operatorname{rk}(J_k v(1, \cdots, 1)) = h_V(k), \tag{1.1}$$

onde H_V é a função de Hilbert afim de V.

Em outras palavras, $H_V(k)$ representa a codimensão no espaço linear dos polinômios em n variáveis e de grau no máximo k daqueles polinômios que são satisfeitos pelos pontos do reticulado $V \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Como estamos interessados no estudo do defeito osculatório de variedades, visando obter uma equação de Laplace, o resultado a seguir desempenhará um papel fundamental nesse objetivo.

Proposição 1.2.3. Seja $A \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ um subconjunto finito, e seja $X_A \subset \mathbb{P}^n$ a variedade tórica associada a A. Então, $\Psi : \mathbb{P}^n \to X_A$ tal que $(t_0 : \cdots : t_n) \mapsto (t^{m_0} : \cdots : t^{m_N})$ é uma parametrização onde

(a) $m_i = (m_{i0}, \cdots, m_{in}) \in A$;

(b) $t = (t_0, \cdots, t_n) \Rightarrow t^{m_i} = t_0^{m_{i0}} \cdots t_n^{m_{in}}$

Além disso, se houver uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$ que contém todos os pontos de A, então X_A satisfaz uma equação de Laplace de ordem d.

Demonstração: Dadas $l = (l_0, \cdots, l_n)$ e $a = (s_0, \cdots, s_n)$ duas $(n+1)$-uplas de inteiros não negativos, considere:

$$\frac{\partial t^l}{\partial t^s} = \frac{l}{s!} \frac{\partial^{|s|} t^l}{\partial t^{s_0} \cdots \partial t^{s_n}} = \begin{pmatrix} l_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} l_n \\ s_n \end{pmatrix} t^{l-s}.$$

Podemos organizar todas as derivadas parciais de Ψ em um ponto geral $\bar{t}$ na matriz como se segue:

$$H_d(\Psi)(\bar{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^d t^{m_0}}{\partial t_0^d}(\bar{t}) & \frac{\partial^d t^{m_1}}{\partial t_0^d}(\bar{t}) & \cdots & \frac{\partial^d t^{m_n}}{\partial t_0^d}(\bar{t}) \\ \frac{\partial^d t^{m_0}}{\partial t_0^{d-1} t_1}(\bar{t}) & \frac{\partial^d t^{m_1}}{\partial t_0^{d-1} t_1}(\bar{t}) & \cdots & \frac{\partial^d t^{m_n}}{\partial t_0^{d-1} t_1}(\bar{t}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^d t^{m_0}}{\partial t^s}(\bar{t}) & \frac{\partial^d t^{m_1}}{\partial t^s}(\bar{t}) & \cdots & \frac{\partial^d t^{m_n}}{\partial t^s}(\bar{t}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^d t^{m_0}}{\partial t_n^d}(\bar{t}) & \frac{\partial^d t^{m_1}}{\partial t_n^d}(\bar{t}) & \cdots & \frac{\partial^d t^{m_n}}{\partial t_n^d}(\bar{t}) \end{pmatrix}$$

Observe que $\dim_\kappa \mathbb{P}\left(T^{(d)}_{\Psi(\bar{t})} X_A\right) = \operatorname{rk} H(\Psi)(\bar{t}) - 1$. Então, X_A satisfaz uma equação de Laplace de ordem d se, e somente se, para $\bar{t} \in \mathbb{P}^n$ geral, houver uma dependência linear entre todas as colunas de $H(\Psi)(\bar{t})$. Como $\bar{t}$ é geral, podemos assumir $\bar{t} = (1 : \cdots : 1)$, e usando a expressão de derivada parcial acima, cada coluna de $H_d(\Psi)(1:\cdots:1)$ pode ser escrita como

$$\left[\begin{pmatrix} m_{i0} \\ s_0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m_{in} \\ s_n \end{pmatrix}\right]_{s\in\mathbb{Z}^{n+1}}$$

tal que $|s| = d$.

Portanto, uma combinação linear nula dessas colunas corresponde a uma hipersuperfície de grau d passando por todos os pontos de A. ■

Sejam $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal monomial artiniano gerado por monômios de grau d e I^{-1} o seu sistema inverso. Denotamos por Δ_n o **simplexo padrão** n-dimensional no reticulado $\mathbb{Z}^{n+1}$, consideramos $d\Delta_n$, e definimos o politopo P_I como o **envoltório convexo** do subconjunto finito $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ correspondente aos monômios de grau d em I^{-1}, definimos também a sub-reticulação $\operatorname{Aff}_Z(A_I)$ em $\mathbb{Z}^{n+1}$ gerada por A_I da seguinte forma:

$$\operatorname{Aff}_Z(A_I) := \left\{ \sum_{x\in A_I} n_x \cdot x \ ; \ n_x \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{x\in A_I} n_x = 1 \right\}.$$

Vejamos isto ilustrando no exemplo de Togliatti.

Exemplo 1.2.4. Considere o sistema de Togliatti $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$.

Como vimos no Exemplo 0.2.13,

$$I^{-1} = (x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2)$$

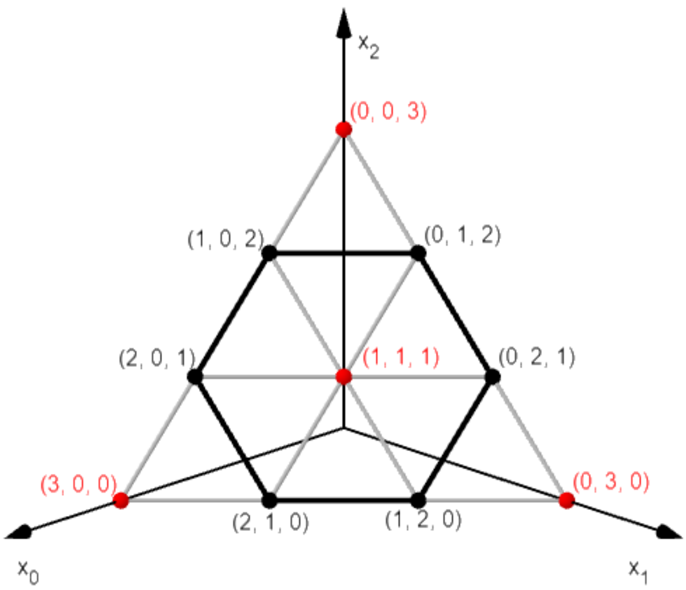
é o seu sistema inverso de Macaulay. Sendo assim, temos que $A_I \subset \mathbb{Z}^3$ é dado por

$$A_I = \{(2,1,0), (2,0,1), (1,2,0)(1,0,2), (0,2,1), (0,1,2)\}.$$

e, assim,

$$3\triangle_2 = A_I \cup \{(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (1,1,1)\}.$$

Pelas informações acima, construímos P_I, o politopo associado ao sistema de Togliatti I:



Enunciaremos alguns resultados que serão úteis no estudo dos sistemas de Togliatti.

Proposição 1.2.5 (Critério de minimalidade)**.** Seja $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal monomial artiniano gerado por r monômios de grau d. Suponha $r \leq \binom{n+d-1}{n-1}$. Então, I é um sistema de Togliatti se, e somente se, existe uma hipersuperfície de grau $d-1$ contendo $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$. Além disso, I é um sistema Togliatti minimal se, e somente se, qualquer tal hipersuperfície F não contém nenhum ponto integral de $d\Delta_n \backslash A_I$, exceto possivelmente alguns dos vértices de $d\Delta_n$.

Demonstração: Este resultado segue como uma junção do Teorema 1.1.10 e da Proposição 1.1 de [24], cujo resultado está descrito em 1.1. ■

Exemplo 1.2.6. Veremos que o ideal artiniano $I = (x_0, x_1)^3 + (x_2, x_3)^3 \subset \kappa[x_0, x_1, x_2, x_3]$ é um sistema de Togliatti monomial minimal usando a proposição a cima. A partir de I, definimos o sistema inverso de Macaulay

$$I^{-1} = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_2^2, x_0x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2).$$

Logo

$$\begin{aligned} A_I = & \{(2,0,1,0),(1,0,2,0),(2,0,0,1),(1,0,0,2),(0,2,1,0),(0,1,2,0), \\ & (0,2,0,1),(0,1,0,2),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Observe que, existe uma única hiperquádrica contendo todos os pontos de A_I e nenhum ponto integral de $3\Delta_3 \backslash A_I$ a saber. De fato, seja

$$\mathcal{Q} = a_1x_0^2 + a_2x_0x_1 + a_3x_0x_2 + a_4x_0x_3 + a_5x_1^2 + a_6x_1x_2 + a_7x_1x_3 + a_8x_2^3 + a_9x_2x_3 + a_{10}x_3^2.$$

Como $\mathcal{Q}$ passa pelos pontos de A_I, temos

$$\begin{aligned} 4a_1 + 2a_3 + a_8 &= 0 \\ 4a_1 + 2a_4 + a_{10} &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + a_8 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + a_{10} &= 0 \\ a_1 + 2a_3 + 4a_8 &= 0 \\ a_1 + a_3 + a_4 + a_8 + a_9 + a_{10} &= 0 \\ a_1 + 2a_4 + 4a_{10} &= 0 \\ 4a_5 + 2a_6 + a_8 &= 0 \\ 4a_5 + 2a_7 + a_{10} &= 0 \\ a_6 + 2a_6 + 4a_8 &= 0 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} &= 0 \\ a_5 + 2a_7 + 4a_{10} &= 0 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{cases} a_1 = a_5 = a_8 = a_{10} = 2 \\ a_2 = a_2 = a_9 = 4 \\ a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = -5 \end{cases}$$

que nos dá

$$\mathcal{Q}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 4\left(x_0x_1 + x_2x_3\right) - 5\left(x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3\right).$$

Proposição 1.2.7 (Critério de suavidade)**.** Sejam $I \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um ideal monomial artiniano gerado por monômios de grau d e $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ o conjunto de pontos integrais correspondentes aos monômios em $(I^{-1})_d$, S_I o semigrupo gerado por A_I, 0 e P_I o envoltório convexo de A_I e X_{A_I} a variedade tórica projetiva associada ao politopo P_I. Temos que X_{A_I} é suave se e somente se, para qualquer face não vazia Γ de P_I, as seguintes condições são satisfeitas:

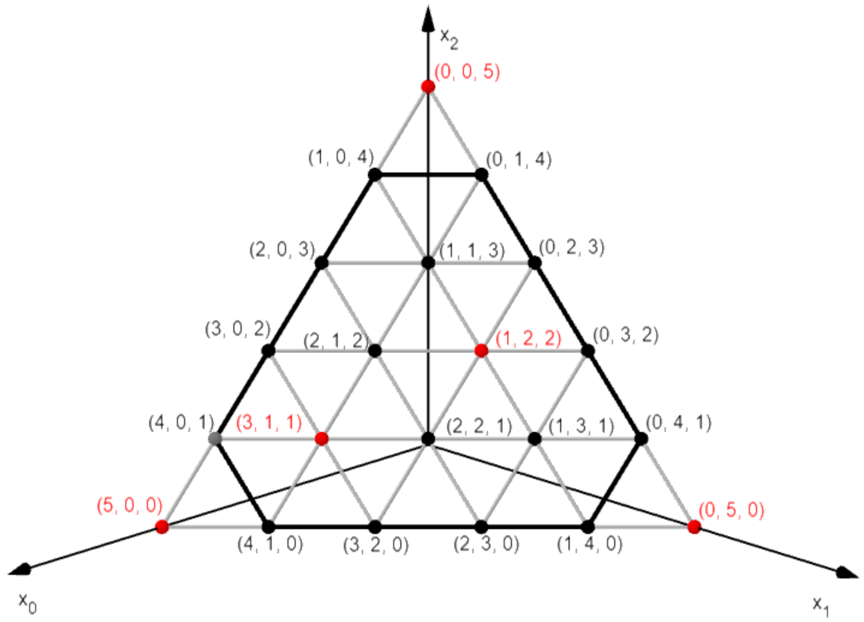
(a) O semigrupo S_I/Γ é isomorfo a $\mathbb{Z}_+^m$ com $m = \dim(P_I) - \dim \Gamma + 1$;

(b) O reticulado formado por $\mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ e $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}(A_I \cap \Gamma)$ coincidem.

Demonstração: Veja [[10], Corolário 5.3.2]. ■

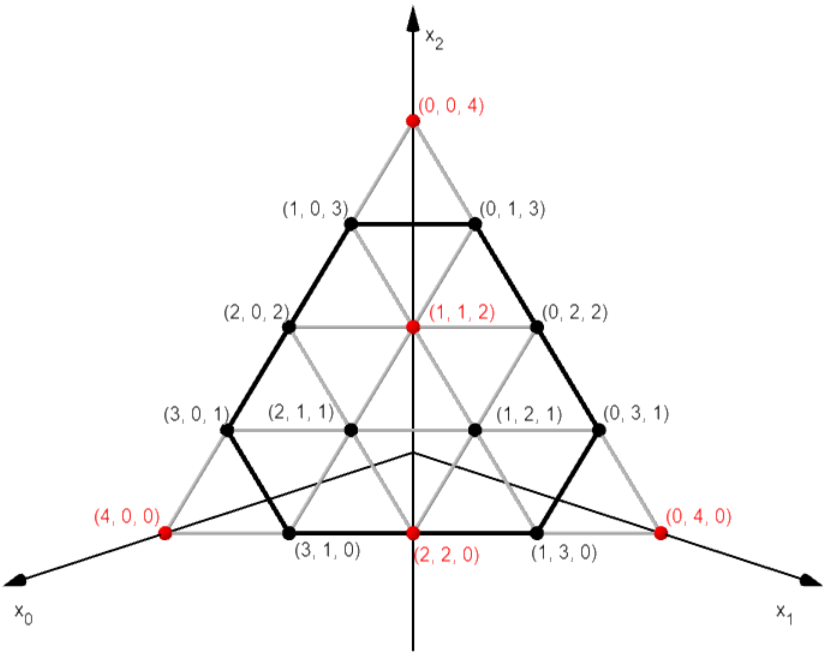
As condições da proposição anterior podem ser interpretadas da seguinte maneira. Primeiramente, vamos considerar cada um dos vértices de P_I (um de cada vez) como a origem do sistema de coordenadas e em seguida, para cada aresta do politopo que se inicia no vértice, escolhemos o primeiro ponto naquela direção que possui coordenadas inteiras. Se fizermos isso para todas as arestas a partir deste vértice, a condição (a) é satisfeita se, e somente se, os pontos resultantes formarem uma base para $\mathbb{Z}^m$. Já a condição (b) equivale a exigir que cada ponto de $\mathbb{Z}^{n+1}$ que esteja em uma aresta do polígono também seja um ponto de A_I. Vejamos, a seguir, dois exemplos que ilustram a proposição anterior.

Exemplo 1.2.8. Considere o sistema de Togliatti $I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3x_1x_2, x_0x_1^2x_2^2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$, cujo politopo pode ser visto abaixo.



Segue que $m = \dim(P_I) - \dim \Gamma + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$ e, a partir de qualquer um dos vértices de P_I, temos uma base de $\mathbb{Z}^2$ e a condição (a) é satisfeita, por exemplo. Além disso, note que como todos os pontos de coordenadas inteiras das arestas de P_I estão em A_I a condição (b) também é satisfeita. Logo, o sistema de Togliatti I é suave.

Agora considere o sistema de Togliatti $J = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_1^2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$, cujo politopo pode ser visto abaixo:



Novamente temos $m = 2$, mas como o ponto $(2, 2, 0)$ pertence a uma das arestas de P_J, mas não pertence à A_J segue que a condição (b) não é satisfeita. Além disso, pelo mesmo motivo, a partir do vértice $(3, 1, 0)$ não é possível formar uma base para $\mathbb{Z}^2$.

Capítulo 2

Classificação dos sistemas de Togliatti

O objetivo principal deste trabalho é a classificação dos sistemas de Togliatti minimais monomiais. Neste capítulo, inicialmente, abordaremos a classificação de quádricas e cúbicas, para depois estendermos nossa atenção à classificação a partir de quárticas.

Para um sistema de Togliatti minimal monomial I com grau $d \geq 4$, estudaremos sua classificação a partir do número de geradores minimais. Especificamente, nos concentraremos no intervalo admissível $2n+1 \leq \mu(I) \leq \binom{d+n-1}{n-1}$, onde $\mu(I)$ representa o número mínimo de geradores de I. Vamos explorar e classificar a presença ou ausência de sistemas de Togliatti nesse contexto.

Queremos, classificar os sistemas de Togliatti definidos na Definição 1.1.11 a partir do número de geradores $\mu(I)$ de um sistema de Togliatti I. Para tal classificação, estamos interessados no grau dos monômios e na quantidade de variáveis do anel de polinômios em que I está. Observe que em sistemas de Togliatti, pelo Teorema 1.1.10, sempre trabalharemos com ideais artinianos, assim, $(x_0^d, \cdots, x_n^d) \subset I$.

Fixemos as notações que serão utilizadas neste capítulo.

Ao longo deste capítulo, utilizaremos o anel de polinômios $R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ em $n+1$ variáveis e todo sistema de Togliatti I será monomial minimal.

Denotaremos por $\mathcal{T}(n,d)$ o conjunto de todos os sistemas de Togliatti monomiais minimais $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau d. Analogamente, denotaremos $\mathcal{T}^s(n,d)$ o conjunto de todos os sistemas de Togliatti monomiais minimais suaves. Não é difícil perceber que $\mathcal{T}^s(n,d) \subset \mathcal{T}(n,d)$.

A partir disto, definimos:

$$\begin{aligned} \mu(n,d) &:= \min\{\mu(I); I \in \mathcal{T}(n,d)\}; \\ \mu^s(n,d) &:= \min\{\mu(I); I \in \mathcal{T}^s(n,d)\}; \\ \rho(n,d) &:= \max\{\mu(I); I \in \mathcal{T}(n,d)\}; \\ \rho^s(n,d) &:= \max\{\mu(I); I \in \mathcal{T}^s(n,d)\}. \end{aligned}$$

Queremos obter cotas para tais quantidades de geradores. Para isto, observemos inicialmente que todos ideais artinianos monomiais $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ gerados por formas de grau $d \geq 2$ que contém x_i^d para $i = 0, \cdots, n$ e os ideais $(x_0^d, \cdots, x_n^d)$ satisfazem WLP. Desse modo, por [19], vale que

$$n+2 \leq \mu(n,d) \leq \mu^s(n,d) \leq \rho^s(n,d) \leq \rho(n,d) \leq \binom{n+d-1}{n-1}.$$

No intuito de abordar a classificação de sistemas de Togliatti, começaremos com $d = 2$ e $d = 3$, uma vez que para graus mais baixos podemos perceber com mais precisão o que cada propriedade nos diz a respeito de um ideal que forma um sistema de Togliatti ou não.

2.1 Quádricas

Seja $I \in \mathcal{T}^s(n, 2)$ e $n \geq 2$. Pela Proposição 2.8 de [21], existe uma bipartição de $n+1 : n+1 = a_1 + a_2$, com $n-1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 2$, tal que, a menos de mudança de coordenadas,

$$I = (x_0, \cdots, x_{a_1-1})^2 + (x_{a_1}, \cdots, x_n)^2 .$$

Corolário 2.1.1. Nas mesmas condições da proposição acima e as mesmas notações, vale que:

$$\mu(I) = \left(\binom{a_1}{2} + a_1\right) + \left(\binom{a_2}{2} + a_2\right).$$

Demonstração: Vamos observar, de início, que como estamos em quádricas, desejamos que todos os monômios do ideal tenha grau 2. Sendo assim, para compor o ideal, podemos tomar todas as variáveis duas a duas. Observe também que os monômios da forma x_i^2 também fazem parte do ideal, uma vez que o mesmo é artiniano.

Como a primeira parte do ideal é

$$\overline{I} = (x_0, \cdots, x_{a-1})^2,$$

podemos calcular seu "tamanho" pelo argumento acima, isto é

$$\mu(\overline{I}) = \left(\binom{a_1}{2} + a_1\right).$$

O mesmo vale para a segunda parte de I, alterando apenas a_1 para a_2. Portanto, $\mu(I) = \left(\binom{a_1}{2} + a_1\right) + \left(\binom{a_2}{2} + a_2\right)$.

■

A partir disto, conseguimos nossa primeira caracterização de quádricas.

Proposição 2.1.2. Sejam $n = 2\lambda$ ou $n = 2\lambda + 1$ e $n + 1 = a_1 + a_2$ uma bipartição tal que $n - 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 2$, onde $a_1 = \lambda + 1$. Então

$$I = (x_0, \cdots, x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1}, \cdots, x_n)^2$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal suave.

Demonstração: Considere $I = (x_0, \cdots, x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1}, \cdots, x_n)^2$. Podemos expressar x_n como $x_n = x_0 + \cdots + x_{n-1}$. Sendo assim, I pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} I &= (x_0, \cdots, x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1}, \cdots, x_{n-1})^2 \\ &+ (x_0 + \cdots + x_{n-1})(x_{\lambda+1}, \cdots, x_{n-1}) + (x_0 + \cdots + x_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Isso nos permite afirmar que em um hiperplano geral $H \subset \mathbb{P}^n$, as formas homogêneas são κ-linearmente dependentes, logo I falha WLP em grau 1 e, portanto, é um sistema Togliatti. Além disso, I é um sistema Togliatti monomial suave e minimal em razão das Proposições 1.2.5 e 1.2.7.

■

Corolário 2.1.3 ([19], Observação 3.3)**.** Para $n \geq 3$, vale que

$$\mu^s(n,2) = \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \text{se } n = 2\lambda \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \text{se } n = 2\lambda + 1. \end{cases}$$

Demonstração: Para mostrar este fato, vamos usar o Corolário 2.1.1 e a Proposição 2.1.2. Sendo assim, desejamos, de início, encontrar a_1 e a_2 de modo de formem a bipartição $n+1 = a_1 + a_2$ e $n - 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 2$.

Dividiremos em 2 casos.

$\boxed{\text{Caso 1: } n = 2\lambda}$

Se $n = 2\lambda$, usando a proposição anterior, temos que, como $a_1 = \lambda + 1$, então $a_2 = \lambda$. Pelo corolário 2.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \left(\binom{a_1}{2} + a_1\right) + \left(\binom{a_2}{2} + a_2\right) \\ &= \left(\binom{\lambda+1}{2} + \lambda + 1\right) + \left(\binom{\lambda}{2} + \lambda\right) \\ &= \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} + \lambda + 1 + \frac{\lambda^2\lambda}{2} + \lambda \\ &= \frac{\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - \lambda}{2} + 2\lambda + 1 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1, \end{aligned}$$

como queríamos provar.

$\boxed{\text{Caso 2: } n = 2\lambda + 1}$

Neste caso, teremos $a_2 = \lambda + 1$. Assim

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \left(\binom{a_1}{2} + a_1\right) + \left(\binom{a_2}{2} + a_2\right) \\ &= \left(\binom{\lambda+1}{2} + \lambda + 1\right) + \left(\binom{\lambda+1}{2} + \lambda + 1\right) \\ &= 2\left(\binom{\lambda+1}{2} + \lambda + 1\right) \\ &= 2\frac{\lambda^2 + \lambda}{2} + \lambda + 1 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

■

O Corolário 2.1.1 e a Proposição 2.1.2, nos auxiliam a identificar o sistema de Togliatti monomial minimal suave procurado. Uma vez que, dependendo de n, existem diversas possibilidades para a_1 e a_2 que satisfazem as condições impostas.

Exemplo 2.1.4. Seja $n = 14$. Então, $\lambda = 7$. Combinando os Corolários 2.1.1 e 2.1.3 e a Proposição 2.1.2, obtemos que $\mu^s(14,2) = 64$. Vamos agora verificar agora I.

Observemos que $a_1 = 8$ e $a_2 = 7$, de fato,

$$\mu(I) = \left(\binom{8}{2} + 8\right) + \left(\binom{7}{2} + 7\right) = 64.$$

Assim, podemos identificar nosso sistema de Togliatti

$$I = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^2 + (x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})^2.$$

Exemplo 2.1.5. Se $n = 19$, então $\lambda = 9$ e $\mu^s = 110$. Assim, $a_1 = 10$ e $a_2 = 10$. Logo,

$$\mu(I) = 2\left(\binom{10}{2} + 10\right) = 110$$

e, de fato, a partição é dada por $a_1 = 10$ e $a_2 = 10$. Obtemos, portanto o sistema de Togliatti minimal monomial suave

$$I = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)^2 + (x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19})^2.$$

Corolário 2.1.6 ([19], Observação 3.3). Para $n \geq 3$, temos $\rho^s(n,2) = \binom{n}{2} + 3$.

Demonstração: Neste caso, consideramos $a_1 = n - 1$ e $a_2 = 2$. Pelo Corolário 2.1.1,

$$\begin{aligned}
\mu(I) &= \left(\binom{n-1}{2} + n - 1\right) + \left(\binom{2}{2} + 2\right) \\
&= \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1\right) + 3 \\
&= \frac{n^2 - n}{2} + 3 \\
&= \binom{n}{2} + 3.
\end{aligned}$$

■

No caso $n = 3$, temos

$$5 = n + 2 < \mu^s(n,2) = \rho^s(n,2) = \binom{n+1}{2} = 6.$$

Já para $n = 4$,

$$6 = n + 2 < \mu^s(n,2) < \rho^s(n,2) = \binom{n+1}{2} = 10.$$

Para $n > 4$

$$n + 2 < \mu^s(n,2) < \rho^s(n,2) < \binom{n+1}{2}$$

Além disso, como $\mu(n,2) \geq 2n + 1$ e $I = (x_0^2, x_1^2 \cdots, x_n^2, x_0x_1, x_0x_2, \cdots, x_0x_n)$ falha WLP em grau 1, temos que

$$\mu(n,2) = 2n + 1.$$

2.2 Cúbicas

Os sistemas de Togliatti monomiais cúbicos são um exemplo específico de sistemas polinomiais que podem ser estudados usando variedades tórica e a partir desse estudo, poderemos compreender as propriedades geométricas de tais sistemas.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{n,d} :=\mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \mid$ o sistema linear de hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$ e

$$n_d = \dim(\mathcal{L}_{n,d}) = \binom{n+d}{n} - 1$$

a dimensão projetiva.

Definição 2.2.1. Dizemos que um subespaço $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{n,d}$ é um **subespaço linear monomial** se pode ser gerado por monômios.

Exemplo 2.2.2 (Simplexo truncado). Considere o sistema linear de cúbicas:

$$\mathcal{L} = \ \mid \{x_i^2 x_j\}_{0 \leq i \neq j \leq n} \mid \ \subset \mathcal{L}_{n,3}.$$

Observemos que $\dim \mathcal{L} = n(n+1) - 1$. Assim, consideremos o mapa racional associado a $\mathcal{L}$

$$\varphi_{\mathcal{L}} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n(n+1)-1}$$

ou seja, há $n+1$ pontos fundamentais.

Definimos também,

$$X := \overline{\mathrm{Im}(\varphi_{\mathcal{L}})} \subset \mathbb{P}^{n(n+1)-1}$$

como sendo a variedade da projeção de Veronese $\mathrm{V}(n,3)$ para o subespaço linear

$$\mathcal{L}' := \ \mid \langle x_0^3, \cdots, x_n^3, \{x_i x_j x_k\}_{0 \leq i < j < k \leq n} \} \rangle \mid \subset \mathbb{P}^{\binom{n+3}{3}-1}.$$

Afirmamos que X satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2 e é suave.

Pelo Teorema 1.1.10, sabemos que X satisfaz uma equação de Laplace, se e só se, o ideal

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3, \{x_i x_j x_k\}_{0 \leq i < j < k \leq n} \}) \subset R = \kappa[x_0, \cdots, x_n]$$

falha WLP em grau 2. Para isso, podemos usar a Proposição 1.2.6 e o Teorema 1.1.10, uma vez que todos os pontos de vértice em Z^{n+1}, correspondentes à base monomial de $\mathcal{L}$, estão contidos na quádrica com equação

$$2\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) - 5\left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right) = 0.$$

Também podemos utilizar o Lema 0.2.11. Por ele, é suficiente notarmos que a restrição de cúbicas $x_0^3, \cdots, x_n^3, \{x_i x_j x_k\}_{0 \leq i < j < k \leq n} \}$ para um hiperplano geral tornam-se κ-linearmente dependentes e, pela Proposição 0.2.10, verificamos que eles se tornam κ-linearmente dependentes quando restringimos ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Sendo Δ_n o simplexo padrão n-dimensional no reticulado $\mathbb{Z}^{n+1}$, consideramos $3\Delta_n$, observe que o envoltório convexo P_I de $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ é obtido removendo todos os vértices, logo, P_I é um simplexo truncado e, portanto, pela Proposição 1.2.7, a variedade X é suave.

Para o caso $n = 2$, temos o Exemplo de Togliatti 1.2.4. Em [16], G. Ilardi conjecturou que o exemplo do simplexo truncado era o único sistema monomial de Togliatti suave cuja dimensão é $n(n+1)-1$. No entanto, em [20], E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e G. Ottaviani, mostraram que tal conjectura é falsa.

A seguir, faremos para $n = 3$.

Exemplo 2.2.3. Seja

$$\mathcal{M} = \{x_i^2 x_j\}_{0\leq i\neq j\leq n;\{i,j\}\neq\{0,1\}} \cup \{x_0x_1x_i\}_{2\leq i\leq n} \subset \mathcal{L}_{n,3}$$

um sistema linear de cúbicas.

Por argumentos combinatórios, temos que $|\mathcal{M}| = n^2+2n-3$. Assim, consideramos $\varphi_{\mathcal{M}} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n-4}$ o mapa racional associado a $\mathcal{M}$. Considere $X := \overline{\mathrm{Im}(\varphi_{\mathcal{M}})} \subset \mathbb{P}^{n^2+2n-4}$ é a projeção da variedade de Veronese $V(n,3)$ para o subespaço linear

$$\mathcal{M}' := \langle x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, \{x_ix_jx_k\}_{0\leq i<j<k\leq n,(i,j)\neq(0,1)}\rangle \subset \mathbb{P}^{\binom{n+3}{3}-1}.$$

Temos que, analogamente ao exemplo anterior, X satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2.

Observe que, para $n = 3$, obtemos um contraexemplo para a conjectura de G. Ilardi, pois, $n^2+2n-4 = n^2+n-1$, se e só se, $n = 3$.

Exemplo 2.2.4. Seja

$$\mathcal{N} = \langle x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_2^2x_3, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3\rangle$$

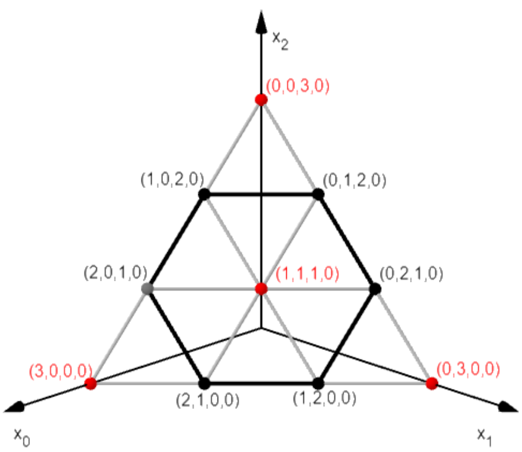
o sistema linear 12-dimensional de cúbicas.

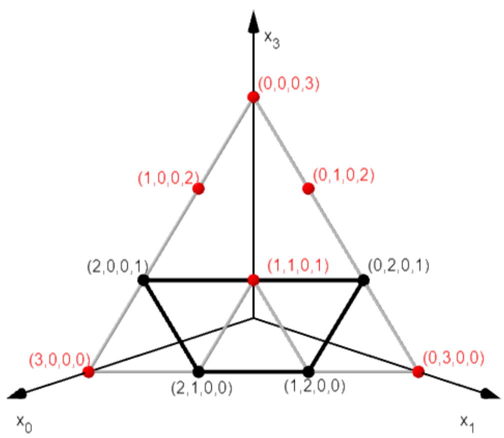
Considere $\varphi_{\mathcal{N}} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^{11}$ o mapa racional associado a $\mathcal{N}$. O fecho da imagem $X := \overline{\mathrm{Im}(\varphi_{\mathcal{N}})} \subset \mathbb{P}^{11}$ é a projeção para o subespaço linear

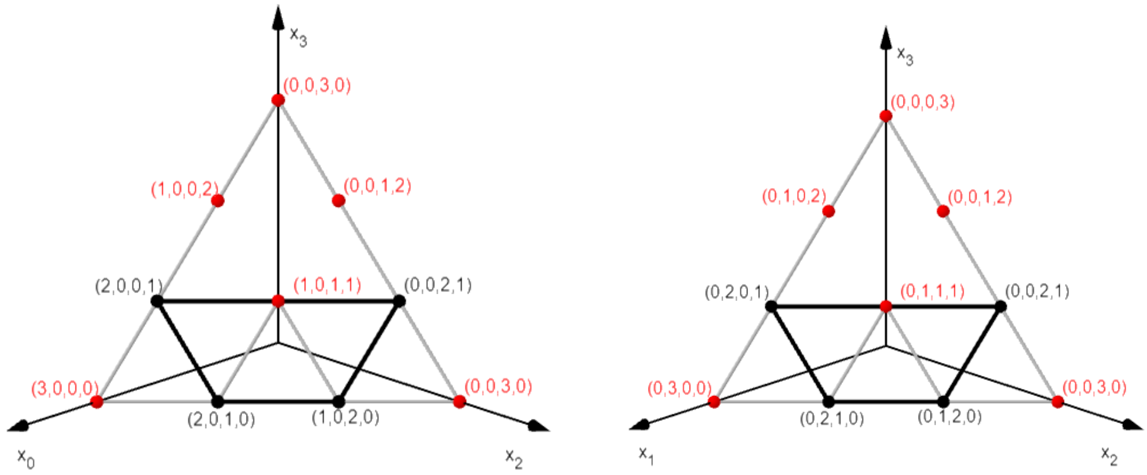
$$\mathcal{N}' = \langle x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_0x_3^2, x_1x_3^2, x_2x_3^2, x_0x_1x_3\rangle$$

da variedade de Veronese $V(3,3) \subset \mathbb{P}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}^{19}$.

Pelos politopos associados abaixo, veremos que há singularidades em $\langle(0,0,0,1)\rangle$ e, com isso, X não é suave.







Além disso, X satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2. De fato, como $x_0^3, x_1^3, x_2^3, (x_0 + x_1 + x_2)^3, x_0x_1x_2, x_0(x_0 + x_1 + x_2)^2, x_1(x_0 + x_1 + x_2)^2, x_2(x_0 + x_1 + x_2)^2$ são linearmente dependentes, temos, pelo Lema 0.2.11, que o ideal

$$I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_0x_3^2, x_1x_3^2, x_2x_3^2, x_0x_1x_3) \subset R = \kappa[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

falha WLP em grau 2.

Teorema 2.2.5 ([20], Teorema 4.11)**.** Seja $I \subset \kappa[x_0, x_1, x_2, x_3]$ um ideal monomial de grau 3. Considere, também, X como sendo a imagem de um sistema apolar. Assuma a variedade X seja suave e que satisfaz uma equação de Laplace de ordem 2. Então, a menos de mudança de coordenada, o sistema de Togliatti I^{-1} é um dos exemplos:

(a) $I^{-1} = (x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_0x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2)$.

(b) $I^{-1} = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_2^2, x_0x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2)$.

(c) $I^{-1} = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_2^2, x_0x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2)$.

Além disso, se substituirmos "suave" por "quase suave", teremos os casos.

(d) $I^{-1} = (x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_2^2, x_0x_3^2, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2)$.

(e) Uma projeção do caso (b), removendo um ou ambos os monômios $(x_0x_1x_2, x_0x_1x_3)$, ou uma projeção do caso (c) removendo um subconjunto dos monômios $(x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3)$, ou uma projeção do caso (d) removendo um ou ambos os monômios $(x_0x_2x_3, x_1x_2x_3)$.

Demonstração: Veja [[20], Teorema 4.11].

■

O teorema acima, classifica os casos para 4 variáveis. O próximo resultado, classifica o caso de cúbicas no caso geral e nos dá exemplos em relação à conjectura de G. Ilardi para $n \geq 4$.

Proposição 2.2.6. [[21], Exemplo 3.3] Considere a partição $n + 1 = a_1 + \cdots + a_s$, com $n - 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_s \geq 1$ e o ideal

$$I = (x_0, \cdots, x_{a_1-1})^3 + \cdots + (x_{n+1-a_s}, \cdots, x_n)^3 + J,$$

onde

$$J = (x_i x_j x_k \mid i < j < k; \forall 1 \leq \lambda \leq s \; \# \left(\{i,j,k\} \cap S_\lambda\right) \leq 1)$$

com

$$S_\lambda = \left\{ \sum_{\alpha \leq \lambda - 1} a_\alpha, \cdots, \sum_{\alpha \leq \lambda} a_\alpha - 1 \right\}.$$

Então I é um sistema de Togliatti monominal minimal de cúbicas.

Demonstração: Primeiramente, observe que como J é gerado por $\sum_{0 \leq i < j < k \leq s} a_i a_j a_k$ monômios, temos que I é gerado por

$$\mu_{a_1, \cdots, a_s} = \sum_{k=1}^{s} \binom{a_k + 2}{3} + \sum_{0 \leq i < j < k \leq s} a_i a_j a_k$$

monômios.

Primeiramente, observe que, I falha a propriedade fraca de Lefschetz em grau 2.

Para isto, basta ver que todos os vértices em $\mathbb{Z}^{n+1}$ correspondendo a monômios no sistema apolar P estão contidos na quádrica (ver Exemplo 1.2.6)

$$\begin{aligned} Q &= 2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 5 \sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j + 9 \sum_{0 \leq i < j \leq a_1 - 1} x_i x_j \\ &+ 9 \sum_{a_1 \leq i < j \leq a_1 + a_2 - 1} x_i x_j + \cdots + 9 \sum_{n+1-a_n \leq i < j \leq a_n} x_i x_j. \end{aligned}$$

Também, pode-se observar que a restrição de todas as cúbicas em I para o hiperplano $x_0 + \cdots + x_n$ tornar-se κ-linearmente dependente. Além disso,

$$\beta_{a_1, \cdots, a_n} := |P| = \binom{n+3}{3} - \mu_{a_1, \cdots, a_n}$$

e o fecho da imagem do mapa racional $\varphi_P : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{\beta_{a_1, \cdots, a_n} - 1}$ é uma variedade suave X de dimensão n que pode ser vista como a projeção de $V(n,3)$ do espaço linear gerado por todos os monômios cúbicos em I.

Vejamos que I é minimal.

Observe que a quádrica Q acima, que contém todos os pontos integrais em P, não contém nenhum ponto integral de $3\Delta \backslash P$. Vejamos que Q é única.

De fato, suponha que exista outra

$$Q' = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} \mu_{i,j} x_i x_j$$

e considere dois índices $i < j$ tais que

$$\# \left(\{i,j\} \cap \left\{\sum_{\alpha \leq \lambda - 1} a_\alpha, \cdots, \sum_{\alpha \leq \lambda} a_\alpha - 1\right\}\right) \leq 1, \forall 1 \leq \lambda \leq s.$$

Segue que $x_i^2x_j$ e $x_j^2x_i$ pertencem a P e obtemos

$$\begin{cases} 4\mu_i + \mu_j + 2\mu_{ij} = 0 \\ \mu i + 4\mu_j + 2\mu_{ij} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mu_i = \mu_j = -\frac{2\mu_{ij}}{5}$$

De cada ponto do segundo conjunto, i.e., $x_ix_jx_k$ tal que $i < j$, e $\forall 1 \leq \lambda \leq s, \{i,j\} \subset S_\lambda$ e $k \notin I_\lambda$ segue que $\mu_i + \mu_j + \mu_k + \mu_{ij} + \mu_{ik} + \mu_{jk} = 0$.

Como $\{i,k\}$ e $\{j,k\}$ satisfazem a primeira condição, temos

$$\mu_i = \mu_k = \mu_j = -\frac{2\mu_{ik}}{5} = -\frac{2\mu_{jk}}{5}.$$

Substituindo na equação acima,

$$\mu_{ij} = 2\mu_i = -\frac{4\mu_{ik}}{5}.$$

Em resumo,

$$\begin{cases} \mu_{ij} = -\frac{5}{2}\mu_i, & i < j; \forall 1 \leq \lambda \leq s, \#\left(\{i,j\} \cap S_\lambda\right) \leq 1 \\ \mu_{ij} = 2\mu_i, & i < j; \{i,j\} \subset I_\lambda \end{cases}.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{0\leq i\leq n} \mu_i x_i^2 - \frac{5}{2} \sum_{\substack{0\leq i<j\leq n| \\ \#(\{i,j\}\cap I_\lambda)\leq 1}} \mu_i x_i x_j + 2 \sum_{0\leq i<j\leq a_1-1} \mu_i x_i x_j + \cdots + 2 \sum_{n+1-a_s\leq i<j\leq n} \mu_i x_i x_j \\ &= \sum_{0\leq i\leq n} \mu_i x_i^2 - \frac{5}{2} \sum_{0\leq i<j\leq n} \mu_i x_i x_j + \frac{9}{2} \sum_{0\leq i<j\leq a_1-1} \mu_i x_i x_j + \cdots + \frac{9}{2} \sum_{n+1-a_s\leq i<j\leq n} \mu_i x_i x_j \end{aligned}$$

que é projetivamente equivalente (por uma mudança de variáveis) à Q. Portanto, I é um sistema de Togliatti monomial minimal suave. ■

Portanto, temos uma série de exemplos de sistema de Togliatti monomiais suaves e, se $a_1 = n-1$ e $a_2 = a_3 = 1$ ou $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1$, eles têm dimensão $n(n+1)-1$.

Foi conjecturado em [[20], Observação 6.2], que todos os sistemas de Togliatti cúbicos monomiais suaves são obtidos pelo procedimento acima. Esta conjectura é provada em [21].

Teorema 2.2.7 ([21], Teorema 3.4)**.** Seja I um sistema de Togliatti de cúbicas monomial minimal suave, como o da proposição acima. Então, $|I| \leq \binom{n+1}{3} + n + 1$ e se $|I| = \binom{n+1}{3} + n + 1$, corresponde a uma das seguintes partições:

(a) $n+1 = (n-1)+1+1$;

(b) $n+1 = 1+1+\cdots+1$;

(c) $4 = 2+2$.

Demonstração: Veja [[21], Teorema 3.4]. ■

Proposição 2.2.8 ([19], Observação 3.3)**.** Sendo I um sistema de Togliatti de cúbicas, temos:

(a) $\mu^s(2,3) = \rho^s(2,3) = 4$;

(b) $\mu^s(3,3) = \rho^s(3,3) = 8$;

(c) $13 = \mu^s(4,3) < \rho^s(4,3) = 15$;

(d) Para $n \geq 4$, segue que

$$\rho^s(n,3) = \binom{n+1}{3} + n + 1$$

$$\mu^s(n,3) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda+2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda+3 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{se } n = 2\lambda \\ 2\begin{pmatrix} \lambda+3 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{se } n = 2\lambda+1. \end{cases}$$

Demonstração:

(a) Imediato. Basta olharmos os limitantes;

(b) Sejam $n = 3$ e $d = 3$. Pela Proposição 2.2.6 e pelo Teorema 2.2.7, temos os casos.

- $a_1 = 3\ a_2 = 1$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1, x_2)^3 + x_3^3 \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_1^3x_2, x_1x_2^2, x_3^3). \end{aligned}$$

- $a_1 = a_2 = 2$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1)^3 + (x_2, x_3)^3 \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_2^3, x_3^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2). \end{aligned}$$

- $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 1$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1)^3 + x_2^3 + x_3^3 + J \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_2^3, x_3^3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3). \end{aligned}$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

$$\begin{aligned} I &= x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + J \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3). \end{aligned}$$

Partição	Nº de geradores
$a_1 = 3, a_2 = 1$	8
$a_1 = a_2 = 2$	8
$a_1 = 2, a_2 = a_3 = 1$	8
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$	8

Em todos os casos, temos 8 geradores.

(c) Seja $n = 4$.

- $a_1 = 3,\ a_2 = 2$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1, x_2)^3 + (x_3, x_4)^3; \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_0x_1x_2, x_3^3, x_4^3, x_3^3x_4, x_3x_4^3). \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos calcular a quantidade de geradores como

$$\mu(I) = \binom{3+2}{3} + \binom{2+2}{3} = 14.$$

- $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1, x_2)^3 + x_3^3 + x_4^3 + J \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, \\ &\quad x_0x_1x_2, x_3^3, x_4^3, x_0x_3x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4). \end{aligned}$$

- $a_1 = a_2 = 2, a_3 = 1$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1)^3 + (x_2, x_3)^3 + x_4^3 + J \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_2^3, x_3^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_4^3, x_0x_2x_4, x_0x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4). \end{aligned}$$

- $a_1 = 2, a_2 = a_3 = a_4 = 1$;

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1)^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + J \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_0x_2x_3, x_0x_2x_4, x_0x_3x_4, x_1x_2x_3, \\ &\quad x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4). \end{aligned}$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$

$$\begin{aligned} I &= x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \\ &= (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_1x_4, x_0x_1x_5, x_0x_2x_3, x_0x_2x_4, \\ &\quad x_0x_3x_4, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4). \end{aligned}$$

Partição	Nº de geradores
$a_1 = 3, a_2 = 2$	14
$a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$	15
$a_1 = a_2 = 2, a_3 = 1$	13
$a_1 = 2, a_2 = a_3 = a_4 = 1$	13
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$	15

(d) Consideremos $n \geq 4$.

A quantidade de geradores de $\rho^3(n, 3)$, segue diretamente do Teorema 2.2.7.

Para $\mu^s(n, 3)$, primeiramente, considere $n = 2\lambda$.

Fixemos $\lambda \geq 2$.

Pela Proposição 2.2.6, sabemos que dada uma partição $n+1=\sum_{t=1}^{s} a_t$ tal que $n-1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_s \geq 1$, temos o sistema de Togliatti

$$I=(x_0,\cdots,x_{a_1-1})^3+\cdots+(x_{n+1-a_s},\cdots,x_n)^3+J,$$

onde

$$J:=(x_ix_jx_k, i<j<k \ \text{ e } \ \forall 1\leq\beta\leq s \quad \#(\{i,j,k\}\cap\{\sum_{\alpha\geq\beta-1} a_\alpha,\cdots,\sum_{\alpha\leq\beta} a_\alpha-1\})\leq 1).$$

No caso em que $n=2\lambda$, se $x_ix_jx_k\in J$, então $x_ix_jx_k\in(x_{n+1-a_s},\cdots,x_n)^3$, sendo assim,

$$I=(x_0,\cdots,x_{a_1-1})^3+\cdots+(x_{n+1-a_s},\cdots,x_n)^3.$$

Afirmamos que $a_1=\lambda+1$ e $a_2=\lambda$.

De fato, sabemos que $a_1+a_2=n+1=2\lambda+1$.

Desse modo, temos

$$\begin{cases} a_1 &= \lambda+k+1 \\ a_2 &= \lambda-k \end{cases}$$

para $k\geq 0$.

Queremos ver que, para todo $k>0$, vale

$$\mu(\overline{I})<\mu(\hat{I})$$

onde em $\overline{I}$, $a_1=\lambda+1$ e $a_2=\lambda$ e, em $\hat{I}$, $a_1=\lambda+k+1$ e $a_2=\lambda-k$.

Dado que[1]

$$\mu_{a_1,\cdots,a_s}=\sum_{l=1}^{s}\binom{a_l+2}{3},$$

para $a_1=\lambda+1$ e $a_2=\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu(\overline{I}) &= \binom{\lambda+3}{3}+\binom{\lambda+2}{3} \\
&= \frac{(\lambda+3)!}{3!\lambda!}+\frac{(\lambda+2)!}{3!(\lambda-1)!} \\
&= \frac{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)}{6} \\
&= \frac{(\lambda+2)[(\lambda+3)(\lambda+1)+(\lambda^2+\lambda)]}{6} \\
&= \frac{2\lambda^3+9\lambda^2+13\lambda+6}{6}
\end{aligned}$$

[1] Não há J em nosso caso.

e para $a_1 = \lambda + k + 1$ e $a_2 = \lambda - k$, com $k > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu(\hat{I}) &= \binom{\lambda+k+3}{3} + \binom{\lambda-k+2}{3} \\
&= \frac{(\lambda+k+3)!}{3!(\lambda+k)!} + \frac{(\lambda-k+2)!}{3!(\lambda-k-1)!} \\
&= \frac{(\lambda+k+3)(\lambda+k+2)(\lambda+k+1) + (\lambda-k)(\lambda-k+2)(\lambda-k+1)}{6} \\
&= \frac{2\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda k^2 + 6\lambda k + 13\lambda + 9k^2 + 9k + 6}{6}
\end{aligned}$$

o que nos dá a desigualdade desejada, pois, como $k > 0$ e $\lambda \geq 2$,

$$\begin{aligned}
2\lambda^3 + 9\lambda^2 + 13\lambda + 6 &< 2\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda k^2 + 6\lambda k + 13\lambda + 9k^2 + 9k + 6 \\
0 &< 6\lambda k^3 + 6\lambda k + 9k^2 + 9k.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu^s(2\lambda, 3) = \binom{\lambda+3}{3} + \binom{\lambda+2}{3}$.

Para $n = 2\lambda + 1$, as contas são análogas com $a_1 = a_2 = \lambda + 1$, chegando a $\mu^s(2\lambda + 1, 3) = 2\binom{\lambda+3}{3}$.

■

Dado que $\mu(n, 3) \geq 2n+1$ e que o ideal $I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, \cdots, x_0^2x_n)$ falha WLP em grau 2, concluímos que $\mu(n, 3) = 2n + 1$ para $n \geq 3$. Além disso, verificamos que $\mu(2, 3) = 4$, uma vez que $\mu(2, 3) \geq 4$ e o ideal $I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$ também falha WLP do grau 2 para o grau 3. É importante notar que $\mu^s(n, 2) \geq 2n + 1$ a menos que $n = 2, 3$, e $\mu^s(n, 3) \geq 2n + 1$ a menos que $n = 2, 3$.

2.3 Classificação para $d \geq 4$ e $n \geq 2$

A partir de agora, consideraremos $d \geq 4$ e $n \geq 2$. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que $\mu^s(n, d) = \mu(n, d) = 2n + 1$. Além disso, classificaremos todos os sistemas Togliatti minimais e suaves $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau $d \geq 4$ com $\mu(I) = 2n + 1$. Também abordaremos todos os sistemas Togliatti minimais suaves $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau $d \geq 4$ com $\mu(I) = \mu^s(n, d) + 1 = 2n + 2$. Veremos também que não existe sistema de Togliatti no intervalo $2n+2 < \mu(I) < 3n$. Uma das principais ferramentas será combinatória que permitirá deduzir propriedades puramente geométricas das projeções das variedades de Veronese n-dimensionais $V(n, d)$.

Inicialmente, comentaremos e exemplificaremos um método que será utilizado para estudarmos os sistemas de Togliatti a partir de politopos associados.

Considere o ideal artiniano

$$I = \left(x_0^d, \cdots, x_n^d, x_0^{a_0^1}x_1^{a_1^1}\cdots x_n^{a_n^1}, \cdots, x_0^{a_0^{n-1}}x_1^{a_1^{n-1}}\cdots x_n^{a_n^{n-1}}\right)$$

onde $\sum_{i=0}^{n} a_i^j = d$, com $d \geq 4$ e $1 \leq j \leq n - 1$.

Seja I um sistema de Togliatti monomial minimal de grau d como o acima, considerando $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ o conjunto de todos os pontos integrais correspondentes ao monômio de grau d em I^{-1}, definimos, para qualquer inteiro $0 \leq i \leq d$, $H_i = \{(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid a_0 = i\}$ e $A_I^i = A_I \cap H_i$. Assim, temos $A_I = \cup_{i=0}^{d} A_I^d$.

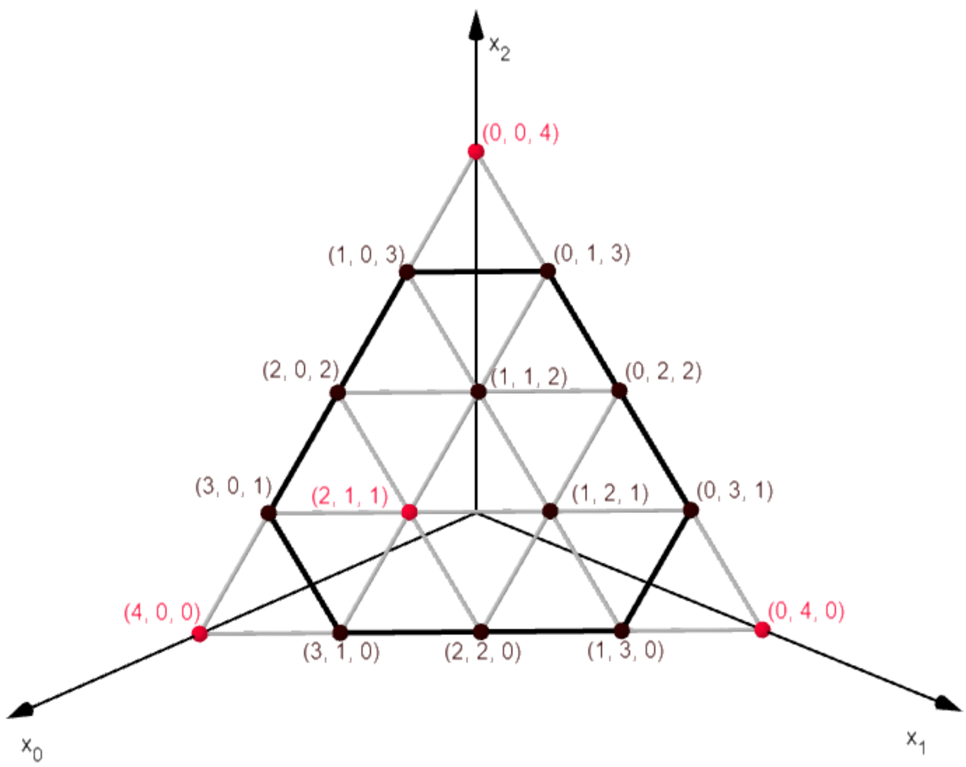
Ilustraremos este método com um exemplo.

Exemplo 2.3.1. Considere o ideal $I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_0^2x_1x_2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$. Temos

$$I^{-1} = (x_0^3x_1, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^2x_2^2, x_0x_1^3, x_0x_2^3, x_0x_1^2x_2, x_0x_1x_2^2, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3)$$

e, desse modo,

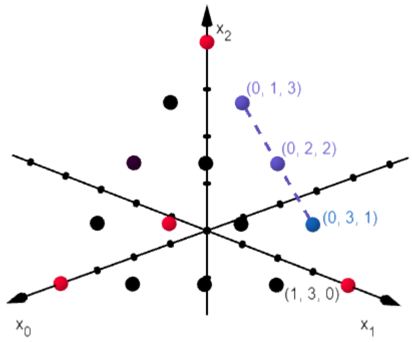
$$\begin{aligned} A_I &= \{(3,1,0),(3,0,1),(2,2,0),(2,0,2),(1,3,0),(1,0,3),\\ &\quad (1,2,1),(1,1,2),(0,3,1),(0,2,2),(0,1,3)\}. \end{aligned}$$



Assim, temos:

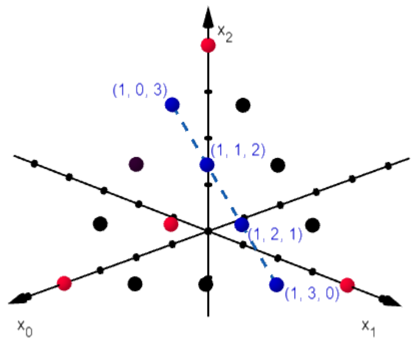
- Se $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} A_I^0 &= A_I \cap H_0 \\ &= \{(0,3,1),(0,1,3),(0,2,2)\} \end{aligned}$$



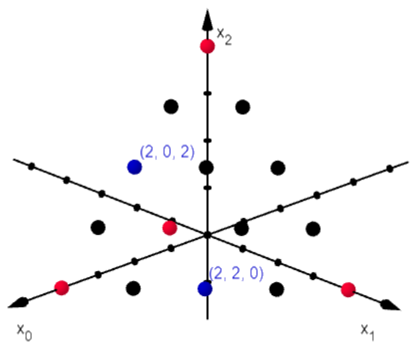
- Se $a_0 = 1$

$$\begin{aligned} A_I^1 &= A_I \cap H_1 \\ &= \{(1,0,3),(1,3,0),(1,2,1),(1,1,2)\} \end{aligned}$$



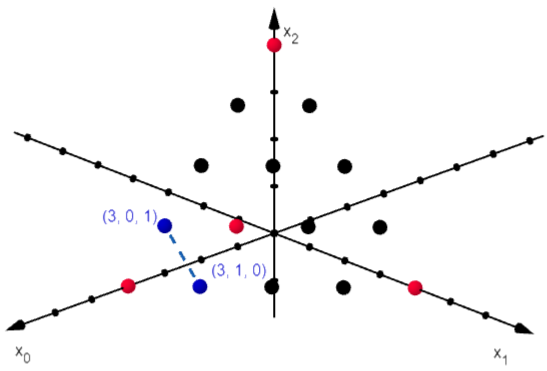
- Se $a_0 = 2$

$$\begin{aligned} A_I^2 &= A_I \cap H_2 \\ &= \{(2,2,0),(2,0,2)\} \end{aligned}$$



- Se $a_0 = 3$

$$\begin{aligned} A_I^3 &= A_I \cap H_3 \\ &= \{(3,1,0),(3,0,1)\} \end{aligned}$$



Teorema 2.3.2 ([19], Teorema 3.9). Sejam $n \geq 2$ e $d \geq 4$. Então,

$$\mu^s(n,d) = \mu(n,d) = 2n+1.$$

Em particular, se $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ é um sistema de Togliatti minimal monomial (respectivamente minimal suave) de formas de grau d, então $\mu(I) = 2n+1$.

Além disso, todo sistema de Togliatti minimal monomial $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau $d \geq 4$, com $\mu(I) = 2n+1$, a menos de mudança de coordenadas, são triviais com exceção dos casos.

(a) Para $(n,d) = (2,5)$, temos $I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3x_1x_2, x_0x_1^2x_2^2)$;

(b) Para $(n,d) = (2,4)$, temos $I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_1^2)$.

Mais ainda, o sistema de Togliatti de (a) é suave, enquanto (b), não.

Demonstração: De início, observemos que

$$I = \underbrace{(x_0^d, \cdots, x_n^d)}_{n+1\,\text{geradores}} + \underbrace{x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_n)}_{n\,\text{geradores}}$$

é um sistema de Togliatti minimal monomial de grau d e, pelo critério de suavidade (Proposição 1.2.7), para $d \geq 4$ é também suave (a todo tempo na demonstração estamos usando $d \geq 4$).

Logo,

$$\mu(n,d) \leq \mu^s(n,d) \leq 2n+1.$$

Queremos ver que $\mu(I) = 2n+1$.

Para isto, vamos mostrar que para qualquer ideal artiniano monomial do tipo

$$I = \left(x_0^d, \cdots, x_n^d, x_0^{a_0^1}x_1^{a_1^1}\cdots x_n^{a_n^1}, \cdots, x_0^{a_0^{n-1}}x_1^{a_1^{n-1}}\cdots x_n^{a_n^{n-1}}\right)$$

onde $\sum_{i=0}^{n} a_i^j = d$ onde $d \geq 4$ e $1 \leq j \leq n-1$, tem WLP em grau $d-1$.

Pelo critério de minimalidade (Proposição 1.2.5), basta mostrar que não existe nenhuma hipersuperfície de grau $d-1$ que contém todos os pontos de $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$, onde A_I é o conjunto de todos os pontos integrais correspondentes aos monômios de garu d em I^{-1}.

Vamos proceder por indução em n.

Suponha $n = 2$.

Considere
$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0^{a_0^1} x_1^{a_1^1} x_2^{a_2^1})$$
onde $a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 = d$.

Provaremos que não existe curva plana de grau $d-1$ que contém todos os pontos de $A_I \subset \mathbb{Z}^3$.

Como $4 \leq d = a_0^1 + a_1^1 + a_2^1$, podemos assumir que $2 \leq a_0^1$.

Suponha que exista uma curva plana F_{d-1} de grau $d-1$ que contém todos os pontos de A_I.

Sendo assim, F_{d-1} contém todos os d pontos de A_I^1, podemos expressar F_{d-1} como
$$F_{d-1} = L_1 F_{d-2}$$
onde L_1 é a reta que contém todos os pontos de A_I^1.

Do mesmo modo, temos que F_{d-2} contém dos $d-1$ pontos de A_I^0 e, assim,
$$F_{d-1} = L_0 L_1 F_{d-3}.$$
Se $a_0^1 = 2$, então A_I^2 tem $d-2$ pontos e, se $a_0^1 > 2$, então A_I^2 contém $d-1$ pontos. Em qualquer caso,
$$F_{d-3} = L_2 F_{d-4}$$
para uma forma F_{d-4} de grau $d-4$. Repetindo o argumento, segue que
$$F_{d-1} = L_0 L_1 \cdots L_{d-2}$$
e, assim, F_{d-1} não contém os pontos de A_I^{d-1}, que é não vazio por hipótese, contradizendo a existência de uma curva plana de grau $d-1$ contendo todos os pontos integrais de A_I.

Agora, vamos super $n \geq 3$ e assuma que a afirmação seja válida para $n-1$. Provaremos que não existe hipersuperfície de grau $d-1$ contendo todos os pontos de $A_I \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ onde
$$I = \left(x_0^d, \cdots, x_n^d, x_0^{a_0^1} x_1^{a_1^1} \cdots x_n^{a_n^1}, \cdots, x_0^{a_0^{n-1}} x_1^{a_1^{n-1}} \cdots x_n^{a_n^{n-1}}\right)$$
com $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i^j = d$ e $1 \leq j \leq n-1$.

Sem perda de generalidade, assuma que $a_0^1 \geq a_1^1 \geq \cdots \geq a_n^1 \geq 0$ e $a_0^1 \geq a_0^2$, logo $a_0^1 > 0$ e, sendo assim, x_0 aparece explicitamente no monômio $x_0^{a_0^1} x_1^{a_1^1} \cdots x_n^{a_n^1}$ e A_I^0 é igual a $d\Delta_{n-1}$ menos os n vértices e no máximo $n-2$ outros pontos.

Por hipótese de indução, nenhuma hipersuperfície em $n-1$ variáveis de grau $d-1$ contém A_I^0, então
$$F_{d-1} = L_0 F_{d-2},$$
onde F_{d-2} é uma hipersuperfície de grau $d-2$ contendo todos os pontos de $A_I \backslash A_I^0$.

Se os $n-1$ monômios têm $a_0^1 = a_0^2 = \cdots = a_0^{n-1} \leq 1$, então
$$A_I^2 = (d-2)\Delta_{n-1}, \cdots, A_I^{d-1} = \Delta_{n-1}$$
e deduzimos que

$$F_{d-1} = L_0 L_2 \cdots L_{d-1},$$

pois para $j = 2, \cdots, d-1$ o simplexo $(d-j)\Delta_{n-1}$ não está contido em nenhuma hipersuperfície em $n-1$ variáveis de grau $d-j$. Isto nos dá uma contradição, pois é retirado de F_{d-1} todos os pontos de $A_I^1 \neq \emptyset$. Caso contrário, teríamos $A_I^1 = (d-1)\Delta_{n-1}$ menos no máximo $n-2$ pontos. Portanto, pela hipótese de indução, não há hipersuperfície de grau $d-1$ em $n-1$ variáveis contendo A_I^1. Então repetimos o argumento até chegarmos a uma contradição.

Classificaremos todos os sistemas de Togliatti minimais monomiais $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau $d \geq 4$ com $\mu(I) = 2n+1$.

Começaremos com o caso $n = 2$. Queremos mostrar que todos eles são triviais, a menos que $d = 5$ e $I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3x_1x_2, x_0x_1^2x_2^2)$ ou $d = 4$ e $I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_1^2)$.

Considere

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, m_1, m_2) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$$

com $m_i = x_0^{a_0^i} x_1^{a_1^i} x_2^{a_2^i}$ e $\sum_{j=0}^{2} a_j^i = d$ um sistema de Togliatti minimal. Se existe $0 \leq i \leq 2$ tal que $a_i^1, a_i^2 \geq 2$ (suponha, sem perda de generalidade, que $i = 0$), então a curva plana F_{d-1}, contendo todos os pontos integrais de A_I, se fatora como

$$F_{d-1} = L_0 L_1 \cdots L_{d-2}$$

e, uma vez que F_{d-1} não pode perder nenhum ponto de A_I, devemos ter $A_I^{d-1} = \emptyset$, o que força $m_1 = x_0^{d-1}x_1, m_2 = x_0^{d-1}x_2$.

Agora, assuma que, para todo $0 \leq i \leq 2$, existe $1 \leq j \leq 2$ com $a_i^j \leq 1$. Como $d \geq 4$, podemos supor $a_0^1, a_1^1 \leq 1$ e $a_2^2 \leq 1$. Logo,

$$m_1 \in \{x_0x_1x_2^{d-2}, x_0x_2^{d-1}, x_1x_2^{d-1}\}$$

e

$$m_2 \in \{x_0^a x_1^{d-1-a} x_2, x_0^\alpha x_1^{d-\alpha} \mid 0 \geq a, \alpha \leq d-1\}.$$

No entanto, nenhum deles gera um sistema de Togliatti minimal, pois $x_0^d, x_1^d, x_2^d, m_1, m_2$ são linearmente independentes em uma reta geral de $\mathbb{P}^2$, a menos nos casos em que $d = 5$ e $m_1 = x_0x_1x_2^3$ e $m_2 = x_0^2x_1^2x_2$ ou $d = 4$ e $m_1 = x_0^2x_1x_2$ e $m_2 = x_0x_1^2x_2$. Além disso, usando o critério de suavidade (Proposição 1.2.7), temos que $I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3x_1x_2, x_0x_1^2x_2^2)$ define uma variedade suave.

Agora, suponha que $n \geq 3$ e $d \geq 4$ e considere

$$I = (x_0^d, x_1^d, \cdots, x_n^d, m_1, \cdots, m_n) \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$$

com $m_i = x_0^{a_0^i} x_1^{a_1^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ e $\sum_{j=0}^n a_j^i = d$ um sistema de Togliatti.

Existe um inteiro $j, 0 \leq j \leq n$, tal que $\#\{i \mid a_j^i \geq 1\} \geq 2$. Desse modo, sem perda de generalidade, podemos assumir $a_0^1, a_0^2 \geq 1$. Com argumentos análogos ao já usados nesta demonstração, obtemos que qualquer hipersuperfície F_{d-1} de grau $d-1$ que contenha todos os pontos integrais de A_I se fatora como $F_{d-1} = L_0L_1 \cdots L_{d-2}$, e como F_{d-1} não pode perder nenhum ponto de A_I, devemos ter $A_l^{d-1} = \emptyset$, fazendo com que

$$m_1 = x_0^{d-1}x_1, m_2 = x_0^{d-1}x_2, \cdots, m_n = x_0^{d-1}x_n,$$

concluindo assim que I é trivial. ∎

Pelo teorema acima 2.3.2, se $I \in \mathcal{T}(n,d)$, com $n \geq 2$ e $d \geq 4$, com $\mu(I) = 2n+1$, a menos de permutação de variáveis, temos

$$I = (x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_0, \cdots, x_n).$$

Exceto nos casos (a) e (b) cujos politopos descreveremos a seguir.

(a) Para o caso $n = 2$ e $d = 5$, temos

$$\begin{aligned} A_I \;=\; &\{(4,1,0),(4,0,1),(1,0,4),(1,4,0),(0,4,1),(0,1,4),\\ &(3,2,0),(3,0,2),(2,3,0),(2,0,3),(0,3,2),\\ &(0,2,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,3,1),(1,1,3)\}. \end{aligned}$$

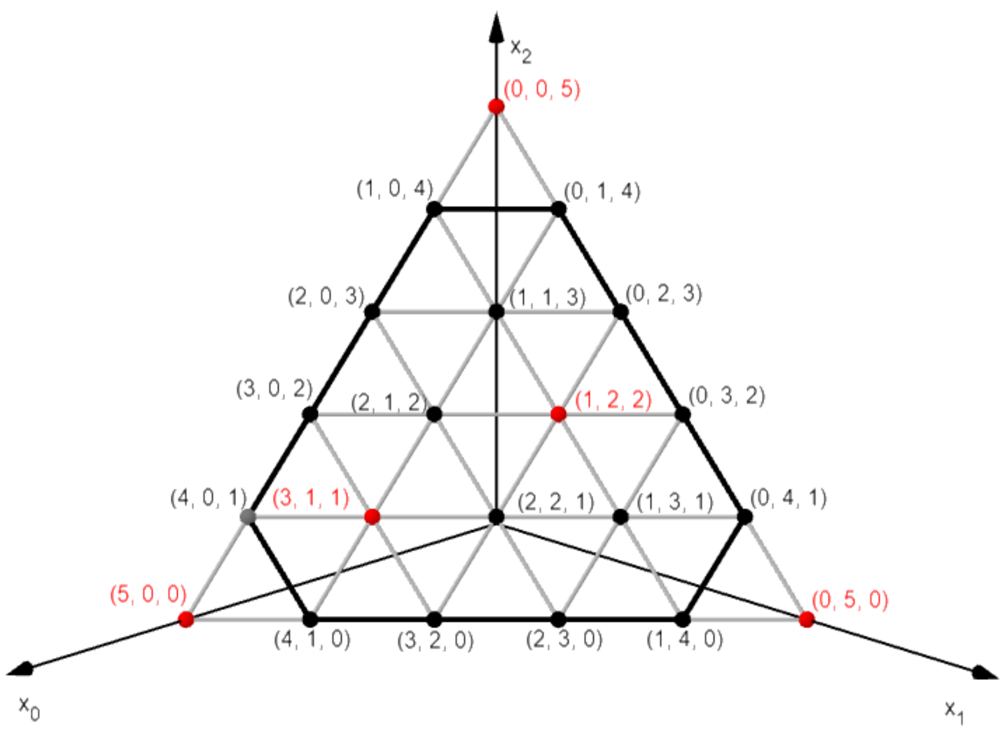


Figura 2.1: Sistema de Togliatti suave não trivial para $n = 2$ e $d = 5$

b) Para o caso $n = 2$ e $d = 4$, temos

$$\begin{aligned} A_I \;=\; &\{(3,1,0),(3,0,1),(1,3,0),(1,0,3),(0,3,1),\\ &(0,1,3),(2,0,2),(0,2,2),(2,1,1),(1,2,1)\}. \end{aligned}$$

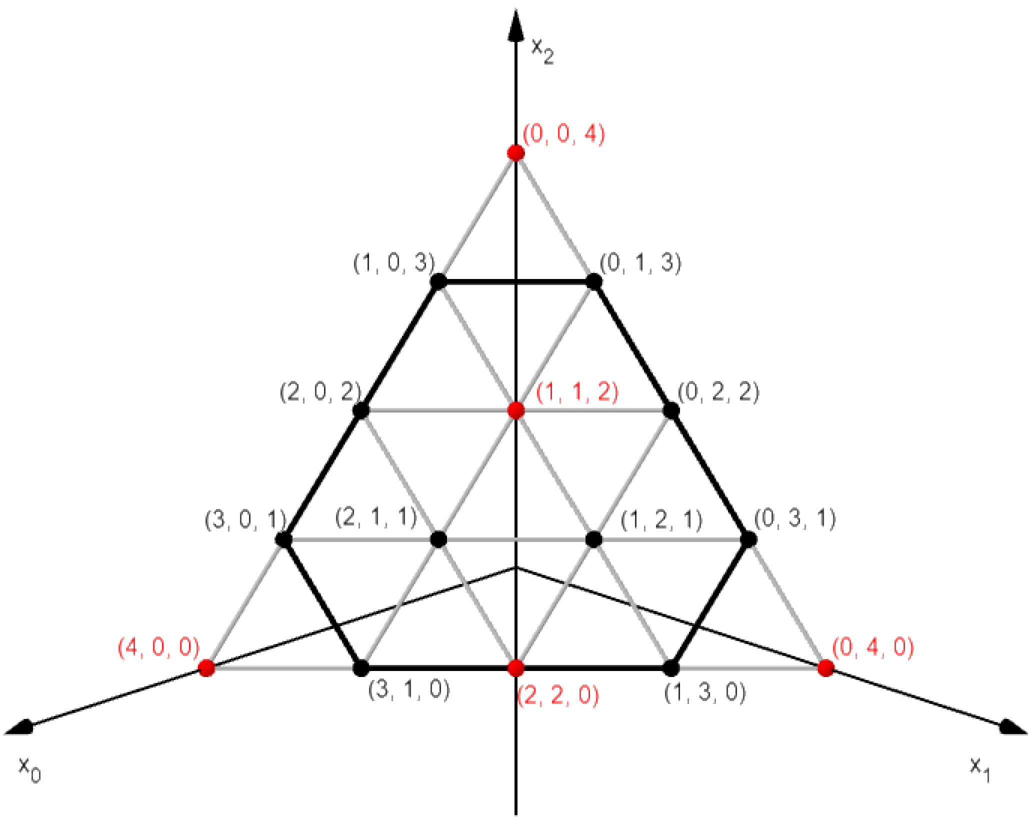


Figura 2.2: Sistema de Togliatti não trivial para $n = 2$ e $d = 4$

Observe que, pela Proposição 1.2.7, a variedade X associada, não é suave em razão do ponto $(2, 2, 0)$.

Agora, estamos interessados em classificar todos os sistemas Togliatti monomiais minimais suaves $I \in \mathcal{T}^s(n, d)$ cujo número mínimo de geradores excede em um o mínimo possível. Para isto, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3.3 ([19], Lema 3.15). Considere o sistema de Togliatti minimal monomial de grau $d \geq 3$

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d, m_1, \cdots, m_h) \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$$

com $h \geq n$ e $m_i = x_0^{a_0^i} \cdots s_n^{a_n^i}$ para $i = 1, \cdots, h$. Assuma que $a_0^1 \geq \cdots \geq a_0^h$. Se $a_0^{h-n+2} > 0$, então $a_0^i > 0$, para todo i.

Demonstração: Dado I um sistema de Togliatti, temos que existe uma forma F_{d-1} de grau $d-1$ passando por todos os pontos de A_I. A restrição a H_0, $F_{d-1}(0, x_1, \cdots, x_n)$, desaparece em todos os pontos de A_I^0.

Para obtermos A_I^0, podemos remover de $d\Delta_{n-1}$ os n vértices e no máximo $n-2$ pontos. Seja

$$I' = (x_1^d, \cdots, x_n^d) \subset \kappa[x_1, \cdots, x_n]$$

e $m_1, \cdots, m_n$ os monômios que não contém x_0.

Se $F_{d-1}(0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$, I' é um sistema de Togliatti em n variáveis e $\mu(I') \leq 2n-2$, o que contradiz o Teorema 2.3.2.

Logo, $F_{d-1}(0, x_1, \cdots, x_n) = 0$ e, assim, $F_{d-1} = L_0 F_{d-2}$. Mas, como I é minimal, temos pela Proposição 1.2.5 que L_0 não contém nenhum ponto de $d\Delta_n \backslash A_I$, exceto os vértices, o que implica que $a_0^i > 0$ para qualquer i.

■

Teorema 2.3.4 ([19], Teorema 3.17)**.** Seja $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um sistema Togliatti minimal monomial suave de formas de grau $d \geq 4$. Suponha que $\mu(I) = 2n + 2$. Então, I é trivial, a menos que $n = 2$, e, a menos de permutação de coordenadas, um dos seguintes casos ocorre.

(a) $d = 5$ e

$$\begin{aligned} I &= (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3 x_1 x_2, x_0^2 x_1^2 x_2, x_0 x_1^3 x_2) \text{ ou} \\ I &= (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^3 x_1 x_2, x_0 x_1^3 x_2, x_0 x_1 x_2^3) \text{ ou} \\ I &= (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_0^2 x_1^2 x_2, x_0^2 x_1 x_2^2, x_0 x_1^2 x_2^2); \end{aligned}$$

(b) $d = 7$ e

$$\begin{aligned} I &= (x_0^7, x_1^7, x_2^7, x_0^3 x_1^3 x_2, x_0^3 x_1 x_2^3, x_0 x_1^3 x_2^3) \text{ ou} \\ I &= (x_0^7, x_1^7, x_2^7, x_0^5 x_1 x_2, x_0 x_1^5 x_2, x_0 x_1 x_2^5) \text{ ou} \\ I &= (x_0^7, x_1^7, x_2^7, x_0 x_1 x_2^5, x_0^3 x_1^3 x_2, x_0^2 x_1^2 x_2^3). \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiro, faremos o caso $n = 2$ e posteriormente, estenderemos para $n \geq 3$.

Para $n = 2$, temos o sistema de Togliatti minimal monomial suave

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, m_1, m_2, m_3) \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$$

onde $m_i = x_0^{a_0^i} x_1^{a_1^i} x_2^{a_2^i}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=0}^{2} a_j^i = d$. Considere os seguintes casos.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ Assumimos que existe $0 \leq j \leq 2$ tal que $a_j^1, a_j^2, a_j^3 \geq 2$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $j = 0$ e $a_0^1 \geq a_0^2 \geq a_0^3 \geq 2$.

Considere F_{d-1} a curva plana contendo todos os pontos de A_I. Sendo assim, F_{d-1} contém todos os d pontos de A_I^1 e os $d-1$ pontos de A_I^0, podemos então escrever F_{d-1} como

$$F_{d-1} = L_0 L_1 F_{d-3}.$$

Seja $2 \leq i < d$. Então, H_i contém $d - i + 1$ pontos integrais de $d\Delta_1$. Para obter A_I^i, precisaremos remover três pontos: O primeiro de $H_{a_0^3}$, o segundo de $H_{a_0^2}$ e o terceiro de $H_{a_0^1}$. Precisamos excluir que $a_0^3 < a_0^2$, caso contrário, F_{d-3} tem $L_2, \cdots, L_{a_0^3}$ como fatores, entretanto, pela minimalidade, $H_{a_0^3} \subset A_I$, o que nos dá uma contradição e, assim, concluímos que $a_0^3 = a_0^2$ e podemos dividir em dois subcasos.

1. $a_0^1 = a_0^2 = a_0^3 := s \geq 2$.

   Neste caso,

   $$F_{d-1} = L_0 \cdots L_{s-1} L_{s+1} \cdots L_{d-1}$$

   e F_{d-1} contém todos os pontos de A_I se, e só se, $s = d - 2$. Mas, neste caso, $m_1 = x_0^{d-2} x_1^2, m_2 = x_0^{d-2} x_1 x_2, m_3 = x_0^{d-2} x_2^2$ e pela condição (ii) da Proposição 1.2.7, o sistema de Togliatti

   $$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0^{d-2} x_1^2, x_0^{d-2} x_1 x_2, x_0^{d-2} x_2^2)$$

   não seria suave.

2. $u := a_0^1 > a_0^2 = a_0^3 := s \geq 2$.

   Neste caso,
$$F_{d-1} = L_0 L_1 F_{d-3}$$
   e F_{d-3} contém todos os pontos integrais em $\cup_{\ell=2}^{d-1} A_I^\ell$ se, e só se, $u = s+1$ e $(m_1, m_2, m_3) = x_0^s x_1^a x_2^{d-1-a-s}(x_0, x_1, x_2)$ para um certo $a \geq 0$. Portanto, I é um sistema de Togliatti minimal suave trivial.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Assumimos $a_j^i \geq 1$ para todo i, j e que para todo $0 \leq j \leq 2$ existe $1 \leq i_j \leq 3$ tal que $a_j^{i_j} = 1$.

Distinguimos em 4 subcasos e, por um cálculo simples, ao olhamos o politopo associado, segue que:

1. $(x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0^{d-2}x_1x_2, x_0x_1^{d-2}x_2, x_0x_1x_2^{d-2}$ é um sistema de Togliatti minimal suave se, e só se, $d = 5$ ou 7.

2. $(x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0^{d-2}x_1x_2, x_0x_1^{d-2}x_2, x_0^a x_1^b x_2^c)$ com $(a, b, c) \neq (1, 1, d-2)$ é um sistema de Togliatti minimal suave se, e só se, $d = 5$ e $(a, b, c) = (2, 2, 1)$.

3. $\left(x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0x_1x_2^{d-2}, x_0^d x_1^b x_2, x_0^e x_1^f x_2^g\right)$ com $a, b \geq 2$ e $(e, f, g) \neq (d-2, 1, 1), (1, d-2, 1), (1, 1, d-2)$ é um sistema de Togliatti minimal suave se, e só se, $d = 7, (a, b) = (3, 3)$ e $(e, f, g) = (2, 2, 3)$.

4. $(x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_0x_1^a x_2^b, x_0^c x_1 x_2^e, x_0^f x_1^g x_2)$é um sistema de Togliatti minimal suave se, e só se, $d = 5$ e $a = b = c = e = f = g = 2$ ou $d = 7$ and $a = b = c = e = f = g = 3$.

$\boxed{\text{Caso 3:}}$ Assumimos que $a_{j_0}^{i_0} = 0, a_j^i \geq 1$ para todo $(i, j) \neq (i_0, j_0)$ e que, para todo $0 \leq j \leq 2$, existe $1 \leq i_j \leq 3$ tal que $a_j^{i_j} = 1$.

Pelo critério de suavidade (Proposição 1.2.7), a menos de mudança de coordenadas, $m_1 = x_1^{d-1}x_2$ e podemos assumir que $m_2 = x_0^a x_1 x_2^b$ e $m_3 = x_0^c x_1^d x_2^e$, com $a, b, c, d, e \geq 1$. Desse modo, concluímos que
$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_1^{d-1}x_2, x_0^a x_1 x_2^b, x_0^c x_1^d x_2^e)$$
não é um sistema de Togliatti minimal suave.

$\boxed{\text{Caso 4:}}$ Assumimos que existe $a_{j0}^{i_0} = a_{j1}^{i_1} = 0$ e que, para todo $0 \leq j \leq 2$, existe $1 \leq i \leq 3$ tal que $a_j^i \leq 1$.

Como no caso anterior, pela Proposição 1.2.7, a menos de mudança de coordenada, $m_1 = x_1^{d-1}x_2, m_2 = x_0^{d-1}x_2$ e $m_3 = x_0^d x_1^b x_2^c$. Entretanto,
$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_1^{d-1}x_2, x_0^{d-1}x_2, x_0^d x_1^b x_2^c)$$
não é um sistema de Togliatti minimal suave.

Agora estamos interessados no caso $n \geq 3$. Vamos provar que todos os sistemas Togliatti monomiais minimais suaves $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau $d \geq 4$ com $\mu(I) = 2n + 2$ são triviais. Desta vez analisaremos dois casos.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ Para $0 \leq j \leq n, \# \left\{ i \mid a_j^i \geq 1 \right\} \leq 2$.

Isto implica que cada variável x_j aparece explicitamente em exatamente dois dos monômios $m_1, \cdots, m_{n+1}$. Equivalentemente, olhando para o simplexo, os $n+1$ pontos integrais a serem removidos de $d\Delta_n$ para obter A_I estão todos nas faces externas, e em cada face, há exatamente $n-1$ pontos. Consideramos agora a restrição da hipersuperfície F_{d-1} a uma face, pelo Teorema 2.3.2, obtemos que os $n-1$ monômios correspondentes, juntamente com as d-ésimas potências das variáveis correspondentes, formam um sistema de Togliatti trivial em n variáveis da forma $(x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_0, \cdots, x_n)$, o que dá uma contradição.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Existe $0 \leq j \leq n$ tal que $\# \left\{ i \mid a_j^i \geq 1 \right\} \geq 3$.

Sem perda de generalidade, assuma que $a_0^1 \geq a_0^2 \geq \cdots \geq a_0^{n+1} \geq 0$ e $a_0^3 \geq 1$. Logo, pelo Lema 2.3.3, $a_0^{n+1} > 0$. Isto é, todos os monômios $m_1, \cdots, m_{n+1}$ contém x_0.

Considere as restrições de $x_0^d, \cdots, x_n^d, m_1, \cdots, m_{n+1}$ ao hiperplano $x_n = x_0 + \cdots + x_{n-1}$ e, por hipótese, são linearmente dependentes. No entanto, em $(x_0 + \cdots + x_{n-1})^d$, existe algum monômio que não contém x_0 e que não pode ser cancelado com os outros, então seu coeficiente em uma combinação linear nula deve ser 0, consequentemente, os coeficientes de $x_1^d, \cdots, x_{n-1}^d$ também são 0. Logo, os monômios $m_1, \cdots, m_{n+1}$ divididos por x_0, juntamente com $x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}$, forma um sistema Togliatti, mas de um grau a menos, com as mesmas propriedades. Então podemos proceder por indução no grau, até chegarmos a $d = 4$. Resta provar que não existe hipersuperfície F_3 de grau 3 contendo todos os pontos de A_I a menos que I seja um sistema de Togliatti monomial trivial. Como $a_0^{n+1} > 0, F_3 = L_0 F_2$ e F_2 contém todos os pontos de $A_I \backslash A_I^0$. Isso é possível se e somente se I for trivial do tipo $\left(x_0^d, \cdots, x_n^d\right) + m\left(x_0, \cdots, x_n\right)$, onde m é um monômio de grau $d-1$ envolvendo pelo menos 2 variáveis. ■

Proposição 2.3.5 ([19], Proposição 3.19). Considere o sistema de Togliatti trivial

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + m(x_0, \cdots, x_n)$$

onde m é um monômio de grau $d-1$. Então, I é suave se, e só se, é um dos casos (a menos de mudança de coordenadas).

(a) $d = 2$ e $n = 2$ ou $n = 3$;

(b) $d = 3, n = 2$ e $m = x_0^2$;

(c) $d \geq 4, n = 2$ e $m = x_0^{d-1}$ ou $m = x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$, com $i_0 \geq i_1 \geq i_2 \geq 0$;

(d) $d \geq 4, n \geq 3$ e $m = x_0^{d-1}$ ou $m = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$, com $i_0 \geq \cdots \geq i_n \geq 0$.

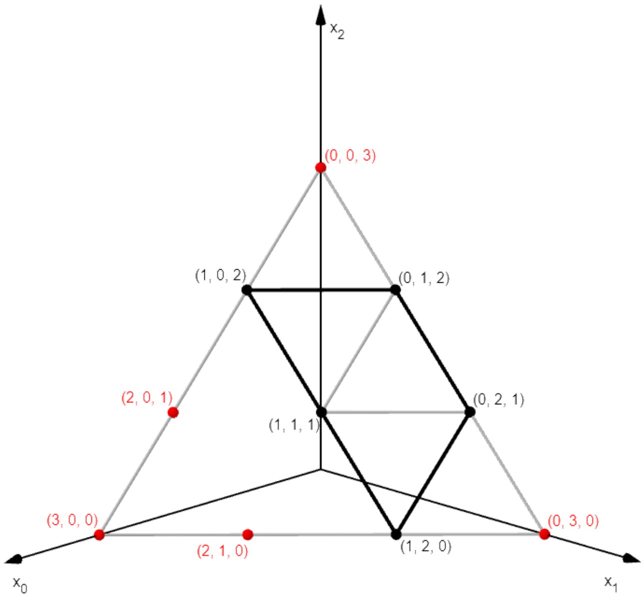
Demonstração:

(a) Se $n = 2$ e $m = x_0$, temos

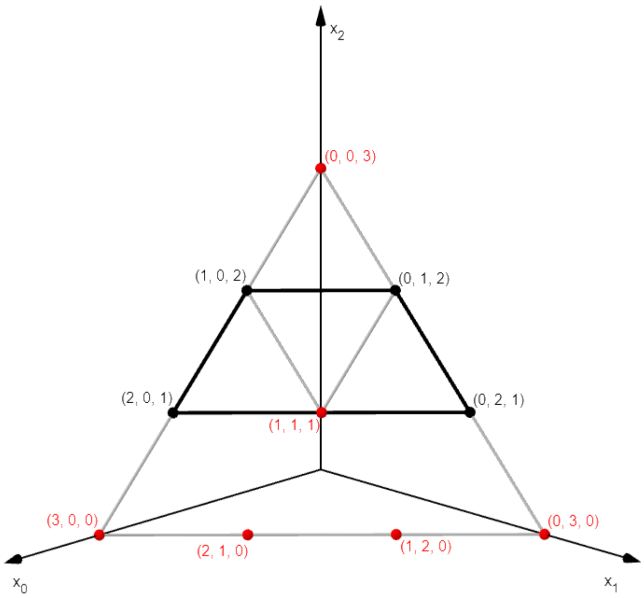
$$I = (x_0^2, x_1^2, x_2^2) + x_0(x_1, x_2).$$

Desse modo X é apenas um ponto e, portanto I é suave. Para $n \geq 3$, temos que $A_I = A_I^0$, ou seja, o simplexo $(n-1)$-dimensional menos os n vértices. Por cada vértice de P_I, existem $2(n-2)$ arestas. Mas pela Proposição 1.2.7, para que X seja suave, precisamos que o número de arestas incidentes de cada vértice seja $n-1$. Portanto, o sistema é suave para $n = 3$ e singular para $n > 3$.

(b) Se $d = 3$ e $n = 2$, a menos de mudança de coordenadas, podemos ter $m = x_0^2$ ou $m = x_0x_1$. Nos dois casos, os politopos associados são trapézios, segue do critério de suavidade que para $m = x_0^2$ o sistema é suave, como podemos ver pelo politopo associado



enquanto, para $m = x_0x_1$ segue que o sistema é singular, devido à presença do ponto $(1, 1, 1)$ na aresta do politopo.

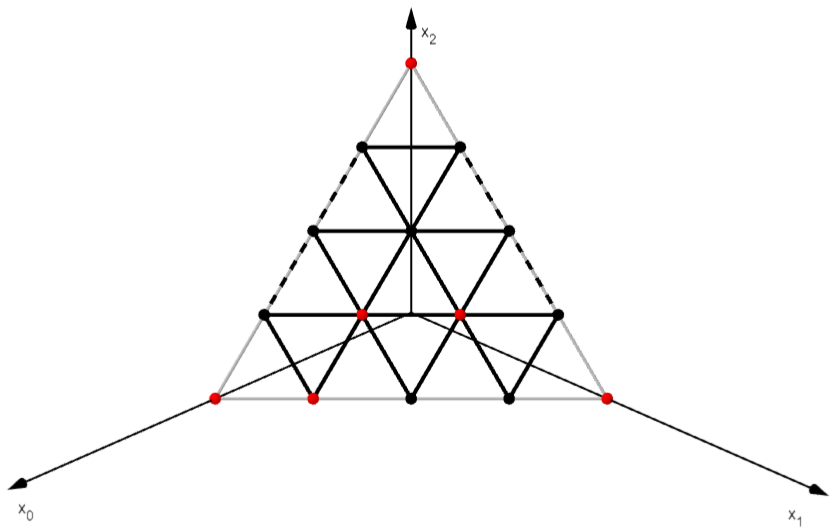


(c) Seja $d \geq 4$ e $n = 2$. Se $m = x_0^{d-1}$ o sistema de Togliatti é trivial em consequência do Teorema 2.3.2.

Se $m = x_0^{d-2}x_1$, temos

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + (x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-2}x_1^2, x_0^{d-2}x_1x_2)$$

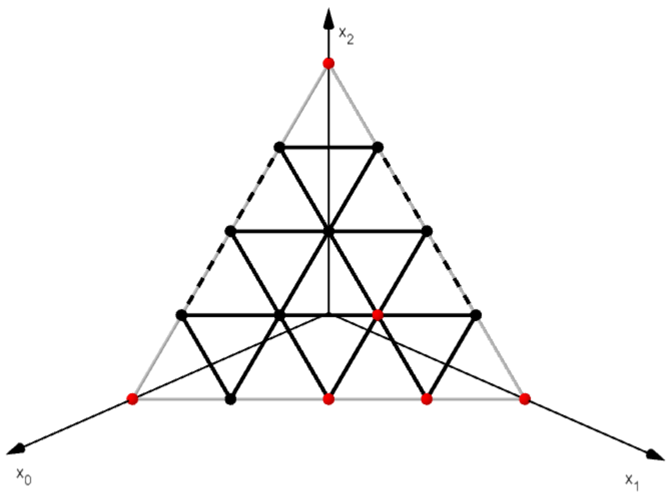
e é singular em razão de situações análogas da figura a seguir, onde os pontos pretos denotam A_I.



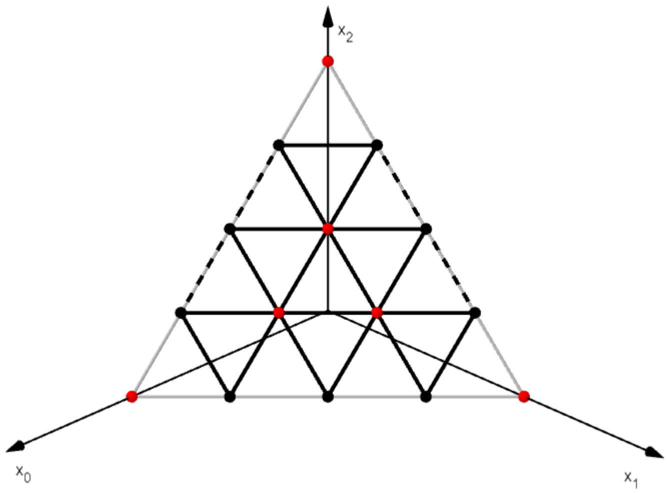
Se $m = x_0^{d-i}x_1^{i-1}$, com $i > 2$, o sistema

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + (x_0^{d-i+1}x_1^{i-1}, x_0^{d-i}x_1^i, x_0^{d-i}x_1^{i-1}x_3)$$

é singular, pois a aresta formada por $x_0^d - x_1^d$ de P_I temos que cortar dois pontos ao meio.



Por fim, se $m = x_0^{i_0}x_1^{i_1}x_2^{i_2}$, com $i_j > 0$ para todo $j \in \{0, 1, 2\}$, temos que todos os pontos de I estão em P_I e, portanto, I é um sistema de Togliatti suave.



(d) Se $d \geq 4$ e $n \geq 3$, então, para $m = x_0^{d-1}$, o sistema é suave. Se $m = x_0^{d-2}x_1$ ou $m = x_0^{d-i}x_i i - 1$, com $i > 2$, o sistema é singular, pois, neste caso, P_I tem uma face bidimensional que é única. Se m contém pelo menos 3 das variáveis, o sistema é suave, uma vez que nas arestas unidimensionais de P_I, não há pontos de I, enquanto nas faces de P_I de dimensão pelo menos 2, os pontos de I estão no interior.

■

Em resumo, provamos que:

Teorema 2.3.6. Fixados $n \geq 3$ e $d \geq 3$ e sendo $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um sistema de Togliatti minimal monomial de formas de grau d, assuma que $\mu(I) = 2n + 2$. Então, a menos de mudança de variável,

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + m(x_0, \cdots, x_n)$$

com $m = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_0}$ onde $i_0 \geq \cdots \geq i_n \geq 0$, $i_1 > 0$ e $i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d - 1$.

Agora, fixemos $n = 2$.

Proposição 2.3.7 ([19], Proposição 4.1)**.** Para $n = 2$, vale que:

(a) Para todo $d \geq 4$, temos $\mu^s(2, d) = \mu(2, d) = 5$;

(b) Para todo $d \geq 4$ e para todo $5 \leq r \leq d + 1$ existe $I \in \mathcal{T}^s(2, d)$ tal que $\mu(I) = r$;

(c) Para todo $d \geq 4$, temos $\rho^s(2, d) = \rho(2, d) = d + 1$.

Demonstração:

(a) Isto segue diretamente do Teorema 2.3.2;

(b) Queremos mostrar que para $5 \leq r \leq d+1$, com $d \geq 4$, I é um sistema e Togliatti suave com r geradores.

Primeiro considere o caso em que $r = 5$.

Utilizando o Teorema 2.3.2:

$$I_5 = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_0^{d-1}(x_1, x_2).$$

Para $r \geq 6$, vejamos que, para

$$I_r = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_0^{d-r+3}x_1x_2(x_0^{r-5}, x_0^{r-6}x_1, \cdots, x_0x_1^{r-6}, x_1^{r-5}, x_2^{r-5}),$$

temos $\mu(I_r) = r$ e, por 1.2.5 e 1.2.7, segue que $I_r \in \mathcal{T}^s(2, d)$;

(c) Sabemos que

$$n+2 \leq \mu(n,d) \leq \mu^s(n,d) \leq \rho^s(n,d) \leq \rho(n,d) \leq \binom{n+d-1}{n-1}.$$

Como $n=2$, temos que $\rho^s(n,d) \leq \rho(n,d) \leq d+1$.

Por outro lado, pelo item (b), $\rho^s(2,d) \geq d+1$. Uma vez que $I_r = \mu^s$ e $\mu^s \leq \rho^s$ e $I_r = r \leq d+1$.

Portanto, $\rho(2,d) = \rho^s(2,d) = d+1$.

■

Estamos agora interessados em entender o que acontece no caso em que $n \geq 3$, em como se comportam os seus limitantes. No lema a seguir faremos para $d=3$ e posteriormente, generalizaremos para $d>3$.

Lema 2.3.8 ([19], Lema 4.3). Seja I um sistema de Togliatti minimal de cúbicas e considere $n \geq 4$. [2] Então, $\mu(I) \geq 2n+1$. Além disso, temos que

(a) $\mu(I) = 2n+1$ se, e somente se, I é trivial. Em particular, $I \in \mathcal{T}(n,3) \setminus \mathcal{T}^s(n,3)$;

(b) $\mu(I) = 2n+2$ se, e somente se, I é trivial. Em particular, $I \in \mathcal{T}(n,3) \setminus \mathcal{T}^s(n,3)$;

(c) $\mu(I) \neq 2n+3$.

Demonstração: Faremos por indução em n.

Se $n=4$, usando o programa Macaulay2 [11], temos que, para todo $I \in \mathcal{T}(4,3)$, $\mu(I) \geq 9$.

Suponha agora que seja válido para $n-1$, com $n>4$.

Considere

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3, m_1, \cdots, m_{n-1}),$$

onde $m_i = x_0^{a_0^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ com $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^i = 3$.

Afirmamos que nenhuma hiperquádrica F_2 contém todos os pontos de A_I.

Para provar esta afirmação, suponha que exista uma hiperquádrica F_2 contendo todos os pontos de A_I. Sem perda de generalidade, podemos assumir que x_0 aparece explicitamente no monômio m_1 e A_I^0 é dado por $3\Delta_{n-1}$ menos n vértices e ao menos $n-2$ outros pontos. Por indução, nenhuma hiperquádrica em $x_1, \cdots, x_n$ contém A_I^0. Assim, F_2 decompõe como

$$F_2 = L_0 F_1.$$

No entanto, como não existe hiperplano F_1 contendo todos os pontos de $A_I \setminus A_I^0$, chegando assim a uma contradição. Portanto, não existe hiperquádrica contendo todos os pontos de A_I e, consequentemente, para todo $n \geq 4$, $\mu(I) \geq 2n+1$.

Vamos agora analisar os casos em que $2n+1 \leq \mu(I) \leq 2n+3$.

[2] Para $n=3$ e $d=3$ já foi classificado no Teorema 2.2.5.

(a) Queremos mostrar que $I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n)$.

Também procederemos por indução em n.

Assuma $n = 4$.

Para $I \in \mathcal{T}(4,3)$ e $\mu(I) = 2n+1$, usando o Macaulay2 [11], obtemos que I é trivial.

Suponha $n > 4$ e que seja válido para n.

Sendo

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3, m_1, \cdots, m_n),$$

com $m_i = x_0^{a_0^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ onde $\sum_{k=0}^{n} a_k^i = 3$ um sistema de Togliatti, considere F_2 como sendo uma hiperquádrica que passa pelos pontos de A_I.

Sem perda de generalidade, assuma $a_0^1, a_0^2 \geq 1$. Assim,

$$F_2 = L_0 L_1.$$

Uma vez que F_2 deve conter todos os pontos de A_I, temos que $A_I^2 = \emptyset$ o que faz com que $m_1 = x_0^2 x_1, \cdots, m_n = x_0^2 x_n$ e, portanto, I é trivial.

(b) Queremos mostrar que $I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n)$.

Por indução em n, temos que, para $n = 4$ e $\mu(I) = 2n+2$, por Macaulay2 [11], I é trivial. Agora, suponha $n > 4$ e

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3, m_1, \cdots, m_{n+1})$$

com $m_i = x_0^{a_0^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ onde $\sum_{k=0}^{n} a_k^i = 3$.

Sem perda de generalidade, suponha que $a_0^1 \geq \cdots \geq a_0^{n-1} \geq 0$ e $a_0^1 > 0$.

Se $a_0^3 > 0$, então, pelo Lema 2.3.3, $a_0^{n+1} > 0$ e

$$F_2 = L_0 F_1$$

onde F_1 é um hiperplano contendo todos os pontos de $A_I \setminus A_I^0$. Isto é válido se e só se

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n)$$

com $i \neq j$.

Se $a_0^3 = 0$, pela hipótese de indução e pelo fato que $a_0^1 > 0$, a restrição de $x_0^3, \cdots, x_n^3$, $m_1, \cdots, m_{n+1}$ ao hiperplano $x_0 = 0$ é trivial do tipo

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n)$$

ou

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n)$$

com $1 \leq i < j \leq n$. Sendo assim,

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n)$$

ou

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n)$$

com $1 \leq i < j \leq n$, no entanto, nesses casos $I \notin \mathcal{T}(n,3)$.

(c) Novamente, vamos proceder por indução. Para o caso $n = 4$, provamos que é verdade usando Macaulay2 [11]. Isto é, não existe $I \in \mathcal{T}(4,3)$ tal que $\mu(I) = 11$.

Agora, considere $n > 4$. Seja

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3, m_1, \cdots, m_{n+2})$$

com $m_i = x_0^{a_0^i} x_1^{a_1^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ e $\sum_{j=0}^{n} a_j^i = 3$.

Sem perda de generalidade, assuma $a_0^1 \geq \cdots \geq a_0^{n+2} \geq 0$ and $a_0^1 > 0$.

Se $a_0^4 > 0$, então, pelo Lema 2.3.3, $a_0^{n+1} > 0$ e

$$F_2 = L_0 F_1.$$

Entretanto, como não existe nenhum hiperplano contendo todos os pontos de $A_I \setminus A_I^0$ e nenhum ponto de $3\Delta_n \setminus A_I$, exceto os vértices, isto é impossível.

Se $a_0^4 = 0$, pela hipótese de indução e pelo fato de que $a_0^1 > 0$, temos que a restrição de $x_0^3, \cdots, x_n^3, m_1, \cdots, m_{n+2}$ ao hiperplano $x_0 = 0$ é trivial do tipo

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n)$$

ou

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n)$$

com $1 \leq i < j \leq n$, ou

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}),$$

onde $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n$, ou

$$(x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n) + (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}),$$

para $1 \leq i < j \leq n, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n$.

Portanto,

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n)$$

ou

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n),$$

onde $1 \leq i < j \leq n$, ou

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}),$$

com $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n$, ou

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_1, \cdots, x_n) + (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}),$$

com $1 \leq i < j \leq n, 1 \leq i_1 \leq 1_2 \leq i_3 \leq n$. Entretanto, nesses casos, $I \notin \mathcal{T}(n,3)$.

■

Com o teorema acima, classificamos todos os sistemas de Togliatti $I \in \mathcal{T}(n,3)$ para $n \geq 4$ e $2n+1 \leq \mu(I) \leq 2n+3$. Vamos agora generalizar o resultado para $d > 3$.

Proposição 2.3.9. Sejam $n \geq 3$ e $d \geq 4$. Então não existe $I \in \mathcal{T}^s(n,d)$ com $\mu(I) = 2n+3$.

Demonstração: Analizaremos dois casos.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ Para todo $0 \leq j \leq n$, temos $\#\{i \mid a_j^i \geq 1\} \leq 3$.

Neste caso, estamos interessados em quando cada variável aparece em no máximo três dos monômios $m_1, \cdots, m_{n+2}$.

Se um dos monômios contém todas as variáveis, enquanto os outros $n+1$ monômios contêm duas variáveis cada, encontramo-nos na mesma situação descrita no Teorema 2.3.4, Caso 1, o que é impossível. Desse modo, concluímos que nenhum monômio contém todas as variáveis e que pelo menos duas variáveis aparecem em três monômios diferentes.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que x_0 aparece em três monômios. Nesse caso, a superfície F_{d-1} passa pelos pontos integrais de A_I^0. Vale ressaltar que A_I^0 é igual a $d\Delta_{n-1}$ menos os n vértices e mais $n-1$ outros pontos. Assim, os pontos removidos formam um sistema Togliatti I em n variáveis $x_1, \cdots, x_n$ com $\mu(I) = 2n-1$. Assim, podemos aplicar o Teorema 2.3.2.

Existem duas possibilidades.

1. $n = 3$ e I' é um dos sistemas de Togliatti especiais do Teorema 2.3.2 de grau 4 ou 5.

   Se $d = 5$, a menos de mudança de variável, a única possibilidade é

   $$I = (x_0^5, x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_0^4x_2, x_0^4x_3, x_1^3x_2x_3, x_1x_2^2x_3^2, x_0^ax_1^b),$$

   com $a, b > 0$. Mas, pela Proposição 1.2.5, verificamos que tal I não define um sistema de Togliatti.

   Se $d = 4$ existem duas possibilidades:

   $$I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_0^3x_2, x_0^3x_3, x_1x_2x_3^2, x_1^2x_2^2, x_0^ax_1^bx_3^c),$$

   com $a, b > 0, c \geq 0$, ou

   $$I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_0^2x_1x_2, x_1x_2x_3^2, x_1^2x_2^2, x_0^ax_3^b, x_0^cx_3^d),$$

   com $a, b, c, d > 0$. Entretanto, ambos não são sistema de Togliatti.

2. $I' = (x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n)$.

   Neste caso x_1 aparece em pelo menos $n-1$ monômios, sendo assim, $n = 3$ ou $n = 4$.

   Se $n = 3$, os outros três monômios de I podem ser escrito como $x_0^{d-1}(x_2, x_3), x_0^ax_1^bx_2^c$, ou $x_0^{d-1}(x_1, x_3), x_0^ax_2^bx_3^c$, com $a > 0, b > 0, c \geq 0$. Novamente, por 1.2.5 estes não são sistemas Togliatti.

   Se $n = 4$ então os seis monômios $m_1, \cdots, m_6$ são da forma $x_0^{d-1}(x_2, x_3, x_4), x_1^{d-1}(x_2, x_3, x_4)$. Também, neste caso I, não definirá um sistema de Togliatti.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Existe j tal que $\#\{i \mid a_j^i \geq 1\} \geq 4$.

Neste caso, estamos interessados em quando uma das variáveis aparece em pelo menos 4 monômios.

Assuma $j = 0$. Pelo Lema 2.3.3, x_0 aparece em todos os monômios $m_1, \cdots, m_{n+2}$.

Seja $m_i' = m_i/x_0, i = 1, \cdots, n+2$. Como na prova do Teorema 2.3.4, no caso 2, observamos que $m_1', \cdots, m_{n+2}'$, juntamente com $x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}$, formam um sistema Togliatti I_1 de grau $d-1$.

Temos as seguintes possibilidades.

1. Pelo menos um dos monômios m_i' é a $(d-1)$-ésima potência de uma variável, então $\mu(I_1) < 2n+3$;

   Neste caso, se $d > 4, I_1$ é trivial. Logo, I contém um sistema de Togliatti trivial e, consequentemente, não é minimal, gerando assim, uma contradição.

   Se $d = 4, I_1 \in \mathcal{T}(n, 3)$ e $\mu\left(I_1\right) \leq 2n+2$.

2. $\mu\left(I_1\right) = \mu(I) = 2n+3$.

   Nesta segunda possibilidade, podemos usar o mesmo argumento da primeira em I_1 e, posteriormente, aplicar indução.

   Em qualquer caso, ao aplicarmos repetidamente este argumento, possivelmente envolvendo diferentes variáveis, chegamos a um sistema Togliatti I_1 de grau $d = 3$ com $\mu \leq 2n+3$, que é obtido da divisão I os monômios $m_1, \cdots, m_{n+2}$ por um fator monômio comum M.

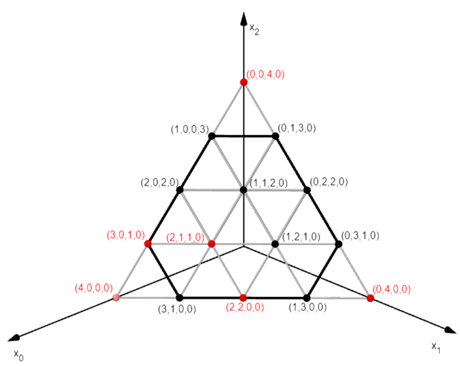
   Se $n = 3$, concluímos utilizando Macaulay2 [11].

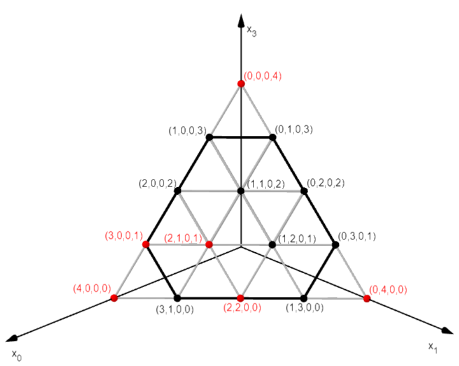
   Se $n \geq 4$, pelo Lema acima, I_1 é trivial do tipo $(x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n)$ ou $(x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_0, \cdots, x_n)$. Em ambos os casos, I não é minimal, o que também gera uma contradição.

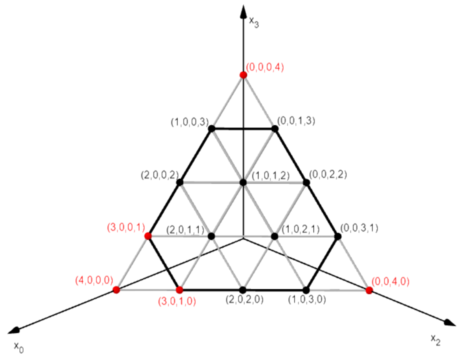
■

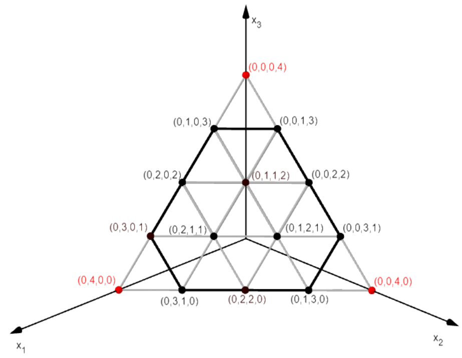
Para o caso em que $n = 3$ e $d = 4$, utilizando o Macaulay2 [11], podemos ver que existem dois sistemas de Togliatti minimais não suaves com 9 geradores. São eles:

$$I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4) + x_0^2(x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3)$$



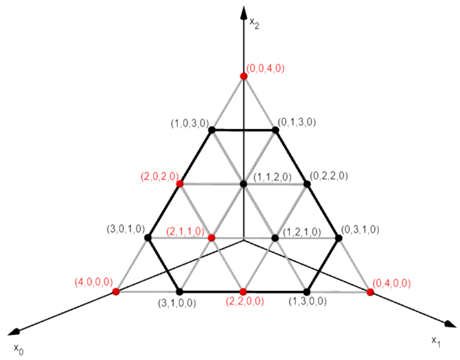


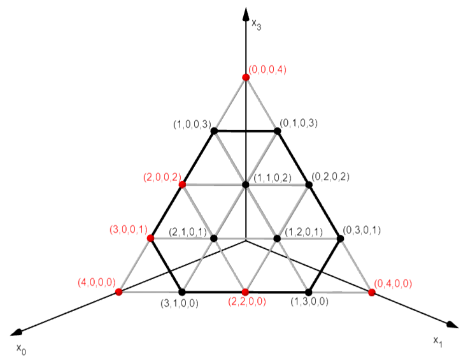


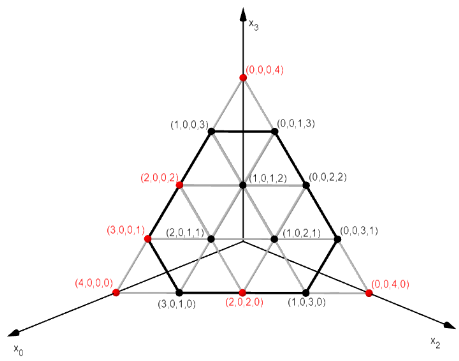


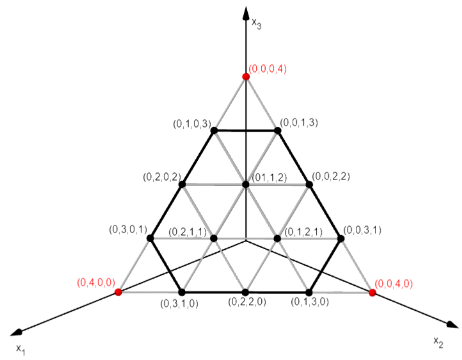
e

$$I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4) + x_0^2(x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_2, x_3^2).$$









Os cálculos realizados com Macaulay2 [11] evidenciam a complexidade do caso geral. Contudo, é possível construir família de exemplos.

Exemplo 2.3.10. Sejam $d > n$ e $n \geq 3$. Para qualquer r entre $\binom{d+n-2}{n-2} + n + 2 \leq r \leq \binom{d+n-2}{n-2} + d + 1$, existe $I \in \mathcal{T}^s(n, d)$ com $\mu(I) = r$.

De fato, basta tomar

$$I = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-2})^d + \left(x_{n-1}^d, x_n^d\right) + (x_{n-1}, x_n)^{d-h} m'$$

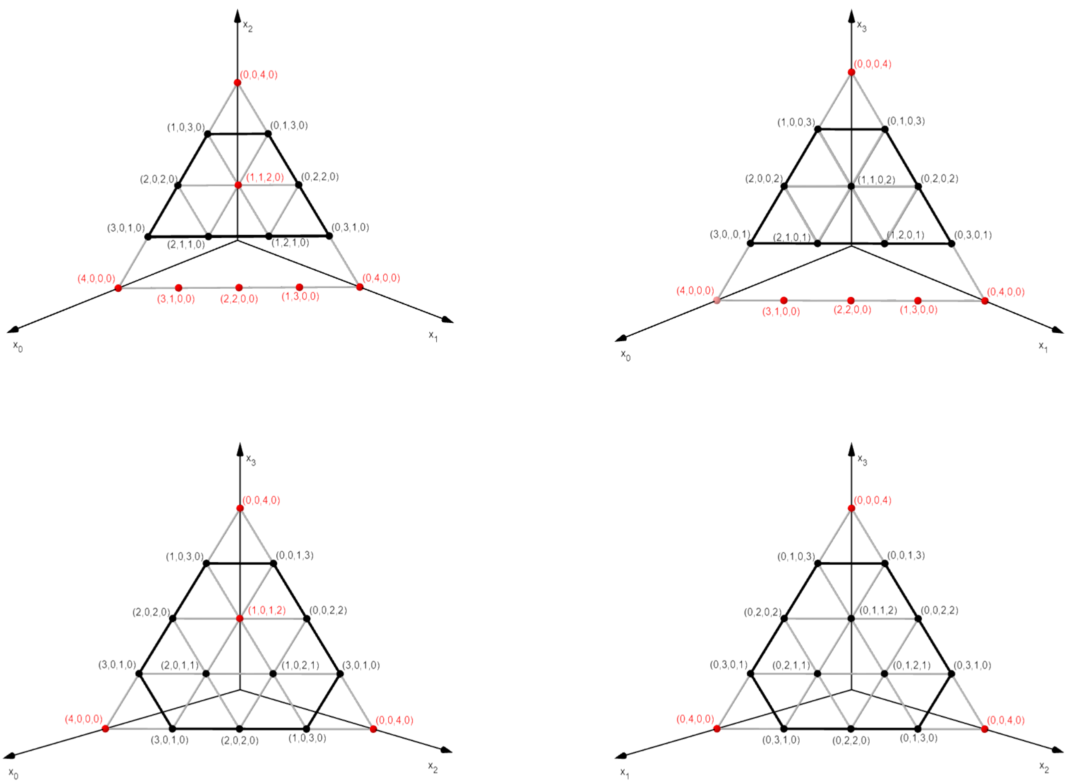
onde $2 \leq h \leq d - n + 1$ e m' é um monômio de grau h contendo apenas $x_0, \cdots, x_{n-2}$.

Ilustraremos o caso $n = 3$ e $d = 4$:

Considere $n = 3$ e $d = 4$. Para este caso, teremos que $\mu(I) = 10$, pois $10 \leq r \leq 10$. Além disso, teremos $h = 2$ e, como m' é um polinômio de grau 2 nas variáveis x_0 e x_1, temos $m' = x_0 x_1$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} I &= (x_0, x_1)^4 + (x_2^4, x_3^4) + (x_2, x_3)^2 (x_0 x_1) \\ &= (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_0^3 x_1, x_0 x_1^3, x_0^2 x_1^2, x_0 x_1 x_2^2, x_0 x_1 x_3^2, x_0 x_1 x_2 x_3). \end{aligned}$$



Se eliminarmos a hipótese de suavidade, podemos generalizar a Proposição 2.3.7:

Proposição 2.3.11 ([19], Proposição 4.7)**.** Vale que:

(a) Para todo $d \geq 4, \mu(n, d) = 2n + 1$;

(b) Para todo $d \geq 4, \rho(n, d) = \binom{n+d-1}{n-1}$;

(c) Para todo $d \geq 4, n = 3$ e todo inteiro r com $\mu(3, d) = 7 \leq r \leq \rho(3, d) = \binom{d+2}{2}$, existe $I \in \mathcal{T}(3, d)$ com $\mu(I) = r$.

Demonstração:

(a) Isto segue diretamente do Teorema 2.3.2.

(b) Sabemos que, para $d \geq 2$,

$$n + 2 \leq \mu(n, d) \leq \mu^s(n, d) \leq \rho^s(n, d) \leq \rho(n, d) \leq \binom{n+d-1}{n-1}.$$

Queremos ver que, existe $I \in \mathcal{T}(n,d)$ tal que $\mu(I)\binom{n+d-1}{n-1}$. Para isto, precismos mostrar que $\rho(n,d) \geq \binom{n+d-1}{n-1}$. De fato, considere

$$
\begin{aligned}
I &= (x_0^d, x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_1(x_1, \cdots, x_n)^{d-1} \\
&+ x_2(x_2, \cdots, x_n)^{d-1} + \cdots + x_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)^{d-1} + x_0^3(x_{n-1}, x_n)^{d-3}.
\end{aligned}
$$

Observemos que, temos $n+1$ monômios da forma $x_0^d, x_1^d, \ldots, x_n^d$ que geram I. Mais ainda, para cada $2 \leq i \leq n-1$, adicionamos $\binom{d-1+i}{1}$ monômios. Esses monômios são escolhidos de maneira que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são elevados a potências que somam até $d-1$, e subtrai-se 1 uma vez que já contamos x_i^d nos termos iniciais, assim, somamos mais $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}\left[\binom{d-1+i}{i}-1\right]$ geradores. Também devemos adicionar $d-2$ monômios da forma $x_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)^{d-1}$ e $x_0^3(x_{n-1}, x_n)^{d-3}$. Desse modo, a quantidade de geradores de I é dada por

$$
\begin{aligned}
\mu(I) &= n+1+\sum_{i=2}^{n-1}\left[\binom{d-1+i}{i}-1\right]+d-2 \\
&= n+1+\sum_{i=2}^{n-1}\binom{d-1+i}{i}-\sum_{i=2}^{n-1}1+d-2 \\
&= n+1+\sum_{i=2}^{n-1}\binom{d-1+i}{i}-n+2+d-2 \\
&= d+1+\sum_{i=2}^{n-1}\binom{d-1+i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{d-1+i}{i} \\
&\underset{\text{soma paralela}}{=} \binom{d-1+n}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Ao considerarmos $x_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, os geradores de I serão linearmente dependentes. Desse modo, I falha WLP em grau $d-1$. Além disso, I é um sistema de Togliatti minimal, pois nele não existe subconjunto próprio de geradores que define um sistema de Togliatti.

(c) Agora, trabalharemos no caso em que $n=3$.

Para $r=7$, podemos tomar

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + x_0^{d-1}(x_1, x_2, x_3),$$

para $r=8$,

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + x_0^{d-2}x_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

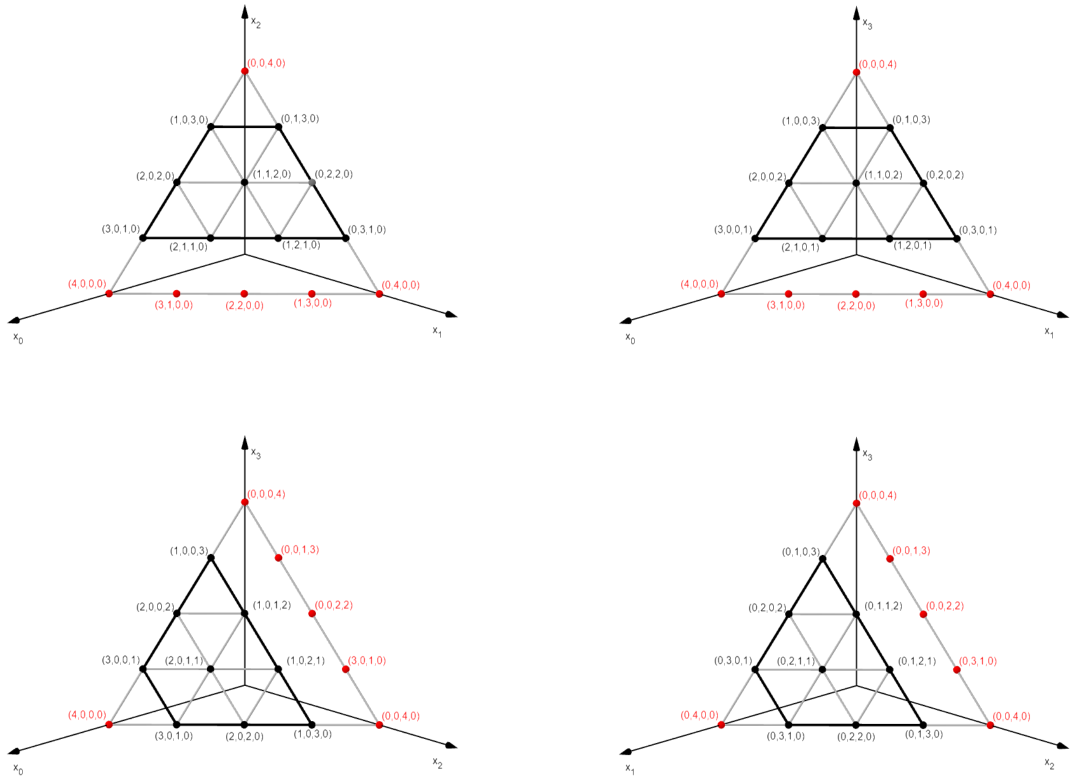
e para $r=9$,

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + x_0^{d-2}(x_1^2, x_0x_1, x_2^2, x_2x_3, x_3^2).$$

Faremos a prova por indução em d.

Para $d = 4$, exibimos um exemplo explícito para qualquer $10 \leq r \leq 14$. [3]

1. Se $r = 10$, então $I = (x_0, x_1)^4 + (x_2, x_3)^4$ e, neste caso, é suave:



2. Se $r = 11$, então $I = (x_0, x_1)^4 + (x_2^4, x_2^3x_3, x_2^2x_3^2, x_3^4, x_0x_2x_3^2, x_1x_2x_3^2)$;
3. Se $r = 12$, então $I = (x_0, x_1)^4 + (x_2^4, x_2^3x_3, x_2x_3^3, x_3^4, x_0^2x_3^2, x_0x_1x_3^2, x_1^2x_3^2)$;
4. Se $r = 13$, então $I = (x_0, x_1)^4 + (x_2^4, x_2^3x_3, x_2x_3^3, x_3^4, x_0^3x_3, x_0^2x_1x_3, x_0x_1^2x_3, x_1^3x_3)$;
5. Se $r = 14$, então $I = (x_0^4, x_1^4, x_2^4, x_3^4) + x_0(m_1, \cdots, m_{10})$, onde cada m_i, com $1 \leq i \leq 10$, é um monômio de grau 3.

Agora, suponha $d > 4$.

Queremos provar que para qualquer $7 \leq r \leq \binom{d+2}{2}$, existe $I \in \mathcal{T}(3, d)$ com $\mu(I) = r$.

Para isto, para todo $7 \leq r \leq \binom{d+1}{2}$, tome $J \in \mathcal{T}(3, d-1)$ com $\mu(J) = s$ e defina

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_3 J.$$

Observe que, $I \in \mathcal{T}(3, d)$ e $\mu(I) = \mu(J) + 3$ e, assim, $10 \leq \mu(J) + 3 \leq \binom{d+1}{2} + 3$. Também temos que $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + x_0(x_1, x_2, x_3)^{d-1} \in \mathcal{T}(3, d)$ e, consequentemente, usando o mesmo raciocínio da proposição anterior para analisar as combinações monomiais da quantidade mínima de geradores de I, obtemos que $\mu(I) = \binom{d+1}{+4}$. Sendo assim, nos resta analisar o intervalo

$$\binom{d+1}{2} + 4 < r \leq \binom{d+2}{2}.$$

[3] O caso em que $r = 15$, recai no item (b) desta proposição.

Visando a isso, para todo $3 \leq i \leq d-1$, defina

$$I_i = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + \underbrace{(x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3})}_{*} + x_0^i (x_2 x_3)^{d-i}$$

em que, em $*, i_1 + i_2 + i_3 = d$ e $1 \leq i_1 < d$.

De início, observemos que $\mu(I_i) = \binom{d+2}{2} + 3 - i$. Para i variando de $i = 3$ a $i = d-1$, analisaremos o intervalo $\left[\binom{d+2}{2} - d + 4, \binom{d+2}{2}\right]$

Vamos mostrar que $I_i \in \mathcal{T}(3, d)$.

Afirmamos que existe uma superfície F_{d-1} contendo todos os pontos integrais de A_{I_i}.

De fato, como $A_{I_i}^1 = d - 1\Delta_2, \cdots, A_{I_i}^{i-1} = (d-i-1)\Delta_2$, temos

$$F_{d-1} = L_1 \cdots F_{i-1} F_{d-i}$$

onde F_{d-i} é uma superfície de garu $d-i$ contendo todos os pontos integrais de $A_{I_i} \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_{I^i}^j$.

As superfícies F_{d-i} de grau $d-i$ são parametrizadas por um $\kappa-$espaço vetorial de dimenção $\binom{d-i3}{3}$. Por outro lado, para conter os pontos $d-1$ de $A_{I_i}^0$, impõe $d-i+1$ condições nas superfícies de grau $d-i$, para conter os pontos de $A_{I_i}^{i+1} = (d-i-1)\Delta_2, \cdots, A_{I_i}^{d-1} = \Delta_2$ impõe $\binom{d-i+1}{2}, \cdots, 3$ condições, respectivamente, e finalmente para conter os pontos de $A_{I_i}^i$ impõe $\binom{d-i+2}{2} - (d-i+1)$ condições. Em resumo, temos $\binom{d-i+3}{3} - 1$ condições. Portanto, existe pelo menos uma superfície F_{d-i} de grau $d-i$ passando por todos os pontos integrais de $A_{I_i} \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_{I_i}^j$ e, consequentemente, uma superfície $F_{d-1} = L_1 \cdots L_{i-1} F_{d-i}$ de grau $d-1$ contendo todos os pontos integrais de A_{I_i}.

■

Em [19], E. Mezzetti e R. M. Miró-Roig, para $n = 3$ e $d = 4$, obtiveram, utilizando o Macaulay2 [11], a lista de todos os sistemas Togliatti minimais com $\mu(I) \leq 13$ e que para $\mu(I) = 14, 15$ os cálculos ficam muito pesados.

Em [23], R. M. Miró-Roig e M. Salat, trabalharam na classificação de sistemas de Togliatti suaves cujo número mínimo de geradores era $2n + 3$, considerando formas de grau $d \geq 4$ e $n \geq 2$, além de trabalharem com ideais em 3 variáveis, onde o número mínimo de geradores é igual a 7, para formas de grau $d \geq 6$. Listamos abaixo os resultados que fazem tal classificação. As demonstrações e as conta dos mesmos podem ser consultadas em [23].

Para $d \geq 3$, defina $M(d) := \left\{x_0^a x_1^b x_2^c \mid a + b + c = d \text{ e } a, b, c \leq d-1\right\}$. Considere os ideais:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_1^3, x_1x_2^2), (x_0^2x_2, x_0x_1x_2, x_1^3, x_1^2x_2), (x_0^2x_2, x_0x_1x_2, x_1^3, x_1x_2^2),\\
&\quad (x_0^2x_1, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2), (x_0^2x_1, x_0x_2^2, x_1^3, x_1x_2^2), (x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1x_2^2),\\
&\quad (x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1x_2^2), (x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3, x_2^3), (x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1^3, x_2^3),\\
&\quad (x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2), (x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2), (x_0^2x_2, x_1^2x_2, x_1^3, x_2^3),\\
&\quad (x_0^2x_1, x_1^2x_2, x_1^3, x_2^3), (x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^3, x_2^3), (x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^3),\\
&\quad (x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1x_2^2), (x_0^2x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2), (x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^3, x_2^3),\\
&\quad (x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_1^3, x_2^3), (x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2), (x_0^2x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^3), \}.\\
B &= \{(x_0^2x_1x_2, x_0x_2^3, x_1^4, x_1^3x_2), (x_0^3x_2, x_0x_1^2, x_2, x_1^4, x_1x_2^3),\\
&\quad (x_0^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_1^4, x_2^4), (x_0^2x_1x_2, x_1^2x_2^2, x_1^4, x_2^4)\}\\
C &= \{(x_0^2x_1x_2^2, x_0x_1^3x_2, x_1^3, x_2^3), (x_0^3x_1x_2, x_0x_1^2x_2^2, x_1^3, x_2^3)\}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3.12 ([23], Teorema 3.8)**.** Seja $I \subset \kappa[x_0, x_1, x_2]$ um sistema Togliatti minimal monomial de formas de grau $d \geq 10$. Suponha que $\mu(I) = 7$. Então, de mudança de coordenadas, um dos seguintes casos é válido:

(a) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^2, x_1^2, x_0x_2, x_1x_2)$ onde $m \in M(d-2)$;

(b) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^2, x_1^2, x_0x_1, x_2^2)$ onde $m \in M(d-2)$;

(c) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$ onde $m \in M(d-3)$;

(d) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_0^{d-3}J$ onde $J \in A$;

(e) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_0^{d-4}J$ onde $J \in B$;

(f) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + x_0^{d-5}J$ onde $J \in C$.

Demonstração: Veja [[23], Teorema 3.8]. ■

Para $d \geq 3$, defina $M^0(d) = \{x_0^a x_1^b x_2^c \mid a+b+c = d.$ e $a, b, c \geq 1\}$.

Teorema 2.3.13 ([23], Teorema 3.9)**.** Seja $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ um sistema Togliatti monomial minimal suave de formas de grau $d \geq 10$. Suponha que $\mu(I) = 2n+3$. Então, $n = 2$ e, a menos de mudança de coordenadas, um dos seguintes casos é válido.

(a) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^2, x_1^2, x_0x_2, x_1x_2)$ com $m \in M^0(d-2)$;

(b) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^2, x_1^2, x_0x_1, x_2^2)$ com $m \in M^0(d-2)$;

(c) $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d) + m(x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0x_1x_2)$ com $m \in M^0(d-3)$.

Demonstração: Pela Proposição 2.3.9, para $n \geq 3$ e $d \geq 4$ não existe sistema de Togliatti minimal monomial suave $I \subset \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ de formas de grau d com $\mu(I) = 2n+3$. Desse modo, $n = 2$. Para $n = 2$, o resultado segue do Teorema acima 2.3.12 e do critério de suavidade 1.2.7.

■

Observe que a hipótese de suavidade é extremamente importante no Teorema acima. Pois, se $n = 3$ e $d \geq 10$, podemos verificar que $I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d) + x_0^{d-2}(x_0x_1, x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2)$

é um sistema de Togliatti minimal monomial de grau d com $\mu(I) = 2n + 3 = 9$, no entanto, não é suave.

Vamos agora trabalhar na classificação de sistemas de Togliatti em que a quantidade de geradores de I está entre $2n + 3$ e $3n + 1$.

Proposição 2.3.14 ([1], Proposição 3.1)**.** Seja $n \geq 4$. Então, não existe $I \in \mathcal{T}(n, 3)$ com $2n + 2 < \mu(I) < 3n$.

Demonstração: Provaremos por indução em n.

Se $n = 4$, temos que $10 < \mu(I) < 12$, o que nos dá que $\mu(I) = 11 = 2n + 3 = 3n - 1$. Entretanto, pelo Lema 2.3.8, item (c), não existe $I \in \mathcal{T}(4, 3)$ com $\mu(I) = 2n + 3 = 11$.

Suponha que o resultado seja válido para $n - 1 \geq 4$.

Assuma que existe $I \in \mathcal{T}(n, 3)$ tal que $\mu(I) = 2n + k$, com $2 \leq k \leq n - 1$.

Assim, temos

$$I = \underbrace{(x_0^3, \cdots, x_n^3)}_{n+1 \text{ geradores}} + \underbrace{(m_1, \cdots, m_{n+k-1})}_{n+k-1 \text{ monômios}},$$

onde $m_i \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ é um monômio de grau 3.

Considere

$$s_i = \# \{m_j \in I; x_i \mid m_j\}$$

o número de monômios $m_j \in I$ que são divisíveis por x_i e

$$s = \max_{0 \leq i \leq n} \{s_i\}.$$

Observemos que, se $s = 0, 1$, ou 2, temos $\mu(I) \leq 2n + 2$. Assim, estamos interessados em quando $s \geq 3$.

Temos dois caso a analisar.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ $s \leq k$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $s = s_0 = \# \{m_j \in I; x_0 \mid m_j\}$. Isto é, queremos que x_0 apareça explicitamente em m_j.

Sendo assim, considere $\{m_1, \cdots, m_s\}$ o conjunto de todos os monômios que são divisíveis por x_0 e o ideal

$$I_1 = \underbrace{(x_1^3, \cdots, x_n^3)}_{n \text{ geradores}} + \underbrace{(m_{s+1}, \cdots, m_{n+k-1})}_{n+k-s-1 \text{ monômios}}$$

em que são retirados os termos divisíveis por x_0.

Uma vez que I é um sistema de Togliatti minimal, deve existir, pela Proposição 1.2.5, uma hiperquádrica F_2 passando por todos os pontos de A_I. Em particular, F_2 passa por todos os pontos de A_I^0, que é dado por $3\Delta_{n-1}$ menos os n vértices, e I_1 é um possível sistema de Togliatti não minimal.

Do fato de que $\mu(I_1) = 2n + k - s - 1$ e das desigualdades $3 \leq s \leq k$ e $3 \leq k \leq n - 1$, obtemos

$$2n - 1 \leq \mu(I) \leq 2n + k - 4 \leq 3n - 5.$$

Considere $I' \subset I_1$ um sistema de Togliatti minimal. Temos que $\mu(I') \leq \mu(I_1) < 3(n - 1)$. Desse modo, pela hipótese de indução, temos $2n - 1 \leq \mu(I') \leq 2n$, isto é, $\mu(I') = 2n - 1$ ou $\mu(I') = 2n$. Analisaremos cada caso:

1. $\mu(I') = 2n - 1 = 2(n-1) + 1$.

   Pelo Lema 2.3.8, item (a),

   $$I' = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n),$$

   assim, $s = n - 1$, que é a quantidade de monômios que aparece explicitamente x_0. Logo,

   $$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + (m_1, \cdots, m_{n-1})$$

   onde cada $i = 1, \cdots, n-1$, $m_i = x_0^{a_0^i} x_2^{a_2^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ tal que $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} a_l^i = 3$ e $a_0^i \neq 0$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$.

   Mas, nesse caso, a menos de mudança de coordenadas, temos

   $$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n)$$

   no entanto, pela dependência linear entre as variáveis, temos, pelo Lema 0.2.11, que I tem WLP e, consequentemente, não é um sistema de Togliatti.

2. $\mu(I') = 2n = 2(n-1) + 2$. Novamente, pelo Lema 2.3.8, item (b),

   $$I' = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_i x_j (x_i, \cdots, x_n),$$

   onde $i, j = 0, \cdots, n$ e $i \neq j$. No entanto, nesse caso, teríamos $s = n$, o que gera uma contradição.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ $s > k$.

Neste caso, pelo Lema 2.3.3, sabemos que, pelo menos uma variável divide todos os monômios m_i. Sem perca de generalidade, assuma que x_0 seja tal variável.

Pela Proposição 1.2.5, existe uma hiperquádrica F_2 em $x_0, \cdots, x_n$ passando por todos os pontos de A_I e, assim,

$$F_2 = L_0 F_1.$$

Entretanto, como não existe nenhum hiperplano F_1 contendo todos os pontos de $A_1 \setminus A_I^0$ e nenhum ponto de $3\Delta_n \setminus A_I$, isto é impossível. Caso contrário, sem perda de generalidade, podemos escrever $F_1 = L_1$, o que nos dá que $(x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0 x_1 (x_0, \cdots, x_n) \subset I$, contrariando a minimalidade I.

■

Pela proposição acima, garantimos que não existe nenhum sistema de Togliatti de cúbicas com geradores entre $2n+2$ e $3n$. Uma pergunta natural, é se é possível generalizar para $d \geq 4$. O próximo resultado nos responde isso.

Teorema 2.3.15 ([1], Teorema 3.2)**.** Sejam $n \geq 4$ e $d \geq 3$. Então, não existe $I \in \mathcal{T}(n, d)$ tal que $2n + 2 < \mu(I) < 3n$.

Demonstração: Vamos provar por indução em n e em d.

Primeiramente, fixemos $n = 4$. E faremos a indução em d. Se $d = 3$, o resultado segue pela proposição anterior.

Assuma que o resultado seja válido para $d - 1 \geq 3$ e vamos provar para d. Sabemos que, para $n = 4$, estamos interessados na não existência de sistemas de Togliatti I com $\mu(I) = 11 = 2n + 3 = 3n - 1$.

Suponha que existe $I \in \mathcal{T}(4, d)$ com $\mu(I) = 11$. Assim,

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d) + (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6),$$

com cada $m_i \in \kappa[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ sendo um monômio de grau d.

Temos dois casos a analisar.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ Cada variável divide no máximo 3 monômios.

Se cada variável divide no máximo 2 monômios, temos que $\mu(I) < 2n + 3$, o que gera uma contradição.

Desse modo, existe uma variável que aparece ao menos em 3 monômios. Sem perda de generalidade, assuma que x_0 seja tal variável e considere

$$I_1 = (x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d) + (m_4, m_5, m_6).$$

I_1 é um possível sistema de Togliatti não minimal.

Considere $I' \subset I_1$ um sistema de Togliatti minimal. Observe que, desse modo, $\mu(I' \leq \mu(I_1) \leq 7$. Por outro lado, como I' é minimal, pela Proposição 2.3.11, $\mu(I') \geq 7$, logo, $I_1 = I'$.

Pelo Teorema 2.3.2

$$I_1 = (x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d) + x_1^{d-1}(x_2, x_3, x_4),$$

desse modo, a menos de mudança de coordenadas,

$$I = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d) + x_0^{d-1}(x_2, x_3, x_4) + x_1^{d-1}(x_2, x_3, x_4)$$

que não forma um sistema de Togliatti, pois tem WLP pela independência linear (Lema 0.2.11).

$\boxed{\text{Caso 2 :}}$ Existe uma variável que divide mais de 4 monômios.

Sem perda de generalidade, assuma que x_0 seja tal variável. Neste caso, pelo Lema 2.3.3, x_0 divide todos os monômios m_i.

Seja $m_i' := m_i / x_0$ e considere

$$I_1 = (x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d) + (m_1', m_2', m_3', m_4', m_5', m_6')$$

um sistema de Togliatti possivelmente não minimal.

Considere $I' \subset I_1$. Então, $\mu(I') \leq \mu(I_1) \leq \mu(I) = 11$, mais ainda, pelo Teorema 2.3.2, sabemos que $\mu(I') \geq 2n + 1$, logo, $\mu(I') = 9, 10$ ou 11. Por hipótese de indução, devemos ter $\mu(I') \neq 11$. Se $\mu(I') = 9$ ou 10, estamos nos casos $\mu(I') = 2n + 1$ e $\mu(I') = 2n + 2$, respectivamente, que correspondem aos Teoremas 2.3.2 e 2.3.4. Logo,

$$I' = (x_0^{d-1}, x_1^{d-1}, x_2^{d-1}, x_3^{d-1}, x_4^{d-1}) + x_0^{d-2}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ou
$$I' = (x_0^{d-1}, x_1^{d-1}, x_2^{d-1}, x_3^{d-1}, x_4^{d-1}) + m(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4).$$
No entanto, I não é minimal, uma vez que I' está propriamente contido em I. Portanto, o resultado é válido para $n = 4$ e para todo $d \geq 3$.

Agora, suponhamos que seja válido para $n-1 \geq 4$ e provaremos para n. Além disso, suponhamos que existe $I \in \mathcal{T}(n,d)$ tal que $\mu(I) = 2n+k$, para $3 \leq k \leq n-1$. Escreva
$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + (m_1, \cdots, m_{n+k-1}$$
onde cada $m_i \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$, para $1 \leq i \leq n+k-1$, é um monômio de grau d.

Considere
$$s_i = \# \{m_j \in I; x_i \mid m_j\}$$
o número de monômios $m_j \in I$ que são divisíveis por x_i e
$$s = \max_{0 \leq i \leq n} \{s_i\}.$$
Observemos que, se $s = 0, 1$, ou 2, temos $\mu(I) \leq 2n+2$. Assim, estamos interessados em quando $s \geq 3$.

Temos dois caso a analisar.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ $s \leq k$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $s = s_0 = \# \{m_j \in I; x_0 \mid m_j\}$, isto é, queremos que x_0 apareça explicitamente em m_j.

Sendo assim, considere $\{m_1, \cdots, m_s\}$ o conjunto de todos os monômios que são divisíveis por x_0 e o ideal
$$I_1 = \underbrace{(x_1^d, \cdots, x_n^d)}_{n \, \text{geradores}} + \underbrace{(m_{s+1}, \cdots, m_{n+k-1})}_{n+k-s-1 \text{monômios}}$$
em que são retirados os termos de I que são divisíveis por x_0.

Uma vez que I é um sistema de Togliatti minimal, deve existir, pela Proposição 1.2.5, uma hiperquádrica F_{d-1} passando por todos os pontos de A_I. Em particular, F_{d-1} passa por todos os pontos de A_I^0, que é dado por $d\Delta_{n-1}$ menos os n vértices, e I_1 é um possível sistema de Togliatti não minimal.

Do fato de que $\mu(I_1) = 2n+k-s-1$ e das desigualdades $3 \leq s \leq k$ e $3 \leq k \leq n-1$, obtemos
$$2n-1 \leq \mu(I) \leq 2n+k-4 \leq 3n-5.$$
Considere $I' \subset I_1$ um sistema de Togliatti minimal. Temos que $\mu(I' \leq \mu(I_1) < 3(n-1)$. Desse modo, pela hipótese de indução, temos $2n-1 \leq \mu(I') \leq 2n$, isto é, $\mu(I') = 2n-1$ ou $\mu(I') = 2n$. Analisaremos cada caso:

1. $\mu(I') = 2n-1 = 2(n-1)+1$.

   Pelo Lema 2.3.8, item (a),
   $$I' = (x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n),$$
   assim, $s = n-1$, que é a quantidade de monômios que aparece explicitamente x_0. Logo,
   $$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + (m_1, \cdots, m_{n-1})$$

onde cada $i = 1, \cdots, n-1$, $m_i = x_0^{a_0^i} x_2^{a_2^i} \cdots x_n^{a_n^i}$ tal que $\sum_{l=0}^{n} a_l^i = d$ e $a_0^i \neq 0$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$.

Mas, nesse caso, a menos de mudança de coordenadas, temos

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + x_0^{d-1}(x_2, \cdots, x_n)$$

no entanto, pela independência linear entre as variáveis, temos, pelo Lema 0.2.11, que I tem WLP e, consequentemente, não é um sistema de Togliatti.

2. $\mu(I') = 2n = 2(n-1) + 2$. Novamente, pelo Lema 2.3.8, item (b),

$$I' = (x_1^d, \cdots, x_n^d) + x_i x_j (x_i, \cdots, x_n),$$

onde $i, j = 0, \cdots, n$ e $i \neq j$. No entanto, nesse caso, teríamos $s = n$, o que gera uma contradição.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ $s > k$.

Neste caso, fixaremos n e faremos a indução em d. Pela proposição anterior, o resultado é válido para $d = 3$. Suponha válido para $d - 1 \geq 3$ e provaremos para d. Tendo em vista que, estamos na situação em que $s > k$, pelo Lema 2.3.3, temos que pelo menos uma variável divide todos os monômios m_i. Sem perca de generalidade, assuma que x_0 seja tal variável. Considere também que $m_i' = m_i / x_0$ e o ideal

$$I_1 = (x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}) + (m_1', \cdots, m_{n+k-1}').$$

Seja $I' \subset I_1$ um sistema de Togliatti minimal. Temos que $\mu(I') \leq \mu(I_1) \leq \mu(I)$. Sendo assim, temos dois casos a analisar.

1. $\mu(I' < \mu(I)$;

   Neste caso, pela hipótese de indução, $\mu(I' = 2n + 1$ ou $\mu(I' = 2n + 2$. Em ambos os casos, I' é um sistema de Togliatti é trivial e consequentemente, I não é trivial.

2. $\mu(I' = \mu(I)$;

   Pela hipótese de indução em d, I' não existe e consequentemente, I não existe.

Portanto, não existe sistema de Togliatti I tal que $\mu(I) \in [2n + 3, 3n - 1]$, para $n \geq 4$ e $d \geq 3$.

■

É importante destacar que, nos dois resultados mencionados anteriormente, a desigualdade $\mu(I) < 3n$ deve ser estrita. Isso ocorre porque, para $\mu(I) = 3n$, obtemos um exemplo de sistema de Togliatti da seguinte forma:

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2} x_n (x_1, \cdots, x_n).$$

Nesse caso específico, a igualdade $\mu(I) = 3n$ é atingida, e esse sistema é um exemplo válido de sistema de Togliatti.

Proposição 2.3.16 ([1], Proposição 4.1)**.** Seja $I \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$, com $n \geq 3$, um sistema de Togliatti minimal de cúbicas. Se $\mu(I) = 3n$, então, a menos de mudança de coordenadas,

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n) + x_0x_1(x_1, \cdots, x_n).$$

Demonstração: Provaremos por indução em n.

Se $n = 3$, usamos o programa Macaulay2 [11] para mostrar que para $I \in \mathcal{T}(3,3)$ minimal com $\mu(I) = 9$,

$$I = (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3) + x_0^2(x_1, x_2, x_3) + x_0x_3(x_1, x_2, x_3).$$

Suponha que o resultado seja válido para $n - 1 \geq 3$ e provaremos para n.

Considere

$$I = \underbrace{(x_0^3, \cdots, x_n^3)}_{n+1 \text{ geradores}} + \underbrace{(m_1, \cdots, m_{2n-1})}_{2n-1 \text{monômios}},$$

onde $m_i \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ é um monômio de grau 3. Considere

$$s_i = \# \{m_j \in I; x_i \mid m_j\}$$

o número de monômios $m_j \in I$ que são divisíveis por x_i e

$$s = \max_{0 \leq i \leq n} \{s_i\}.$$

Observemos que, se $s = 0, 1$, ou 2, temos $\mu(I) \leq 2n + 2$. Assim, estamos interessados em quando $s \geq 3$.

Temos dois caso a analisar.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ $s \leq n$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $s = s_0 = \# \{m_j \in I; x_0 \mid m_j\}$. Isto é, queremos que x_0 apareça explicitamente em m_j.

Sendo assim, considere $\{m_1, \cdots, m_s\}$ o conjunto de todos os monômios que são divisíveis por x_0 e o ideal

$$I_0 = \underbrace{(x_1^3, \cdots, x_n^3)}_{n \text{ geradores}} + \underbrace{(m_{s+1}, \cdots, m_{2n-1})}_{2n-s-1 \text{monômios}}.$$

Este é um sistema de Togliatti monomial, possivelmente não minimal, com $\mu(I_0) < 3(n-1)$, pois $\mu(I) = 3n - 1 - s$ e $s \geq 3$. Por argumentos análogos aos usados na demonstração da Proposição 2.3.14, temos duas possibilidades.

1. $\mu(I_0') = 2n - 1 = 2(n-1) + 1$.

   Pelo Lema 2.3.8, item (a), a menos de mudança de coordenada,

   $$I_0' = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n),$$

   assim, $n-1 \leq s_1 \leq s_0 \leq n$ e $I \supset (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2 (x_2, \cdots, x_n) + x_0 (m_1', \cdots, m_s')$, onde $m_i' = m_i/x_0$. Tendo em vista que $s_1 \leq s_0 \leq n$, no máximo, um monômio m_i' é divisível por x_1. Se existir $s_1 = s_0 = n$ e assumirmos que m_{s_0}' é divisível por x_1, temos, neste caso, que

   $$I_1 = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0(m_1', \cdots, m_{s_0-1}')$$

é um sistema de Togliatti. Mais ainda, observe também que $\mu(I_1) = 2n - 1$, logo, é minimal e, a menos de mudança de coordenadas,

$$I_1 = (x_0^3, x_2^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n)$$

e $I \supset (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0x_1x_2$.

Como $\mu(I) = 3n$, segue que

$$I = (x_0^3, x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0x_1x_2,$$

no entanto, neste caso, I não define um sistema de Togliatti.

Se x_1 não divide nenhum dos monômios m'_i, para $i = 1, \cdots, s_0$, então $s_1 = n - 1$ e, assim, temos duas possibilidades.

a) $s_0 = n$;

Teremos que
$$I_1 = (x_0^3, x_2^3, \cdots, x_n^3) + x_0(m'_1, \cdots, m'_{s_0})$$
é um sistema de Togliatti possivelmente não minimal.

Seja $I'_1 \subset I_1$ um sistema de Togliatti minimal. Novamente, temos

$$I'_1 = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n)$$

ou
$$I'_1 = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0x_2(x_0, x_2 \cdots, x_n).$$

Sendo assim,

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0x_2x_3$$

ou

$$I = x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_2, \cdots, x_n) + x_0x_2(x_0, x_2 \cdots, x_n) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n).$$

Entretanto, em nenhum dos dois casos, I é um sistema de Togliatti.

b) $\mu(I'_0) = 2n = 2(n-1) + 2$

Neste segundo caso, a menos de mudança de coordenadas, pelo Lema 2.3.8, item (b),
$$I'_0 = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1x_2(x_1, \cdots, x_n).$$
Desse modo, temos $s = n$ e $I \supset (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_1x_2(x_1, \cdots, x_n) + x_0(m'_1, \cdots, m'_n)$, no entanto, teríamos $\mu(I) > 3n$, o que gera uma contradição.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ $s > n$.

Pelo Lema 2.3.3, temos que $a_0^0 > 0$, assim, podemos considerar

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0(m'_1 + \cdots, m'_{2n-1})$$

mais ainda, também pelo lema e pela minimalidade de I, obtemos $s_1 \leq, \cdots, s_n \leq n$ (lembrando que $s_l = \#\{m_t \in I; x_l \mid m_t\}$).

Tendo em vista que $\mu(I) = 3n$, existem ao menos dois índices i, j tais que $s_i, s_j \geq 2$. Eliminando os monômios divisíveis por x_i, temos um sistema de Togliatti

$$I_i = (x_0^3, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3) + x_0(m'_{i_1}, \cdots, m'_{i_{2n-1-s_i}})$$

(respectivamente para x_j).

Se $s_i = 2$ e I_i é um sistema de Togliatti minimal com $\mu(I_i) = 3n-3$, aplicando a hipótese de indução,

$$I_i = (x_0^3, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3) + x_0x_n(x_1, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3)$$

(respectivamente para x_j).

Desse modo,

$$I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n^3) + x_0x_n(x_1, \cdots, x_n^3.)$$

Caso contrário, teríamos as seguintes possibilidades.

a) $I_i \supset x_0^3, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)$;

b) $I_i \supset (x_0^3, \cdots, \widehat{x_i^3}, \cdots, x_n^3) + x_0x_u(x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)$;

c) $(I_j \supset (x_0^3, \cdots, \widehat{x_j^3}, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n)$;

d) $I_j \supset (x_0^3, \cdots, \widehat{x_j^3}, \cdots, x_n^3) + x_0x_v(x_0, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n)$.

Sendo assim, temos 3 casos a analisar.

1. $u = v$ e $I \supset (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0x_u(x_0, \cdots, x_n)$;

   Nesse caso, a minimalidade de I seria contrariada.

2. $I \supset (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n)$;

   I não seria minimal.

3. $I = (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) + x_0x_v(x_0, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n)$.

   Neste último caso, se $v \neq i$, então, I contém um sistema Togliatti minimal e, assim, I não seria minimal. Caso contrário, se $v = i$, então teríamos que $I \supset (x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) + x_0x_i(x_0, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n)$. No entanto, neste caso, I contém $(x_0^3, \cdots, x_n^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_n)$ e, consequentemente, I não seria minimal, o que gera uma contradição

■

Generalizando a proposição acima, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3.17 ([1], Teorema 4.2)**.** Seja $I \in \mathcal{T}(n, d)$, com $n \geq 4$ e $d \geq 3$, um sistema de Togliatti minimal. Se $\mu(I) = 3n$, então, a menos de mudança de coordenadas,

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_n) + x_0^{d-2}x_1(x_1, \cdots, x_n).$$

Demonstração: Faremos por indução em d. O caso base, $d = 3$, já foi feito na proposição anterior (2.3.16). Suponha que seja válido para $d-1 \geq 3$ e vamos mostrar para d e considere

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + (m_1, \cdots, m_{2n-1})$$

onde cada $m_i \in \kappa[x_0, \cdots, x_n]$ é um monômio de grau d.

Considere

$$s_i = \# \{m_j \in I; x_i \mid m_j\}$$

o número de monômios $m_j \in I$ que são divisíveis por x_i e

$$s = \max_{0 \leq i \leq n} \{s_i\}.$$

Observemos que, se $s = 0, 1,$ ou 2, temos $\mu(I) \leq 2n + 2$. Assim, estamos interessados em quando $s \geq 3$.

Temos dois caso a analisar.

$\boxed{\text{Caso 1:}}$ $s \leq n$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $s = s_0 = \# \{m_j \in I; x_0 \mid m_j\}$. Isto é, queremos que x_0 apareça explicitamente em m_j.

Sendo assim, considere $\{m_1, \cdots, m_s\}$ o conjunto de todos os monômios que são divisíveis por x_0 e o ideal

$$I_0 = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + (m_{s+1}, \cdots, m_{2n-1}).$$

Este é um sistema de Togliatti monomial, possivelmente não minimal, com $\mu(I_0) \leq 3n - s - 1$. Por argumentos análogos aos usados na demonstração da Proposição 2.3.14, temos duas possibilidades.

1. $\mu(I_0') = 2n - 1 = 2(n-1) + 1$.

   Pelo lema 2.3.8, item (a), a menos de mudança de coordenada,

   $$I_0' = (x_1^3, \cdots, x_n^3) + x_1^2(x_2, \cdots, x_n),$$

   isto é, x_1 divide no máximo um dos monômios $m_1, \cdots, m_n$.

   Se x_1 não divide nenhum desses monômios, então o ideal

   $$I_1 = (x_0^d, x_2^d, \cdots, x_n^d) + (m_1, \cdots, m_n)$$

   é um sistema de Togliatti, possivemente não minimal.

   Seja $I_1' \subset I_1$ um sistema de Togliatti. Por argumentos análogos aos usados na demonstração da Proposição 2.3.14, temos que $\mu(I_1') \in \{2n-1, 2n\}$. Analisaremos cada caso:

   a) $\mu(I_1') = 2n - 1 = (2n-1) + 1$;

      Utilizando novamente o lema 2.3.8, item (a), a menos de mudança de coordenadas,

      $$I_1' = (x_0^d, x_2^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_2, \cdots, x_n)$$

o que nos dá

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + m,$$

onde m é um monômio de grau d, que não é divisível por x_1. No entanto, teríamos que I não seria um sistema de Togliatti, pois não falha a WLP por 0.2.11.

b) $\mu(I_1') = 2n = 2(n-1) + 2$.
Utilizando o Lema 2.3.8, item (b), a menos de mudança de coordenada,

$$I_1' = (x_0^d, x_2^d, \cdots, x_n^d) + m(x_0, x_2, \cdots, x_n)$$

onde m é um monômio de garu $d-1$, e que não é divisível por x_1.
Sendo assim, segue que

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + m(x_0, x_2, \cdots, x_n)$$

e como $x_i \nmid m$, pelas mesmas razões do caso anterior, I não é um sistema de Togliatti.

Por outro lado, se x_1 divide um dos monômios $m_1, \cdots, m_n$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que tal monômio é m_n.

Desse modo, o ideal

$$I_1 = (x_0^d, x_2^d, \cdots, x_n^d) + (m_1, \cdots, m_{n-1})$$

é um sistema de Togliatti possivelmente não minimal. Considere $I_1' \subset I_1$.

Pela Proposição 2.3.14, $\mu(I_1') = 2n + 1 = 2(n-1) + 1$ e, consequentemente,

$$I_1' = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_2, \cdots, x_n).$$

Logo,

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + x_1^{d-1}(x_2, \cdots, x_n) + m',$$

onde m' é um monômio de grau d.

No entanto, neste caso, I é um sistema de Togliatti se, e só se, $m' = x_0^{d-1}x_1$ ou $m' = x_0 x_1^{d-1}$, mas I não seria minimal e teríamos uma contradição.

2. $\mu(I_0') = 2n = 2(n-1) + 2$.

   Pelo Lema 2.3.14, item (b),

   $$I_0' = (x_1^d, \cdots, x_n^d) + m(x_1, \cdots, x_n)$$

   com m, um monômio de grau $d-1$ nas variáveis $x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}$, onde $k \geq 2$ é o número de variáveis deste monômio. Observe que, se $s_{j_1} = n$, então $s_0 = s = n$, logo $I \supseteq (x_0^d, \cdots, x_n^d) + (m_1, \cdots, m_n) + m(m_1, \cdots, x_n)$, no entanto, teríamos $\mu(I) \geq 3n+1$, que é uma contradição.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ $s > n$.

Neste caso, como o Lema 2.3.3, nos garante que $a_0^i > 0$, obtemos

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0(m_1', \cdots, m_{2n-1}').$$

Considere

$$I_0 = (x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}) + (m_1', \cdots, m_{2n-1}')$$

um sistema de Togliatti de grau $d-1$ possivelmente não minimal. Considere, também, $I_0' \subset I_0$ um sistema de Togliatti minimal. Pelo Teorema 2.3.15, $\mu(I_0' \in \{2n+1, 2n+2, 3n\}$. Analisemos os casos.

1. $\mu(I_0') \in \{2n+1, 2n+2\}$;

   Neste caso, pelo Lema 2.3.8,

   $$I_0 \supset (x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}) + x_0^{d-2}(x_1, \cdots, x_n)$$

   ou

   $$I_0 \supset (x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1}) + x_0^{d-3}x_1(x_0, \cdots, x_n),$$

   mas, assim, I não seria minimal, o que é uma contradição.

2. $\mu(I_0') = 3n$.

   Por hipótese de indução,

   $$\begin{aligned} I_0 &= \underbrace{(x_0^{d-1}, \cdots, x_n^{d-1})}_{n+1 \text{ geradores}} + \underbrace{x_u^{d-2}(x_0, \cdots, \widehat{x_u}, \cdots, \widehat{x_v}, \cdots, x_n)}_{n-1 \text{ geradores}} \\ &+ \underbrace{x_u^{d-3}x_v(x_0, \cdots, \widehat{x_u}, \cdots, x_n)}_{n \text{ geradores}}. \end{aligned}$$

   Logo,

   $$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0x_u^{d-2}(x_0, \cdots, \widehat{x_u}, \cdots, \widehat{x_v}, \cdots, x_n) + x_0x_u^{d-3}x_v(x_0, \cdots, \widehat{x_u}, \cdots, x_n).$$

   Observemos que, para I falhar WLP (0.2.11) e, consequentemente, ser um sistema de Togliatti, devemos ter $x_u = x_0$ e $x_v = x_n$, ou seja,

   $$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n)$$

   como queríamos.

■

Agora, sabemos que para $n \geq 4$ e $d \geq 3$, existe um sistema de Togliatti com $3n$ geradores. Como estamos interessados na classificação de sistemas de Togliatti, uma das preocupações é sobre suas características. Sendo assim, o próximo resultado nos diz a respeito da suavidade de um sistema de Togliatti com $3n$ geradores.

Corolário 2.3.18 ([1], Corolário 4.3). Para $n \geq 4$ e $d \geq 3$, não existe $I \in \mathcal{T}^s(n, d)$ com $\mu(I) = 3n$.

Demonstração: Pelo resultado anterior, sabemos que, dado $I \in \mathcal{T}(n,d)$, com $\mu(I) = 3n$,

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n).$$

Observe que o ponto $(d-2, 0, \cdots, 2)$ está na aresta do politopo associado a A_I, mas não está em A_I, portanto pelo critério de minimalidade 1.2.5, I não é um sistema Togliatti suave. ■

Já classificamos os sistemas Togliatti com até $3n$ geradores. Agora, focaremos nas relações dos ideais que possuem $3n+1$ geradores e nos sistemas de Togliatti.

Uma das primeiras observações que podemos fazer é que o resultado anterior nos diz que o intervalo de inexistência do número de geradores de sistemas monomiais suaves de Togliatti é pelo menos [2n+3, 3n]. No entanto, como podemos ver no seguinte exemplo, este intervalo não pode ser ampliado, já no caso de $3n+1$.

Exemplo 2.3.19. Considere o ideal

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-3}x_1x_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-3}x_1x_n(x_0, \cdots, \widehat{x_{n-1}}, x_n),$$

para $d \geq 4$ e $n \geq 4$. Vejamos que $I \in \mathcal{T}^s(n,d)$, com $3n+1$ geradores.

Para isso, pela Proposição 0.2.10 e pelo Teorema 1.1.10, basta mostrar que os geradores de I tornam-se linearmente dependente quando restrito ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Tome $x_2 = -x_0 - x_1 - x_3 - x_n$. Assim,

$$\begin{aligned} I\mid_{\{x_0+x_1+\cdots+x_n=0\}} &= (x_0^d, x_1^d, (-x_0 - x_1 - x_3 - \cdots - x_n)^d \cdots, x_n^d) \\ &+ x_0^{d-3}x_1x_{n-1}(x_0, x_1, -x_n, \cdots, x_{n-1}) \\ &+ x_0^{d-3}x_1x_n(x_0, x_1, -x_{n-1}, \cdots, \widehat{x_{n-1}}, x_n), \end{aligned}$$

e, consequentemente, I falha WLP, pois $x_0^{d-3}x_1x_{n-1}x_n$ aparecem na segunda e na terceira parte do ideal. Portanto, I é um sistema de Togliatti.

Para a minimalidade, ao seguir o mesmo raciocínio, podemos ver que todos os subconjuntos próprios dos geradores de I mantêm sua independência linear quando restritos ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$. Assim sendo, todos esses subconjuntos próprios dos geradores de I tem WLP e, consequentemente, não existe subconjunto próprio em I que define um sistema de Togliatti. Logo, I é minimal. Finalmente, em relação à suavidade, temos que o politopo associado a A_I é o simplexo truncado, e, portanto, I é um sistema de Togliatti monomial minimal suave.

Com o exemplo acima e os resultados anteriores, concluímos que não existe sistema de Togliatti $I \in \mathcal{T}^s(n,d)$, para $d \geq 4$ e $n \geq 4$, com $2n+2 < \mu(I) < 3n+1$.

Tendo estabelecido a existência de uma lacuna no intervalo admissível para o número de gerados dos sistemas de Togliatti minimais monomiais, a pergunta que surge naturalmente é se essa lacuna é única. A seguir elencamos uma série de famílias de exemplos que nos auxiliarão a determinar o que ocorre no caso $n = 4$.

Exemplo 2.3.20. Considere os ideais para $d \geq 4$:

1. $I = (x_0^d, x_3^d, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1} + x_0^{d-2}(x_2, x_3, x_4)^2 + x_0^{d-1}(x_3, x_4)$;

   Afirmamos que I forma um sistema de Togliatti minimal com $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + 11$.

De fato, para a quantidade de geradores, vejamos que

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{(x_0^d, x_3^d, x_4^d)}_{3\,\text{geradores}} + \underbrace{x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2}}_{\text{Parte}\,2} + \underbrace{x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1}}_{\text{Parte}\,3} \\ &+ \underbrace{x_0^{d-2}(x_2, x_3, x_4)^2}_{6\,\text{geradores}} + \underbrace{x_0^{d-1}(x_3, x_4)}_{2\,\text{geradores}}; \end{aligned}$$

A fórmula para calcular o número de combinações para obter monômios de grau d em r variáveis é dada por $\binom{d+n-1}{d-1}$.

Para aplicar essa fórmula à Parte 2 do ideal, onde estamos lidando com 4 variáveis $d-2$, a expressão é

$$\binom{d-2+4-1}{d-3} = \binom{d+1}{d-3}.$$

Na parte do ideal, onde lidamos com 3 variáveis e grau $d-1$, a expressão é:

$$\binom{d-1+3-1}{d-2} = \binom{d+1}{d-2}.$$

Somando a quantidade de geradores da parte 2 e da parte 3 de I, temos:

$$\begin{aligned} \binom{d+1}{d-3} + \binom{d+1}{d-2} &= \frac{(d+1)!}{2!(d-1)!} + \frac{(d+1)!}{3!(d-2)!} \\ &= \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d+1)(d-1)}{6} \\ &= \frac{3d(d+1) + d(d+1)(d-1)}{6} \\ &= \frac{d(d+1)(3+d-1)}{6} \\ &= \frac{d(d+1)(d+2)}{6} \\ &= \binom{d+2}{3}. \end{aligned}$$

Desse modo, somando todos os geradores de I, concluímos que, $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + 11$.

Observe que $(x_0^d, x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d)$ está em I. Omitimos x_1^d e x_2^d da primeira parte, pois já aparecerão na parte 2 e parte 3, respectivamente.

Vejamos agora que I define um sistema de Togliatti minimal. Para isto, basta provar que seus geradores tornam-se linearmente dependentes quando restritos ao hiperplano $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (0.2.10 e 1.1.10).

Tomando $x_4 = -x_0 - x_1 - x_2 - x_3$, segue que

$$\begin{aligned} I\,|_{\{x_0+x_1+\cdots+x_4=0\}} = (x_0^d, \cdots, x_3^d, (-x_0 - \cdots - x_3)^d) + \underbrace{x_1^2(x_1, x_2, x_3, -x_0)^{d-2}}_{\text{Parte 1}} + \\ \underbrace{x_2(x_2, x_3, -x_0 - x_1)^{d-1}}_{\text{Parte 2}} + \underbrace{x_0^{d-2}(x_2, x_3, -x_0 - x_1)^2}_{\text{Parte 3}} + \underbrace{x_0^{d-1}(x_3, -x_0 - x_1 - x_2)}_{\text{Parte 4}} \end{aligned}$$

Considere $m_1 = x_2(-x_0 - x_1)^{d-1} \in$ Parte 2. Na parte 1, este gerador simplifica para $x_0^{d-1}x_2 + x_0^{d-2}x_1x_2$. Sendo $m_2 = x_0^{d-2}(-x_0 - x_1)^2 \in$ Parte 3, na parte 1 este simplifica para $x_0^{d-1}x_1$. Agora, pode-se ver que os geradores m_1 e m_2, juntamente com os geradores $m_3 = x_0^{d-1}x_2 + x_0^{d-1}x_1 \in$ Parte 4 e $m_4 = x_0^{d-2}x_2(-x_0 - x_1) \in$ Parte 3 são linearmente dependentes e, consequentemente, I forma um sistema de Togliatti.

Para a minimalidade, procedendo da mesma forma, pode-se verificar que todos os subconjuntos próprios dos geradores de I permanecem linearmente independentes quando restritos ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots + x_4 = 0$. Portanto, todos os subconjuntos próprios dos geradores de I possuem WLP e, portanto, I é um sistema de Togliatti minimal.

2. $J = (x_0^d, x_3^d, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1} + x_0^{d-2}(x_2, x_3, x_4)^2$
$+x_0^2x_1^{d-3}(x_3, x_4)$.

   Tal ideal forma um sistema de Togliatti com $\mu(J) = \binom{d+2}{3} + 11$. Para ver isto, os argumentos são análogos aos usados para provar que ideal I do item anterior é um sistema de Togliatti com $\binom{d+2}{3} + 11$ geradores.

   Para o caso de minimalidade, temos que J é minimal se, e só se, $d = 4$. De fato, se $d \geq 5$, ao removermos o gerador $x_0^2x_1^{d-3}x_3$ de J, podemos verificar que

$$J' = (x_0^d, x_3^d, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1} + x_0^{d-2}(x_2, x_3, x_4)^2 + x_0^2x_1^{d-3}x_4,$$

   com $J' \subset J$, ainda falha WLP, pois restringindo ao hiperplano $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ os geradores são linearmente dependentes.

No próximo resultado, estabeleceremos a recíproca do Teorema 2.3.17. Demonstraremos também a existência de sistemas de Togliatti com $\mu(I) = 4n - 2$ geradores. Além disso, apresentaremos a demonstração de que um ideal específico com $3n + 1$ geradores é, de fato, um sistema de Togliatti.

Lema 2.3.21 ([1], Lema 5.2)**.** Para $n \geq 4$ e $d \geq 3$, vale que:

(a) O ideal
$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$$
é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = 3n$;

(b) O ideal
$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_0, \cdots, \widehat{x_{n-1}}, x_n)$$
é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = 3n + 1$;

(c) O ideal
$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-2})$$
é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = 4n - 2$.

Demonstração: Todos os itens seguem o mesmo argumento.

O fato de I ser um sistema de Togliatti, segue em razão dos geradores de I serem linearmente dependentes quando o restringimos ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$ (0.2.10 e 1.1.10).

Para a minimalidade, basta mostrar que qualquer hipersuperfície de grau $d-1$ que passa pelos pontos de A_I, não contém nenhum ponto integral de $d\Delta_{n-1}\backslash A_I$ exceto possivelmente alguns dos vértices de $d\Delta_n$.

Como nas demonstrações já feitas neste capítulo, seja F_{d-1} uma hipersuperfície de grau $d-1$ contendo todos os pontos integrais de A_I. Sendo assim, F_{d-1} se fatora como

$$F_{d-1} = L_1 F_{d-2}.$$

A hipersuperfície F_{d-2} contém todos os pontos integrais de A_I^0. Uma vez que A_I^0 é igual a $d\Delta_{n-1}$ menos os vértices, o que nos dá que

$$F_{d-2} = L_0 F_{d-3}.$$

Como $A_I^2 = (d-2)\Delta_{n-1}$,

$$F_{d-3} = L_2 F_{d-4}.$$

Repetindo o argumento, segue que

$$F_{d-1} = L_0 L_1 \cdots L_{d-3} F_1,$$

onde F_1 é o hiperplano contendo os pontos inteiros de $A_I^{d-2} \cup A_I^{d-1} \cup A_I^d$. Tais pontos são pontos inteiros da forma $(d-1, 0, \cdots, 1)$ ou $(d-2, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0)$ com $a_i \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i = 2$. Pode-se verificar que existe um único hiperplano F_1 passando por esses pontos, a saber,

$$F_1 = x_0 - \frac{(d-2)}{2}x_1 - \frac{(d-2)}{2}x_2 - \cdots - \frac{(d-2)}{2}x_{n-1} - (d-1)x_n.$$

Claramente, F_{d-1} não contém nenhum ponto integral de $d\Delta_{n-1}\backslash A_I$. Concluímos assim que I é um sistema Togliatti monomial minimal. ■

Lema 2.3.22 ([1], Lema 5.3)**.** Para $n \geq 4, d \geq 3$ e $1 \leq i \leq d-1$,

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-i}(x_1, \cdots, x_n)^i$$

é um sistema Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = \binom{n+i-1}{n-1} + n + 1$

Demonstração: Análoga à 2.3. ■

Lema 2.3.23 ([1], Lema 5.4)**.** Para $n \geq 4, d \geq 3, 1 \leq i \leq d-2$ e $1 \leq j \leq i+1$, o ideal

$$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1(x_1, \cdots, x_n)^{d-1} + x_0^{d-i-1}x_2(x_2, \cdots, x_n)^i + x_0^{d-j}(x_3, \cdots, x_n)^j$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = \binom{n+d-2}{n-1} + \binom{n+i-2}{n-2} + \binom{n+j-3}{n-3} + n$.

Demonstração: Basta provar que os geradores do ideal I torna-se linearmente dependente quando restrito ao hiperplano $x_0 + x_1 + \cdots x_n = 0$ e qualquer subconjunto próprio dos geradores I permanece linearmente independente quando restrito a $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$. Tomando $x_n = -x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1}$ e fixando j e i, obtemos

$$\begin{aligned}
I\mid_{\{x_0+x_1+\cdots+x_n=0\}} &= (x_0^d,\cdots,x_{n-1}^d,(-x_0-\cdots-x_{n-1})^d)+\underbrace{x_1(x_1,\cdots,x_{n-1},-x_0)^{d-1}}_{\text{Parte 1}}\\
&\quad+\underbrace{x_0^{d-i-1}x_2(x_2,\cdots,x_{n-1},-x_0-x_1)^i}_{\text{Parte 2}}\\
&\quad+\underbrace{x_0^{d-j}(x_3,\cdots,x_{n-1},-x_0-x_1-x_2)^j}_{\text{Parte 3}}.
\end{aligned}$$

Considere o gerador $x_0^{d-j}(-x_0-x_1-x_2)^j \in$ Parte 3. Queremos analisar a dependência linear deste termo com relação aos outros que estão em I. Para isto, trabalharemos nele.

$$\begin{aligned}
x_0^{d-j}(-x_0-x_1-x_2)^j &= x_0^{d-j}[(-1)(x_0+x_1+x_2)]^j\\
&= x_0^{d-j}(-1)^j(x_0+x_1+x_2)^j.
\end{aligned}$$

Aplicamos a expansão binomial, obtemos temos

$$\begin{aligned}
x_0^{d-j}(-1)^j(x_0+x_1+x_2)^j &= x_0^{d-j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}x_0^kx_1^{j-k}x_2^0\\
&= \sum_{k=0}^{j}(-1)^j\binom{j}{k}x_0^{d+j-k}x_1^{j-k}x_2^0\\
&= (-1)^j\binom{j}{0}x_0^{d+j-0}x_1^{j-0}x_2^0+\sum_{k=1}^{j}(-1)^j\binom{j}{k}x_0^{d+j-k}x_1^{j-k}x_2^0\\
&= (-1)^jx_0^{d+j}x_1^j+\sum_{k=1}^{j}(-1)^j\binom{j}{k}x_0^{d+j-k}x_1^{j-k}x_2^0\\
&= (-1)^jx_0^{d+j}x_1^j+\sum_{k=1}^{j}(-1)^j\binom{j}{k}x_0^{d+j-k}x_1^{j-k}\\
&= x_0^{d-j}(-x_0-x_1)^j+\sum_{k=1}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}x_0^{d-j}x_2^k(-x_0-x_1)^{j-k}
\end{aligned}$$

Uma vez que $1 \leq j \leq i+1$, podemos ver que $x_0^{d-j}(-x_0-x_1)^j$ e $\sum_{k=1}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}x_0^{d-j}x_2^k(-x_0-x_1)^{j-k}$ são combinações lineares de x_0^d, parte 1 e parte 2, respectivamente. Portanto, I é um sistema de Togliatti. Além disso, da mesma maneira, podemos ver que todos os subconjuntos próprios dos geradores tem WLP e, consequentemente, concluímos que I é um sistema de Togliatti monomial minimal. ■

Lema 2.3.24 ([1], Lema 5.5). Para $d \geq 3$, vale que

(a) O ideal

$$\begin{aligned}
I &= (x_0^d,\cdots,x_4^d)+x_1^2(x_1,\cdots,x_4)^{d-2}+x_2^2(x_2,x_3,x_4)^{d-2}+x_0^{d-1}(x_1,x_2)\\
&+ x_0^{d-2}x_1(x_3,x_4)+(x_3,x_4)^d
\end{aligned}$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I)=\binom{d+2}{3}+6$;

(b) O ideal

$$I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_1(x_1, \cdots, x_4)^{d-1} + x_0^{d-1}(x_2, x_3, x_4)$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + 7$;

(c) O ideal

$$I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1} + x_0^{d-1}(x_3, x_4) + x_0^{d-2}x_1(x_0, x_3, x_4)$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + 8$.

Demonstração: A prova de que é um sistema de Togliatti monomial minimal é análoga à prova de 2.3.23. Para a contagem de geradores, utilizamos o mesmo processo feito no Exemplo 2.3.20.

■

Lema 2.3.25 ([1], Lemas 5.6 e 5.7)**.** Para $d \geq 4$, temos que:

(a) Para $2 \leq i \leq d-2$, o ideal

$$I = \left(x_0^d, \cdots, x_4^d\right) + x_1^2\left(x_1, \cdots, x_4\right)^{d-2} x_2\left(x_2, x_3, x_4\right)^{d-1} + x_0^{d-1}\left(x_3, x_4\right) + x_0^{d-i}\left(x_2, x_3, x_4\right)^i$$

é um sistema de Togliatti monomial minimal com $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{3} + 5$;

(b) Para $1 \leq i \leq d-3$, o ideal

$$I = \left(x_0^d, \cdots, x_4^d\right) + x_1\left(x_1, \cdots, x_4\right)^{d-1} x_2\left(x_2, \cdots, x_4\right)^{d-1} + x_0^{d-i}\left(x_3, x_4\right)^i$$

é um sistema de Togliatti com $\mu(I) = \binom{d+2}{3} + \binom{d+1}{3} + i + 4$.

Demonstração: A prova de que é um sistema de Togliatti monomial minimal é análoga à prova de 2.3.23. Para a contagem de geradores, utilizamos o mesmo processo feito no Exemplo 2.3.20.

■

A seguir veremos que para $n = 4$ a lacuna determinada pelo Teorema 2.3.15 é única.

Teorema 2.3.26 ([1], Teorema 5.8)**.** Para $d \geq 3$ e para todo $r \in [9, \binom{d+3}{3}] \backslash 11$, existe $I \in \mathcal{T}(4, d)$ com $\mu(I) = r$.

Demonstração: De início, observemos que, como $2n + 1 \leq \mu(I) \leq \binom{d+n-1}{n-1}$, temos que, para $n = 4$, $9 \leq \mu(I) \leq \binom{d+3}{3}$. Sendo assim, faremos a prova por indução em d.

Para $d = 3$, temos que $r \in [9, 20] \backslash 11$, uma vez que não existe sistema de Togliatti com 11 geradores pra $n = 4$, pois, neste caso, $\mu(I) = 11 = 2n + 3$. Sendo assim, analisaremos caso a caso, estes possíveis valores de r.

r	Resultado	Ideal
9	2.3.2	$I = (x_0^3, \cdots, x_4^3) + x_0^2(x_1, \cdots, x_4)$
10	2.3.4	$I = (x_0^3, \cdots, x_4^3) + x_0x_1(x_0, \cdots, x_4)$
12	2.3.21 (a)	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$
13	2.3.21 (b)	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_0, \cdots, \widehat{x_{n-1}}, x_n)$
14	2.3.21 (c)	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ $+x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, +x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-2})$
15	2.3.22	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}(x_1, \cdots, x_n)^2$
16	2.3.24 (a)	$I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2^2(x_2, x_3, x_4)^{d-2}$ $+x_0^{d-1}(x_1, x_2) + x_0^{d-2}x_1(x_3, x_4) + (x_3, x_4)^d$
17	2.3.24 (b)	$I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_1(x_1, \cdots, x_4)^{d-1} + x_0^{d-1}(x_2, x_3, x_4)$
18	2.3.24 (c)	$I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_1^2(x_1, \cdots, x_4)^{d-2} + x_2(x_2, x_3, x_4)^{d-1}$ $+x_0^{d-1}(x_3, x_4) + x_0^{d-2}x_1(x_0, x_3, x_4)$
19	2.3.23	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1(x_1, \cdots, x_n)^{d-1} + x_0^{d-2}x_2(x_2, \cdots, x_n)$ $+x_0^{d-1}(x_3, \cdots, x_n)$
20	2.3.23	$I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_1(x_1, \cdots, x_n)^{d-1} + x_0^{d-2}x_2(x_2, \cdots, x_n)$ $+ x_0^{d-2}(x_3, \cdots, x_n)^2$

Portanto, percebemos que para todo $\mu(I) = r \in [9, 20] \backslash 11$, obtemos um sistema de Togliatti monomial minimal de cúbicas.

Agora, suponha que o resultado seja válido para $d - 1 \geq 3$ e provaremos para $d \geq 3$.

De início, observe que, para $J \in \mathcal{T}(4, d-1)$, o ideal $I = (x_0^d, \cdots, x_4^d) + x_0 J$ pertence a $\mathcal{T}(4, d)$ e $\mu(I) = \mu(J) + 4$.

Desse modo, tomando $J \in \mathcal{T}(4, d-1)$ com $\mu(J) \in \left[9, \binom{d+2}{3}\right] \backslash \{11\}$, segue que $I \in \mathcal{T}(4, d)$ com $\mu(I) \in \left[13, \binom{d+2}{3} + 4\right] \backslash \{15\}$. Garantimos a existência de $I \in \mathcal{T}(4, d)$ com $\mu(I) \in \{9, 10, 12, 15\}$ pelos Teoremas 2.3.2 e 2.3.4 e pelos Lemas 2.3.21 2.3.22. Os ideais dados nos Lemas 2.3.22 (para $i = d-1$) e 2.3.24 percorrem o intervalo $\left[\binom{d+2}{3} + 5, \binom{d+2}{3} + 8\right]$.

Agora, considere J_i e $J_{i,j}$ dois sistemas de Togliatti minimais como nos Lemas 2.3.23 e 2.3.25, respectivamente. Observemos que

1. Para cada inteiro i fixado, os ideais $J_{i,j}$, com $1 \leq j \leq i+1$ percorrem o intervalo $\left[\binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{2} + 6, \binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{2} + i + 6\right]$;

2. Para $2 \leq i \leq d-2$,
$$\mu(J_{i-1,i} = \binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{2} + i + 5$$
e
$$\mu(J_{i-1,i} = \binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{2} + 6.$$

Desse modo, o único número inteiro que falta entre $\mu(J_{i-1,i})$ e $\mu(J_{i,1})$ é $\binom{d+2}{3} + \binom{i+2}{2} + 6$.

Assim, os ideais J_i e $J_{i,j}$ combinados percorrem o intervalo $\left[\binom{d+2}{3} + 9, \binom{d+2}{3} + \binom{d}{2} + d + 4\right]$. E, por fim, os ideais dados no Lema 2.3.25, percorrem o intervalo $\left[\binom{d+2}{3} + \binom{d}{2} + d + 5, \binom{d+3}{3}\right]$, encerrando assim, nossa demonstração.

■

Como nossos estudos foram voltados para os resultados já obtidos até o momento sobre a classificação de sistemas de Togliatti minimais monomiais, os resumimos na tabela a seguir.

Cassificação dos sistemas de Togliatti minimais monomiais		
	Sistema de Togliatti	Suave
$d=2$ $n=2\lambda$ ou $n=2\lambda+1$	$I=(x_0,\cdots,x_\lambda^2)+(x_{\lambda+1},\cdots,x_n)^2$	Sim
$d=3$ $n+1=\sum a_i$	$I=(x_0,\cdots,x_{a_1-1})^3+\cdots+(x_{n+1-a_s},\cdots,x_n)^3+J$	Sim
$d\geq 4$ $\mu(I)=2n+1$	$I_1=(x_0^d,\cdots,x_n^d)+x_0^{d-1}(x_1,\cdots,x_n)$ $I_2=(x_0^4,x_1^4,x_2^4,x_0x_1x_2^2,x_0^2x_1^2)$ $I_3=(x_0^5,x_1^5,x_2^5,x_0^3x_1x_2,x_1x_1^2x_2^2)$	I_1 e I_3
$d\geq 4$ $\mu(I)=2n+2$	$I_1=(x_0^d,\cdots,x_n^d)+m(x_0,\cdots,x_n)$ $I_2=(x_0^5,x_1^5,x_2^5,x_0^3x_1x_2,x_0^2x_1^2x_2,x_0x_1^3x_2)$ $I_3=(x_0^5,x_1^5,x_2^5,x_0^3x_1x_2,x_0x_1^3x_2,x_0x_1x_2^3)$ $I_4=(x_0^5,x_1^5,x_2^5,x_0^2x_1^2x_2,x_0^2x_1x_2^2,x_0x_1^2x_2^2)$ $I_5=(x_0^7,x_1^7,x_2^7,x_0^3x_1^3x_2,x_0^3x_1x_2^3,x_0x_1^3x_2^3)$ $I_6=(x_0^7,x_1^7,x_2^7,x_0^5x_1x_2,x_0x_1^5x_2,x_0x_1x_2^5)$ $I_7=(x_0^7,x_1^7,x_2^7,x_0x_1x_2^5,x_0^3x_1^3x_2,x_0^2x_1^2x_2^3)$	Sim
Se $\mu(I)=2n+3$ e $d\geq 10$, então $n=2$	$I_1=(x_0^d,x_1^d,x_2^d)+m(x_0^2,x_1^2,x_0x_2,x_1x_2)$ $I_2=(x_0^d,x_1^d,x_2^d)+m(x_0^2,x_1^2,x_0x_1,x_2^2)$ $I_3=(x_0^d,x_1^d,x_2^d)+m(x_0^3,x_1^3,x_2^3,x_0x_1x_2)$	Sim
$d\geq 3$, $n\geq 4$ $\mu(I)$ está entre $[2n+3,3n-1]$	Não existe	
$d\geq 3$, $n\geq 4$ $\mu(I)=3n$	$I=(x_0^d,\cdots,x_n^d)+x_0^{d-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})+$ $x_0^{d-2}x_n(x_1,\cdots,x_n)$	Não
$d\geq 3$, $n\geq 4$ $\mu(I)=3n+1$	$I=(x_0^d,\cdots,x_n^d)+x_0^{d-3}x_1x_{n-1}(x_0,\cdots,x_{n-1})+$ $x_0^{d-3}x_1x_n(x_0,\cdots,\widehat{x_{n-1}},x_n)$	Não
$d\geq 3$, $n\geq 4$ $\mu(I)=4n-2$	$I=(x_0^d,\cdots,x_n^d)+x_0^{d-2}x_{n-1}(x_0,\cdots,x_{n-1})+$ $x_0^{d-2}x_n(x_1,\cdots,x_n)x_0^{d-1}(x_1,\cdots,x_n)$	Não

Conclusão

Nesta dissertação, nosso primeiro objetivo foi entender como ideais que falham a propriedade fraca de Lefschetz se relacionam com variedades que satisfazem ao menos uma equação de Laplace, uma vez que é esta conexão que estabelece nosso objeto de estudo, os sistemas de Togliatti. A partir disso, voltamos nossa atenção para a existência ou não existência de Togliatti com relação à quantidade mínima de geradores de um ideal artiniano monomial. Sendo assim, buscamos os resultados já existentes sobre a classificação. Para a classificação em si, começamos com o artigo "Laplace Equations and Weak Lefschetz Property" [20], onde se define pela primeira vez sistema de Togliatti a partir do Teorema do Chá, Teorema 1.1.10, e é feita a classificação para sistemas de Togliatti de cúbicas em 4 variáveis, como podemos ver no Teorema 2.2.5. Como estávamos interessadas em estudar inicialmente os resultados nos graus mais baixos, estudamos também o artigo "Smooth monomial Togliatti systems of cubics" [21], um artigo com uma linguagem bastante combinatória e que começa com um resultado para quádricas, e que nos diz que dado $I \in \mathcal{T}^s(n,2)$ e $n \geq 2$, existe uma bipartição de $n+1 = a_1 + a_2$, com $n-1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 2$, tal que, a menos de mudança de coordenadas, $I = (x_0, \cdots, x_{a_1})^2 + (x_{a_1}, \cdots, x_n)^2$. A partir desse resultado, ao observarmos vários exemplos, obtemos o Corolário 2.1.1 e a Proposição 2.1.2, que nos auxiliam a identificar o sistema de Togliatti monomial minimal suave procurado. Uma vez que, dependendo da quantidade de variáveis do anel de polinômios em que o ideal está contido, existem diversas possibilidades para a_1 e a_2. As demonstrações para sistemas de Togliatti quadráticos e cúbicos foram todas originais, com exceção da Proposição 2.2.6, e inéditas na literatura. Para as cúbicas, como vimos na Proposição 2.2.6, temos que $I = (x_0, \cdots, x_{a_1}) + \cdots + (x_{n+1-a_1}, \cdots, x_n) + J$, onde $J = (x_i x_j x_k \mid i < j < k;\ \forall\ 1 \leq \lambda \leq s\ , \#\left(\{i,j,k\} \cap S_\lambda\right) \leq 1)$ com $S_\lambda = \left\{\sum_{\alpha \leq \lambda - 1} a_\alpha, \cdots, \sum_{\alpha \leq \lambda} a_\alpha - 1\right\}$ e $\sum a_i = n+1$.

Depois de entendermos como se comportam esses sistemas para $d = 2, 3$ fomos para $d \geq 4$, estudando o artigo "The minimal number of generators of a Togliatti system" [19], onde a classificação é feita a partir do número mínimo de geradores de um ideal I, $\mu(I)$, e é concentrado no intervalo admissível $2n+1 \leq \mu(I) \leq \binom{d+n-1}{n-1}$. Em resumo, no Teorema 2.3.2, foi mostrado que para $d \geq 4$ e $\mu(I) = 2n+1$, com $n \geq 2$, todo sistema de Togliatti monomial minimal suave é trivial, com exceção dos casos especiais para $d = 4$ e $d = 5$, para $2n+2$, com $n \geq 2$, foi mostrado no Teorema 2.3.4 que, para $d \geq 3$, o sistema de Togliatti monomail minimal suave é dado por $I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + m(x_0, \cdots, x_n)$, onde m é um monômio de grau d nas variáveis $x_0, \cdots, x_n$, com exceção dos casos especiais para $d = 5$ e $d = 7$. Para o caso em que $\mu(I) = 2n+3$, com $n \geq 3$, foi mostrado na Proposição 2.3.9, que não existe sistema de Togliatti, para $d \geq 3$. Nessa linha de estudos, após estudar toda a classificação feita em [19], fomos para o artigo "Gaps in the number of generators of monomial Togliatti systems" [1]. Como mostrado neste trabalho, não existem sistemas de Togliatti para $\mu(I) \in [2n+3, 3n-1]$, para $n \geq 4$ e $d \geq 3$, como pode ser vimos no Teorema 2.3.15. Já para $\mu(I) = 3n$, com $n \geq 4$, temos que o sistema de Togliatti monomial minimal é dado por $I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-1} x_n (x_1, \cdots, x_n)$, onde $d \geq 3$, sendo este o Teorema 2.3.17. Também vimos, no Exemplo 2.3.19, que ao acrescentarmos um gerador, isto é, $\mu(I) = 3n + 1$, temos o sistema de Togliatti minimal monomial suave, para $n \geq 4$ e $d \geq 3$, $I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-3}x_1x_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-3}x_1x_n(x_0, \cdots, \widehat{x_{n-1}}, x_n)$, e para $\mu(I) = 4n - 2$, com $n \geq 4$, pelo Lema 2.3.21, temos que $I = (x_0^d, \cdots, x_n^d) + x_0^{d-2}x_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1}) + x_0^{d-2}x_n(x_1, \cdots, x_n) + x_0^{d-1}(x_1, \cdots, x_n)$ é um sistema de Togliatti minimal suave para $d \geq 3$. No último resultado dessa dissertação, o Teorema 2.3.26, vimos sobre a existência de sistemas de Togliatti monomiais minimais para $I \subset \kappa[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Sendo assim, estamos interessados em compreender, futuramente, o que acontece para $n = 5$. Temos como objetivos:

1. Verificar se pra $d \geq 4$ e $n \geq 5$ existem novas lacunas no intervalo admissível;

2. Classificar, a menos de mudança de coordenadas, os sistemas de Togliatti minimais monomiais para $d \geq 4$ e $n \geq 5$;

3. Classificar as variedades associadas aos sistemas de Togliatti, a partir do defeito osculatório e determinar quais e quantas equações de Laplace são satisfeitas exatamente.

Bibliografia

[1] Charles Almeida, Aline V. Andrade e Rosa M. Miró-Roig. "Gaps in the number of generators of monomial Togliatti systems". Em: *J. Pure Appl. Algebra* 223.4 (2019), pp. 1817–1831. ISSN: 0022-4049,1873-1376. DOI: 10.1016/j.jpaa.2018.07.009. URL: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.07.009.

[2] Michael Atiyah. *Introdution to commutative algebra*. Translated from the English by Ju. I. Manin. Izdat. "Mir", Moscow, 1972, p. 160.

[3] Maurice Auslander, Idun Reiten e Sverre O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Vol. 36. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Corrected reprint of the 1995 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. xiv+425. ISBN: 0-521-41134-3; 0-521-59923-7.

[4] Holger Brenner e Almar Kaid. "Syzygy bundles on $\mathbb{P}^2$ and the weak Lefschetz property". Em: *Illinois J. Math.* 51.4 (2007), pp. 1299–1308. ISSN: 0019-2082,1945-6581. URL: http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1258138545.

[5] David Cook II. *Lefschetz properties and enumerations*. Thesis (Ph.D.)–University of Kentucky. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012, p. 95. ISBN: 978-1303-68906-2. URL: http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqm&rft_dat=xri:pqdiss:3578155.

[6] David Eisenbud. *Commutative algebra*. Vol. 150. Graduate Texts in Mathematics. With a view toward algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xvi+785. ISBN: 0-387-94268-8; 0-387-94269-6. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5350-1.

[7] Sara Faridi, Anthony Iarrobino, Rosa M. Miró-Roig, Larry Smith e Junzo Watanabe. "Lefschetz Properties and Artinian Algebras". Em: (2016). URL: https://www.birs.ca/workshops/2016/16w5114/report16w5114.pdf.

[8] Davide Franco e Giovanna Ilardi. "On a theorem of Togliatti". Em: *Int. Math. J.* 2.4 (2002), pp. 379–397. ISSN: 1311-6797.

[9] Andreas Gathmann. "Algebraic geometry". Em: *Notes for a class taught at the University of Kaiserslauten (2002/2003) available at http://www. mathematik. unikl. de/˜ gathmann/class/alggeom-2002/main. pdf* (2002).

[10] Israel M. Gelfand, Mikhail M. Kapranov e Andrei V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, pp. x+523. ISBN: 0-8176-3660-9. DOI: 10.1007/978-0-8176-4771-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1.

[11] D. R. Grayson e M. E. Stillman. *"Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry"*. URL: http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[12] Tadahito Harima, Toshiaki Maeno, Hideaki Morita, Yasuhide Numata, Akihito Wachi e Junzo Watanabe. *The Lefschetz properties*. Vol. 2080. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2013, pp. xx+250. ISBN: 978-3-642-38205-5; 978-3-642-38206-2. DOI: 10.1007/978-3-642-38206-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-38206-2.

[13] Tadahito Harima, Juan C. Migliore, Uwe Nagel e Junzo Watanabe. "The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-algebras". Em: *J. Algebra* 262.1 (2003), pp. 99–126. ISSN: 0021-8693,1090-266X. DOI: 10.1016/S0021-8693(03)00038-3. URL: https://doi.org/10.1016/S0021-8693(03)00038-3.

[14] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, pp. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.

[15] Giovanna Ilardi. "Rational varieties satisfying one or more Laplace equations". Em: *Ricerche Mat.* 48.1 (1999), pp. 123–137. ISSN: 0035-5038.

[16] Giovanna Ilardi. "Togliatti systems". Em: *Osaka J. Math.* 43.1 (2006), pp. 1–12. ISSN: 0030-6126. URL: http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1146242993.

[17] Solomon Lefschetz. *Algebraic geometry*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. ix+233.

[18] Francis S. Macaulay. *The algebraic theory of modular systems*. Cambridge Mathematical Library. Revised reprint of the 1916 original, With an introduction by Paul Roberts. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, pp. xxxii+112. ISBN: 0-521-45562-6.

[19] Emilia Mezzetti e Rosa M. Miró-Roig. "The minimal number of generators of a Togliatti system". Em: *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 195.6 (2016), pp. 2077–2098. ISSN: 0373-3114,1618-1891. DOI: 10.1007/s10231-016-0554-y. URL: https://doi.org/10.1007/s10231-016-0554-y.

[20] Emilia Mezzetti, Rosa M. Miró-Roig e Giorgio Ottaviani. "Laplace equations and the weak Lefschetz property". Em: *Canad. J. Math.* 65.3 (2013), pp. 634–654. ISSN: 0008-414X,1496-4279. DOI: 10.4153/CJM-2012-033-x. URL: https://doi.org/10.4153/CJM-2012-033-x.

[21] Mateusz Michałek e Rosa M. Miró-Roig. "Smooth monomial Togliatti systems of cubics". Em: *J. Combin. Theory Ser. A* 143 (2016), pp. 66–87. ISSN: 0097-3165,1096-0899. DOI: 10.1016/j.jcta.2016.05.004. URL: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2016.05.004.

[22] Juan C. Migliore, Rosa M. Miró-Roig e Uwe Nagel. "Monomial ideals, almost complete intersections and the weak Lefschetz property". Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 363.1 (2011), pp. 229–257. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.1090/S0002-9947-2010-05127-X. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05127-X.

[23] Rosa M. Miró-Roig e Martí Salat. "On the classification of Togliatti systems". Em: *Comm. Algebra* 46.6 (2018), pp. 2459–2475. ISSN: 0092-7872,1532-4125. DOI: 10.1080/00927872.2017.1388813. URL: https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1388813.

[24] David Perkinson. "Inflections of toric varieties". Em: *Michigan Math. J.* 48 (2000). Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday, pp. 483–515. ISSN: 0026-2285,1945-2365. DOI: 10.1307/mmj/1030132730. URL: https://doi.org/10.1307/mmj/1030132730.

[25] Richard P. Stanley. "The number of faces of a simplicial convex polytope". Em: *Adv. in Math.* 35.3 (1980), pp. 236–238. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/0001-8708(80)90050-X. URL: https://doi.org/10.1016/0001-8708(80)90050-X.

[26] Richard P. Stanley. "Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property". Em: *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 1.2 (1980), pp. 168–184. ISSN: 0196-5212. DOI: 10.1137/0601021. URL: https://doi.org/10.1137/0601021.

[27] Eugenio G. Togliatti. "Alcuni esempî di superficie algebriche degli iperspazî che rappresentano un' equazione di Laplace". Em: *Comment. Math. Helv.* 1.1 (1929), pp. 255–272. ISSN: 0010-2571. DOI: 10.1007/BF01208366. URL: https://doi.org/10.1007/BF01208366.

[28] Eugenio G. Togliatti. "Alcune osservazioni sulle superficie razionali che rappresentano equazioni di Laplace". Em: *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 25 (1946), pp. 325–339. ISSN: 0003-4622. DOI: 10.1007/BF02418089. URL: https://doi.org/10.1007/BF02418089.

[29] Jean Vallès. "Variétés de type Togliatti". Em: *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343.6 (2006), pp. 411–414. ISSN: 1631-073X,1778-3569. DOI: 10.1016/j.crma.2006.08.004. URL: https://doi.org/10.1016/j.crma.2006.08.004.