

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola de Engenharia

Matheus Philippe Martins da Cruz

**MODELO MATEMÁTICO BASEADO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
COMPRESSORES CENTRÍFUGOS QUE OPERAM COM CO₂ PRÓXIMO AO PONTO
CRÍTICO**

Belo Horizonte
2023

Matheus Philippe Martins da Cruz

**MODELO MATEMÁTICO BASEADO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
COMPRESSORES CENTRÍFUGOS QUE OPERAM COM CO₂ PRÓXIMO AO PONTO
CRÍTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Energia e Sustentabilidade

Orientador: Matheus Pereira Porto
Coorientador: Rafael Augusto Magalhães Ferreira

Belo Horizonte

2023

C957m Cruz, Matheus Philippe Martins da.
Modelo matemático baseado em equações diferenciais para compressores centrífugos que operam com CO₂ próximo ao ponto crítico [recurso eletrônico] / Matheus Philippe Martins da Cruz. - 2023.
1 recurso online (78 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Matheus Pereira Porto.
Coorientador: Rafael Augusto Magalhães Ferreira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 72-78.

Bibliografia: f. 67-70.
Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Energia - Armazenamento - Teses. 3. Compressores - Teses. 4. Dióxido de carbono - Teses. 5. Gases - Teses. 6. Termodinâmica - Teses. I. Porto, Matheus Pereira. II. Ferreira, Rafael Augusto Magalhães. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"MODELO MATEMÁTICO BASEADO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA COMPRESSORES CENTRÍFUGOS QUE OPERAM COM CO₂ PRÓXIMO AO PONTO CRÍTICO"

MATHEUS PHILIPPE MARTINS DA CRUZ

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Matheus Pereira Porto (Orientador – Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Rafael Augusto Magalhães Ferreira (Co-orientador - Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Willian Moreira Duarte (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. André Augusto Campagnole dos Santos (Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear CDTN), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **"Mestre em Engenharia Mecânica"**, na área de concentração de **"Energia e sustentabilidade"**.

Dissertação aprovada no dia 11 de julho de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **Matheus Pereira Porto, Servidor(a)**, em 24/07/2023, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Augusto Magalhães Ferreira, Professor do Magistério Superior**, em 24/07/2023, às 19:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Willian Moreira Duarte, Professor do Magistério Superior**, em 27/07/2023, às 11:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Augusto Campagnole dos Santos, Usuário Externo**, em 24/08/2023, às 13:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2479565** e o código CRC **B08796C7**.

Dedico este trabalho à minha querida mãe Dulce,
mulher detentora das mais nobres qualidades
e minha maior fonte de inspiração. Amo você
infinitamente.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Dulce e Washington pelo grande e constante auxílio, sem o qual eu não teria chegado até aqui. Foram tantos recursos durante um intervalo de tempo tão grande, que não cabem em um parágrafo. Muito obrigado!

Aos meus irmãos Lucas e Michelle pelo auxílio de sempre – inclusive as incontáveis caronas – que grandemente facilitou situações complicadas, e pelo companheirismo, que proporcionou leveza em momentos difíceis. Esta conquista também lhes pertence.

À minha psicóloga Jéssica Quirino Leite, que imensamente me proporcionou autocohecimento e psicoeducação, fatores fundamentais para o meu desenvolvimento pessoal e, conseqüentemente, acadêmico. Sua dedicação à minha saúde mental, demonstrada com tanta competência e amor, é para mim uma contribuição de valor inestimável.

Agradeço à minha amiga de longa data Rayane Paiva Reginaldo por todas as conversas, apoio e disponibilidade, e especialmente pelo tempo que se dedicou a me ensinar programação em Python;

Sou profundamente grato à minha amiga Flávia Oliveira, sobretudo pela amizade e apoio, pelas conversas, e também pelo grande auxílio proporcionado. Você faz muita diferença. Muito obrigado!

Minha experiência de aprendizado não teria sido a mesma sem meu colega de laboratório e amigo Vitor Furtado Paes, que me ofereceu sua amizade, apoio, conselhos, auxílio com questões diversas relacionadas à pesquisa científica e percepções sobre a trajetória acadêmica.

Também sou grato à minha amiga Paula Pomaro por todas as conversas, por toda a disponibilidade, e por compartilhar comigo essa trajetória.

Agradeço ao meu orientador Matheus Pereira Porto por compartilhar perspectivas inovadoras sobre o sentido da pesquisa científica, indispensáveis para o entendimento do verdadeiro objetivo da atividade do pesquisador na sociedade.

Sou também grato ao meu coorientador Rafael Magalhães, pela sua didática singular para fazer assuntos complicados se tornarem fáceis.

Agradeço à FAPEMIG pela bolsa de estudos concedida;

E a todos que, de alguma forma, me incentivaram e me ajudaram a completar este objetivo. Muito obrigado!

“O homem não é um animal solitário, e enquanto perdura a vida em sociedade, a realização de si mesmo não pode ser o supremo princípio ético.”

— Bertrand Russell

Resumo

Os ciclos Brayton de CO_2 supercrítico oferecem uma solução promissora para sistemas de energia eficientes e ecologicamente corretos. No entanto, modelar com precisão o comportamento do sCO_2 apresenta desafios que dificultam o projeto de compressores altamente eficientes. Por um lado, as propriedades não-lineares do CO_2 próximo ao seu ponto crítico exigem o uso de versões simplificadas e suavizadas de equações de estado em modelos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para garantir a convergência. Por outro lado, modelos matemáticos 0-D combinados com relações empíricas de perda de pressão, comumente usados no campo, não são recomendados para esse caso. Como alternativa, propomos uma análise diferencial que combina termodinâmica e mecânica dos fluidos. Este modelo alternativo considera a geometria do canal do rotor, incorpora os termos completos da equação da energia de Helmholtz e utiliza formas analíticas para as perdas de pressão. Foram realizadas simulações para demonstrar o desempenho de várias geometrias do rotor. É importante notar que este modelo não considera o gradiente de pressão nas direções radial e tangencial do rotor, pois não é um método CFD 3-D. A derivação de todas as equações utilizadas no modelo matemático é fornecida no Capítulo 4. Os resultados mostraram que o ângulo de inclinação da pá, β , e o raio de curvatura do canal de escoamento, r_c , surgem como os fatores geométricos de maior impacto no processo de compressão. Além disso, a influência desses fatores é maior quando o estado do CO_2 está próximo do ponto crítico. Em conclusão, recomendamos incorporar essa abordagem inovadora durante a fase de projeto preliminar de compressores centrífugos de sCO_2 .

Palavras-chave: armazenamento de energia, dimensionamento de compressores centrífugos, dióxido de carbono pseudocrítico, termodinâmica de gases reais.

Abstract

Supercritical CO₂ Brayton cycles offer a promising solution for efficient and environmentally friendly power systems. However, accurately modeling the behavior of sCO₂ presents challenges that make the design of highly efficient compressors difficult. On the one hand, the nonlinear properties displayed by CO₂ near its critical point require the utilization of simplified and smoothed versions of equations of state in Computational Fluid Dynamics (CFD) models to ensure convergence. On the other hand, 0-D mathematical models combined with empirical pressure loss relations, commonly used in the field, are not recommended for this case. As an alternative, we propose a differential analysis that combines thermodynamics and fluid mechanics. This alternative model considers the rotor's channel geometry, incorporates the full terms of the Helmholtz equation of state (EoS), and utilizes analytical forms for the pressure losses. Simulations were conducted to showcase the performance of various rotor's geometries. It is important to note that this model does not account the pressure gradient in the radial and tangential directions of the rotor, as it is not a 3-D CFD method. The derivation of all equations used in the mathematical model is provided in the Chapter 4. The results revealed that the blade's angle of inclination, β , and the radius of curvature of the flow channel, r_c , emerge as the most influential geometric factors in the compression process. Furthermore, the influence of these factors is more pronounced when the CO₂ state is near the critical point. In conclusion, we recommend incorporating this novel approach during the preliminary design phase of sCO₂ centrifugal compressors.

Keywords: energy storage, centrifugal compressor design, pseudocritical carbon dioxide, real gases thermodynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática (fora de escala) do ciclo de recompressão do CO ₂ supercrítico no diagrama T-s. Neste ciclo, a compressão ocorre próximo ao ponto crítico do fluido.	24
Figura 2 – Isolinhas das propriedades termodinâmicas (a) coeficiente isentrópico n_s , (b) coeficiente isentrópico m_s , (c) compressibilidade Z , (d) calor específico à pressão constante $c_p(kJ/kgK)$, (e) velocidade do som $c(m/s)$ e (f) compressibilidade isotérmica $\beta_T(Pa^{-1})$. No entorno do ponto crítico ($P_r = 1$ e $T_r = 1$), a proximidade das isolinhas evidencia as variações abruptas de cada propriedade.	26
Figura 3 – Variações de propriedades termodinâmicas do CO ₂ , na pressão crítica, em função da temperatura.	27
Figura 4 – Exemplo de malha computacional de um compressor, evidenciando as pás do rotor e do estator.	31
Figura 5 – (a) Temperatura adimensional e (b) pressão adimensional obtidas por simulações CFD. Para os rotores da esquerda, os resultados foram obtidos por meio de uma tabela de interpolação de baixa resolução. Para os da direita, a tabela era de alta resolução.	32
Figura 6 – Geometria do rotor, triângulos de velocidade e direções do fluxo do fluido de trabalho. É possível observar o caminho meridional (L), coordenadas radial (r) e tangencial (θ). Três seções transversais são mostradas, cada uma associada a três conjuntos de variáveis: o primeiro conjunto está relacionado à geometria do canal, e compõe por sua altura (b), curvatura do canal (r_c), ângulo de inclinação da pá (β), raio máximo (r_{sh}), raio médio (r_m) e raio mínimo (r_h). O segundo conjunto diz respeito aos componentes de velocidade do fluido: velocidade absoluta (V_A), tangencial (V_t), meridional (V_m), velocidades relativa (W) e da pá (U). O ângulo α representa o ângulo de inclinação da velocidade absoluta. O terceiro conjunto abrange propriedades termodinâmicas, que são definidas por variáveis independentes como pressão (P) e entalpia (h).	39

Figura 7 – Representação dos volumes de controle infinitesimal. Em (a), a visualização 3D esquematiza as posições das infinitas seções transversais, bem como de um volume de controle infinitesimal delimitado por duas seções: a seção de entrada do volume de controle com área A_m , e a seção de saída com área $A_m + dA_m$. Na visualização axial em (b), cada seção pode ser localizada por um ângulo ϕ , variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos. O comprimento dL é medido ao longo da linha média. Na projeção meridional em (c), pode-se observar que o fluido que passa por cada área transversal possui um triângulo de velocidades e um estado termodinâmico.	40
Figura 8 – Superelipses que delimitam o canal de escoamento.	42
Figura 9 – Comprimento diferencial da linha média	43
Figura 10 – Perfil da pá e ângulo de fluxo relativo	44
Figura 11 – Relações entre áreas e velocidades.	46
Figura 12 – Áreas e perímetros das seções A_m e A_W	47
Figura 13 – Representação do volume de controle infinitesimal. (a) é uma visualização 3-D de Z_r volumes de controle lado a lado, sendo Z_r a quantidade de pás do rotor. (b) é a representação do VC na projeção meridional. (c) é a vista axial do VC. Há entrada e saída de massa, energia e momento linear no VC. E há apenas entrada de momento angular, representado por $d\vec{H}$. O diferencial $d\dot{m}_{tc}$ é a massa que entra e sai do VC através da folga entre as pás e a carcaça do rotor.	49
Figura 14 – Três representações de triângulos de velocidade na entrada e saída de um elemento infinitesimal. (a) mostra a influência de um aumento no raio r_m . (b) mostra a influência de uma redução em β . (c) mostra os efeitos combinados de ambas as influências. Nos três casos, há um aumento no produto UV_t . No entanto, a variação do produto UV_t é maior no terceiro processo, indicando que este é o processo em que o fluido recebe mais energia.	58
Figura 15 – Sequência de cálculos utilizada no código desenvolvido em linguagem de programação Python.	61
Figura 16 – Representação da geometria dos seis rotores. Os perfis do canal de escoamento são delimitados pelas superelipses nas Equações 4.58 e 4.60. Os perfis das pás do rotor são dados pelas Equações 4.17 e 4.21, e a variação de β para cada perfil é determinada pela Equação 4.69. Para $k = 2$ (canal B), a superelipse torna-se uma elipse.	62
Figura 17 – Curvas da geometria do rotor. Os perfis do canal de escoamento (a) e os perfis das pás (d) também são mostrados na Fig. 16. As curvas de (a) são dadas pelas Eqs. 4.17 e 4.21. As curvas de (b) pela Eq. 4.69. As curvas de (d) pelas Eqs. 4.58, 4.59 e 4.60. As curvas de (e) pela Eq. 4.63. As curvas de (c) e (f) são as derivadas de (b) e (e), respectivamente.	63

- Figura 18 – Fatores geométricos que influenciam as perdas de pressão no processo de compressão. Em (a), L_m representa o comprimento da superelipse média (E_m), L_W representa o comprimento total da pá e L_{tc} o comprimento da aresta da pá (E_{sh}). Um valor mais alto de L_W leva a um aumento do atrito entre o fluido e as pás. No entanto, o atrito também depende do raio de curvatura, mostrado em (b) e calculado pela Eq. 4.70. Um raio de curvatura maior resulta em menos atrito. O raio de curvatura para o canal C tende ao infinito na sucção e descarga, indicando que o canal é perfeitamente reto nessas regiões. Em (c), é mostrada a localização dos comprimentos L_m , L_W e L_{tc} no rotor. 64
- Figura 19 – Processos de compressão simulados para os seis rotores com o CO₂ (a) próximo ao ponto crítico e (b) longe do ponto crítico (gás ideal). Ambos os gráficos foram construídos na mesma escala para fins de comparação. A variação da entalpia é aproximadamente a mesma para todos os processos, mas a variação da entropia é maior para os processos que ocorrem próximo ao ponto crítico. 65
- Figura 20 – Percentual do trabalho politrópico $\int_L v dP$ e das irreversibilidades $\int_L T ds$ para os processos de compressão realizados com (a) gás real e (b) gás ideal. O percentual do trabalho politrópico corresponde à eficiência politrópica. As irreversibilidades do processo correspondem à $\int_L T ds = \int_L dh_{atrito} + \int_L dh_{tc}$. 67
- Figura 21 – Variação das propriedades termodinâmicas em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ próximo do ponto crítico. Para cada simulação, há duas curvas: a superior representa a propriedade total, ou propriedade de estagnação, e a inferior representa a propriedade estática. Em (a), são mostradas as curvas da pressão total (P_0) e pressão estática (P). Em (b), são apresentadas as curvas da temperatura total (T_0) e temperatura estática (P). As curvas de (c), por sua vez, são da entalpia total (h_0) e entalpia estática (h). 76
- Figura 22 – Variação das propriedades termodinâmicas em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ longe do ponto crítico. Para cada simulação, há duas curvas: a superior representa a propriedade total, ou propriedade de estagnação, e a inferior representa a propriedade estática. Em (a), são mostradas as curvas da pressão total (P_0) e pressão estática (P). Em (b), são apresentadas as curvas da temperatura total (T_0) e temperatura estática (P). As curvas de (c), por sua vez, são da entalpia total (h_0) e entalpia estática (h). 77

Figura 23 – Variação das propriedades do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO ₂ próximo do ponto crítico. As propriedades representadas são: (a) entropia, (b) massa específica, (c) compressibilidade, (d) calor específico à pressão constante, (e) coeficiente isentrópico m_s , (f) coeficiente isentrópico n_s , (g) viscosidade, (h) velocidade do som e (i) número de Mach.	78
Figura 24 – Variação das propriedades do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO ₂ longe do ponto crítico. As propriedades representadas são: (a) entropia, (b) massa específica, (c) compressibilidade, (d) calor específico à pressão constante, (e) coeficiente isentrópico m_s , (f) coeficiente isentrópico n_s , (g) viscosidade, (h) velocidade do som e (i) número de Mach. Esse último não é uma propriedade termodinâmica, mas uma propriedade do escoamento.	79
Figura 25 – Variação das componentes de velocidade e do ângulo α do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor nas simulações realizadas com o CO ₂ próximo do ponto crítico. As variáveis mostradas são: (a) velocidade absoluta, (b) velocidade meridional, (c) velocidade da pá, (d) velocidade tangencial, (e) velocidade relativa e (f) ângulo de inclinação α	80
Figura 26 – Variação das componentes de velocidade e do ângulo α do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor nas simulações realizadas com o CO ₂ longe do ponto crítico. As variáveis mostradas são: (a) velocidade absoluta, (b) velocidade meridional, (c) velocidade da pá, (d) velocidade tangencial, (e) velocidade relativa e (f) ângulo de inclinação α	81

Lista de tabelas

Tabela 1 – Equação de van der Waals e suas derivações. a , b , a' , m , K , Ω_a e X são constantes calculadas para cada fluido (PROCTOR; MAYNARD-CASELY, 2020).	29
Tabela 2 – Equações para o cálculo da geometria do rotor. Nas equações 4.58, 4.59, 4.60, and 4.69, as constantes k e j são fatores de forma. Cada rotor deve ter um valor de k e j dependendo de sua geometria.	56
Tabela 3 – Sistema de equações que descrevem o processo de compressão de um fluido que escoar por um rotor de compressor centrífugo.	57
Tabela 4 – Dimensões do rotor na sucção (que recebem o subscrito “1”) e na descarga (subscrito “2”).	60
Tabela 5 – Estado termodinâmico e variáveis do triângulo de velocidades na sucção do rotor.	62
Tabela 6 – Estados termodinâmicos na descarga de cada rotor representado na Fig. 19 considerando processos adiabáticos e isentrópicos, e portanto reversíveis. . .	63
Tabela 7 – Estados termodinâmicos na descarga de cada rotor representado na Fig. 19 considerando processos adiabáticos e irreversíveis	66
Tabela 8 – Eficiência politrópica para cada processo da Fig. 19.	67

Lista de abreviaturas e siglas

CO ₂	Dióxido de carbono
sCO ₂	Dióxido de carbono supercrítico
PTC-10	<i>Performance Test Code on Compressors and Exhausters</i>
ASME	<i>The American Society of Mechanical Engineering</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamic</i>
VC	Volume de Controle
EOS	Equação de estado

Lista de símbolos

A	área da seção transversal (m^2)
A_{wet}	Área molhada (m^2)
b	altura da pá (m)
c	velocidade do som (m/s)
D	diâmetro hidráulico (m)
E	raio da superelipse (m)
f	fator de atrito de Fanning ($-$)
f_c	fator de atrito para tubulações curvas ($-$)
f_D	fator de atrito de Darcy ($-$)
h	entalpia específica (J/kg)
h_r	altura do rotor (m)
k_r	rugosidade das pás do rotor (m)
L	direção meridional (m)
L_m	comprimento da linha média (m)
M	número de Mach ($-$)
m_s	expoente isentrópico ($-$)
n	expoente politrópico ($-$)
n_s	expoente isentrópico ($-$)
P	pressão (Pa), perímetro (m)
P_{wet}	Perímetro molhado (m)
q	quantidade de elementos finitos ($-$)
r	raio, direção radial (m)
R	constante dos gases ($-$)

Re	número de Reynolds (—)
s	entropia específica (J/kgK)
T	temperatura (K)
$\dot{m}$	fluxo de massa (kg/s)
$\dot{W}_{eixo}$	potência de eixo (W)
τ_w	tensão de cisalhamento (N/m^2)
U	velocidade tangencial da pá (m/s)
V_A	velocidade de fluxo absoluta (m/s)
V_m	velocidade de fluxo meridional (m/s)
V_t	velocidade de fluxo tangencial (m/s)
W	velocidade de fluxo relativa (m/s)
w_{eixo}	trabalho específico de eixo (J/kg)
Z	compressibilidade (—)
Z_r	quantidade de pás do rotor (—)

Letras gregas

α	ângulo de fluxo absoluto ($^\circ$)
β	ângulo de fluxo relativo ($^\circ$)
ε	altura da folga entre a carcaça e a pá (m)
η_p	eficiência politrópica (—)
μ	viscosidade dinâmica ($Pa \cdot s$)
ν	volume específico (m^3/kg)
ω	rotação (rad/s)
ϕ	ângulo da superelipse ($^\circ$ ou rad)
ρ	massa específica (kg/m^3)
θ	direção tangencial ($^\circ$)

Subscritos

0	propriedade total ou propriedade de estagnação
1	sucção do rotor
2	descarga do rotor
A	absoluto
(ϕ)	em função de ϕ
(L)	em função de L
h	referente ao núcleo do rotor (<i>hub</i>)
m	médio, meridional
sh	referente à carcaça do rotor (<i>shroud</i>)
tc	referente à aresta da pá ou à abertura entre a aresta e a carcaça
W	relativo

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Objetivos	22
1.2	Estrutura do trabalho	22
2	Ciclo Brayton de recompressão do sCO₂	24
3	Modelos utilizados em compressores de sCO₂	28
3.1	Equações de Estado do CO ₂	28
3.1.1	A equação de van der Waals e suas derivações	28
3.1.2	O modelo de Lee-Kesler	29
3.1.3	O modelo pela equação da energia livre de Helmholtz	30
3.2	Simulações numéricas do processo de compressão do CO ₂ próximo do ponto crítico	30
3.3	Modelo matemático 0-D de compressores de sCO ₂	32
3.4	Análise politrópica e pseudopolitrópica do processo de compressão	35
4	Modelo matemático baseado em equações diferenciais	38
4.1	Diferenciais do triângulo de velocidades	38
4.2	Metodologia para definição do formato das pás	41
4.2.1	O perfil da pá como uma superelipse	41
4.2.2	Raio de curvatura do canal de escoamento	42
4.2.3	Comprimento meridional L	43
4.2.4	Ângulo de inclinação da pá (β)	44
4.2.5	Componentes de área	45
4.3	Balço de momento linear, massa, entalpia, entropia e momento angular do fluido de trabalho	49
4.3.1	Trabalho de eixo do rotor	50
4.3.2	Perda de carga pelo atrito	50
4.3.3	Perda de carga pela aresta da pá	51
4.3.4	Entalpia e entropia	52
4.3.5	Momento angular	53
4.3.6	Definição do sistema de equações	53
4.4	Relação matemática fundamental entre as propriedades termodinâmicas h , ρ e s	54
4.5	Visualização do modelo matemático	55
4.6	Efeitos da geometria do rotor na potência e perdas de carga locais	57
4.6.1	Relação entre a geometria do rotor e a potência local	58

4.6.2	Relação entre a geometria do rotor e as perdas de carga	59
5	Estudo de Caso	60
5.1	Resultados e Discussão	62
5.1.1	Simulações dos processos reversíveis	62
5.1.2	Geometria e transferência de energia	63
5.1.3	Geometria e perdas de carga	64
5.1.4	Simulações de processos irreversíveis	65
6	Conclusão	68
6.1	Sugestão para trabalhos futuros	69
	Referências	70
	Apêndices	74
APÊNDICE A	Curvas das propriedades do CO₂ em função do comprimento meridional L	75

1 Introdução

A demanda global por energia limpa e sustentável tem aumentado exponencialmente nas últimas décadas, impulsionada pelo crescimento populacional e pelo desenvolvimento industrial. Nesse contexto, a geração de energia a partir do vapor de água tem desempenhado um papel fundamental, representando atualmente cerca de 80% da energia produzida no mundo. No entanto, essa tecnologia tem sido amplamente utilizada e aprimorada há mais de um século, tornando cada vez mais difícil obter avanços significativos apenas por meio de modificações de seus componentes (SHAO *et al.*, 2021).

Diante desse cenário, torna-se necessário explorar alternativas tecnológicas promissoras e ambientalmente responsáveis que possam impulsionar uma ruptura no campo da geração de energia. Uma dessas alternativas é o ciclo Brayton de recompressão de $s\text{CO}_2$, que oferece várias vantagens em relação às tecnologias convencionais, como design compacto, baixo custo e alta eficiência térmica (CHO *et al.*, 2020; PASCH; STAPP, 2018; DU *et al.*, 2021). No entanto, a implementação desse ciclo requer o funcionamento do compressor próximo ao ponto crítico do dióxido de carbono (CO_2), região em que as variações das propriedades termodinâmicas do fluido são altamente não-lineares, dificultando o cálculo preciso do processo de compressão.

A literatura científica apresenta diversas metodologias para calcular o processo de compressão do $s\text{CO}_2$. Duas abordagens comumente utilizadas são a abordagem 0-D, que emprega correlações semi-empíricas, e a análise politrópica, recomendada pela norma ASME PTC-10 (1997, reafirmada em 2014). No entanto, essas abordagens possuem limitações quando aplicadas ao cálculo do compressor de $s\text{CO}_2$ próximo do ponto crítico, pois muitas equações presentes nesses modelos foram deduzidas utilizando considerações de gás ideal. A análise dessas equações é dificultada pela escassez de dados experimentais de testes reais de compressores de $s\text{CO}_2$ disponíveis na literatura (LIU *et al.*, 2018; CHO *et al.*, 2020). Além disso, o cálculo iterativo necessário para a aplicação de métodos numéricos exige um alto custo computacional próximo ao ponto crítico devido à magnitude das derivadas das propriedades termodinâmicas nessa região.

Outra abordagem amplamente utilizada para a análise do processo de compressão é a dinâmica de fluidos computacional (CFD), que se trata de uma modelagem 3-D do escoamento. No entanto, a utilização do CFD enfrenta desafios devido ao elevado custo computacional associado à complexidade matemática da equação de estado da energia de Helmholtz para determinar as propriedades termodinâmicas do CO_2 próximo ao ponto crítico.

Tendo em vista este cenário, a literatura ainda carece de metodologias específicas para os compressores que operam com o $s\text{CO}_2$, e por isso muita pesquisa tem sido publicada nos últimos anos (CRESPI *et al.*, 2017; CHO *et al.*, 2016). Diante dessa necessidade, o presente trabalho propõe uma nova abordagem para realizar o cálculo do processo de compressão do

CO₂ próximo ao ponto crítico. O modelo matemático desenvolvido por meio de equações diferenciais é capaz de realizar o cálculo do processo de compressão levando em consideração as variações bruscas das propriedades do CO₂ e a influência da geometria do rotor, permitindo análises mais detalhadas desse processo. Os resultados gerados pelo modelo incluem os caminhos termodinâmicos dos processos de compressão e a variação das propriedades do fluido ao longo do canal de escoamento entre-pás.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um modelo matemático para o cálculo do processo de compressão do CO₂ próximo do ponto crítico, utilizando uma abordagem diferencial que abranja as variações abruptas nas propriedades termodinâmicas do fluido e promova uma compreensão sobre os efeitos de gás real no processo de compressão.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- i. Analisar os resultados do modelo matemático para estados termodinâmicos perto e longe do ponto crítico.
- ii. Analisar os impactos do formato da pá no desempenho do rotor em processos que ocorrem perto e longe do ponto crítico.

1.2 Estrutura do trabalho

Este trabalho é dividido em seis capítulos, começando pela Introdução. O Capítulo 2 apresenta o ciclo de recompressão do sCO₂ e a recente demanda por pesquisa nessa área. O Capítulo 3 apresenta as equações e modelos matemáticos disponíveis na literatura aberta comumente utilizados para dimensionamento e cálculo da performance dos compressores centrífugos, juntamente com as discussões sobre a necessidade de modelos que considerem os efeitos de gás real do sCO₂ quando seu estado termodinâmico está próximo do ponto crítico. O Capítulo 4 apresenta a dedução de um modelo matemático, baseado em equações diferenciais, que calcula o caminho termodinâmico da compressão considerando os efeitos de gás real e o formato das pás do rotor. Este modelo é utilizado em um estudo de caso detalhado no Capítulo 5. Nesse Capítulo, são realizadas simulações nas quais o CO₂ é submetido a processos de compressão, perto e longe do ponto crítico, em compressores centrífugos cujas geometrias se diferem pelo formato das pás. Os resultados são discutidos por meio da comparação das curvas de compressão e da performance de cada processo. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho. Os Apêndices disponíveis na sequência apresentam (1) instruções para o uso do modelo matemático, e (2) as curvas que descrevem as variações das propriedades termodinâmicas e das componentes

de velocidade do sCO₂ durante o escoamento no rotor, obtidas pelas simulações realizadas no Capítulo 5.

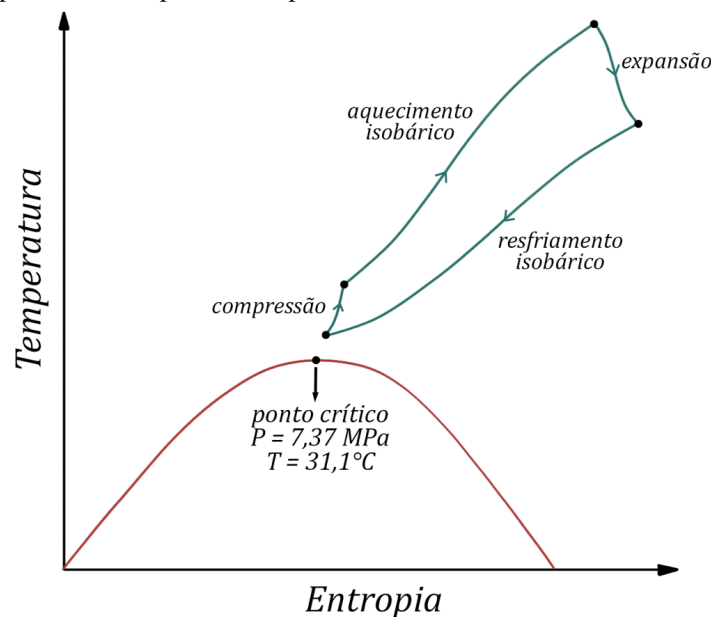
2 Ciclo Brayton de recompressão do sCO_2

Atualmente, 80% da energia produzida no mundo é proveniente da geração baseada em vapor de água, tecnologia que vem sendo utilizada há mais de um século. Após tantos anos de aperfeiçoamento e pesquisa, é razoável concluir que os sistemas baseados no ciclo Rankine de vapor de água dificilmente oferecerão grandes saltos tecnológicos apenas pela modificação do design de seus componentes (SHAO *et al.*, 2021).

Ao mesmo tempo, a matriz energética mundial carece de tecnologias de geração de energia mais eficientes e sustentáveis. Uma tecnologia que vem ganhando atenção é o ciclo de recompressão do sCO_2 , esquematizado na Figura 1. Suas principais vantagens são: alta eficiência térmica, layout das turbomáquinas compacto, baixo custo, temperaturas moderadas para a turbina e para o compressor e redução da erosão das pás da turbina (em comparação com o ciclo Rankine de vapor de água) (GUO *et al.*, 2018; CHO *et al.*, 2020; LEE *et al.*, 2012). Além disso, o CO_2 é um gás ecologicamente sustentável, não-tóxico e quimicamente estável, e por isso ele pode ser utilizado com uma variedade de materiais metálicos (DU *et al.*, 2021).

Devido às suas vantagens, tem havido um aumento significativo na quantidade de publicações científicas sobre a geração de energia utilizando o ciclo de potência sCO_2 na última década (CRESPI *et al.*, 2017; CHO *et al.*, 2016). Atualmente, ele é considerado como o sistema

Figura 1 – Representação esquemática (fora de escala) do ciclo de recompressão do CO_2 supercrítico no diagrama T-s. Neste ciclo, a compressão ocorre próximo ao ponto crítico do fluido.



Fonte: Autoria própria.

de geração de potência do futuro para diversas fontes de calor, abrangendo combustíveis fósseis, energia solar, energia nuclear e aproveitamento de calor residual, entre outros. O aprimoramento dessa tecnologia pode trazer mudanças substanciais aos mercados globais (CHO *et al.*, 2020; PASCH; STAPP, 2018; DU *et al.*, 2021).

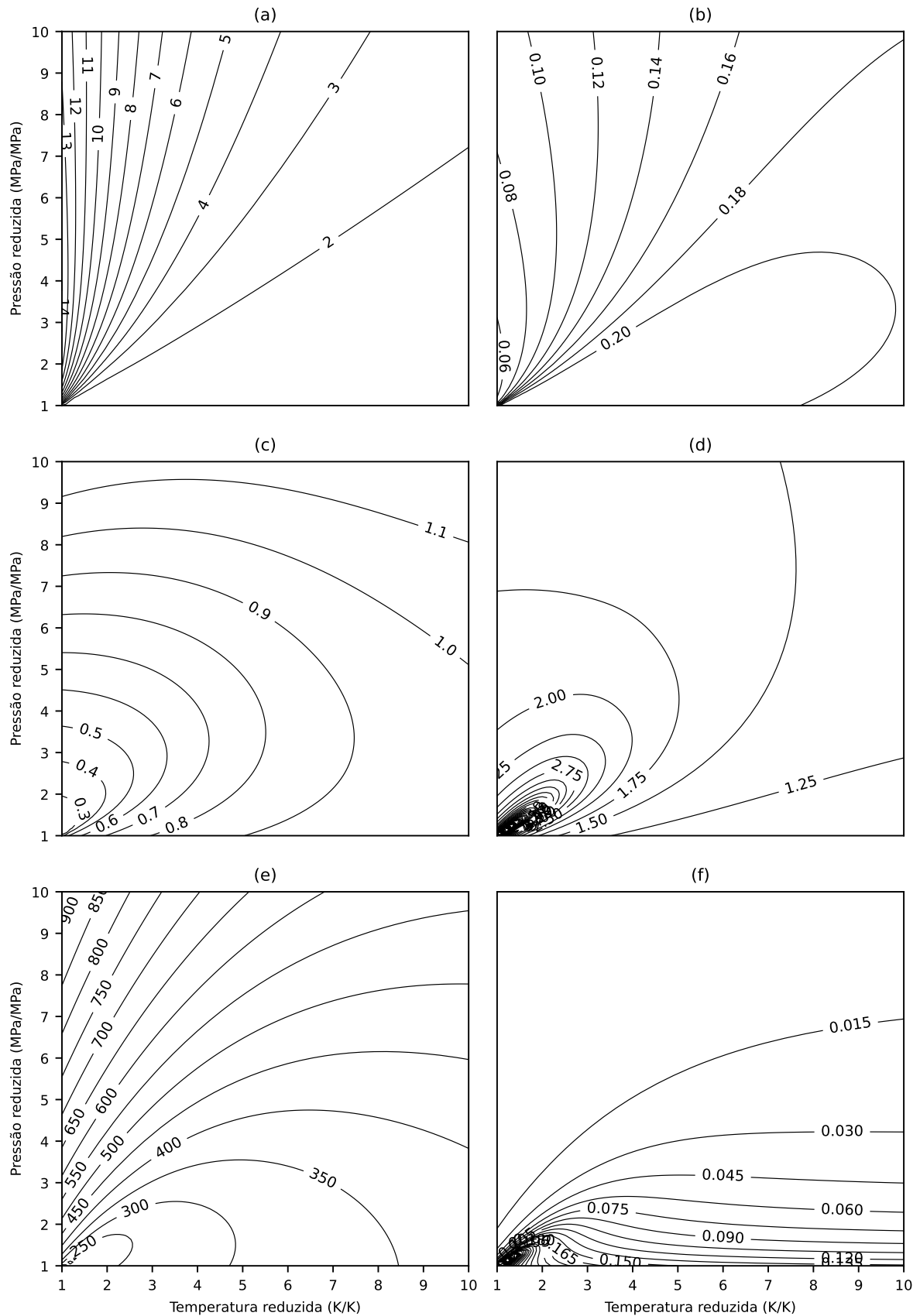
Para que o potencial do ciclo seja aproveitado, o compressor deve operar próximo do ponto crítico, pois nessa região o $s\text{CO}_2$ possui propriedades termodinâmicas favoráveis, como alto calor específico, alta compressibilidade isotérmica, viscosidade de um gás e densidade de um líquido (CHO *et al.*, 2020; LEE *et al.*, 2012). Sob essas condições, o trabalho de compressão é reduzido e, como consequência, a eficiência do ciclo é aumentada (LI *et al.*, 2017; CHO *et al.*, 2019).

No entanto, as mesmas características que tornam o $s\text{CO}_2$ vantajoso para a operação do compressor dificultam o cálculo do processo de compressão, pois todo fluido possui comportamento altamente não-ideal próximo ao ponto crítico, incluindo mudanças abruptas em suas propriedades termodinâmicas (PROCTOR; MAYNARD-CASELY, 2020). Para o CO_2 , esse comportamento pode ser observado na Figura 2, que apresenta as isolinhas de algumas propriedades termodinâmicas em função da temperatura e pressão reduzidas. As isolinhas tendem a ficar muito próximas no entorno do ponto crítico ($P_r = 1$ e $T_r = 1$), evidenciando um comportamento altamente não-ideal do fluido nessa região. Na pressão crítica, as variações das propriedades do fluido atingem o seu máximo, como pode ser observado na Figura 3.

Por causa disso, a literatura científica tem destacado várias limitações nos modelos matemáticos e simulações numéricas convencionais quando utilizados para o projeto de compressores de $s\text{CO}_2$ que operam próximo do ponto crítico, pois muitos desses modelos possuem considerações de gás ideal (LEE; CHO; LEE, 2018; LEE *et al.*, 2012; CHO *et al.*, 2016). Há também evidências experimentais de um comportamento instável desse fluido à medida que se aproxima do ponto crítico. (BALTADJIEV; LETTIERI; SPAKOVSKY, 2015; AMELI; TURUNEN-SAARETI; BACKMAN, 2018; CHO *et al.*, 2020; LI *et al.*, 2020; SHAO *et al.*, 2021).

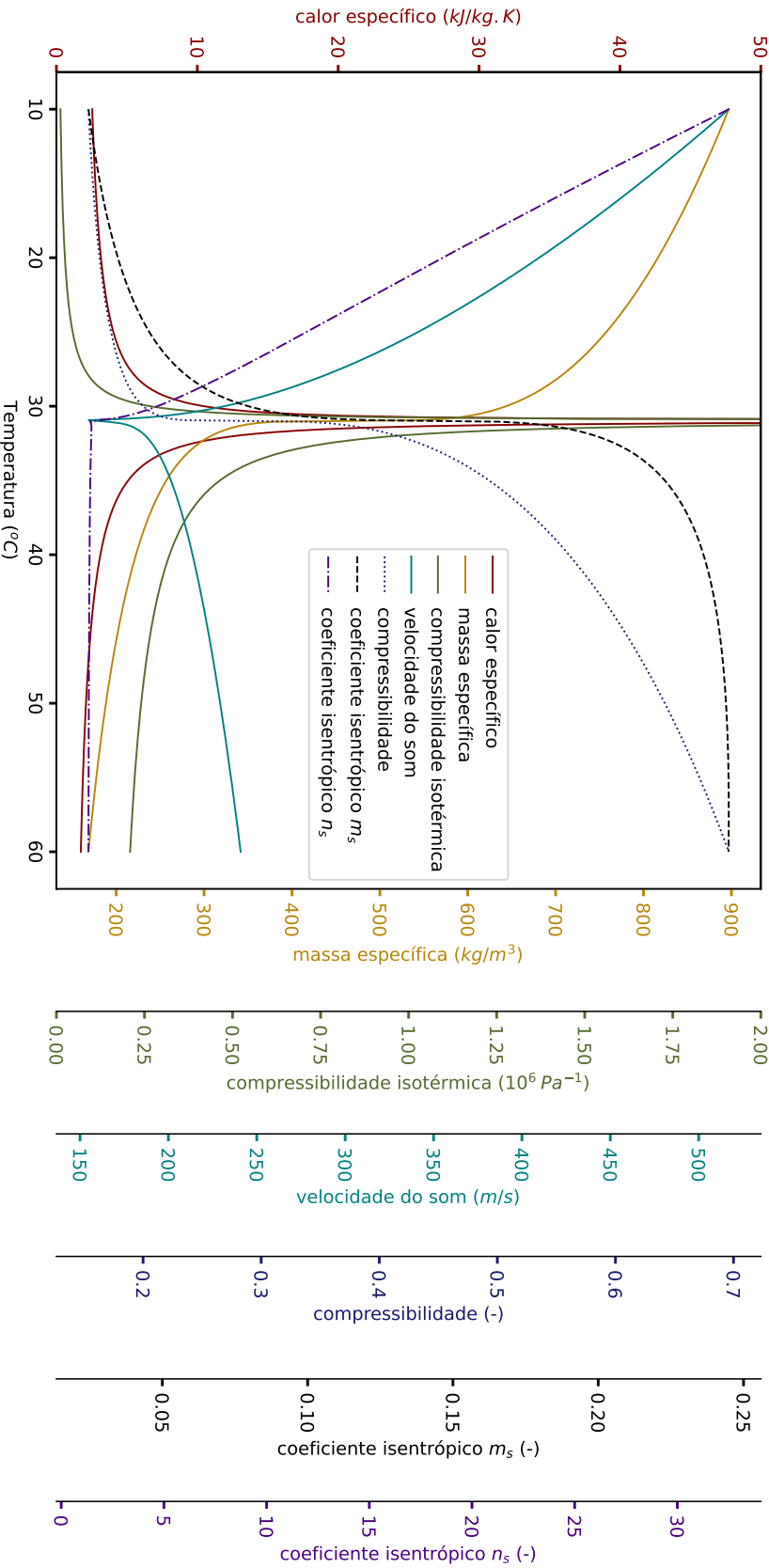
Os próximos capítulos serão dedicados a apresentar modelos matemáticos e numéricos comumente utilizados para o cálculo dos processo de compressão em compressores centrífugos. Serão abordadas algumas discussões presentes na literatura científica sobre a utilização destes modelos em processos que ocorrem nas proximidades do ponto crítico, e os progressos realizados nos últimos anos.

Figura 2 – Isolinhas das propriedades termodinâmicas (a) coeficiente isentrópico n_s , (b) coeficiente isentrópico m_s , (c) compressibilidade Z , (d) calor específico à pressão constante $c_p(kJ/kgK)$, (e) velocidade do som $c(m/s)$ e (f) compressibilidade isotérmica $\beta_T(Pa^{-1})$. No entorno do ponto crítico ($P_r = 1$ e $T_r = 1$), a proximidade das isolinhas evidencia as variações abruptas de cada propriedade.



Fonte: Autoria própria.

Figura 3 – Variações de propriedades termodinâmicas do CO_2 , na pressão crítica, em função da temperatura.



Fonte: Autoria própria

3 Modelos utilizados em compressores de sCO₂

Os modelos utilizados para a estimativa da performance de compressores centrífugos que operam com sCO₂ podem ser (1) numéricos, isto é, que se utilizam de simulações computacionais para prever o comportamento do fluido durante o seu escoamento no compressor, ou (2) analíticos, que são aqueles que assumem a forma de um ou mais sistemas de equações provenientes das equações clássicas da Termodinâmica e da Mecânica dos Fluidos, além de correlações semi-empíricas. Ambos os tipos de modelos necessitam de, ao menos, uma equação de estado do fluido de trabalho, a fim de calcular as relações entre as suas propriedades termodinâmicas.

Este capítulo é dividido em quatro seções. A Seção 3.1 apresenta as principais equações de estado do CO₂; na 3.2, são mostrados os desafios das simulações CFD utilizadas para o estudo do processo de compressão do sCO₂; a Seção 3.3 apresenta a análise 0-D dos compressores centrífugos; e a última seção, 3.4, aborda o cálculo da performance dos compressores recomendado pela norma ASME PTC-10 (1997, reafirmada em 2014).

3.1 Equações de Estado do CO₂

Existem diversas equações de estado (EOS) para CO₂, cada uma com diferentes níveis de precisão, dependendo do intervalo de temperatura e pressão considerado. As principais delas são mencionadas a seguir.

3.1.1 A equação de van der Waals e suas derivações

O modelo de van der Waals (Eq. 3.1) (WAALS, 1873) é baseado na equação de gases ideais, mas com duas correções, adicionadas devido às forças de atração e repulsão entre as partículas. A partir do modelo de Van der Waals, outras equações foram deduzidas, mostradas na Tabela 1. Em geral, quanto maior o nível de complexidade de uma equação, maior também a sua acurácia. (PROCTOR; MAYNARD-CASELY, 2020)

As equações da Tabela 1 podem ser resolvidas analiticamente sem processos iterativos, o que representa vantagens computacionais em seu uso (DIMITRAKOPOULOS, 2016). No entanto, apesar da simplicidade matemática, elas apresentam limitações no cálculo dos fatores de compressão próximo ao ponto crítico, quando comparados aos dados experimentais (PROCTOR; MAYNARD-CASELY, 2020).

Tabela 1 – Equação de van der Waals e suas derivações. a , b , a' , m , K , Ω_a e X são constantes calculadas para cada fluido (PROCTOR; MAYNARD-CASELY, 2020).

Autor e data	Modelo	
van der Waals (1873)	$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$	(3.1)
Redlich-Kwong (1949)	$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a'}{(V-b) \cdot \sqrt{T}}$	(3.2)
Redlich-Kwong-Soave (1972)	$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a'}{V(V-b)} \left[1 + m \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_c}} \right) \right]^2$	(3.3)
Peng-Robinson (1976)	$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a'}{V(V+b) + b(V-b)} \left[1 + K \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_c}} \right) \right]^2$	(3.4)
Patel-Teja (1982)	$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{\Omega_a(RT_c)^2}{P_c[V(V+b) + c(V-b)]} \left[1 + X \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_c}} \right) \right]^2$	(3.5)

3.1.2 O modelo de Lee-Kesler

O modelo de Lee e Kesler (1975) é dado pela Eq. 3.6. Ele consiste no cálculo da compressibilidade Z de um fluido real em função do seu fator acêntrico ω , que é um parâmetro adimensional que mede a não-esfericidade da molécula.

$$Z = Z^{(0)} + \frac{\omega}{\omega^{(r)}}(Z^{(r)} - Z^{(0)}) \quad (3.6)$$

O termo $\omega^{(r)}$ é o valor da excentricidade de um fluido de referência, e os termos $Z^{(r)}$ e $Z^{(0)}$ são obtidos pela Eq. 3.7, mas usando dois conjuntos de coeficientes diferentes.

$$Z^{(0),(r)} = \frac{P_r v_r}{T_r} = 1 + \frac{B}{v_r} + \frac{C}{v_r^2} + \frac{D}{v_r^5} + \frac{c_4}{T_r^3 v_r^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{v_r^2} \right) e^{\left(-\frac{\gamma}{v_r^2} \right)}, \quad v_r = \frac{P_c v}{RT_c} \quad (3.7)$$

A equação de Lee-Kesler foi construída principalmente para os hidrocarbonetos, e no entanto, apresenta uma boa acurácia para o CO₂ (BALTADJIEV; LETTIERI; SPAKOVSKY, 2015; DIMITRAKOPOULOS, 2016). Apesar de ser um modelo implícito (o que representa uma desvantagem em relação às equações da Tabela 1), tornou-se consolidado devido à sua acurácia, e é amplamente empregado na indústria (BALTADJIEV; LETTIERI; SPAKOVSKY, 2015; LI *et al.*, 2020).

No entanto, nas proximidades do ponto crítico, a compressibilidade Z obtida por esse modelo possui um erro máximo de 5,84%. Propriedades termodinâmicas compostas, como o calor específico à pressão constante c_p e a velocidade do som c , apresentam erros maiores, de 70,7% e 43,0%, respectivamente (BALTADJIEV, 2012), tornando esse modelo não-recomendado para o CO₂ próximo do ponto crítico.

3.1.3 O modelo pela equação da energia livre de Helmholtz

Uma equação de estado mais recente foi obtida através da equação da energia livre de Helmholtz, dada por:

$$\frac{A(\rho, T)}{RT} = \phi(\delta, \tau) = \phi^o(\delta, \tau) + \phi^r(\delta, \tau) \quad (3.8)$$

em que $\delta = \frac{\rho}{\rho_c}$ e $\tau = \frac{T_c}{T}$ são a massa específica reduzida e o inverso da temperatura reduzida, respectivamente.

O termo $\phi^o(\delta, \tau)$ representa a influência do gás ideal, e o termo $\phi^r(\delta, \tau)$, do gás real. Enquanto o primeiro é obtido quase que totalmente de forma analítica, o segundo é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \phi^r(\delta, \tau) = & \sum_{n=1}^7 n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} + \sum_{n=8}^{34} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\delta^{c_i}} + \\ & + \sum_{n=35}^{39} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\alpha_i(\delta-\varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau-\gamma)^2} + \sum_{n=40}^{42} n_i \Delta^{b_i} \delta e^{-i(\delta-1)^2 - D_i(\tau-1)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

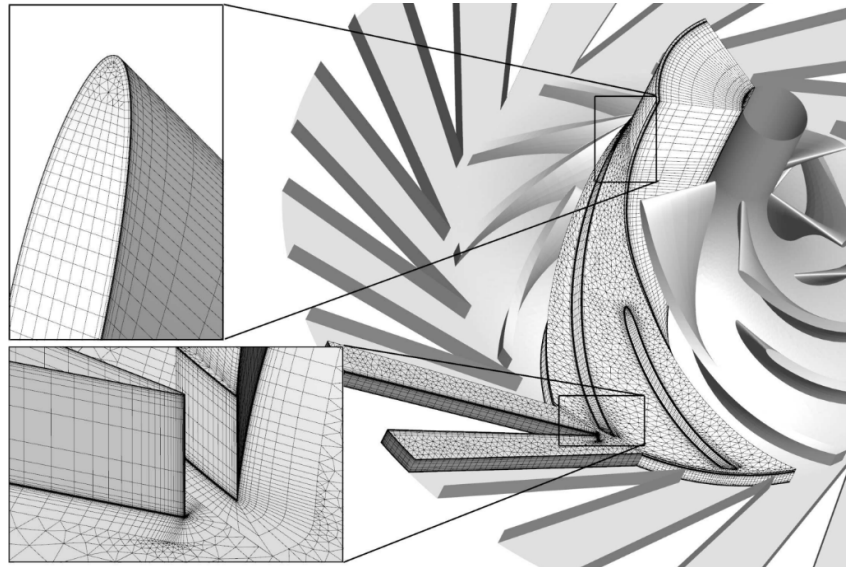
Em 1996, Span e Wagner (1996) encontraram os valores dos coeficientes da equação de Helmholtz especificamente para as propriedades termodinâmicas complexas do sCO₂. A acurácia de seu modelo, mesmo nas proximidades do ponto crítico, é da mesma ordem de grandeza dos erros de medição experimentais, que é de 0,05% na massa específica. Esse valor implica num erro máximo de 1% na velocidade do som c e 1,5% no calor específico c_p (SPAN; WAGNER, 1996). Apesar de ser um modelo implícito e de alta complexidade, tem sido amplamente adotado na comunidade científica devido à possibilidade de seu uso nas proximidades do ponto crítico.

3.2 Simulações numéricas do processo de compressão do CO₂ próximo do ponto crítico

Uma das ferramentas que pode ser utilizada para prever o comportamento do sCO₂ no interior do compressor é a dinâmica de fluidos computacional (CFD). A simulação numérica do escoamento do fluido necessita, entre outros fatores, da modelagem tridimensional da geometria do canal de escoamento. Como exemplo, a Fig. 4 apresenta o compressor modelado por Rinaldi, Pecnik e Colonna (2014).

Durante o funcionamento do compressor, o fluido experiencia simultaneamente um aumento de pressão, devido ao trabalho de eixo realizado, e irreversibilidades, devido ao atrito e a outros fenômenos indesejados, os quais são responsáveis por reduzir a pressão e a entalpia do fluido. Normalmente, os mecanismos de perda de carga são caracterizados em internos, que

Figura 4 – Exemplo de malha computacional de um compressor, evidenciando as pás do rotor e do estator.



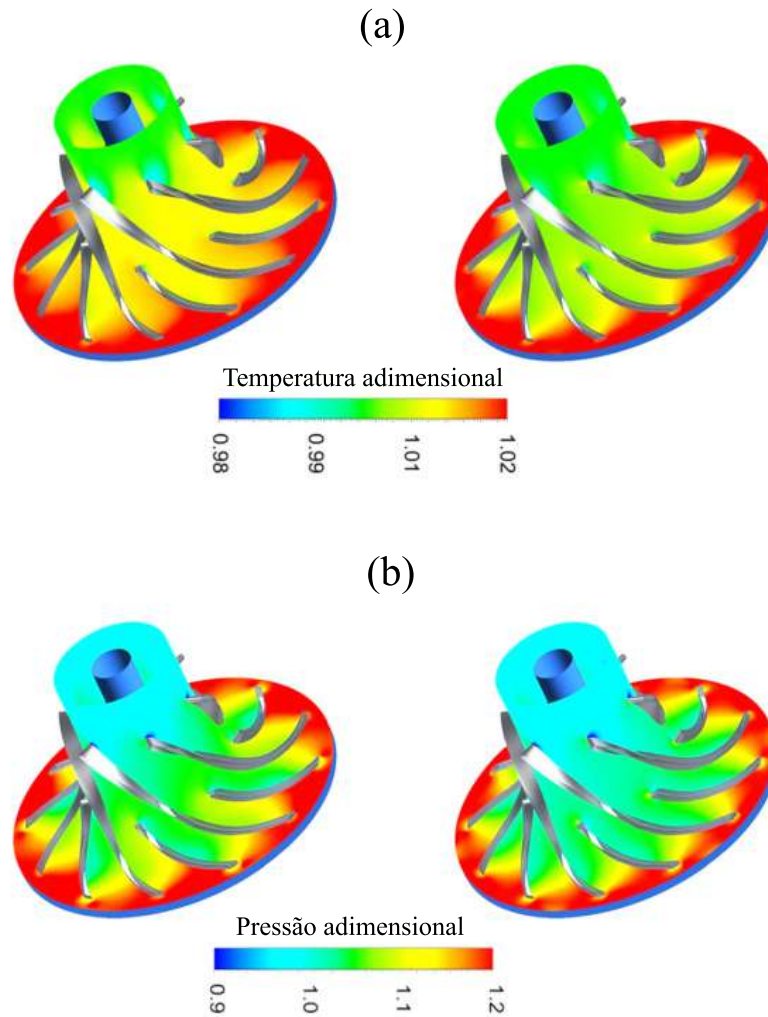
Fonte: Rinaldi, Pecnik e Colonna (2014).

acontecem na região entre-pás do impelidor (ou escoamento principal), e externos, que ocorrem fora do impelidor (LEE *et al.*, 2012; JEONG *et al.*, 2020). As simulações numéricas normalmente consideram apenas as perdas internas, sendo as externas podem ser adicionadas posteriormente para que seja possível a comparação dos resultados com dados experimentais (LIU *et al.*, 2018).

As simulações de processos que ocorrem nas proximidades do ponto crítico do CO_2 apresentam desafios inerentes às propriedades termodinâmicas complexas desse fluido, a começar pela impossibilidade do uso direto da equação da energia de Helmholtz durante a simulação, pois sua complexidade matemática torna o custo computacional inviável (AMELI; TURUNEN-SAARESTI; BACKMAN, 2018). Em vez disso, é comum a aplicação de tabelas de interpolação previamente construídas contendo os valores das propriedades termodinâmicas do fluido calculadas pelo modelo de Span e Wagner através da equação da energia de Helmholtz, ou mesmo por dados experimentais (RINALDI; PECNIK; COLONNA, 2014; HOSANGADI *et al.*, 2019; SHAO *et al.*, 2020; SHAO *et al.*, 2021; XU; ZOU; FU, 2022; LIU *et al.*, 2018; LETTIERI *et al.*, 2014; KIM *et al.*, 2014).

Ameli, Turunen-Saaresti e Backman (2018) destacaram que as tabelas de interpolação devem ser de alta resolução, para abranger o comportamento altamente não-linear do fluido. Os autores constataram diferenças significativas entre os resultados gerados com tabelas de diferentes resoluções, como mostrado na Fig. 5. No entanto, ao aumentar a precisão da tabela, os custos computacionais e as instabilidades da simulação aumentam rapidamente. A simulação numérica, portanto, possui o desafio de conciliar o custo computacional e a precisão das interpolações realizadas.

Figura 5 – (a) Temperatura adimensional e (b) pressão adimensional obtidas por simulações CFD. Para os rotores da esquerda, os resultados foram obtidos por meio de uma tabela de interpolação de baixa resolução. Para os da direita, a tabela era de alta resolução.



Fonte: Ameli, Turunen-Saaresti e Backman (2018).

3.3 Modelo matemático 0-D de compressores de $s\text{CO}_2$

Outro método para prever a performance de compressores é conhecido como análise 0-D do escoamento (XU; ZOU; FU, 2022). Essa abordagem é amplamente utilizada na literatura, possui considerações simplificadoras usualmente adotadas, e normalmente assume a forma de um sistema não-linear. Ao contrário do método 3-D utilizado nas simulações numéricas, o modelo 0-D não considera o formato tridimensional das pás, mas apenas as suas dimensões na sucção e na descarga do rotor, como também o comprimento da linha média do canal de escoamento. O modelo 0-D também não é capaz de calcular o caminho termodinâmico de compressão em si, mas apenas o estado termodinâmico na sucção e na descarga do compressor. Esta seção irá abordar o escoamento que ocorre dentro do impelidor, que é a região mais importante do compressor.

Os próximos parágrafos apresentam as equações comumente utilizadas na abordagem 0-D, a começar pelas Eqs. 3.10 e 3.11.

$$\Delta h_0 = \Delta \left(h + \frac{V_A^2}{2} \right) = \Delta(U \cdot V_t) \quad (3.10)$$

$$\Delta(\rho V_m A) = 0 \quad (3.11)$$

A Eq. 3.10 é conhecida como equação de Euler das turbomáquinas, que calcula o trabalho total do impelidor realizado sobre o fluido (XIA *et al.*, 2021; UTAMURA *et al.*, 2012). Essa equação pode ser deduzida a partir de um balanço de momento angular do fluido de trabalho, e possui a consideração de escoamento permanente e uniforme (FOX ROBERT W., 2006), pois negligencia o desenvolvimento do perfil de velocidade e do perfil de ρ ao longo das seções transversais do escoamento. A equação 3.11, por sua vez, é a equação da continuidade. Em ambas as equações, o símbolo Δ representa a variação do estado do fluido entre a sucção e a descarga.

A equação de estado do fluido de trabalho também é necessária para o modelo 0-D. Através dela, pode-se calcular a massa específica na descarga do compressor em função da pressão e da entropia:

$$\rho_2 \rightarrow f(P_2, s_2) \quad (3.12)$$

Ao considerar o processo de compressão como adiabático e irreversível, a energia dissipada devido às irreversibilidades, ou perdas de carga, levam a um aumento da entropia do fluido. Essas perdas podem ser calculadas em termos das propriedades termodinâmicas na entrada e na saída do compressor. Define-se assim mais uma equação para o sistema:

$$\Delta h_{perdas} = h_2 - h_{2s} \quad (3.13)$$

O termo h_{2s} é um estado termodinâmico hipotético que o fluido teria caso o processo de compressão fosse isentrópico e ocorresse entre as pressões de entrada e saída do compressor. Mais uma vez, recorre-se à equação de estado do fluido para determinar a entalpia, em função, por exemplo, da pressão e entropia:

$$h_{2s} \rightarrow f(P_2, s_1) \quad (3.14)$$

Um sistema formado pelas equações 3.10 a 3.14 é possível e indeterminado, pois ainda é necessário adicionar uma equação para o cálculo das perdas internas do processo (Δh_{perdas}) em função das principais dimensões do canal de escoamento. Os mecanismos de perda de carga em um compressor são complexos, e a literatura aberta dispõe de inúmeras correlações

semi-empíricas para o seu cálculo. O principal mecanismo de perda de carga ocorre pelo atrito entre o fluido e as paredes das pás.

A energia dissipada devido às irreversibilidades é a soma das energias de cada mecanismo de perda de carga, isto é,

$$\Delta h_{\text{perdas}} = \Delta h_{\text{perda1}} + \Delta h_{\text{perda2}} + \Delta h_{\text{perda3}} + \dots, \quad (3.15)$$

e os termos do segundo membro da equação representam as correlações empíricas de perda de carga. A adição dessa última equação torna o sistema de equações em questão possível e determinado.

A solução do sistema de equações adotado pela abordagem 0-D, no entanto, também pode requerer um alto custo computacional quando o compressor opera próximo do ponto crítico, pois a quantidade de iterações necessárias para a solução do sistema não-linear é aumentada devido às variações bruscas nas propriedades termodinâmicas do fluido (SON *et al.*, 2020).

Nos últimos anos, vários estudos foram realizados para testar as correlações de perda de carga em rotores que utiliza-se de CO_2 próximo do ponto crítico. É importante mencionar que a análise da acurácia dessas correlações é dificultada pela escassez de dados experimentais de testes reais de compressores disponíveis na literatura (LIU *et al.*, 2018; CHO *et al.*, 2020). Dentre os estudos que se propuseram a testar a acurácia dos modelos 0-D e 3-D, destacam-se os listados no próximo parágrafo.

Cho *et al.* (2020) testaram três conjuntos de correlações de perda de carga, e obtiveram, para dois deles, resultados dentro do intervalo de incerteza que eles estimaram para os dados experimentais, mas ainda com a necessidade de ajustes em algumas dessas correlações. Os autores identificaram um fator de atrito superestimado, e o cálculo da perda de carga pelas arestas das pás teve sua acurácia reduzida devido à consideração de que a folga é constante durante todo o escoamento. Concluíram que a abordagem 0-D pode ser usada para uma estimativa inicial do projeto de compressores que operam com CO_2 próximo do ponto crítico. Shao *et al.* (2021) também comparou simulações 0-D e 3-D com resultados experimentais, e identificou a necessidade de ajustes para as correlações empíricas de perdas de carga. Xia *et al.* (2021) conduziram um estudo para comparar dados experimentais com resultados obtidos por um modelo 0-D e uma simulação 3-D (simulação numérica) utilizando um modelo de enxame de partículas. Os autores relataram ter encontrado uma boa acurácia entre os resultados. Mais recentemente, Xu, Zou e Fu (2022) destacaram a necessidade de metodologias específicas para o projeto de compressores que operam com CO_2 próximo do ponto crítico, pois tem sido dada pouca atenção às diretrizes do projeto aerodinâmico com considerações específicas para gases reais. Eles desenvolveram uma metodologia de cálculo baseada em parâmetros de similitude, que são adimensionais construídos especificamente para os compressores que apresentam fortes efeitos de gás real.

3.4 Análise politrópica e pseudopolitrópica do processo de compressão

Uma abordagem para o cálculo da performance do processo de compressão consiste na análise politrópica, que representou um avanço significativo no estudo de compressores centrífugos (SCHULTZ, 1962). Essa análise é atualmente recomendada pela norma ASME ASME PTC-10 (1997, reafirmada em 2014) em seu procedimento de teste para determinar o desempenho termodinâmico de compressores centrífugos para gases ideais e reais.

Schultz (1962) definiu uma metodologia para o cálculo da eficiência politrópica de compressores centrífugos, dada por

$$\eta_p = \frac{\int_{P_1}^{P_2} \nu dP}{h_2 - h_1} = 1 - \frac{\int_{s_1}^{s_2} T ds}{h_2 - h_1}, \quad (3.16)$$

em que $\int_{P_1}^{P_2} \nu dP$ é o trabalho útil e $\int_{s_1}^{s_2} T ds$ é a energia dissipada devido às irreversibilidades.

O cálculo da integral $\int_{P_1}^{P_2} \nu dP$ necessita que o caminho termodinâmico do processo seja conhecido. Schultz, então, considerou-o como politrópico, isto é, que obedece à equação

$$P\nu^n = \text{constante}, \quad (3.17)$$

e determinou uma relação entre o expoente n e a eficiência η_p . Essa relação pode ser calculada pelas equações a seguir.

$$n = \frac{1}{Y - m(1 + X)} \quad (3.18)$$

$$m = \frac{ZR}{c_p} \left(\frac{1}{\eta_p} + X \right) \quad (3.19)$$

$$X = \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} \Big|_P \quad (3.20)$$

$$Y = 1 - \frac{P}{Z} \frac{\partial Z}{\partial P} \Big|_T \quad (3.21)$$

As propriedades X e Y são conhecidas como fatores de compressibilidade de Schultz.

Para que o expoente n seja constante ao longo do processo de compressão, Schultz assumiu duas considerações simplificadoras: (i) a eficiência η_p é constante, e (ii) as propriedades X e Y também o são. A primeira consideração diz respeito ao processo de compressão em si: a eficiência η_p será constante somente se a razão entre a energia dh recebida pelo fluido e a energia dissipada Tds for constante ao longo de todo o processo.

Assumindo η_p constante, tem-se

$$\eta_p = \nu \frac{dP}{dh}. \quad (3.22)$$

A segunda consideração simplificadora diz respeito ao comportamento do fluido, e é facilmente aplicável a gases ideais. Para os casos em que o fluido se comporta como gás real, pode-se utilizar um valor de n médio, obtido pela média aritmética entre os valores na sucção e na descarga do rotor. Schultz ainda propõe um fator f (Eq. 3.23) para corrigir o erro causado pelo uso do expoente politrópico médio.

$$f = \frac{h_{2s} - h_1}{\left(\frac{n_s}{n_s - 1}\right) (P_2 \nu_{2s} - P_1 \nu_1)}. \quad (3.23)$$

Adotando as duas considerações simplificadoras supracitadas, define-se o caminho termodinâmico entre os estados (P_1, T_1) e (P_2, T_2) , e o trabalho útil de compressão pode ser calculado por

$$\int_{P_1}^{P_2} \nu dP = f \left(\frac{n}{n - 1} \right) P_2 \nu_2 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \quad (3.24)$$

O conjunto de equações de Schultz não se propõe a ser uma alternativa ao modelo descrito na Seção 3.3, porque não faz menção à geometria do rotor ou às equações do movimento do fluido, e porque o cálculo exige que os estados (P_1, T_1) e (P_2, T_2) sejam conhecidos. Em vez disso, ele pode ser utilizado para uma análise complementar do escoamento, especialmente da compressão que ocorre na região do impelidor.

Evidentemente, a análise politrópica de Schultz não é bem aplicável em processos que ocorrem próximo do ponto crítico, uma vez que o fator de correção da Eq. 3.23 não é suficiente quando o expoente politrópico varia bruscamente. No entanto, pode-se utilizar uma abordagem pseudopolitrópica para contornar essa limitação.

Um processo pseudopolitrópico consiste em uma sequência de infinitos processos politróticos infinitesimais, de forma que o expoente n seja atualizado em cada processo (PORTO, 2022). Essa abordagem elimina a necessidade do fator de correção da Eq. 3.24, e tem o potencial de abranger mesmo processos complexos como os que ocorrem próximo do ponto crítico.

Nesse sentido, Dimitrakopoulos (2016) propôs um método iterativo para a determinação da curva de compressão pseudopolitrópica entre os estados termodinâmicos (P_1, T_1) e (P_2, T_2) . Em seu modelo, o processo é dividido em uma grande quantidade de elementos finitos, e a eficiência politrópica η_p é inserida como estimativa inicial. Sob a consideração de eficiência constante, os processos finitos são calculados um a um, atualizando-se o expoente politrópico por meio dos fatores de compressibilidade de Schultz e da equação de estado do fluido. O resultado

do cálculo é um estado termodinâmico $(P_2, T_{approx.})$, referente à descarga do compressor. O cálculo é, então, reiniciado com um valor diferente de η_p , até que $T_{approx.} \approx T_2$. No entanto, o método de Dimitrakopoulos, assim como o de Schultz, não pode substituir o método 0-D da Seção 3.3 usado no projeto de compressores, pois não contém as equações do movimento e as equações da geometria do rotor.

4 Modelo matemático baseado em equações diferenciais

Este capítulo apresenta a dedução de um modelo matemático para calcular o escoamento do sCO₂ em rotores de compressores centrífugos. É utilizada uma abordagem diferencial do escoamento, a fim de contemplar as variações abruptas das propriedades termodinâmicas do sCO₂ próximo do ponto crítico.

Uma visão geral do modelo matemático pode ser observada nas Figuras 6 e 7. A Fig. 6 apresenta um rotor de compressor centrífugo com a descrição das variáveis utilizadas no modelo matemático, enquanto a Fig. 7 oferece uma representação esquemática dos volumes infinitesimais, onde cada seção transversal pode ser localizada em relação ao ângulo ϕ . O fluxo do sCO₂ ocorre de $\phi = 0$ a $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Neste capítulo, as Seções 4.1 a 4.4 apresentam as deduções de equações diferenciais para os três conjuntos de variáveis representados na Fig. 7. Após a realização de todas essas deduções, a Seção 4.5 apresenta as equações reunidas para que o modelo matemático seja visualizado como um todo, e então as considerações simplificadoras utilizadas nas deduções são discutidas. A Seção 4.6, por sua vez, apresenta algumas constatações sobre os efeitos da geometria do rotor na eficiência do processo de compressão.

4.1 Diferenciais do triângulo de velocidades

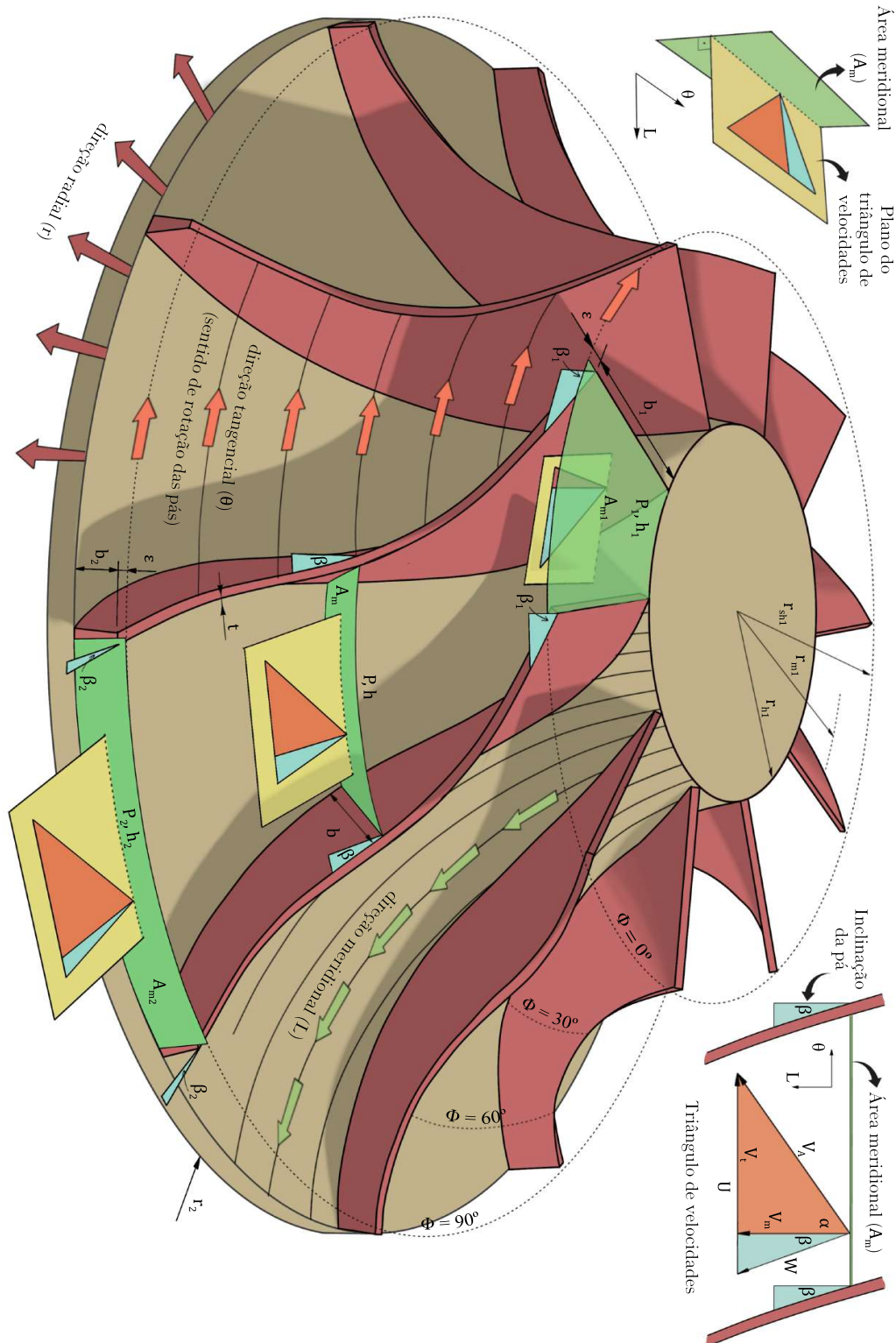
O triângulo de velocidades varia durante o escoamento, e a variação de cada componente pode ser escrita em termos dos ângulos que o constituem:

$$\begin{aligned} V_A &= V_m \sec \alpha \Rightarrow dV_A = d(V_m \sec \alpha) \Rightarrow dV_A = V_m \sec \alpha \tan \alpha d\alpha + \sec \alpha dV_m \\ \Rightarrow \frac{dV_A}{V_A} &= \tan \alpha d\alpha + \frac{dV_m}{V_m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} V_t &= V_A \sin \alpha \Rightarrow dV_t = d(V_A \sin \alpha) \Rightarrow dV_t = V_A \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha dV_A \\ \Rightarrow \frac{dV_t}{V_A} &= \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha \frac{dV_A}{V_A} \end{aligned} \quad (4.2)$$

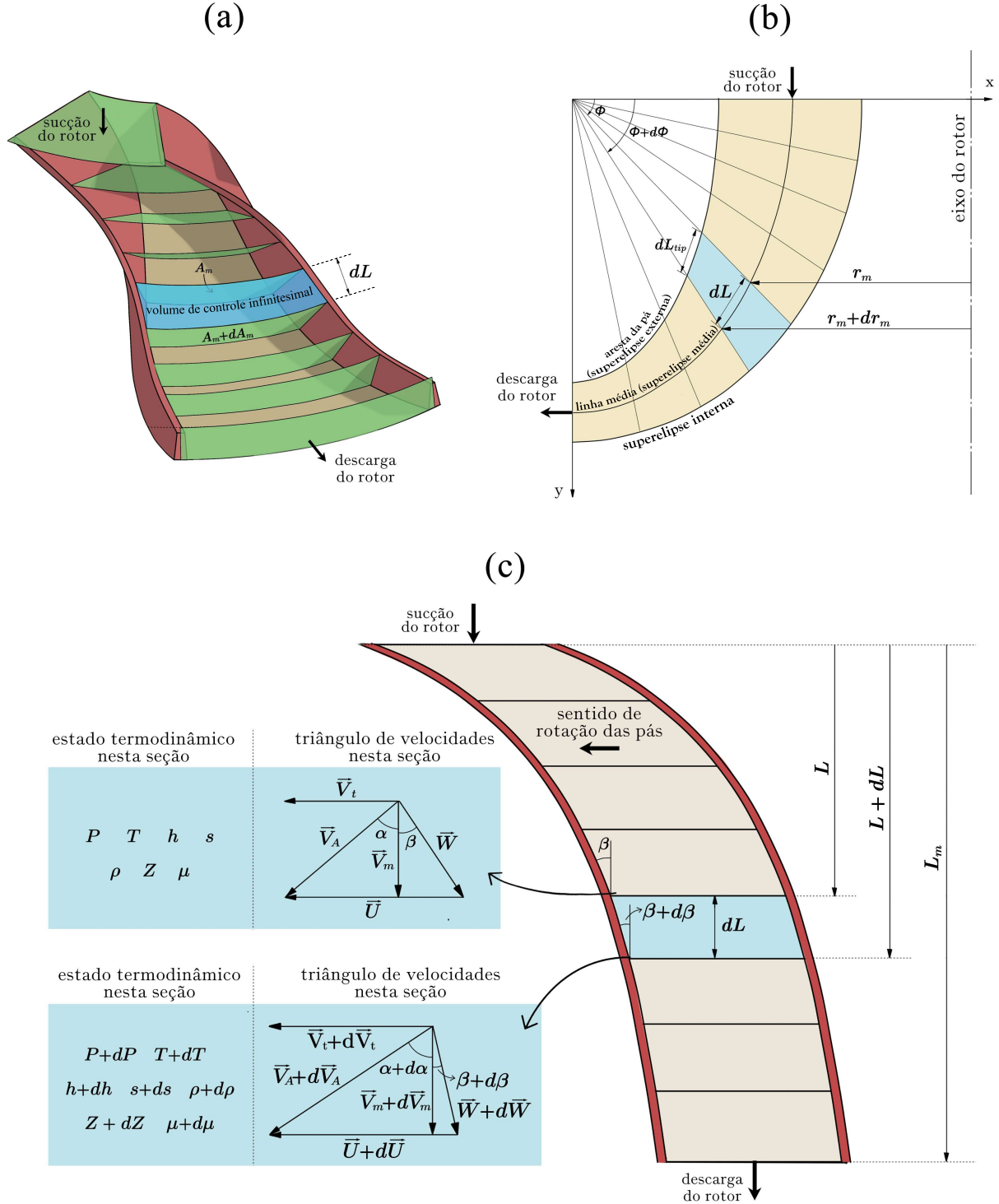
$$\begin{aligned} U &= V_m (\tan \alpha + \tan \beta) \Rightarrow dU = d[V_m (\tan \alpha + \tan \beta)] \\ \Rightarrow \frac{dU}{V_m} &= \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} + (\tan \alpha + \tan \beta) \frac{dV_m}{V_m} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Figura 6 – Geometria do rotor, triângulos de velocidade e direções do fluxo do fluido de trabalho. É possível observar o caminho meridional (L), coordenadas radial (r) e tangencial (θ). Três seções transversais são mostradas, cada uma associada a três conjuntos de variáveis: o primeiro conjunto está relacionado à geometria do canal, e compõe por sua altura (b), curvatura do canal (r_c), ângulo de inclinação da pá (β), raio máximo (r_{sh}), raio médio (r_m) e raio mínimo (r_h). O segundo conjunto diz respeito aos componentes de velocidade do fluido: velocidade absoluta (V_A), tangencial (V_t), meridional (V_m), velocidades relativa (W) e da pá (U). O ângulo α representa o ângulo de inclinação da velocidade absoluta. O terceiro conjunto abrange propriedades termodinâmicas, que são definidas por variáveis independentes como pressão (P) e entalpia (h).



Fonte: Autoria própria

Figura 7 – Representação dos volumes de controle infinitesimal. Em (a), a visualização 3D esquematiza as posições das infinitas seções transversais, bem como de um volume de controle infinitesimal delimitado por duas seções: a seção de entrada do volume de controle com área A_m , e a seção de saída com área $A_m + dA_m$. Na visualização axial em (b), cada seção pode ser localizada por um ângulo ϕ , variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos. O comprimento dL é medido ao longo da linha média. Na projeção meridional em (c), pode-se observar que o fluido que passa por cada área transversal possui um triângulo de velocidades e um estado termodinâmico.



Fonte: Autoria própria.

A variação de U também pode ser escrita em termos da definição da rotação ω :

$$\omega = \frac{U}{r_m} = \frac{U + dU}{r_m + dr_m} \Rightarrow dU = U \frac{dr_m}{r_m} \quad (4.4)$$

4.2 Metodologia para definição do formato das pás

Esta seção apresenta estratégias para descrever matematicamente o formato da pá de um rotor de compressor centrífugo. Foram escolhidas funções matemáticas que se aproximam do formato de rotores reais, e que sejam diferenciáveis.

4.2.1 O perfil da pá como uma superelipse

A linha média do canal de escoamento pode ser aproximada para o arco de um círculo ou elipse (VENTURA *et al.*, 2012). Na metodologia apresentada nesta seção, no entanto, é conveniente encontrar uma forma geométrica mais complexa, para que se possa obter geometrias variadas para o canal de escoamento. A superelipse, ou curva de Lamé, é uma opção conveniente porque permite a modificação da geometria do canal de escoamento simplesmente através do uso de um fator de forma. Outra vantagem é que a equação da superelipse é diferenciável na forma polar, e pode ser parametrizada para que o seu raio de curvatura seja calculado analiticamente.

A Fig. 8 mostra as duas superelipses que delimitam o formato da pá, apresentadas sob a vista axial. Uma superelipse intermediária foi adicionada para traçar a linha média. As funções das superelipses foram escritas em coordenadas polares por conveniência, e portanto a variável independente é o ângulo ϕ representado nas Figuras 6 e 7. O escoamento do fluido de trabalho vai de $\phi = 0$ a $\phi = \frac{\pi}{2} rad$.

Sejam $E_{sh(\phi)}$, $E_{m(\phi)}$, $E_{h(\phi)}$ as três superelipses representadas na figura. O sufixo (ϕ) indica que a variável está em função de ϕ . Na forma polar:

$$E_{sh(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos\phi}{r_2 - r_{sh1}} \right)^k + \left(\frac{\sin\phi}{h_r - b_2} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \quad (4.5)$$

$$E_{m(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos\phi}{r_2 - r_{m1}} \right)^k + \left(\frac{\sin\phi}{h_r - \frac{b_2}{2}} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \quad (4.6)$$

$$E_{h(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos\phi}{r_2 - r_{h1}} \right)^k + \left(\frac{\sin\phi}{h_r} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \quad (4.7)$$

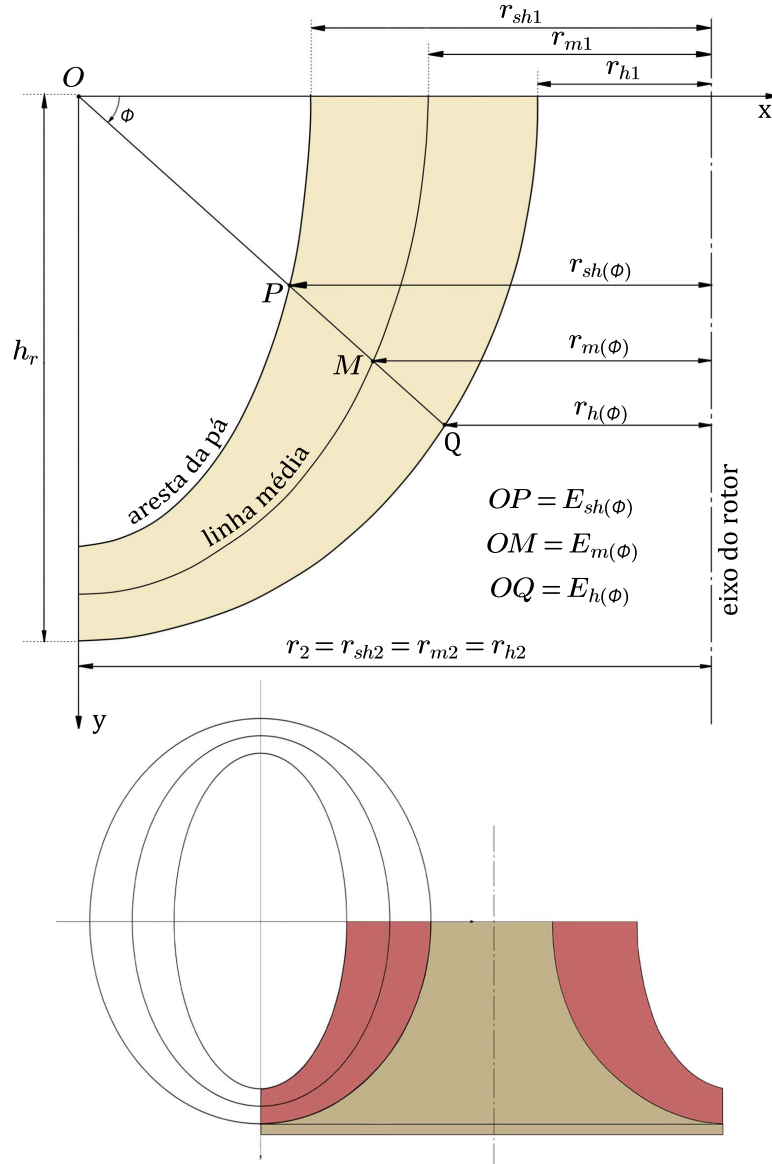
A constante k se refere a um fator de forma, sendo que $k = 2$ torna a superelipse uma elipse.

Assim:

$$b_\phi = E_{h(\phi)} - E_{sh(\phi)} \quad (4.8)$$

$$r_{sh(\phi)} = r_1 - E_{sh(\phi)} \cdot \sin\phi \quad (4.9)$$

Figura 8 – Superelipses que delimitam o canal de escoamento.



Fonte: Autoria própria.

$$r_m(\phi) = r_1 - E_m(\phi) \cdot \sin\phi \quad (4.10)$$

$$r_h(\phi) = r_1 - E_h(\phi) \cdot \sin\phi \quad (4.11)$$

4.2.2 Raio de curvatura do canal de escoamento

O raio de curvatura r_c é a curvatura da elipse média E_m , e é necessário para calcular o fator de atrito para tubulações curvas. A Eq. 4.6 na forma parametrizada é:

$$\begin{bmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \cos^{\frac{2}{k}} \phi \\ R_2 \sin^{\frac{2}{k}} \phi \end{bmatrix}$$

em que $R_1 = r_2 - r_{m1}$ e $R_2 = h_r - \frac{b_2}{2}$.

O raio de curvatura de uma função parametrizada é dado por:

$$r_c = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}$$

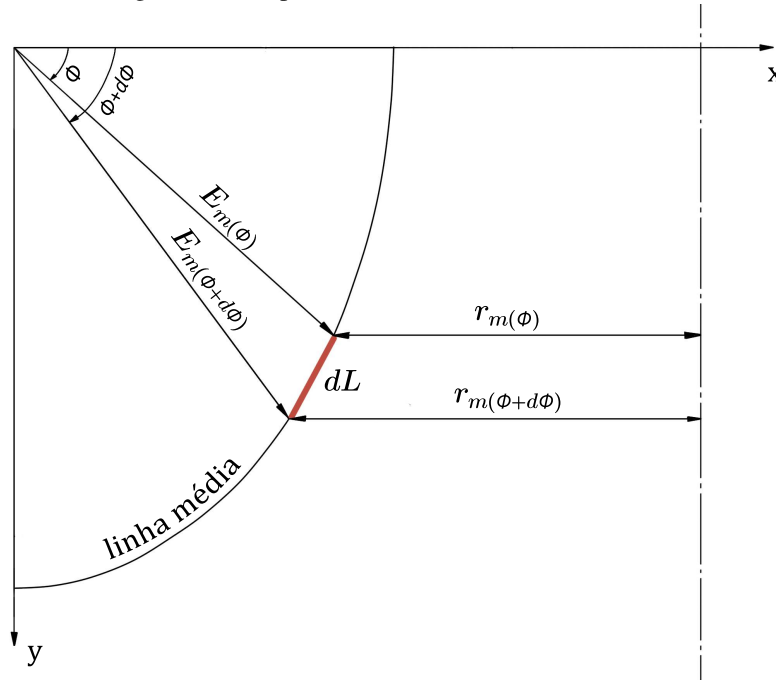
Portanto, o raio de curvatura $r_{c(\phi)}$ da superelipse média é:

$$r_{c(\phi)} = \frac{(R_1^2 \sin^2 \phi \cos^{\frac{4}{k}-2} \phi + R_2^2 \cos^2 \phi \sin^{\frac{4}{k}-2} \phi)^{\frac{3}{2}}}{R_1 R_2 (\sin \phi \cos \phi)^{\frac{2}{k}-1} (k-1)} \quad (4.12)$$

4.2.3 Comprimento meridional L

As dimensões do rotor, apresentada nas seções anteriores, foram deduzidas em função do ângulo ϕ . No entanto, esse ângulo não é uma medida da distância percorrida pelo fluido no interior do rotor. É necessário calcular todas as propriedades do fluido em termos da distância meridional L , e para isto pode-se converter o diferencial $d\phi$ em um comprimento dL , calculado na linha média. O valor de dL depende de ϕ e de $d\phi$, como mostra a Fig. 9.

Figura 9 – Comprimento diferencial da linha média



Fonte: autoria própria

A partir de relações trigonométricas simples, chega-se a:

$$dL_{(\phi)} = \sqrt{[E_{m(\phi)} \sin(\phi) - E_{m(\phi+d\phi)} \sin(\phi + d\phi)]^2 + [r_{m(\phi)} - r_{m(\phi+d\phi)}]^2} \quad (4.13)$$

Analogamente, o comprimento diferencial da aresta da pá (Eq. 4.5) é dado por:

$$dL_{tc(\phi)} = \sqrt{[E_{sh(\phi)} \sin(\phi) - E_{sh(\phi+d\phi)} \sin(\phi + d\phi)]^2 + [r_{sh(\phi)} - r_{sh(\phi+d\phi)}]^2} \quad (4.14)$$

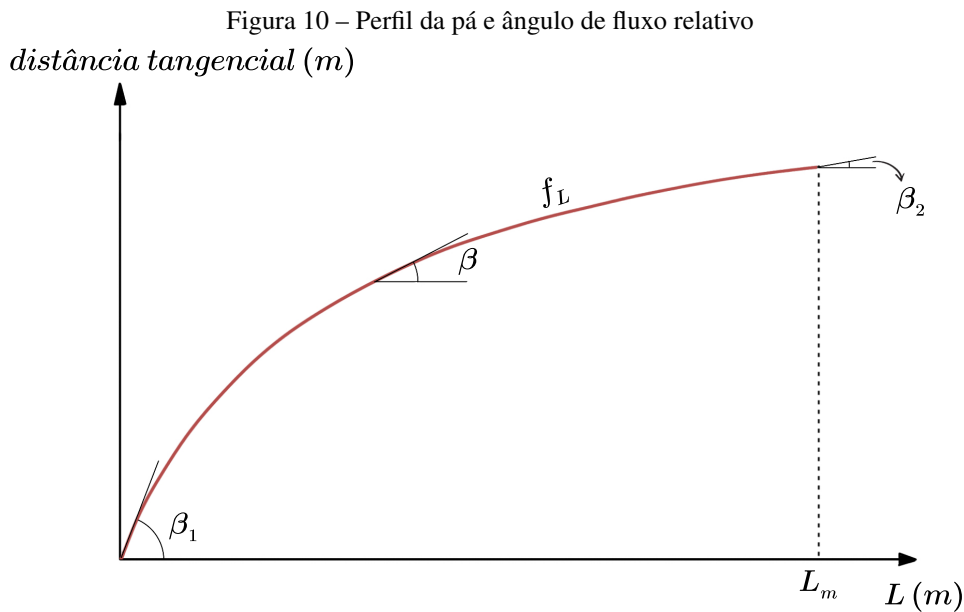
O comprimento total da linha média deve ser calculado pelo comprimento do arco da superelipse, dado por

$$L_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dL_{(\phi)}, \quad (4.15)$$

4.2.4 Ângulo de inclinação da pá (β)

O ângulo de inclinação da pá, β , pode ser obtido pela derivada da função f_L que descreve o perfil da pá, ou seja:

$$\beta_{(L)} = \tan^{-1} \left[\frac{df_L}{dL} \right] \quad (4.16)$$



Fonte: autoria própria

Aqui, é conveniente que a função f_L seja matematicamente simples, diferenciável, e ao mesmo tempo atenda às características comumente observadas nos rotores de compressores. A pá deve possuir um valor de β acentuado na entrada do rotor; ao longo do escoamento β deve reduzir; atingindo seu valor mínimo na descarga. Uma função matemática simples que intercepta a origem e que atende a esses requisitos é:

$$f_L = n \cdot \ln(mL + 1) \quad (4.17)$$

onde m e n são coeficientes a serem determinados.

Substituindo 4.17 em 4.16:

$$\beta_{(L)} = \tan^{-1} \left(\frac{mn}{mL + 1} \right) \quad (4.18)$$

Os coeficientes m e n podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{cases} \beta(0) = \beta_1 \\ \beta(L_m) = \beta_2 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{L_m} \cdot \left(\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} - 1 \right) \\ n = \frac{\tan\beta_1}{m} \end{cases} \quad (4.19)$$

Substituindo 4.19 em 4.18, tem-se o ângulo β em função de L :

$$\beta_{(L)} = \tan^{-1} \left[\frac{\tan\beta_1}{\frac{L}{L_m} \cdot \left(\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} - 1 \right) + 1} \right] \quad (4.20)$$

Outra função que pode representar o perfil da pá é

$$f_L = n \cdot \tan^{-1}(mL) \quad (4.21)$$

Seguindo o mesmo procedimento da equação anterior, chega-se aos valores dos coeficiente m e n .

$$\begin{cases} m = \frac{1}{L_m} \cdot \sqrt{\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} - 1} \\ n = \frac{\tan\beta_1}{m} \end{cases} \quad (4.22)$$

Para este caso, a função $\beta_{(L)}$ é

$$\beta_{(L)} = \tan^{-1} \left[\frac{\tan\beta_1}{\left(\frac{L}{L_m} \right)^2 \cdot \left(\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} - 1 \right) + 1} \right] \quad (4.23)$$

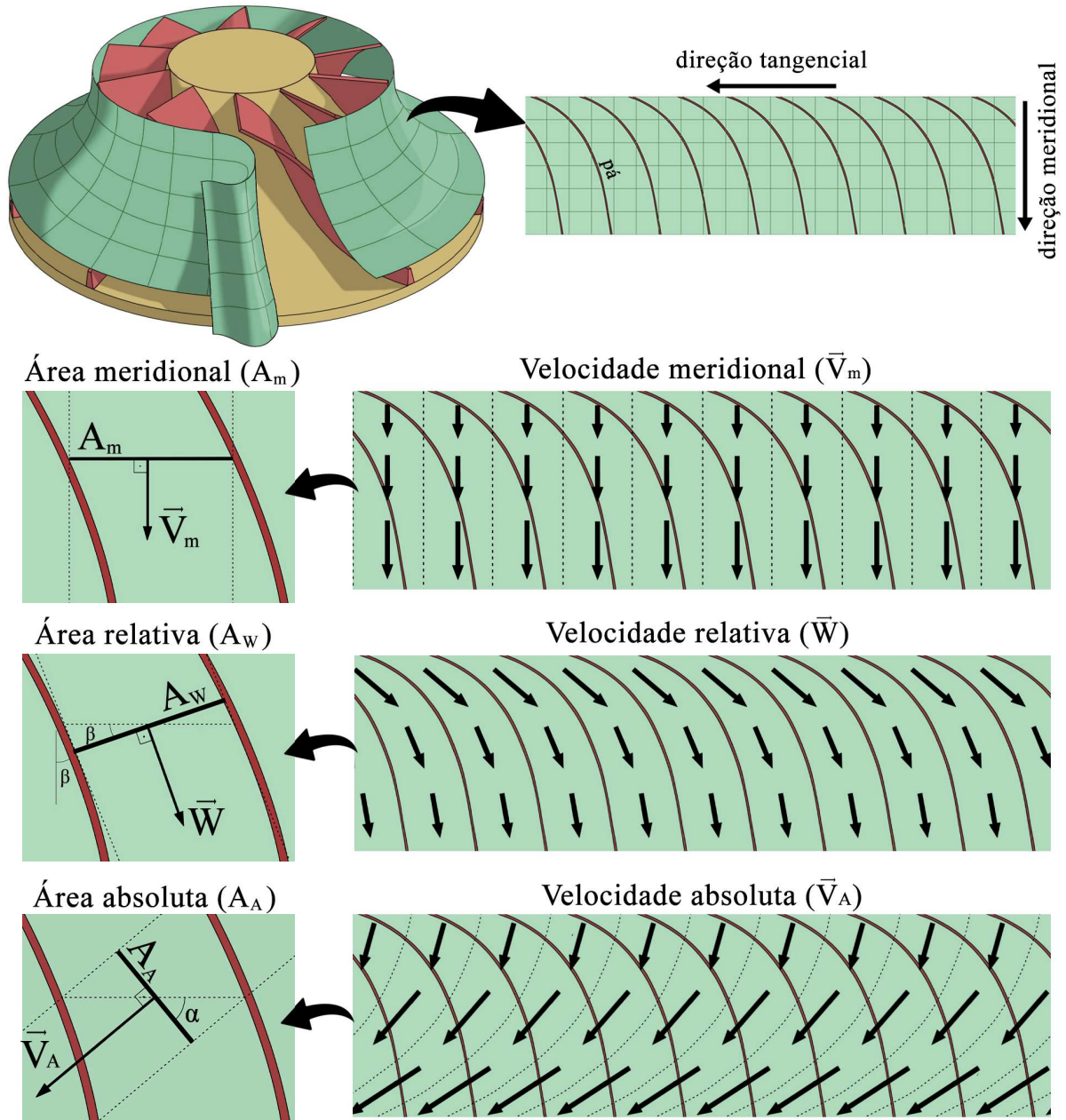
4.2.5 Componentes de área

Conforme mostrado na Fig. 6, o plano do triângulo de velocidades é sempre perpendicular à área da seção transversal. No entanto, como há três componentes de velocidade V_m , V_A e W , também deve haver três componentes de área A_m , A_A e A_W , como mostra a Fig. 11.

Evidentemente, área e velocidade estão relacionadas através da equação da continuidade:

$$\dot{m} = \rho V A$$

Figura 11 – Relações entre áreas e velocidades.



Fonte: autoria própria

Portanto:

$$V_A A_A = V_m A_m = W A_W$$

Aplicando relações trigonométricas no triângulo de velocidades, chega-se a:

$$A_A = A_m \cos \alpha \quad (4.24a)$$

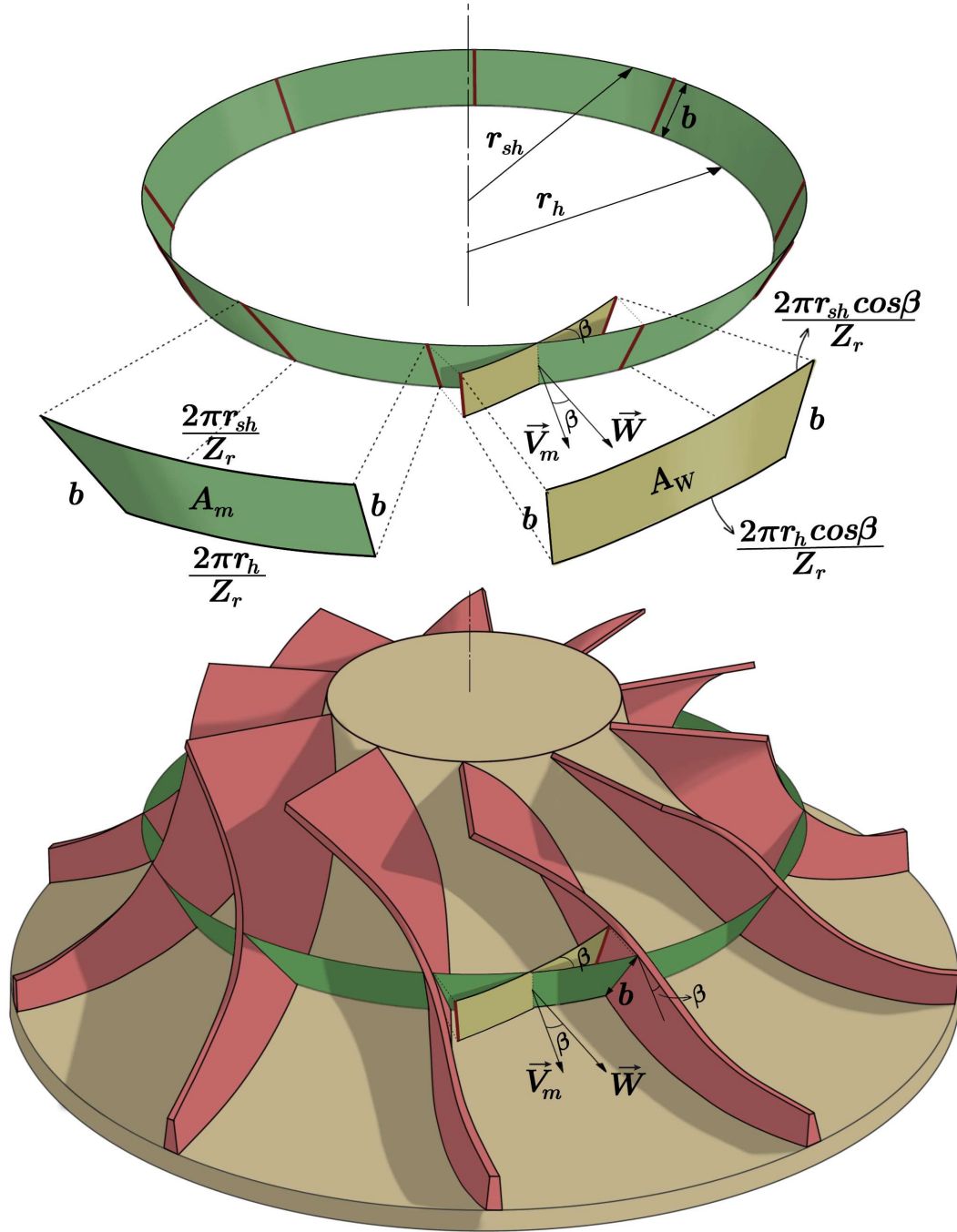
$$A_W = A_m \cos \beta \quad (4.24b)$$

$$A_W = A_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (4.24c)$$

As áreas $A_{m(\phi)}$ e $A_{W(\phi)}$ e os perímetros $P_{m(\phi)}$ e $P_{W(\phi)}$ variam em função de ϕ , e foram

calculados através da casca de um tronco de cone, como mostrado na Fig. 12.

Figura 12 – Áreas e perímetros das seções A_m e A_W .



Fonte: autoria própria

$$A_{m(\phi)} = \frac{\pi \cdot b_{(\phi)} \cdot (r_{sh(\phi)} + r_{h(\phi)})}{Z_r} \quad (4.25)$$

$$P_{m(\phi)} = 2b_{\phi} + \frac{2\pi(r_{sh(\phi)} + r_{h(\phi)})}{Z_r} \quad (4.26)$$

$$A_{W(\phi)} = \frac{\pi \cdot b_{(\phi)} \cdot (r_{sh(\phi)} + r_{h(\phi)}) \cdot \cos\beta_{(\phi)}}{Z_r} \quad (4.27)$$

$$P_{W(\phi)} = 2b_{(\phi)} + \frac{2\pi \cos\beta_{(\phi)}(r_{sh(\phi)} + r_{h(\phi)})}{Z_r} \quad (4.28)$$

Os diâmetros hidráulicos meridional e relativo são, respectivamente:

$$D_{m(\phi)} = 4 \frac{A_{m(\phi)}}{P_{m(\phi)}} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} D_{W(\phi)} &= 4 \frac{\overbrace{A_{W(\phi)}}^{Eq.4.27}}{\underbrace{P_{W(\phi)}}_{Eq.4.28}} = \frac{4A_{m(\phi)}\cos\beta_{(\phi)}}{2b_{(\phi)} + \frac{2\pi\cos\beta_{(\phi)}(r_{sh(\phi)}+r_{h(\phi)})}{Z_r}} \\ &= \frac{2A_{m(\phi)}\cos}{b_{(\phi)} + \frac{A_{m(\phi)}\cos\beta_{(\phi)}}{b_{(\phi)}}} \\ &= \left(\frac{b_{(\phi)}}{2A_{m(\phi)}\cos\beta_{(\phi)}} + \frac{1}{2b_{(\phi)}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

As deduções da área, perímetro e diâmetro hidráulico na direção ortogonal à velocidade absoluta não são relevantes para este modelo. É importante ressaltar que os cálculos de A_m e A_W tratam-se de aproximações, pois desconsidera o fato de que as áreas possuem uma determinada curvatura, característica do tronco de cone. O erro causado por essa curvatura é nulo na sucção do rotor (região onde a área é calculada através de uma superfície anular), e é máxima na descarga do rotor (onde a área é calculada através da casca de um cilindro). O erro também será menor quanto maior for a quantidade de pás do rotor.

Para calcular o erro devido a essa consideração simplificadora, é necessário comparar a área da casca do cilindro (área ideal) com a área real da seção transversal na descarga do rotor (área real). Esta última pode ser obtida através da área lateral de um prisma cuja base é um polígono de Z_r lados, sendo Z_r a quantidade de pás do rotor. A razão r entre a área ideal e a área real é

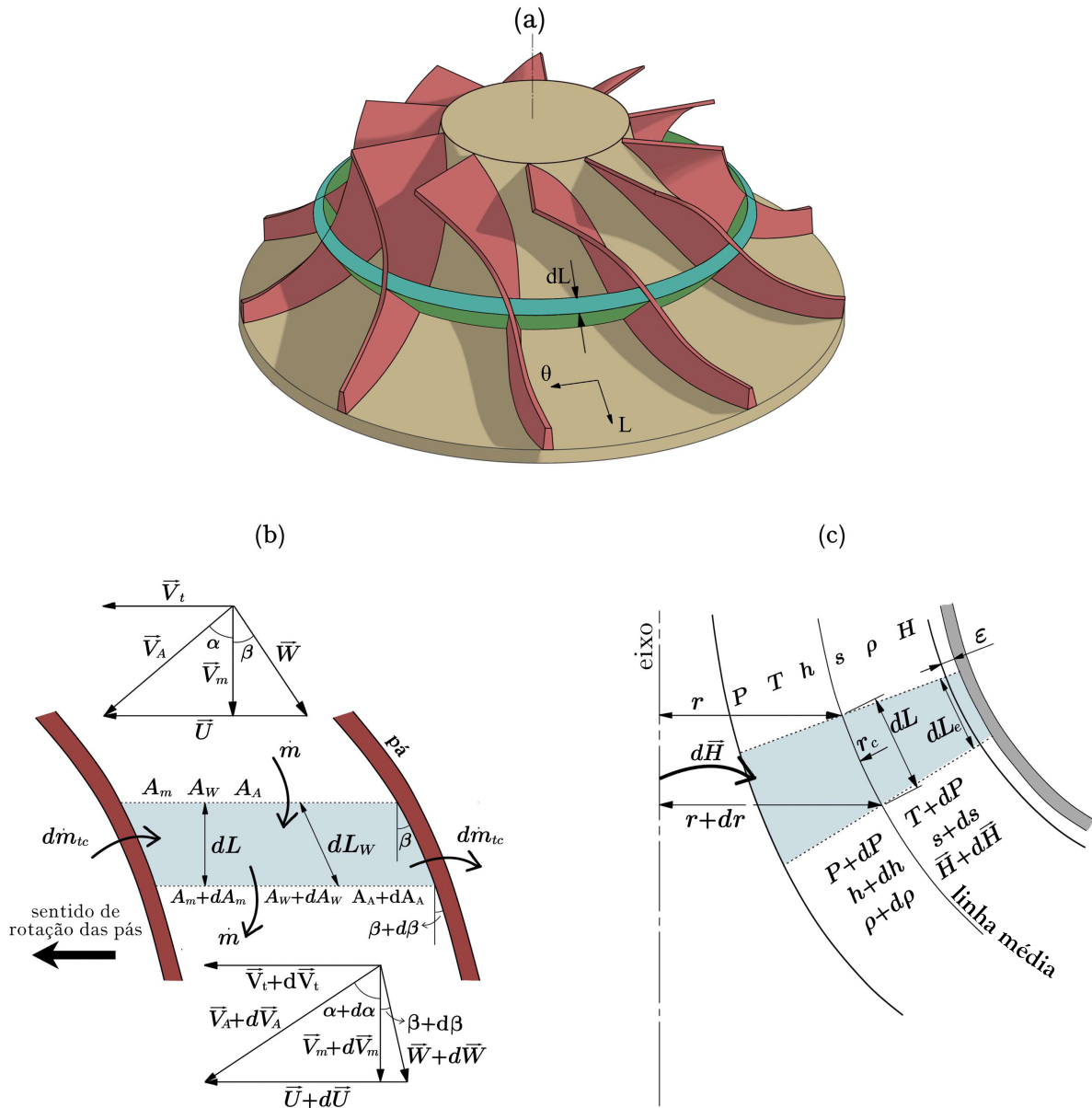
$$r = \frac{2\pi r_2 b_2}{2Z_r r_2 b_2 \sin(\frac{\pi}{Z_r})} = \frac{\pi}{Z_r \sin(\frac{\pi}{Z_r})}.$$

Assim, um rotor com 10 pás, por exemplo, terá uma razão r de 1,017, o que corresponde a um erro de 1,7% na área da descarga. Já um rotor com 20 pás terá um erro de 0,4%. O erro será nulo para um rotor com infinitas pás.

4.3 Balanço de momento linear, massa, entalpia, entropia e momento angular do fluido de trabalho

Seja o volume de controle infinitesimal representado na Fig. 13.

Figura 13 – Representação do volume de controle infinitesimal. (a) é uma visualização 3-D de Z_r volumes de controle lado a lado, sendo Z_r a quantidade de pás do rotor. (b) é a representação do VC na projeção meridional. (c) é a vista axial do VC. Há entrada e saída de massa, energia e momento linear no VC. E há apenas entrada de momento angular, representado por $d\vec{H}$. O diferencial $d\dot{m}_{tc}$ é a massa que entra e sai do VC através da folga entre as pás e a carcaça do rotor.



Fonte: autoria própria.

Através de um balanço de momento linear, chega-se a

$$\underbrace{\dot{m}dV_A}_{(A)} + \underbrace{A_A dP}_{(B)} = \underbrace{dF_{eixo}}_{(C)} - \underbrace{dF_{atrito}}_{(D)} - \underbrace{dF_{\dot{m}_{tc}}}_{(E)} \quad (4.31)$$

em que

(A) variação do momento linear do fluido de trabalho, dada por:

$$\dot{m}dV_A = \rho A_A V_A dV_A \quad (4.32)$$

(B) força causada pela diferença de pressão no escoamento.

(C) força que o eixo do rotor realiza sobre o fluido de trabalho.

(D) força devido ao atrito da parede com o fluido.

(E) força associada à redução da quantidade de movimento do fluido devido à entrada de massa através da folga entre a carcaça e a pá.

4.3.1 Trabalho de eixo do rotor

O termo (C) da Equação 4.31 pode ser calculado pela dedução

$$\begin{aligned} V_A dF_{eixo} &= \dot{m} dw_{eixo} \\ dF_{eixo} &= \frac{\dot{m} dw_{eixo}}{V_A} \\ dF_{eixo} &= \frac{\rho V_A A_A dw_{eixo}}{V_A} \\ dF_{eixo} &= \rho A_A dw_{eixo} \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que dw_{eixo} é a potência específica que o fluido recebe do eixo.

4.3.2 Perda de carga pelo atrito

O termo (D) da Equação 4.31 é

$$dF_{atrito} = \tau_w dA_{wet}, \quad (4.34)$$

sendo τ_w a tensão cisalhante na parede e dA_{wet} a superfície molhada. Esse termo pode ser desenvolvido a partir das equações a seguir, algumas já desenvolvidas nas seções anteriores,

$$P_{wet} = P_W = 2b + \frac{2\pi \cos\beta (r_{sh} + r_h)}{Z_r} \quad (4.28)$$

$$D_W = \frac{4A_m \cos\beta}{P_{wet}} \quad (4.30)$$

$$dA_{wet} = P_{wet} \cdot \underbrace{dL_W}_{\frac{dL}{\cos\beta}} \quad (4.35)$$

$$\tau_w = f_c \cdot \frac{\rho W^2}{2} \quad (4.36)$$

em que P_{wet} é o perímetro molhado e f_c é o fator de atrito corrigido para tubulações curvas, dado por (LIU *et al.*, 2018; VENTURA *et al.*, 2012)

$$f_c = f \cdot \left(1 + 0.075 \cdot Re^{0.25} \cdot \sqrt{\frac{D_W}{2r_c}} \right). \quad (4.37)$$

Na Equação 4.37, f é o fator de atrito de Fanning, equivalente a 1/4 do fator de atrito de Darcy f_D , e pode ser calculado explicitamente pela correlação de Sousa-Cunha-Marques (SOUSA; CUNHA; MARQUES, 1999)

$$f = \frac{f_D}{4} = 0,25 \cdot \left(-2\log_{10} \left[\frac{k}{3.7D_W} - \frac{5.16}{Re} \cdot \log_{10} \left(\frac{k}{3.7D_W} + \frac{5.09}{Re^{0.87}} \right) \right] \right)^{-2}, \quad (4.38)$$

em que D_W é o diâmetro hidráulico relativo.

Substituindo 4.24a e 4.28 em 4.35:

$$\begin{aligned} dF_{atrito} &= f_c \cdot \frac{\rho W^2}{2} \cdot \frac{2b + \frac{2\pi \cos\beta (r_{sh} + r_h)}{Z_r}}{\cos\beta} \cdot \frac{A_A}{A_A} \cdot dL \\ &= \rho A_A f_c \cdot \frac{W^2 \left(\frac{b}{\cos\beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right)}{A_m \cos\alpha} \cdot dL \\ &= \rho A_A f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos\beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3.3 Perda de carga pela aresta da pá

O termo (E) da Equação 4.31 é:

$$dF_{\dot{m}_{tc}} = V_m d\dot{m}_{tc} = V_m \rho_{tc} V_{tc} dA_{tc} \cdot \frac{A_A}{A_A} = \frac{\rho_{tc} A_A V_m V_{tc} \varepsilon dL_{tc}}{A_m \cos\alpha} = \frac{\rho_{tc} A_A V_A V_{tc} \varepsilon dL_{tc}}{A_m}$$

em que ρ_{tc} e V_{tc} são, respectivamente, a massa específica e a velocidade do fluido que entra no volume de controle através da folga entre a pá e a carcaça da turbomáquina, ε é a altura dessa folga, dL_{tc} é o comprimento diferencial da aresta da pá e o termo $dA_{tc} = \varepsilon dL_{tc}$ é a área de passagem do fluido que escoar por essa folga. Como simplificação, será utilizado $\rho_{tc} = \rho$ e $V_{tc} = U$. Portanto:

$$dF_{\dot{m}_{tc}} = \frac{\rho A_A V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc} \quad (4.40)$$

4.3.4 Entalpia e entropia

Substituindo 4.32, 4.33, 4.39 e 4.40 em 4.31, tem-se

$$\rho A_A V_A dV_A + A_A dP = \rho A_A dw_{eixo} - \rho A_A f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL - \frac{\rho A_A V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc}.$$

Dividindo todos os termos por ρA_A :

$$V_A dV_A + \frac{dP}{\rho} = dw_{eixo} - f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL - \frac{V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc} \quad (4.41)$$

A primeira e a segunda Leis da Termodinâmica podem, respectivamente, ser escritas como

$$dh + V_A dV_A = dh_0 \quad (4.42)$$

$$T ds = dh - \frac{dP}{\rho} \quad (4.43)$$

em que h_0 é a entalpia de estagnação, ou entalpia total, do fluido de trabalho.

Na Eq. 4.43, o diferencial ds equivale a

$$ds = ds_q + ds_{ger}.$$

em que $ds_q = \frac{\delta q}{T}$ é a variação de entropia devido à troca de calor e ds_{ger} é a entropia gerada pelas irreversibilidades do processo. Este último termo, em processos reais, é sempre positivo.

Neste modelo, é suposto que o escoamento é adiabático, o que significa que a variação de entropia do fluido será causada apenas pelas irreversibilidades do processo. Portanto:

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{ger} \Rightarrow ds = ds_{ger}$$

Substituindo 4.42 e 4.43 em 4.41:

$$dh_0 - T ds = dw_{eixo} - f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL - \frac{V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc} \quad (4.44)$$

Os dois últimos termos dessa equação estão relacionados às irreversibilidades do sistema. Então, a energia dissipada devido às irreversibilidades é:

$$dh_{perdas} = \underbrace{f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL}_{dh_{atrito}} + \underbrace{\frac{V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc}}_{dh_{tc}} \quad (4.45)$$

em que dh_{atrito} é a perda de carga pelo atrito e dh_{tc} é a perda de carga pela aresta da pá.

Pode-se reescrever a Equação 4.44 e relacionar seus termos como se segue:

$$dh_0 - T ds \Rightarrow dw_{eixo} - dh_{perdas}$$

Portanto, define-se o sistema:

$$\begin{cases} dh_0 = dw_{eixo} \\ Tds = dh_{perdas} \end{cases} \quad (4.46)$$

A primeira equação do sistema descreve a energia que é transferida do eixo do compressor para o fluido de trabalho. A segunda equação, por sua vez, apresenta a relação entre as perdas de carga e o aumento da entropia específica do fluido.

4.3.5 Momento angular

Através de um balanço do momento angular $\vec{H}$ do fluido, e sabendo-se que a derivada de $\vec{H}$ é o torque $\vec{T}_{eixo}$, chega-se a uma relação entre velocidade tangencial e trabalho de eixo:

$$\begin{aligned} (\vec{H} + d\vec{H}) - \vec{H} &= d\vec{H} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\vec{H} + d\vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t}(d\vec{H}) \\ \dot{m} \cdot (\vec{h} + d\vec{h}) - \dot{m} \cdot \vec{h} &= d\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \dot{m} \cdot (r_m + dr_m)(V_t + dV_t) - \dot{m} \cdot r_m V_t &= d\vec{T}_{eixo} \\ r_m V_t - r_m V_t + r_m dV_t + V_t dr_m + dr_m dV_t &= \frac{d\vec{T}_{eixo}}{\dot{m}} \\ d(r_m V_t) \cdot \omega &= \frac{d\vec{T}_{eixo}}{\dot{m}} \cdot \omega \\ d(\omega r_m V_t) &= \frac{\dot{W}_{eixo}}{\dot{m}} \\ d(UV_t) &= dw_{eixo} \\ UdV_t + V_t dU &= dw_{eixo} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Esta dedução possui uma consideração simplificadora: o momento angular do fluido é calculado utilizando-se r_m , que é a distância entre o eixo do rotor e a linha média. No entanto, é provável que a massa de cada elemento infinitesimal não esteja equidistribuída, e por isso seu centro de massa não está localizado exatamente na linha média. Neste modelo matemático, no entanto, a distância entre a linha média e o centro de massa de cada elemento finito é considerada desprezível.

4.3.6 Definição do sistema de equações

Substituindo 4.42, 4.45 e 4.47 em 4.46, forma-se o sistema

$$\begin{cases} dh + V_A dV_A = UdV_t + V_t dU \\ Tds = f_c \frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right) dL + \frac{V_A U \varepsilon}{A_m} dL_{tc} \end{cases} \quad (4.48)$$

A primeira equação do sistema é a equação de Euler das Turbomáquinas na forma diferencial. A segunda descreve as irreversibilidades do sistema em função da geometria do rotor e das componentes de velocidade do fluido.

4.4 Relação matemática fundamental entre as propriedades termodinâmicas h , ρ e s

Esta seção apresenta a dedução de uma equação que relaciona as três propriedades termodinâmicas mais importantes do modelo matemático: entalpia, entropia e massa específica. Considerando $h = f(\rho, s)$, os diferenciais dh , ds e $d\rho$ podem ser relacionados como se segue:

$$dh = \left. \frac{\partial h}{\partial \rho} \right|_s d\rho + \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_\rho ds \quad (4.49)$$

Sejam os coeficientes isentrópicos do fluido m_s e n_s definidos como:

$$m_s = \frac{P}{T} \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_s \quad (4.50)$$

$$n_s = \frac{\rho}{P} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s \quad (4.51)$$

O quadrado da velocidade do som de um gás é

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = n_s R T Z. \quad (4.52)$$

A função da energia interna na forma diferencial leva a uma das relações de Maxwell da Termodinâmica, dada pela equação

$$du = T ds - P dv \Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s = - \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_v. \quad (4.53)$$

A propriedade $\left. \frac{\partial h}{\partial \rho} \right|_s$ da Equação 4.49 pode ser deduzida a partir das Equações 4.43 e 4.52:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \rho} \right|_s = \left. \frac{T \partial s + \frac{\partial P}{\rho}}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \frac{c^2}{\rho} \quad (4.54)$$

A propriedade $\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_\rho$, também da equação 4.49, pode ser deduzida utilizando as equações 4.43, 4.50, 4.51 e 4.53:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_{\rho} &= \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_v = \left. \frac{T \partial s + \frac{\partial P}{\rho}}{\partial s} \right|_v = T + \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_v = \\
&= T - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s = T - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_s \left. \frac{\partial P}{\partial v} \right|_s = \\
&= T + \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_s \rho^2 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = T + \frac{T}{P} m_s \rho n_s R T Z = \\
&= T + \frac{T}{\rho R T Z} m_s \rho n_s R T Z = T + T m_s n_s = T(1 + m_s n_s)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Substituindo 4.54 e 4.55 em 4.49, finaliza-se a dedução:

$$dh = c^2 \frac{d\rho}{\rho} + (1 + m_s n_s) T ds \tag{4.56}$$

4.5 Visualização do modelo matemático

Para visualizar o modelo como um todo, as equações deduzidas nas seções anteriores estão reunidas nas Tabelas 2 e 3.

A Tab. 2 apresenta as equações da geometria do rotor obtidas pela metodologia da Seção 4.2. Através dessas equações, é possível determinar as curvas das variações de r_m , r_h , r_{sh} , b , A_m , D_W , β , r_c e D_W em função de ϕ e L , que são as variáveis geométricas necessárias para o cálculo do processo de compressão.

A Tab. 3, por sua vez, trata-se das equações diferenciais que descrevem o escoamento do fluido, deduzidas nas Seções 4.1, 4.3 e 4.4. Essas equações formam um sistema possível e determinado, cujas variáveis são: três diferenciais de propriedades termodinâmicas (dh , ds e $d\rho$) e cinco diferenciais de propriedades do escoamento (dV_A , dV_m , dV_t , dU e $d\alpha$). O sistema de equações é linear se, através de um cálculo numérico, for considerado que cada diferencial é uma variável finita.

O modelo matemático proposto neste estudo assume que as variações de pressão e temperatura ocorrem apenas na direção meridional, ou seja, o fluxo é considerado uniforme nas coordenadas radiais. No entanto, na realidade, o fluxo de fluido envolve perfis de velocidade e temperatura que são influenciados por vários fatores, como a atrito entre o fluido e a parede das pás e o gradiente de pressão causado pelas forças centrífugas. Como consequência, as simulações usando esse modelo matemático diferirão dos resultados experimentais, mesmo na linha meridional de observação. Próximo às pás, o modelo CFD observará a formação de gotículas de líquido, por exemplo, o que não pode ser observado usando este modelo matemático. Por outro lado, as equações de estado são altamente não lineares em algumas regiões do diagrama termodinâmico do sCO₂. Nessas regiões, o modelo matemático proposto oferece uma vantagem

Tabela 2 – Equações para o cálculo da geometria do rotor. Nas equações 4.58, 4.59, 4.60, and 4.69, as constantes k e j são fatores de forma. Cada rotor deve ter um valor de k e j dependendo de sua geometria.

Descrição	Definição	
ângulo das superelipses	$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$	(4.57)
superelipse (carcaça)	$E_{sh(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos \phi}{r_2 - r_{sh1}} \right)^k + \left(\frac{\sin \phi}{h_r - b_2} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}}$	(4.58)
superelipse média	$E_{m(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos \phi}{r_2 - r_{m1}} \right)^k + \left(\frac{\sin \phi}{h_r - \frac{b_2}{2}} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}}$	(4.59)
superelipse (núcleo)	$E_{h(\phi)} = \left[\left(\frac{\cos \phi}{r_2 - r_{h1}} \right)^k + \left(\frac{\sin \phi}{h_r} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}}$	(4.60)
altura da pá	$b_{(\phi)} = E_{sh(\phi)} - E_{h(\phi)}$	(4.61)
raio máximo	$r_{sh(\phi)} = r_2 - E_{sh(\phi)} \cdot \cos \phi$, $dr_{sh} = r_{sh(\phi+d\phi)} - r_{sh(\phi)}$	(4.62)
raio médio	$r_{m(\phi)} = r_2 - E_{m(\phi)} \cdot \cos \phi$, $dr_m = r_{m(\phi+d\phi)} - r_{m(\phi)}$	(4.63)
raio mínimo	$r_{h(\phi)} = r_2 - E_{h(\phi)} \cdot \cos \phi$	(4.64)
área meridional	$A_{m(\phi)} = \frac{\pi \cdot b_{(\phi)} \cdot (r_{sh(\phi)} + r_{h(\phi)})}{Z_r}$, $dA_m = A_{m(\phi+d\phi)} - A_{m(\phi)}$	(4.65)
linha média	$dL_{(\phi)} = \sqrt{[E_{m(\phi)} \sin(\phi) - E_{m(\phi+d\phi)} \sin(\phi + d\phi)]^2 + [dr_m]^2}$	(4.66)
aresta da pá	$dL_{tc(\phi)} = \sqrt{[E_{sh(\phi)} \sin(\phi) - E_{sh(\phi+d\phi)} \sin(\phi + d\phi)]^2 + [dr_{sh}]^2}$	(4.67)
linha média (total)	$L_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dL_{(\phi)}$	(4.68)
ângulo relativo	$\beta_{(L)} = \tan^{-1} \left[\frac{\tan \beta_1}{\left(\left(\frac{L}{L_m} \right)^j \cdot \left(\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} - 1 \right) + 1 \right)} \right]$, $j = 1 \text{ or } j = 2$	(4.69)
curvatura do canal	$r_{c(\phi)} = \frac{(R_1^2 \sin^2 \phi \cos^{\frac{4}{k}-2} \phi + R_2^2 \cos^2 \phi \sin^{\frac{4}{k}-2} \phi)^{\frac{3}{2}}}{R_1 R_2 (\sin \phi \cos \phi)^{\frac{2}{k}-1}}$	(4.70)
diâmetro hidráulico	$D_{W(\phi)} = \left(\frac{b_{(\phi)}}{2A_{m(\phi)} \cos \beta_{(\phi)}} + \frac{1}{2b_{(\phi)}} \right)^{-1}$	(4.71)

em relação ao CFD, devido ao uso da equação de estado de Span e Wagner sem precisar recorrer a interpolações.

Na dedução das equações da Seção 4.3, também é considerado que o escoamento é adiabático. Para um compressor que opera próximo ao ponto crítico do CO₂, onde a temperatura é próxima à do ar atmosférico, a transferência de calor entre o compressor e o ambiente é reduzida. No entanto, são necessárias análises posteriores para verificar os impactos dessa consideração.

Tabela 3 – Sistema de equações que descrevem o processo de compressão de um fluido que escoar por um rotor de compressor centrífugo.

Descrição	Definição	
equação de Euler	$dh + V_A dV_A = U dV_t + V_t dU$	(4.72)
equação das perdas	$T ds = f_c \underbrace{\frac{W^2 V_A}{A_m V_m} \left[\frac{b}{\cos \beta} + \frac{\pi(r_{sh} + r_h)}{Z_r} \right]}_{dh_{atrito}} dL + \underbrace{\frac{V_A U \varepsilon}{A_m}}_{dh_{tc}} dL_{tc}$	(4.73)
relação termodinâmica	$dh = c^2 \frac{d\rho}{\rho} + (1 + m_s n_s) T ds$	(4.74)
equação da continuidade	$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV_m}{V_m} + \frac{dA_m}{A_m} = 0$	(4.75)
	$\frac{dV_A}{V_A} = \tan \alpha d\alpha + \frac{dV_m}{V_m}$	(4.76)
equações do triângulo de velocidades	$\frac{dV_t}{V_A} = \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha \frac{dV_A}{V_A}$	(4.77)
	$\frac{dU}{V_m} = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} + (\tan \alpha + \tan \beta) \frac{dV_m}{V_m}$	(4.78)
equação da rotação	$dU = U \frac{dr_m}{r_m}$	(4.79)

4.6 Efeitos da geometria do rotor na potência e perdas de carga locais

Uma consideração simplificadora comum nos modelos presentes na literatura aberta é a de eficiência constante. A análise politrópica de Schultz descrita na Seção 3.4, por exemplo, adota esta consideração ao supor que a razão entre os diferenciais vdP e dh é constante durante todo o escoamento. Os modelos 0-D também consideram um valor de eficiência calculado através da análise do processo como um todo, sem considerar variações locais. O modelo matemático deste artigo, no entanto, não faz uso dessa consideração simplificadora, pois permite o cálculo dos diferenciais das propriedades termodinâmicas como funções das dimensões locais do rotor. Em outras palavras, é possível calcular as regiões do canal de escoamento nas quais o fluido recebe mais energia, como também as regiões em que haverá mais energia dissipada. Esta análise é tratada nas seções a seguir.

4.6.1 Relação entre a geometria do rotor e a potência local

A quantidade de energia recebida pelo fluido de trabalho durante o escoamento é a variação da entalpia de estagnação dh_0 (ver Eq. 4.72), dada por

$$dh_0 = dh + V_A dV_A = U dV_t + V_t dU = d(UV_t).$$

Isso significa que a energia recebida depende das variações de V_t e U , ou do produto UV_t . Observando os triângulos de velocidade na Figura 14, pode-se constatar que dV_t e dU dependem, entre outros fatores, de dr_m e $d\beta$. Se houver, simultaneamente, um aumento em r_m e uma redução em β , o produto UV_t aumenta.

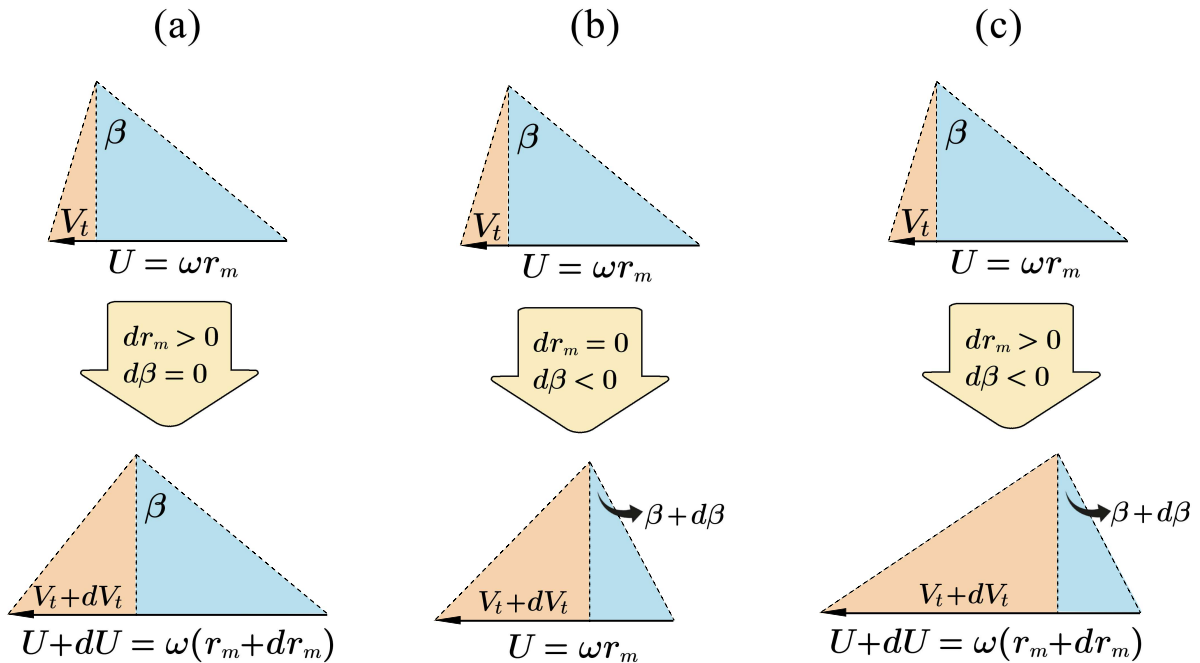


Figura 14 – Três representações de triângulos de velocidade na entrada e saída de um elemento infinitesimal. (a) mostra a influência de um aumento no raio r_m . (b) mostra a influência de uma redução em β . (c) mostra os efeitos combinados de ambas as influências. Nos três casos, há um aumento no produto UV_t . No entanto, a variação do produto UV_t é maior no terceiro processo, indicando que este é o processo em que o fluido recebe mais energia.

Isso faz sentido, uma vez que o torque do eixo do rotor causa uma variação no momento angular do fluido, manifestada através do aumento de suas componentes de velocidade tangenciais.

Portanto, a quantidade de energia recebida pelo fluido será maior quanto maiores forem dr_m e $|d\beta|$. É interessante concluir que a troca de energia depende não dos valores absolutos de β e r_m , mas de suas variações.

4.6.2 Relação entre a geometria do rotor e as perdas de carga

A quantidade de irreversibilidade gerada durante o processo de compressão também depende da geometria do rotor (ver Eq. 4.73). A perda de energia total devido ao atrito entre as pás e o fluido (dh_{atrito}) será maior quanto maior a rugosidade relativa das pás e o comprimento total do canal de escoamento (ou comprimento total da pá), dado por:

$$L_W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dL(\phi)}{\cos\beta(\phi)} \quad (4.80)$$

A perda pelo atrito local do processo de compressão depende do raio de curvatura local do canal de escoamento (r_c), sendo que quanto menor r_c , maior a perda. A variação de r_c ao longo da pá, portanto, influencia na taxa de variação da energia dissipada.

A perda pela folga da ponta da pá (dh_{tc}), por sua vez, será maior quanto maior for o comprimento total da aresta da pá, equivalente ao comprimento da superelipse E_{sh} , dado por:

$$L_{tc} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dL_{tc}(\phi) \quad (4.81)$$

A perda de carga local causada pela folga da ponta dependerá do valor local de ε .

5 Estudo de Caso

As equações do modelo matemático do Capítulo 4 foram utilizadas para construir um código na linguagem de programação Python, conforme representado na Figura 15. O código foi escrito no Colaboratory, plataforma de programação gratuita do Google, e pode ser encontrado pelo DOI 10.5281/zenodo.8270200. As propriedades termodinâmicas do CO_2 foram calculadas através do banco de dados da biblioteca CoolProp (BELL *et al.*, 2014) do domínio www.coolprop.org. Através dessa biblioteca, é possível obter o estado termodinâmico do CO_2 pelo uso direto da equação da energia livre de Helmholtz, dispensando o uso de tabelas de interpolação.

O modelo matemático escrito em Python recebeu três conjuntos de entradas: (a) as dimensões do rotor, (b) o triângulo de velocidade na sucção do rotor e (c) o estado termodinâmico na sucção. As saídas do modelo são: as curvas que descrevem o formato da pá, o caminho termodinâmico de compressão do CO_2 e as curvas das propriedades termodinâmicas e fluidodinâmicas do CO_2 em função do comprimento meridional L . A eficiência politrópica também foi calculada. Nenhum cálculo iterativo foi utilizado, pois o sistema de equações da Tabela 3 é linear, possibilitando que a sua solução seja obtida por meio da aplicação de uma eliminação gaussiana.

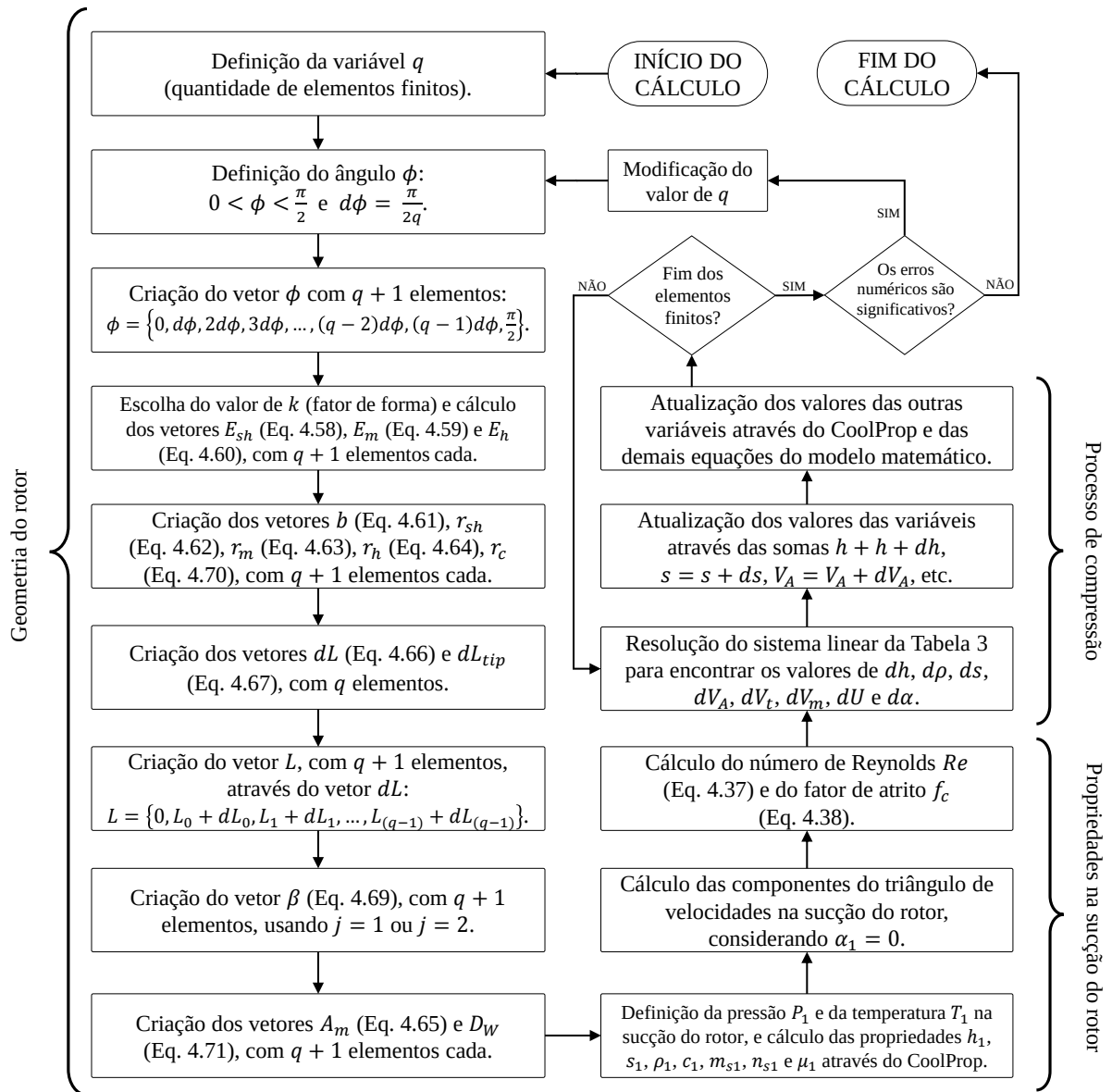
Foram utilizados seis rotores com geometrias diferentes, obtidas pela combinação de três perfis do canal de escoamento ($k = 1, 6$, $k = 2, 0$ e $k = 3, 0$) com dois perfis das pás do rotor ($j = 1$ e $j = 2$), conforme mostrado na Fig. 16. Todos os rotores nesta figura têm as mesmas dimensões na sucção e descarga, mostradas na Tabela 4.

Tabela 4 – Dimensões do rotor na sucção (que recebem o subscrito “1”) e na descarga (subscrito “2”).

Dimensão	Valor
r_{sh1}	0.020 m
r_{h1}	0.010 m
r_{m1}	$0.5 \cdot (r_{sh1} + r_{h1})$
r_2	0.040 m
b_1	$r_{sh1} - r_{h1}$
b_2	0.002 m
h_r	0.030 m
β_1	70°
β_2	20°
Z_r	10 pás
k_r	0.0002 m
ε	$0.02 \cdot b_2$

Para cada rotor apresentado na Figura 16, foram realizadas duas simulações, uma para o sCO_2 próximo ao ponto crítico e outra para o sCO_2 longe do ponto crítico, região em que o fluido se comporta como um gás ideal, totalizando 12 simulações. A Tabela 5 apresenta as propriedades termodinâmicas e as variáveis do triângulo de velocidade para cada simulação.

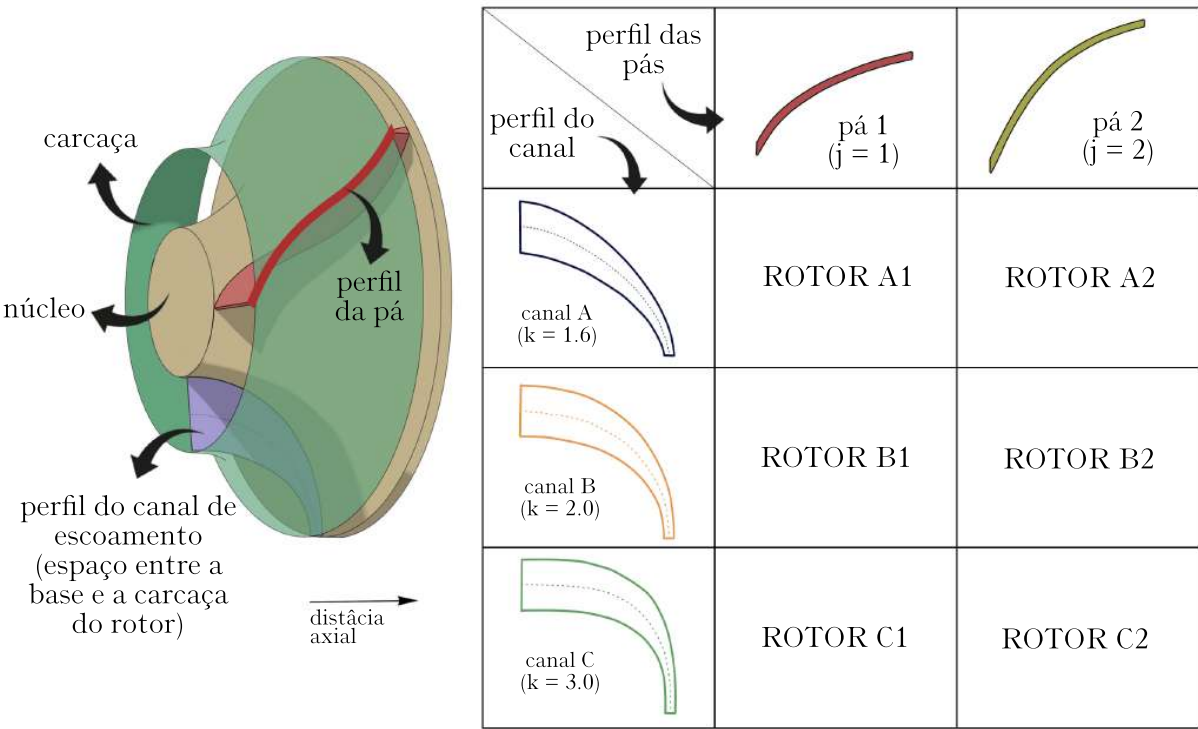
Figura 15 – Sequência de cálculos utilizada no código desenvolvido em linguagem de programação Python.



Fonte: autoria própria

Para validar o modelo, as 12 simulações descritas no parágrafo anterior foram primeiramente realizadas considerando processos isentrópicos e reversíveis. Para isso, a Equação 4.73 foi substituída por $Tds = 0$. Uma vez que o modelo foi validado, as 12 simulações foram realizadas novamente utilizando a Equação 4.73 completa.

Figura 16 – Representação da geometria dos seis rotores. Os perfis do canal de escoamento são delimitados pelas superelipses nas Equações 4.58 e 4.60. Os perfis das pás do rotor são dados pelas Equações 4.17 e 4.21, e a variação de β para cada perfil é determinada pela Equação 4.69. Para $k = 2$ (canal B), a superelipse torna-se uma elipse.



Fonte: autoria própria

Tabela 5 – Estado termodinâmico e variáveis do triângulo de velocidades na sucção do rotor.

Dimensão	gás real	gás ideal
$P_1(MPa)$	9.0	20
$T_1(^{\circ}C)$	39.8	400
$\alpha_1(rad)$	0	0
$V_{A1}(m/s)$	50	50

5.1 Resultados e Discussão

5.1.1 Simulações dos processos reversíveis

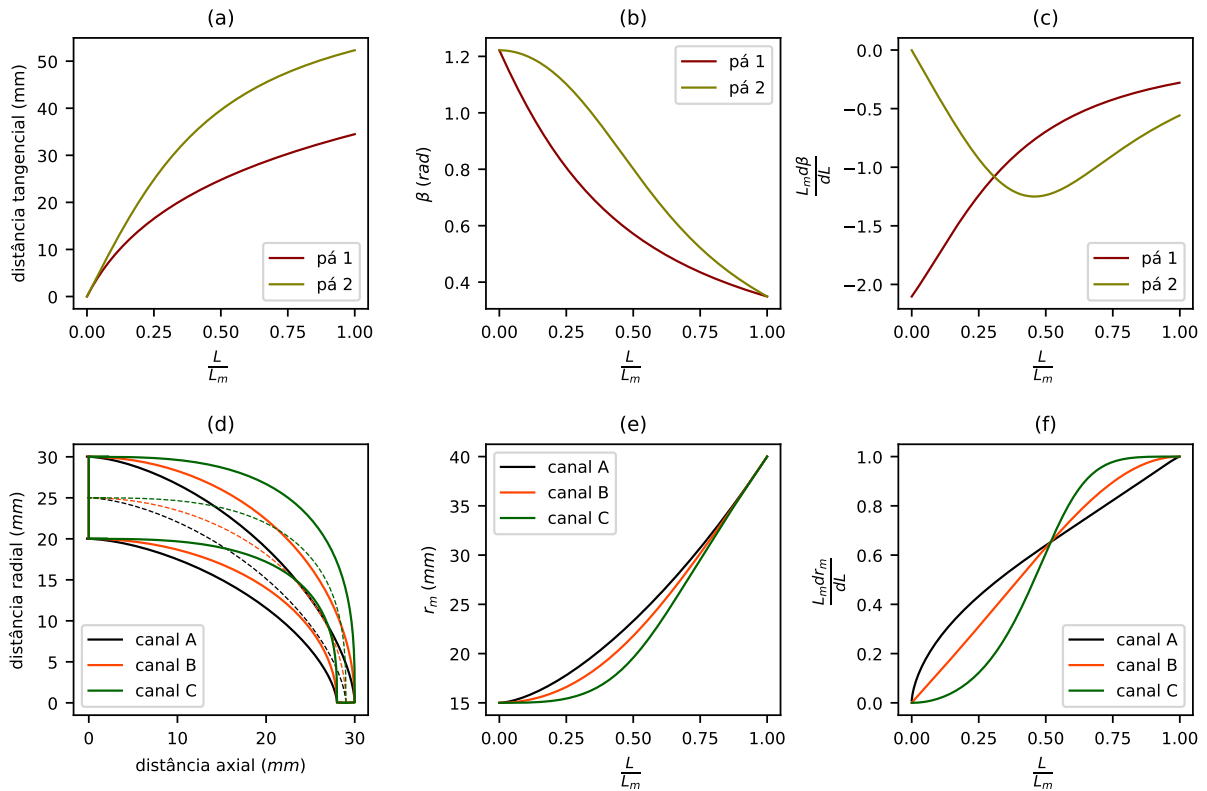
As simulações realizadas sob a consideração de entropia constante estão organizadas na Tabela 6.

Observa-se uma proximidade entre os estados termodinâmicos na descarga do rotor para os seis processos realizados com o gás real, e para os seis realizados com o gás ideal. Isso significa que o formato da pá tem pouca influência quando o processo é reversível.

Tabela 6 – Estados termodinâmicos na descarga de cada rotor representado na Fig. 19 considerando processos adiabáticos e isentrópicos, e portanto reversíveis.

Rotor	$P[MPa]$	gás real			gás ideal		
		$T[^\circ C]$	$\rho[kg/m^3]$	$P[MPa]$	$T[^\circ C]$	$\rho[kg/m^3]$	
A1	54,040	120,9	784,09	32,452	462,69	222,30	
B1	54,028	120,9	784,06	32,449	462,68	222,28	
C1	54,013	120,9	784,02	32,445	462,66	222,27	
A2	53,967	120,8	783,88	32,434	462,61	222,21	
B2	53,965	120,8	783,88	32,434	462,61	222,21	
C2	53,958	120,8	783,86	32,432	462,61	222,20	

Figura 17 – Curvas da geometria do rotor. Os perfis do canal de escoamento (a) e os perfis das pás (d) também são mostrados na Fig. 16. As curvas de (a) são dadas pelas Eqs. 4.17 e 4.21. As curvas de (b) pela Eq. 4.69. As curvas de (d) pelas Eqs. 4.58, 4.59 e 4.60. As curvas de (e) pela Eq. 4.63. As curvas de (c) e (f) são as derivadas de (b) e (e), respectivamente.



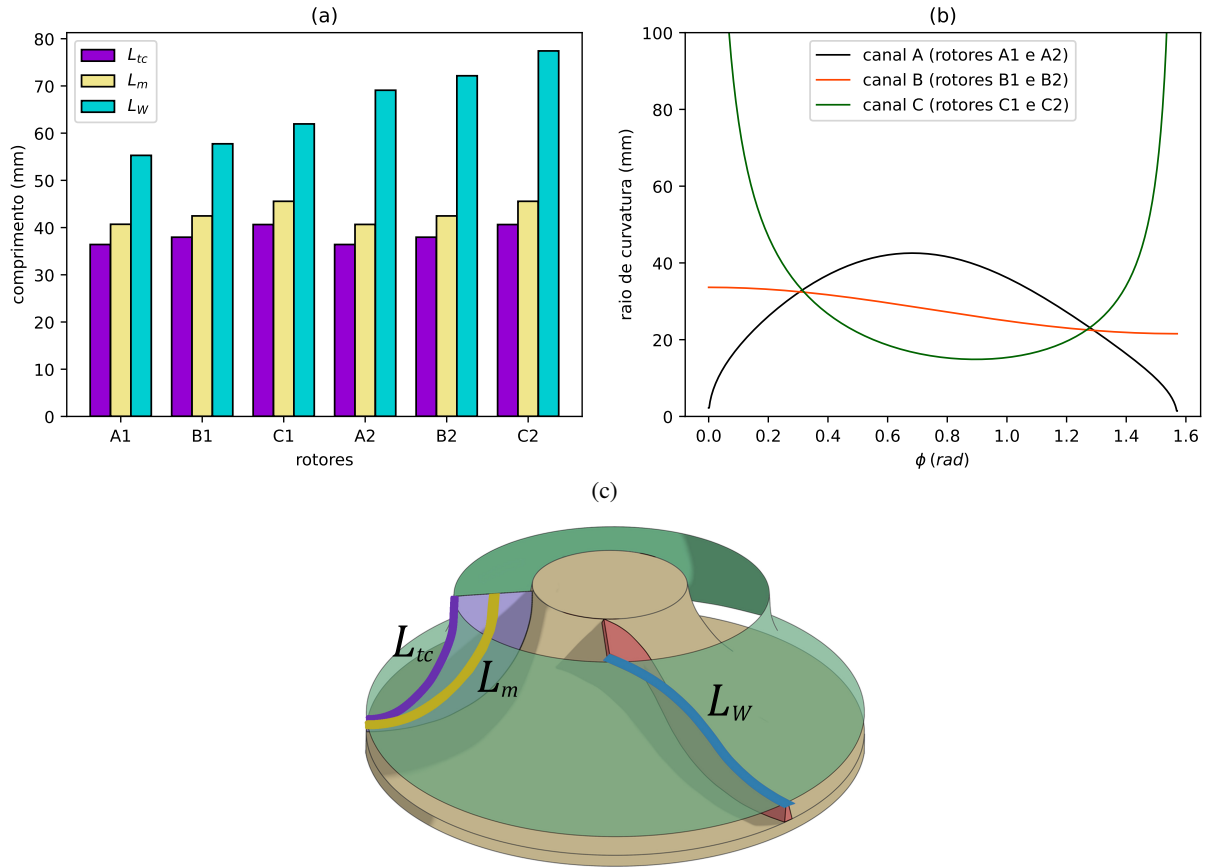
Fonte: autoria própria

5.1.2 Geometria e transferência de energia

A Figura 17 apresenta o perfil dos canais de escoamento e das pás, juntamente com as curvas de β , $d\beta$, r_m , and dr_m para cada um dos rotores da Figura 16.

Conforme apresentado na Seção 4.6.1 e considerando a Figura 14, uma derivada positiva da função r_m (Figura 17e) e uma derivada negativa da função β (Figura 17b) aumentariam a variação da entalpia de estagnação, o que significa que mais energia é transferida para o fluxo. Como observado nas Figuras 17(c) e 17(f), a pá 1 apresenta uma derivada absoluta maior no primeiro quarto do percurso. Somando os efeitos de dr_m (Fig., 17f) e $d\beta$ (Fig., 17c) na

Figura 18 – Fatores geométricos que influenciam as perdas de pressão no processo de compressão. Em (a), L_m representa o comprimento da superelipse média (E_m), L_W representa o comprimento total da pá e L_{tc} o comprimento da aresta da pá (E_{sh}). Um valor mais alto de L_W leva a um aumento do atrito entre o fluido e as pás. No entanto, o atrito também depende do raio de curvatura, mostrado em (b) e calculado pela Eq. 4.70. Um raio de curvatura maior resulta em menos atrito. O raio de curvatura para o canal C tende ao infinito na sucção e descarga, indicando que o canal é perfeitamente reto nessas regiões. Em (c), é mostrada a localização dos comprimentos L_m , L_W e L_{tc} no rotor.



Fonte: autoria própria

transferência de energia, espera-se que a pá 1 com o canal C (rotor C1 da Fig. 16) tenha uma maior transferência de energia na primeira metade do escoamento. Também pode ser observado nas Figuras 17(c) e 17(f) que há oscilações em dr_m e $d\beta$. Portanto, espera-se que o rotor C2 (ver Figura 17) tenha a maior transferência de energia próxima à descarga.

5.1.3 Geometria e perdas de carga

A Figura 18 apresenta o comprimento da superelipse E_{sh} (representado por L_{tc}), o comprimento da linha média L_m , o comprimento do canal L_W e o raio de curvatura para cada rotor. Esses parâmetros geométricos estão relacionados às irreversibilidades do processo de compressão.

O rotor C2 apresenta os maiores valores de L_W e L_{tc} , o que significa valores maiores nas perdas pelo atrito e pela folga da aresta. O rotor A1, por outro lado, representa o caso oposto,

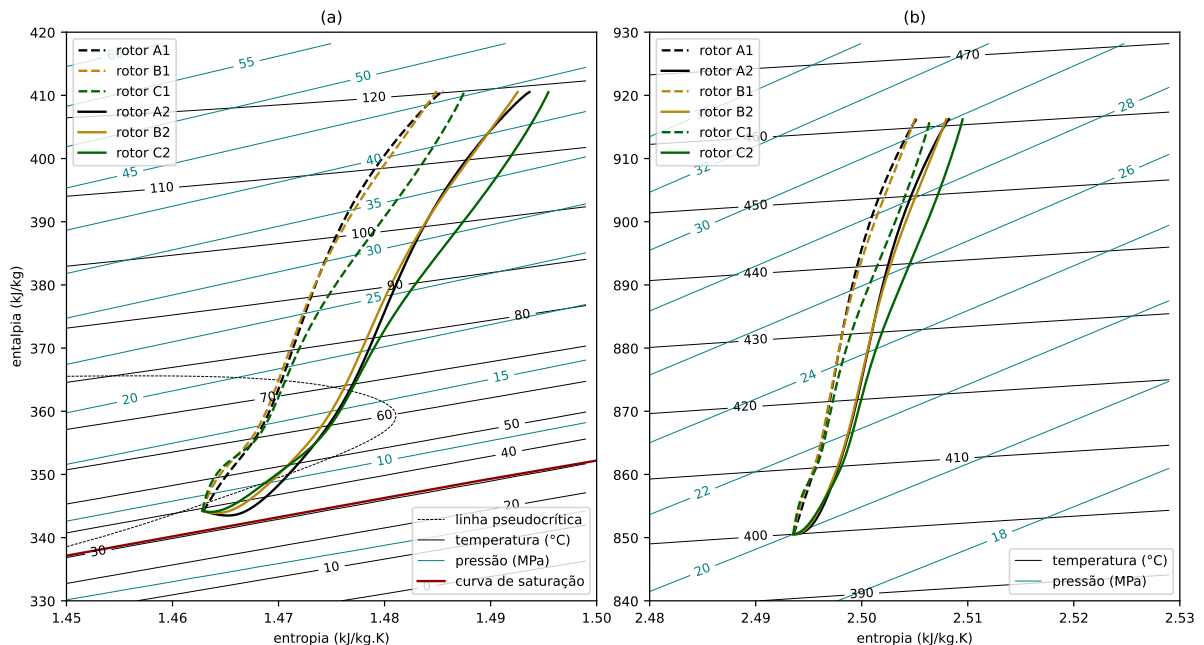
com os menores valores de L_W e L_{tc} .

O raio de curvatura r_c varia de maneira diferente entre os três perfis de canal. O perfil do canal A possui os menores raios de curvatura próximos à sucção e à descarga, o que aumenta o fator de atrito nessas regiões. No entanto, na região central do canal A, são encontrados os maiores valores de r_c , o que reduz as irreversibilidades locais. Por outro lado, o canal C possui uma seção reta na sucção e descarga, reduzindo as perdas de carga nessas regiões. O canal B, por sua vez, possui um raio de curvatura quase constante.

5.1.4 Simulações de processos irreversíveis

A curva do processo de compressão depende não apenas dos fatores mencionados nas seções anteriores ($d\beta$, r_m , L_W , L_{tc} e r_c), mas também da variação das propriedades termodinâmicas do CO_2 . Foram realizadas simulações para os seis rotores da Fig. 16 operando com o CO_2 perto do ponto crítico (Fig. 19a) e longe do ponto crítico (Fig. 19b). As isolinhas de pressão e temperatura permitem acompanhar a evolução dessas propriedades ao longo do processo. Para visualizar mais detalhadamente as variações dessas e outras propriedades, consulte o Apêndice A).

Figura 19 – Processos de compressão simulados para os seis rotores com o CO_2 (a) próximo ao ponto crítico e (b) longe do ponto crítico (gás ideal). Ambos os gráficos foram construídos na mesma escala para fins de comparação. A variação da entalpia é aproximadamente a mesma para todos os processos, mas a variação da entropia é maior para os processos que ocorrem próximo ao ponto crítico.



Fonte: autoria própria

Em ambos os casos, (a) e (b) da Fig. 19, as curvas tracejadas correspondentes ao perfil de pá 1 possuem um distanciamento das curvas contínuas correspondentes ao perfil de pá 2. Isso

ocorre porque a taxa de transferência de energia oscila de maneiras diferentes para cada perfil de pá.

Observa-se também que o rotor C1 não apresenta a mesma tendência dos rotores A1 e B1. No rotor C1, ocorre o aumento do atrito entre o fluido e as pás na maior parte do escoamento, devido aos baixos valores de r_c . O mesmo se aplica na comparação entre os rotores A2, B2 e C2.

No caso da Fig. 19(a), o processo termodinâmico do rotor A2 apresenta uma redução significativa na pressão do fluido no início do fluxo. Isso acontece por uma combinação de dois fatores: valores próximos a zero de dh (devido a $d\beta \approx 0$ próximo à sucção) e alta perda de pressão causada pelo baixo raio de curvatura do canal. Como resultado, o fluido perde mais energia devido ao atrito do que ganha com a rotação do rotor. O extremo oposto desse caso é o rotor C1, que exhibe valores pronunciados de $d\beta$ no início do fluxo juntamente com um alto raio de curvatura. A influência da forma da pá no caminho termodinâmico da compressão se torna evidente.

A Tabela 7 apresenta o estado termodinâmico na saída para todos os processos na Figura 19.

Tabela 7 – Estados termodinâmicos na descarga de cada rotor representado na Fig. 19 considerando processos adiabáticos e irreversíveis

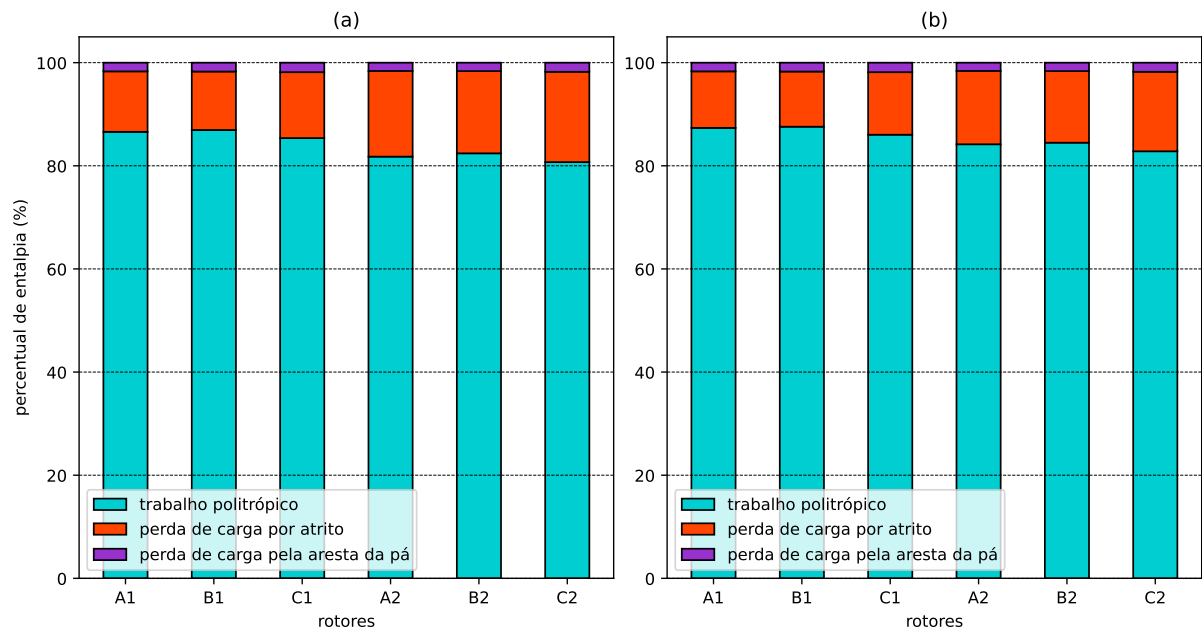
Rotor	gás real			gás ideal		
	$P[MPa]$	$T[^\circ C]$	$\rho[kg/m^3]$	$P[MPa]$	$T[^\circ C]$	$\rho[kg/m^3]$
A1	46,150	120,2	738,60	30,520	461,3	210,59
B1	46,328	120,3	739,61	30,550	461,3	210,77
C1	45,526	120,0	735,13	30,313	461,1	209,32
A2	43,689	119,1	724,57	30,021	460,9	207,55
B2	44,014	119,3	726,49	30,163	460,9	207,81
C2	43,162	118,9	721,45	29,815	460,7	206,28

Em geral, os processos que ocorreram com o gás ideal ficaram mais próximos uns dos outros do que os processos com o gás real. Isso ocorre devido ao fato de que, próximo ao ponto crítico, as derivadas das propriedades termodinâmicas do CO_2 são maiores, o que resulta num impacto maior da geometria do rotor no processo.

A Fig. 20 apresenta as eficiências politrópicas de cada processo da Fig. 19, como também o percentual de contribuição de cada perda de carga. Os valores das eficiências estão listados na Tab. 8.

Nota-se que o rotor B1 tem a maior eficiência do processo, e o rotor C2, a menor. Tendo em vista as curvas da Fig. 17, esse era um resultado esperado considerando as derivadas de β e r_m .

Figura 20 – Percentual do trabalho politrópico $\int_L vdP$ e das irreversibilidades $\int_L Tds$ para os processos de compressão realizados com (a) gás real e (b) gás ideal. O percentual do trabalho politrópico corresponde à eficiência politrópica. As irreversibilidades do processo correspondem à $\int_L Tds = \int_L dh_{atrito} + \int_L dh_{tc}$.



Fonte: autoria própria

Tabela 8 – Eficiência politrópica para cada processo da Fig. 19.

Rotor	Eficiência (gás real)	Eficiência (gás ideal)
A1	0.8665	0.8735
B1	0.8702	0.8757
C1	0.8547	0.8602
A2	0.8191	0.8417
B2	0.8256	0.8447
C2	0.8088	0.8281

6 Conclusão

Neste trabalho, foi proposto um novo modelo matemático para estimar o impacto das alterações na geometria de um compressor centrífugo no processo de compressão. O modelo combina uma formulação diferencial para a geometria do canal do rotor com equações de fluxo baseadas em princípios de termodinâmica e mecânica dos fluidos. O objetivo foi lidar com os desafios impostos pelo uso de CO_2 supercrítico como fluido de trabalho em ciclos Brayton de sCO_2 , especialmente próximo ao ponto crítico.

O modelo matemático proposto oferece várias vantagens em comparação com abordagens existentes. Ele fornece uma melhor compreensão das alterações nas propriedades termodinâmicas ao longo dos canais do compressor em comparação com o método politrópico de Schultz e o método 0-D tradicional. Ao incorporar as equações da mecânica dos fluidos, o modelo oferece uma solução mais abrangente que leva em conta o impacto do formato meridional e axial das pás. Além disso, a formulação diferencial permite uma solução puramente analítica, o que simplifica a implementação computacional.

Foi apresentada uma descrição detalhada do modelo matemático, incluindo as equações diferenciais para a geometria do canal do rotor e a formulação do escoamento do fluido usando termodinâmica e mecânica dos fluidos. As suposições do modelo foram analisadas criticamente, levando em consideração as limitações e o escopo da abordagem proposta.

Para demonstrar o potencial do modelo matemático, foram realizadas simulações usando um conjunto de dados. Os resultados dessas simulações demonstraram a capacidade do modelo de estimar o impacto das alterações na geometria do compressor em seu desempenho, como também o impacto dos efeitos de gás real do CO_2 no processo de compressão. O modelo proporcionou a obtenção de informações importantes sobre o escoamento do CO_2 , perdas de carga e propriedades termodinâmicas ao longo dos canais entre-pás do rotor.

Foram realizadas análises detalhadas sobre o impacto das principais características do rotor no processo de compressão, com especial atenção aos parâmetros do ângulo β e ao raio de curvatura r_c . É notável a distinção entre a pá 1 e a pá 2, que se diferenciam pela derivada do ângulo β . A pá 1 demonstrou um aprimoramento de cerca de 5 pontos percentuais na eficiência politrópica dos processos de compressão, quando comparada à pá 2.

A influência do raio de curvatura r_c também se revelou significativa, visto que o canal B proporcionou valores de eficiência politrópica aproximadamente 1,5 ponto percentual maiores em relação ao canal C. É importante ressaltar que a influência do comportamento do gás real nos processos de compressão, especialmente nas proximidades do ponto crítico, se destaca ao contrastá-los com os processos ocorrendo a distâncias maiores do ponto crítico. Um achado notável é a redução de pressão ocorrida exclusivamente nos processos próximos ao ponto crítico

quando a pá 2 foi empregada. Isso evidencia o impacto do comportamento do gás real nessas condições específicas.

Embora o modelo matemático proposto ofereça vantagens significativas em relação aos métodos existentes, ele possui limitações. Ele não pode prever os gradientes de pressão nas direções radial e tangencial do rotor, pois não é um método tridimensional como a dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Portanto, pode não ser adequado para análises que exigem informações locais detalhadas.

Em conclusão, o modelo matemático proposto representa uma ferramenta para engenheiros e pesquisadores que trabalham no projeto e na otimização de compressores centrífugos para ciclos Brayton de $s\text{CO}_2$. Ele fornece uma abordagem abrangente e analítica para estimar o impacto das alterações na geometria do compressor em seu desempenho.

6.1 Sugestão para trabalhos futuros

Investigações futuras podem aprimorar o modelo matemático incorporando a variação de pressão nas direções tangencial e radial. Esse refinamento permitiria uma análise das variações locais nas propriedades termodinâmicas do CO_2 .

As equações que descrevem a geometria do rotor não apenas fornecem uma base para a análise, mas também possibilitam o desenvolvimento de uma formulação diferencial para descrever a transferência de calor entre o rotor e o ar atmosférico. Dessa forma, é viável avaliar as implicações decorrentes da inclusão do conceito de escoamento adiabático.

Além disso, é possível confrontar os resultados do modelo matemático com simulações CFD e dados experimentais, com o intuito de identificar nuances que podem não ser evidentes apenas pela avaliação teórica do problema. Isso proporcionaria uma compreensão mais completa e robusta da dinâmica do sistema.

Por fim, pode-se utilizar o modelo em um algoritmo de otimização, para obter um formato de pá ideal para cada condição de operação específica.

Referências

AMELI, A.; TURUNEN-SAARESTI, T.; BACKMAN, J. Numerical Investigation of the Flow Behavior Inside a Supercritical CO₂ Centrifugal Compressor. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v. 140, n. 12, 08 2018. ISSN 0742-4795. 122604. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4040577>>.

ASME PTC-10. *Performance Test Code on Compressors and Exhausters*. [S.l.], 1997, reafirmada em 2014.

BALTADJIEV, N. D. *An Investigation of Real Gas Effects in Supercritical CO₂ Compressors*. Tese (Doutorado) — MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2012.

BALTADJIEV, N. D.; LETTIERI, C.; SPAKOVSKY, Z. S. An Investigation of Real Gas Effects in Supercritical CO₂ Centrifugal Compressors. *Journal of Turbomachinery*, v. 137, n. 9, 09 2015. ISSN 0889-504X. 091003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4029616>>.

BELL, I. H.; WRONSKI, J.; QUOILIN, S.; LEMORT, V. Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property library coolprop. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 53, n. 6, p. 2498–2508, 2014. Disponível em: <<http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie4033999>><http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie4033999>.

CHO, S. K.; BAE, S. J.; JEONG, Y.; LEE, J.; LEE, J. I. Direction for high-performance supercritical co₂ centrifugal compressor design for dry cooled supercritical co₂ brayton cycle. *Applied Sciences*, v. 9, n. 19, 2019. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/9/19/4057>>.

S-CO₂ Turbine Design for Decay Heat Removal System of Sodium Cooled Fast Reactor, Volume 9: Oil and Gas Applications; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy de *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, (Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 9: Oil and Gas Applications; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy). V009T36A006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2016-56532>>.

CHO, S. K.; SON, S.; LEE, J.; LEE, S.-W.; JEONG, Y.; OH, B. S.; LEE, J. Optimum loss models for performance prediction of supercritical co₂ centrifugal compressor. *Applied Thermal Engineering*, v. 184, 10 2020.

CRESPI, F.; GAVAGNIN, G.; SÁNCHEZ, D.; MARTÍNEZ, G. S. Supercritical carbon dioxide cycles for power generation: A review. *Applied Energy*, v. 195, p. 152–183, 2017. ISSN 0306-2619. Disponível em: <[https://www.sciencedirect.com/science/article/pii-S0306261917301915](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261917301915)>.

DIMITRAKOPOULOS, P. A generalized method for the comparable and rigorous calculation of the polytropic efficiencies of turbocompressors. *International Journal of Turbo and Jet Engines*, v. 35, 06 2016.

DU, Y.; YANG, C.; WANG, H.; HU, C. One-dimensional optimisation design and off-design operation strategy of centrifugal compressor for supercritical carbon dioxide brayton cycle. *Applied Thermal Engineering*, v. 196, p. 117318, 2021. ISSN 1359-4311. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431121007547>>.

- FOX ROBERT W., M. A. T. P. P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. [S.l.]: LTC Editora, 2006.
- GUO, Z.; ZHAO, Y.; ZHU, Y.; NIU, F.; LU, D. Optimal design of supercritical co2 power cycle for next generation nuclear power conversion systems. *Progress in Nuclear Energy*, v. 108, p. 111–121, 2018. ISSN 0149-1970. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0149197018301094>>.
- HOSANGADI, A.; LIU, Z.; WEATHERS, T.; AHUJA, V.; BUSBY, J. Modeling Multiphase Effects in CO2 Compressors at Subcritical Inlet Conditions. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v. 141, n. 8, 03 2019. ISSN 0742-4795. 081005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4042975>>.
- JEONG, Y.; SON, S.; CHO, S. K.; BAIK, S.; LEE, J. I. Evaluation of supercritical co2 compressor off-design performance prediction methods. *Energy*, v. 213, p. 119071, 2020. ISSN 0360-5442. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544220321782>>.
- KIM, S. G.; LEE, J.; AHN, Y.; LEE, J. I.; ADDAD, Y.; KO, B. Cfd investigation of a centrifugal compressor derived from pump technology for supercritical carbon dioxide as a working fluid. *The Journal of Supercritical Fluids*, v. 86, p. 160–171, 2014. ISSN 0896-8446. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089684461300421X>>.
- LEE, B.-I.; KESLER, M. G. A generalized thermodynamic correlation based on three-parameter corresponding states. *Aiche Journal*, v. 21, p. 510–527, 1975.
- LEE, J.; CHO, S. K.; LEE, J. I. The Effect of Real Gas Approximations on S-CO2 Compressor Design. *Journal of Turbomachinery*, v. 140, n. 5, 04 2018. ISSN 0889-504X. 051007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4038879>>.
- Design Methodology of Supercritical CO2 Brayton Cycle Turbomachineries*, Volume 5: Manufacturing Materials and Metallurgy; Marine; Microturbines and Small Turbomachinery; Supercritical CO2 Power Cycles de *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, (Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 5: Manufacturing Materials and Metallurgy; Marine; Microturbines and Small Turbomachinery; Supercritical CO2 Power Cycles). 975-983 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2012-68933>>.
- LETTIERI, C.; BALTADJIEV, N.; CASEY, M.; SPAKOVSKY, Z. Low-Flow-Coefficient Centrifugal Compressor Design for Supercritical CO2. *Journal of Turbomachinery*, v. 136, n. 8, 01 2014. ISSN 0889-504X. 081008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4026322>>.
- LI, M.-J.; ZHU, H.-H.; GUO, J.-Q.; WANG, K.; TAO, W.-Q. The development technology and applications of supercritical co2 power cycle in nuclear energy, solar energy and other energy industries. *Applied Thermal Engineering*, v. 126, p. 255–275, 2017. ISSN 1359-4311. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431117335469>>.
- LI, X.; ZHAO, Y.; YAO, H.; ZHAO, M.; LIU, Z. A new method for impeller inlet design of supercritical co2 centrifugal compressors in brayton cycles. *Energies*, v. 13, n. 19, 2020. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/13/19/5049>>.
- LIU, Z.; LUO, W.; ZHAO, Q.; ZHAO, W.; XU, J. Preliminary design and model assessment of a supercritical co2 compressor. *Applied Sciences*, v. 8, n. 4, 2018. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/8/4/595>>.

Testing of a New Turbocompressor for Supercritical Carbon Dioxide Closed Brayton Cycles, Volume 9: Oil and Gas Applications; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy de *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, (Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 9: Oil and Gas Applications; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy). V009T38A024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2018-77044>>.

PORTO, M. P. The importance of pseudo-polytropic analysis for supercritical CO₂ turbomachinery and power systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 44, n. 549, 2022. ISSN 0022-0825. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s40430-022-03810-6>>.

PROCTOR, J. E.; MAYNARD-CASELY, H. E. The liquid and supercritical fluid states of matter. In: . [S.l.: s.n.], 2020.

Numerical Computation of the Performance Map of a Supercritical CO₂ Radial Compressor by Means of Three-Dimensional CFD Simulations, Volume 3B: Oil and Gas Applications; Organic Rankine Cycle Power Systems; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy de *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, (Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 3B: Oil and Gas Applications; Organic Rankine Cycle Power Systems; Supercritical CO₂ Power Cycles; Wind Energy). V03BT36A017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2014-26966>>.

SCHULTZ, J. M. The Polytropic Analysis of Centrifugal Compressors. *Journal of Engineering for Power*, v. 84, n. 1, p. 69–82, 01 1962. ISSN 0022-0825. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3673381>>.

SHAO, W.; YANG, J.; WANG, X.; MA, Z. A real gas-based throughflow method for the analysis of sco₂ centrifugal compressors. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 234, n. 10, p. 1943–1958, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0954406220902188>>.

SHAO, W.; YANG, J.; WANG, X.; MA, Z. Accuracy study and stability control of a property-table-based cfd strategy for modeling sco₂ compressors working near the critical point of the fluid. *Applied Thermal Engineering*, v. 183, p. 116222, 2021. ISSN 1359-4311. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431120337017>>.

SON, S.; JEONG, Y.; CHO, S. K.; LEE, J. I. Development of supercritical co₂ turbomachinery off-design model using 1d mean-line method and deep neural network. *Applied Energy*, v. 263, p. 114645, 2020. ISSN 0306-2619. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261920301574>>.

SOUSA, J.; CUNHA, M. d. C.; MARQUES, A. S. An explicit solution of the colebrook-white equation through simulated annealing. *Water Industry Systems: Modelling and Optimization Applications*, Research Studies Press Ltd. UK, v. 2, p. 347–355, 1999.

SPAN, R.; WAGNER, W. A new equation of state for carbon dioxide covering the fluid region from the triple-point temperature to 1100 k at pressures up to 800 mpa. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, v. 25, n. 6, p. 1509–1596, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.555991>>.

UTAMURA, M.; HASUIKE, H.; OGAWA, K.; YAMAMOTO, T.; FUKUSHIMA, T.; WATANABE, T.; HIMENO, T. Demonstration of supercritical co₂ closed regenerative brayton cycle in a bench scale experiment. In: . [S.l.: s.n.], 2012. v. 3.

VENTURA, C. A.; JACOBS, P. A.; ROWLANDS, A. S.; PETRIE-REPAR, P.; SAURET, E. Preliminary Design and Performance Estimation of Radial Inflow Turbines: An Automated Approach. *Journal of Fluids Engineering*, v. 134, n. 3, 03 2012. ISSN 0098-2202. 031102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4006174>>.

WAALS, J. D. van der. *Over de Continuïteit van den Gas-en Vloeistofoestand*. Tese (Doutorado) — Universidade de Leiden, 1873.

XIA, W.; ZHANG, Y.; YU, H.; HAN, Z.; DAI, Y. Aerodynamic design and multi-dimensional performance optimization of supercritical co2 centrifugal compressor. *Energy Conversion and Management*, v. 248, p. 114810, 2021. ISSN 0196-8904. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890421009869>>.

XU, P.; ZOU, Z.; FU, C. Aerodynamic design considerations for supercritical co2 centrifugal compressor with real-gas effects. *Energy Conversion and Management*, v. 271, p. 116318, 2022. ISSN 0196-8904. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890422010962>>.

Apêndices

APÊNDICE A – Curvas das propriedades do CO₂ em função do comprimento meridional L

Esta seção apresenta as curvas do desenvolvimento do estado termodinâmico do sCO₂ ao longo do comprimento meridional adimensional dos canais de escoamento de todas as simulações apresentadas na Fig. 19.

A.1 Pressão, temperatura e entalpia (totais e estáticas)

As Figs. 21 e 22 apresentam as curvas obtidas pelas simulações realizadas com o gás real e com o gás ideal, respectivamente. São mostradas as propriedades entalpia (total e estática), pressão (total e estática) e temperatura (total e estática).

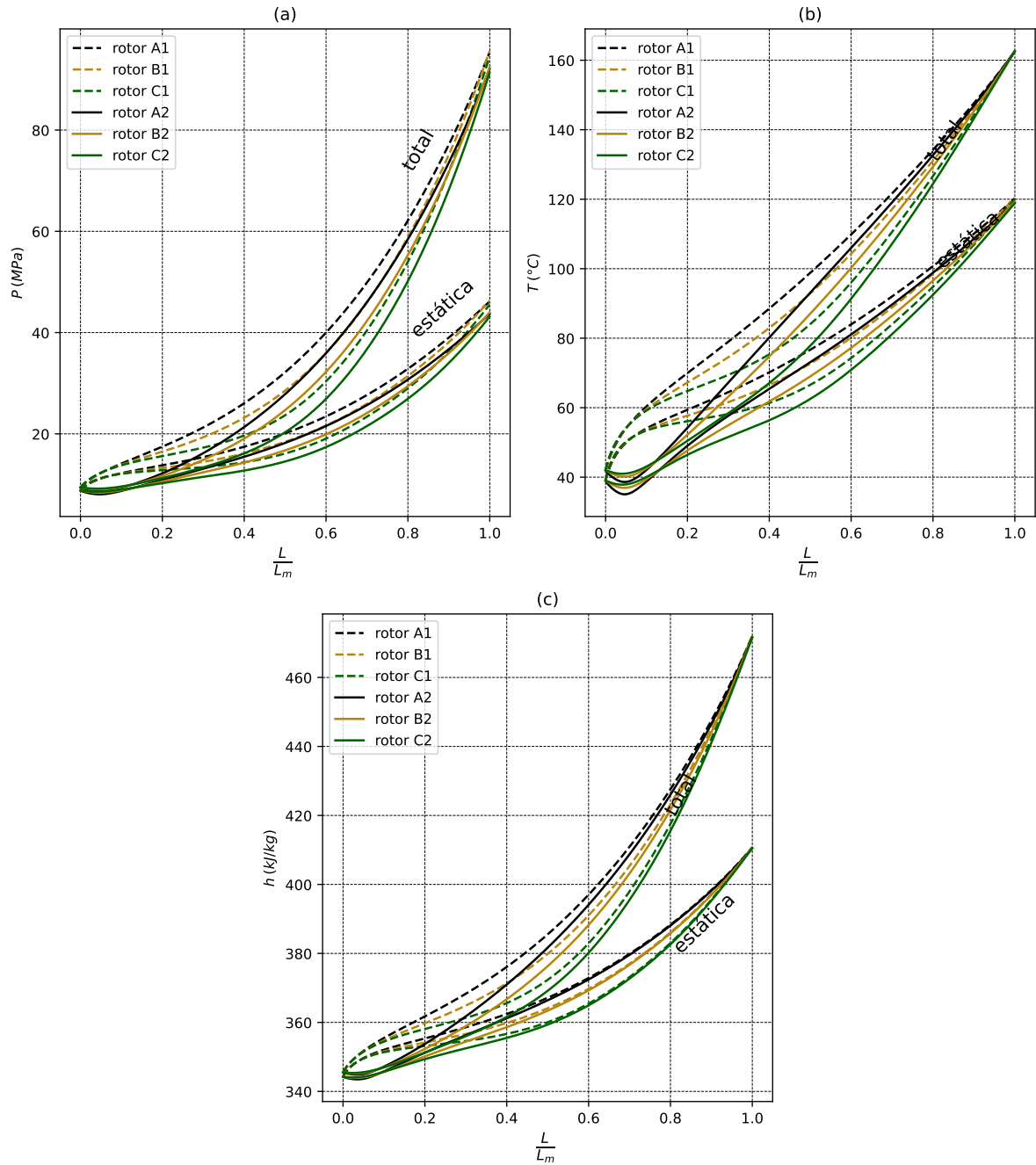
A.2 Outras propriedades

Outras propriedades mencionadas ao longo do trabalho estão representadas nas Figs. 23 e 24, correspondentes ao gás real e ideal, respectivamente. Apenas propriedades estáticas estão representadas.

A.3 Triângulos de Velocidades

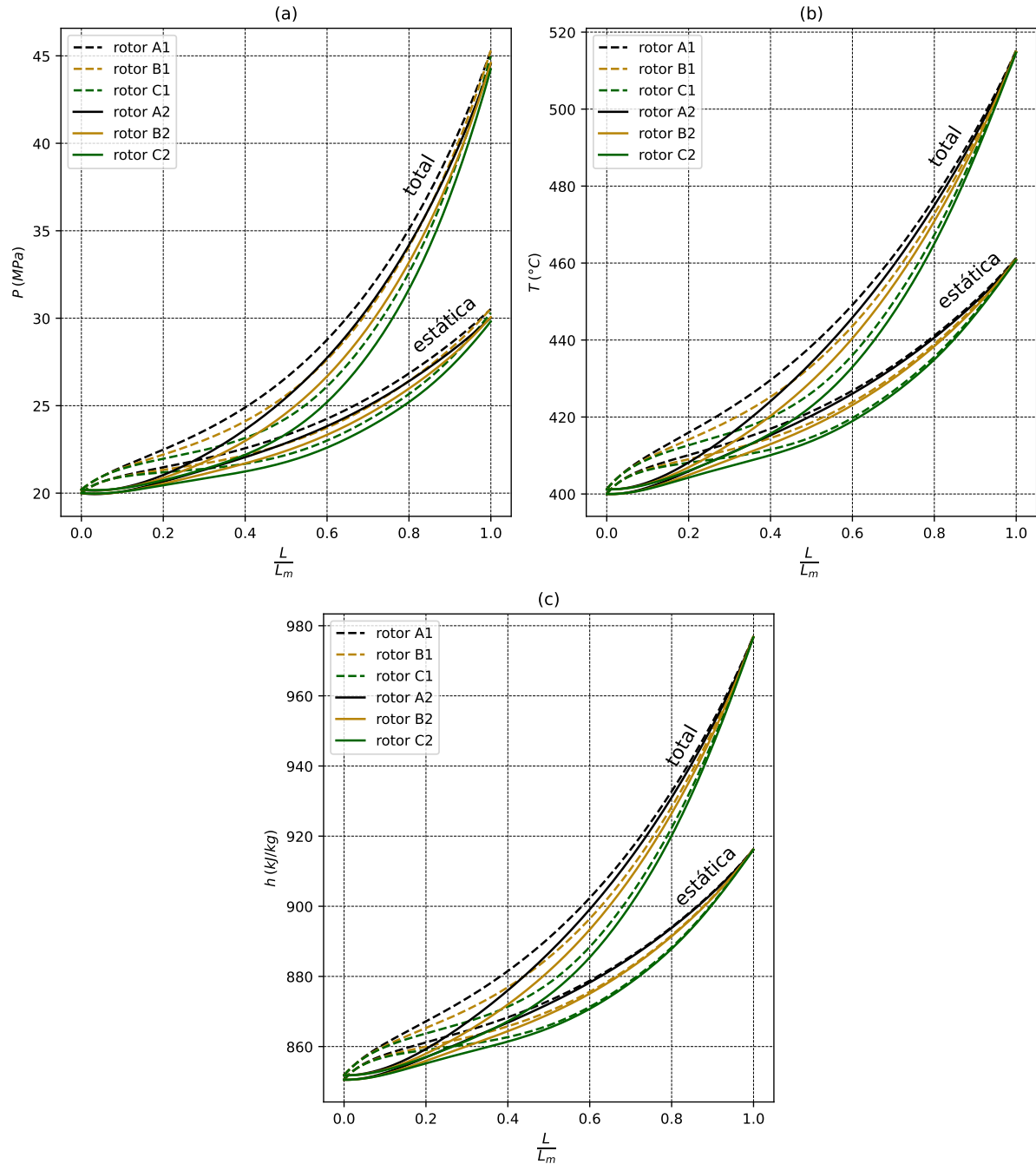
As variáveis do triângulo de velocidade para o gás real e ideal estão representadas nas Figs. 25 e 26, respectivamente.

Figura 21 – Variação das propriedades termodinâmicas em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ próximo do ponto crítico. Para cada simulação, há duas curvas: a superior representa a propriedade total, ou propriedade de estagnação, e a inferior representa a propriedade estática. Em (a), são mostradas as curvas da pressão total (P_0) e pressão estática (P). Em (b), são apresentadas as curvas da temperatura total (T_0) e temperatura estática (T). As curvas de (c), por sua vez, são da entalpia total (h_0) e entalpia estática (h).



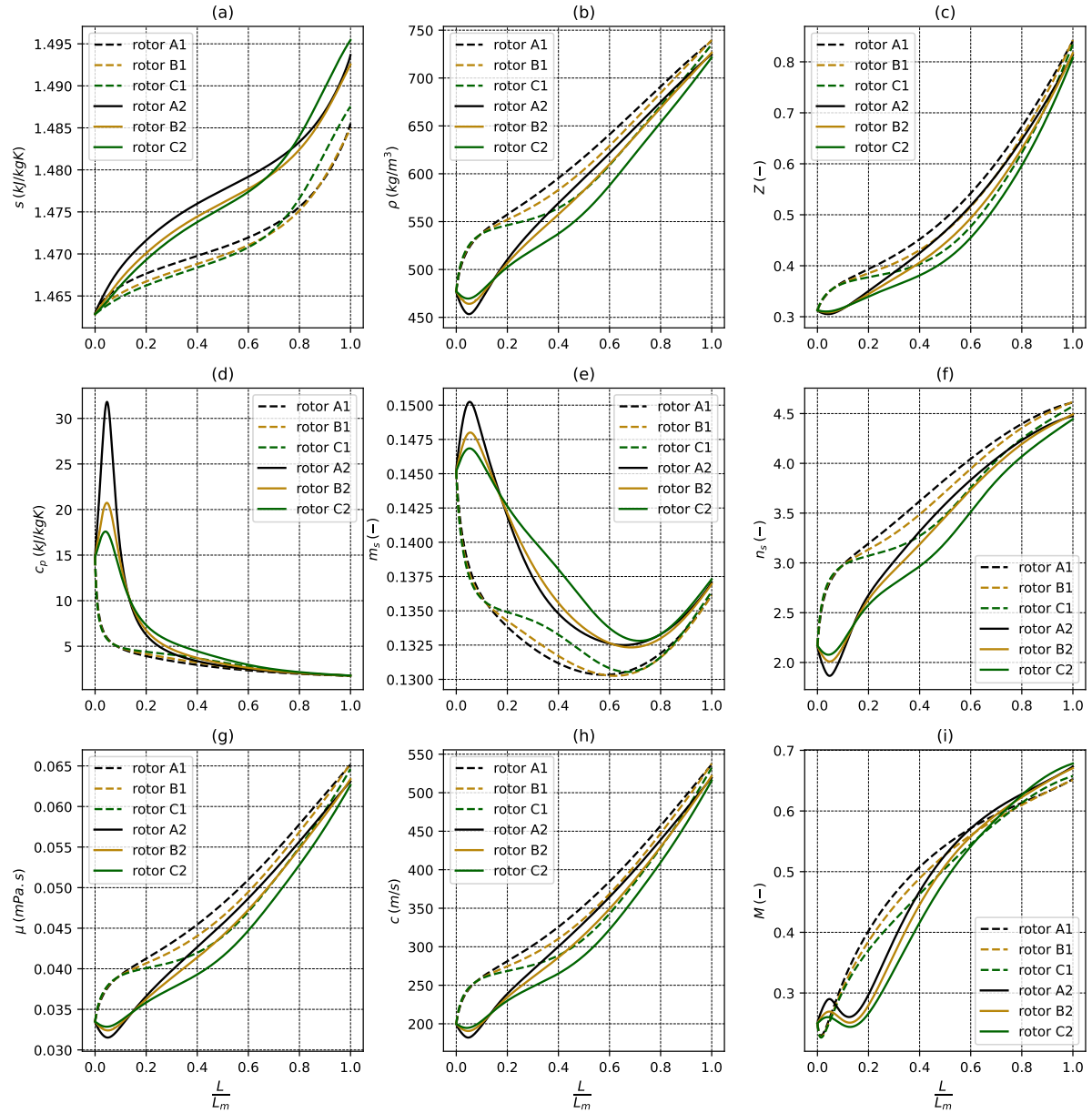
Fonte: autoria própria.

Figura 22 – Variação das propriedades termodinâmicas em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ longe do ponto crítico. Para cada simulação, há duas curvas: a superior representa a propriedade total, ou propriedade de estagnação, e a inferior representa a propriedade estática. Em (a), são mostradas as curvas da pressão total (P_0) e pressão estática (P). Em (b), são apresentadas as curvas da temperatura total (T_0) e temperatura estática (T). As curvas de (c), por sua vez, são da entalpia total (h_0) e entalpia estática (h).



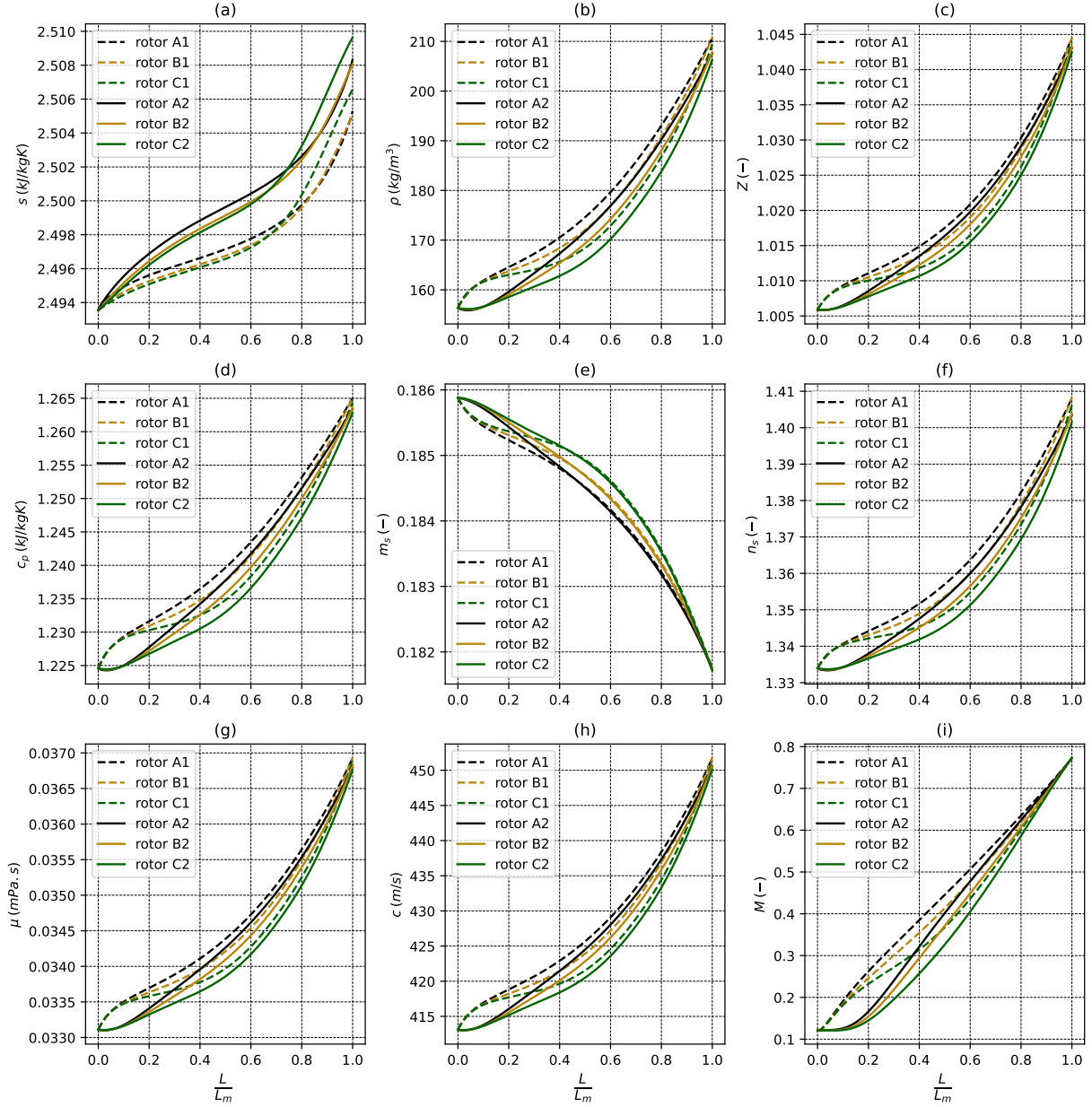
Fonte autoria própria.

Figura 23 – Variação das propriedades do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ próximo do ponto crítico. As propriedades representadas são: (a) entropia, (b) massa específica, (c) compressibilidade, (d) calor específico à pressão constante, (e) coeficiente isentrópico m_s , (f) coeficiente isentrópico n_s , (g) viscosidade, (h) velocidade do som e (i) número de Mach.



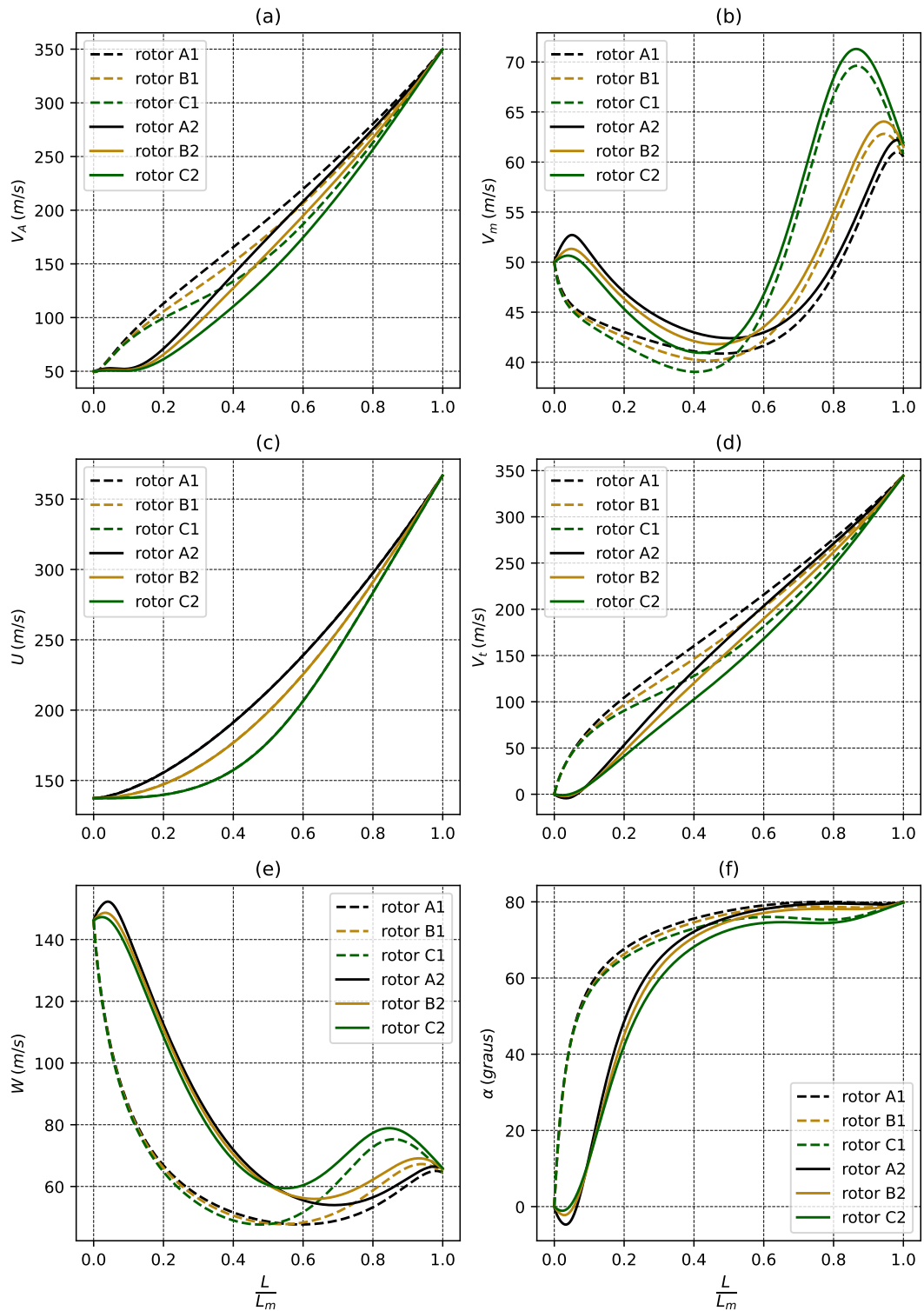
Fonte: autoria própria

Figura 24 – Variação das propriedades do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor para as simulações realizadas com o CO₂ longe do ponto crítico. As propriedades representadas são: (a) entropia, (b) massa específica, (c) compressibilidade, (d) calor específico à pressão constante, (e) coeficiente isentrópico m_s , (f) coeficiente isentrópico n_s , (g) viscosidade, (h) velocidade do som e (i) número de Mach. Esse último não é uma propriedade termodinâmica, mas uma propriedade do escoamento.



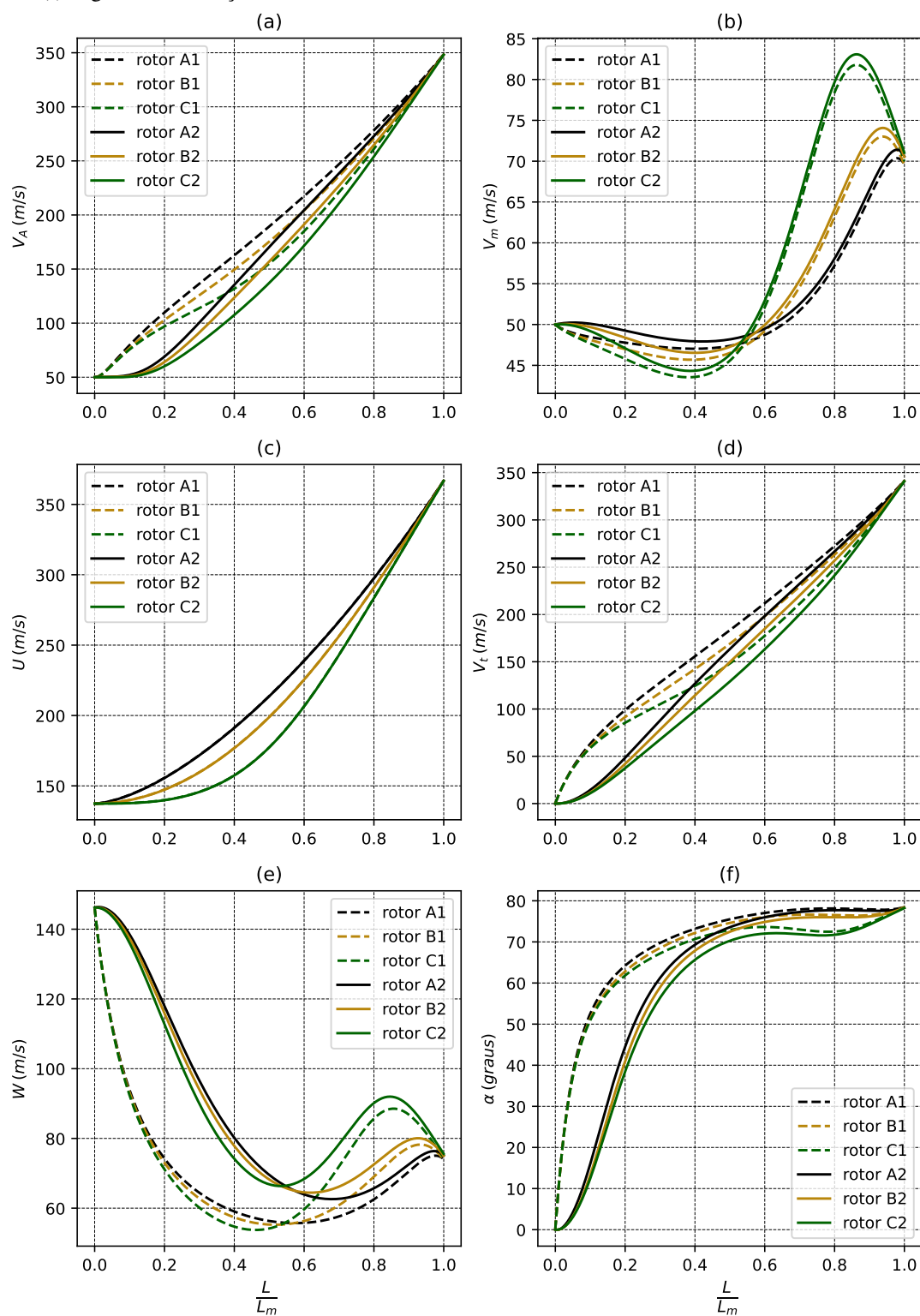
Fonte: autoria própria

Figura 25 – Variação das componentes de velocidade e do ângulo α do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor nas simulações realizadas com o CO_2 próximo do ponto crítico. As variáveis mostradas são: (a) velocidade absoluta, (b) velocidade meridional, (c) velocidade da pá, (d) velocidade tangencial, (e) velocidade relativa e (f) ângulo de inclinação α .



Fonte: autoria própria

Figura 26 – Variação das componentes de velocidade e do ângulo α do fluido em função do comprimento meridional adimensional do rotor nas simulações realizadas com o CO₂ longe do ponto crítico. As variáveis mostradas são: (a) velocidade absoluta, (b) velocidade meridional, (c) velocidade da pá, (d) velocidade tangencial, (e) velocidade relativa e (f) ângulo de inclinação α .



Fonte: autoria própria