

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Eriky Silva Gomes

**Determinação de Momentos do Estimador de Máxima Verossimilhança para
Filas Erlang e Filas Markovianas de Servidor Único**

Belo Horizonte
2024

Eriky Silva Gomes

**Determinação de Momentos do Estimador de Máxima Verossimilhança para
Filas Erlang e Filas Markovianas de Servidor Único**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Frederico Rodrigues Borges da Cruz

Belo Horizonte
2024

Gomes, Eriky Silva.

G633d

Determinação de momentos do estimador de máxima verossimilhança para filas Erlang e filas markovianas de servidor único [recurso eletrônico] / Eriky Silva Gomes – 2024.
1 recurso online (35 f. il., color.): pdf.

Orientador: Frederico Rodrigues Borges da Cruz.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f. 28-29.

1. Estatística – Teses. 2. Teoria das filas – Teses. 3. Inferência bayesiana – Teses. 3. Verossimilhança (Estatística) – Teses. I. Cruz, Frederico Rodrigues Borges da. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

“Determinação de Momentos do Estimador de Máxima Verossimilhança para Filas Markovianas e filas Erlang de Servidor Único”

ERIKY SILVA GOMES

Dissertação submetida à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

Aprovada em 06 de setembro de 2024, pela banca constituída pelos membros:

Documento assinado digitalmente
 **FREDERICO RODRIGUES BORGES DA CRUZ**
Data: 06/09/2024 11:40:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Frederico Rodrigues Borges da Cruz - Orientador
DEST/UFGM

Documento assinado digitalmente
 **ROBERTO DA COSTA QUININO**
Data: 06/09/2024 16:50:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Roberto da Costa Quinino
DEST/UFGM

Documento assinado digitalmente
 **ANDRE LUIZ FERNANDES CANÇADO**
Data: 06/09/2024 14:13:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. André Luiz Fernandes Cançado
DEST/UnB

Belo Horizonte, 6 de setembro de 2024.

*Dedico este trabalho aos meus pais, que viabilizaram a minha
educação.*

Resumo

A teoria das filas é a área de pesquisa que estuda sistemas nos quais os clientes precisam esperar para serem atendidos. Dentre os modelos de filas tradicionais, destacam-se as filas $M/M/1$ e sua generalização, as filas $M/E_r/1$. Um problema de interesse nestes modelos de filas é a estimação da intensidade de tráfego, que representa a proporção do tempo em que clientes estão sendo atendidos. Nesta dissertação foram analisados os momentos centrais (média e variância) do estimador de máxima verossimilhança (EMV) da intensidade de tráfego em filas $M/M/1$ e $M/E_r/1$. Esta análise é válida para amostras pequenas e grandes, o que representa um avanço comparativamente aos resultados assintóticos existentes na literatura, que não valem para amostras pequenas. Simulações de Monte Carlo foram utilizadas para confirmar a exatidão das expressões analíticas obtidas. Observou-se que o EMV da intensidade de tráfego é enviesado, sobretudo em amostras pequenas e em sistemas carregados. Esse comportamento não era previsto pelas expressões assintóticas. Por fim, destacou-se a eficiência numérica das expressões analíticas desenvolvidas, comparativamente às simulações numéricas que seriam necessárias para obter os momentos centrais do EMV.

Palavras-chave: teoria das filas; filas markovianas; inferência.

Abstract

Queueing Theory is a research area that studies systems where customers must wait in order to be served. Among the traditional queueing models, the $M/M/1$ queues and their generalization, the $M/E_r/1$ queues, are relevant. A problem of interest in these models is to estimate the traffic intensity, which represents the proportion of time on which customers are being served. This thesis analyzed the central moments (mean and variance) of the maximum likelihood estimator (MLE) of traffic intensity for $M/M/1$ and $M/E_r/1$ queues. This analysis is valid for both small and large samples, representing an improvement over the asymptotic results present in the literature, which are not valid for small samples. Monte Carlo simulations were used to confirm the accuracy of the obtained analytical expressions. It was observed that the MLE of traffic intensity is biased, especially for small samples and heavily loaded systems. This behavior was not predicted by the asymptotic expressions. Finally, it was noted the efficiency of the developed analytical expression, compared to the numerical simulations that would be required to approximate the central moments of the MLE.

Keywords: queueing theory; markovian queues; inference.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Motivação	9
1.2	Contribuições	10
1.3	Organização do Texto	10
2	Modelos de Filas e Inferência	11
2.1	Filas Markovianas de Servidor Único	11
2.2	Filas Erlang de Servidor Único	13
2.3	Propriedades da Família Exponencial	15
2.4	O <i>Bootstrap</i>	16
3	Determinação de Momentos do Estimador de Máxima Verossimilhança	17
3.1	Esperança	18
3.2	Variância	19
4	Simulações Numéricas	23
5	Conclusões	27
5.1	Observações Finais	27
5.2	Tópicos para Trabalhos Futuros	27
	Referências	28
	Apêndices	30
	Apêndice A <i>Script</i> em R	31

Capítulo 1

Introdução

A teoria das filas é uma área de pesquisa antiga, com trabalhos majoritariamente focados no desenvolvimento de modelos probabilísticos e medidas de desempenho para sistemas nos quais os clientes precisam esperar para serem atendidos ([Choudhury & Basak; 2018](#)). Por outro lado, a inferência estatística em filas, sobretudo a inferência bayesiana, é mais recente.

Um dos modelos de filas mais simples e populares na literatura é a fila markoviana de servidor único, referida como fila $M/M/1$ na notação de [Kendall \(1953\)](#). O trabalho seminal de inferência clássica em filas $M/M/1$ deve-se a [Clarke \(1957\)](#), que derivou os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para a taxa de chegadas e a taxa de serviço desses sistemas, além de propor aproximações para esses estimadores. Posteriormente ocorreram diversos avanços na inferência clássica em sistemas de filas $M/M/1$ e suas generalizações, entre os quais citam-se aqueles relatados nos trabalhos de [Basawa & Prabhu \(1981\)](#) e [Basawa & Prabhu \(1988\)](#), que descobriram propriedades assintóticas dos EMVs para as taxas de chegada e de serviço das filas, e o trabalho de [Wolff \(1965\)](#), com resultados assintóticos para os processos de nascimento e morte, que englobam as filas $M/M/1$.

Esses trabalhos, todavia, consideram esquemas amostrais mais complexos, tais como observar todas as alterações do sistema até um critério de parada pré-definido (veja [Basawa & Prabhu; 1988](#)). Ainda assim, análises sob esse modelo podem ser encontradas em trabalhos recentes na literatura (veja [Singh & Acharya; 2019](#)).

Ao longo do tempo novos esquemas amostrais foram propostos, dentre eles aqueles em que se observa o tamanho da fila em tempos aleatórios suficientemente espaçados ou em tempos de partidas suficientemente espaçados. Trabalhos de inferência sob esses esquemas amostral incluem [Srinivas & Udupa \(2014\)](#), [Quinino & Cruz \(2017\)](#), [Choudhury & Basak \(2018\)](#) e [Basak & Choudhury \(2021\)](#). Embora popular, esse esquema amostral é oneroso, pois requer a coleta de amostras *suficientemente espaçadas* para garantir a suposição *iid*. Dessa forma, coletar amostras rapidamente sob esse esquema amostral é um desafio.

Uma recente alternativa a esses esquemas amostrais tradicionais, que é de interesse desta dissertação, foi proposta por [Srinivas et al. \(2011\)](#). O método de coleta consiste em

contar o número de clientes que chegam durante os tempos de serviço. Dessa forma, é possível obter amostras *iid* de maneira eficiente, pois não há correlação entre observações sucessivas do sistema de filas.

1.1 Motivação

Poucas análises sob o recente esquema amostral proposto por [Srinivas et al. \(2011\)](#) estão disponíveis na literatura. Dentre essas análises pode-se citar o artigo de [Chowdhury & Maiti \(2014\)](#), que apresenta a derivação de estimadores clássicos e bayesianos para filas Erlang de servidor único ($M/E_r/1$), uma generalização das filas markovianas de servidor único.

Em [Chowdhury & Maiti \(2014\)](#), assim como em outros trabalhos baseados nesse esquema amostral, a exemplo de [Singh et al. \(2024\)](#), a distribuição do estimador de máxima verossimilhança da intensidade de tráfego ρ é apresentada sob uma perspectiva assintótica, que desconsidera o truncamento do espaço paramétrico de ρ e é aplicável apenas para amostras grandes.

Esse truncamento do espaço paramétrico afeta a distribuição do estimador de máxima verossimilhança e seus momentos centrais (esperança e variância). Em particular, como pode ser visto na Figura 1.1, o truncamento torna o estimador enviesado em sistemas com intensidades de tráfego moderadas e altas ($\rho > 0.5$).

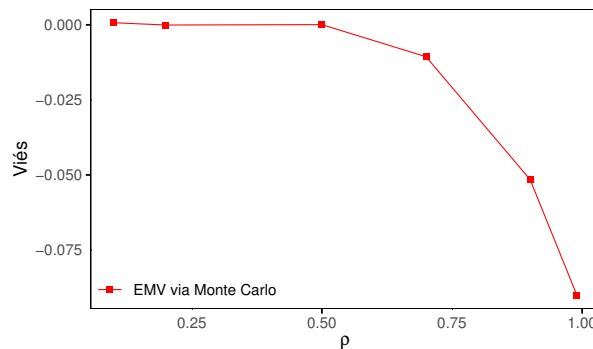


Figura 1.1: Viés em função de ρ

Dessa forma, essa dissertação é motivada pela limitação das análises presentes na literatura acerca dos estimadores de máxima verossimilhança da intensidade de tráfego em filas markovianas e Erlang. Visa, portanto, expandir o conhecimento que se tem desses estimadores para amostras finitas considerando-se o truncamento do espaço paramétrico.

Especificamente, buscam-se determinar a esperança e a variância exatas dos estimadores de máxima verossimilhança para filas markovianas e filas Erlang, que valem para amostras finitas e, como caso limite, devem convergir aos resultados assintóticos. A determinação desses momentos depende da distribuição dos estimadores. Assim, a determinação da distribuição exata do estimador de máxima verossimilhança também faz parte do escopo deste trabalho.

1.2 Contribuições

Diante da motivação apresentada, as principais contribuições desta dissertação, sob o esquema amostral de [Srinivas et al. \(2011\)](#), são citadas a seguir:

- Determinação original da esperança e variância dos EMVs para filas $M/E_r/1$ e seu caso particular $M/M/1$;
- Determinação original da distribuição dos EMVs para filas $M/E_r/1$ e $M/M/1$;
- Explicação do comportamento enviesado dos EMVs para filas $M/E_r/1$ e $M/M/1$.

1.3 Organização do Texto

O restante do texto está organizado como se segue. No Cap. 2 são definidos os modelos probabilísticos de filas analisados neste trabalho e os estimadores de máxima verossimilhança respectivos, discutidas determinadas propriedades de distribuições pertencentes à família exponencial e apresentado o *bootstrap* não-paramétrico. No Cap. 3 deduzem-se os momentos dos estimadores de máxima verossimilhança de filas markovianas e Erlang. O Cap. 4 apresenta simulações Monte Carlo e estimativas pelo *bootstrap*, para validação das expressões desenvolvidas para os momentos. Finalmente, o Cap. 5 encerra o texto, com as principais conclusões desta dissertação e uma breve discussão de tópicos para futuros trabalhos na área.

Capítulo 2

Modelos de Filas e Inferência

Este capítulo desenvolve a fundamentação teórica necessária para a determinação de momentos nos modelos de fila markovianas de servidor único e filas Erlang, objetos de estudo deste trabalho. Nesse sentido, a seção 2.1 descreve o modelo de filas markovianas de servidor único. A seção 2.2 descreve uma generalização desse modelo de filas, que são as filas Erlang de servidor único. A seção 2.3 trata de propriedades da família exponencial que serão necessárias para a determinação do segundo momento central (variância) do estimador de máxima verossimilhança. Por fim, a seção 2.4 descreve o *bootstrap* não-paramétrico, que é um conhecido algoritmo computacionalmente intensivo que permite aproximar os momentos do estimador de máxima verossimilhança.

2.1 Filas Markovianas de Servidor Único

As filas markovianas de servidor único são denotadas por filas $M/M/1$, de acordo com o sistema de notação de Kendall, em que a primeira letra representa um processo de chegada (M , de markoviano, ou Poisson), a segunda letra representa a distribuição do tempo de serviço (M , de markoviano, ou exponencial) e o terceiro símbolo representa o número de servidores (1, para servidor único).

Serão considerados, para a análise do modelo de filas $M/M/1$, dados provenientes da contagem do *número de chegadas durante os tempos de serviço dos clientes*. Assim, considere $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que denotam essas contagens. Então, as variáveis aleatórias $X_i, i = 1, 2, \dots$, têm a seguinte função massa de probabilidade comum,

$$\begin{aligned} \Pr(X = x) &= \Pr\{x \text{ chegadas durante o tempo de serviço do cliente}\} \\ &= \int_0^\infty \Pr\{X = x | T = t\} dB(t), \quad x = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.1)$$

definida em termos de uma integral de Stieltjes, por generalidade, em que $B(t)$ é a distribuição acumulada do tempo de serviço.

Como estamos assumindo que as chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson, condicionado em um tempo de serviço $\{T = t\}$, ou seja,

$$\Pr\{X = x|T = t\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

e que os tempos de serviço são exponenciais, ou seja, com a seguinte função densidade de probabilidade,

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

podemos escrever a equação (2.1) mais simplificadamente, em termos de um integral de Riemann, substituindo $dB(t)$ por $b(t)dt$,

$$\Pr(X = x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

em que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são as taxas de chegada e de serviço, respectivamente.

Por meio de integração por partes, pode-se mostrar que a variável aleatória comum X tem a seguinte função massa de probabilidade:

$$\begin{aligned} \Pr(X = x) &= \frac{\lambda^x \mu}{x!} \int_0^\infty t^x e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \left(\frac{\rho}{1+\rho} \right)^x \frac{1}{1+\rho}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $\rho = \lambda/\mu \in \Theta$ é referida como a intensidade de tráfego da fila. Este é o parâmetro de interesse para inferência nesta dissertação. Para que a fila seja estável, define-se o espaço paramétrico $\Theta = \{\rho : 0 < \rho < 1\}$, o que equivale a considerar que a taxa de chegada é inferior à taxa de serviço.

Logo, tem-se que a variável aleatória X segue uma distribuição geométrica com parâmetro $1/(1+\rho)$, ou seja, $X \sim \text{Geo}(1/(1+\rho))$.

Tome-se uma amostra aleatória simples de X de tamanho n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Então, a função de verossimilhança de $\mathbf{x}$ é dada por

$$\begin{aligned} L(\rho|\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \Pr(X = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \rho^{x_i} (1+\rho)^{-(x_i+1)} \\ &= \rho^y (1+\rho)^{-(n+y)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

O estimador de máxima verossimilhança é obtido ao se tomar a derivada da equação (2.6) com respeito a ρ e igualar essa derivada a zero, sob a restrição do espaço paramétrico $0 < \rho < 1$. Assim, derivando-se a equação (2.6) obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}L(\rho|\mathbf{x}) &= \frac{y}{\rho} - \frac{n+y}{1+\rho} \\ &= \frac{y-n\rho}{\rho(1+\rho)}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Ao tomar essa expressão igual a zero, chega-se ao estimador $\hat{\rho} = y/n$, que é a média amostral. Entretanto, é possível que ocorra que $y \geq n$. Dessa forma, o estimador gera valores de $\hat{\rho}$ fora do espaço paramétrico.

Quando $y \geq n$ a equação (2.7) é estritamente maior que 0 para todo $\rho \in \Theta$, o que significa que a função de verossimilhança é maximizada no extremo superior de Θ , que será denotado por 1^- . Via regra prática, $1^- \equiv 1 - \varepsilon$ onde ε é uma tolerância numérica pré-especificada.

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança para a intensidade de tráfego para filas $M/M/1$ com base em $\mathbf{x}$, como derivado por [Srinivas et al. \(2011\)](#), é dado por

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \frac{y}{n}, & \text{se } y < n, \\ 1^-, & \text{caso contrário.} \end{cases}\tag{2.8}$$

2.2 Filas Erlang de Servidor Único

As filas Erlang de servidor único são denotadas por filas $M/E_r/1$ na notação de Kendall. As filas Erlang generalizam as filas markovianas para casos em que o serviço é realizado em r etapas exponencialmente distribuídas e com mesma taxa. Especificamente, as filas $M/E_r/1$ são caracterizadas por número de chegadas seguindo um processo de Poisson com taxa λ e tempos de serviço realizados em r etapas, em que o tempo de serviço de cada etapa segue uma distribuição exponencial com taxa $r\mu$.

Da construção do modelo, segue-se que os tempos de serviço são somas de r variáveis exponenciais com taxa $r\mu$. Logo, os tempos de serviço têm distribuição Erlang($r, r\mu$). Então, a densidade dos tempos de serviço é dada por

$$b(t) = \frac{(r\mu)^r t^{r-1} e^{-r\mu t}}{(r-1)!}, \quad t \geq 0.\tag{2.9}$$

Similarmente ao modelo $M/M/1$, considere X uma variável aleatória contando o número de chegadas durante um tempo de serviço. Condicionando X ao evento $\{S = t\}$,

observa-se que a distribuição de $\{X|S = t\}$ é $\text{Poisson}(\lambda t)$. Portanto, a função massa de probabilidade de X pode ser obtida marginalizando com respeito a S da forma a seguir:

$$\begin{aligned} \Pr(X = x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \frac{(r\mu)^r t^{r-1} e^{-r\mu t}}{(r-1)!} dt \\ &= \frac{\lambda^x (r\mu)^r}{x! (r-1)!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+r\mu)t} t^{x+r-1} dt \\ &= \binom{x+r-1}{x} \left(\frac{\rho}{\rho+r} \right)^x \left(\frac{r}{\rho+r} \right)^r, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

obtida por meio de integração por partes.

Em outras palavras, a variável aleatória X segue uma distribuição binomial negativa, $X \sim \text{BinNeg}(r, r/(\rho+r))$. Esse resultado é esperado, uma vez que a distribuição Erlang é um caso particular da distribuição gama com parâmetro de forma restrito a valores inteiros.

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de X , a função de verossimilhança de $\mathbf{x}$ é dada por

$$\begin{aligned} L(\rho|\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \Pr(X = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i+r-1}{x_i} \rho^{x_i} (\rho+r)^{-(x_i+r)} \\ &\propto \rho^y (\rho+r)^{-(nr+y)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A derivada da equação (2.11) com respeito a ρ é, então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} L(\rho|\mathbf{x}) &= \frac{y}{\rho} - \frac{nr+y}{\rho+r} \\ &= \frac{yr - nr\rho}{\rho(\rho+r)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Quando $y \geq n$, a derivada em (2.12) é estritamente maior que 0 para todo $\rho \in \Theta$, o que significa que a função de verossimilhança é maximizada no extremo superior do espaço paramétrico. Caso $y < n$, a verossimilhança é maximizada na média amostral.

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança para a intensidade de tráfego para filas $M/E_r/1$ com base em $\mathbf{x}$ é idêntico ao estimador obtido para filas $M/M/1$, equação (2.8), ou seja,

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \frac{y}{n}, & \text{se } y < n, \\ 1^-, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3 Propriedades da Família Exponencial

Considere $f_\alpha(x|\theta)$ uma família de densidades ou funções massa de probabilidade indexadas por um parâmetro θ (apenas o caso de θ unidimensional é relevante para este trabalho) dado um parâmetro de forma α . Então, $f_\alpha(x|\theta)$ é uma família exponencial se puder ser escrita na forma a seguir (Casella & Berger; 2024):

$$f_\alpha(x|\theta) = h(x)c(\theta)e^{w(\theta)t(x)}, \quad (2.14)$$

em que $h(x) \geq 0$, para todo x no espaço amostral, e $c(\theta)$ é a constante de normalização, também chamada de *inversa da transformada de Laplace da família*.

Um importante teorema de inferência garante que, se $f_\alpha(x|\theta)$ é uma família exponencial na parametrização da equação (2.14), o primeiro e o segundo momento central (esperança e variância, respectivamente) podem ser obtidos por meio de operações de diferenciação (Casella & Berger; 2024):

Teorema 1 (Momentos na Família Exponencial). *Se X é uma variável aleatória com densidade ou função massa de probabilidade $f_\alpha(x|\theta)$, uma família exponencial na parametrização apresentada pela equação (2.14), então*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{dw(\theta)}{d\theta}t(X)\right] &= -\frac{d}{d\theta} \log c(\theta), \\ \text{Var}\left[\frac{dw(\theta)}{d\theta}t(X)\right] &= -\frac{d^2}{d\theta^2} \log c(\theta) - \mathbb{E}\left[\frac{d^2w(\theta)}{d\theta^2}t(X)\right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para este trabalho é suficiente considerar o caso particular onde $w(\theta) = \theta$ e $t(X) = X$. Nessas condições a família exponencial é dita estar na forma canônica e as expressões em (2.15) se reduzem a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= -\frac{d}{d\theta} \log c(\theta), \\ \text{Var}[X] &= -\frac{d^2}{d\theta^2} \log c(\theta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A função $-\log c(\theta)$ é conhecida como função cumulante, pois suas derivadas são os cumulantes (momentos centrais) das distribuições da família $f_\alpha(x|\theta)$.

Portanto, o Teorema 1 permite obter os momentos de variáveis aleatórias na família exponencial por meio de derivadas, que frequentemente são procedimento mais simples que as integrações requeridas para obtenção direta de momentos.

2.4 O *Bootstrap*

Os momentos da distribuição amostral de um estimador podem ser aproximados por meio de algoritmos computacionalmente intensivos. Um exemplo tradicional de algoritmo adequado para essa finalidade é o *bootstrap* (Efron & Tibshirani; 1993).

Tome $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma variável aleatória X . Em sua versão não-paramétrica (Efron; 1979), o *bootstrap* aproxima a distribuição de X pela distribuição empírica (de $\mathbf{x}$) cuja função massa de probabilidade f_B é definida por

$$f_B(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x = x_i \text{ para algum } i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, a distribuição de X é aproximada por uma distribuição uniforme discreta, cuja massa é restrita aos valores observados na amostra $\mathbf{x}$. Então, amostras de X podem ser obtidas de maneira aproximada por uma amostragem aleatória simples com reposição de $\mathbf{x}$. Consequentemente, a função massa de probabilidade conjunta $f(\mathbf{x}')$ de uma amostra aleatória simples $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de X é aproximada por $f_B(\mathbf{x}') := \prod_{i=1}^n f_B(x'_i)$.

Para aproximar a esperança de um estimador $\hat{\theta}$ para um parâmetro θ de X , a seguinte relação é utilizada

$$E[\hat{\theta}] = \sum_{\forall \mathbf{x} \in \chi} \hat{\theta}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}|\theta) \approx \sum_{i=1}^B \hat{\theta}(\mathbf{x}_{B,i}) f_B(\mathbf{x}_{B,i}), \quad (2.17)$$

em que $\mathbf{x}_{B,i}$, $i = 1, 2, \dots, B$ são amostras de tamanho n simuladas pelo *bootstrap* (B é um número tipicamente arbitrado em torno de 1.000) e χ é o espaço amostral.

Note que a $\text{Var}[\hat{\theta}] := E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2]$ pode ser aproximada de maneira similar. Dessa forma, o procedimento do *bootstrap* não-paramétrico consiste em simular amostras $\mathbf{x}_{B,i}$, $i = 1, 2, \dots, B$, de tamanho n por meio de reamostragem simples com reposição de $\mathbf{x}$. Então, avalia-se o estimador nas amostras simuladas e as aproximações *bootstrap* da esperança e variância amostrais do estimador podem ser obtidas pela média e variância amostrais calculadas sobre as estimativas simuladas.

Capítulo 3

Determinação de Momentos do Estimador de Máxima Verossimilhança

Um dos poucos trabalhos presentes na literatura sob esse esquema amostral fundamentam-se no Teorema Central do Limite para argumentar que a distribuição assintótica de $\hat{\rho}$ é normal (veja [Singh et al.; 2024](#)). Entretanto, essa distribuição não vale para pequenas amostras e não considera a restrição do estimador ao espaço paramétrico.

O desenvolvimento deste capítulo é um avanço teórico em dois aspectos: permite obter a distribuição exata de ρ , que vale para tamanhos de amostra pequenos (diferente da distribuição assintótica), e considera o efeito da restrição do espaço paramétrico na distribuição do estimador.

No desenvolvimento que se segue, considerou-se as filas Erlang de servidor único, pois as filas markovianas de servidor único podem ser obtidas a partir das filas Erlang ao se tomar o número de estágios $r = 1$.

O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\rho}$ para ρ , apresentado na equação (2.13), é reproduzido a seguir e o interesse é calcular os momentos de $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \frac{y}{n}, & \text{se } y < n, \\ 1^-, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que a expressão analítica do estimador apresenta uma mudança de comportamento de $\hat{\rho}$ quando $y < n$ e quando $y \geq n$. Portanto, condicione a esperança de $\hat{\rho}$ ao evento $\{Y < n\}$:

$$\begin{aligned} E[\hat{\rho}] &= E \left[\hat{\rho} \left[I(Y < n) + I(Y \geq n) \right] \right] \\ &= E[\hat{\rho} | Y < n] \Pr(Y < n) + E[\hat{\rho} | Y \geq n] \Pr(Y \geq n) \\ &= \frac{1}{n} E[Y | Y < n] \Pr(Y < n) + 1^- \Pr(Y \geq n), \end{aligned}$$

em que $I(\bullet)$ é a função indicadora,

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \{A\} \text{ ocorre,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como X é uma variável aleatória com distribuição binomial negativa, ou seja, $X \sim \text{BinNeg}(r, r/(\rho + r))$, segue então que $Y = \sum_1^n X_i \sim \text{BinNeg}(nr, r/(\rho + r))$. Logo $Y^* := \{Y | Y \leq n\}$ tem a distribuição de uma variável aleatória binomial negativa truncada à direita.

Sob outra perspectiva, a variável aleatória $\hat{p}$ é uma transformação injetiva f da variável aleatória Y^* , que tem uma distribuição binomial negativa truncada à direita, a saber,

$$\begin{aligned} f: \{0, 1, \dots, n\} &\rightarrow [0, 1) \\ Y^* &\mapsto \begin{cases} Y^*/n, & \text{se } Y^* < n, \\ 1^-, & \text{se } Y^* = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a distribuição de $\hat{p}$ pode ser estudada a partir de uma distribuição binomial negativa truncada à direita.

Os momentos de uma distribuição binomial negativa truncada à esquerda foram obtidos por [Gurmu & Trivedi \(1992\)](#), mas a variância apresentada está incorreta. Essa questão foi analisada posteriormente por [Shonkwiler \(2016\)](#), que propôs os momentos corrigidos para a distribuição binomial negativa truncada à esquerda ou à direita, mas não apresentou a demonstração das fórmulas obtidas. De outro lado, [Geyer \(2007\)](#) apresentou a demonstração de fórmulas para os momentos de uma distribuição binomial negativa truncada à esquerda, por meio de propriedades da família exponencial.

3.1 Esperança

Uma fórmula para a esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à direita pode ser derivada a partir da expressão da esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à esquerda. A expressão proposta por [Geyer \(2007\)](#) para o truncamento à esquerda é

$$E[Y | Y > k] = \mu + \frac{k + 1}{p(1 + \beta)},$$

em que $\beta = \Pr(Y > k + 1) / \Pr(Y = k + 1)$, μ é a média da distribuição binomial negativa (não truncada) e p é a probabilidade de sucesso.

Relacionando $E[Y | Y \leq k]$, $E[Y | Y > k]$ e $E[Y] = \mu$, tem-se:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E \left[Y \left[I(Y \leq k) + I(Y > n) \right] \right] \\
&= E[Y|Y \leq k] \Pr(Y \leq k) + E[Y|Y > k] \Pr(Y > k).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Logo

$$\begin{aligned}
E[Y|Y \leq k] &= \frac{\mu - E[Y|Y > k][1 - \Pr(Y \leq k)]}{\Pr(Y \leq k)} \\
&= \frac{\mu - \left(\mu + \frac{k+1}{p(1+\beta)} \right) [1 - \Pr(Y \leq k)]}{\Pr(Y \leq k)} \\
&= \mu - \frac{(k+1)[1 - \Pr(Y \leq k)] \Pr(Y = k+1)}{p \Pr(Y > k) \Pr(Y \leq k)} \\
&= \mu - \frac{k+1}{p} \frac{\Pr(Y = k+1)}{\Pr(Y \leq k)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Defina $\gamma_{k+1} = \Pr(Y \leq k) / \Pr(Y = k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. A razão disso ficará clara na demonstração da variância. Então, a esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à direita no ponto $k+1$ é:

$$E[Y|Y \leq k] = \mu - \frac{k+1}{\gamma_{k+1}p}. \tag{3.3}$$

Logo, a esperança do estimador de máxima verossimilhança da intensidade de tráfego em filas $M/E_r/1$ sob o esquema amostral de observar o número de clientes que chegam durante os tempos de serviço é dada por

$$E[\hat{\rho}] = \frac{1}{n} \left(\mu - \frac{n}{\gamma_n p} \right) \Pr(Y < n) + 1 - \left[1 - \Pr(Y < n) \right]. \tag{3.4}$$

3.2 Variância

A obtenção da variância do EMV não é tão elementar quanto seu valor esperado. Um procedimento mais direto envolve as propriedades da família exponencial vistas na Seção 2.3. Por isso, a equação (2.14), que caracteriza a família exponencial, é reproduzida a seguir na sua forma canônica:

$$f_\alpha(y|\theta) = h(y)c(\theta)e^{\theta y}.$$

Considere inicialmente a distribuição binomial negativa tradicional, sem truncamento. Uma conveniente parametrização dessa distribuição é

$$f_\alpha(y|p(\theta)) = \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^\alpha (1 - p)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

em que α é o parâmetro de forma (número de sucessos) e $p = \mu/(\mu + \alpha)$ é a probabilidade de sucesso (não confundir com ρ) de uma distribuição binomial negativa com valor esperado μ .

Manipule algebricamente a equação (3.5) para obter

$$f_\alpha(y|p(\theta)) = \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^\alpha e^{y \log(1-p)}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Comparando com a família exponencial obtém-se $\theta = \log(1 - p)$, $\mu = \alpha e^\theta / (1 - e^\theta)$ e $c(\theta) = p(\theta)^\alpha = (1 - e^\theta)^\alpha$. Logo, a função cumulante é $\psi(\theta) = -\alpha \log(1 - e^\theta)$.

Derivando a função cumulante com respeito a θ , obtém-se $\psi'(\theta) = \alpha e^\theta / (1 - e^\theta) = \mu$ e $\psi''(\theta) = \alpha e^\theta / (1 - e^\theta)^2 = \mu/p = \sigma^2$, como esperado.

Considere agora a distribuição binomial negativa truncada à direita no ponto $k + 1$ e reescreva-a em termos da função indicadora:

$$\begin{aligned} f_\alpha(y|p(\theta)) &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^\alpha (1 - p)^y / F_{\alpha,p}(k), \quad y = 0, 1, 2, \dots, k, \\ &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} I(y \leq k) p^\alpha (1 - p)^y / F_{\alpha,p}(k), \quad y = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $F_{\alpha,p}(k) \equiv F(k) := \Pr(Y \leq k)$ é a função distribuição da binomial negativa tradicional avaliada no ponto k .

Note que tanto $I(y \leq k)$ como $F_{\alpha,p}(k)$ são individualmente funções de θ ou y , mas não de ambos. Dessa forma, a distribuição binomial negativa truncada à direita pertence à família exponencial e tem o mesmo parâmetro canônico $\theta = \log(1 - p)$.

Isso significa que a derivada da função cumulante é a esperança dessa distribuição, que já foi obtida anteriormente, equação (3.3). Logo,

$$\phi'(\theta) = \mu(\theta) - \frac{k + 1}{\gamma_{k+1} p(\theta)}.$$

Derivando essa expressão com respeito ao parâmetro canônico θ é possível obter a variância da distribuição binomial negativa truncada à direita. Com efeito,

$$\begin{aligned} \phi''(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \mu(\theta) - \frac{d}{d\theta} \frac{k + 1}{\gamma_{k+1} p(\theta)} \\ &= \frac{d\mu}{d\theta} - \left[\frac{k + 1}{p^2 \gamma_{k+1}^2} \left(\frac{dp}{d\theta} \gamma_{k+1} + \frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} p \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sejam $d\mu/d\theta = \psi''(\theta) = \sigma^2$ e $dp/d\theta = -e^\theta = -(1-p)$. Resta determinar $d\gamma_{k+1}/d\theta$, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^\alpha (1-p)^y \left[\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} p^\alpha (1-p)^{k+1} \right]^{-1} \\ &= \frac{d}{d\theta} \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} (1-p)^{y-(k+1)} \left[\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} \right]^{-1}.\end{aligned}$$

Como o somatório possui apenas termos finitos, a função somatório possui continuidade com respeito a θ , o que significa que a derivação pode ser realizada termo a termo:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} \left[\frac{d}{d\theta} e^{[y-(k+1)]\theta} \right] \left[\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} \right]^{-1} \\ &= \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} [y-(k+1)] p^\alpha (1-p)^y \left[\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} p^\alpha (1-p)^{k+1} \right]^{-1}.\end{aligned}$$

Reconhecendo esse somatório como uma esperança condicional, a seguinte expressão é justificada:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \frac{E[Y - (k+1) | Y \leq k] F(k)}{\Pr(Y = k+1)} \\ &= [E(Y | Y \leq k) - (k+1)] \gamma_{k+1} \\ &= \left[\alpha \frac{1-p}{p} - \frac{k+1}{\gamma_{k+1}p} - (k+1) \right] \gamma_{k+1} \\ &= \alpha \frac{(1-p)\gamma_{k+1}}{p} - \frac{k+1}{p} - (k+1)\gamma_{k+1}.\end{aligned}$$

Substituindo essas derivadas na equação (3.7) obtém-se uma expressão para a variância da distribuição binomial negativa truncada à direita, a saber,

$$\begin{aligned}\phi''(\theta) &= \sigma^2 + \frac{k+1}{p^2 \gamma_{k+1}^2} \left\{ -(1-p)\gamma_{k+1} + \left[\alpha \frac{(1-p)\gamma_{k+1}}{p} - \frac{k+1}{p} - (k+1)\gamma_{k+1} \right] p \right\} \\ &= \sigma^2 + \frac{k+1}{p^2 \gamma_{k+1}^2} \left[(1-p)(\alpha-1)\gamma_{k+1} - (k+1)(1+p\gamma_{k+1}) \right].\end{aligned}\tag{3.8}$$

Para obter a variância do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\rho}$, note que $\text{Var}[\hat{\rho}] = E[\hat{\rho}^2] - E[\hat{\rho}]^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{\rho}] &= \left\{ \text{E} [\hat{\rho}^2 | Y < n] \text{Pr}(Y < n) + \text{E} [\hat{\rho}^2 | Y \geq n] \text{Pr}(Y \geq n) \right\} - \text{E} [\hat{\rho}]^2 \\
&= \text{E} [Y^2/n^2 | Y < n] \text{Pr}(Y < n) + \text{E} [1^2 | Y \geq n] \text{Pr}(Y \geq n) - \text{E} [\hat{\rho}]^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \text{E} [Y^2 | Y < n] \text{Pr}(Y < n) + 1^2 \text{Pr}(Y \geq n) - \text{E} [\hat{\rho}]^2 \\
&= \frac{1}{n^2} [\mu_{n-1}^2 + \sigma_{n-1}^2] \text{Pr}(Y < n) + 1^2 \text{Pr}(Y \geq n) - \text{E} [\hat{\rho}]^2. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

em que $\mu_{n-1} = \text{E}[Y | Y \leq n-1]$ e $\sigma_{n-1}^2 = \text{Var}[Y | Y \leq n-1]$, dados pelas expressões (3.3) e (3.8), respectivamente.

Capítulo 4

Simulações Numéricas

As deduções matemáticas apresentadas no Cap. 3 são suficientes para validação das expressões obtidas para os momentos do estimador de máxima verossimilhança de filas Erlang de servidor único. Adicionalmente, foram realizadas simulações Monte Carlo para atestar a eficiência da obtenção analítica da esperança e variância do EMV, comparativamente à abordagem numérica, convencional.

Nessa análise, consideraram-se tamanhos de amostra $n \in \{10, 20, 50, 100, 200\}$, valores de intensidade de tráfego $\rho \in \{0,01; 0,10; 0,20; 0,50; 0,70; 0,90; 0,99\}$ e número de estágios $r \in \{1, 2, 3\}$. Os momentos analíticos foram avaliados para cada combinação de ρ, r e n . Para as simulações Monte Carlo, foram avaliadas a esperança e a variância de 10.000 replicações de amostras para cada combinação de ρ, r e n . Para o *bootstrap*, foram simuladas 1.000 amostras para cada combinação de ρ, r e n , e para cada amostra considerou-se 1.000 replicações *bootstrap*. Quantidades maiores e menores de amostras e replicações também foram testadas, sem alteração significativa nas conclusões apresentadas.

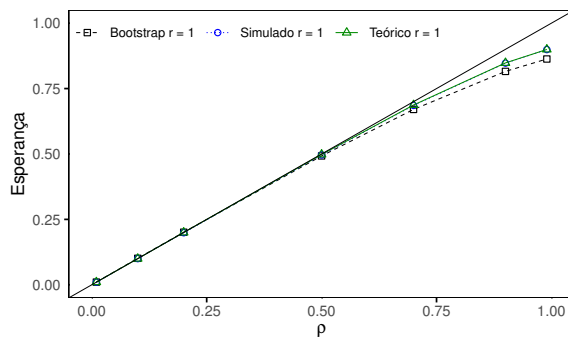
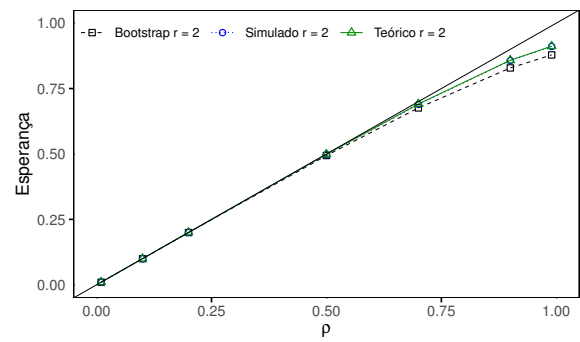
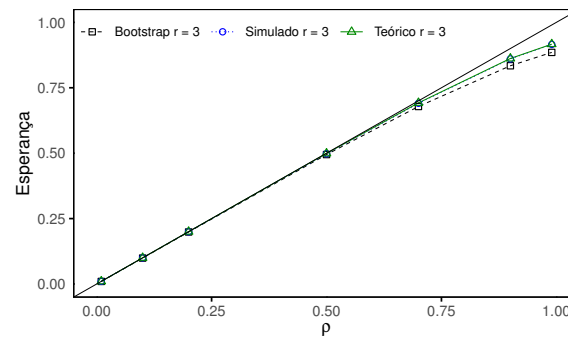
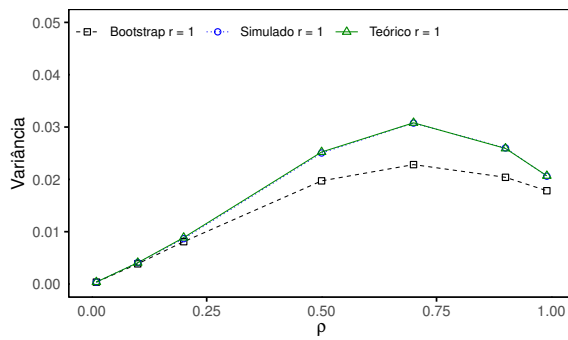
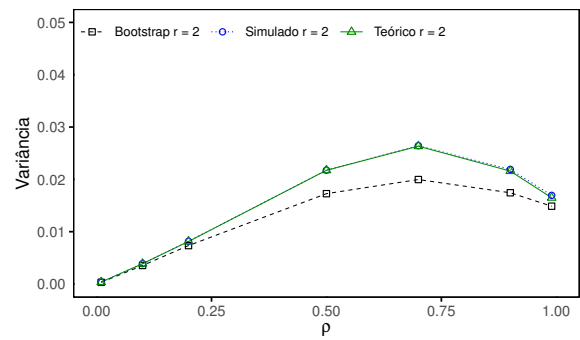
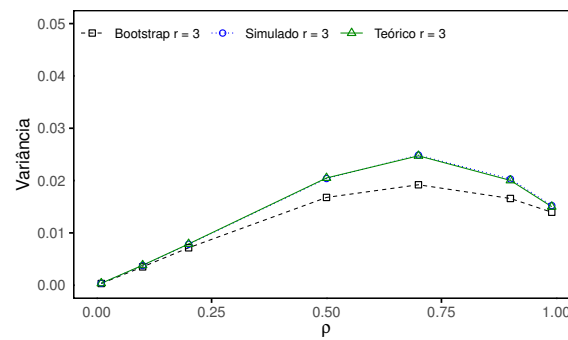
Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.1. Percebe-se que as esperanças e variâncias obtidas pelas simulações Monte Carlo são próximas dos valores teóricos obtidos por meio das expressões analíticas, conforme desejado.

Os resultados da tabela são sintetizados nas Figuras 4.1 e 4.2. Na Figura 4.1 apresentam-se as esperanças dos EMVs em função da intensidade de tráfego (valor médio para os tamanhos de amostra considerados). Pode-se notar que o truncamento torna os estimadores mais enviesados para altas intensidades de tráfego. As curvas teóricas e numéricas se sobrepõem, como é desejável. As curvas do *bootstrap* são uma aproximação do valor esperado e por isso não se sobrepõem às demais, ainda que sejam próximas.

Na Figura 4.2 apresentam-se as variâncias médias dos EMVs em função da intensidade de tráfego. Observa-se que o truncamento reduz a variância dos estimadores para altas intensidades de tráfego, levando a estimativas com maior variância no meio do espaço paramétrico, resultado característico das estimativas de proporções, em que a variância máxima ocorre com $\rho = 0,50$. Por fim, percebe-se que as variâncias simuladas e teóricas se sobrepõem, conforme esperado. As curvas do *bootstrap* são uma aproximação da variância e por isso não se sobrepõem às demais, ainda que sejam próximas.

Tabela 4.1: Esperanças e variâncias (entre parênteses) obtidas por simulações Monte Carlo, pelas expressões analíticas e pelo *bootstrap*

r	Estimador	ρ	n									
			10		20		50		100		200	
1	Simulação	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0110)	0,100	(0,0056)	0,100	(0,0022)	0,100	(0,0011)	0,100	(0,0006)
		0,20	0,197	(0,0233)	0,199	(0,0118)	0,200	(0,0047)	0,200	(0,0024)	0,200	(0,0012)
		0,50	0,488	(0,0630)	0,497	(0,0363)	0,500	(0,0147)	0,499	(0,0074)	0,500	(0,0038)
		0,70	0,652	(0,0701)	0,680	(0,0443)	0,698	(0,0218)	0,699	(0,0117)	0,700	(0,0059)
		0,90	0,776	(0,0597)	0,821	(0,0357)	0,865	(0,0176)	0,882	(0,0106)	0,893	(0,0064)
		0,99	0,818	(0,0517)	0,868	(0,0288)	0,916	(0,0124)	0,938	(0,0066)	0,955	(0,0035)
	Teórico	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0110)	0,100	(0,0055)	0,100	(0,0022)	0,100	(0,0011)	0,100	(0,0006)
		0,20	0,200	(0,0240)	0,200	(0,0120)	0,200	(0,0048)	0,200	(0,0024)	0,200	(0,0012)
		0,50	0,492	(0,0638)	0,499	(0,0361)	0,500	(0,0150)	0,500	(0,0075)	0,500	(0,0038)
		0,70	0,655	(0,0702)	0,683	(0,0442)	0,697	(0,0219)	0,700	(0,0117)	0,700	(0,0059)
		0,90	0,778	(0,0593)	0,824	(0,0354)	0,864	(0,0178)	0,882	(0,0107)	0,893	(0,0064)
		0,99	0,819	(0,0520)	0,870	(0,0286)	0,915	(0,0126)	0,938	(0,0067)	0,955	(0,0035)
	<i>Bootstrap</i>	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,011	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,103	(0,0102)	0,100	(0,0052)	0,102	(0,0022)	0,100	(0,0011)	0,101	(0,0006)
		0,20	0,202	(0,0209)	0,196	(0,0111)	0,205	(0,0049)	0,199	(0,0024)	0,202	(0,0012)
		0,50	0,466	(0,0441)	0,488	(0,0286)	0,508	(0,0146)	0,498	(0,0075)	0,503	(0,0038)
		0,70	0,606	(0,0472)	0,651	(0,0316)	0,697	(0,0185)	0,695	(0,0109)	0,702	(0,0059)
		0,90	0,711	(0,0444)	0,776	(0,0279)	0,844	(0,0150)	0,861	(0,0092)	0,885	(0,0055)
		0,99	0,751	(0,0417)	0,819	(0,0250)	0,890	(0,0120)	0,914	(0,0068)	0,941	(0,0035)
2	Simulação	0,01	0,010	(0,0011)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0106)	0,099	(0,0052)	0,099	(0,0021)	0,100	(0,0010)	0,100	(0,0005)
		0,20	0,201	(0,0221)	0,199	(0,0110)	0,200	(0,0044)	0,200	(0,0022)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,493	(0,0564)	0,496	(0,0306)	0,499	(0,0125)	0,499	(0,0062)	0,500	(0,0031)
		0,70	0,665	(0,0626)	0,685	(0,0377)	0,698	(0,0178)	0,699	(0,0094)	0,700	(0,0047)
		0,90	0,796	(0,0511)	0,836	(0,0297)	0,872	(0,0146)	0,887	(0,0089)	0,895	(0,0053)
		0,99	0,840	(0,0440)	0,884	(0,0231)	0,925	(0,0097)	0,945	(0,0052)	0,960	(0,0027)
	Teórico	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0105)	0,100	(0,0053)	0,100	(0,0021)	0,100	(0,0011)	0,100	(0,0005)
		0,20	0,200	(0,0220)	0,200	(0,0110)	0,200	(0,0044)	0,200	(0,0022)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,495	(0,0561)	0,499	(0,0307)	0,500	(0,0125)	0,500	(0,0062)	0,500	(0,0031)
		0,70	0,667	(0,0617)	0,689	(0,0379)	0,699	(0,0180)	0,700	(0,0094)	0,700	(0,0047)
		0,90	0,798	(0,0498)	0,838	(0,0293)	0,872	(0,0147)	0,887	(0,0088)	0,895	(0,0052)
		0,99	0,842	(0,0421)	0,886	(0,0227)	0,926	(0,0098)	0,946	(0,0052)	0,960	(0,0027)
	<i>Bootstrap</i>	0,01	0,009	(0,0008)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0091)	0,101	(0,0050)	0,099	(0,0020)	0,100	(0,0010)	0,100	(0,0005)
		0,20	0,201	(0,0187)	0,200	(0,0105)	0,197	(0,0043)	0,199	(0,0022)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,477	(0,0392)	0,494	(0,0259)	0,497	(0,0120)	0,501	(0,0062)	0,501	(0,0031)
		0,70	0,627	(0,0420)	0,665	(0,0288)	0,688	(0,0155)	0,698	(0,0088)	0,702	(0,0047)
		0,90	0,742	(0,0379)	0,799	(0,0245)	0,845	(0,0128)	0,871	(0,0076)	0,888	(0,0045)
		0,99	0,783	(0,0351)	0,843	(0,0211)	0,896	(0,0100)	0,925	(0,0053)	0,946	(0,0028)
3	Simulação	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,101	(0,0101)	0,100	(0,0051)	0,100	(0,0021)	0,100	(0,0010)	0,100	(0,0005)
		0,20	0,200	(0,0210)	0,199	(0,0106)	0,200	(0,0042)	0,200	(0,0021)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,494	(0,0532)	0,497	(0,0284)	0,500	(0,0116)	0,499	(0,0058)	0,500	(0,0029)
		0,70	0,668	(0,0591)	0,688	(0,0356)	0,699	(0,0166)	0,699	(0,0087)	0,699	(0,0043)
		0,90	0,804	(0,0471)	0,841	(0,0277)	0,874	(0,0137)	0,888	(0,0083)	0,895	(0,0048)
		0,99	0,849	(0,0392)	0,890	(0,0210)	0,930	(0,0088)	0,948	(0,0047)	0,962	(0,0024)
	Teórico	0,01	0,010	(0,0010)	0,010	(0,0005)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,0001)
		0,10	0,100	(0,0103)	0,100	(0,0052)	0,100	(0,0021)	0,100	(0,0010)	0,100	(0,0005)
		0,20	0,200	(0,0213)	0,200	(0,0107)	0,200	(0,0043)	0,200	(0,0021)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,496	(0,0533)	0,500	(0,0288)	0,500	(0,0117)	0,500	(0,0058)	0,500	(0,0029)
		0,70	0,671	(0,0585)	0,691	(0,0356)	0,699	(0,0166)	0,700	(0,0086)	0,700	(0,0043)
		0,90	0,806	(0,0464)	0,843	(0,0272)	0,875	(0,0136)	0,889	(0,0081)	0,896	(0,0048)
		0,99	0,851	(0,0385)	0,892	(0,0206)	0,930	(0,0088)	0,949	(0,0046)	0,962	(0,0024)
	<i>Bootstrap</i>	0,01	0,009	(0,0009)	0,009	(0,0004)	0,010	(0,0002)	0,010	(0,0001)	0,010	(0,00005)
		0,10	0,095	(0,0091)	0,100	(0,0049)	0,101	(0,0021)	0,099	(0,0010)	0,099	(0,0005)
		0,20	0,195	(0,0182)	0,201	(0,0102)	0,200	(0,0042)	0,198	(0,0021)	0,200	(0,0011)
		0,50	0,476	(0,0389)	0,496	(0,0249)	0,502	(0,0114)	0,499	(0,0058)	0,500	(0,0029)
		0,70	0,633	(0,0414)	0,670	(0,0276)	0,692	(0,0146)	0,698	(0,0082)	0,699	(0,0043)
		0,90	0,753	(0,0374)	0,805	(0,0228)	0,851	(0,0116)	0,873	(0,0069)	0,888	(0,0042)
		0,99	0,795	(0,0342)	0,853	(0,0194)	0,902	(0,0088)	0,927	(0,0048)	0,949	(0,0026)

(a) $r = 1$ (b) $r = 2$ (c) $r = 3$ Figura 4.1: Esperança em função de ρ (a) $r = 1$ (b) $r = 2$ (c) $r = 3$ Figura 4.2: Variância em função de ρ

Em termos de eficiência numérica, observou-se que as expressões analíticas foram avaliadas com tempo computacional 10^3 vezes menor que os resultados das simulações Monte Carlo e 10^4 vezes menor que os resultados do *bootstrap*. As análises também sugerem crescimento linear do tempo de computação das simulações Monte Carlo com o tamanho de amostra. Em contrapartida, as expressões analíticas possuem tempo de computação constante para todo tamanho de amostra.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Observações Finais

Este trabalho teve como objetivo determinar os momentos centrais do estimador de máxima verossimilhança para filas Erlang de servidor único e, conseqüentemente, para filas markovianas de servidor único. As expressões analíticas foram obtidas em termos da distribuição acumulada de uma variável aleatória binomial negativa e validadas complementarmente por meio de simulações Monte Carlo e pelo *bootstrap*, que comprovaram a exatidão dos resultados.

Como produto dessa análise, observou-se que o estimador de máxima verossimilhança estudado é uma transformação injetiva de uma variável aleatória binomial negativa truncada à direita. Logo, sua distribuição e momentos podem ser deduzidos a partir de conhecidas propriedades da família exponencial.

5.2 Tópicos para Trabalhos Futuros

Expressões analíticas para a esperança e a variância de variáveis aleatórias constituem, por si só, um objeto de interesse nas pesquisas em Estatística e Probabilidade. Inobstante, as expressões desenvolvidas nesta dissertação em conjunto à distribuição do EMV podem ser utilizadas em trabalhos futuros para realização de testes de hipótese, intervalos de confiança e correção de viés das estimativas de máxima verossimilhança nas filas Erlang de servidor único.

Referências

- Basak, A. & Choudhury, A. (2021). Bayesian inference and prediction in single server $M/M/1$ queueing model based on queue length, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* **50**(6): 1576–1588.
- Basawa, I. V. & Prabhu, N. U. (1981). Estimation in single server queues, *Naval Research Logistics Quarterly* **28**(3): 475–487.
- Basawa, I. V. & Prabhu, N. U. (1988). Large sample inference from single server queues, *Queueing Systems* **3**(4): 289–304.
- Casella, G. & Berger, R. L. (2024). *Statistical inference*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Choudhury, A. & Basak, A. (2018). Statistical inference on traffic intensity in an $M/M/1$ queueing system, *International Journal of Management Science and Engineering Management* **13**(4): 274–279.
- Chowdhury, S. & Maiti, S. (2014). Bayesian estimation of traffic intensity in an $M/E_r/1$ queueing model, *Research & Reviews: Journal of Statistics* **1**: 99–106.
- Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue, *The Annals of Mathematical Statistics* **28**(4): 1036–1040.
- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics* **7**(1): 1–26.
- Efron, B. & Tibshirani, R. (1993). *An introduction to the bootstrap*, Chapman & Hall, London, UK.
- Geyer, C. J. (2007). Lower-truncated Poisson and negative binomial distributions, *Reatório técnico*, University of Minnesota, Minnesota, MN. Acessado em Junho 2, 2024. **URL:** <https://cran.r-project.org/web/packages/aster/vignettes/trunc.pdf>
- Gurmu, S. & Trivedi, P. K. (1992). Overdispersion tests for truncated poisson regression models, *Journal of Econometrics* **54**(1): 347–370.
- Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains, *Annals Mathematical Statistics* **24**: 338–354.

- Quinino, R. C. & Cruz, F. R. B. (2017). Bayesian sample sizes in an M/M/1 queueing systems, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* **88**(1): 995–1002.
- Shonkwiler, J. (2016). Variance of the truncated negative binomial distribution, *Journal of Econometrics* **195**(2): 209–210.
- Singh, S. K. & Acharya, S. K. (2019). Equivalence between bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **48**(19): 4780–4793.
- Singh, S. K., Cruz, F. R. B., Gomes, E. S. & Banik, A. D. (2024). Classical and Bayesian estimations of performance measures in a single server Markovian queueing system based on arrivals during service times, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **53**(10): 3517–3546.
- Srinivas, V., Subba Rao, S. & Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in $M/M/1$ queue, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **40**:18: 3327–3336.
- Srinivas, V. & Udupa, H. J. (2014). Best unbiased estimation and CAN property in the stable $M/M/1$ queue, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **43**(2): 321–327.
- Wolff, R. W. (1965). Problems of statistical inference for birth and death queueing models, *Operations Research* **13**(3): 343–357.

Apêndices

Apêndice A

Script em R

```

#-----
# This script is related to the thesis:
#
# Gomes, E. S. (Cruz, F. R. B.):
# "Determinacao de Momentos do Estimador de Maxima Verossimilhanca
# para Filas Erlang e Filas Markovianas de Servidor Unico"
#
# Programmed by:
# Eriky S. Gomes & Frederico R. B. Cruz
# Universidade Federal de Minas Gerais
# E-mail: eriky-tn@ufmg.br
# E-mail: fcruz@est.ufmg.br
# (c) 2024 Gomes & Cruz
# v.2024.05.30
#-----

rm(list=ls())

#-----
# moments for right-truncated negative binomial distribution
#-----

#' mean of a right-truncated negative binomial distribution
#' E(Y | Y <= k)
#' @param k The truncation point (not included).
#' @param r The number of success in the negative binomial distribution.
#' @param p The probability of success
#' @return: The mean of the right-truncated distribution.
MeanRTruncNB <- function(k, r, p){
  mu <- r * (1 - p) / p # untruncated
  par <- pnbinom(k, r, p) / dnbinom(k + 1, r, p)
  return(mu - (k + 1) / (p * par))
}

#' variance of a right-truncated negative binomial distribution
#' Var(Y | Y <= k)
#' @param k The truncation point
#' @param r The number of success in the negative binomial distribution.
#' @param p The probability of success
#' @return: The variance of the lower truncated distribution.
VarRTruncNB <- function(k, r, p){
  sigma2 <- r * (1 - p) / p^2 # variance of untruncated distribution
  par <- pnbinom(k, r, p) / dnbinom(k + 1, r, p)

```

```

    delta <- (k+1) / (p * par)^2 * ((1 - p) * (r - 1) * par - (k + 1) * (1 + p *
      par))
    return(sigma2 + delta)
  }

# maximum likelihood estimator - MLE
MLE <- function(x, r){
  tol <- 1e-3
  n <- length(x)
  y <- sum(x)
  if (y < n)
    return(y / n)
  else
    return(1 - tol)
}

# expected value of MLE
MeanMLE <- function(p, n, r){
  prob <- r / (r + p)
  extremeR <- 1 - 1e-3
  muR <- MeanRTruncNB(n - 1, n * r, prob)
  return(1 / n * muR * pnbino(n - 1, n * r, prob) +
    extremeR * (1 - pnbino(n - 1, n * r, prob)))
}

# variance of MLE
VarMLE <- function(p, n, r){
  prob <- r / (r + p)
  muR <- MeanRTruncNB(n - 1, n * r, prob)
  varR <- VarRTruncNB(n - 1, n * r, prob)
  extremeR <- 1 - 1e-3
  moment2 <- 1 / (n^2) * (muR^2 + varR) * pnbino(n - 1, n * r, prob) +
    extremeR^2 * (1 - pnbino(n - 1, n * r, prob))
  return(moment2 - MeanMLE(p, n, r)^2)
}

# non-parametric bootstrap
NpBoot_Mean<-function(x, r, fEst, ...){
  rep <- 1000
  est_boot <- numeric(rep)
  size <- length(x)
  for(i in 1:rep){
    resample <- sample(x, replace=T)
    est_boot[i] <- fEst(resample, r, ...)
  }
  return(mean(est_boot))
}

NpBoot_Var<-function(x, r, fEst, ...){
  rep <- 1000
  est_boot <- numeric(rep)
  size <- length(x)
  for(i in 1:rep){
    resample <- sample(x, replace=T)
    est_boot[i] <- fEst(resample, r, ...)
  }
}

```

```

    return(var(est_boot))
}

#-----
# monte carlo simulation
#-----

MonteCarlo <- function(rep, p, size, r, fEst, ...) {
  set.seed(2024)
  x <- numeric(size)
  estimates <- numeric(rep)
  for (i in 1:rep) {
    x<-rnbinoom(size, r, 1 / (1 + p / r))
    estimates[i] <- fEst(x, r, ...)
  }
  return(c(mean(estimates), var(estimates)))
}

# monte carlo table for simulation
# the number of stages 'r' cannot be a vector
MC <- function(rep, p, size, r, fEst, nameEst, ...){
  tab <- matrix(nrow = length(p) * length(size), ncol = 7,
                col.names <- c('name', 'rho', 'size', 'r', 'mean', 'var', 'time'
  ))
  for(i in 1:length(p)){
    for(j in 1:length(size)){
      start <- Sys.time()
      result <- MonteCarlo(rep, p[i], size[j], r, fEst, ...)
      end <- Sys.time()
      time <- as.numeric(end - start)
      tab[(i - 1) * length(size) + j, 1:7] <-
        c(nameEst, p[i], size[j], r, result, time)
    }
    cat(round(i / length(p) * 100, 0), '%\n')
  }
  return(tab)
}

# teoric mle table for simulation
# the number of stages 'r' cannot be a vector
Teoric_MLE_tab <- function(p, size, r, nameEst){
  tab <- matrix(nrow = length(p) * length(size), ncol = 7,
                col.names <- c('name', 'rho', 'size', 'r', 'mean', 'var', 'time'
  ))
  for(i in 1:length(p)){
    for(j in 1:length(size)){
      start <- Sys.time()
      result <- c(MeanMLE(p[i], size[j], r), VarMLE(p[i], size[j], r))
      end <- Sys.time()
      time <- as.numeric(end - start)
      tab[(i - 1) * length(size) + j, 1:7] <-
        c(nameEst, p[i], size[j], r, result, time)
    }
  }
}

```

```

    }
    return(tab)
}

#-----
# parameters for the simulation study
#-----

rho <- c(0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9, 0.99)
size <- c(10, 20, 50, 100, 200)
r <- c(1, 2, 3)

#-----
# simulation study
#-----

for(i in 1:length(r)){
  cat('We are in the simulation', i, 'of', length(r),'\n')
  simMLE <- MC(10000, rho, size, r[i], MLE, paste0('Simulado r = ', r[i]))
  teoMLE <- Teoric_MLE_tab(rho, size, r[i], paste0('Teorico r = ', r[i]))
  bootMLE_Mean <- MC(1000, rho, size, r[i], NpBoot_Mean, paste0('Bootstrap r = ',
    , r[i]), MLE)
  bootMLE_Var <- MC(1000, rho, size, r[i], NpBoot_Var, paste0('Bootstrap r = ',
    , r[i]), MLE)
  save(rho, size, r, simMLE, bootMLE_Mean, bootMLE_Var, teoMLE, file = paste0('
    simulation', i, '.rdata'))
  rm(simMLE, teoMLE, bootMLE_Mean, bootMLE_Var)
}

#write.table(MLE, "clipboard", sep="\t",dec = ',')
#write.table(meanMLE, "clipboard", sep="\t",dec = ',')
#write.table(varMLE, "clipboard", sep="\t",dec = ',')

#-----
# tests
#-----

# testing MLE
rho <- c(0.9)#(0.01,0.10,0.20,0.50,0.70,0.90,0.99)
size <- c(100)#(10,20,50,100,200)
r <- 1#(1,4)
MCrep <- 1000
estimates <- numeric(MCrep)
for (i in 1:MCrep) {
  x <- rnbino(size, r, r / (r + rho))
  (estimates[i] <- MLE(x, r))
}
estimates <- estimates[!is.na(estimates)]
c(mean(estimates), var(estimates))
MonteCarlo(rho, size, r, MLE)

# testing negative binomial right-truncated moments
r <- 2
k <- seq(5,50,1)
diff_mean <- numeric(length(k))
diff_var <- numeric(length(k))

```

```
rho = 0.9
prob = r / (r + rho)
#prob <- 0.3 # higher prob means less traffic intensity
for(i in 1:length(k)){
  (diff_mean[i] <- MeanRTruncNB(k[i], r, prob) - r * (1 - prob) / prob)
  (diff_var[i] <- VarRTruncNB(k[i], r, prob) - r * (1 - prob) / prob^2)
}
plot(k, diff_mean, 'l', main = paste0('prob = ', prob))
plot(k, diff_var, 'l', main = paste0('prob = ', prob))
rm(prob, r, k)

# testing moments of MLE
r <- 1
n <- seq(5,100,1)
diff_mean <- numeric(length(n))
diff_var <- numeric(length(n))
rho = 0.9
prob = r / (r + rho)
#prob <- 0.3 # higher prob means light traffic intensity
for(i in 1:length(n)){
  (diff_mean[i] <- MeanMLE(rho, n[i], r) - rho)
  (diff_var[i] <- VarMLE(rho, n[i], r) - rho / (n[i] * prob))
}
plot(n, diff_mean, 'l', main = paste0('rho = ', rho))
plot(n, diff_var, 'l', main = paste0('rho = ', rho))
rm(prob, r, n)
```
