

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Danilo Bento Oliveira

**FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE FISICAMENTE E GEOMETRICAMENTE
NÃO LINEAR DE CASCAS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**

Belo Horizonte
2024

Danilo Bento Oliveira

**FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA
ANÁLISE FISICAMENTE E GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE
CASCAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte do requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Samuel Silva Penna

Belo Horizonte

2024

O48f

Oliveira, Danilo Bento.

Formulação e implementação computacional para análise fisicamente e geometricamente não linear de cascas pelo método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Danilo Bento Oliveira. - 2024.

1 recurso online (179 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 164-179.

Bibliografia: f. 149-163.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Cascalas (Engenharia) - Teses. 3. Placas (Engenharia) - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. 5. Cisalhamento - Teses. 6. Deformações e tensões - Teses. 7. Algoritmos - Teses. 8. Cálculos numéricos - Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 100 DO ALUNO DANILO BENTO OLIVEIRA

Às **09:00** horas do dia **22** do mês de **março** de **2024**, reuniu-se em ambiente virtual da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **24 de novembro de 2023**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Formulação e Implementação Computacional para Análise Fisicamente e Geometricamente Não Linear de Cascas pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Samuel Silva Penna**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a argüição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG

Prof. Dr. Gray Farias Moita - CEFET - MG

Prof. Dr. Raul Rosas e Silva - PUC - RIO

Após reunião, a Comissão considerou a candidata **APROVADO**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 22 de março de 2024.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Felício Bruzzi Barros, Professor do Magistério Superior**, em 22/03/2024, às 13:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 22/03/2024, às 13:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gray Farias Moita, Usuário Externo**, em 22/03/2024, às 13:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitangueira, Professor do Magistério Superior**, em 22/03/2024, às 13:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raul Rosas e Silva, Usuário Externo**, em 22/03/2024, às 13:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Subcoordenador(a)**, em 09/04/2024, às 11:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3109871** e o código CRC **B053BF8C**.

Dedico ao meu pai José Pio X de Oliveira (in Memoriam)
Dedico à minha avó Maria Setembrina Amaral (in Memoriam)

AGRADECIMENTOS

Agradeço .

A Deus, razão maior.

À minha família, por sempre acreditar no meu potencial e me incentivar a buscar algo mais. Obrigado pelo amor incondicional!

À minha esposa Paulinha, por seguir acreditando nos meus sonhos e por fazer parte deles. Seu amor, companheirismo, compreensão e apoio em todos os momentos foram fundamentais para que eu pudesse concluir mais esta etapa.

Ao professor e amigo Samuel Silva Penna, pela confiança e pela oportunidade de trabalhar ao seu lado. Obrigado pelo apoio, incentivo, ensinamentos, dedicação e pela atenção sempre especial nas revisões e sugestões para a realização deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pelo convívio e por todo conhecimento compartilhado.

Aos amigos da UFMG pelos anos de convivência harmoniosa, por todas as experiências compartilhadas e por fazer dos momentos mais difíceis uma boa piada. Em especial: Juliano, Leandro e Lucas.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela disponibilidade, atenção e pelo excelente trabalho desenvolvido.

Ao ICET(UFVJM), porta de entrada para a vida acadêmica e casa que me acolhe até hoje. Em especial ao Prof. Carlos H. Alexandrino.

Aos meus amigos que sempre torceram por mim e me incentivaram durante este período, em especial: Altamiro, Rodrigo, Vinícius, Thiago e Rafael.

Todo mundo conta as pingas que eu tomei, mas ninguém conta os tombos que eu levei.

Provérbio popular

Quando a própria vida parece lunática, quem pode saber onde está a loucura?

Miguel de Cervantes

Dom Quixote de la Mancha (1605)

RESUMO

A análise estrutural de placas e cascas é um tópico de extrema relevância na engenharia estrutural e tem recebido crescente atenção nas últimas décadas, compondo um campo de pesquisa vasto e ainda com muitas lacunas a serem exploradas. Neste trabalho, é estudada a resposta não linear de natureza física e geométrica em problemas envolvendo placas e cascas. Para superar o bloqueio por cisalhamento e membrana, é adotado um elemento que combina o método das interpolações tensoriais mistas (MITC) com o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), pois esse método é comprovadamente menos propenso à influência da malha, tornando-se mais vantajoso para este tipo de análise. O elemento de casca é formulado no contexto da formulação Lagrangiana Total com deformações/tensões levadas em conta usando o tensor de deformações não linear de Green-Lagrange. No presente estudo, a não linearidade física considerada refere-se à descrição do comportamento elastoplástico sob deformações finitas, avaliada através da adoção de relações tensão-deformação adequadas à resposta do material e deduzidas a partir da hipótese principal da decomposição multiplicativa do gradiente de deformações. Essa implementação, expande de forma genérica os modelos apresentados em [Oliveira \(2016\)](#) e garante que modelos elastoplásticos originalmente formulados para pequenas deformações sejam também aplicados a problemas de grandes deformações. Para capturar as variações de tensão e deformação através da espessura, o elemento de casca é subdividido em N camadas discretas permitindo medir o comportamento inelástico do material. Neste cenário, é apresentada a cinemática de elementos de casca plana em camadas adaptados ao MEFG. Além disso, é apresentada uma formulação para um algoritmo de retorno Implícito/Explícito baseado no algoritmo padrão de retorno pelo método da projeção do ponto mais próximo (*Closest Point Projection*) adaptado para o modelo de deformações finitas. Para avaliar e validar o elemento proposto, resultados provenientes de soluções numéricas de outros elementos de casca encontrados na literatura e soluções analíticas são comparados com o elemento. É mostrado que o modelo proposto, além de convergir rapidamente, apresenta resultados coerentes com os apresentados na literatura e em soluções analíticas.

Palavras-chave: cascas; grandes deslocamentos; grandes deformações; MEFG; MITC; deformações finitas.

ABSTRACT

The structural analysis of plates and shells is an extremely relevant topic in structural engineering and has received increasing attention in recent decades, composing a vast field of research with many gaps yet to be explored. In this work, the nonlinear physical and geometrical response in problems involving plates and shells is studied. To overcome the shear and membrane locking, an element is adopted that combines the mixed tensorial interpolation method (MITC) with the Generalized Finite Element Method (MEFG), as this method is proven to be less prone to mesh influence, becoming more advantageous for this type of analysis. The shell element is formulated within the context of the Total Lagrangian formulation with deformations/stresses taken into account using the nonlinear Green-Lagrange strain tensor. In the present study, the physical nonlinearity considered refers to the description of elastoplastic behavior under finite strains, evaluated through the adoption of stress-strain relationships suitable for the material response and deduced from the principal hypothesis of the multiplicative decomposition of the deformation gradient. This implementation generically expands the models presented in Oliveira (2016) and ensures that elastoplastic models originally formulated for small strains are also applied to finite strain regime. To capture stress and strain variations through the thickness, the shell element is subdivided into N discrete layers, allowing the measurement of the material's inelastic behavior. In this scenario, the kinematics of flat shell elements in layers adapted to the MEFG is presented. In addition, a formulation for an Implicit/Explicit return algorithm based on the standard Closest Point Projection method for stress integration is presented, adapted for the finite deformation model. To evaluate and validate the proposed element, results from numerical solutions of other shell elements found in the literature and analytical solutions are compared with the element. It is shown that the proposed model, in addition to converging rapidly, presents results consistent with those presented in the literature and in analytical solutions.

Key-words: shells; large displacements; large strain; MEFG; MITC; finite strain.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Exemplos de geometrias de cascas (<i>COPILLOT</i> , 2023)	25
1.2	Análise de um sistema estrutural de cascas. Adaptado de (Chapelle e Bathe, 2010).	26
2.1	Exemplos de geometrias de cascas	34
2.2	Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de Kirchhoff	43
2.3	Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de Reissner-Mindlin	45
2.4	Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de ordem superior	46
2.5	Decomposição em camadas da espessura da casca.	49
2.6	Fluxograma para análise de tensão nas camadas.	50
3.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j via MEFG (Barros, 2002).	55
4.1	Deslocamento do sólido no espaço tridimensional e mapeamento das configurações indeformada e deformada.	59
4.2	Transformação de um elemento de volume através do mapeamento. Adaptado de Belo (2009).	62
4.3	Definição do Tensor de Tensões de Cauchy.	63
4.4	Definição dos carregamentos em um ponto da casca	67
4.5	Casca discretizada com retângulos planos de 4 nós (Oñate, 2013).	68
4.6	Elemento quadrilateral de quatro nós. a) Campo de deformações transversais impostos. b) Pontos de amostragem para o elemento de 4 nós.	78
5.1	Decomposição multiplicativa do gradiente de deformações. Adaptado de (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008)	83
5.2	Diagrama de atividades para o algoritmo de retorno.	94
6.1	Patch test: (a) Geometria e malha; (b) - (d) Condições de carregamento e de contorno.	100
6.2	Problema da membrana de Cook: Geometria e condições de contorno. Malhas a) 2×2 , b) 4×4 , c) 8×8 , d) 16×16 , e) 24×24 , f) 32×32	101
6.3	Viga em balanço de Cook - Verificação da convergência com refinamento de malha	102

6.4	Placas assimétricas: (a) Placa de Morley; (b) Placa de Razzaque.	102
6.5	Placa de Morley - Verificação da convergência com refinamento de malha	103
6.6	Placa de Razzaque - Verificação da convergência com refinamento de malha	104
6.7	Telhado cilíndrico: Geometria, condições de contorno e condições de carregamento.	105
6.8	Telhado de Scordelis-Lo - Verificação da convergência com refinamento de malha	106
6.9	Placa Isotrópica	107
6.10	Placa isotrópica - trajetória de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento do nó central	108
6.11	Placa ortotrópica	109
6.12	Placa Ortotrópica - Trajetória de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento do nó central	110
6.13	Telhado cilíndrico articulado submetido a uma força de compressão central. (a) Geometria e malha de elementos finitos; (b) Estrutura em camadas	111
6.14	Telhado cilíndrico articulado submetido a uma força de compressão central.	111
6.15	Telhado cilíndrico - Isotrópico	112
6.16	Telhado cilíndrico - Ortotrópico $[0^\circ = 90^\circ = 0^\circ]$	112
6.17	Telhado cilíndrico - Ortotrópico $[90^\circ = 0^\circ = 90^\circ]$	113
6.18	Telhado cilíndrico - Isotrópico - Deformada	114
6.19	Telhado cilíndrico - Ortotrópico $[0^\circ = 90^\circ = 0^\circ]$ - Deformada	115
6.20	Casca esférica - Geometria e carregamento	116
6.21	Casca esférica	116
6.22	Casca esférica - Trajetória de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento do nó central.	117
6.23	Casca esférica	117
6.24	Casca esférica - Variação das condições de contorno	118
7.1	Viga em balanço: geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008).	120
7.2	Viga em balanço: Carga aplicada × Deslocamento vertical para a viga em balanço.	120
7.3	Viga em balanço: (a) Malha deformada; (b) Deformações plásticas acumuladas associadas ao hardening.	121
7.4	Chapa com furo: Geometria e malha de elementos finitos	122
7.5	Chapa com furo: Reação na borda (kN) × Deslocamento na borda (mm)	122
7.6	Chapa com furo - von Mises (a), (c), (e) e (g); Rankine (b), (d), (f) e (h).	123
7.7	Flexão pura de uma barra com entalhe em V: Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto <i>et al.</i> (2008)	124

7.8	Flexão pura de uma barra com entalhe em V: Comparação entre o limite de Green (1953) e os resultados obtidos pelos modelos de deformações finitas de Tresca e von Mises	125
7.9	Placa circular. Geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto <i>et al.</i> , 2008).	125
7.10	Placa circular, modelo de pequenas deformações: Diagrama Carga $\times$ Deslocamento.	126
7.11	Placa circular, modelo de grandes deformações: Diagrama Carga $\times$ Deslocamento.	127
8.1	Pórtico de Williams: Geometria e malha de elementos finitos.	129
8.2	Pórtico de Williams - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - Análise geometricamente não linear . . .	130
8.3	Pórtico de Williams - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - Acoplamento de não linearidades	130
8.4	Pórtico de Williams - Efeito das Não Linearidades	131
8.5	Pórtico de Williams (PGNL124): (a) - (c) Fluxo plástico nos pontos críticos; (d) Deformada	132
8.6	Pórtico de Williams (PGNL165): (a) - (c) Fluxo plástico nos pontos críticos; (d) Deformada	133
8.7	Casca abatida - Diagrama Carga $\times$ deflexão	134
8.8	Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 10 uf/uc^2$	135
8.9	Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 15 uf/uc^2$	135
8.10	Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 20 uf/uc^2$	136
8.11	Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 30 uf/uc^2$	136
8.12	Placa simplesmente apoiada - Deflexão do ponto central $\times$ Fator de carga .	137
8.13	Placa simplesmente apoiada: (a) Malha deformada e (b) Fluxo Plástico. . .	138
8.14	Problema de estricção sob tensão plana. (a) Geometria e condições de contorno. Malha de elementos finitos do (b) corpo de prova plano e do (c) cilindro vazado.	139
8.15	Problema de estricção sob tensão plana - Trajetórias de equilíbrio	140
8.16	Chapa plana: (a) - (c) Fluxo plástico em vários estágios de carregamento. (d) Malha deformada	141
8.17	Cilindro vazado: (a) - (c) Fluxo plástico em vários estágios de carregamento. (d) Malha deformada	141
8.18	Painel quadrado de Polak: (a) - (c) Condições de contorno e carregamento; (d) Seção transversal.	142
8.19	Painel quadrado de Polak - Momento $\times$ curvatura SM1	143
8.20	Painel quadrado de Polak - Momento $\times$ curvatura SM2	144

8.21	Painel quadrado de Polak - Momento×curvatura SM3	144
A.1	Algoritmo para métodos de controle	166
A.2	Processo incremental-iterativo com controle de carga. Fuina (2009)	167
A.3	Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamentos. Fuina	168
	(2009)	168
A.4	Processo incremental-iterativo com controle de comprimento de arco. Fuina	169
	(2009)	169
A.5	Fatores de carga para os métodos de controle. Fuina (2009)	170
C.1	Leis Tensão-Deformação adotadas no modelo - Carreira-Ingrafea	179

LISTA DE TABELAS

4.1	Classificação das análises não lineares. Adaptado de (Bathe, 2006)	57
6.1	Teste para verificar o efeito da distorção da malha	100
6.2	Deslocamento w_c do nó central para o problema da placa isotrópica	108
6.3	Deslocamento w_c do nó central para o problema da placa ortotrópica	110
8.1	Painel quadrado de Polak - Parâmetros dos materiais	143

LISTA DE ABREVIACÕES

DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
FP	Formulação Posicional
GNLModel	Modelo geometricamente não linear
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
LA	Lagrangeana Atualizada
LT	Lagrangeana Total
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSN	Método Sem Malha
MITC	Método das Interpolações Tensoriais Mistas
MEFGMITC4	Elemento Q4 que combina a metodologia MITC com MEFG
PGNLModel	Modelo física e geometricamente não linear
POO	<i>Programação Orientada a Objetos</i>
uc	Unidade de comprimento
uf	Unidade de força
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modelling Language</i>
XFEM	<i>eXtend Finite Element Method</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 2: Teoria de cascas

$\hat{\varepsilon}$	Vetor de deformações
ε_L	Parcela linear das deformações
ε_{NL}	Parcela não linear das deformações
ε^m	Deformações por efeito de membrana
ε^b	Deformações por efeito de flexão
ε^s	Deformações por efeito de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
σ	Vetor de tensões
σ^m	Tensões por efeito de membrana
σ^b	Tensões por efeito de flexão
σ^s	Tensões por efeito de cisalhamento
$\theta_{x'}, \theta_{y'}$	Rotações nas direções locais
x', y', z'	Direções locais
u', v', w'	Deslocamentos nas direções locais
D	Matriz constitutiva generalizada
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de elasticidade transversal
M	Momentos fletores
N	Forças axiais
n	Número de camadas
Q	Forças de cisalhamento

Capítulo 3: Método dos Elementos Finitos Generalizados

ω_j	Nuvem de elementos
$\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$	Função de forma que compõe a PU
$\mathcal{I}_i$	Conjunto de funções de enriquecimento
$L_{ji}(x)$	Função de enriquecimento, também referida como aproximação local
$\{\phi_{ji}^q\}_{i=1}$	Função de forma do MEFG
$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$	Aproximação de deslocamento do MEFG
$\mathbf{u}_j$	Parâmetro nodal convencional, associado a $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$

$\mathbf{b}_{ij=2}^q$ Parâmetros nodais adicionais, associados às $\mathcal{N}_j(x) \cdot L_{ij}(x)$

Capítulo 4: Análise geometricamente não linear

α	Fator de penalidade
β	Função dos deslocamentos nodais
δ_{ij}	Delta de Kronecher
Φ	Funções de forma
η_{ij}	Componentes não lineares das deformações incrementais
ε_{ij}	Tensor de deformações de Green-Lagrange
ε_{AS}^s	Tensor de deformações impostas
σ	Tensor de tensões
σ^m	Tensões por efeito de membrana
σ^b	Tensões por efeito de flexão
σ^s	Tensões por efeito de cisalhamento
τ_{xy}	Tensor de tensões de Cauchy
$\mathbf{A}$	Função dos deslocamentos nodais
A_0	Área de referência do corpo na configuração indeformada
B_{ij}	Tensor de deformação de Cauchy-Green direito
$\mathbf{B}$	Matriz de deformação generalizada local
$\mathbf{B}_L$	Parcela linear da matriz de deformação generalizada local
$\mathbf{B}_{NL}$	Parcela não linear da matriz de deformação generalizada local
$\mathbf{B}^m$	Matriz de membrana
$\mathbf{B}^b$	Matriz de flexão
$\mathbf{B}^s$	Matriz de cisalhamento
${}^tC_{ijrs}$	Tensor incremental das propriedades do material na ultima configuração t aferida
$\mathbf{D}_{GN}$	Matriz das derivadas do campo de deslocamentos
$\mathbf{d}^e$	Vetor de deslocamento local de um nó contendo os deslocamentos no plano
e_{ij}	Componentes lineares das deformações incrementais
$\mathbf{f}$	Função mudança de forma
$\mathbf{F}$	Gradiente de deformação
${}^t\mathbf{F}^{(j-1)}$	Vetor de forças equivalentes às tensões nos elemento na última configuração aferida
J	Jacobiano: $J \equiv \det \mathbf{F}$
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez incremental
$\mathbf{N}$	Componentes de membrana dos esforços
$\mathbf{p}$	Vetor de cargas e momentos concentrados
$\mathbf{R}$	Vetor de forças externas
S_{ij}	Segundo tensor de tensões de Piolla-Kirchhoff
$\mathbf{u}_{i,j}$	Deslocamentos
t	Tempo

$\mathbf{t}$	Vetor de cargas distribuídas
V_0	Volume de referência do corpo na configuração indeformada
W_e	Trabalho virtual externo
x^0	Ponto genérico na configuração indeformada
x_i	Ponto genérico no espaço na configuração deformada

Capítulo 5: Análise fisicamente não linear: Modelo constitutivo para deformações finitas

A	Forças termodinâmicas associadas
B	Tensor de deformação Cauchy-Green direito
B^e	Tensor de deformação Cauchy-Green elástico esquerdo
D	Tensor taxa de deformação (ou velocidade de deformação)
D^e	Tensor taxa de deformação (ou velocidade de deformação) elástica
D^p	Tensor taxa de deformação (ou velocidade de deformação) plástica
E	Módulo de elasticidade
$\mathcal{E}$	Definição do domínio elástico
$\bar{\mathcal{E}}$	Definição do domínio de tensões admissíveis de Kirchhoff
$\mathbf{e}^i$	Vetor de base canônica;
f	Função mudança de forma
F	Gradiente de deformação
F^e	Gradiente de deformação elástico
F^e	Gradiente de deformação plástico
g	Vetores de posição generalizados
H	Módulo plástico generalizado
I	Tensor identidade
J	Jacobiano: $J \equiv \det \mathbf{F}$
L	Tensor gradiente de velocidade
L^e	Tensor gradiente elástico de velocidade
L^p	Tensor gradiente plástico de velocidade
N_ℓ	Funções de forma referentes a um nó ℓ
P	Energia potencial das forças externas generalizadas
R	Tensor de rotação obtido a partir da decomposição polar de F
R^e	Tensor de rotação elástico
S	Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
U	Energia de deformação total
V	Tensor de deformação pura esquerdo
V^e	Tensor de deformação elástica pura esquerdo
V^p	Tensor de deformação plástica pura esquerdo
W	Tensor de vorticidade (ou velocidade de rotação)

$\mathbf{W}^e$	Tensor de vorticidade (ou velocidade de rotação) elástica
$\mathbf{W}^p$	Tensor de vorticidade (ou velocidade de rotação) plástica
x^0	Ponto genérico na configuração indeformada
x	Ponto genérico no espaço na configuração deformada
$\mathcal{V}$	Definição do domínio da superfície de escoamento
α	Conjunto de variáveis internas associadas ao regime inelástico
δ_{ij}	Delta de Kronecher
ε	Deformações
ε^e	Deformação elástica logarítmica em coordenadas eulerianas para grandes deformações
ϵ	Tensor de deformações de Green-Lagrange
ϕ	Função de escoamento
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico
Π	Funcional da energia potencial estacionária
σ	Campo de tensões
τ	Tensor de tensões de Cauchy
$\bar{\rho}$	Densidade de massa de referência
τ	Tensor de tensão de Kirchhoff
Ψ	Potencial de fluxo plástico
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coordenadas adimensionais dos pontos pertencentes ao espaço auxiliar
ψ	Energia livre
$skew(\cdot)$	Parte inclinada-simétrica de $(\cdot)$
$sym(\cdot)$	Parte simétrica de $(\cdot)$

SUMÁRIO

1	Introdução	24
1.1	Justificativa e contribuições do trabalho	28
1.2	Objetivos	30
1.2.1	Objetivo Geral	30
1.2.2	Objetivos Específicos	31
1.3	Organização do Texto	31
2	Teorias de cascas	33
2.1	Histórico da Teoria de Placas e Cascas	34
2.2	Teorias de primeira ordem e de ordem superior	43
2.2.1	Teoria de Kirchhoff-Love	43
2.2.2	Teoria de Reissner-Mindlin	44
2.2.3	Teorias de ordem superior	45
2.2.4	Teoria de Marguerre Modificada	46
3	Método dos Elementos Finitos Generalizados	53
3.1	MEFG	53
4	Análise geometricamente não linear	56
4.1	Introdução à não Linearidade Estrutural	56
4.1.1	Descrição do Movimento no Meio Contínuo	59
4.1.2	Medidas de Deformações e Tensões	60
4.2	Formulação Lagrangiana Total	64
4.3	Formulação discreta para cascas	66
4.3.1	Matriz de rigidez	71
4.4	Fenômeno de travamento	73
4.4.1	Método da interpolação mista das componentes tensoriais - MITC	75
4.4.2	Elemento quadrilateral de 4 nós (MEFGMITC4)	77
5	Análise Fisicamente Não Linear: Modelo Constitutivo Elastoplástico com Deformações Finitas	80
5.1	Modelo constitutivo elastoplástico geral para grandes deformações	81

5.1.1	Decomposição multiplicativa do gradiente de deformações	81
5.1.2	Deformação elástica logarítmica	84
5.1.3	Energia potencial livre e a lei elástica	85
5.1.4	Regra de fluxo plástico sob deformações finitas	88
5.2	Formulação geral para modelos constitutivos elastoplásticos	90
5.2.1	Modelo Constitutivo J_2	91
5.3	Algoritmo de retorno: Método Implícito/Explícito	92
6	Validação do Elemento	98
6.1	Efeito da distorção da malha	99
6.1.1	Comportamento de Membrana	99
6.2	Problema da Membrana de Cook	100
6.3	Placas assimétricas	102
6.3.1	Placa de Morley	103
6.3.2	Placa de Razzaque	104
6.4	Telhado cilíndrico de Scordelis-Lo	105
6.5	Placa quadrada	106
6.5.1	Placa isotrópica	106
6.6	Coberturas cilíndricas articuladas - Casca abatida	110
6.7	Casca esférica	115
7	Exemplos de aplicação do modelo constitutivo elastoplástico com de-	
	formações finitas	119
7.1	Viga em balanço	119
7.2	Chapa com furo	121
7.3	Barra com entalhe sujeita a flexão	123
7.4	Placa circular com carregamento uniforme	125
8	Exemplos para validação do acoplamento das não linearidades geométrica	
	e do material	128
8.1	Cascas dobradas - Pórticos estruturais	128
8.2	Casca abatida	133
8.3	Placa quadrada simplesmente apoiada	137
8.4	Problema de estricção	138
8.5	Painel quadrado - Polak e Vechio (1994)	142
9	Considerações Finais	146
9.1	Sobre as contribuições deste trabalho	146
9.2	Sobre as simulações numéricas	147
9.3	Sobre a continuidade da linha de pesquisa	148

Apêndices	164
A Algoritmo para solução de equações não lineares	165
A.1 Métodos de Controle	167
B Modelos elastoplásticos para deformações finitas	171
B.1 Tresca	171
B.2 Drucker-Prager	172
B.3 Mohr-Coulomb	173
B.3.1 Tratamento das singularidades	174
B.4 Rankine	175
C Modelo de fissuração distribuída	177

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia e o desenvolvimento de materiais mais leves e resistentes, a engenharia tem se destacado na concepção e utilização de estruturas esbeltas e altamente flexíveis. No entanto, essas estruturas são mais propensas a sofrerem instabilidades, grandes deflexões, flambagem e outros fenômenos.

Portanto, é essencial que se tenha um profundo conhecimento sobre a natureza desses fenômenos, a fim de prever o desempenho e a capacidade resistente das estruturas de forma mais precisa. Isso permitirá que sejam tomadas medidas preventivas ou corretivas, garantindo a segurança e a eficiência estrutural.

Neste contexto, destacam-se as cascas, estruturas que podem ser obtidas a partir de uma placa impondo-se à sua superfície média inicial uma curvatura simples ou dupla. Elas se caracterizam por apresentar elevadas relações entre resistência-peso, bem como rigidez-peso. Tais estruturas são frequentes em diversas realizações da engenharia moderna, abrangendo pontes, telhados, antenas espaciais, velas solares, estruturas de asas, fuselagem de aeronaves e naves espaciais, braços robóticos flexíveis em engenharia mecânica, vasos de pressão. Além disso, as cascas encontram aplicações em cascos submarinos na indústria naval, tecidos moles e instrumentação avançada no campo da bioengenharia. A notável versatilidade e eficiência das cascas as tornam elementos essenciais no panorama contemporâneo da engenharia (Figura 1.1).

A análise estrutural de placas e cascas é um tópico de extrema relevância na engenharia estrutural e tem recebido crescente atenção nas últimas décadas. Devido à complexidade desse tipo de estrutura, associada a diversos fatores, como sua espessura e curvatura, bem como as condições de contorno e carregamentos aplicados, problemas envolvendo placas e cascas frequentemente apresentam comportamentos não lineares. Adicionalmente, essas não linearidades podem ser de natureza física, como a relação constitutiva do material, ou geométrica, como a influência da deformação excessiva na geometria da estrutura. Essas não linearidades podem estar acopladas, o que pode levar a um grande desafio na análise e solução desses problemas

O acoplamento dessas não linearidades pode aumentar significativamente a complexidade do problema, pois as soluções analíticas são geralmente restritas, resultando em

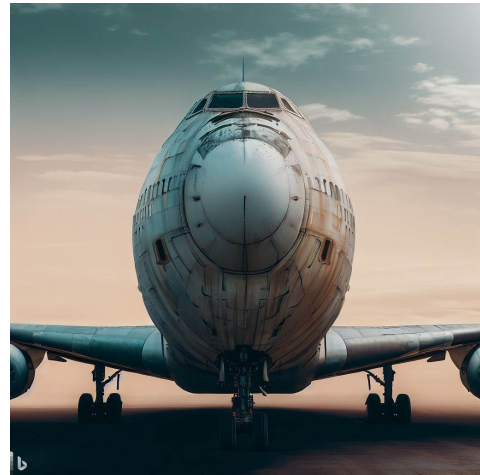
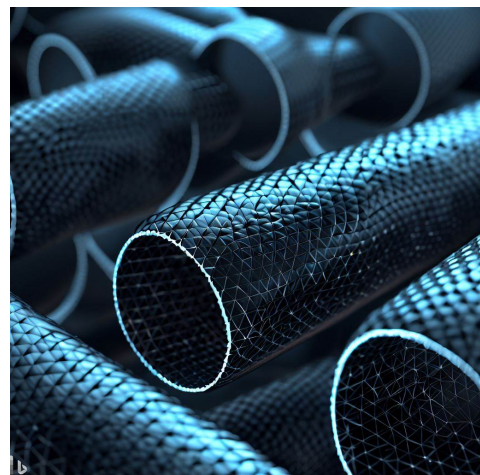
(a) *Ponte*(b) *Fuselagem de aeronaves*(c) *Casco de submarino*(d) *Antenas solares*(e) *Domo*(f) *Nanotubos*

Figura 1.1: Exemplos de geometrias de cascas ([COPILLOT, 2023](#))

desafios adicionais. Por exemplo, o desempenho de uma estrutura pode ser afetado pela resposta do material (não linearidade física), conduzindo a uma instabilidade da estrutura

em uma configuração deformada, o que por sua vez desencadearia uma não linearidade geométrica adicional.

Até a década de 1960, problemas envolvendo placas e cascas eram resolvidos por meio de soluções analíticas, geralmente em séries, por métodos como os de Ritz, de Galerkin e de Navier (Mendonça, 2019). Com o advento dos computadores, os métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), tornaram-se mais acessíveis, permitindo o tratamento de problemas mais complexos. Nas últimas décadas, a análise estrutural de cascas avançou significativamente, impulsionada pelo desenvolvimento do MEF.

A solução de uma análise, após definido o problema físico envolvendo uma casca, pode ser dividida em duas etapas principais, como mostrado na Figura 1.2. Em primeiro lugar, um modelo matemático bem definido é proposto para descrever a estrutura física. Em seguida, a solução deste modelo é aproximada usando o método dos elementos finitos.

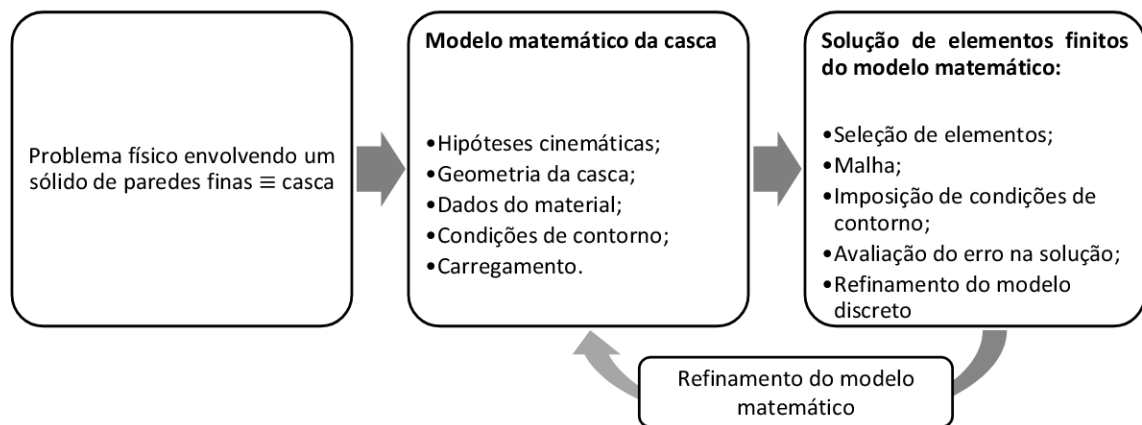


Figura 1.2: Análise de um sistema estrutural de cascas. Adaptado de (Chapelle e Bathe, 2010).

No entanto, é importante ressaltar que a solução de elementos finitos só pode prever as respostas contidas no modelo matemático. Portanto, uma vez obtida uma solução, pode ser necessário revisar e aprimorar o modelo matemático para obter informações mais precisas sobre a resposta real da estrutura física da casca.

Em paralelo, é crucial utilizar elementos finitos que sejam adequados a representação do problema, a fim de garantir que os resultados sejam suficientemente próximos da solução do modelo matemático. Dessa forma, é possível obter uma análise precisa e confiável da estrutura de casca em questão.

Embora tenha havido um grande esforço nas últimas décadas para desenvolver elementos finitos para análise linear e não linear de cascas, é extremamente difícil encontrar um elemento que seja adequado para qualquer problema, independentemente das condições de geometria, contorno e carregamento, e que tenha um comportamento de convergência monótona mesmo em malhas distorcidas. O principal desafio está relacionado aos comportamentos altamente sensíveis e complicados da estrutura do tipo casca, especialmente quando sua espessura é pequena (Chapelle e Bathe, 1998; Ko, Lee e Bathe, 2017; Trinh e

Jun, 2021).

Um elemento de casca deve ser capaz de representar adequadamente todos os termos geométricos e de deformação (condição de consistência). Ele não deve exibir modos de energia espúrios de valor zero, para nenhum elemento individual, para nenhuma montagem de elementos e para nenhuma geometria e condições de contorno (condição de elipticidade). Ademais, ele deve mostrar boa convergência da solução para todas as categorias assintóticas de comportamentos de casca, incluindo comportamentos dominados por membrana, dominados por flexão e mistos (Bathe, 2006).

Um elemento de casca ideal deve ser capaz de modelar geometrias complexas de casca, considerando tanto os efeitos de membrana quanto os de flexão. Além disso, deve ser capaz de satisfazer testes de malha e de deformação constante (Soriano, 2009), estar livre de bloqueios de solução por membrana e cisalhamento, ser facilmente combinado com outros tipos de elementos e fornecer resultados precisos para malhas espessas (Oñate, 2013).

A formulação do elemento de casca deve atender ao critério da conformidade que estabelece que a função de interpolação de deslocamentos deve ser contínua no interior do elemento e nas interfaces entre elementos. Adicionalmente, tal função deve ter continuidade das derivadas associadas aos graus de liberdade nodais. Por fim, a formulação do elemento deve ser simples, evitando, sempre que possível, o uso de derivadas de deslocamento como variáveis nodais.

A cinemática utilizada neste trabalho será baseada em formulações Lagrangianas, que são amplamente empregadas em problemas de grandes deformações. A estrutura de plasticidade isotrópica de grandes deformações empregada será descrita de forma detalhada, a fim de assegurar a consistência da formulação proposta. O ponto central deste trabalho é o acoplamento das não linearidades geométricas e físicas, a resposta estrutural dependente destes fenômenos, a predominância entre os comportamentos e a resposta conjunta do modelo não linear (físico e geométrico).

A proposta foi implementada no sistema *INSANE* (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas na Universidade Federal de Minas Gerais.

A formulação matemática de problemas não lineares requer a utilização de uma ampla gama de técnicas matemáticas, determinando, assim, em grande parte a estrutura deste trabalho. A fim de assegurar a robustez da proposta, serão realizados testes de malha e de deformação constante, que são essenciais para a validação do método numérico. O desempenho do método em problemas de placas e cascas também será avaliado, a fim de verificar a capacidade da formulação proposta em representar problemas de natureza mais complexa contemplando a resposta material e estrutural.

Em suma, o presente trabalho representa um avanço na busca por modelos numéricos e formulações mais eficientes, confiáveis e completas para a análise de estruturas de placas e cascas com grandes deslocamentos e deformações. Embora ainda existam desafios a

serem enfrentados, os resultados obtidos até o momento são bastante promissores.

1.1 Justificativa e contribuições do trabalho

Nas últimas décadas, diversos pesquisadores têm se dedicado a investigações com o propósito de melhorar e desenvolver técnicas confiáveis para compreender e simular fenômenos não lineares em diversas áreas do conhecimento, como biomecânica, mecânica dos fluidos, geotecnia, mecânica dos sólidos, entre outras. Assim, surge a necessidade de desenvolver modelos numérico-computacionais que sejam capazes de representar de maneira simples e eficiente problemas complexos da engenharia.

A representação precisa de cascas, seja na teoria de pequenos ou grandes deslocamentos, tem sido objeto de estudo constante ao longo das últimas décadas, como evidenciado pela revisão de literatura. Vários trabalhos foram desenvolvidos para estudar o comportamento não linear de cascas, incluindo os estudos de Lee e Bathe (2004), Areias e Belytschko (2004), Areias *et al.* (2005), Coda e Paccola (2007), Belo (2009), Sussman e Bathe (2013), Brouzoulis e Fagerstrom (2013, 2015), Jeon *et al.* (2015), Nguyen-Thanh *et al.* (2015), Areias *et al.* (2016), Yazdani *et al.* (2016), Li (2016), Kzam (2016), Song e Dai (2016), Ko, Lee e Bathe (2017), Yazdani *et al.* (2018) e Pham *et al.* (2019).

Análises com não linearidade geométrica são caracterizadas por significativas distorções da malha de elementos, devido aos efeitos de grandes deslocamentos e deformações considerados. Essas distorções podem eliminar alguns termos da função de aproximação dos elementos, resultando em uma perda de qualidade na aproximação da solução por elementos finitos.

De acordo com Barros (2002) e Alves (2012), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) demonstrou ser menos suscetível a influências de distorções na malha, por proporcionar um aumento das aproximações dos elementos a partir da inserção de funções de enriquecimento. Além disso, o ganho de flexibilidade da aproximação através do MEFG também contribui para o tratamento dos problemas de travamento da solução em elementos de cascas finas baseados na teoria de Reissner-Mindlin, tornando-o uma ferramenta significativamente vantajosa para esse tipo de análise.

Entre as diversas metodologias propostas para tratar o travamento da solução, os elementos baseados no Método da Interpolação Mista com Componentes Tensoriais (MITC), desenvolvidos por Bathe e Dvorkin (1984, 1985, 1986), se popularizaram ao longo das últimas décadas. O esquema MITC tem sido utilizado com muito sucesso no desenvolvimento de elementos de cascas gerais e um grande número de trabalhos utilizando essa abordagem para o tratamento de problemas de placas e cascas geometricamente não lineares podem ser encontrados na literatura, com destaque para Bucalem e Bathe (1983), Dvorkin (1995), Hernández *et al.* (2003), Chapelle *et al.* (2003), Lee e Bathe (2010), Gai-

otti *et al.* (2014), Jeon *et al.* (2015), Ko *et al.* (2016), Juna *et al.* (2018), Katili *et al.* (2018), Cinefra *et al.* (2020), Mi e Yu (2021), Trinh e Jun (2023) e Choi e Lee (2023).

A literatura evidencia que o uso dos elementos MITC ainda é atual e vem sendo explorado para o tratamento adequado da análise de estruturas de placas e cascas não lineares. Uma das principais características da formulação do elemento MITC é o uso de componentes tensoriais de deformações de cisalhamento, tornando o elemento resultante relativamente insensível à distorção. Neste sentido, este trabalho buscou combinar a abordagem MITC com a formulação do MEFG, buscando obter melhorias no tratamento do bloqueio que pode acontecer quando os elementos de casca MITC tradicionais são distorcidos geometricamente.

A bibliografia ainda mostra que o acoplamento das não linearidades físicas e geométricas com o uso de elementos MITC é um campo pouco explorado, abrindo campo para a busca de estudos nessa área. Embora exista um número grande de problemas não lineares, tipicamente materiais, que poderiam ser abordados, foi escolhido o modelo elastoplástico com deformações finitas de von Mises. Esta opção se justifica na grande importância, na aplicação potencial desse modelo em muitas áreas da engenharia e na necessidade de se considerar apropriadamente o regime de grandes deformações que podem surgir ao se tratar problemas geometricamente não lineares.

Adicionalmente, propõe-se a criação de um framework para modelos de deformações finitas, evidenciando que os modelos elastoplásticos clássicos presentes na literatura podem ser expandidos para contemplar o regime de grandes deformações. Mesmo que apenas uma medida de deformação, especificamente a medida de deformações logarítmicas, tenha sido abordada inicialmente, a proposta permanece aberta para outras medidas. Isso se deve ao fato de que a estrutura apresentada para a implementação/formulação dos modelos, assim como o algoritmo de retorno, são de natureza geral, permitindo modificações específicas na interação entre o modelo constitutivo e a integração das tensões.

Nesse contexto, as principais contribuições deste trabalho incluem a proposição de uma formulação geometricamente não linear utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados acoplada a modelos elastoplásticos com deformações finitas para elementos de casca do tipo MITC, que é uma proposta ainda não tratada na literatura.

É relevante ressaltar, que embora o presente trabalho esteja centrado no modelo J_2 (von Mises), foi apresentada a extensão para deformações finitas de outros modelos de plasticidade clássicos (Tresca, Rankine, Drucker Prager e Mohr-Coulomb). Essa implementação, expande de forma genérica os modelos apresentados em Oliveira (2016) e garante que modelos elastoplásticos originalmente formulados para pequenas deformações sejam também aplicados a problemas de grandes deformações. Um conjunto de problemas de referência comumente utilizados para a elastoplasticidade de pequenas deformações foi ampliado para os modelos de grandes deformações e suas soluções foram obtidas para que sirvam como uma base conveniente para comparações subsequentes.

Além da generalização dos modelos constitutivos elastoplásticos, também deve ser observada e destacada a formulação adotada para o algoritmo de mapeamento de retorno, necessário para a integração das relações constitutivas que governam o comportamento do material. A proposta apresentada é derivada diretamente a partir de conceitos completamente análogos da teoria infinitesimal e faz uso da metodologia de algoritmos implícitos/explícitos apresentadas por [Oliver *et al.* \(2008\)](#).

Adicionalmente, vale destacar a possibilidade de aplicação da metodologia proposta em estruturas de concreto armado. Embora o enfoque principal não esteja direcionado a esse material em particular, a adaptabilidade do framework proposto sugere que novos modelos constitutivos possam ser incluídos e modelos já existentes no sistema INSANE (como os de fissuração distribuída) possam ser utilizados, desde que sejam compatíveis com modelos de grandes deformações. Isso amplia ainda mais a aplicabilidade prática e o impacto potencial desta pesquisa em diferentes cenários da engenharia estrutural.

Em decorrência, diante da escassez de resultados sobre o acoplamento das não linearidades, este trabalho apresenta também uma contribuição na ampliação de resultados de simulações numéricas de problemas relacionados a estruturas submetidas a grandes deslocamentos, grandes deformações e efeitos inelásticos. A relevância deste estudo é ainda mais evidente em face dos crescentes desafios apresentados por projetos de estruturas cada vez mais esbeltas e leves. É importante ressaltar que a maioria dos programas comerciais para projeto e dimensionamento de estruturas, atualmente disponíveis no mercado, restringe-se à análise estrutural de materiais elásticos homogêneos, em um contexto de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese é o acoplamento da análise física e geometricamente não linear aplicado a estruturas de cascas. Para isso, é necessário levar em consideração o comportamento não linear da estrutura e do material, abrangendo problemas de grandes deslocamentos e grandes deformações, e lidar com as instabilidades numéricas ou físicas e a sensibilidade à distorção das malhas decorrentes dessa classe de problemas. Nesse sentido, a proposta é utilizar o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) combinado com o Método das Interpolações Tensoriais Mistas (MITC) e aplicá-lo em problemas práticos de engenharia.

Assim, espera-se contribuir para o desenvolvimento de uma ferramenta computacional robusta para análise de elementos de cascas e placas com não-linearidades geométricas e físicas, permitindo uma análise mais precisa de estruturas em engenharia. Com isso,

espera-se avançar o conhecimento científico e tecnológico nessa área, promovendo melhorias em projetos e processos relacionados a estruturas de cascas e placas em diferentes setores da engenharia.

Para isso, foi desenvolvido um código de elementos finitos capaz de lidar com comportamentos não lineares associados à geometria acoplada a modelos de plasticidade para grandes deformações em elementos de cascas e placas. O código foi validado por meio de simulações numéricas e comparações com outras técnicas de análise numérica, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional. A partir da validação do código, foram realizadas análises em casos de estudo relevantes, a fim de demonstrar sua capacidade de resolver problemas práticos e fornecer soluções precisas.

1.2.2 Objetivos Específicos

Visando atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram perseguidos:

- (1) Formular, a partir da descrição cinemática, o elemento de casca utilizando a estratégia do MEFG;
- (2) Formular e implementar no sistema INSANE os modelos elastoplásticos com deformações finitas segundo o Ambiente Unificado para modelos constitutivos, desenvolvido por [Penna \(2011\)](#);
- (3) Revisar e generalizar para o modelo de deformações finitas a implementação dos algoritmos de retorno para a integração das equações constitutivas;
- (4) Realizar uma série de simulações numéricas para validar o código desenvolvido em relação a resultados experimentais ou outros códigos de elementos finitos bem estabelecidos. Essa etapa permitiu avaliar a precisão e eficácia do código, garantindo que ele seja capaz de lidar com problemas complexos;

1.3 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em sete capítulos e três apêndices.

O Capítulo [1](#) apresenta a motivação, a delimitação e os objetivos do trabalho, fornecendo uma perspectiva abrangente e contextualizada do problema tratado, como guia para a organização do trabalho como um todo.

No Capítulo [2](#) foi realizada uma revisão sobre a teoria de placas e cascas e é apresentada a base teórica para a formulação do elemento de casca que será implementada.

No Capítulo [3](#) foi realizada uma revisão teórica, apresentando os aspectos relevantes do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG);

O Capítulo [4](#) abrange uma revisão geral sobre análise geometricamente não linear,

onde são discutidos os conceitos básicos relativos à descrição matemática da formulação não linear, incluindo os tipos de medidas de tensões e deformações utilizadas. Após essa introdução, é detalhada a formulação Lagrangiana Total, empregada na análise geométrica não linear através do Método dos Elementos Finitos de Grandes Deformações (MEFG). O capítulo conclui com a apresentação do modelo discreto do elemento de casca geometricamente não linear.

O Capítulo 5 traz uma revisão geral sobre a Teoria Matemática da Plasticidade para grandes deformações. Nele, são apresentados os conceitos básicos relativos à descrição matemática de um modelo constitutivo elastoplástico, destacando-se a formulação das relações incrementais entre tensão e deformação da teoria da plasticidade, os conceitos de superfícies de falha, escoamento plástico e leis de encruamento, com ênfase para o algoritmo de integração das tensões.

A proposta deste trabalho é validada nos capítulos 6, 7 e 8. No Capítulo 6, são apresentados exemplos de validação para o elemento de casca geometricamente não linear implementado, destacando principalmente sua generalidade e seu desempenho. No capítulo 7, são apresentadas e discutidas diversas simulações numéricas para validação do modelo constitutivo para grandes deformações implementado, onde os resultados obtidos são confrontados com resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores. No Capítulo 8, são apresentadas simulações numéricas com o objetivo de investigar o acoplamento das não linearidades física e geométrica, discutindo como isso pode levar a um aumento significativo da complexidade dos problemas e abordando as possibilidades proporcionadas pela consideração de ambas as não linearidades na análise de estruturas.

O Capítulo 9 traz considerações finais acerca do desenvolvimento do trabalho e dos resultados obtidos. Finalmente, a partir das discussões realizadas, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Adicionalmente, este trabalho inclui três apêndices que abordam temas secundários, porém de extrema relevância para a compreensão do texto.

CAPÍTULO 2

TEORIAS DE CASCAS

As cascas representam um tipo particular de componentes estruturais caracterizadas por sua geometria curva (Figura 2.1), sendo um sólido tridimensional cuja espessura é muito menor do que as outras duas dimensões. A geometria específica dessas estruturas incentiva o uso de uma cinemática particular em vez de uma cinemática geral para corpos sólidos.

Uma casca pode ser vista, em essência, como a extensão de uma placa para uma superfície não plana. A não coplanaridade introduz esforços axiais (membrana) além da flexão e do cisalhamento, proporcionando assim uma maior resistência estrutural geral. Para cascas finas sem mudanças abruptas na espessura, inclinação ou curvatura, as tensões de membrana são uniformes em toda a espessura da parede. A teoria de flexão geralmente compreende uma solução de membrana, corrigida nas áreas em que os efeitos de descontinuidade são pronunciados.

De maneira geral, a teoria das cascas é visa reduzir o problema de elasticidade tridimensional para um problema de duas dimensões aplicado à essa classe particular de estruturas. A redução do problema tridimensional requer suposições cinemáticas que são consideradas através da imposição de hipóteses sobre o campo de deslocamentos, que quando empregadas em conjunto com os métodos variacionais levam às equações de casca bidimensionais, que fornecem a base para a discretização dos elementos finitos.

As teorias de diversas ordens para cascas podem ser expressas simplesmente por suas relações cinemáticas. Este capítulo começa apresentando um histórico da evolução das teorias de placas e cascas. As diferentes teorias serão referenciadas de maneira ilustrativa em ordem crescente de complexidade. Além disso, uma breve exposição das diferentes abordagens de elementos finitos para gerar elementos de casca é apresentada com foco nas vantagens e desvantagens da formulação dos elementos. Por fim, foi descrito o método de integração numérica das equações governantes dos elementos finitos que serão derivadas no capítulo 5.

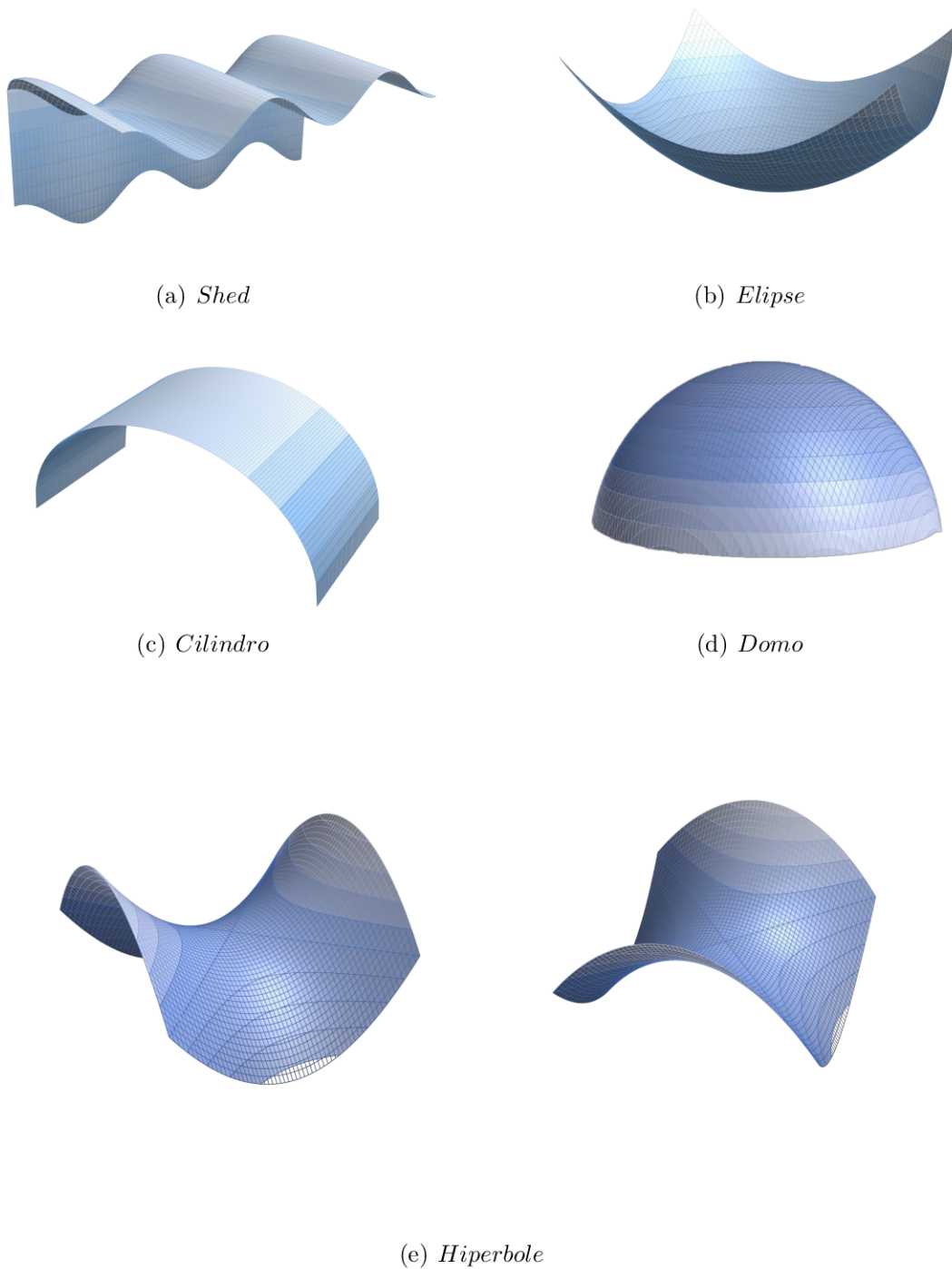


Figura 2.1: Exemplos de geometrias de cascas

2.1 Histórico da Teoria de Placas e Cascas

Existem várias teorias para a análise de flexão de placas e cascas, sendo as mais difundidas e utilizadas as teorias de [Kirchhoff \(1850\)](#), também conhecida como teoria de Kirchhoff-Love ou teoria clássica, e a de Reissner-Mindlin [\(Reissner, 1944, 1945, 1947\)](#).

Mindlin, 1951).

Fundamental para o desenvolvimento da teoria não linear clássica, a teoria proposta por Kirchhoff (1850) é limitada ao estudo de placas delgadas e não considera a deformação por cisalhamento transversal. Esta formulação, baseada na hipótese de Bernoulli para vigas, resulta em uma equação diferencial de quarta ordem para a deflexão da placa. Além disso, o método de Kirchhoff introduz significado físico na teoria das placas, tornando-a mais intuitiva e fácil de aplicar em problemas práticos de engenharia.

Para tratar as placas espessas, foi introduzida a teoria da deformação por cisalhamento ou de primeira ordem ou simplesmente teoria de Reissner-Mindlin de placas (Reissner, 1944, 1945, 1947, Mindlin, 1951), que leva em consideração as deformações transversais. Cinco variáveis são consideradas para descrever a deformação: três translações, tendo como referência a superfície média e duas rotações. Esta abordagem não satisfaz as condições de limites transversais de cisalhamento nas superfícies superior e inferior da placa, uma vez que um ângulo de cisalhamento constante através da espessura é assumido e as seções planas permanecem planas após a deformação. Como consequência desta aproximação, a teoria de Reissner-Mindlin requer fatores de correção de cisalhamento para considerações de equilíbrio.

As teorias de Kirchhoff e Mindlin preveem apenas uma variação linear dos deslocamentos e das tensões ao longo da espessura da placa. Portanto, fornecem resultados apenas aproximados, muitas vezes acompanhados por erros significativos nas tensões.

Em placas e cascas com maior espessura, a distribuição dos deslocamentos assume um comportamento progressivamente não linear à medida que a relação entre espessura/comprimento aumenta. A mecânica do comportamento não linear de placas e cascas e suas características, tem sido objeto de estudo por parte de diversos pesquisadores, os quais empregaram abordagens distintas na busca por teorias que captem de maneira adequada a variação dos deslocamentos e das tensões ao longo da espessura.

Fooppl (1923) *apud* Szilard (2004) em seu livro sobre Mecânica de Engenharia, publicado pela primeira vez em 1907, já havia tratado a teoria não linear de placas. A forma final da equação diferencial, no entanto, foi desenvolvida por von Kármán (1910) *apud* Reddy (2003), que estendeu a teoria de Kirchhoff para estudar a deformação finita de placas, considerando termos não lineares. Deve-se ressaltar ainda, as importantes contribuições de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) para a teoria de placas e cascas, dentre elas, estão a solução de placas circulares considerando grandes deflexões e a formulação de problemas de estabilidade elástica.

Donnell (1934) estabeleceu a teoria não linear de cascas cilíndricas circulares sujeitas a carga torcional sob a hipótese simplificadora de casca rasa. Devido à sua relativa simplicidade e precisão prática, esta teoria tem sido amplamente utilizada. As equações de Donnell são obtidas negligenciando a inércia no plano, a deformação transversal do cisalhamento e a inércia rotativa, dando resultados precisos somente para cascas muito finas.

Essa limitação da teoria proposta por [Donnell \(1934\)](#) também está ligada a deslocamentos tangenciais e modos de corpo rígido. Os termos não lineares predominantes são retidos, mas outros efeitos secundários, tais como as mudanças de curvatura são expressas por funções lineares do deslocamento radial.

[von Kármán e Tsien \(1941\)](#) realizaram um estudo sobre a estabilidade de cascas cilíndricas carregadas axialmente, com base na teoria não linear de Donnell. Os autores mostraram que as grandes discrepâncias entre o comportamento experimental e a teoria da estabilidade clássica eram relacionados ao comportamento pós-flambagem altamente instável encontrado em muitas estruturas de casca finas.

[Sanders Jr \(1963\)](#) desenvolveu uma teoria não linear mais refinada de cascas, expressa em forma tensorial, sendo esta considerada uma das melhores teorias de primeira ordem para análise de problemas de instabilidade e dinâmica. As mesmas equações foram obtidas por [Koiter \(1966\)](#) em torno do mesmo período, levando à designação dessas equações como as equações de Sanders-Koiter. De acordo com a teoria de Sanders-Koiter, todos os três deslocamentos são usados nas equações do movimento. As alterações na curvatura e a torção são lineares de acordo com as teorias não lineares de Donnell e Sanders-Koiter ([Yamaki, 1984](#)).

Para calcular a energia de deformação elástica, utilizam-se quatro teorias de casca fina não linear, as teorias de Donnell, Sanders-Koiter, Flügge-Lur'e-Byrne ([Ginsberg, 1973](#)) e Novozhilov, que negligenciam a inércia rotativa e a deformação por cisalhamento. Essas teorias de cascas são praticamente as únicas geralmente aplicadas a problemas geometricamente não lineares entre as teorias que utilizam apenas três variáveis, que são os três deslocamentos de superfície média.

Até a década de 1960, a única maneira de solucionar problemas de placas e cascas, isotrópicas ou não, era através de soluções analíticas. Essas soluções geralmente eram expressas em séries, por métodos como o de Ritz, de Galerkin, de Navier ou outras formas e variações. Em problemas envolvendo a análise de placas e cascas a partir da formulação analítica, a determinação do campo de deslocamentos, as deformações internas ou as tensões atuantes no sistema devido à aplicação de cargas apresenta dificuldades por vezes intransponíveis.

Desta forma, houve um esforço para desenvolver e aplicar abordagens aproximadas que possibilitassem a aplicação dos princípios subjacentes a essas teorias de maneira mais acessível e precisa. De acordo com [Arciniega e Reddy \(2005\)](#), os avanços mais significativos nas análises de cascas ocorreram através do uso do Método dos Elementos Finitos, especialmente no que diz respeito à discretização no espaço.

[Gallagher \(1973\)](#) apresentou uma formulação não linear de elementos finitos para a análise de instabilidades de cascas finas usando dois tipos de elementos, um quadrilateral arbitrário e um elemento triangular. Um elemento triangular curvo com 27 graus de liberdade baseado nos pressupostos de Kirchhoff foi empregado por [Bathoz et al. \(1976\)](#) para

estudar as configurações de pré e pós flambagem de cascas elásticas finas com curvaturas gaussianas nulas, negativa e positiva. Uma análise geometricamente não linear de cascas, utilizando o MEF, foi realizada por [Horrigmoe e Bergan \(1978\)](#), com especial atenção aos problemas de instabilidade.

[Reddy e Chandrashekara \(1985\)](#) introduziram a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem não linear de cascas, para tratar cascas laminadas moderadamente espessas. Cinco variáveis independentes, três deslocamentos e duas rotações, são usadas para descrever a deformação da casca. Esta teoria pode ser considerada como a versão de cascas espessas da teoria de Sanders para termos lineares e da teoria de casca não linear de Donnell para termos não lineares. [Pitkaranta *et al.* \(1999\)](#) estudaram o efeito da laminação na deformação das cascas, uma vez que as tensões máximas geralmente ocorrem perto dos limites das camadas. Isso, de fato, é uma das características que tornam os problemas das cascas bastante singulares entre os problemas da mecânica computacional.

Os elementos finitos mais utilizados para modelagem de estruturas do tipo casca são os elementos degenerados. Em menor escala de uso, têm-se os elementos bidimensionais baseados em uma teoria de casca, além dos elementos planos e dos elementos sólidos tridimensionais. Desde meados da década de 1960, quando surgiram os primeiros elementos finitos para cascas, a literatura sobre o assunto vem se desenvolvendo rapidamente. [Yang *et al.* \(2000\)](#) apresentaram um resumo dos trabalhos mais relevantes sobre elementos finitos de cascas, publicados entre os anos de 1985 e 2000. Foram catalogados trabalhos que envolviam a abordagem de cascas com elementos degenerados, formulações baseadas em tensões no contínuo de Cosserat, integração reduzida com estabilização, abordagem de modos incompatíveis, formulações com enriquecimento de deformações, elementos tridimensionais, formulações corrotacionais e teorias de ordem superior para a análise de laminados.

O elemento de casca degenerado apresentado por Ahmad, Irons e Zienkiewicz ([Ahmad *et al.*, 1970](#)) tem gozado de bastante prestígio nas últimas décadas constituindo até os dias atuais a base para as análises de cascas por elementos finitos. A formulação parte da ideia um tanto óbvia de modelar a casca apenas pelo comportamento de sua superfície média, através de uma definição adequada das coordenadas nodais.

Por sua versatilidade, esse elemento é capaz de analisar problemas de cascas não lineares, e pode ser empregado com sucesso para investigar o comportamento de cascas arbitrárias, com base em uma formulação não linear consistente. Em [Ribeiro e Landau \(1991\)](#) foi apresentada uma formulação Lagrangiana total para análise não linear geométrica de estruturas de cascas utilizando-se elementos finitos tridimensionais degenerados, representados pelas normais e pelas coordenadas dos nós da superfície média. [Buechter e Ramm \(1992\)](#) compararam o conceito de degeneração com uma formulação da teoria de cascas para grandes rotações incluindo deformações transversais de cisalhamento.

No entanto, ao se utilizar tal abordagem, frequentemente surge o problema de soluções

excessivamente rígidas. Esse fenômeno é conhecido como travamento e deve ser mitigado para assegurar análises confiáveis utilizando elementos finitos de casca. Buscando superar essas limitações, muito esforço de pesquisa foi empregado, como em [Huang e Hinton \(1986\)](#) que propuseram um elemento de casca degenerado de nove nós, onde uma interpolação aprimorada das deformações de cisalhamento transversais no sistema de coordenadas natural é usada para superar o problema de travamento de cisalhamento, e uma interpolação aprimorada das deformações da membrana no sistema de coordenadas cartesianas local é aplicada para evitar comportamento de travamento da membrana.

Entre diversos esquemas para evitar o travamento da solução, os elementos MITC (Método da interpolação mista das componentes tensoriais) foram desenvolvidos ([Bathe e Dvorkin, 1984, 1985, 1986](#)), e se tornaram o elemento padrão para muitos programas de elementos finitos que fazem a análise de cascas. Uma vantagem particular da abordagem MITC é que uma formulação desenvolvida para análise linear pode ser prontamente estendida para análises não lineares, através da incorporação das medidas adequadas de tensão e deformação.

Recentemente os elementos MITC+ foram propostos objetivando melhorar o desempenho dos elementos MITC ([Jeon *et al.*, 2015](#), [Ko *et al.*, 2016](#), [Ko, Lee, Lee e Bathe, 2017](#)). [Hale *et al.* \(2018\)](#) apresentaram uma reinterpretação do procedimento do elemento MITC como um método de elementos finitos com hibridização mista e um método de integração reduzida seletiva parcial de alta ordem polinomial. Em [Pham *et al.* \(2019\)](#), o elemento MITC é combinado com elementos finitos suavizados dando origem ao elemento denominado ES-MITC3, visando melhorar a precisão do MITC3 original para análise de cascas.

[Cinefra *et al.* \(2020\)](#) discutiram a robustez dos elementos de placa baseados na técnica MITC e a abordagem de cinemática variável da Formulação Unificada de Carrera (CUF) com relação ao problema de malhas distorcidas. [Trinh e Jun \(2021\)](#) apresentaram um elemento quadrilateral de alta ordem aplicando a técnica MITC. [Mi e Yu \(2021\)](#) propuseram uma formulação isogeométrica da casca de Reissner-Mindlin, utilizando MITC para aliviar o travamento por cisalhamento e o travamento por membrana. [Lee *et al.* \(2022\)](#) aplicaram a formulação Lagrangeana Total para estender a formulação do elemento MITC3+ para análises não lineares. [Trinh e Jun \(2023\)](#) utilizaram a técnica MITC para avaliar o estudo do comportamento geometricamente não linear de cascas compostas com gradiente funcional sob grandes deslocamentos e grandes rotações. [Choi e Lee \(2023\)](#) desenvolveram um elemento MITC4+ que busca simplificar a implementação do campo assumido de deformação por membrana.

[Belo \(2009\)](#) apresentou um elemento finito bidimensional de casca capaz de avaliar o problema da não-linearidade material (hiperelasticidade) e geométrica de uma dada estrutura, de forma precisa e acurada, submetida a grandes deslocamentos e rotações. Em [Sussman e Bathe \(2013\)](#) foram apresentados elementos finitos de 3 e 4 nós, usando a teoria

do contínuo tridimensional com o comportamento constitutivo tridimensional completo, para análise de grandes deformações em cascas, eles são referidos como elementos de casca 3D e foram formulados de modo a evitar os bloqueios de cisalhamento e volumétrico.

[Sampaio *et al.* (2015)] apresentaram uma formulação alternativa de elementos finitos para a análise de placas e cascas laminadas reforçadas com fibra, desenvolvendo pequenas e grandes deformações. Em [Kiendl *et al.* (2015)] foram apresentadas formulações para cascas finas hiperelásticas compressíveis e incompressíveis que podem usar modelos constitutivos 3D gerais. A condição de estado plano de tensões é aplicada analiticamente para materiais incompressíveis e iterativamente para materiais compressíveis.

Em [Dornish *et al.* (2016)], foi desenvolvida uma formulação isogeométrica robusta baseada na teoria de cascas de Reissner-Mindlin para a simulação mecânica de estruturas de paredes finas.

[Kzam (2016)] empregou elementos finitos de cascas na análise da instabilidade estrutural em grandes deslocamentos considerando-se pequenas imperfeições na geometria dos elementos estruturais. [Burzyński *et al.* (2016)] apresentam uma formulação da lei constitutiva elástica para materiais com gradiente funcional (FGM) em uma teoria de cascas não linear de 6 parâmetros. Esses materiais são caracterizados por uma mudança contínua dos seus constituintes e foram propostos como uma nova geração de compósitos laminados que estão livres das disparidades do material nas superfícies de interface das camadas do laminado. A lei constitutiva é derivada pela integração através da espessura das equações de tensão e a influência da escolha da superfície de referência é observada especialmente na análise da estabilidade não linear.

Em [Song e Dai (2016)], foi desenvolvida uma teoria geral de cascas sob deformações finitas, que é consistente com o princípio da energia potencial estacionária. A chave no desenvolvimento dessa teoria está em derivar as relações de recursão exatas para os coeficientes de expansão de alta ordem do sistema. As vantagens da teoria de cascas apresentada incluem consistência, alta precisão, incorporando ambos os efeitos de alongamento e flexão, sem o envolvimento de resultantes de tensão de ordem superior e sua aplicabilidade a cargas gerais.

Em [Areias *et al.* (2016)], foi apresentado um novo algoritmo escalonado para materiais elásticos e elastoplásticos para a análise de placas e cascas sob deformações finitas com base em um modelo de regularização de trinca. O comportamento de deformação finita para ambas as leis constitutivas elástica e elastoplástica foi compatibilizado com o modelo de *phase field* pelo uso de um algoritmo Lagrangiano atualizado e consistente.

O trabalho de [Li *et al.* (2017)] resultou no desenvolvimento de um elemento finito triangular elastoplástico corrotacional de três nós. No âmbito da análise elastoplástica, empregou-se o critério de Maxwell-Huber-Hencky-von Mises. Este critério adota uma relação constitutiva elástica condensada, que é combinada com uma superfície de escoamento baseada nos cinco componentes de tensão, excluindo a componente normal fora do

plano. Para lidar com a avaliação do estado de tensão elastoplástica, foi utilizado um algoritmo de mapeamento de retorno do tipo *backward-Euler*. Nesse processo, é utilizada uma matriz tangente consistente, garantindo uma abordagem mais precisa na consideração da convergência elastoplástica.

Em [Tang *et al.* \(2017\)](#), uma formulação corrotacional simplificada foi desenvolvida para elementos finitos de casca quadrilaterais, utilizando o pressuposto de pequenas deformações, que é válido na abordagem corrotacional, com os efeitos de deformações considerados como excentricidades. Um elemento quadrilateral plano que permite rotações é adotado e incorporado no algoritmo corrotacional simplificado para a análise geometricamente não linear envolvida com grandes deslocamentos e grandes rotações.

Entretanto, há fenômenos cujo comportamento exige ajustes diversos na discretização, dependendo da tipologia da estrutura e das particularidades vinculadas à sua geometria e carregamento. Essas adaptações podem abranger o refinamento da malha ou até a adoção de polinômios de alta ordem. Isso pode dificultar a aplicação convencional do Método dos Elementos Finitos (MEF) ou resultar em elevados custos computacionais na análise, como destacado por [Nirschl e Proença \(2008\)](#).

Em muitas dessas abordagens, há uma notável sensibilidade em relação à malha, o que torna necessária a adoção de técnicas de enriquecimento não convencionais para aprimorar a aproximação obtida pelo MEF. Um exemplo é o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que, mesmo quando utilizado com malhas pouco refinadas, produz resultados satisfatórios por meio do enriquecimento da aproximação inicial.

[Dolbow *et al.* \(2000\)](#) desenvolveram uma forma de domínio apropriada da interação integral em conjunto com o Método dos Elementos Finitos Estendidos (*eXtended Finite Element Method - XFEM*) para modelar a propagação de trincas em placas de Reissner-Mindlin. [Garcia \(2003\)](#) utilizou elementos finitos generalizados na análise estática de placas e cascas constituídas de materiais com comportamento elástico linear.

[Areias e Belytschko \(2004\)](#) apresentaram uma metodologia para analisar o crescimento arbitrário de fissuras em cascas laminadas utilizando o XFEM. A metodologia pode ser aplicada a ambas as não linearidades geométricas e dos materiais, mas é restrito a fissuras de espessura total que são normais à superfície média e abrangem um elemento inteiro.

[Areias *et al.* \(2005\)](#) apresentaram um elemento finito melhorado do tipo Kirchhoff-Love, com raízes longas na história de elementos finitos. O elemento resultante é válido para grandes rotações e grandes deslocamentos e apresenta generalização para deformações finitas no quadro de uma teoria clássica de cascas. [Areias e Belytschko \(2006\)](#) apresentaram uma análise de fissuras em cascas finas no regime elastoplástico de grandes deformações, utilizando um modelo de casca de Kirchhoff-Love (a discretização correspondente por elementos finitos) e fazendo uso do XFEM na forma (implícita) de deslocamento da superfície média e descontinuidades do campo do diretor. São apresentadas aplicações que mostram as possibilidades desta técnica e o efeito da anisotropia plástica no padrão

de fissura é avaliado numericamente.

[Suarez *et al.* (2011)] investigaram o desempenho da aproximação de uma família de funções de forma polinomial racional, que são enriquecidas por um conjunto de monômios de ordem p para obter aproximações de alta ordem. Uma atenção especial foi dada ao problema de travamento, bem como ao conhecido problema de dependência linear, que é responsável pelo mau condicionamento da matriz de rigidez. Para validar numericamente a eficácia do método proposto, a solução numérica foi explorada em relação à resposta mecânica e aos problemas de vibração livre em placas e cascas axissimétricas elásticas.

Em [Nguyen-Thanh *et al.* (2015)] foi apresentada uma abordagem que combina o método dos elementos finitos estendidos e uma formulação isogeométrica para análise de fissuras através da espessura em estruturas de cascas finas. A formulação é baseada na teoria de Kirchhoff-Love, onde a continuidade C^1 do campo de deslocamento é necessária e elimina a necessidade de graus de liberdade rotacionais ou a discretização do campo diretor, facilitando a estratégia de enriquecimento.

[Kumar *et al.* (2016)] apresentaram três diferentes esquemas de enriquecimento para investigar a resposta dinâmica de estruturas fissuradas utilizando elementos finitos de casca. Nos esquemas de enriquecimento propostos, apenas dois graus adicionais de liberdade são adicionados em cada nó do elemento de ponta de trinca para reduzir o tamanho da matriz.

[Zarrinzadeh *et al.* (2016)] estudaram os parâmetros de fratura em cascas metálicas fissuradas. Para viabilizar esse estudo, foi desenvolvido um código com elementos de casca de oito nós com dupla curvatura na estrutura do XFEM. [Zarrinzadeh *et al.* (2020)] utilizaram o XFEM em um código capaz de resolver estruturas ortotrópicas tridimensionais com elementos de casca.

Em [Nasirmanesh e Mohammadi (2017a)] foi realizada a análise dos modos de flambagem para cascas cilíndricas fissuradas com graduação funcional submetidas a diferentes condições de carga. Na análise foram usados oito elementos de casca degenerados no âmbito do método dos elementos finitos estendidos. [Nasirmanesh e Mohammadi (2017b)] investigaram o comportamento de cascas com graduação funcional submetidas a vibração. Uma formulação geral do XFEM, com precisão e desempenho testados, foi apresentada devido à sua capacidade intrínseca de lidar com problemas com descontinuidades, como trincas.

O método dos elementos finitos generalizados tem sido constantemente empregado na análise de laminados compostos. Uma abordagem comumente adotada para esse problema é modelar cada camada individualmente (ou um conjunto de camadas) usando vários elementos sólidos ou de casca empilhados, levando a uma grande quantidade de graus de liberdade, especialmente quando o número de camadas aumenta.

[Brouzoulis e Fagerstrom (2013)] utilizaram o XFEM para desenvolver um elemento de cascas computacionalmente eficiente para o estudo de estruturas discretizadas em camadas

e propuseram um único elemento de casca que possa discretizar (internamente) as descon- tinuidades que se desenvolvem durante a delaminação. Esse elemento foi construído pelo enriquecimento de um elemento de casca adequado com funções de forma descontínuas de acordo com o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Em [Brouzoulis e Fagerstrom \(2015\)](#) esse elemento finito enriquecido é utilizado na modelagem de danos progressivos em polímeros reforçados com fibras.

[Yazdani et al. \(2016\)](#) desenvolveram um elemento finito plano de quatro nós para análises física e geometricamente não lineares de cascas laminadas. A formulação empregada baseou-se em uma teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e é válida para grandes deslocamentos, mas rotações moderadas. O XFEM foi usado para impor o domínio descontínuo em um local arbitrário através da espessura.

[Mostofizadehand et al. \(2016\)](#) abordaram o delicado equilíbrio entre a eficiência com- putacional e o nível de detalhamento na modelagem de fratura dúctil em estruturas de paredes finas. Para representar a natureza em escala fina do processo de ductilidade, foi proposto um novo método de enriquecimento baseado no método dos elementos finitos estendidos do campo de deslocamento. Esse método permite a representação de pontas de trincas que terminam ou dobram dentro de um elemento, possibilitando uma melhor representação da cinemática descontínua. Isso é alcançado sem afetar o procedimento da solução na macroescala, o que seria uma consequência direta de um refinamento regular da malha.

[Li \(2016\)](#) combinou o método dos elementos finitos generalizados e a teoria de cama- das para desenvolver um Método Estendido de Camadas. Esse método foi aplicado na descrição de cascas de dupla curvatura com múltiplas camadas e fissuras transversais. Na hipótese de deslocamento do Método Estendido de Camadas, uma função descontínua ao longo da direção da espessura é adotada para simular o deslocamento descontínuo re- sultante de múltiplas delaminações, enquanto as fissuras transversais são modeladas na discretização dos deslocamentos no plano pelo XFEM. [Li e Zhang \(2017\)](#) aplicaram uma versão modificada do Método Estendido de Camadas para evitar a dependência da região de delaminação nos elementos finitos.

[Yazdani et al. \(2018\)](#) desenvolveram uma formulação para cascas planas no regime geometricamente não linear, a fim de estudar a resposta de cascas com multicamadas em pequenas deformações e rotações moderadas usando o XFEM. A teoria de camada única equivalente (ESLT) foi empregada para simular os laminados multicamadas. Essa formulação foi aprimorada com a topologia XFEM para modelar domínios descontínuos e uma formulação coesiva bilinear de modo misto para rastrear o crescimento da dela- minação.

Atualmente, a teoria de placas e cascas continua a evoluir com abordagens mais avançadas e constitui um campo em constante desenvolvimento que desempenha um pa- pel crucial na análise e projeto de estruturas em uma ampla gama de aplicações. Desde

suas origens históricas até as contribuições modernas com métodos avançados de análise, a teoria de placas e cascas tem sido fundamental para a compreensão do comportamento estrutural e continua a influenciar o progresso na engenharia e na ciência dos materiais.

2.2 Teorias de primeira ordem e de ordem superior

2.2.1 Teoria de Kirchhoff-Love

Baseada na hipótese de Kirchhoff-Love esta é a teoria mais antiga para placas e cascas. A teoria clássica pode ser resumida por suas hipóteses básicas, a definição dos campos de deslocamentos e pelas relações tensão-deformação. A teoria de Kirchhoff-Love para cascas encontra-se fundamentada em três hipóteses:

- (1) Todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento transversal;
- (2) A tensão normal na direção transversal é desprezível;
- (3) Retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas e normais ao plano médio, após sua deformação.

Assim, a deformação da casca pode ser descrita completamente a partir da deformação do seu plano médio, pelo qual a teoria pode ser reduzida a uma descrição bidimensional. A Figura 2.3 traz uma representação do campo de deslocamentos, onde é possível observar as suposições assumidas.

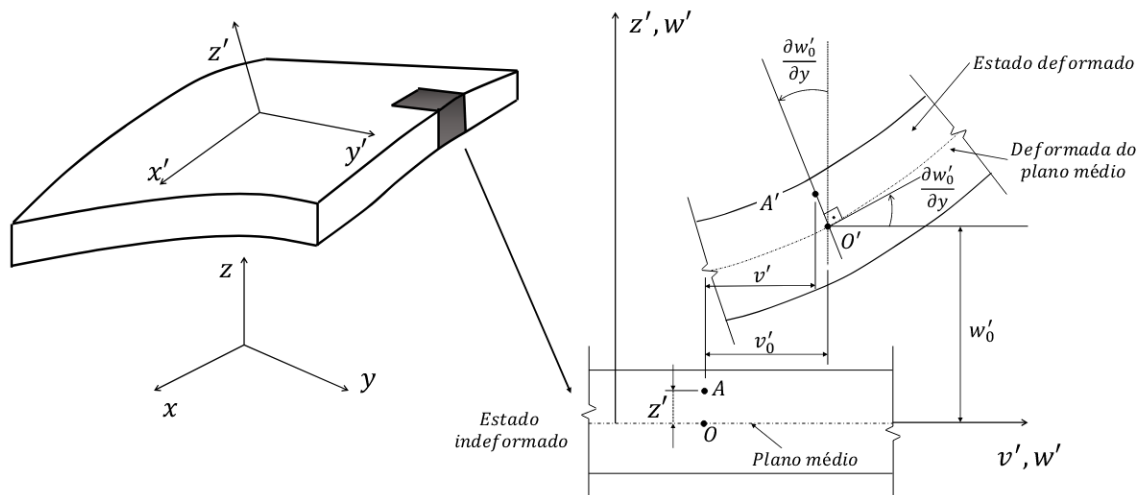


Figura 2.2: Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de Kirchhoff

O campo de deslocamentos da teoria clássica é dado como:

$$u'(x', y', z') = u'_0(x', y') - z' \frac{\partial w'_0}{\partial x'} \quad (2.1a)$$

$$v'(x', y', z') = v'_0(x', y') - z' \frac{\partial w'_0}{\partial y'} \quad (2.1b)$$

$$w'(x', y', z') = w'_0(x', y') \quad (2.1c)$$

Onde, u' , v' e w' são deslocamentos nas direções locais x' , y' e z' , respectivamente. O campo de deslocamentos descrito nas Equações 2.1 é linear e as rotações normais coincidem com as inclinações do plano médio $\partial w'/\partial x'$ e $\partial w'/\partial y'$, respectivamente.

Uma das principais vantagens da teoria clássica das cascas é sua simplicidade. Apesar do campo de deslocamentos das equações 2.1 envolver apenas três funções u'_0 , v'_0 e w'_0 , a implementação de um modelo de elementos finitos nessa teoria envolve cinco graus de liberdade por nó. No entanto, a teoria clássica é limitada a cascas finas e, de pequenas curvaturas em razão da dimensão no plano e assim como os elementos de viga de Euler-Bernoulli, elementos de casca de Kirchhoff requerem continuidade C^1 do campo de deflexão devido à presença de segundas derivadas da deflexão, tornando a implementação por elementos finitos mais complexa e menos satisfatória.

Em relação às placas/cascas laminadas, a teoria clássica produz resultados insatisfatórios se a rigidez no plano for significativamente maior do que a rigidez transversal, porque podem ocorrer deformações de cisalhamento transversais relativamente altas que não são contabilizadas nas hipóteses de Kirchhoff-Love.

2.2.2 Teoria de Reissner-Mindlin

A teoria de cascas de Reissner-Mindlin, também conhecida como teoria da deformação por cisalhamento de primeira ordem, é uma extensão da teoria clássica das cascas que inclui alguns dos efeitos das deformações transversais negligenciadas. Como na teoria clássica, ela desconsidera os efeitos das deformações normais transversais, mas explica as deformações de cisalhamento transversais, permitindo que a normal gire. Assim, as duas primeiras hipóteses da teoria de Kirchhoff permanecem as mesmas, e a terceira é alterada como se segue

- (3) Retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após sua deformação.

O campo de deslocamentos para a teoria de Reissner-Mindlin é dado por:

$$u'(x', y', z') = u'_0(x', y') - z'\theta_{x'}(x', y') \quad (2.2a)$$

$$v'(x', y', z') = v'_0(x', y') - z'\theta_{y'}(x', y') \quad (2.2b)$$

$$w'(x', y', z') = w'_0(x', y') \quad (2.2c)$$

Apesar de suas deficiências teóricas a teoria de Reissner-Mindlin é amplamente utilizada na engenharia para determinar o comportamento de placas e cascas. Ao contrário da teoria clássica, esta teoria fornece resultados satisfatórios em deslocamentos e tensões coplanares em cascas semi-espessas. Como os graus de liberdade u'_0 , v'_0 , w'_0 , $\theta_{x'}$ e $\theta_{y'}$ (Figura 2.3) são independentes entre si, a implementação computacional da teoria de Reissner-Mindlin é mais fácil em relação a teoria de cascas de Kirchhoff-Love, pois requer apenas continuidade C^0 , o que simplifica consideravelmente a construção de elementos finitos.

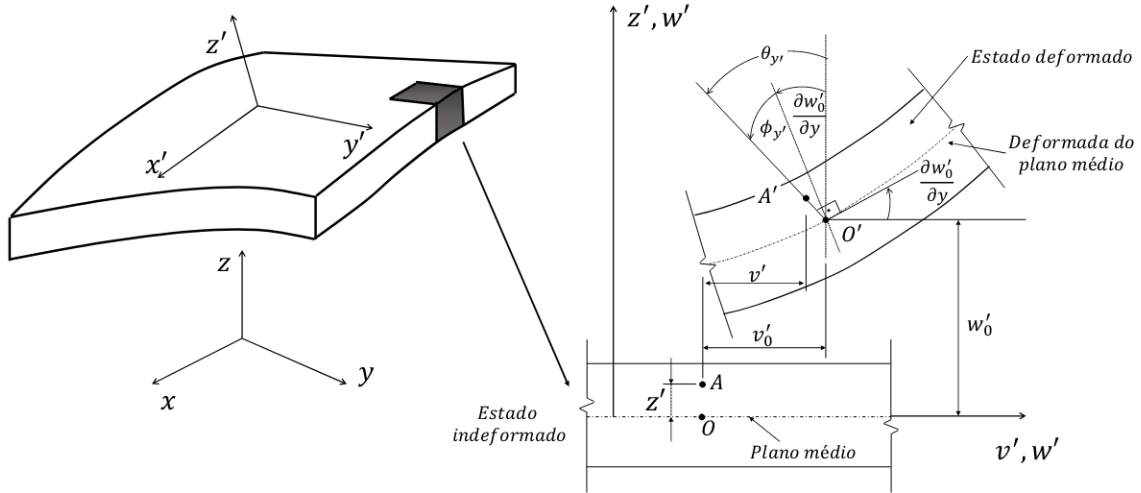


Figura 2.3: Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de Reissner-Mindlin

As principais desvantagens associadas a teoria de cascas de Reissner-Mindlin devem-se ao fato das suposições básicas empregadas excluirmos os efeitos das deformações normais transversais, restringindo sua aplicação à problemas de pequenas deformações. Computacionalmente, a principal desvantagem da teoria está relacionada ao fenômeno de travamento (*locking*) por rigidez excessiva em placas finas.

2.2.3 Teorias de ordem superior

Vários autores propuseram teorias de ordem superior (Schmitd, 1977, Reddy e Chandrasekhara, 1985, Reddy, 1990, Kant e Kommineni, 1992, 1994, Arciniega e Reddy, 2005, Trinh e Jun, 2021) para superar as limitações das teorias clássica e de primeira ordem de cascas/placas na tentativa de se obter uma teoria capaz de produzir uma variação

correta da solução dos deslocamentos e tensões ao longo da espessura (Mendonça, 2019). Essas teorias são mais precisas do que a teoria de primeira ordem, uma vez que essa é capaz de representar apenas variações lineares para a distribuição dos deslocamentos, provendo apenas resultados aproximados. As teorias de ordem superior buscam trabalhar as hipóteses cinemáticas para que não se restrinjam a uma variação linear dos deslocamentos coplanares, tomando uma distribuição não linear através da espessura (Figura 2.4), buscando representar o empenamento da seção transversal na configuração deformada.

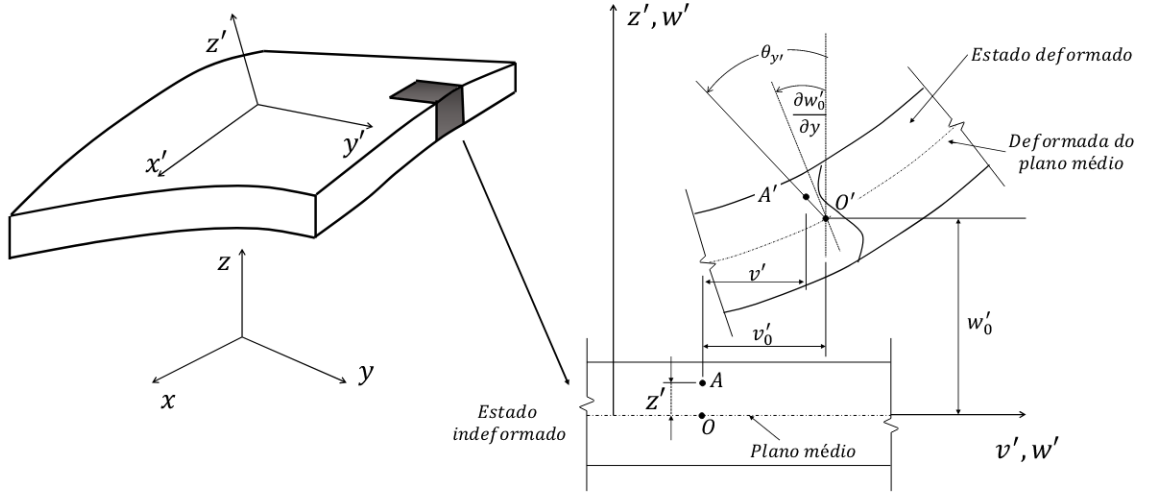


Figura 2.4: Deslocamento de um ponto na casca. Teoria de ordem superior

Proposta por Kant e Kommineni (1994) para análise não linear de cascas, a teoria C^0 de terceira ordem com termos quadráticos é baseada na expansão:

$$u'(x', y', z') = u'_0(x', y') + z'\theta_{x'}(x', y') + z'^2\theta_{2x'}(x', y') + z'^3\theta_{3x'}(x', y') \quad (2.3a)$$

$$v'(x', y', z') = v'_0(x', y') + z\theta_{y'}(x', y') + z'^2\theta_{2y'}(x', y') + z'^3\theta_{3y'}(x', y') \quad (2.3b)$$

$$w'(x', y', z') = w'_0(x, y) \quad (2.3c)$$

A teoria é obtida a partir da multiplicação dos termos de z^n por rotações de ordem superior θ_n utilizando apenas funções de continuidade C^0 . Apesar da teoria descrita aumentar o custo computacional, em decorrência do aumento do número de variáveis, esta é uma formulação diretamente implementável em elementos finitos.

2.2.4 Teoria de Marguerre Modificada

Nesta seção será apresentada a formulação para análise de cascas implementada neste trabalho. A formulação adotada é baseada na teoria de Marguerre, modificada pela introdução da hipótese de Mindlin, de que retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após

sua deformação, permitindo assim efeitos de deformação por cisalhamento transversal. Marguerre estendeu a teoria não linear de placas de von Kármán para cascas abatidas e placas com imperfeições geométricas iniciais (Crisfield, 1991).

Os deslocamentos de um ponto arbitrário do elemento são definidos através dos deslocamentos nodais da superfície de média. Estes por sua vez devem ser escolhidos de forma a garantir unicidade de valores em nós que pertencem às interfaces entre elementos, isto é, deve-se garantir a continuidade do campo. Nesta teoria, o campo de deslocamentos é dado por:

$$u'(x', y', z') = u'_0(x', y') + z'\theta_{x'}(x', y') \quad (2.4a)$$

$$v'(x', y', z') = v'_0(x', y') - z'\theta_{y'}(x', y') \quad (2.4b)$$

$$w'(x', y', z') = w'_0(x', y') \quad (2.4c)$$

onde u'_0 , v'_0 e w'_0 são os deslocamentos do ponto O' sobre o plano médio ao longo dos eixos locais x' , y' e z' . $\theta_{x'}$ e $\theta_{y'}$ são a rotação da normal $O'A'$ contida nos planos locais (Figura 2.3), que de acordo com a teoria de Reissner-Mindlin pode ser representado por

$$\theta_{x'}(x', y') = \frac{\partial w'_0}{\partial x'} + \phi_{x'} \quad (2.5a)$$

$$\theta_{y'}(x', y') = \frac{\partial w'_0}{\partial y'} + \phi_{y'} \quad (2.5b)$$

Enquanto a teoria clássica de Marguerre tem apenas três variáveis independentes, deve-se notar que a teoria apresentada tem cinco graus de liberdade $[u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y]^T$, como na teoria de Reissner-Mindlin. A modificação facilita a formulação pelo Método dos Elementos Finitos, como será discutido mais adiante.

2.2.4.1 Campo de deformações e de tensões

Considerando-se as direções ortonormais x' , y' e z' , as componentes de deformação são dadas pelo tensor de Green

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{y'} & \gamma_{x'y'} & \gamma_{x'z'} & \gamma_{y'z'} \end{pmatrix}^T = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} \quad (2.6)$$

sendo

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \dots \\ \varepsilon^b \\ \dots \\ \varepsilon^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^m \\ \dots \\ \varepsilon_L^b \\ \dots \\ \varepsilon_L^s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{NL}^m \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

onde ε_L^m , ε_L^b e ε_L^s são vetores de deformação locais lineares generalizados devido a efeitos de membrana (alongamentos), flexão (curvaturas) e cisalhamento transversal, respectivamente. A parcela ε_{NL}^m apresenta os termos não lineares das deformações no plano.

Observa-se que o vetor de deformações contém cinco componentes, uma vez que a hipótese de que a tensão normal à superfície de referência é nula permite eliminar a componente de deformação local $\varepsilon_{z'}$. A partir do campo de deslocamentos, as componentes das deformações não nulas são escritas nos eixos locais como

$$\begin{aligned} \varepsilon^m = & \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial z_0}{\partial x'}\right) \\ \left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)\left(\frac{\partial z_0}{\partial y'}\right) \\ \left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial z_0}{\partial y'}\right) + \left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)\left(\frac{\partial z_0}{\partial x'}\right) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\varepsilon^b = z \begin{Bmatrix} k_{x'} \\ k_{y'} \\ k_{x'y'} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \\ -\frac{\theta_{x'}}{\partial y'} \\ \left(\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'}\right) \end{Bmatrix} \quad (2.8b)$$

$$\varepsilon^s = \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} + \theta_{y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} - \theta_{x'} \end{Bmatrix} \quad (2.8c)$$

Considerando as condições planas de tensão nos eixos locais, a equação constitutiva da teoria da elasticidade clássica permite que a seguinte relação entre tensão-deformação seja escrita como:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^p \\ \sigma^s \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon^m - z\varepsilon^b \\ \varepsilon^s \end{bmatrix} = \mathbf{D}\varepsilon \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva generalizada que será definida posteriormente.

2.2.4.2 Discretização em camadas

Teorias de casca discretizadas em camadas podem ser derivadas assumindo expansões de ordem superior para o campo de deslocamento ao longo da direção da espessura ou mesmo uma distribuição linear das variáveis cinemáticas dentro de cada camada. As várias combinações de orientações, espessuras e materiais de cada camada que compõe um laminado fazem com que o comportamento deste possua características diferentes

das observadas em cada camada individual. A Figura 2.5 ilustra esta decomposição em camadas adotada aqui.

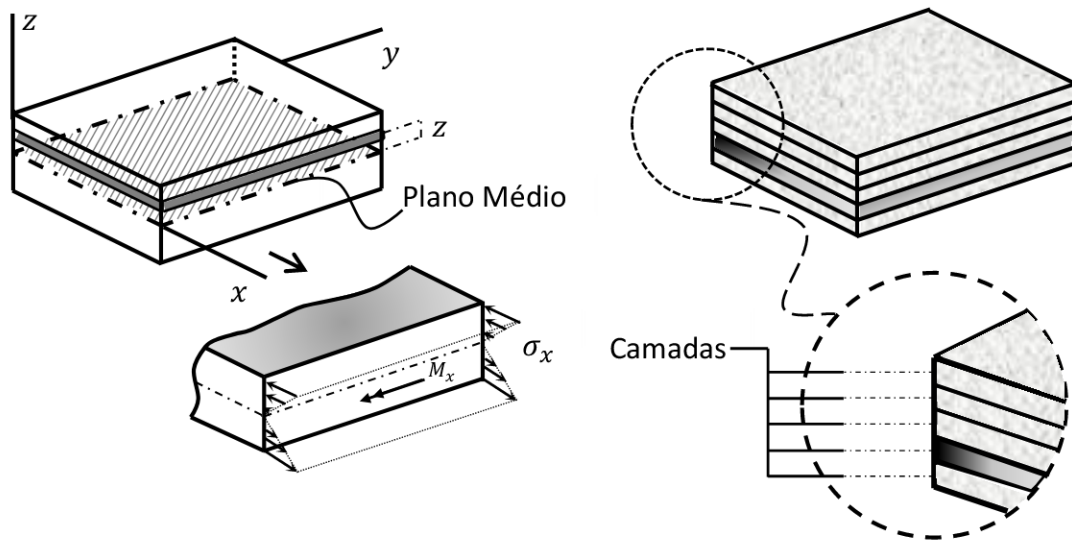


Figura 2.5: Decomposição em camadas da espessura da casca.

Este método de discretização de espessura pode ser visto como uma aproximação ao longo da direção da camada correspondente. Pela subdivisão da espessura em n camadas discretas, é possível obter a variação do estado de tensão e deformação ao longo da direção local z' da casca, permitindo assim capturar as variações das propriedades do material devido a danos ou plastificação. Portanto, para realizar uma análise fisicamente não linear, cada camada deve ser analisada separadamente. A partir da contribuição de cada camada, calcula-se a rigidez dos elementos, e as tensões internas são o resultado da soma das partes das camadas.

Na análise de estruturas discretizadas em camadas, é importante modelar o comportamento do material tanto no regime elástico quanto após os primeiros sinais de falha, culminando na determinação de sua capacidade de carga. Na análise de falha de camada, podem ser adotados diferentes critérios de resistência, cada um fornecendo uma superfície de falha diferente, delimitada pela tensão limite do material.

Considerando uma casca formada por n camadas ortotrópicas, é possível simplificar a integração dos esforços ao longo da espessura decompondo-a em n pequenas áreas. Esse tipo de aproximação permite o monitoramento de tensões e deformações em cada uma dessas áreas para aproximar a resposta da seção transversal pela soma de suas contribuições.

O vetor de tensão generalizada resultante e as forças axiais (N), momentos fletores (M) e forças de cisalhamento transversais (Q) em um ponto do elemento são dadas por:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}^m \\ \dots \\ \hat{\sigma}^b \\ \dots \\ \hat{\sigma}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \\ N_{x'y'} \\ \dots \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{x'y'} \\ \dots \\ Q_{x'} \\ Q_{y'} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma^p \\ \dots \\ z' \sigma^p \\ \dots \\ \sigma^s \end{Bmatrix} dz' = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma^p \\ \dots \\ z' \sigma^p \\ \dots \\ \sigma^s \end{Bmatrix} dz' = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}^m \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}^b \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}^s \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

As componentes das tensões ou das deformações de uma camada são os elementos básicos necessários para a análise da resistência da casca. O processo de análise de tensões nas camadas está sintetizado no fluxograma da Figura 2.6.

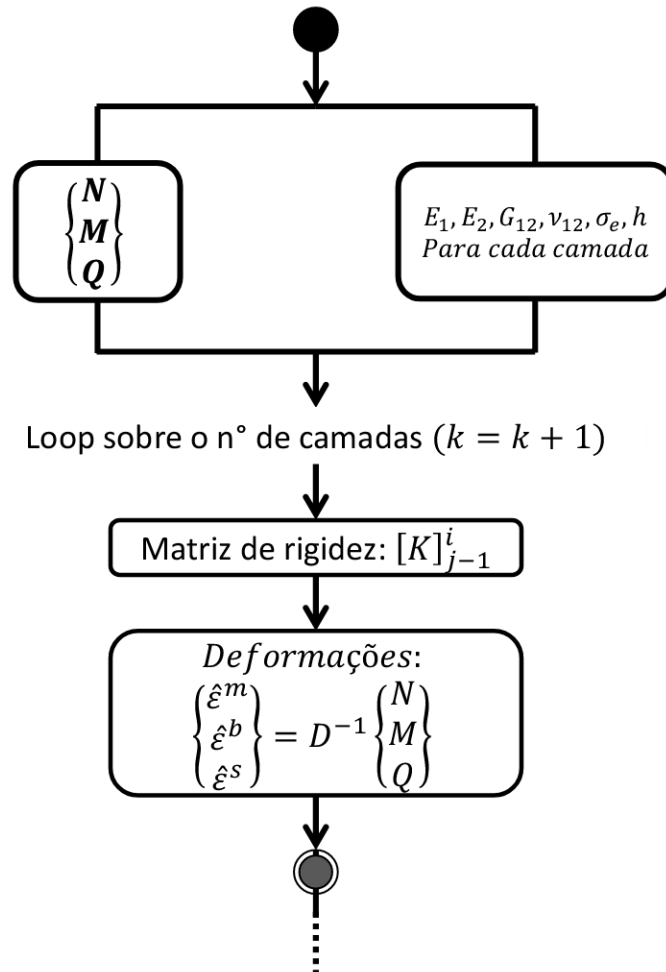


Figura 2.6: Fluxograma para análise de tensão nas camadas.

A matriz constitutiva generalizada é composta por quatro submatrizes, $\mathbf{D}^m$, $\mathbf{D}^b$, $\mathbf{D}^{mb}$ e $\mathbf{D}^s$ associado à membrana, flexão, acoplamento de flexão de membrana e cisalhamento, respectivamente. A modelagem é baseada na decomposição em camadas da espessura da casca. Para materiais ortotrópicos, esta matriz é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \mathbf{D}^{mb} & 0 \\ \mathbf{D}^{mb} & \mathbf{D}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} = \int_{t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^p & z' \mathbf{D}^p & 0 \\ z' \mathbf{D}^p & z'^2 \mathbf{D}^p & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{1 - \nu_{x'y'}\nu_{y'x'}} \begin{bmatrix} E_{x'} & \nu_{x'y'} E_{x'} & 0 \\ \nu_{y'x'} E_{x'} & E_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{x'y'}\nu_{y'x'}) G_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D}^s = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde E é o módulo de Young, ν , é a razão de Poisson e G é o módulo de cisalhamento dado por

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_j(1 + \nu_{ji}) + E_i(1 + \nu_{ij})} \quad (2.14)$$

Assim, deduz-se que

$$\mathbf{D}^m = \sum_{k=1}^n (D^p)^k (z'_{k+1} - z'_k) \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{D}^b = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (D^p)^k (z'^3_{k+1} - z'^3_k) \quad (2.15b)$$

$$\mathbf{D}^{mb} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (D^p)^k (z'^2_{k+1} - z'^2_k) \quad (2.15c)$$

$$\mathbf{D}^s = \frac{5}{6} \sum_{k=1}^n (D^s)^k (z'_{k+1} - z'_k) \quad (2.15d)$$

Se as propriedades do material forem simétricas em relação ao plano médio, ou se o material é homogêneo, então $\mathbf{D}^{mb} = 0$. Dessa forma, cada um dos esforços pode ser calculado de forma desacoplada a partir de suas correspondentes deformações generalizadas. Assim, as forças axiais resultantes locais (N), momentos fletores (M) e forças de cisalhamento transversais (Q) do elemento são

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{x'} \\ \mathbf{N}_{y'} \\ \mathbf{N}_{x'y'} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n (D^p)^k (z'_{k+1} - z'_k) \varepsilon^k \quad (2.16)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{x'} \\ \mathbf{M}_{y'} \\ \mathbf{M}_{x'y'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (D^p)^k \left(z'_{k+1}{}^3 - z'_k{}^3 \right) \varepsilon^k \quad (2.17)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{x'z'} \\ \mathbf{Q}_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{5}{6} \sum_{k=1}^n (D^s)^k \left(z'_{k+1} - z'_k \right) \gamma^k \quad (2.18)$$

É importante ressaltar que a inclusão da espessura da casca nas expressões anteriores decorre do fato de que a matriz constitutiva dos elementos apresentados estabelece uma relação direta entre as deformações definidas pela Equação [2.7](#) e os esforços resultantes (momentos, cortantes e normais).

CAPÍTULO 3

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Neste capítulo, serão apresentados os aspectos teóricos relevantes do Método dos Elementos Finitos Generalizados utilizado nas simulações de problemas de cascas. Será abordada a formulação do método e apresentada a nomenclatura que será utilizada ao longo do texto, conforme proposto por Barros (2002).

É importante ressaltar a existência de vários outros métodos capazes de tratar numericamente os modelos de cascas, como o Método dos Elementos Finitos convencional, o Método das Diferenças Finitas, os Métodos Sem Malha e o Método dos Elementos de Contorno. No entanto, a escolha pelo MEFG se justifica devido à sua menor propensão a ter seus resultados influenciados por distorções da malha, tornando sua aplicação adequada, principalmente, a problemas com não linearidade geométrica.

3.1 MEFG

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), proposto de forma independente por Babuska *et al.* (1994), e Duarte e Oden (1995, 1996), pode ser compreendido como uma variação ou forma não convencional do Método dos Elementos Finitos, responsável por estabelecer uma conexão deste com os métodos sem malha desenvolvidos na década de 1990 (Barros, 2002). Embora seja um método relativamente recente se comparado a outros métodos numéricos consolidados, como o MEF e o MEC, já foram realizados diversos estudos na área de cascas utilizando o MEFG.

A formulação do MEFG incorpora características importantes dos métodos sem malha, como o enriquecimento proposto através das famílias de Nuvens-hp (Duarte, 1996). Isso resulta em uma maior flexibilidade na aproximação, em comparação com o MEF, garantindo ao MEFG certa independência da malha de elementos finitos, tornando-o menos propenso a sofrer os efeitos negativos da distorção da malha (Barros, 2002).

A estratégia do MEFG, visando aprimorar a análise de problemas nos quais a incorporação de funções especiais (contendo singularidades, por exemplo) confere vantagens significativas, está baseada no uso da Partição da Unidade (PU) associada a um conjunto

de elementos finitos. A escolha das funções de PU depende do tipo de problema a ser analisado (Alves, 2012). O emprego das funções convencionais do MEF (como as funções de Lagrange) como funções de PU facilita a aplicação do MEFG pois, de forma diferente dos métodos sem malha, verifica diretamente as condições de contorno e garante estabilidade ao problema analisado (Barros, 2002). Aplicando-se as funções de forma convencionais, forma-se a PU, assim definida pois para qualquer ponto do domínio do problema de n pontos nodais, tem-se:

$$\sum_j^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.1)$$

A discretização do domínio do problema no MEFG é realizada através de nuvens de elementos, ω_j , definidas como as uniões de elementos finitos que partilham um mesmo nó (x_j) no domínio, conforme representado na Figura 3.1(a). O conjunto de funções interpoladoras de Lagrange associadas ao nó x_j define a função $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$. No MEFG, o conjunto de funções $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ constituem uma alternativa para compor a função de PU, que enriquecida define a função de forma, como pode ser observado na Figura 3.1(b).

O conjunto $\mathcal{I}_i$ de funções de enriquecimento, denominadas funções de aproximação local (Figura 3.1(c)), é composto por q_j funções linearmente independentes e são definidas para cada nó x_j . As funções de aproximação local são específicas para um determinado tipo de problema e podem ser escolhidas a partir de um conhecimento prévio da solução (Alves, 2012).

$$\mathcal{I} \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} = \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad (3.2)$$

com $L_{ji}(x) = 1$. As funções presentes na Equação 3.2 podem ser tanto polinomiais quanto não polinomiais, sendo escolhidas de acordo com a natureza do problema em análise. A forma como o enriquecimento é aplicado pode variar entre os elementos, enquanto ainda se alcança uma aproximação contínua, observando o critério de conformidade entre os elementos.

Ao final do processo, a função de forma $\phi_j i_{i=1}^q$ do MEFG (Figura 3.1(d)), associada ao nó x_j , é construída através do enriquecimento da função de PU pelos componentes do conjunto $\mathcal{I}_i$. Assim, $\phi_j i_{i=1}^q$ é obtida através do produto das funções básicas que formam a PU pelas funções de enriquecimento.

$$\{\phi_{ji}^q\}_{i=1} = \mathcal{N}_j(x) \times L_{ji}(x)_{i=1}^q \quad (3.3)$$

sem somatório em j .

Uma aproximação genérica para os deslocamentos, $\tilde{u}(x)$, pode ser obtida pela seguinte combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(x) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{j=2}^q L_{ji}(x)(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ij} \right\} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{u}_j$ é o parâmetro nodal convencional, associado à $\mathcal{N}_j(x)$, e $\mathbf{b}_{ij=2}^q$ são os parâmetros nodais adicionais, associados às $\mathcal{N}_j(x) \cdot L_{ij}(x)$ do MEFG.

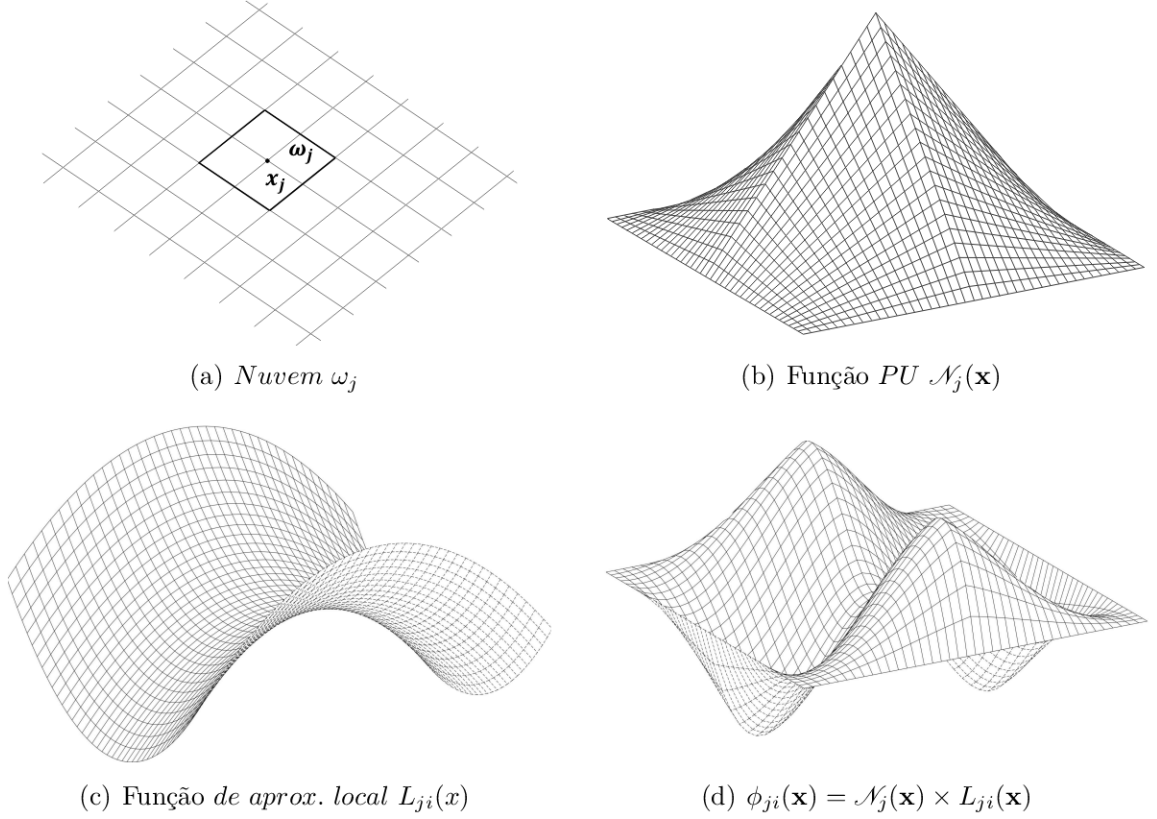


Figura 3.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j via MEFG (Barros, 2002).

Assim, uma função produto que apresenta as características aproximadoras da função de aproximação local, ao mesmo tempo que herda o suporte compacto da PU, é obtida como resultado final do processo (Alves, 2012).

Uma implicação decorrente dessa estratégia de enriquecimento se torna proeminente, basicamente, quando uma PU polinomial é enriquecida com monômios. Nesse contexto, o conjunto de funções 3.2 torna-se linearmente dependente, e consequentemente o sistema de equações passa a exibir uma matriz de rigidez semi-definida positiva, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido.

A ocorrência de uma matriz singular e suas implicações no processo de solução, no entanto, não inviabilizam a utilização do MEFG. Para lidar com a questão da singularidade é possível adotar as abordagens numéricas propostas por Stroubolis *et al.* (2000), que incluem um método iterativo conhecido como procedimento de Babuška. Segundo Barros (2002), esse é um preço razoável a ser pago quando comparado ao potencial e aos benefícios oferecidos pelo MEFG. Isso porque, além da facilidade com que o enriquecimento pode ser realizado, é possível introduzir novas funções na aproximação conforme o tipo de problema e aplicação desejados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR

Neste capítulo, são apresentados os principais aspectos teóricos referentes à formulação utilizada na análise geometricamente não linear.

4.1 Introdução à não Linearidade Estrutural

A previsão de uma resposta linear associada a um problema estrutural baseia-se na suposição de que os deslocamentos são pequenos e as condições de contorno permanecem inalteradas durante a aplicação das cargas. O sistema de equações de equilíbrio é da forma.

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R} \quad (4.1)$$

Em uma análise linear a resposta de deslocamento $\mathbf{U}$ é uma função linear do vetor de carregamentos aplicado $\mathbf{R}$. Isto é, se as cargas forem $\alpha\mathbf{R}$ em vez de $\mathbf{R}$ - onde α é uma constante - os deslocamentos correspondentes são $\alpha\mathbf{U}$. Quando este não é o caso, tem-se uma relação não linear entre cargas e deslocamentos.

A discussão das suposições básicas usadas em uma análise linear define o que se quer dizer com uma análise não linear e também sugere como categorizar as diferentes análises não lineares: (i) física (ou material) e (ii) geométrica.

De modo geral, na análise do comportamento fisicamente não linear dos materiais, considera-se que os mesmos são homogêneos, elásticos e isotrópicos, admitindo-se que, com aplicação de carga e consequentes deformações, eles se tornam heterogêneos (deixando de ser elásticos e isotrópicos) pela deterioração nas regiões mais solicitadas (Pitangueira, 1998). A não linearidade material caracteriza-se então pela relação não linear entre a tensão e a deformação, representada na lei constitutiva do material. Dessa forma, os deslocamentos e tensões envolvidas na análise são infinitesimalmente pequenos. Por conseguinte, as denominadas medidas de tensão e deformação de engenharia habituais podem ser empregadas na descrição da resposta.

A não linearidade geométrica deriva de considerações puramente geométricas como por exemplo uma relação deformação-deslocamento não linear, que por sua vez ocorre em

análises onde as grandes rotações e deslocamentos devem ser considerados. A Tabela 4.1 apresenta uma classificação proposta por Bathe (2006) que é usada de maneira conveniente porque considera separadamente efeitos não lineares materiais e cinemáticos.

Tabela 4.1: Classificação das análises não lineares. Adaptado de (Bathe, 2006)

Tipo de análise	Descrição	Formulação utilizada	Medidas de tensão e deformação
Não linearidade do material	Deslocamentos e deformações infinitesimais. A relação tensão deformação é não linear	Não Linearidade do material	Tensões e deformações de engenharia
Grandes deslocamentos, Grandes rotações e pequenas deformações	Os deslocamentos e rotações de fibras são grandes, mas as extensões da fibras e as mudanças de ângulo entre as fibras são pequenas; A relação tensão-deformação pode ser linear ou não linear.	Lagrangiana Total, Lagrangiana Atualizada, Co-rotacional, Posicional	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, Tensor de deformação de Green-Lagrange, tensor de tensão de Cauchy, tensor de deformação de Almansi
Grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações	Extensões de fibra e mudanças de ângulo entre fibra são grandes, deslocamentos da fibra e rotações também podem ser grandes; A relação tensão-deformação pode ser linear ou não linear	Lagrangiana Total, Lagrangiana Atualizada, Posicional	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, Tensor de deformação de Green-Lagrange, tensor de tensão de Cauchy, Deformação logarítmica

Em uma análise real, é necessário decidir se um problema é do tipo linear ou não linear e, se não linear, qual a não linearidade envolvida, pois isso determina qual formulação será usada para descrever a situação física (Bathe, 2006). Inversamente, pode-se dizer que, com o uso de uma formulação específica, é assumido um modelo da situação física real e a escolha da formulação faz parte do processo de modelagem completo. O uso da formulação de grandes deformações mais geral será capaz de representar qualquer modelo de maneira “correta”. Contudo, o uso de uma formulação mais restritiva pode ser computacionalmente mais eficaz e também pode fornecer mais informações sobre a previsão de resposta.

Segundo [Bathe \(2006\)](#), a formulação Lagrangiana é particularmente adequada para a análise não linear incremental iterativa de sólidos, em que o interesse é a trajetória de deformações de cada ponto do sólido durante o processo de carregamento. A descrição Lagrangiana mede as mudanças de configuração nas estruturas a partir de um referencial fixo no espaço. São utilizadas coordenadas materiais associadas ao corpo antes de ser deformado e, portanto, todas as operações, inclusive as derivadas, são realizadas a partir de uma posição conhecida.

Na chamada descrição Lagrangiana total (LT) as variáveis estáticas e cinemáticas são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a configuração inicial do corpo. Na formulação Lagrangiana atualizada (LA) as variáveis são formuladas em relação à última configuração deformada conhecida, ou seja, a configuração é mantida fixa durante o processo iterativo e uma vez atingido o equilíbrio, todas as variáveis envolvidas no problema são atualizadas definindo uma nova configuração de equilíbrio. Ambas as formulações incluem os efeitos cinemáticos não lineares devido aos grandes deslocamentos e às grandes deformações, no entanto, são as relações constitutivas assumidas quem dirão se o comportamento devido às grandes deformações está bem modelado ([Fonseca, 2008](#)).

A descrição corrotacional (CR) tem como princípio básico a separação do movimento do corpo em movimentos de corpo rígido e de deformações ([Crisfield, 1991](#)). A formulação tem raízes antigas e surgiu de estudos de Cauchy que envolviam pequenas deformações acompanhadas de grandes movimentos de corpos rígidos ([Truesdell, 1966](#)). A cinemática corrotacional tem se destacado principalmente frente às formulações Lagrangianas por sua eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e grandes deformações e ainda pela facilidade no estudo de não linearidades físicas em conjunto com não linearidades geométricas. Entretanto, essa descrição não tem se mostrado eficiente em problemas que envolvem grandes deformações plásticas, pois a complexidade das formulações matemáticas, devido à dupla configuração do movimento, não é compensada pelos benefícios da formulação ([Menin, 2006](#)).

A formulação Posicional (FP) é a mais recente das formulações utilizadas na análise não linear de estruturas tendo sido apresentada originalmente por [Coda \(2003\)](#) para casos estáticos e elásticos. [Greco \(2004\)](#) apresentou uma formulação exata para o tratamento de estruturas reticuladas no plano, considerando grandes deslocamentos e grandes rotações. Entretanto, a formulação posicional ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento das demais formulações sendo, portanto, um grande campo a ser explorado.

Todas as formulações descritas aqui consideram todos os efeitos cinemáticos não lineares devido a grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações, mas a modelagem apropriada do comportamento em grandes deformações depende das relações constitutivas especificadas. A vantagem de se usar uma formulação em detrimento a outra reside na sua maior eficiência computacional.

4.1.1 Descrição do Movimento no Meio Contínuo

A descrição do movimento de um sólido inicia-se com a divisão da trajetória de carregamento em diferentes configurações de equilíbrio. Como mostrado na Figura 4.1, são definidas duas configurações do sólido em termos de um sistema de coordenadas: a configuração inicial indeformada (C^0) e a configuração deformada atual (C).

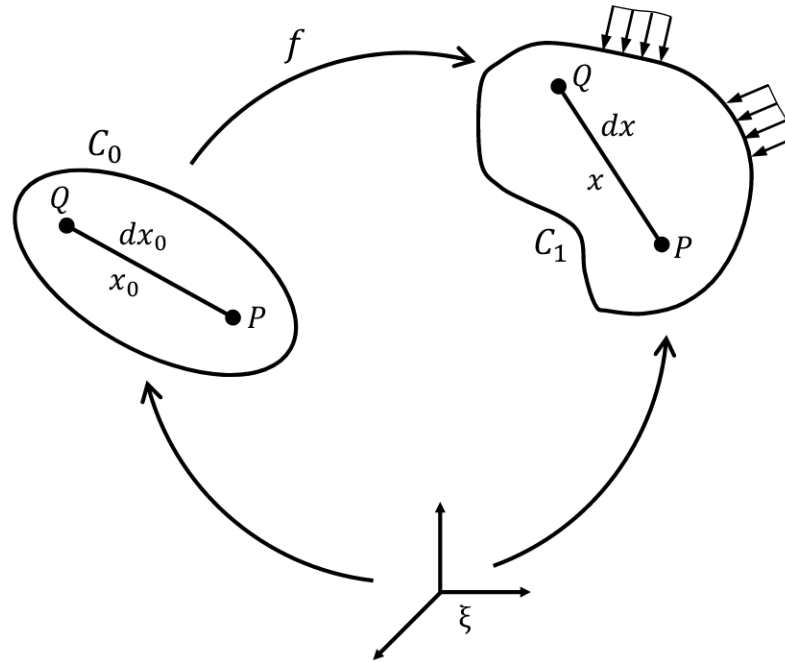


Figura 4.1: Deslocamento do sólido no espaço tridimensional e mapeamento das configurações indeformada e deformada.

A relação entre as coordenadas inicial e atual dos pontos materiais de um corpo submetido a uma mudança de posição, é dada aqui pelo campo vetorial de deformação - ou mudança de forma - representado por $\mathbf{f}$. Assim, admitindo-se que as mudanças são contínuas, a mudança de forma $\mathbf{f}$ é empregada para mapear um sólido que sai da configuração C^0 para C devido a alguma ação física (Figura 4.1).

Denominam-se as coordenadas de um ponto material arbitrário P dentro do sólido nas configurações indeformada e deformada por (x_1^0, x_2^0, x_3^0) e (x_1, x_2, x_3) , em que o subscrito direito se refere ao eixos coordenados. Portanto, as coordenadas do ponto P em C^0 são escritas como:

$$x = f(x^0) \quad (4.2)$$

Parametrizando as configurações inicial e final por meio dos valores nodais e de um espaço auxiliar adimensional representado por x_i , a função de mudança de forma pode ser dada por (Coda e Paccola, 2007):

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_0^{-1}) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{f}_1 = x(\xi) \quad \text{ou} \quad (f_1)_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.3b)$$

$$\mathbf{f}_0 = x^0(\xi) \quad \text{ou} \quad (f_0)_i = x_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.3c)$$

onde $\mathbf{f}_0$ e $\mathbf{f}_1$ são, respectivamente, os mapeamentos das posições inicial e atual. A função mudança de forma total entre as posições inicial e atual, representada por $\mathbf{f}$, é obtida indiretamente com uso das expressões [4.3](#).

Para que se possa quantificar e analisar a mudança de configuração de um corpo submetido a uma ação física (carregamento), são usadas as medidas de deformação. Definida a notação para as coordenadas, pode-se passar para a definição de algumas medidas de deformações e tensões que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

4.1.2 Medidas de Deformações e Tensões

Diversos tensores de deformações e tensões podem ser empregados no estudo da não linearidade geométrica de sólidos. Deve-se então, estabelecer um procedimento para análise geral desses tensores via método de elementos finitos, assim serão considerados o gradiente da função mudança de configuração, a deformação de Green-Lagrange e as tensões de Cauchy e de Piola-Kirchhoff. Demais medidas de deformação e tensão que sejam necessárias a este estudo, como a deformação logarítmica, serão descritas posteriormente.

4.1.2.1 Gradiente de Deformação

O tensor gradiente da função mudança de configuração (ou gradiente de deformação) permite que as posições relativas de duas partículas vizinhas depois da deformação sejam descritas em termos de suas relativas posições materiais antes da deformação. O gradiente pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^0} \quad (4.4)$$

ou

$$F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j^0} \quad (4.5)$$

onde F_{ij} é denominado Tensor Gradiente Mudança de Configuração ou Tensor Gradiente de deformação. Expandindo F_{ij} , tem-se:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1^0 & \partial x_1 / \partial x_2^0 & \partial x_1 / \partial x_3^0 \\ \partial x_2 / \partial x_1^0 & \partial x_2 / \partial x_2^0 & \partial x_2 / \partial x_3^0 \\ \partial x_3 / \partial x_1^0 & \partial x_3 / \partial x_2^0 & \partial x_3 / \partial x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial \xi_1 & \partial f_1 / \partial \xi_2 & \partial f_1 / \partial \xi_3 \\ \partial f_2 / \partial \xi_1 & \partial f_2 / \partial \xi_2 & \partial f_2 / \partial \xi_3 \\ \partial f_3 / \partial \xi_1 & \partial f_3 / \partial \xi_2 & \partial f_3 / \partial \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

O tensor gradiente pode representar movimentos de corpo rígido locais e globais, rotações em torno de um eixo e alongamentos ou extensões numa ou mais direções. O gradiente avalia a mudança de posição em cada ponto determinando a maneira pela qual um segmento infinitesimal de linha na posição inicial irá se transformar no seu correspondente segmento infinitesimal na posição atual, isto é,

$$dx = \mathbf{F}dx_0 \quad (4.7)$$

onde dx_0 é um segmento infinitesimal de linha na configuração indeformada e dx é lugar geométrico desse segmento na configuração deformada, após sofrer a transformação descrita por $\mathbf{F}$.

Tendo em vista que não há perda do material e que a mudança de configuração só é fisicamente possível se $\mathbf{F}dx^0 \neq 0 \forall dx^0 \neq 0$, o tensor $\mathbf{F}$ deve ser não singular, ou seja

$$J = \det(F) \neq 0 \quad (4.8)$$

onde J é o jacobiano da mudança de configuração.

4.1.2.2 Mudança de Volume

Grande parte das equações de equilíbrio descritas nas formulações cinemáticas a seguir envolvem integrais sobre áreas e volume. Com o efeito da deformação do corpo, é necessário avaliar como isso afeta sua área e volume. Assim, inicialmente defini-se o volume e a superfície do elemento nas configurações deformada (C) e de referência (C_0). Considerando três segmentos lineares não-coplanares dx_1^0 , dx_2^0 e dx_3^0 que formam um paralelepípedo no ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{x}^0$ na configuração de referência do corpo (Figura 4.2), portanto:

$$d\mathbf{x}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_i^0 \quad (4.9)$$

Os vetores $d\mathbf{x}_i$ não são necessariamente paralelos ou têm o mesmo comprimento de $d\mathbf{x}_i^0$. Assumindo que $\{d\mathbf{x}_1^0, d\mathbf{x}_2^0, d\mathbf{x}_3^0\}$ sejam positivamente orientados para que o produto escalar $d\mathbf{x}_1^0 \cdot d\mathbf{x}_2^0 \cdot d\mathbf{x}_3^0 > 0$, o volume do paralelepípedo pode ser obtido por:

$$dV_0 = d\mathbf{x}_1^0 \cdot d\mathbf{x}_2^0 \times d\mathbf{x}_3^0 = (\mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{n}_2^0 \times \mathbf{n}_3^0) dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{n}_i^0$ é o vetor unitário na direção $d\mathbf{x}_i^0$. O volume na configuração deformada é dado por

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3 = [(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1^0) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2^0) \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_3^0)] dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 \\ &= \det[\mathbf{F}] dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 = J dV_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assumindo que os volumes dos elementos sejam positivos, tem-se $J > 0$ e a orientação

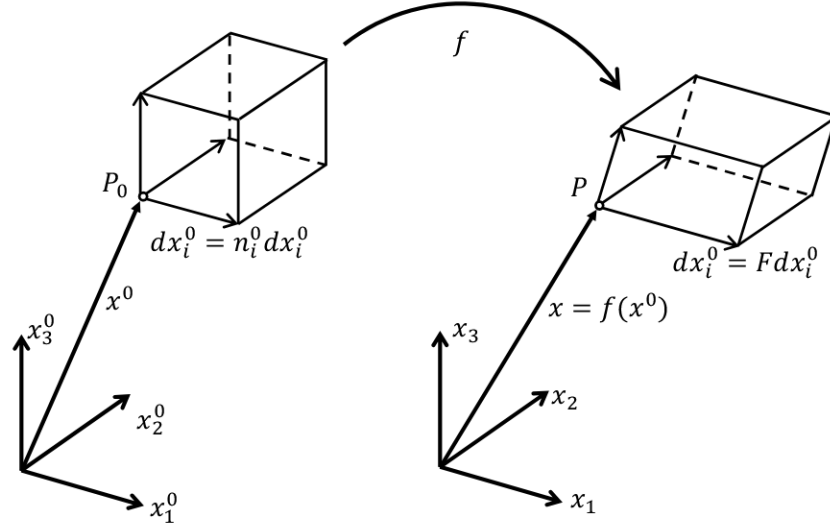


Figura 4.2: Transformação de um elemento de volume através do mapeamento. Adaptado de [Belo \(2009\)](#).

relativa dos segmentos é preservada após a deformação. Assim, o determinante do gradiente de deformação passa a ter um significado físico, representando a razão local do volume na configuração deformada com o volume na configuração referência do elemento.

4.1.2.3 Tensor de Deformações de Green-Lagrange

Uma mudança de forma ou de configuração é dita de corpo rígido quando o gradiente [4.4](#) satisfaz a relação:

$$B_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \delta_{ij} \quad (4.12)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecher e B_{ij} é o tensor de deformação de Cauchy-Green direito. Para os casos em que a função mudança de forma $\mathbf{f}$ representa apenas deslocamento de corpo rígido (ou seja, indeformabilidade do material).

Uma das medidas utilizadas para medir a intensidade da mudança de forma de um corpo é o tensor de deformações de Green-Lagrange. Considerando uma linha PQ de comprimento dx^0 na configuração original que passou a ter comprimento dx na configuração atual (Figura [4.1](#)), o tensor de deformações de Green-Lagrange do sólido na configuração deformada em relação à configuração inicial, ϵ , pode ser definido por:

$$2\epsilon dx_i^0 dx_j^0 = (dx)^2 - (dx^0)^2 \quad (4.13)$$

em que

$$(dx)^2 = dx_i dx_i \quad (4.14a)$$

$$(dx^0)^2 = dx_i^0 dx_i^0 \quad (4.14b)$$

Como

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} dx_j^0 \quad (4.15)$$

pode-se escrever

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} dx_i^0 dx_j^0 = F_{ki} F_{kj} dx_i^0 dx_j^0 \quad (4.16)$$

Substituindo as equações 4.12, 4.14b e 4.16 em 4.13, obtém-se a seguinte expressão para o tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (B_{ij} - \delta_{ij}) \quad (4.17)$$

4.1.2.4 Tensor de Tensões de Cauchy

O tensor de tensões de Cauchy se caracteriza pelo fato de ser sempre expresso em relação à configuração em que a tensão ocorre, por isso também é chamado de tensor de tensão real ou simplesmente tensor de tensões. Para a interpretação do significado físico das tensões de Cauchy, considere-se a vizinhança, de um ponto genérico P (no formato de um paralelepípedo infinitesimal retangular), como visto na Figura 4.3.

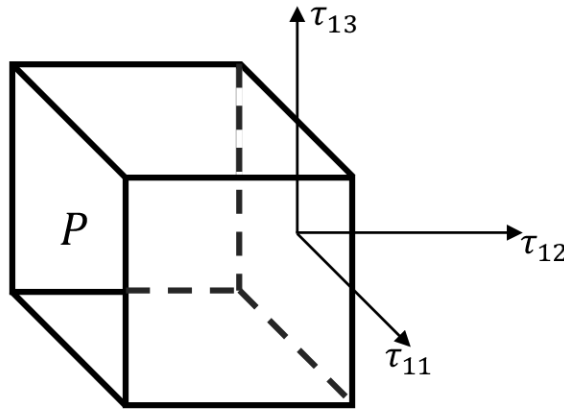


Figura 4.3: Definição do Tensor de Tensões de Cauchy.

As tensões de Cauchy τ_{ij} são definidas como as forças internas por unidade de área atuantes na direção normal e nas duas direções tangenciais de cada superfície lateral do paralelepípedo. Considerando-se um sistema ortogonal de eixos coordenados como referência para os pontos do sólido deformável, o tensor τ pode ser representado por:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.1.2.5 Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff

Em contraste com o tensor de tensões de Cauchy, os tensores de tensão de Piola-Kirchhoff são utilizados para representar a tensão referida à configuração inicial não deformada. Apesar de ser um conceito físico natural, o tensor de tensões de Cauchy, não se mostra conveniente para uma análise não linear, em que é necessário relacionar tensões a deformações (Fonseca, 2008). Em um regime de grandes deformações, as mesmas são referidas à configuração inicial de um meio contínuo, deve-se então definir as tensões em relação a essa mesma configuração, sendo em geral requerido o uso dos tensores de Piola-Kirchhoff.

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff é o conjugado energético do tensor de deformações de Green-Lagrange e relaciona as forças internas por unidade de área atuantes na direção normal e nas duas direções tangenciais sobre a configuração deformada. O segundo tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor tensão de Cauchy podem ser relacionados por:

$$S_{ij} = \frac{\rho^0}{\rho} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_p} \frac{\partial x_j^0}{\partial x_q} \tau_{pq} \quad (4.19a)$$

$$\tau_{ij} = \frac{\rho}{\rho^0} \frac{\partial x_i}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_j}{\partial x_q^0} S_{pq} \quad (4.19b)$$

onde ρ e ρ^0 representam a densidade do material nas configurações indeformada e deformada e S_{ij} é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

4.2 Formulação Lagrangiana Total

Considerando a análise de estruturas submetidas a grandes deformações, não é possível resolver o sistema de equações de equilíbrio e de compatibilidade não lineares de um corpo na configuração deformada de maneira direta. Um processo incremental-iterativo é necessário para determinar o equilíbrio da estrutura, sendo recomendado o uso do *método iterativo de Newton-Raphson*. O objetivo é avaliar as posições de equilíbrio do corpo em pontos de tempo discretos. A estratégia de solução assume que a determinação das variáveis estáticas e cinemáticas, para todos os passos de tempo, do tempo 0 ao tempo t , foram obtidas. Em seguida, o processo de solução para a próxima posição de equilíbrio necessária correspondente ao tempo $t + \Delta t$.

Ao longo das últimas décadas foram propostos diversos procedimentos para a solução de problemas não lineares, a partir da construção de trajetórias de equilíbrio, obtidas pela imposição das relações cinemáticas, condições de equilíbrio e modelo do material (Fuina, 2009). Os principais aspectos do algoritmo para solução de equações não lineares adotados são mostrados no apêndice A deste trabalho.

Tradicionalmente são empregadas na análise geometricamente não linear das estruturas as formulações Corrotacional, Lagrangiana Atualizada e Lagrangiana Total. Conforme mencionado anteriormente, a complexidade do tratamento matemático para a formulação corrotacional nos modelos elastoplásticos sob deformações finitas, que serão utilizados nesses trabalho, são maiores que os benefícios da formulação.

A formulação Lagrangiana Atualizada é baseada nos mesmos procedimentos utilizados na formulação Lagrangiana Total, mas todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração de equilíbrio anterior. Seus parâmetros nodais são atualizados a cada passo de tempo. Porém, a descrição da variável cinemática tendo como referência a configuração de equilíbrio anterior do procedimento de solução incremental-iterativa é inconsistente com o uso de funções de enriquecimento associadas às coordenadas das posições nodais da malha adotada no MEFG (Gomes *et al.*, 2020). Uma estratégia alternativa é necessária para superar tal inconsistência. Por outro lado, a formulação Lagrangiana Total, mesmo apresentando parâmetros nodais adicionais para o MEFG, é muito semelhante ao caso padrão do MEF, pois o sistema de referência é sempre a configuração inicial do corpo.

Neste cenário, este trabalho é baseado em uma formulação Lagrangiana Total devido às desvantagens da forma Lagrangiana Atualizada quando adotado o MEFG e à complexidade da formulação Corrotacional em representar regimes de grandes deformações. A abordagem Lagrangiana é usada aqui para descrever o comportamento da casca deformável na análise geometricamente não linear no contexto do MEFG.

A formulação adotada segue Bathe (2006), e é apresentada para embasar a discussão sobre características específicas da estratégia de enriquecimento do MEFG.

Para a análise incremental, é possível empregar medidas de tensão e deformação a fim de melhor representar o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Esse princípio é utilizado para expressar o equilíbrio do corpo em um instante de tempo $t + \Delta t$. Na abordagem da análise incremental Lagrangiana Total, dado o conhecimento da trajetória das deformações, é possível fazer referência à configuração inicial do corpo (no tempo 0). Portanto, temos:

$$\int_{V_0} {}_0S_{ij} \delta {}_0\varepsilon_{ij} dV_0 = W_e \quad (4.20)$$

onde S_{ij} é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, ε_{ij} é o tensor de deformações de Green-Lagrange, V_0 é o volume de referência do corpo na configuração indeformada e W_e corresponde ao trabalho virtual externo na configuração deformada. O subscrito esquerdo indica a configuração em relação à qual a grandeza é medida. Na formulação Lagrangiana Total, todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração inicial do corpo x^0 , e por essa razão, o subscrito será omito nos próximos passos.

Usando as relações para a decomposição incremental das tensões e deformações e

linearizando a Equação 4.20, obtém-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\int_{V_0} {}^tC_{ijrs}e_{rs}\delta e_{ij}dV_0 + \int_{V_0} {}^tS_{ij}\delta\eta_{ij}dV_0 = W_e - \int_{V_0} {}^tS_{ij}\delta e_{ij}dV_0 \quad (4.21)$$

onde ${}^tC_{ijrs}$ é o tensor incremental das propriedades do material na ultima configuração t aferida (indicada pelo sobrescrito a direita), ${}^tS_{ij}$ representa os valores conhecidos das tensões de Piola-Kirchhoff. e_{ij} e η_{ij} são as componentes lineares e não lineares de deformações incrementais, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (4.22a)$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (4.22b)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + {}^tu_{k,i}u_{k,j} + u_{k,i} {}^tu_{k,j} \right) \quad (4.22c)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k,i}u_{k,j}) \quad (4.22d)$$

A Equação 4.21 é empregada no cálculo do incremento de deslocamentos que irão atualizar os valores das aproximações dos deslocamentos, tensões e deformações referentes a configuração atual.

A formulação LT pode ser reescrita de modo a se obter as funções de interpolação a serem utilizadas no procedimento numérico adotado (MEF ou MEFG). Discretizando-se o problema via MEF ou MEFG, a Equação 4.21 pode ser substituída pela seguinte equação matricial:

$$\left({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (4.23)$$

onde ${}^t\mathbf{K}_L$ e ${}^t\mathbf{K}_{NL}$ são as matrizes de rigidez incrementais de deformações lineares e não lineares na ultima configuração aferida, respectivamente. $\Delta \mathbf{U}^{(j)}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais na j -ésima iteração. $\mathbf{R}$ é o vetor de forças externas aplicadas nos pontos nodais na configuração atual e ${}^t\mathbf{F}^{(j-1)}$ é o vetor de forças equivalentes às tensões nos elementos na ultima configuração aferida.

É importante mencionar que a presente técnica pode ser aplicada a qualquer medida de deformação baseada no tensor de tensões de Cauchy-Green e em qualquer relação constitutiva. A composição da matriz global e do vetor de força internas se dá pela soma dos graus de liberdade coincidentes, como nos procedimentos de MEF comuns.

4.3 Formulação discreta para cascas

Aqui é utilizada a abordagem Lagrangiana para descrever o movimento do sólido deformável na análise geometricamente não linear, seguindo a formulação proposta por Bathe (2006). O princípio básico da análise não linear utilizando a formulação do Método dos Elementos Finitos é o mesmo da análise linear. Deve-se obter as funções de inter-

polação para o elemento finito desejado e, a partir delas, calcular as matrizes necessárias para a análise.

No contexto de um elemento finito de casca sujeito a uma carga superficial $\mathbf{t}$ (um vetor que engloba as cargas distribuídas atuantes na superfície da casca, bem como os momentos distribuídos presentes nos planos xz e yz), juntamente com as cargas e momentos concentrados, representados por $\mathbf{p}_i$ (conforme ilustrado na Figura 4.4), o Princípio dos Trabalhos Virtuais é dado da seguinte forma:

$$\int_{V_0} \delta \varepsilon^T \sigma dV_0 = \int_{A_0} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} dA_0 + \sum_i \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.24)$$

onde V_0 e A_0 são o volume da casca e a área da superfície, respectivamente.

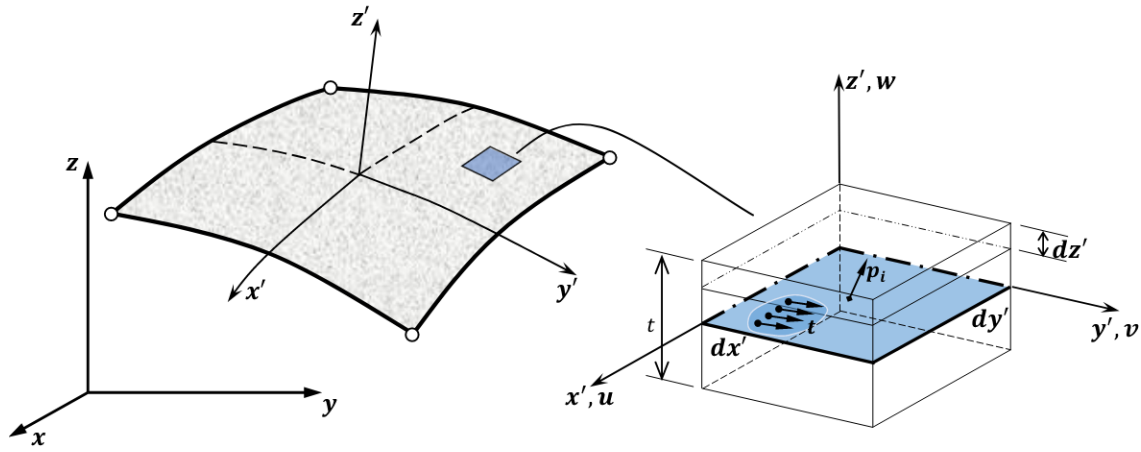


Figura 4.4: Definição dos carregamentos em um ponto da casca

O trabalho virtual interno é obtido pela soma das contribuições da membrana, flexão e cisalhamento transversal. Substituindo a Equação 2.7 na Equação 4.24, e desprezando a deformação inicial, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \delta \varepsilon^T \sigma dV_0 &= \int_{V_0} \left(\delta(\varepsilon^m)^T \sigma^p + z \delta(\varepsilon^b)^T \sigma^p + \delta(\varepsilon^s)^T \sigma^s \right) dV_0 \\ &= \int_{A_0} \left[(\delta \varepsilon^m)^T \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \sigma^p dz}_{\sigma^m} \right] dA_0 + \\ &+ \int_{A_0} \left[(\delta \varepsilon^b)^T \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \sigma^p z dz}_{\sigma^b} + (\delta \varepsilon^s)^T \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \sigma^s dz}_{\sigma^s} \right] dA_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $\sigma^p = \{\sigma_{x'} \quad \sigma_{y'} \quad \tau_{x'y'}\}$ e $\sigma^s = \{\tau_{x'z'} \quad \tau_{y'z'}\}$. Uma forma de simplificar a Equação 4.25 e reduzir o domínio de integração de três para duas dimensões é realizar a integração das

tensões através da espessura da casca. Nesse sentido, as parcelas $[\sigma^m, \sigma^b, \sigma^s]$ presentes na Equação 4.25 correspondem aos esforços resultantes ao longo da espessura da casca, conforme ilustrado na Equação 2.16. Ao efetuar a substituição desses termos pelos seus esforços equivalentes, obtém-se:

$$\int_{A_0} \delta \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA_0 = \int_{A_0} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} dA_0 + \sum_i \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.26)$$

Na teoria de Marguerre para cascas planas, todas as derivadas nas integrais da Equação 4.26 são de primeira ordem, permitindo o uso de elementos de continuidade C_0 . Pela discretização da superfície de casca, onde cada elemento está no plano local x e y , os deslocamentos locais são interpolados como

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{d}_i^{(e)} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(e)} \\ \mathbf{d}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{d}^{(e)} \quad (4.27)$$

onde, ϕ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{d}^{(e)}$ é o vetor de deslocamento local de um nó contendo os deslocamentos no plano u_0 e v_0 , o deslocamento transversal w_0 e as rotações θ_x e θ_y , mostradas na Figura 4.5.

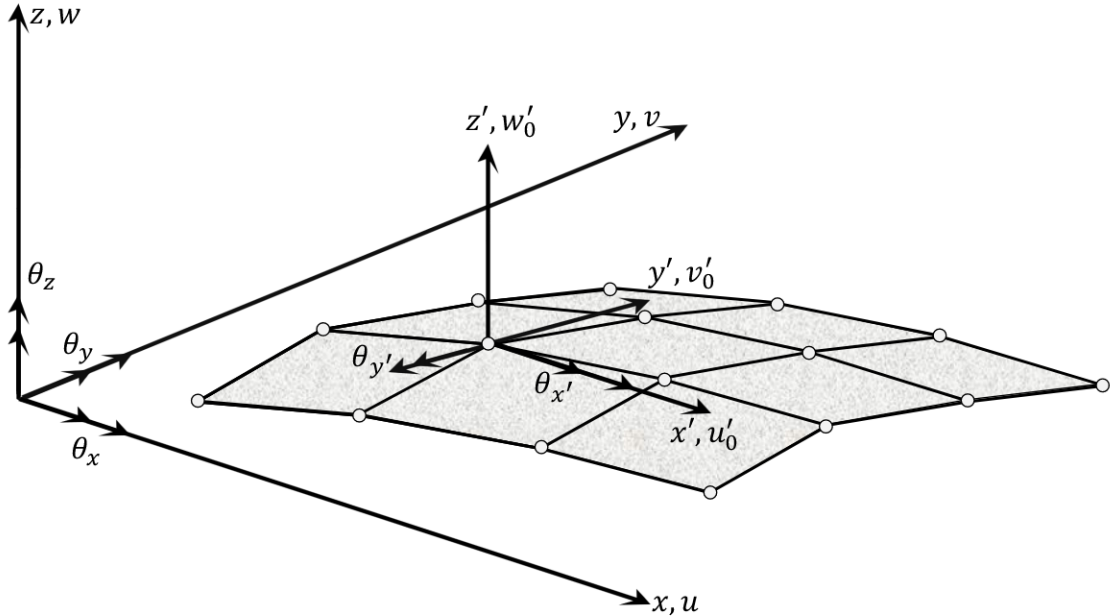


Figura 4.5: Casca discretizada com retângulos planos de 4 nós (Oñate, 2013).

Substituindo a Equação 4.27 nas Equações 2.8 para a deformação local generalizada,

resulta em

$$\varepsilon = [B_1, B_2, \dots, B_n] \begin{Bmatrix} d_1^{(e)} \\ d_2^{(e)} \\ \vdots \\ d_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}^{(e)} \quad (4.28)$$

Assim, tem-se que

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^{(e)} \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{B}$ representa as matrizes de deformação generalizadas locais para o elemento, que contêm as derivadas das funções de forma utilizadas na interpolação dos deslocamentos. Na verdade, a matriz $\mathbf{B}$ é composta por duas parcelas distintas. A primeira, $\mathbf{B}_L$, é derivada da mesma matriz empregada na análise linear (deformações infinitesimais). A segunda parcela, $\mathbf{B}_{NL}$, está associada aos deslocamentos e é dependente deles. Essas matrizes podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{B}^m$, $\mathbf{B}^b$ e $\mathbf{B}^s$ são respectivamente as matrizes de membrana, flexão e cisalhamento transversal de um nó, cujas parcelas lineares são dadas por

$$\mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} Z_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} Z_{y'} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} Z_{y'} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} Z_{x'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{B}_L^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial x'} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (4.31b)$$

$$\mathbf{B}_L^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} & 0 & \phi_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} & -\phi_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31c)$$

onde $Z_{x'}$ e $Z_{y'}$ são dados por

$$Z_{x'} = \sum_i^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} Z_{0i} \quad Z_{y'} = \sum_i^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} Z_{0i} \quad (4.32)$$

O campo de deslocamentos pode ser definido em termos das coordenadas naturais (ξ, η) . Assim, é necessário relacionar as derivadas das funções de forma ϕ em relação a

esse sistema de coordenadas. Essa relação pode ser dada por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta\phi_i}{\delta x} \\ \frac{\delta\phi_i}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta\xi}{\delta x} & \frac{\delta\eta}{\delta x} \\ \frac{\delta\xi}{\delta y} & \frac{\delta\eta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta\phi_i}{\delta\eta} \\ \frac{\delta\phi_i}{\delta\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_{GN} \quad (4.33)$$

onde $\mathbf{D}_{GN}$ contém as derivadas do campo de deslocamentos e $\mathbf{J}$ é a matriz jacobiana, que é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta\xi} & \frac{\delta y}{\delta\xi} \\ \frac{\delta x}{\delta\eta} & \frac{\delta y}{\delta\eta} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Como pode ser visto a expressão na Equação 4.30 é independente dos deslocamentos devido à distinção entre termos lineares e não lineares feita na Equação 2.6. Consequentemente, a variação do vetor de deformações lineares é dada simplesmente por $\delta\varepsilon = \mathbf{B}_L \delta\mathbf{d}$.

Para determinar a matriz da relação deformação-deslocamento não linear, exclusiva aos termos de membrana, considera-se a variação da parte não linear do vetor de deformação como dado a partir da definição de deformação na Equação 2.6, declarado novamente como:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\delta w'}{\delta x'} & 0 \\ 0 & \frac{\delta w'}{\delta y'} \\ \frac{\delta w'}{\delta y'} & \frac{\delta w'}{\delta x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta w'}{\delta x'} \\ \frac{\delta w'}{\delta y'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \beta \quad (4.35)$$

A variação de ε_{NL} na Equação 4.35 produz a seguinte expressão:

$$\delta\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \delta\mathbf{A} \beta + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta\beta \quad (4.36)$$

Uma vez que $\mathbf{A}$ e β são funções dos deslocamentos nodais. Ao inserir as expressões para β e $\mathbf{A}$ na Equação 4.36 observa-se que $\delta\mathbf{A} \beta = \mathbf{A} \delta\beta$ (Crisfield, 1991). Com isso a Equação 4.36 pode ser reescrita simplesmente como

$$\delta\varepsilon_{NL} = \mathbf{A} \delta\beta = \mathbf{A} \mathbf{G} \delta\mathbf{d} \quad (4.37)$$

A matriz $\mathbf{A}$ não é adequada para representar a relação deformação-deslocamento, uma vez que ε_{NL} deve ser uma função direta dos deslocamentos nodais, para isso, é necessária a introdução da matriz auxiliar, $\mathbf{G}$, dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta\phi}{\delta x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta\phi}{\delta y'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

logo

$$\mathbf{B}_{NL}^m = \mathbf{A}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} W_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} W_{y'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} W_{y'} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} W_{x'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

onde os termos $W_{x'}$ e $W_{y'}$ são definidos abaixo:

$$W_{x'} = \sum_i^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} w_i \quad W_{y'} = \sum_i^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y'} w_i \quad (4.40)$$

Determinadas as parcelas linear e não linear da matriz da reação deformações generalizadas - deslocamentos, a matriz de deformação-deslocamento em sua forma geral pode ser obtida como $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}$.

Introduzindo a discretização de elementos finitos e seguindo o processo padrão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (Equação 4.24), as equações de equilíbrio para um único elemento são obtidas como

$$\mathbf{p}_{(e)} = \mathbf{K}_{(e)} \mathbf{d}_{(e)} - \mathbf{f}_{(e)} \quad (4.41)$$

em que $\mathbf{p}_{(e)}$ é o vetor de forças nodais e $\mathbf{K}_{(e)}$ é a matriz de rigidez. $\mathbf{f}_{(e)}$ é o vetor de forças nodais equivalente devido as cargas distribuídas para o elemento nos eixos locais e pode ser representado por:

$$\mathbf{f}_{(e)} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{S} dA \quad (4.42)$$

onde $\mathbf{S}$ é o segundo tensor de tensão de Piolla-Kirchhoff.

4.3.1 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez $\mathbf{K}_{(e)}$ na Equação 4.41 incorpora tanto os termos lineares de rigidez, utilizados em análises com pequenos deslocamentos, quanto os termos não lineares, resultantes do emprego do tensor de deformação de Green-Lagrange. A matriz pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{(e)} = \mathbf{K}_{L_0} + \mathbf{K}_{L_1} + \mathbf{K}_{NL} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{K}_{L_0} = \int_A \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \quad (4.43b)$$

$$\mathbf{K}_{L_1} = \int_A \left(\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \right) dA \quad (4.43c)$$

$$\mathbf{K}_{NL} \delta \mathbf{d} = \int_A \delta \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{N} dA \quad (4.43d)$$

A matriz $\mathbf{K}_{L_0}$ representa a matriz de rigidez convencional para pequenos deslocamentos, $\mathbf{K}_{L_1}$ é a matriz de deslocamentos iniciais ou matriz de grandes deslocamentos, e a matriz $\mathbf{K}_{NL}$ é denominada matriz das tensões iniciais ou matriz geométrica.

Na matriz $\mathbf{K}_{NL}$, apenas os componentes de membrana dos esforços são relevantes, isto é, $\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_{x'} \quad \mathbf{N}_{y'} \quad \mathbf{N}_{x'y'}\}^T$. Assim, a matriz $\mathbf{K}_{NL}$ pode ser deduzida a partir das Equações 4.39 e 4.43d. Derivando a Equação 4.39 em relação aos deslocamentos, obtém-se:

$$\delta \mathbf{B}_{NL} = \delta \mathbf{A} \mathbf{G} \Rightarrow (\delta \mathbf{B}_{NL})^T = \mathbf{G}^T \delta \mathbf{A}^T \quad (4.44)$$

Substituindo 4.44 em 4.43d, resulta em:

$$\mathbf{K}_{NL} \delta \mathbf{d} = \int_A \mathbf{G}^T \delta \mathbf{A}^T \mathbf{N} dA \quad (4.45)$$

Ao considerar a parcela $d\mathbf{A}^T \mathbf{N}$ e reorganizar seus termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{A}^T \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \frac{\delta w'}{\delta x'} & 0 & \frac{\delta w'}{\delta y'} \\ 0 & \frac{\delta w'}{\delta y'} & \frac{\delta w'}{\delta x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{x'} \\ \mathbf{N}_{y'} \\ \mathbf{N}_{x'y'} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{x'} & \mathbf{N}_{x'y'} \\ \mathbf{N}_{x'y'} & \mathbf{N}_{y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta w'}{\delta x'} \\ \frac{\delta w'}{\delta y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \delta \beta = \mathbf{S} \mathbf{G} \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Visto que a Equação 4.37 estabelece que $\delta \beta = \mathbf{G} \delta \mathbf{d}$. Por fim, substituindo 4.46 na Equação 4.45, obtém-se:

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_A \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA \quad (4.47)$$

A matriz de rigidez do MEFG contém a matriz de rigidez padrão do MEF, incluindo os graus de liberdade suplementares derivados do enriquecimento. Nas situações que envolvem o MEFG, a matriz $\mathbf{K}$ pode ser desmembrada da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{MEF} & \mathbf{K}_{MEF,MEFG} \\ \mathbf{K}_{MEFG,MEF} & \mathbf{K}_{MEFG} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Aqui, $\mathbf{K}_{MEF}$ representa a matriz de rigidez conforme o Método dos Elementos Finitos convencional, enquanto $\mathbf{K}_{MEFG}$ encapsula os termos adicionais na matriz que estão associados apenas aos enriquecimentos introduzidos pelo MEFG. Por sua vez, $\mathbf{K}_{MEF,MEFG}$ está associada à interação entre os graus de liberdade provenientes do MEF e aqueles relacionados às funções de enriquecimento.

Além disso, deve-se destacar a simplicidade da formulação, considerando que a construção do elemento é feita a partir da existência das matrizes de deformação referentes aos estados de flexão (elemento de flexão de placa) e membrana (elemento de membrana),

que podem ser obtidas separadamente.

$$\mathbf{K}_{(e)}^m = \int_A (\mathbf{B}^m)^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m dA \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{K}_{(e)}^b = \int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{D}^b \mathbf{B}^b dA \quad (4.49b)$$

$$\mathbf{K}_{(e)}^s = \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s dA \quad (4.49c)$$

4.4 Fenômeno de travamento

O fenômeno de travamento, também conhecido como bloqueio da solução, que tem sido amplamente investigado ao longo do tempo no âmbito da modelagem e análise numérica de estruturas. Esse comportamento dos elementos pode ser delineado por duas abordagens distintas:

- **Bloqueio por efeito de cortante:** O elemento mostra-se incapaz de reproduzir com precisão as condições de deformação de cisalhamento nulo à medida que a espessura tende a zero. Essa presença de termos espúrios leva a um aumento progressivo da rigidez à medida que o valor da espessura diminui. Esse fenômeno é inerente à formulação da teoria de cascas baseada na teoria de Reissner-Mindlin.
- **Bloqueio por efeito de membrana:** O bloqueio da membrana pode ser interpretado como a incapacidade do elemento em reproduzir um campo de deformação de flexão pura sem introduzir deformações de membrana espúrias. Em cascas onde que os efeitos de flexão são dominantes, o bloqueio da membrana possui menor relevância, sendo necessário considerar apenas o bloqueio por cisalhamento. No entanto, em problemas com alto acoplamento flexão-membrana, o bloqueio da membrana pode perturbar a solução. Isso ocorre frequentemente em cascas discretizadas em camadas ou em elementos com curvatura.

O problema de travamento da solução pode ser visto, de maneira qualitativa, como uma incapacidade da análise por elementos finitos de conseguir reproduzir a energia de deformação exata do modelo matemático/mecânico considerado, resultando em uma superestimativa da rigidez e consequentemente levando a uma tendência de divergência dos resultados obtidos a partir de soluções teóricas (Chapelle e Bathe, 2010; Ko *et al.*, 2016).

Além da influência da espessura, a formulação do elemento, as condições de contorno impostas ao modelo da casca e o tipo de interpolação utilizadas para o campo de deslocamentos também são apontados na literatura como pontos que favorecem o aparecimento do fenômeno de bloqueio (Valente (2004)).

Matematicamente, é possível ilustrar o fenômeno de travamento, considerando-se a matriz de rigidez de um elemento de espessura constante e desprezando-se o acoplamento local membrana/flexão. Partindo dessas premissas a Equação de equilíbrio 4.41 pode ser

reescrita como:

$$\left[t\mathbf{K}_e^m + t^3\mathbf{K}_e^b + t\mathbf{K}_e^s \right] \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{p}_e \quad (4.50)$$

Como pode ser observado, os termos de membrana e cortante da matriz de rigidez podem ser agrupados, uma vez que a influência da espessura t na matriz é da mesma ordem de grandeza. Assim:

$$\left[t^3\mathbf{K}_e^b + t(\mathbf{K}_e^m + \mathbf{K}_e^s) \right] \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{p}_e \quad (4.51)$$

A Equação 4.51 está referida ao sistema local e , assim, se todos os elementos fossem coplanares, e supondo que somente atuassem carregamentos que provocam flexão e cisalhamento, o problema reduziria-se ao caso de elementos de placas sujeitos às hipóteses de Mindlin:

$$(\mathbf{K}^b + \alpha\mathbf{K}^s) \mathbf{d}^b = \mathbf{f}^b \quad (4.52a)$$

$$\mathbf{K}^m \mathbf{d}^m = \mathbf{f}^m \quad (4.52b)$$

onde $\mathbf{f}^b$ e $\mathbf{f}^m$ são os vetores de carga equivalentes de força nodal devido as cargas de flexão e no plano.

Pode-se observar que não há problema em encontrar a solução de membrana resolvendo a Equação 4.52b. No entanto, o termo α na Equação 4.52a é função do material e das características geométricas da placa, e, segundo Oñate (2013), representa um fator de penalidade, podendo ser explicitado por:

$$\alpha = k \frac{GL^2}{Et^2} \quad (4.53)$$

onde E e G são, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, L é um comprimento de referência e k é o coeficiente de distorção transversal.

Analisando a Equação 4.53, conclui-se que a medida que a espessura diminui, $t \rightarrow 0$, ocorre $\alpha \rightarrow \infty$. Assim, ao tornar a placa mais fina, os termos de cortante vão progressivamente dominando a solução, e a menos que $\mathbf{K}^s$ seja singular, os deslocamentos irão tender a zero, $\mathbf{d} \rightarrow 0$, representando o bloqueio da solução.

Os termos de membrana também podem contribuir para o comportamento de travamento em cascas, embora esse efeito geralmente seja menos significativo do que o travamento de cisalhamento. Uma representação matemática do travamento de membrana pode ser obtida ao escrever a equação de equilíbrio global, dividida por t^3 , da seguinte forma:

$$\left[\mathbf{K}^b + \alpha(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^s) \right] \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (4.54)$$

Essa Equação sofre do mesmo problema da Equação 4.52a, ou seja, a soma dos termos de membrana e cisalhamento transversal terá uma grande influência para situações em que a espessura da casca é excessivamente fina.

Assim, a precisão da solução da Equação 4.54 vai se deteriorar para a seguinte situação:

$$(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^s) \mathbf{d} = \mathbf{K}^{ms} \mathbf{d} = 0 \quad (4.55)$$

o que requer a singularidade de $\mathbf{K}^{ms} = \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^s$ para a obtenção de uma solução não trivial.

O travamento da solução pode então suscitar a questão de saber se o uso de modelos de elementos finitos de cascas é realmente eficaz do ponto de vista computacional, quando comparado a uma análise a partir de soluções teóricas.

Uma das abordagens pioneiras e mais simples para tratar este problema é o uso de técnicas de integração reduzida ou integração seletiva (Bathe, 2006). Essas técnicas tem como objetivo singularizar a matriz de rigidez devido ao cisalhamento, realizando a integração de forma independente das matrizes de membrana e flexão. Isso é alcançado por meio da utilização de ordens diferentes na integração, a partir da redução do número de pontos de Gauss-Legendre na integração.

No entanto, o uso dessa técnica é restrito pelo fato de que a redução da quadratura implica no surgimento de modos espúrios. A propagação ou não destes mecanismos depende essencialmente da compatibilidade dos elementos e das condições de contorno. Portanto, as técnicas de integração reduzida ou seletiva devem ser utilizadas com cautela, considerando esse fenômeno que pode afetar diretamente a qualidade da solução, uma vez que a propagação dos modos de energia nula pela malha pode deteriorar a solução. Existem métodos para eliminar esses modos espúrios, mas que são particulares para determinados tipos de elementos, o que restringe a natureza geral do processo de integração reduzida ou seletiva.

A literatura aponta a utilização de campos de deformações assumidas ou impostas como uma forma mais geral e eficiente de se tratar o fenômeno de bloqueio da solução. Desenvolvida por Bathe e Dvorkin (1984) a técnica é atualmente designada como método da interpolação mista das componentes tensoriais (*Mixed Interpolation of Tensorial Components* - MITC) (Bathe et al., 1990). O esquema MITC tem sido utilizado com muito sucesso no desenvolvimento de elementos de cascas gerais.

4.4.1 Método da interpolação mista das componentes tensoriais - MITC

O objetivo do método é criar um campo de deformações mais adequado do que o campo original, que seja capaz de anular a parcela de deformação resultante de esforços cisalhantes em espessuras pequenas e, ao mesmo tempo, garantir que o elemento possa reproduzir estados de flexão pura sem apresentar deformações por membrana.

Uma característica importante da formulação do elemento MITC é o uso de compo-

nentes tensoriais de deformações de cisalhamento, tornando o elemento resultante relativamente insensível à distorção. Para evitar o problema de travamento devido ao cisalhamento, os efeitos de flexão e cisalhamento são incorporados na matriz de rigidez do elemento por meio de interpolações distintas.

A abordagem de interpolação mista de componentes tensoriais (MITC) é um método do tipo “deformações impostas”, no qual o campo de deformação transversal original, baseado em deslocamento, de um dado elemento é re-interpolado com base em novos pontos de amostragem, que são diferentes dos pontos gaussianos. Esses novos pontos são projetados para atender às condições de placas finas ou cascas finas. Em termos gerais, o campo interpolado de deformação transversal é representado por componentes modificados e pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\varepsilon^s = \alpha_1(\mathbf{u}) + \alpha_2(\mathbf{u})\xi + \alpha_3(\mathbf{u})\eta + \cdots + \alpha_n(\mathbf{u})\xi^p\eta^p = 0 \quad (4.56)$$

onde ε^s é uma das componentes de deformação por cisalhamento escrita em função das coordenadas naturais do elemento, e α_i são os coeficientes do polinômio aproximador em função dos deslocamentos.

Para se obter $\varepsilon^s = 0$, é preciso que

$$\alpha_i(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.57)$$

A Equação 4.57 estabelece uma restrição linear entre as deflexões nodais e as rotações, o que pode ser compreendido sob uma perspectiva física. No entanto, em muitos elementos, α_i é dependente apenas das rotações nodais. Nestes casos, a condição $\alpha_i(\theta) = 0$ torna-se excessivamente restritiva, resultando em um campo de deslocamentos nulo. Essa condição, por sua vez, não apenas falha em refletir com precisão a realidade física em algumas situações, mas também caracteriza o fenômeno de bloqueio da solução.

Conclui-se, a partir do exposto, que uma maneira de evitar o bloqueio da solução é avaliar as deformações transversais de cisalhamento em pontos onde os termos indesejados $\alpha_i(\theta)$ se anulam. A partir disso, as condições de placas e cascas finas podem ser obtidas impondo o campo de deformações impostas (que na análise recebe o índice (AS)) que satisfaça a condição estabelecida pela Equação 4.47. Desse modo, as deformações de cisalhamento passam a ser interpoladas da seguinte maneira

$$\varepsilon_{AS}^s = \sum_{k=1}^m \phi_k^P \varepsilon_k \quad (4.58)$$

para um dado ponto de Gauss. Na Equação 4.58, ε_k são os valores das deformações de cisalhamento em m pontos dentro do elemento e ϕ^P são as funções de forma correspon-

dentes. Combinando as equações 4.28 e 4.58, obtêm-se:

$$\epsilon_{AS}^s = \sum_{k=1}^m \phi_k^P \mathbf{B}^s \mathbf{d}_k = \mathbf{B}_{AS}^s \mathbf{d} \quad (4.59)$$

onde $\mathbf{B}_{AS}^s$ é a matriz da relação deformação generalizada-deslocamento de cisalhamento imposta, a ser definida. A partir desse ponto, a matriz $\mathbf{B}_{AS}^s$ passa a ser utilizada no processo da formulação por elementos finitos, da maneira usual, no lugar da matriz original $\mathbf{B}^s$ para calcular a matriz de rigidez de cisalhamento.

Por fim, é possível determinar o campo de deformações impostas para os elementos finitos de casca adotados nesse trabalho. No sistema INSANE, os elementos que tratam do problema de travamento da solução foram implementados por Saliba (2007) para problemas de flexão de placas, recebendo a denominação de elementos RMCi (Elemento de Reissner-Mindlin com Cortante Imposta).

4.4.2 Elemento quadrilateral de 4 nós (MEFGMITC4)

O conceito por trás da formulação do elemento MEFGMITC4 está bem estabelecido na literatura de elementos finitos (Bathe e Dvorkin, 1985; Bucelem e Bathe, 1997; Chapelle e Bathe, 1998; Bathe, 2006). A metodologia apresentada anteriormente é agora aplicada ao elemento quadrilateral de quatro nós seguindo a abordagem proposta por Bathe e Dvorkin (1984) e generalizada por Huang e Hinton (1986), incorporando a independência da malha e insensibilidade à distorção angular dos elementos presente na formulação do MEFG (Barros, 2002).

Esta abordagem combinada com formulação do MEFG busca aliviar o bloqueio que pode acontecer quando os elementos de casca MITC4 tradicionais são distorcidos geometricamente. Este estudo, representa um passo adiante no estudo do fenômeno de travamento por cisalhamento na análise de elementos finitos de casca fina.

O primeiro passo é interpolar as deformações de cisalhamento (γ) no sistema natural (ξ, η) , conforme ilustrado na Figura 4.6(a). Logo:

$$\gamma_\xi = \alpha_1 + \alpha_2 \eta \quad (4.60a)$$

$$\gamma_\eta = \alpha_3 + \alpha_4 \xi \quad (4.60b)$$

Os parâmetros α_i são encontrados nos pontos de amostragem 1, 2, 3 e 4 representados no elemento da Figura 4.6(b). Assim, as deformações de cisalhamento nos pontos amostrais é dada por

$$\gamma_{AS} = (\alpha_1 + \alpha_2 \eta) \cos \beta_i + (\alpha_3 + \alpha_4 \xi) \sin \beta_i \quad (4.61)$$

onde β_i é o ângulo que uma direção natural pré-definida, $\bar{\xi}_i$, forma com a direção natural

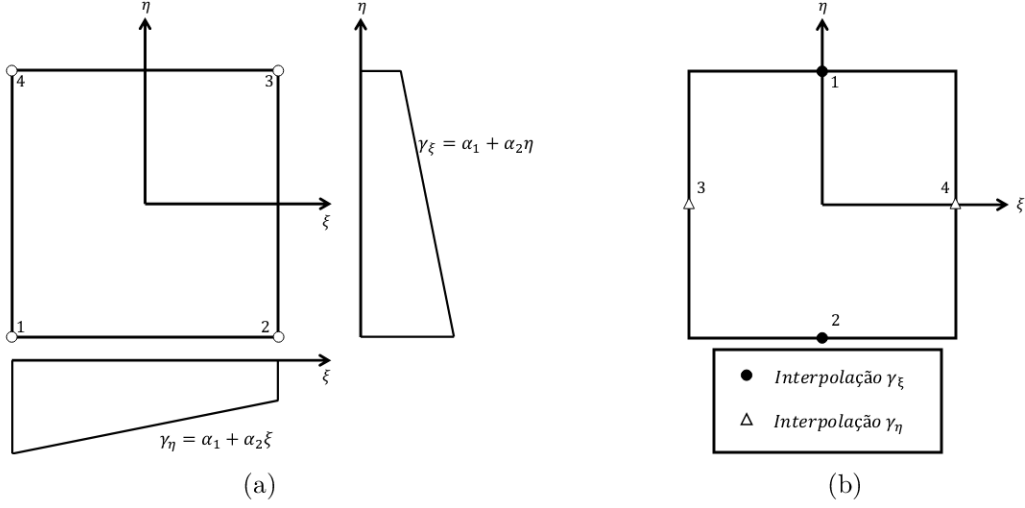


Figura 4.6: Elemento quadrilateral de quatro nós. a) Campo de deformações transversais impostos. b) Pontos de amostragem para o elemento de 4 nós.

ξ . As deformações γ_{AS} estão relacionadas com γ_ξ e γ_η por:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{AS}^1 \\ \gamma_{AS}^2 \\ \gamma_{AS}^3 \\ \gamma_{AS}^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^1 \\ \gamma_\eta^1 \\ \vdots \\ \gamma_\xi^A \\ \gamma_\eta^A \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \hat{\gamma}' \quad (4.62)$$

onde $\hat{\gamma}'$ contém as componentes da deformação no sistema natural avaliadas nos pontos de amostragem e $\mathbf{T}$ é a matriz formada pelos cossenos diretores dos eixos $\bar{\xi}_i$. As deformações transversais de cisalhamento cartesianas nos pontos de amostragem estão relacionadas com as deformações transversais no sistema natural por:

$$\hat{\gamma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 & & 0 \\ & \mathbf{J}^2 & \\ & & \mathbf{J}^3 \\ 0 & & & \mathbf{J}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^1 \\ \gamma_{yz}^1 \\ \vdots \\ \gamma_{xz}^A \\ \gamma_{yz}^A \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \gamma_{AS} \quad (4.63)$$

A relação entre as deformações transversais de cisalhamento cartesianas nos quatro pontos de amostragem e os deslocamentos nodais é dada por:

$$\gamma_{AS} = \sum_{k=1}^m \phi_k^P \mathbf{B}^s \mathbf{d}_k = \mathbf{B}_{AS}^s \mathbf{d} \quad (4.64)$$

onde ϕ^P correspondem as funções de forma enriquecidas.

Este elemento recebeu diferentes denominações na literatura. Neste contexto, será

referido como MEFGMITC4 (indicando a combinação da cortante imposta com o método dos elementos finitos generalizados). O cálculo da matriz de rigidez requer uma quadratura completa para todos os termos, o que preserva a integridade do elemento em relação a mecanismos espúrios.

Ao contrário do elemento RMCI tradicional, que exige malhas finas em certas aplicações (Oñate, 2013), o elemento MEFGMITC4 se beneficia da independência da malha e da relativa insensibilidade à distorção angular dos elementos, alcançadas por meio das funções de enriquecimento, para aprimorar a análise.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE FISICAMENTE NÃO LINEAR: MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO COM DEFORMAÇÕES FINITAS

Neste capítulo, é apresentada formulação de modelos constitutivos elastoplásticos para uma análise de grandes deformações. Os princípios teóricos e algoritmos aqui discutidos constituem uma extensão da formulação proposta por Souza Neto *et al.* (2008) e detalhada por Oliveira (2016) para modelos elastoplásticos no regime de pequenas deformações.

A teoria apresentada neste contexto serve como base para a compreensão da teoria matemática da plasticidade isotrópica de grandes deformações. É importante ressaltar que a generalização dos modelos de deformações finitas abordados aqui abrangem todos os aspectos fundamentais necessários ao desenvolvimento de modelos multiaxiais isotrópicos de grandes deformações.

Como destacado por Souza Neto *et al.* (2008), a formulação de um modelo constitutivo elastoplástico requer a descrição dos seguintes elementos: a decomposição de deformações elásticas e plásticas, uma lei elástica, um critério de escoamento, uma regra para o fluxo plástico e uma lei de endurecimento ou amolecimento do material.

É fundamental reconhecer que os modelos constitutivos frequentemente adotam notações específicas, e embora compartilhem semelhanças em muitos casos, a falta de uniformidade nas formulações dificulta uma implementação computacional genérica e objetiva. Neste trabalho foi utilizado o Ambiente Unificado proposto por Penna (2011) e explorado por Gori *et al.* (2017). Esse Ambiente apresenta uma expansão da teórica proposta por Carol *et al.* (1994) e permite a inclusão de uma ampla variedade de modelos constitutivos - elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópicos, ortotrópicos ou anisotrópicos - formulados com uma ou várias funções de carregamento.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: A seção 5.1, tem início com uma breve revisão do desenvolvimento da plasticidade computacional de deformações finitas, seguida da descrição do modelo geral de plasticidade multiplicativa baseada em elastoplasticidade multiaxial. Na seção 5.2, explora-se a formulação do modelos constitutivo segundo o Ambiente Unificado. Detalham-se as parcelas necessárias para a descrição de cada modelo, destacando a relação entre a forma original e a abordagem proposta neste

trabalho. Finalmente, na seção 5.3, após a descrição do modelo geral, prossegue-se com a derivação de um algoritmo para a integração das equações constitutivas de plasticidade no contexto das deformações finitas.

5.1 Modelo constitutivo elastoplástico geral para grandes deformações

A teoria da plasticidade compreende grande parte da modelagem constitutiva de materiais em geral. Essa teoria busca descrever matematicamente as deformações imediatas e não reversíveis que ocorrem em um corpo sólido, ou seja, deformações que não desaparecem totalmente ao serem removidas as forças que lhe deram origem (Owen e Hinton, 1980, Lubliner, 1990, Chen e Han, 2007, Souza Neto *et al.*, 2008).

Teorias infinitesimais podem ser adotadas para modelar o comportamento de sólidos inelásticos desde que as deformações e rotações permaneçam suficientemente pequenas. No entanto, quando as deformações e/ou rotações se tornam tão grandes que não podem ser desprezadas, as hipóteses da deformação infinitesimal não podem ser introduzidas sem uma significativa perda de precisão.

A formulação de modelos constitutivos elastoplásticos para grandes deformações origina-se no final da década de 1950. Nos últimos anos, a abordagem baseada na decomposição multiplicativa do gradiente de deformações ganhou ampla aceitação (Simo e Hughes, 1998) e compõe as bibliotecas atuais de muitos softwares para análise de elementos finitos com modelos constitutivos elastoplásticos de grandes deformações.

O modelo constitutivo elastoplástico isotrópico sob deformações finitas formulado a seguir, pode ser definido seguindo o axioma da termodinâmica com variáveis internas, derivado do Método do Estado Local. A premissa para a formulação de um modelo constitutivo considera que um processo não equilibrado pode ser descrito a partir de seu estado de equilíbrio e consequentemente pelo processo de variação de suas variáveis de estado (Murakami, 2012). Essencialmente, o modelo constitutivo é definido postulando

1. Um potencial de energia livre, a partir do qual a lei hiperelástica é derivada;
2. uma função de escoamento para definir o início das deformações plásticas;
3. um potencial de dissipação, a partir do qual derivam a regra de fluxo plástico e as leis de evolução para as variáveis internas.

5.1.1 Decomposição multiplicativa do gradiente de deformações

A hipótese principal subjacente à estrutura do modelo constitutivo elastoplástico sob deformações finitas é a decomposição multiplicativa do gradiente de deformações, $\mathbf{F}$, em

parcelas elásticas e plásticas, isto é, presume-se que o gradiente de deformações pode ser decomposto como o produto

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{F}^e$ e $\mathbf{F}^p$ são, respectivamente, os gradientes de deformação elástica e plástica. Deve-se enfatizar que nenhum dos dois fatores do lado direito da Equação 5.1 é necessariamente o gradiente de um campo de deformações nem satisfaz quaisquer condições de compatibilidade (Naghdi, 1990).

A decomposição multiplicativa de $\mathbf{F}$, incorpora a suposição da existência de uma configuração intermediária sem tensões definida pelo gradiente de deformações plásticas, $\mathbf{F}^p$. Em cada ponto material, a configuração intermediária local é obtida a partir da configuração deformada com descarregamento puramente elástico (associada ao inverso de $\mathbf{F}^e$) de sua vizinhança. Esse conceito é ilustrado esquematicamente na Figura 5.1

Em vez de ser apenas uma extensão matemática da decomposição aditiva, característica da teoria da plasticidade em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformações encontra uma justificativa sólida e consistente na teoria da plasticidade aplicada a cristais (Asaro, 1983; Fornell, 2018). Essencialmente, a deformação plástica é resultante do deslizamento de porções do cristal (devido ao movimento de discordâncias) em relação a planos cristalográficos bem definidos (Figura 5.1).

Sob deformação finita genérica, os blocos do cristal deslizam uns sobre os outros sob a ação simultânea de rotação e distorção da rede. A deformação plástica está relacionada com o movimento de discordâncias através da rede cristalina preservando a estrutura do cristal. Então a parte plástica do gradiente de deformações não modifica a orientação dos vetores diretores dos sistemas de deslizamento cristalográficos. A contribuição elástica por outro lado, representa a rotação e distorção da rede cristalina.

Após a divisão multiplicativa, os alongamentos e rotações associados às partes elásticas e plásticas do gradiente de deformações são obtidos através da realização de decomposições polares:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \quad (5.2)$$

e

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p = \mathbf{V}^p \mathbf{R}^p \quad (5.3)$$

onde $\mathbf{U}^e(\mathbf{U}^p)$ e $\mathbf{V}^e(\mathbf{V}^p)$ são tensores simétricos positivos definidos, denominados tensores de deformação elástica (plástica) direito e esquerdo, respectivamente. Os tensores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ representam a deformação pura sofrida pelo corpo, sendo que o tensor $\mathbf{U}$ opera sobre vetores materiais e o tensor $\mathbf{V}$ opera sobre vetores espaciais. O tensor $\mathbf{R}^e(\mathbf{R}^p)$ representa a rotação elástica (plástica) do corpo mapeando vetores materiais em espaciais.

A decomposição multiplicativa de $\mathbf{F}$ tem implicações no gradiente de velocidade defi-

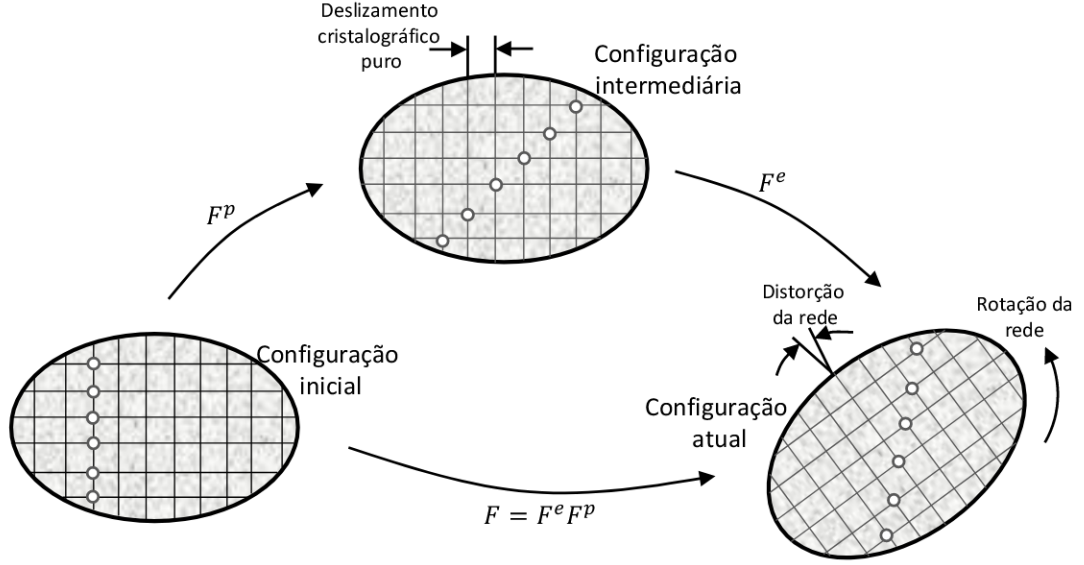


Figura 5.1: Decomposição multiplicativa do gradiente de deformações. Adaptado de (Souza Neto *et al.*, 2008)

nido por:

$$\mathbf{L} \equiv \nabla_x \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (5.4)$$

Introduzindo a Equação 5.1 em 5.4 e derivando a Equação resultante usando a regra do produto, obtém-se a seguinte decomposição aditiva de $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{L}^e$ e $\mathbf{F}^p$ são, respectivamente, os gradientes de velocidade elástica e plástica, definidos como

$$\mathbf{L}^e \equiv \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{L}^p \equiv \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} \quad (5.6b)$$

O gradiente de velocidade, $\mathbf{L}$, é uma variável na configuração deformada. Consequentemente, o gradiente de velocidade plástico, $\mathbf{L}^p$, na Equação 5.5, é pré e pós-multiplicado, respectivamente, por $\mathbf{F}^e$ (que mapeia a configuração intermediária local na configuração deformada) e sua inversa. Isso faz com que a contribuição plástica para $\mathbf{L}$ na Equação 5.5 seja uma variável na configuração deformada.

Para estabelecer uma regra de fluxo de plástico dentro da estrutura da plasticidade multiplicativa, é conveniente definir os tensores taxa de deformação e taxa de rotação plástica como

$$\mathbf{D}^p \equiv \text{sym}[\mathbf{L}^p] \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{W}^p \equiv \text{skew}[\mathbf{L}^p] \quad (5.7b)$$

O tensor taxa de rotação plástica, $\mathbf{W}^p$ representa uma taxa instantânea de rotação rígida da configuração intermediária. Por outro lado, o tensor de taxa de deformação, $\mathbf{D}$, está associado a um campo de velocidade de deformações puras que alonga o corpo localmente, sob três direções mutuamente ortogonais, a partir de sua configuração deformada atual definida pelos autovetores de $\mathbf{D}$.

O tensor $\mathbf{D}^p$ pode ser interpretado de maneira análoga. No entanto, este tensor está relacionado exclusivamente com $\mathbf{F}^p$, que define a configuração intermediária. Portanto, $\mathbf{D}^p$ quantifica a taxa instantânea de deformação plástica na configuração intermediária ao longo das três direções mutuamente ortogonais definidas pelos autovetores de $\mathbf{D}^p$. Usando $\mathbf{e}_i$ para denotar uma base ortonormal dos autovetores de $\mathbf{D}^p$, tem-se o seguinte:

$$\mathbf{D}^p = \sum_1^3 d_i^p \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (5.8)$$

onde d_i^p é o autovalor de $\mathbf{D}^p$ associado ao autovetor $\mathbf{e}_i$. Cada autovalor dá a taxa instantânea de deformação da configuração intermediária ao longo de uma direção de $\mathbf{e}_i$.

A formulação do modelo constitutivo multiplicativo e todas as variáveis cinemáticas envolvidas na formulação constitutiva serão expressas na configuração deformada dentro do contexto da estrutura constitutiva atual. Ao definir a regra de fluxo plástico, é necessário empregar a seguinte rotação para $\mathbf{D}^p$:

$$\tilde{\mathbf{D}}^p \equiv \mathbf{R}^e \mathbf{D}^p \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{R}^e \text{sym}[\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}] \mathbf{R}^{eT} \quad (5.9)$$

O tensor acima representa a taxa de deformação plástica que foi rotacionada (pela rotação elástica) para a configuração deformada, e será denominado de taxa de deformação plástica rotacionada. Pode ser representado como:

$$\tilde{\mathbf{D}}^p = \sum_1^3 d_i^p \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (5.10)$$

onde $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}^e \mathbf{e}_i$

5.1.2 Deformação elástica logarítmica

Na descrição deste modelo geral elastoplástico sob deformações finitas, o modelo de Hencky para o material elástico linear é adotado e a deformação logarítmica é usada para medir as deformações elásticas (Lubliner, 1990). Sob condições de tensão uniaxial, a lei de hiperelasticidade de Hencky pode ser expressa como:

$$\tau = E \ln \lambda \quad (5.11)$$

onde τ representa a tensão axial de Kirchhoff e λ é a deformação uniaxial. A Equação 5.11

pode ser reescrita em termos de deformação elástica, ou seja, pode-se utilizar a seguinte extensão da Equação constitutiva elástica unidimensional:

$$\tau = E\varepsilon^e \quad (5.12)$$

onde ε_e representa as deformações logarítmicas elásticas, que, para o modelo geral de grandes deformações, podem ser definidas como:

$$\varepsilon^e = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}^e \quad (5.13)$$

onde $\ln(\cdot)$ acima denota o logaritmo do tensor $(\cdot)$ e

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T$$

é o tensor de tensão Cauchy-Green elástico esquerdo, também conhecido como deformação Lagrangiana de Hencky.

O uso medida de deformação logarítmica para descrever o comportamento elástico do material é particularmente adequada para o modelo de grandes deformações. Além do seu apelo físico como extensão da medida de deformação elástica infinitesimal, seu uso, aliado a aproximações adequadas à regra de fluxo plástico, resulta em simplificações substanciais no algoritmo de integração de tensões e permite uma extensão natural, à faixa de deformações finitas, dos algoritmos de mapeamento de retorno adotados no contexto da teoria da plasticidade em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações (Souza Neto *et al.*, 2008).

5.1.3 Energia potencial livre e a lei elástica

Para formular uma lei constitutiva, é necessário postular a existência de um potencial termodinâmico que seja determinado por um conjunto finito de variáveis de estado relacionadas aos fenômenos que o modelo visa descrever. Essas variáveis podem ser categorizadas como variáveis observáveis e variáveis internas.

Como apontado por Murakami (2012), as variáveis observáveis são aquelas que podem ser medidas diretamente e têm a capacidade de quantificar fenômenos mecânicos, como deformações elásticas, viscoelásticas, plásticas, bem como dano e fissuração. Exemplos dessas variáveis incluem a temperatura, T , e a deformação total, ε . Por outro lado, as variáveis internas desempenham um papel fundamental em fenômenos dissipativos e estão associadas à representação adequada das mudanças no estado interno do material. Portanto, essas variáveis internas são dependentes do fenômeno que está sendo descrito e refletem os processos irreversíveis, como o desenvolvimento de deformações plásticas, ε^p , ou o encruamento.

Dentro do enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis, definidas as variáveis

observáveis e as variáveis internas, o potencial de energia livre para a teoria da plasticidade é construído de modo a ter a seguinte forma geral:

$$\psi(\varepsilon^e, \alpha) \quad (5.14)$$

do qual a lei hiperelástica é derivada. Nesta forma geral ψ é expresso em função da deformação logarítmica elástica e um conjunto genérico $\alpha \equiv \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de variáveis internas associadas a mecanismos dissipativos. A derivada temporal da energia livre é dada por

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \quad (5.15)$$

onde $\mathbf{A} \equiv A_1, A_2, \dots, A_k$ são as forças termodinâmicas conjugadas às variáveis internas e $\bar{\rho}$ é a densidade de massa de referência. O símbolo $*$ denota um produto adequado entre $\mathbf{A}$ e $\dot{\alpha}$, definido em função das ordens dos tensores envolvidos.

Aplicando a regra da cadeia à definição da Equação 5.13, a diferenciação no tempo desta última expressão, resulta em

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \frac{\partial (\ln \mathbf{B}^e)}{\partial \mathbf{B}^e} : \dot{\mathbf{B}}^e + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \frac{\partial (\ln \mathbf{B}^e)}{\partial \mathbf{B}^e} \right] : \mathbf{B}^e : \dot{\mathbf{B}}^e : \mathbf{B}^{e-1} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (5.16)$$

O primeiro termo da Equação anterior pode ser obtido utilizando o produto interno de tensores¹. É importante observar que, de acordo com a definição de ε_e , os tensores ε^e e $\mathbf{B}^e$ compartilham os mesmos eixos principais. Além disso, devido à isotropia de ψ , o tensor $\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e}$ também possui os mesmos eixos principais. Portanto, a seguinte identidade é válida no contexto atual:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \frac{\partial (\ln \mathbf{B}^e)}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (5.17)$$

e a Equação 5.16 pode ser reescrita como

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\mathbf{B}}^e \mathbf{B}^{e-1} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \quad (5.18)$$

Por definição, $\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$, ou, em vista da suposição de decomposição elastoplástica multiplicativa, $\mathbf{B}^e = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{p-1})(\mathbf{F}^{p-T})\mathbf{F}^T$. A diferenciação no tempo desta última expressão e substituição em 5.18 resulta, após algumas manipulações, em

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \left\{ \mathbf{D} + \frac{1}{2} [\mathbf{F}^e \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^{p-1}) \cdot \mathbf{F}^{eT} + \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^{p-T}) \cdot \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^{e-1}] \right\} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \left\{ \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e [\bar{\mathbf{L}}^p + \bar{\mathbf{L}}^{pT}] \mathbf{R}^{eT} \mathbf{V}^{e-1} \right\} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹ $\mathbf{R} : \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} : \mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{T}^T : \mathbf{S}$

onde foram utilizadas as relações

$$\mathbf{F}^p (\mathbf{F}^{p-1})^\cdot = -\mathbf{F}^p \mathbf{F}^{p-1} = -\mathbf{L}^p \quad (5.20)$$

e

$$(\mathbf{F}^{p-T})^\cdot \mathbf{F}^{pT} = -\mathbf{F}^{p-T} (\mathbf{F}^{pT})^\cdot = -\mathbf{L}^{pT} \quad (5.21)$$

obtidos, respectivamente, a partir da derivada no tempo das identidades

$$\mathbf{F}^p \mathbf{F}^{p-1} = I \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{F}^{p-T} \mathbf{F}^{pT} = I \quad (5.22b)$$

Finalmente, com a introdução da definição [5.9](#) do tensor de taxa de deformação plástica, $\mathbf{D}^p$ e, levando em consideração a isotropia elástica, a taxa de mudança de energia livre pode ser expressa como

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : (\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{D}}^p) + \frac{1}{\rho} \mathbf{A} * \dot{\alpha} \quad (5.23)$$

A partir da Equação da energia livre, pode-se expressar a segunda lei da termodinâmica, que estabelece a irreversibilidade dos processos dissipativos, na forma da desigualdade Clausius-Duhem e requer que

$$\tau : \mathbf{D} - \bar{\rho} \dot{\psi} \geq 0 \quad (5.24)$$

de modo que, ao introduzir [5.23](#), obtém-se

$$\left(\tau - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \right) : \mathbf{D} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \tilde{\mathbf{D}}^p - \mathbf{A} * \dot{\alpha} \geq 0 \quad (5.25)$$

O requisito de dissipação não negativo é então reduzido a

$$\tau : \tilde{\mathbf{D}}^p - \mathbf{A} * \dot{\alpha} \geq 0 \quad (5.26)$$

Como a desigualdade acima deve ser válida para qualquer movimento (e, portanto, qualquer tensor $\mathbf{D}$), o que tem implicações na Equação constitutiva para o tensor de tensões de Kirchhoff. Da mesma forma que acontece no caso de pequenas deformações, assumindo que a Equação [5.26](#) deve ser satisfeita para todos os processos termodinâmicos, adota-se uma lei de escoamento geral, $\Phi(\tau, \mathbf{A})$, para definir o início do fluxo plástico. Isso nos leva às seguintes relações constitutivas

$$\tau = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (5.27a)$$

$$A_i = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \quad (5.27b)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade de massa de referência.

Consequentemente, o domínio elástico onde ocorrem apenas fenômenos reversíveis é definido como o conjunto

$$\mathcal{E} = \{\tau | \Phi(\tau, \mathbf{A}) < 0\},$$

do espaço das tensões. O escoamento plástico pode ocorrer apenas se τ estiver na superfície de escoamento - limite do domínio elástico - definida por

$$\mathcal{Y} = \{\tau | \Phi(\tau, \mathbf{A}) = 0\}, \quad (5.28)$$

As tensões de Kirchhoff admissíveis devem situar-se no domínio elástico ou na superfície de escoamento. Para um dado conjunto $\mathbf{A}$, as tensões Kirchhoff admissíveis são definidas como

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\tau | \Phi(\tau, \mathbf{A}) \leq 0\}, \quad (5.29)$$

5.1.4 Regra de fluxo plástico sob deformações finitas

A caracterização completa de um modelo elastoplástico, requer a definição de uma lei que descreva a evolução das variáveis associadas aos fenômenos dissipativos (Oliveira, 2016). No presente contexto é adotada uma regra de fluxo plástico geral, $\Psi(\tau, \mathbf{A})$, expressa como uma função das tensões de Kirchhoff e do conjunto de forças termodinâmicas. Com o potencial de dissipação, a evolução do escoamento plástico toma a forma

$$\tilde{\mathbf{D}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (5.30a)$$

$$\mathbf{W}^p = 0 \quad (5.30b)$$

As duas equações acima definem completamente a evolução de $\mathbf{F}^p$. De fato, a definição 5.9 de $\tilde{\mathbf{D}}^p$, juntamente com as leis constitutivas 5.30, são equivalentes à seguinte lei de evolução para o gradiente de deformação plástica

$$\mathbf{L}^p \equiv \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} = \dot{\lambda} (\mathbf{R}^e)^T \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \mathbf{R}^e \quad (5.31)$$

onde $\dot{\lambda}$ representa a magnitude das deformações plásticas e é um escalar denominado multiplicador plástico, cujo valor é nulo durante as deformações elásticas e positivo em caso de deformações plásticas.

A hipótese de rotação plástica zero é compatível com a isotropia plástica, que é a condição à qual o modelo atual está restrito. A introdução da anisotropia plástica exigiria a definição de uma equação constitutiva adequada para a rotação plástica.

A isotropia plástica também implica que os tensores τ e $\partial \Psi / \partial \tau$ são coaxiais, o que significa que eles compartilham os mesmos eixos principais. Portanto, na equação constitutiva mencionada acima, as direções principais do alongamento na configuração intermediária são obtidas girando os eixos principais da tensão de Kirchhoff de volta à

configuração intermediária. Na ausência de rotações elásticas, as principais direções do alongamento plástico coincidem com as direções da tensão de Kirchhoff.

Sob a isotropia elastoplástica, a regra de fluxo plástico mencionada acima é equivalente à seguinte equação constitutiva para a contribuição plástica total, $\mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1}$, ao gradiente de velocidade [5.31](#):

$$\mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (5.32)$$

A equivalência entre as duas equações pode ser estabelecida usando primeiro a decomposição polar esquerda de $\mathbf{F}^e$, o que, após um rearranjo direto dá

$$\mathbf{L}^p = \dot{\lambda} (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \quad (5.33)$$

Devido à isotropia elastoplástica assumida, $\mathbf{V}^e$ e $\partial \Psi / \partial \tau$ se deslocam para que os termos $\mathbf{V}^e$ e $(\mathbf{V}^e)^{-1}$ se cancelam na Equação acima, resultando em [5.31](#).

Na teoria infinitesimal, a divisão aditiva do tensor de deformações permite que o modelo elastoplástico seja moldado de maneira equivalente em termos da taxa de deformação plástica ou da taxa de deformação elástica ([Souza Neto et al., 2008](#)). A definição de equações equivalentes baseadas em taxas elásticas também é possível dentro da estrutura atual para a plasticidade sob deformações finitas. No entanto, devido à natureza da cinemática da decomposição multiplicativa, a relação entre as taxas elástica e plástica é mais complexa do que na teoria infinitesimal. A Equação de evolução do gradiente de deformação elástica correspondente à Equação de fluxo plástico [5.31](#) dentro da estrutura cinemática multiplicativa é a seguinte:

$$\dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (5.34)$$

ou, com uma notação mais compacta,

$$\mathbf{L}^e = \mathbf{L} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (5.35)$$

A Equação acima é obtida simplesmente pela introdução da Equação de fluxo de plástico [5.32](#) nas expressões dos gradientes de velocidade [5.5](#) e [5.6](#).

Com o potencial de dissipação, uma Equação para evolução do conjunto de variáveis internas pode ser postulada com o seguinte formato

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} H(\tau, \mathbf{A}) \quad (5.36)$$

Se a formulação potencial da evolução das variáveis internas for adotada, a função constitutiva H é dada por

$$\dot{\lambda} H(\tau, \mathbf{A}) = - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} \quad (5.37)$$

Na Equação acima, o multiplicador de plástico, $\dot{\lambda}$, é necessário para satisfazer as relações

de complementaridade de Kuhn-Tucker

$$\Phi \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{e} \quad \Phi \dot{\lambda} = 0, \quad (5.38)$$

responsáveis por definir quando a evolução das deformações plásticas e das variáveis internas podem ocorrer.

5.2 Formulação geral para modelos constitutivos elastoplásticos

De acordo com [Carol *et al.* \(1994\)](#), as equações de taxa para a formulação elastoplástica baseada em tensão podem ser expressas como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^0 (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad (5.39)$$

com

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda} m_{kl} \quad (5.40)$$

onde E_{ijkl}^0 são os componentes da rigidez do tensor elástico, $\dot{\lambda}$ é o multiplicador plástico, m_{kl} são os gradientes das funções de potenciais plásticos Q (com $m_{kl} = \partial Q / \partial \sigma_{kl}$), que representa geometricamente a direção da regra de fluxo e $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ é a variação das deformações plásticas.

A Equação [5.41](#) abaixo representa a forma linearizada da condição de consistência da superfície de rendimento $F(\sigma, \mathbf{p})$ onde os argumentos da função são o tensor de tensão σ e as variáveis internas $\mathbf{p}$.

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \dot{\sigma}_{ij} + \left. \frac{\partial F}{\partial p_k} \right|_\sigma \dot{p}_k = 0 \quad (5.41)$$

Podendo ser escrita como:

$$n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (5.42)$$

com

$$n_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \quad (5.43)$$

e

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_\sigma = - \left. \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|_\sigma \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon_{kl}^p} m_{kl} \quad (5.44)$$

onde n_{ij} representa gradientes de F para valores constantes do multiplicador plástico λ e H é o módulo de endurecimento isotrópico, obtido de F derivado para valores constantes de σ , sendo positivo para o caso de endurecimento, zero para o caso de plasticidade perfeita e negativo para amolecimento.

Em um modelo associativo, a taxa de deformação plástica é um vetor normal à su-

perfície de escoamento no espaço de tensões. Neste caso, a função de carregamento F e a regra de fluxo são definidas de tal forma que n e m são totalmente proporcionais (ou seja, $Q = F$). Em modelos de plasticidade não associativa, o vetor de deformação plástica geralmente não é normal à superfície de escoamento.

O multiplicador plástico ($\dot{\lambda}$) apresentado na Equação 5.40 é um escalar de valor positivo no caso de deformações plásticas. Substituindo as Equações 5.39 e 5.40 na Equação 5.41 temos o formato clássico para o multiplicador plástico, dado por

$$\dot{\lambda} = \frac{n_{cd}E_{cdkl}^0\dot{\epsilon}_{kl}}{H + n_{pq}E_{pqrs}^0m_{rs}} \quad (5.45)$$

As derivadas apresentadas fornecem as parcelas para o operador tangente, que relaciona as taxas de variações de deformação com as taxas de variações de tensão e é necessário para a montagem da rigidez tangente. Assim, a Equação constitutiva pode ser dada por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (5.46)$$

A substituição das Equações 5.39 e 5.45 na Equação 5.45, resulta em um tensor que é chamado de tensor tangente elastoplástico e é dado por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^0 - \frac{E_{ijab}^0 m_{ab} n_{cd} E_{cdkl}^0}{H + n_{pq} E_{pqrs}^0 m_{rs}} \quad (5.47)$$

5.2.1 Modelo Constitutivo J_2

O critério proposto por von Mises em 1913 (Chen e Han, 2007) estabelece que o escoamento começa quando o valor crítico da energia de distorção por unidade de volume é atingido. Esta suposição equivale a considerar que o segundo invariante do tensor desviador, J_2 , atinge um valor crítico. Para o modelo de deformações finitas, o tensor de tensão de Cauchy, σ , é substituído pelo tensor de tensão de Kirchhoff, τ . A representação matemática do modelo constitutivo J_2 e a regra de fluxo para encruamento linear misto permanece no mesmo formato apresentado para pequenas deformações (Oliveira, 2016) e é dada por

$$\Phi(\tau, \alpha) = \sqrt{3J_2(s)} - (\sigma_y + \mathcal{H}\alpha) \quad (5.48)$$

onde $\mathcal{H}$ é o módulo de endurecimento isotrópico linear, α é a função do fluxo plástico acumulado e J_2 é dado por

$$J_2 = -I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}tr[\mathbf{s}^2] = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2 \quad (5.49)$$

e o tensor anti-esférico é

$$\mathbf{s} = \tau - \frac{1}{3}(tr(\tau))I \quad (5.50)$$

onde $\|\tau\| = \sqrt{\tau : \tau}$ e I é o tensor identidade.

Desta forma,

$$n_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (5.51)$$

onde $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$.

Em um modelo associativo

$$n_{ij} = m_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

onde $m_{ij} = \partial \Psi / \partial \tau$. A lei associada aos fenômenos de encruamento (endurecimento ou amolecimento) é dada por

$$H = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial D_{kl}^p} \quad (5.53)$$

com

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau}{\partial D_{kl}^p} = \mathcal{H} \quad (5.54)$$

Outros modelos de plasticidade podem ser facilmente implementados a partir da metodologia apresentada. Além do modelo de von Mises apresentado, os modelos de Tresca, Rankine, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb para grandes deformações foram implementadas neste trabalho (Apêndice [B](#)).

5.3 Algoritmo de retorno: Método Implícito/Explícito

Os modelos de plasticidade clássica não apresentam uma relação total entre tensão e deformação portanto, deve ser utilizado um algoritmo de mapeamento de retorno, capaz de integrar a lei constitutiva para que sejam obtidas as partes elástica e plástica do incremento de deformação total ([Oliveira et al., 2020](#)).

[Ortiz e Popov \(1985\)](#) apontam três requisitos básicos que algoritmos eficientes devem cumprir:

- (1) garantir a consistência das equações constitutivas a serem integradas;
- (2) possuir estabilidade numérica;
- (3) e garantir a consistência do modelo incremental.

Existe uma grande variedade de métodos de integração, com diferentes níveis de complexidade ([Taqieddin, 2008](#)). Neste contexto, destaca-se que a escolha de um algoritmo inadequado pode não apenas levar a uma solução imprecisa para as tensões, mas também pode atrasar a convergência do equilíbrio ou até mesmo levar à divergência do processo.

A estrutura do algoritmo de mapeamento de retorno para o modelo de plasticidade de deformação finita é semelhante à estrutura para pequenas deformações com algumas

modificações. A formulação apresentada é baseada no algoritmo de integração de tensões classificado na categoria de método de mapeamento de retorno implícito/explicito baseado no esquema de integração proposto por [Oliver *et al.* \(2008\)](#). Destaca-se no entanto que, qualquer outro algoritmo de mapeamento de retorno pode ser facilmente adaptado a partir desta metodologia.

Neste trabalho, é utilizado uma versão modificada do esquema de integração apresentado [\(Prazeres *et al.*, 2015\)](#) em que o algoritmo é combinado com o método de mapeamento de retorno de projeção do ponto mais próximo (“*Closest-Point Projection*”) [\(Simo e Hughes, 1998\)](#). Essa modificação expande o algoritmo para modelos de deformações finitas combinando esquemas de integração implícitos e explícitos que tiram vantagem de ambas as metodologias.

A Figura [5.2](#) mostra um fluxograma para o algoritmo implementado para modelos de deformações finitas.

Conceitualmente, a ideia do algoritmo é bastante simples e consiste em uma estratégia para diminuir a não linearidade do algoritmo de retorno, estimando o multiplicador plástico a partir das tensões, deformações e variáveis históricas. Deste modo, o cálculo das derivadas do multiplicador plástico é dispensável simplificando assim a obtenção da matriz tangente consistente e consequentemente do algoritmo de integração. O algoritmo é explicado a seguir em um contexto generalizado utilizando as notações propostas por [Simo e Hughes \(1998\)](#) com a abordagem de deformações finitas apresentada por [Souza Neto *et al.* \(2008\)](#).

Diferentemente dos algoritmos propostos para pequenos deslocamentos e pequenas deformações, no algoritmo para deformações finitas a lei elástica é definida em termos da deformação logarítmica elástica e, o procedimento elástico de previsão/mapeamento de retorno tem $\varepsilon^e = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}^e$ como a variável cinemática a ser armazenada. Para cada incremento de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é assumido um estado de teste baseado em uma deformação puramente elástica, e o algoritmo é executado da seguinte forma:

(1) Dado o campo de deslocamento incremental $\Delta \mathbf{u}$, atualizar o gradiente de deformação

$$\mathbf{F}_\Delta := \mathbf{I} + \nabla_n[\Delta \mathbf{u}], \quad \mathbf{F}_{n+1} := \mathbf{F}_\Delta \mathbf{F}_n \quad (5.55)$$

onde $\mathbf{F}_\Delta$ é o gradiente de deformação incremental.

(2) Calcular o estado elástico inicial

$$\mathbf{B}_n^e := \exp(2\varepsilon_n^e) \quad (5.56a)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{e0} := \mathbf{F}_\Delta \mathbf{B}_n^e (\mathbf{F}_\Delta)^T \quad (5.56b)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{e0} := \frac{1}{2} \ln[\mathbf{B}_{n+1}^{e0}] \quad (5.56c)$$

$$\alpha_{n+1}^0 := \alpha_n \quad (5.56d)$$

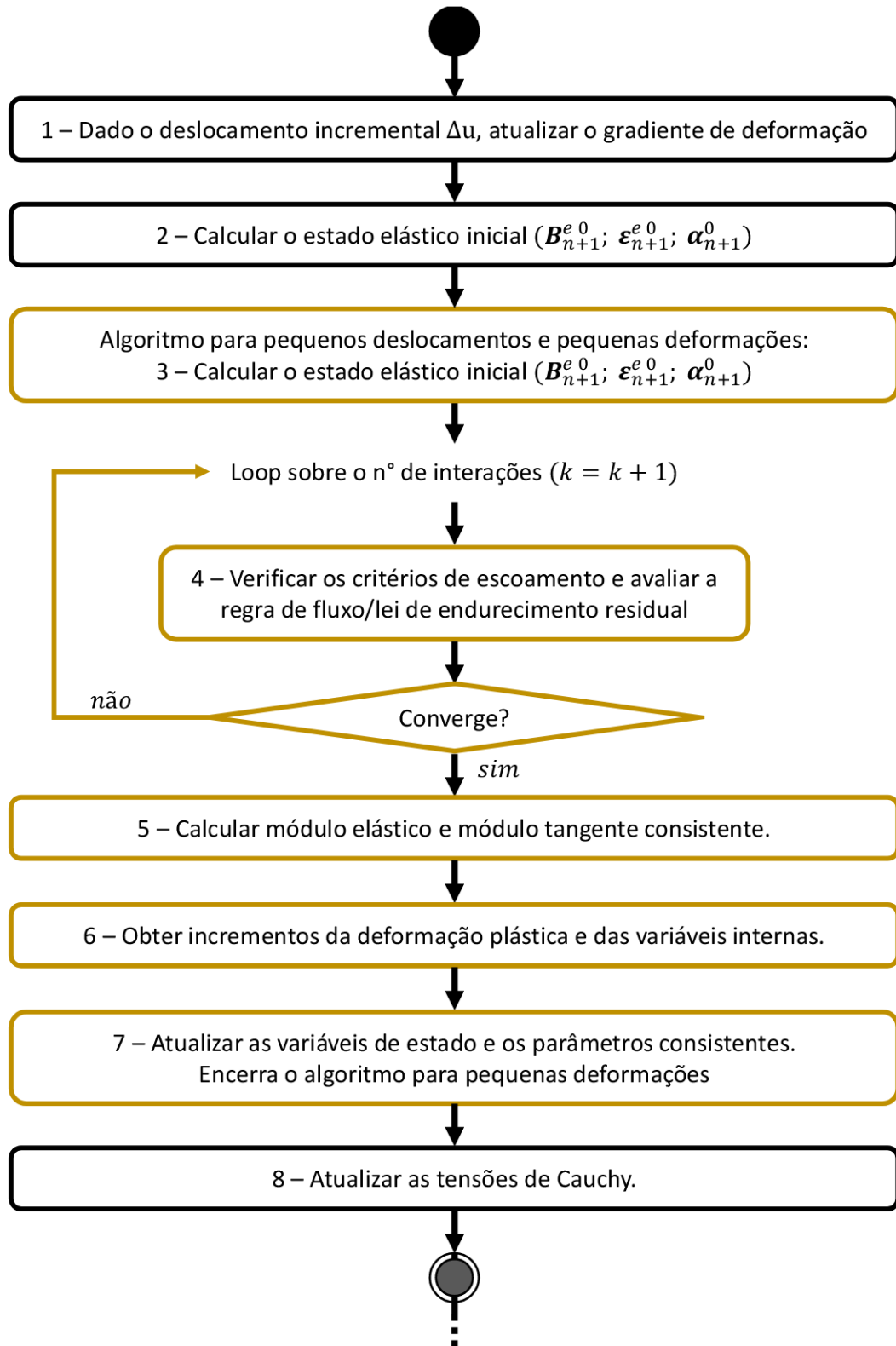


Figura 5.2: Diagrama de atividades para o algoritmo de retorno.

(3) Inicialize ε_{n+1}^p , $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, $\delta\gamma_{n+1} = 0$ e $\Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta\varepsilon_n^p$. Extrapolando explicitamente:

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p - \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1} \quad (5.57)$$

A característica do esquema implícito-explicito é que, ao contrário da integração implícita padrão, os valores de $\Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1}$ permanecem constantes durante o passo de tempo atual. Eles são independentes do valor atual das deformações ε_{n+1}^e e são conhecidos no início do passo de tempo $n + 1$.

(4) Verificar a condição de escoamento e avaliar os resíduos da regra de fluxo/lei de endurecimento. Calculado o estado elástico teste, prosseguir para o algoritmo de integração de deformações infinitesimais padrão para atualizar ε^e , α e as forças correspondentes τ e $\mathbf{A}$. A tensão elástica é então calculada

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{(k)} = \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}^{e0}) \quad (5.58)$$

onde W representa a energia elástica acumulada, dada por

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.59)$$

portanto

$$\nabla W = \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\tau} \quad (5.60)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^0(\boldsymbol{\varepsilon}^{e0}) \quad (5.61)$$

Em seguida, as variáveis internas são calculadas por

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(k)} = -\nabla \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) \quad (5.62)$$

sendo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.63)$$

onde $\mathbf{D}$ é o módulo plástico generalizado. Desta forma

$$\nabla \mathcal{H} = \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.64)$$

o que leva a

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{D}_{n+1}^{(k)} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} \quad (5.65)$$

portanto

$$\mathbf{D}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{T(k)} \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \quad (5.66)$$

Em casos simples, $\mathbf{D}$ é o módulo de endurecimento ($\mathbf{A}_{n+1}^{(k)} = -K \alpha_{n+1}^{(k)}$).

A função de escoamento pode ser avaliada a partir do estado de tensão teste dado pela Equação [5.61](#). Assim, a condição de escoamento é definida como

$$f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{A}_{n+1}^{(k)}) = \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} - \tau_y \leq 0 \quad (5.67)$$

onde $\phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{(k)})$ é a superfície de escoamento.

Finalmente, a lei de endurecimento residual é calculada por

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{p(k)} \\ -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n \end{Bmatrix} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{A}} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.68)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}$ são deformações plásticas de iteração, calculadas durante o processo iterativo, e $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ são as deformações plásticas do passo atual; $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$ e $\boldsymbol{\alpha}_n$ são as variáveis internas iterativas e correntes respectivamente; o multiplicador plástico iterativo ($\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}$) é calculado durante o algoritmo por $\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)}$; e $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ e $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{A}}$ são gradientes da regra de fluxo na iteração k .

A convergência é verificada de acordo com a função de escoamento e variáveis de estado de escoamento plástico residual

Se: $f_{n+1}^{(k)} < \text{TOL}_1$ e $\|\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}\| < \text{TOL}_2$ convergência alcançada;
Senão: Próximo passo.

(5) Calcular o incremento do módulo tangente consistente

$$\Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k)} - [\partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \quad \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)}]^T \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{[\partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \quad \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)}] \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix}^{(k)}} \quad (5.69)$$

O cálculo do parâmetro de consistência requer a solução de dois sistemas lineares, que são:

$$[\mathbf{N}_{n+1}^{(k)}]^{-1} \chi'_{n+1}^{(k)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \quad (5.70)$$

$$[\mathbf{N}_{n+1}^{(k)}]^{-1} \chi''_{n+1}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.71)$$

portanto

$$\chi'_{n+1}^{(k)} = \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \quad (5.72)$$

$$\chi''_{n+1}^{(k)} = \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.73)$$

(6) Calcular as deformações plásticas incrementais e as variáveis internas

Os incrementos $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ e $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$ podem ser calculados por

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}^{(k)} \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \left[\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix}^{(k)} \right] \quad (5.74)$$

assim como no passo (5), o algoritmo requer a solução de um sistema de equações lineares, dado por

$$[\mathbf{N}_{n+1}^{(k)}]^{-1} \mathcal{X}_{n+1}^{(k)} = \left[\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} \right]^{(k)} \quad (5.75)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{N}_{n+1}^{(k)} \left[\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{A}} f_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} \right]^{(k)} \quad (5.76)$$

(7) Atualizar as variáveis de estado e os parâmetros consistentes.

A atualização das variáveis correntes e dos incrementos é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}; \quad (5.77)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}; \quad (5.78)$$

$$\Delta \gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)}. \quad (5.79)$$

(8) Atualizar o tensor de tensões de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} := \det[\mathbf{F}_{n+1}]^{-1} \boldsymbol{\tau}_{n+1} \quad (5.80)$$

A vantagem dessa abordagem para problemas de elastoplasticidade é que a matriz constitutiva tangente $\mathbf{C}_{n+1}^{(k)}$ se torna constante, resultando na matriz de rigidez tangente elástica constante durante toda a análise (Prazeres *et al.*, 2015).

CAPÍTULO 6

VALIDAÇÃO DO ELEMENTO

Neste capítulo, um conjunto de problemas popularmente empregados em vigas, placas e cascas foi selecionado para avaliar o desempenho do elemento finito de casca geometricamente não linear implementado.

A convergência dos elementos finitos desempenha um papel fundamental na validação das análises numéricas. Independentemente do modelo de elementos finitos utilizado, é essencial que as características dos elementos atendam a condições específicas para garantir que, à medida que a malha é refinada, os resultados calculados se aproximem da solução analítica desejada. Isso é crucial para garantir a confiabilidade dos resultados obtidos em análises numéricas. Os modelos a seguir foram escolhidos para análise e validação do elemento de casca proposto:

- (1) Efeito da distorção da malha;
- (2) Problema da membrana de Cook;
- (3) Placas assimétricas;
- (4) Telhado de Scordelis-lo;
- (5) Placa Quadrada;
- (6) Coberturas cilíndricas articuladas - Casca abatida;
- (7) Casca esférica

As análises podem ser divididas em dois blocos. No primeiro bloco, que abrange as análises de 1 a 4, são realizados testes de convergência utilizando problemas lineares bem estabelecidos. Embora esses problemas geralmente envolvam geometrias, carregamentos e condições de contorno simples, eles proporcionam uma visão aprofundada sobre como as formulações dos elementos de casca convergem. Esses testes de convergência são uma parte crucial do processo de validação, pois ajudam a verificar se os elementos de casca são capazes de fornecer resultados confiáveis, especialmente quando soluções analíticas não estão disponíveis para problemas práticos. Portanto, a convergência dos elementos finitos desempenha um papel crítico na garantia da qualidade e da precisão das análises numéricas, mesmo em situações em que a resposta analítica é desconhecida.

No segundo bloco, de 5 a 7, são apresentados problemas da análise geometricamente não linear, para avaliar o desempenho do elemento em relação às técnicas de obtenção

das trajetórias de equilíbrio, permitindo a realização de análises utilizando a formulação Lagrangeana Total pelo MEFG.

Nas análises apresentadas neste capítulo, o elemento MEFGMITC4, apresentado no Capítulo 4.4.2, será utilizado com dois tipos de enriquecimentos. O primeiro deles é o enriquecimento com monômios de primeiro grau (denominado P1), que resulta em um espaço de aproximação quadrático com termos $(1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \ x^2y \ xy^2)$. Essa abordagem resulta em um espaço de aproximação equivalente ao das funções de forma do elemento quadrilateral de oito nós (MEF-Q8).

A matriz das funções de forma associadas a cada nó x_j é dada por:

$$N_j^T = \begin{bmatrix} N_j & 0 & \frac{x-x_j}{h}N_j & 0 & \frac{y-y_j}{h}N_j & 0 \\ 0 & N_j & 0 & \frac{x-x_j}{h}N_j & 0 & \frac{y-y_j}{h}N_j \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

O segundo tipo de enriquecimento envolve monômios de primeiro e segundo grau, denominado P2, gerando uma aproximação capaz de representar um espaço de aproximação cúbica com termos $(1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \ x^2y \ xy^2 \ x^3 \ y^3 \ x^3y \ xy^3)$. Esse enriquecimento permite uma representação ainda mais precisa das deformações e do comportamento do elemento na análise, tornando-o equivalente ao elemento quadrilateral de doze nós (MEF-Q12). Neste caso, a matriz das funções de forma associadas a cada nó x_j é dada por:

$$N_j^T = \begin{bmatrix} N_j & 0 & \frac{x-x_j}{h}N_j & 0 & \frac{y-y_j}{h}N_j & 0 \\ 0 & N_j & 0 & \frac{x-x_j}{h}N_j & 0 & \frac{y-y_j}{h}N_j \\ \left(\frac{x-x_j}{h}\right)^2 N_j & 0 & \left(\frac{y-y_j}{h}\right)^2 N_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{x-x_j}{h}\right)^2 N_j & 0 & \left(\frac{y-y_j}{h}\right)^2 N_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

6.1 Efeito da distorção da malha

6.1.1 Comportamento de Membrana

A fim de avaliar o efeito da distorção da malha para o comportamento de membrana, é realizada a análise de uma placa quadrada fina formada por elementos com geometria irregular. A geometria e os carregamentos adotados foram descritos em Ko *et al.* (2016). O padrão de distorção e os carregamentos adotados para este exemplo estão apresentados na Figura 6.1. A espessura da casca é igual a 1,0 unidade de comprimento, o módulo de elasticidade é $2,1 \times 10^6 \text{ uf}/\text{uc}^2$, o coeficiente de Poisson é 0,3 e a carga P é igual a 1,0 unidade de força.

Os resultados obtidos pelo elemento de casca MEFGMITC4 com enriquecimento P1 para a distorção apresentada e as diferentes condições de carregamento de contorno, são comparados com os resultados analíticos e com os resultados obtidos a partir do elemento

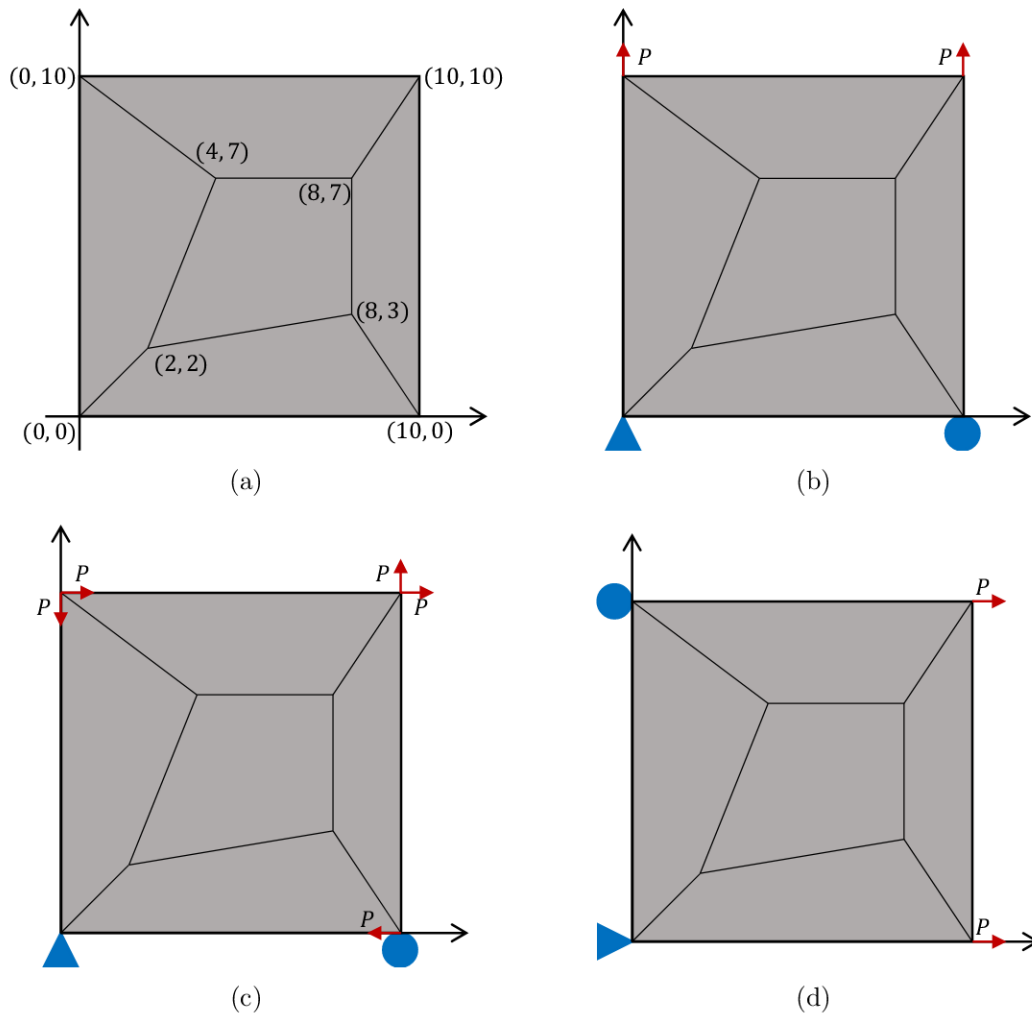


Figura 6.1: Patch test: (a) Geometria e malha; (b) - (d) Condições de carregamento e de contorno.

de casca MITC4+ proposto por Ko *et al.* (2016). Os resultados estão resumidos na Tabela 6.1

Tabela 6.1: Teste para verificar o efeito da distorção da malha

	Analítico			Ko <i>et al.</i> (2016)			MEFGMITC4			Resultado
	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	
Configuração I(b)	0	0,2	0	0	0,2	0	0	0,2	0	PASSOU
Configuração II(c)	0	0	0,2	0	0	0,2	0	0	0,2	PASSOU
Configuração III(d)	0,2	0	0	0,2	0	0	0,2	0	0	PASSOU

6.2 Problema da Membrana de Cook

Para testar o comportamento de membrana do elemento MEFGMITC4 quando submetido a flexão e cisalhamento no plano, foi analisada uma placa trapezoidal fixada em

uma extremidade e sujeita a uma carga de flexão distribuída no plano (Figura 6.2), conhecida na literatura como problema da membrana de Cook. Neste exemplo, apresentado por Simo *et al.* (1989), a robustez da formulação de elementos finitos é testada em função da topologia de malha assimétrica empregada, predominando deformações de cisalhamento no plano.

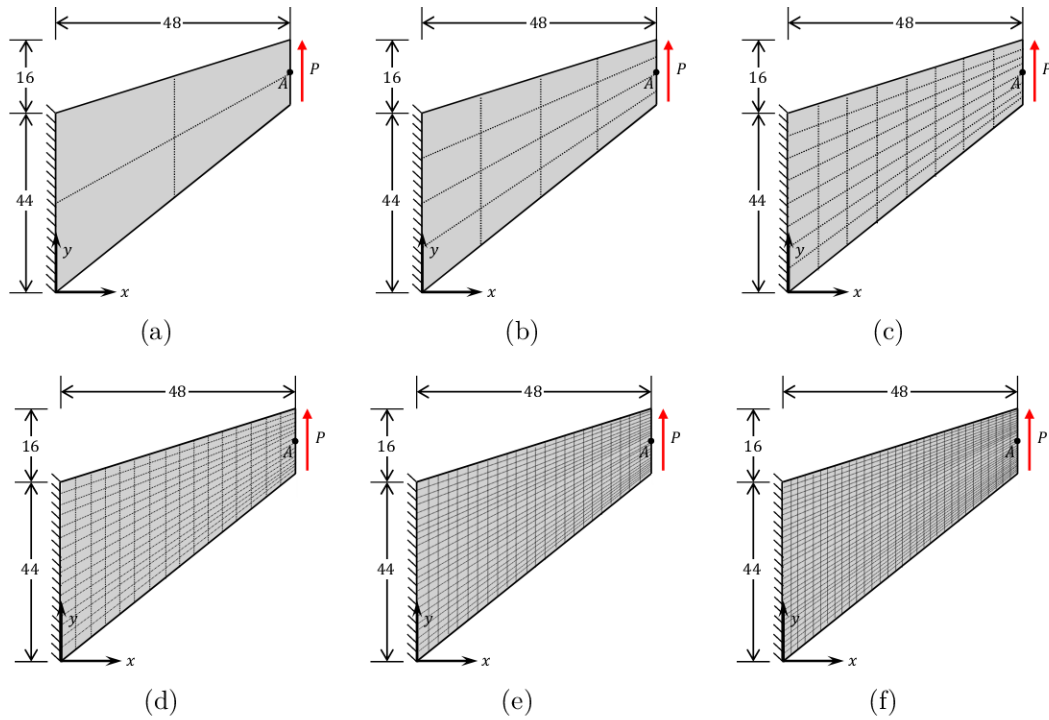


Figura 6.2: Problema da membrana de Cook: Geometria e condições de contorno. Malhas a) 2×2 , b) 4×4 , c) 8×8 , d) 16×16 , e) 24×24 , f) 32×32

O objetivo principal deste teste é avaliar corretamente o deslocamento vertical do ponto médio da extremidade livre da viga na direção da força aplicada. O deslocamento vertical no ponto A deve convergir para 23,91, que é a solução de referência adotada (Simo *et al.*, 1989), à medida que a malha vai sendo refinada. Os parâmetros de geometria e do material aplicados são: 1,0 uc para a espessura, $1,0 \text{ uf/uc}^2$ para o módulo de elasticidade, 0,33 para o coeficiente de Poisson e 1,0 uf para a carga P .

O gráfico da Figura 6.3 apresenta os deslocamentos do ponto A obtidos com o elemento de casca implementado utilizando um enriquecimento P1, à medida que o refinamento da malha vai aumentando. Os resultados obtidos são comparados com diversos resultados obtidos na literatura, e revelam que o elemento apresenta desempenho semelhante aos resultados apresentados pela literatura, convergindo para a solução de referência e validando o comportamento no plano do elemento de casca.

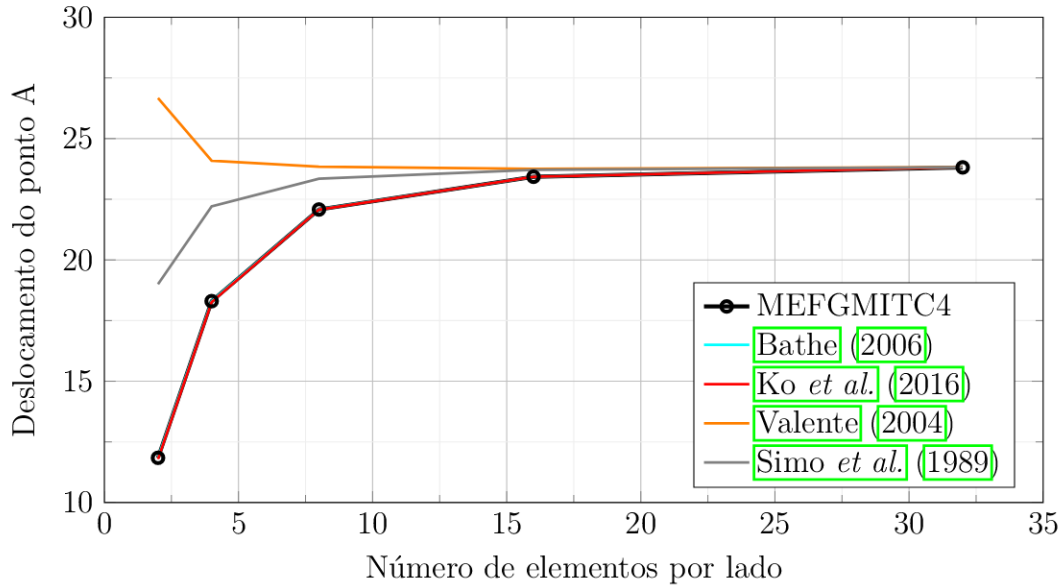


Figura 6.3: Viga em balanço de Cook - Verificação da convergência com refinamento de malha

6.3 Placas assimétricas

Outro problema de referência usado para testar a eficiência de elementos de casca, com o objetivo de verificar a influência da distorção e do travamento por cisalhamento transversal, são as placas assimétricas simplesmente apoiadas. A ideia, mais uma vez, é avaliar o desempenho do comportamento à flexão dos elementos de casca com o uso do MEFG, enriquecido por monômios de primeiro grau, quando utilizados em malhas grosseiras e distorcidas.

Serão utilizados dois tipos de distorção, a distorção de 30° (Figura 6.4(a)), que caracteriza o problema da placa originalmente proposto por Morley (1963) e a distorção de 60° (Figura 6.4(b)), introduzida por Razzaque (1973).

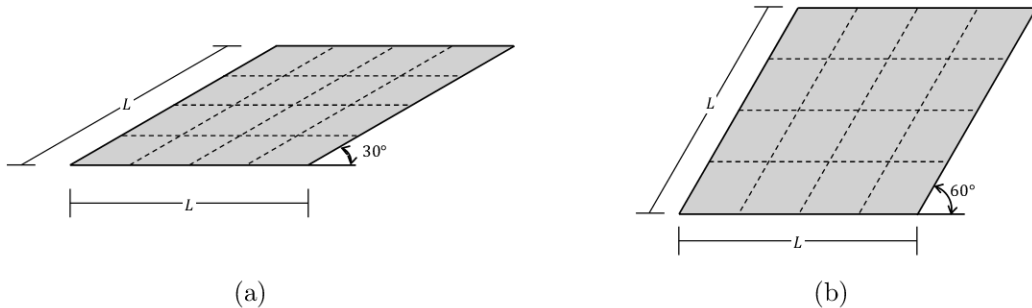


Figura 6.4: Placas assimétricas: (a) Placa de Morley; (b) Placa de Razzaque.

As soluções de referência para esses problemas são fornecidas para o caso de placas finas. Para ambos os problemas foram consideradas nas análises os conjuntos de malha compreendendo 4×4 , 8×8 , 16×16 e 32×32 elementos de casca.

6.3.1 Placa de Morley

A placa avaliada neste teste é simplesmente apoiada em suas arestas, com rotações livres em ambas as direções. Este é um problema específico, pois momentos principais teoricamente infinitos vão ocorrer nos cantos obtusos da placa, um com sinal positivo e outro com sinal negativo. Essa propriedade única resulta em uma convergência mais lenta para a solução correta na análise de elementos finitos.

Uma relação comprimento/espessura característica $L/t = 100$ é empregada ($L = 100 \text{ uc}$ e $t = 1 \text{ uc}$). Além disso, as propriedades do material utilizadas foram o módulo de elasticidade de $E = 10^5 \text{ uf/uc}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As condições de carregamento são representados por uma pressão uniformemente distribuída de $q = 1 \text{ uf/uc}^2$.

A solução analítica considerando as hipóteses de placas finas foi fornecida por Morley (1963) e é dada por:

$$w = \frac{10^3 w_c D}{q L^4} \quad (6.3)$$

onde D é a rigidez a flexão da placa dada por $D = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$ e w é o deslocamento central normalizado e assume o valor de limite de 0,408 para os parâmetros geométricos e do material adotados.

Os resultados da análise de elementos finitos são mostrados no gráfico da Figura 6.5. Os resultados obtidos com a formulação proposta são comparados com os resultados apresentados por Bathe e Dvorkin (1984), Simo e Rifai (1990), Andelfinger e Ramm (1993) e Valente (2004), tomando como referência a solução analítica proposta por Morley.

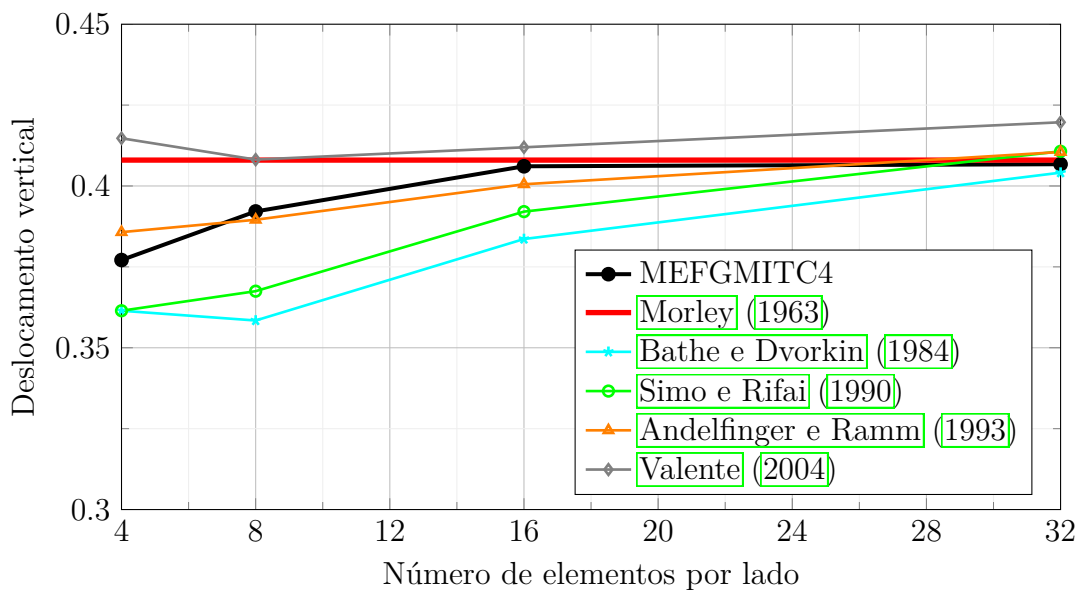


Figura 6.5: Placa de Morley - Verificação da convergência com refinamento de malha

A análise da placa de Morley costuma ser de difícil solução, mas com base nos resulta-

dos obtidos para a deflexão da placa, ficou evidente a excelente precisão alcançada com o uso do MEFG, visto que a solução converge para a resposta exata com uma malha 16×16 .

6.3.2 Placa de Razzaque

O problema de placa assimétrica proposto por Razzaque apresenta uma estrutura simplesmente apoiada em duas arestas opostas e livre nas outras duas arestas (Figura 6.4(b)). O razão comprimento/espessura adotada é $L/t = 1000$ ($L = 100 \text{ uc}$ e $t = 0,1 \text{ uc}$), o módulo de Elasticidade adotado é $E = 1092 \text{ uf/uc}^2$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. Assim como na placa de Morley foi adotada um carga uniformemente distribuída de $q = 1 \text{ uf/uc}^2$.

Razzaque adotou um modelo de diferenças finitas de placa fina em uma malha de 16×16 pontos como solução de referência, que é dada aqui em termos de deslocamento transversal central normalizado

$$w = \frac{10^2 w_c D}{q L^4} = 0,7945 \quad (6.4)$$

Os resultados da análise de elementos finitos são mostrados no gráfico da Figura 6.6 em comparação com a solução proposta por Razzaque (1973) e pelos resultados encontrados por Bathe e Dvorkin (1984), Ayad *et al.* (1998) e Guo *et al.* (2013). Pode-se destacar aqui, que a apesar da malha mais grosseira (4×4) apresentar um erro maior do que o aferido em outros elementos para a mesma malha, o elemento MEFGMITC4 consegue convergir para a solução com uma malha 8×8 .

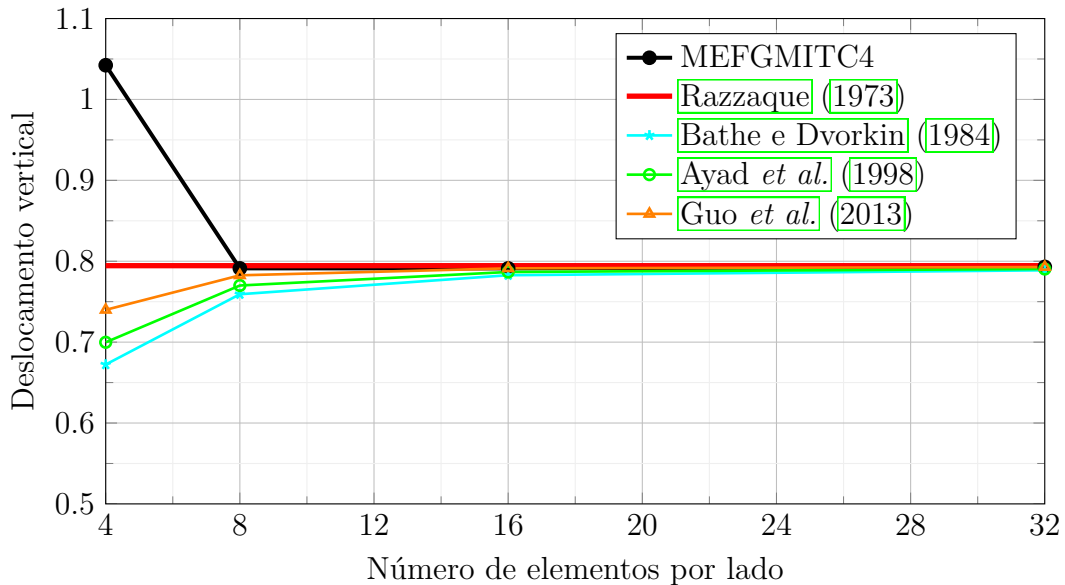


Figura 6.6: Placa de Razzaque - Verificação da convergência com refinamento de malha

Da mesma forma que o problema de Morley, a placa de Razzaque é conhecida por ser

de difícil convergência. Isso ressalta ainda mais a capacidade do elemento MEFGMITC4, que potencializado pela insensibilidade do método dos elementos finitos generalizados à distorção dos angular dos elementos, apresenta alta precisão e robustez, mesmo quando utilizando malhas pouco refinadas.

Um ponto particularmente interessante nesta análise é a forma como ocorre a convergência para a solução de referência com o uso do elemento MEFGMITC4. Como pode-se observar no gráfico da Figura 6.6, com maior destaque para a malha 4×4 , ela ocorre por valores superiores à solução de referência. Esse comportamento contrasta com o observado nas soluções apresentadas pela literatura, onde a convergência ocorre sempre por valores inferiores à solução de referência. Uma explicação para esse tipo de convergência pode ser a flexibilidade conferida à solução pelo MEFG, devido ao aumento dos graus de liberdade por nó obtidos através do enriquecimento. No entanto, estudos mais aprofundados sobre esta questão precisam ser feitos.

6.4 Telhado cilíndrico de Scordelis-Lo

O problema do telhado proposto por Scordelis e Lo (1964) é mostrado na Figura 6.7. Neste exemplo, uma casca cilíndrica rasa suportada por diafragmas rígidos está sujeita ao seu peso próprio, levando a um problema dominado pela resposta do comportamento de membrana. A base física do problema consiste em um teto arqueado apoiado apenas em suas bordas curvas de modo que a forma curva seja mantida inalterada. Essas condições de contorno se refletem como $u = w = \phi_y = 0$. A geometria é tal que o ponto central do telhado (ponto de vértice) se move para cima sob a carga de peso próprio direcionada para baixo.

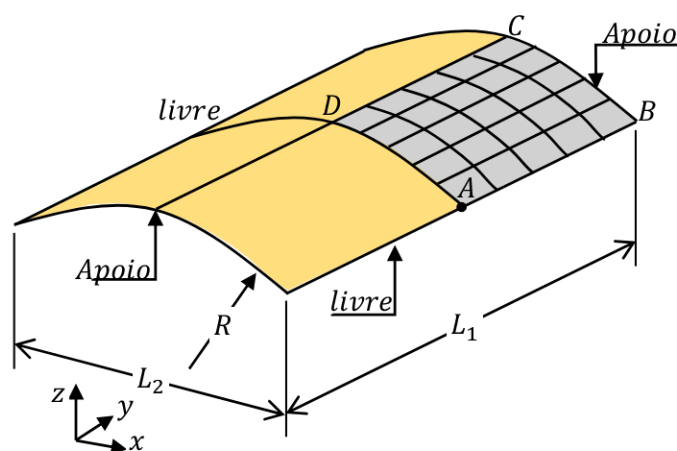


Figura 6.7: Telhado cilíndrico: Geometria, condições de contorno e condições de carregamento.

Devido à simetria, apenas um quarto da estrutura do telhado, correspondente à região sombreada ABCD da Figura 6.7 é modelada. Foram adotadas os seguintes valores para a

geometria e para as propriedades do material: $L_1 = 50,0 \text{ uc}$, $L_2 = 32,14 \text{ uc}$, $R = 25,0 \text{ uc}$, uma espessura $t = 0,25 \text{ uc}$, o módulo de elasticidade $E = 4,32 \times 10^8 \text{ uf/uc}^2$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$ são utilizados. As magnitudes de carga correspondentes ao peso próprio da estrutura são dimensionadas usando a densidade $\rho = 360 \text{ uf/uc}^3$.

Para este problema, o deslocamento vertical no ponto médio da borda livre (ponto A) é monitorado em comparação com a solução numérica de referência $w = 0,3024 \text{ uc}$ (Belytschko *et al.*, 1985). As soluções são obtidas usando malhas de elementos do tipo $N \times N$ ($N = 5, 7$ e 9). Para fins de comparação, os valores de deslocamento obtidos com os elementos propostos por Valente (2004) e Ko, Lee, Lee e Bathe (2017) são considerados.

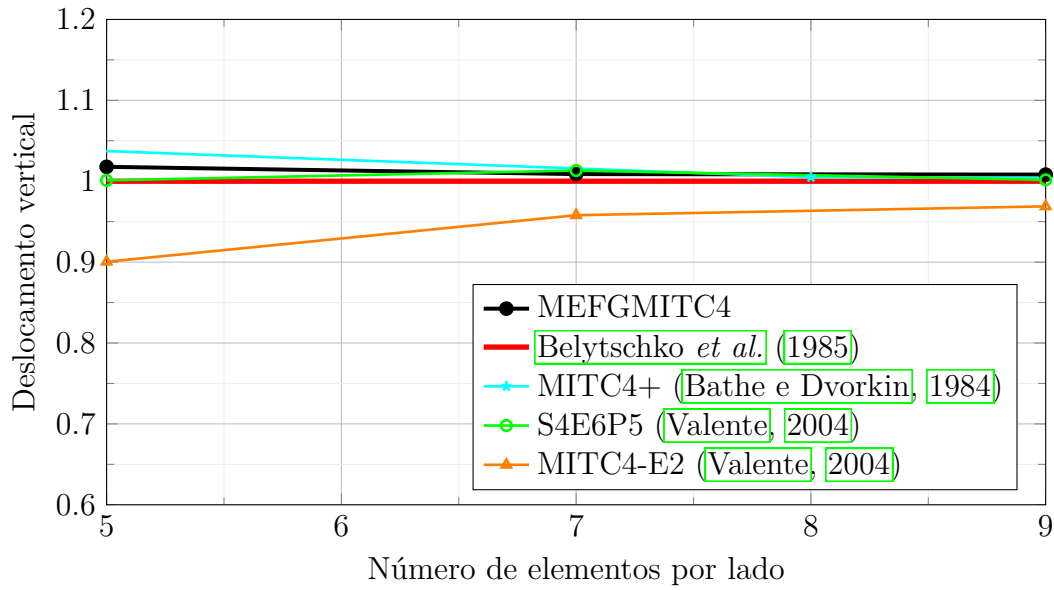


Figura 6.8: Telhado de Scordelis-Lo - Verificação da convergência com refinamento de malha

O gráfico da Figura 6.8 apresenta a convergência do deslocamento normalizado no centro da aresta livre (w_A/w_{ref}). Pelo gráfico podemos observar que elemento MEFGMITC4 apresenta um excelente desempenho, e mesmo para a malha menos refinada, conduz praticamente ao resultado de referência.

6.5 Placa quadrada

6.5.1 Placa isotrópica

Neste exemplo, analisa-se uma placa quadrada isotrópica submetida a uma carga uniformemente distribuída, conforme mostrado esquematicamente em 6.9. Este exemplo foi tratado incluindo formulações de casca em Buechter *et al.* (1994), Miehe (1998), Valente (2004) e Reddy (2003).

Um dos objetivos deste exemplo é ilustrar e aferir a qualidade dos elementos de casca implementados nas análises em que as não linearidades geométricas governam a solução,

destacando principalmente o potencial do uso do MFEG. As propriedades geométricas da placa são definidas pelo comprimento total $L = 304,8$ mm e pela espessura $t = 0,6096$ mm (Reddy, 2003). A placa é submetida a uma carga uniformemente distribuída de $q_0 = 33,61$ MPa. O material utilizado na composição é linear e suas propriedades são dadas pelo módulo de elasticidade $E = 53.780$ MPa e o coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$. As condições de contorno restringem apenas os deslocamentos nas arestas ($u = v = w = 0$).

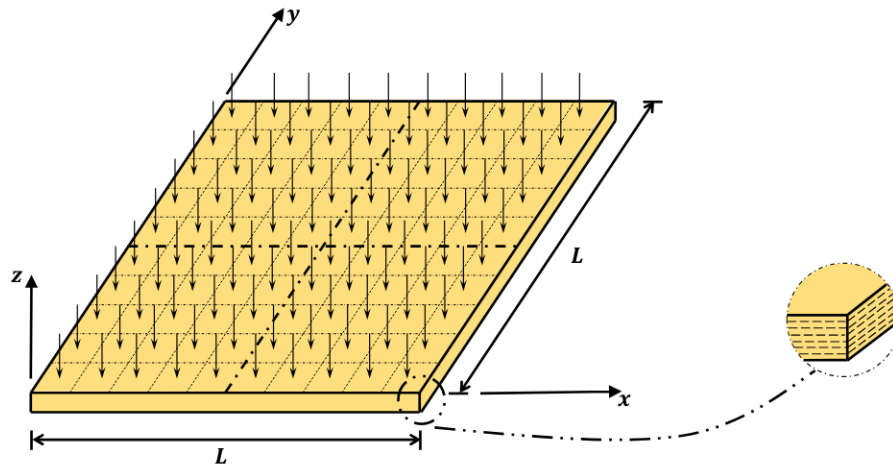


Figura 6.9: Placa Isotrópica

Foram utilizadas dois tipos de malhas na simulação. O primeiro consiste em 100 elementos quadrilaterais de oito nós para análise via MEF convencional (341 nós e 1705 graus de liberdade) e o segundo tipo considera 100 elementos quadrilaterais de quatro nós para a análise via MEFG (121 nós e 1415 graus de liberdade). Um enriquecimento do tipo P1 (polinômio do primeiro grau) está associado a todos os nós.

Para a realização da análise não linear, foi adotado o método de controle de carga, assumindo um parâmetro de carga $P = q_0 L^4 / Et^4$ com $\Delta P = 6,25$. Foi adotada uma tolerância para convergência de 1×10^{-4} para as forças.

A relação entre o deslocamento vertical (w_c) do nó central da placa e o fator de carga para os modelos considerados é apresentada na Figura 6.10 e na Tabela 6.2. Como pode ser observado, as trajetórias de equilíbrio estão de acordo com os resultados advindos do trabalho de Reddy (2003) utilizado aqui como solução de referência.

Algumas conclusões podem ser extraídas da comparação dos resultados provenientes das análises via MEF e MEFG. Um comportamento equivalente ao resultado de referência pode ser obtido com elementos de ordem superior, como o quadrilátero de oito nós. No entanto, com a estratégia de enriquecimento MEFG, aproximações de diferentes graus polinomiais podem ser facilmente combinadas, tornando possível obter uma resposta estrutural a partir da utilização de elementos menos sofisticados (quadriláteros de 4 nós), conforme ilustrado na Figura 6.10, muito próxima daquela observada pela solução de referência. Apesar de apresentar um erro de 7,50% (Tabela 6.2) para o primeiro ponto de convergência da análise, a estratégia de enriquecimento polinomial aplicada consegue

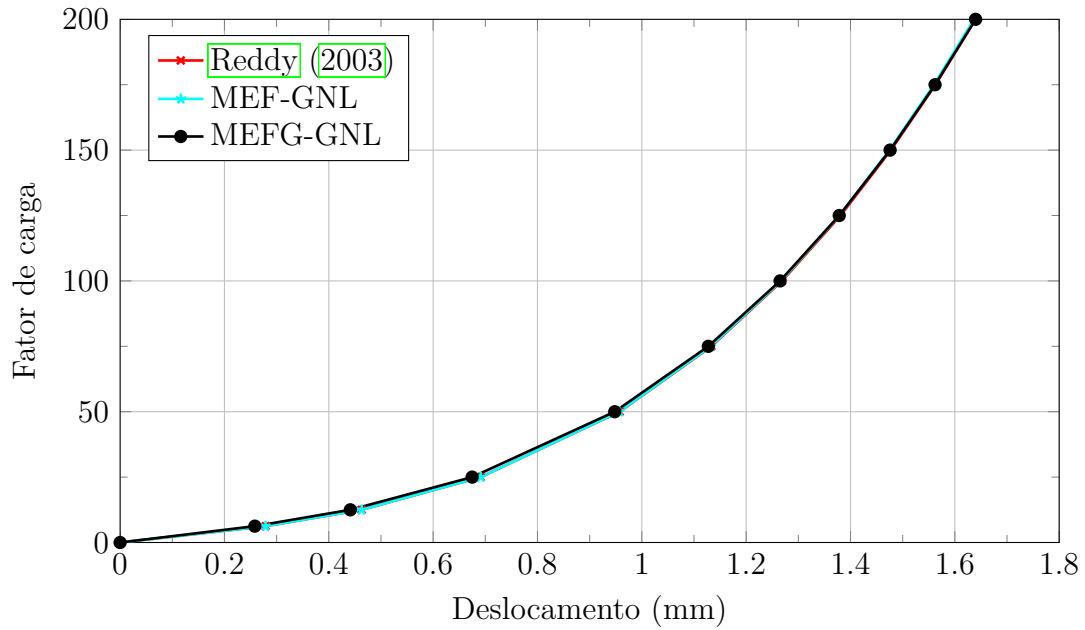


Figura 6.10: Placa isotrópica - trajetória de equilíbrio: Fator de carga $\times$ Deslocamento do nó central

convergir para a solução de referência, resultando em uma trajetória de equilíbrio praticamente coincidente com a resposta descrita pelo MEF. Deve-se destacar ainda que a estratégia de enriquecimento polinomial deve ser utilizada com prudência, pois apesar de contribuir para uma melhora na qualidade da solução, ela pode acabar onerando de maneira sensível o tempo de processamento.

Tabela 6.2: Deslocamento w_c do nó central para o problema da placa isotrópica

ΔP	Referência	MEF-GNL	Erro(%)	MEFG-GNL	Erro(%)
6,25	0,2790	0.2790	0,00	0.2580	7,50
12,5	0,4630	0.4630	0,00	0,4413	4,70
25,0	0,6911	0.6911	0,00	0,6747	2,37
50,0	0,9575	0.9569	0,01	0,9481	0,98
75,0	1,1333	1,1321	0,01	1,1247	0,75
100,0	1,2688	1,2670	0,14	1,2649	0,30
125,0	1,3809	1,3786	0,17	1,3783	0,19
150,0	1,4774	1,4748	0,17	1,4759	0,10
175,0	1,5628	1,5599	0,18	1,5621	0,04
200,0	1,6398	1,6367	0,19	1,6397	0,00

6.5.1.1 Placa Ortotrópica

Neste exemplo, a aplicação dos elementos de casca com o MEFG combinado com a decomposição da seção em camadas é explorado. O objetivo principal é avaliar a evolução

do campo de deslocamentos de pontos sobre uma placa quadrada ortotrópica submetida a cargas distribuídas.

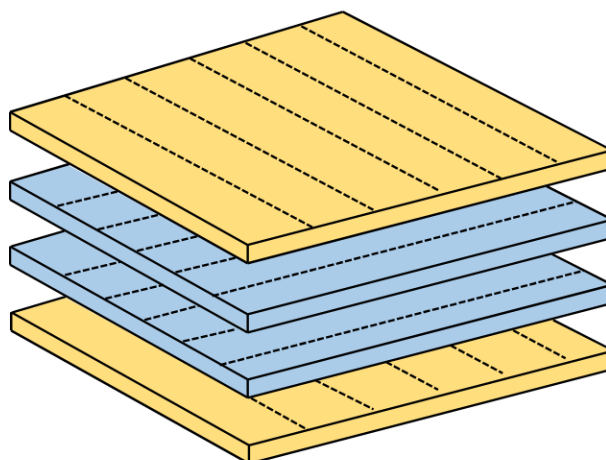


Figura 6.11: Placa ortotrópica

A placa ortotrópica possui um comprimento total $L = 304,8$ mm e espessura $t = 2,24$ mm, discretizada em quatro camadas de mesma espessura (0,56 mm por camada). Conforme ilustrado na Figura 6.11, as camadas foram orientadas de maneira simétrica em $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$. Um material linear elástico foi utilizado, com as seguintes propriedades: módulos de elasticidade $E_1 = 12.600$ MPa e $E_2 = 12.630$ MPa, módulos de cisalhamento $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 2.150$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,2395$. Nesta configuração, assume-se que a placa está fixada nas bordas ($u = v = w = 0$ nas arestas) e aplica-se uma carga uniformemente distribuída, $q_0 = 6,895$ kPa.

Nesta simulação, uma malha de 100 elementos quadrilaterais de quatro nós foi adotada para a análise do MEF convencional, enquanto uma malha de 36 elementos quadrilaterais de quatro nós foi usada para o MEFG com enriquecimento polinomial do tipo P2 (equivalente à aproximação do elemento quadrilateral de doze nós do MEF), associado a todos os nós.

Para a solução, o método de controle de carga foi novamente adotado, com 12 incrementos de carga e um parâmetro de carga de $\Delta P = 0,2$, com uma tolerância à convergência de 1×10^{-4} para as forças. O gráfico da Figura 6.12 e a Tabela 6.3 comparam a deflexão do nó central obtida nas análises com os resultados numéricos obtidos por Reddy (2003) para essas malhas específicas.

Assim como observado no caso da placa isotrópica, a análise utilizando o elemento implementado forneceu resultados bastante próximos dos obtidos por Reddy (2003). É interessante notar que mesmo para uma malha menos refinada (6 x 6 elementos), a estratégia de enriquecimento do MEFG foi capaz de reproduzir a resposta correta da estrutura. Os resultados sugerem que para placas inicialmente planas, tanto isotrópicas quanto lamelares, o elemento de casca implementado apresenta bons resultados.

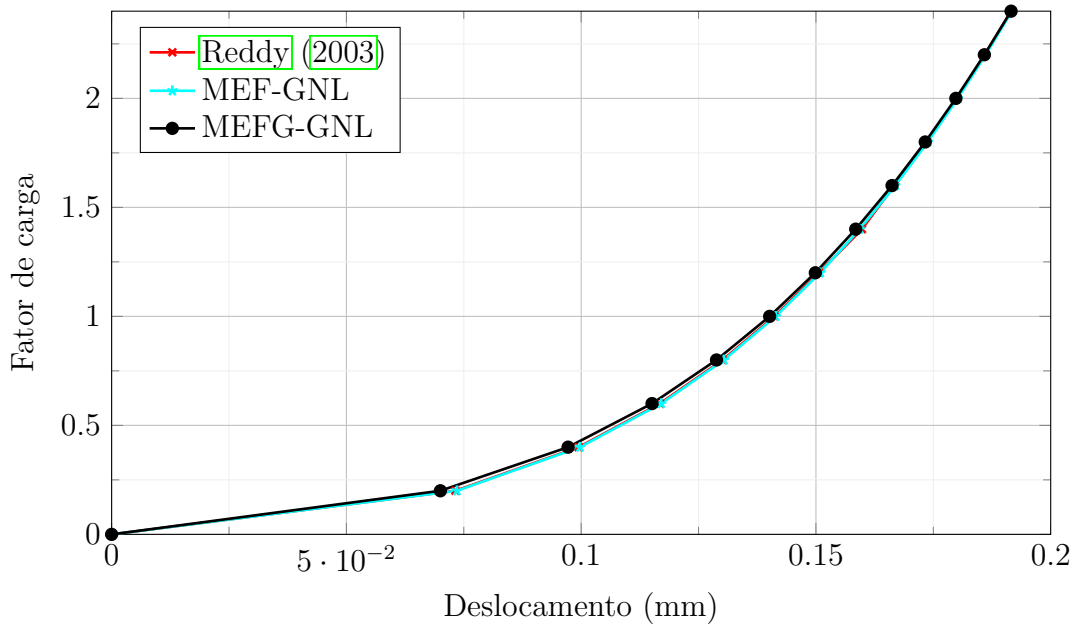


Figura 6.12: Placa Ortotrópica - Trajetória de equilíbrio: Fator de carga $\times$ Deslocamento do nó central

Tabela 6.3: Deslocamento w_c do nó central para o problema da placa ortotrópica

ΔP	Referência	MEF-GNL	Erro(%)	MEFG-GNL	Erro(%)
0,2	0,07324	0,07353	0,40	0,07266	0,80
0,4	0,09946	0,09973	0,27	0,09994	0,48
0,6	0,11677	0,11704	0,23	0,11807	1,11
0,8	0,13012	0,13038	0,20	0,13206	1,49
1	0,14116	0,14141	0,17	0,14362	1,74
1,2	0,15067	0,15090	0,16	0,15356	1,91
1,4	0,15980	0,15931	0,31	0,16233	1,58
1,6	0,16670	0,16688	0,11	0,17022	2,11
1,8	0,17360	0,17380	0,11	0,17742	2,20
2	0,18001	0,18019	0,10	0,18405	2,24
2,2	0,18597	0,18614	0,09	0,19021	2,28
2,4	0,19156	0,19171	0,08	0,19597	2,30

6.6 Coberturas cilíndricas articuladas - Casca abastida

Nesta simulação é analisada a resposta de uma cobertura semicilíndrica articulada isotrópica e laminada, que está sujeita a uma força de compressão central (Figura 6.13). Este problema tem sido amplamente estudado em vários trabalhos, destacando-se Simo e Rifai (1990), Peng e Crisfield (1992), Flores *et al.* (1995), Sze e Zheng (1999), Sze *et al.* (2002), Valente (2004), Sze *et al.* (2004); Carrera *et al.* (2020), Wu *et al.* (2021), Pagani *et al.* (2021), e é particularmente popular devido a possibilidade de verificar não

linearidades geométricas em elementos de casca.

As dimensões do telhado apresentado na Figura 6.13 são $L = 508,0 \text{ uc}$, $\theta = 0,1 \text{ rad}$ e $R = 2540,0 \text{ uc}$. Duas espessuras diferentes foram usadas nas simulações $t_1 = 12,70 \text{ uc}$ e $t_2 = 6,35 \text{ uc}$. Os parâmetros do material isotrópico são $E = 3102,75 \text{ uf/uc}^2$ e $\nu = 0,3$. Para o material ortotrópico, $E_1 = 3300 \text{ uf/uc}^2$, $E_2 = 1100 \text{ uf/uc}^2$, $G_{12} = 660 \text{ uf/uc}^2$ e $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$ com duas camadas diferentes $[0^\circ = 90^\circ = 0^\circ]$ e $[90^\circ = 0^\circ = 90^\circ]$. O nível máximo de carga atingido é $P = 3000 \text{ uf}$.

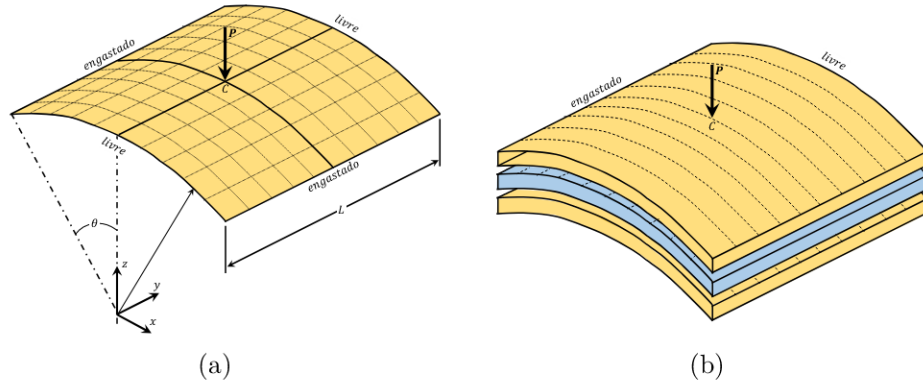


Figura 6.13: Telhado cilíndrico articulado submetido a uma força de compressão central. (a) Geometria e malha de elementos finitos; (b) Estrutura em camadas

Na simulação adotou-se o modelo MEEG-GNL com a casca discretizada em 100 elementos quadriláteros de quatro nós (121 nós e 1595 graus de liberdade) e enriquecimento do tipo P1 associado a todos os nós (Figura 6.14(a)). A solução não linear apresentada fez uso do método do comprimento de arco, e uma tolerância para a convergência no deslocamento do nó central de $1 \times 10^{-3} \text{ uc}$.

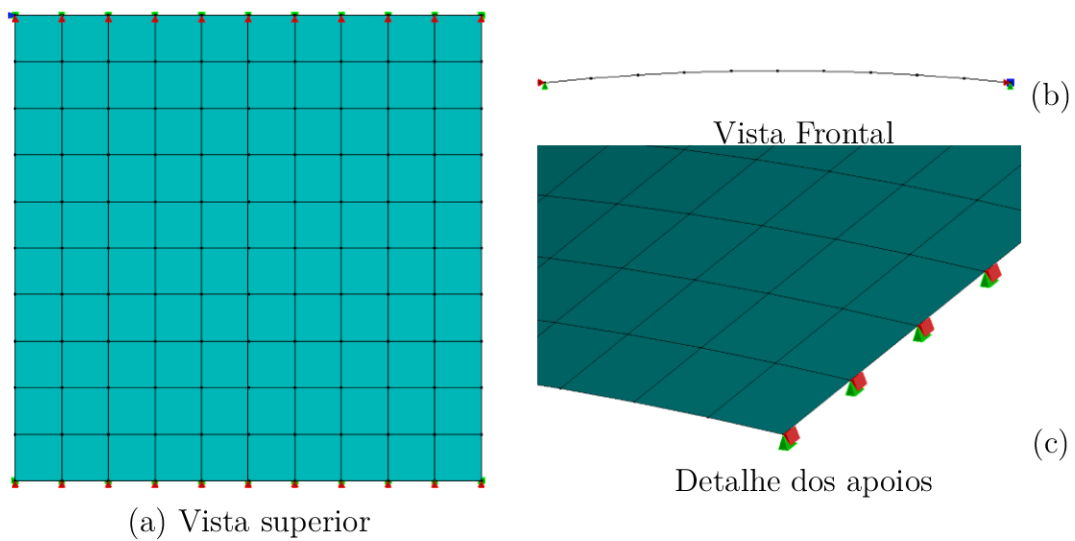


Figura 6.14: Telhado cilíndrico articulado submetido a uma força de compressão central.

As arestas retas da estrutura são articuladas enquanto as arestas curvas estão livres para se deslocar (Figura 6.14(b)-(c)). Esta condição de contorno induz um comporta-

mento instável apresentado nos gráficos das Figuras 6.15-6.17, onde são representadas as deflexões do nó central da casca (ponto C). Os resultados obtidos são comparados com os resultados apresentados por Sze *et al.* (2004), sendo evidente a boa concordância entre todas as soluções.

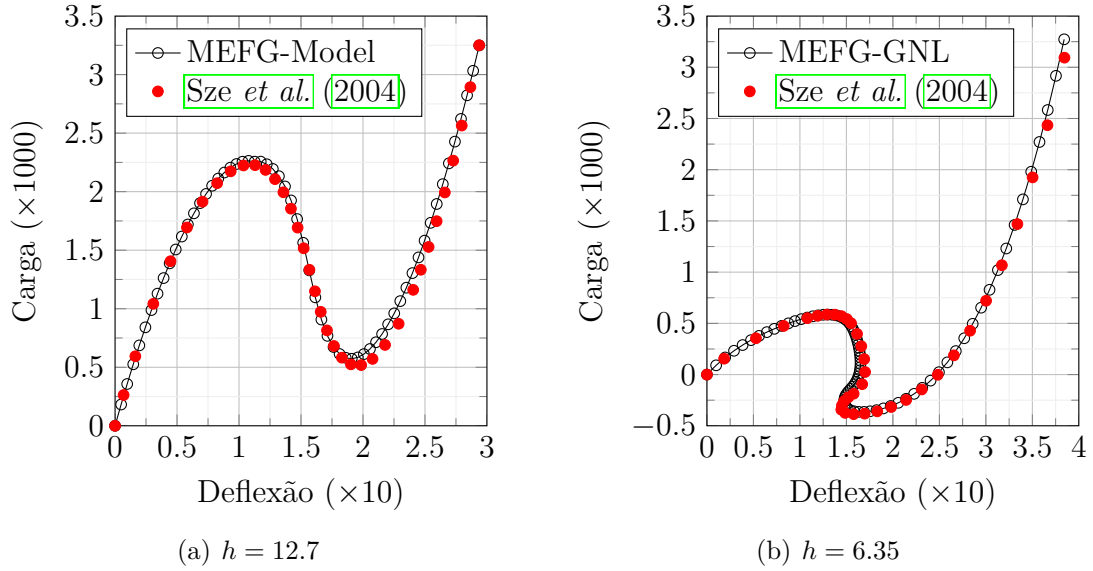


Figura 6.15: Telhado cilíndrico - Isotrópico

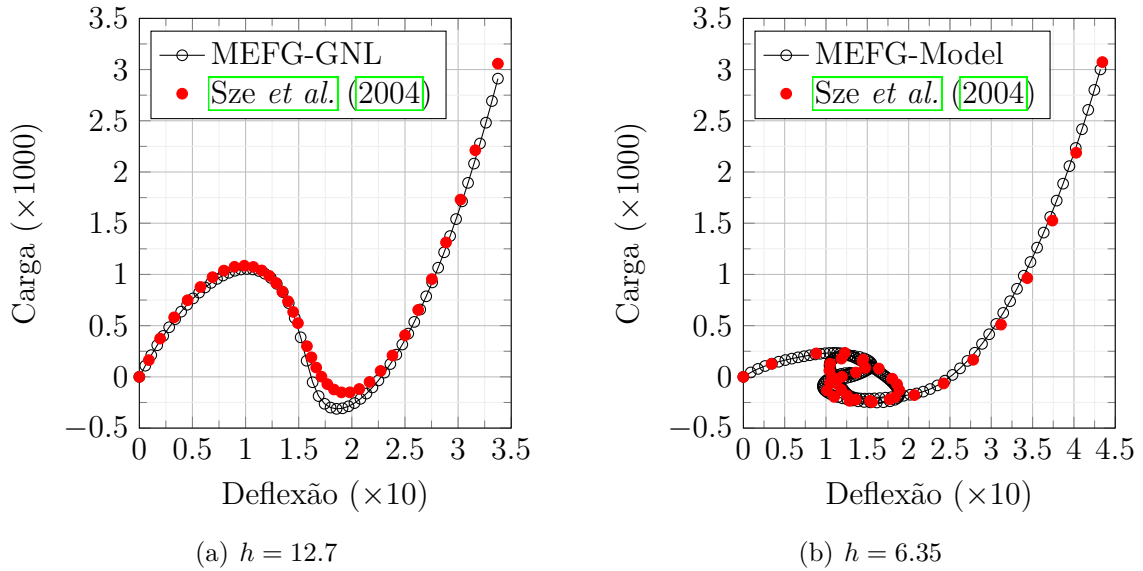


Figura 6.16: Telhado cilíndrico - Ortotrópico [$0^\circ = 90^\circ = 0^\circ$]

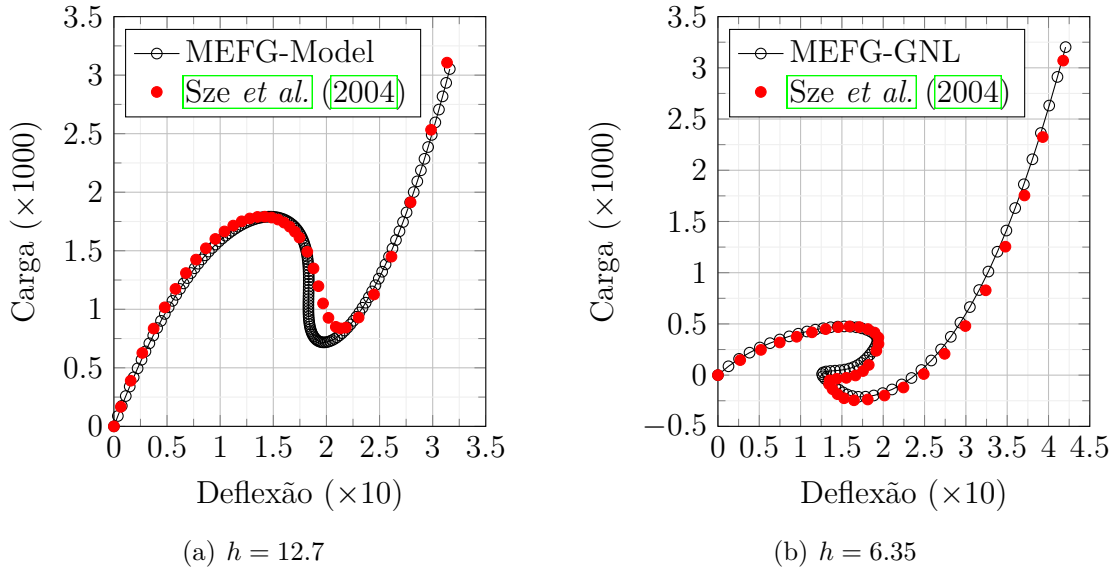


Figura 6.17: Telhado cilíndrico - Ortotrópico [$90^\circ = 0^\circ = 90^\circ$]

Conforme observado, independentemente da espessura utilizada, a casca isotrópica demonstra maior rigidez em comparação com a casca laminada, devido à baixa rigidez do compósito no sentido transversal às fibras (E_2). Um ponto que chama a atenção nas análises das Figuras 6.16(a) e 6.17(a), é que após o primeiro ponto crítico de carga, as respostas com a utilização do MEFG se mostraram um pouco mais flexíveis do que a resposta de referência (apresentando uma pequena divergência), mas logo após voltaram a convergir novamente. Deve-se também destacar nas cascas de menor espessura que, além dos pontos críticos de carga, ocorre o surgimento de pontos críticos de deslocamento, o que inviabiliza o uso dos métodos de controle de carga e de deslocamento para a obtenção da trajetória de equilíbrio.

Este exemplo também permite que possa se avaliar a influência da modificação da orientação das fibras na resposta mecânica da estrutura. Nota-se em ambas as análises que o comportamento das cascas laminadas é similar durante o trecho linear inicial da trajetória de equilíbrio. Entretanto, à medida que os deslocamentos aumentam, surgem diferenças significativas na rigidez entre os dois casos, mais acentuadas no caso de maior espessura.

As Figuras 6.18 apresentam as isoformas dos deslocamentos transversais, w , juntamente com a configuração deformada das cascas isotrópicas correspondentes aos pontos críticos apresentados nos gráficos da Figura 6.15. Conforme claramente demonstrado nos gráficos, é possível observar uma considerável variação no comportamento das placas em decorrência da alteração em sua espessura. Na Figura 6.18(d), é possível ainda identificar o fenômeno amplamente reconhecido como "snap-back," que ocorre quando se atinge um ponto de redução nos deslocamentos.

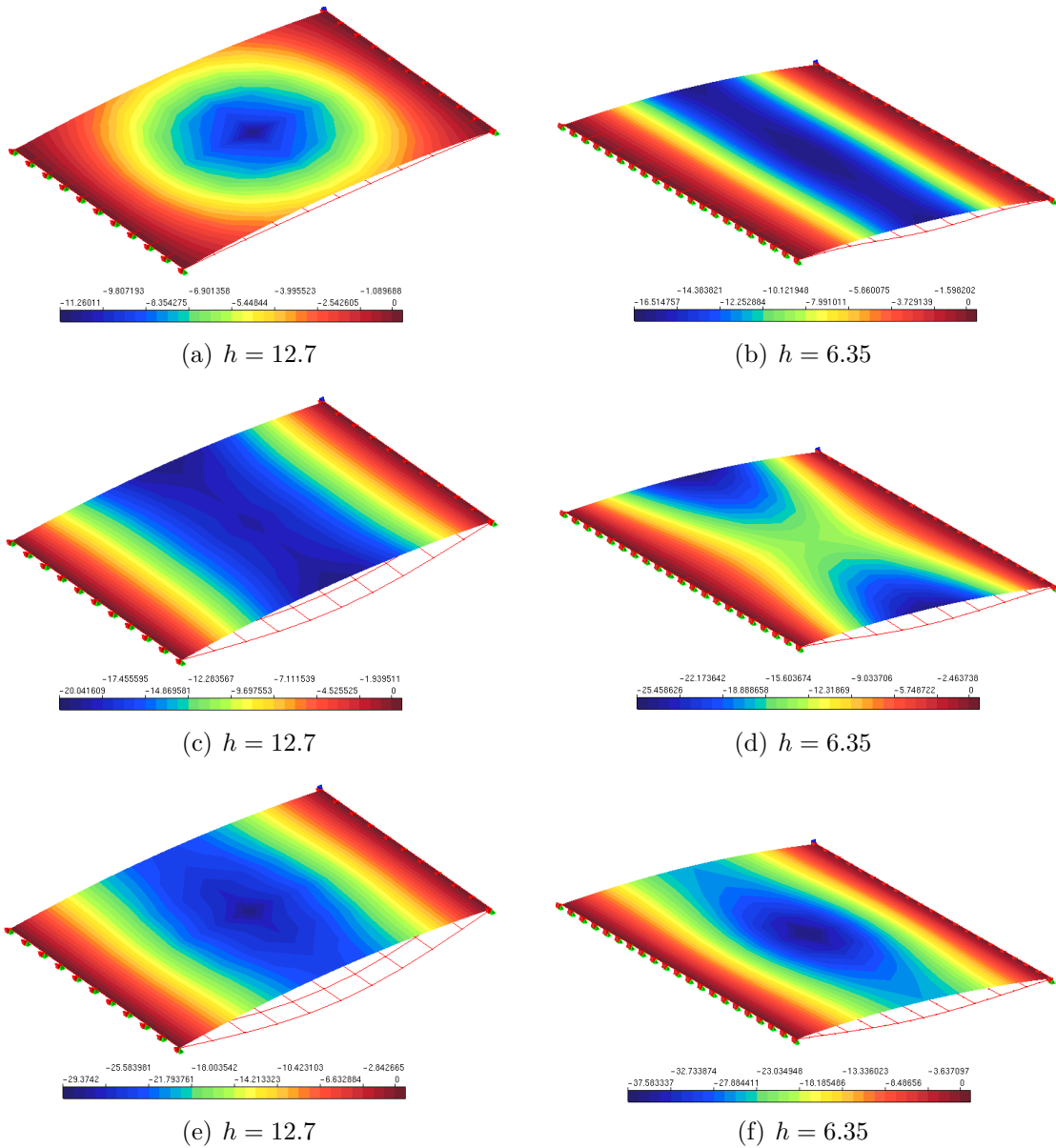


Figura 6.18: Telhado cilíndrico - Isotrópico - Deformada

As Figuras [6.19](#) exibem as isoformas para os pontos críticos dos deslocamentos transversais da casca ortotrópica com espessura de $6,35mm$ e orientação das fibras em $0^\circ = 90^\circ = 0^\circ$. Este modelo apresenta um caminho de equilíbrio notadamente distinto dos demais, conforme evidenciado no gráfico da Figura [6.16](#). Nessa análise identificamos a existência de dois pontos críticos de carregamento e dois pontos críticos de deslocamento. O que torna essa análise particularmente intrigante é o comportamento da casca, que exibe um movimento oscilatório caracterizado por alternâncias entre carregamento e descarregamento, acompanhado pelo alívio dos deslocamentos.

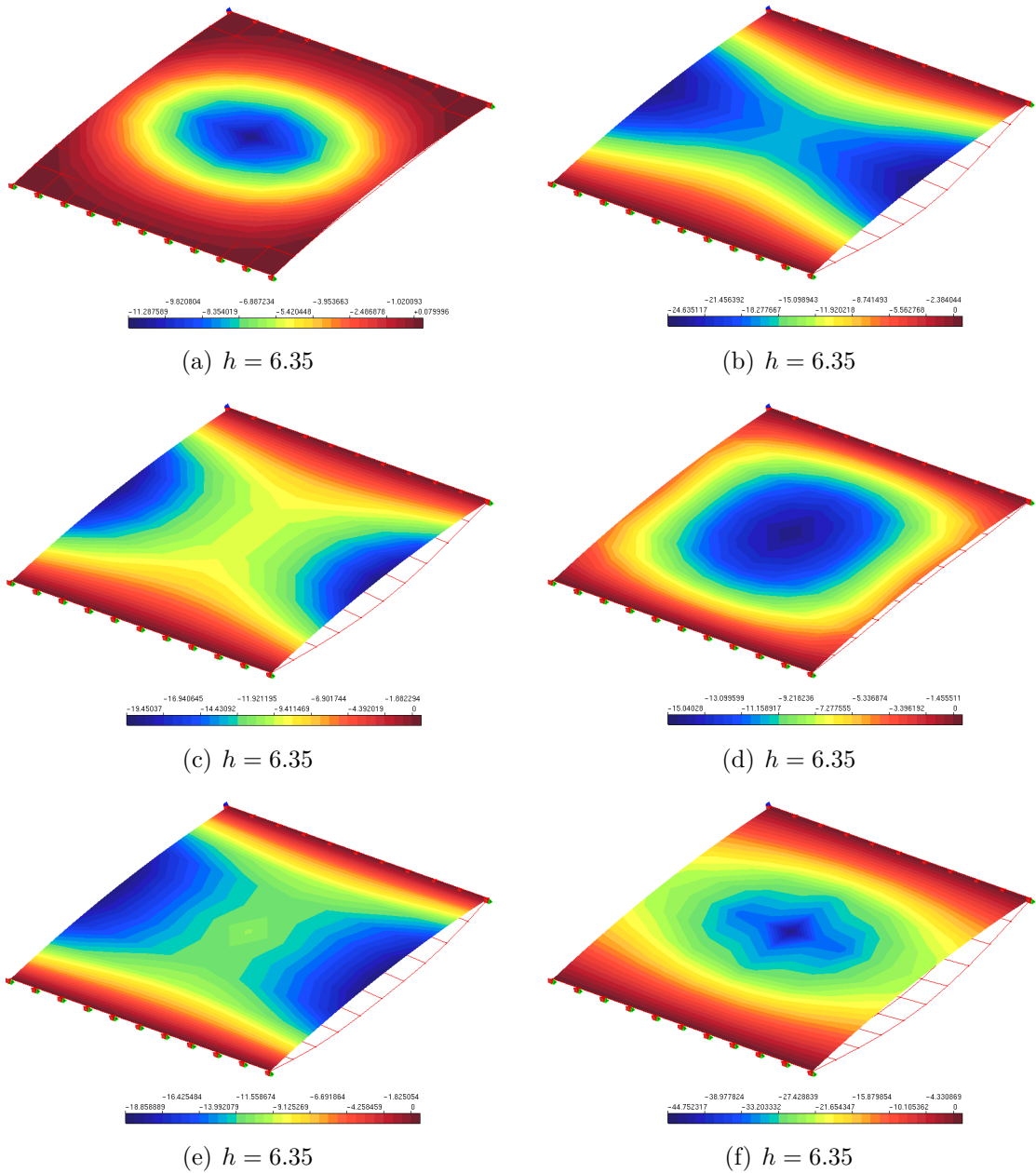


Figura 6.19: Telhado cilíndrico - Ortotrópico $[0^\circ = 90^\circ = 0^\circ]$ - Deformada

6.7 Casca esférica

Neste exemplo, analisa-se a resposta a grandes deslocamentos de uma casca esférica submetida a uma carga concentrada. Os detalhes da geometria e do carregamento estão ilustrados na Figura [6.20](#). A estrutura foi modelada com elementos finitos quadrilaterais de quatro nós do tipo MEF-GNL e enriquecimento P2 associado a todos os nós. O material utilizado para modelar a casca é mais uma vez linear elástico, com as seguintes propriedades: Módulo de elasticidade $E = 68,95$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A geometria da placa é definida pelo lado $a = 1568,81$ mm, pelo raio $R = 2540$ mm e pela

espessura $t = 99,45$ mm.

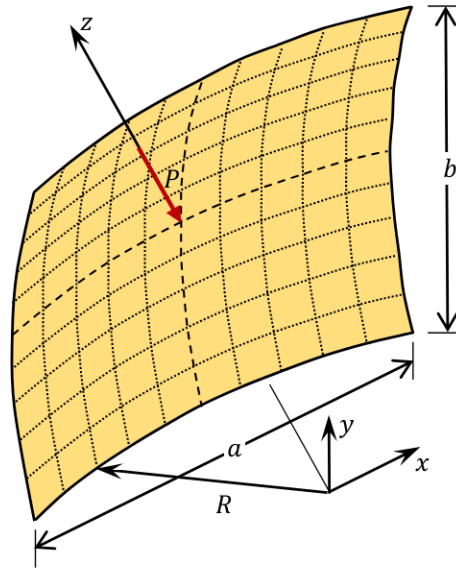
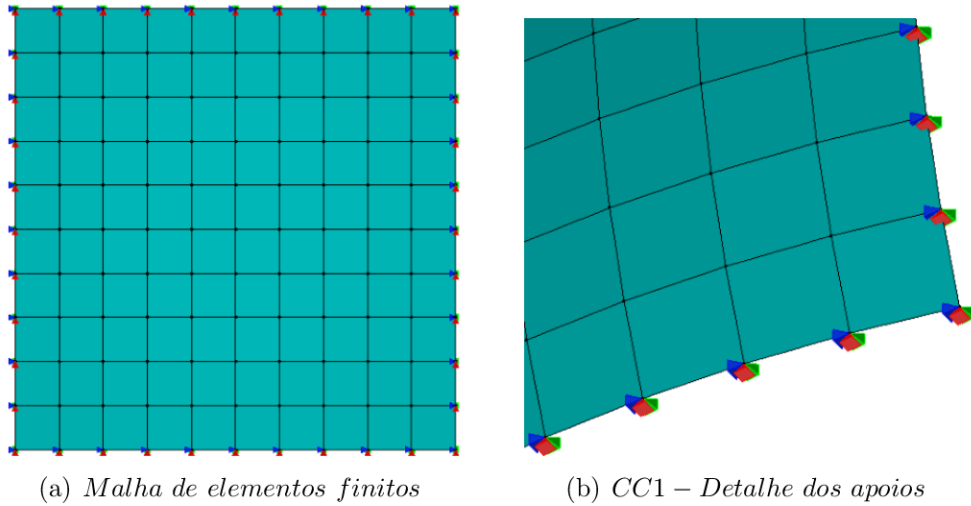


Figura 6.20: Casca esférica - Geometria e carregamento

Esta estrutura foi estudada anteriormente por Reddy (2003) para as condições de contorno definidas como CC1 ($x = \pm a : u = v = w = 0$ e $y = \pm b : u = v = w = 0$), utilizando elementos finitos de 4 e 9 nós (Figura 6.22). Nesta primeira etapa a análise não linear geométrica é comparada com os resultados correspondentes disponíveis na literatura.



(a) Malha de elementos finitos

(b) CC1 – Detalhe dos apoios

Figura 6.21: Casca esférica

Para a solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incrementando-se de $-5,00$ mm o deslocamento vertical do nó central da estrutura, com tolerância para convergência de 1×10^{-4} e a carga $P = 1$ N/mm. A trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga é mostrada na Figura 6.22.

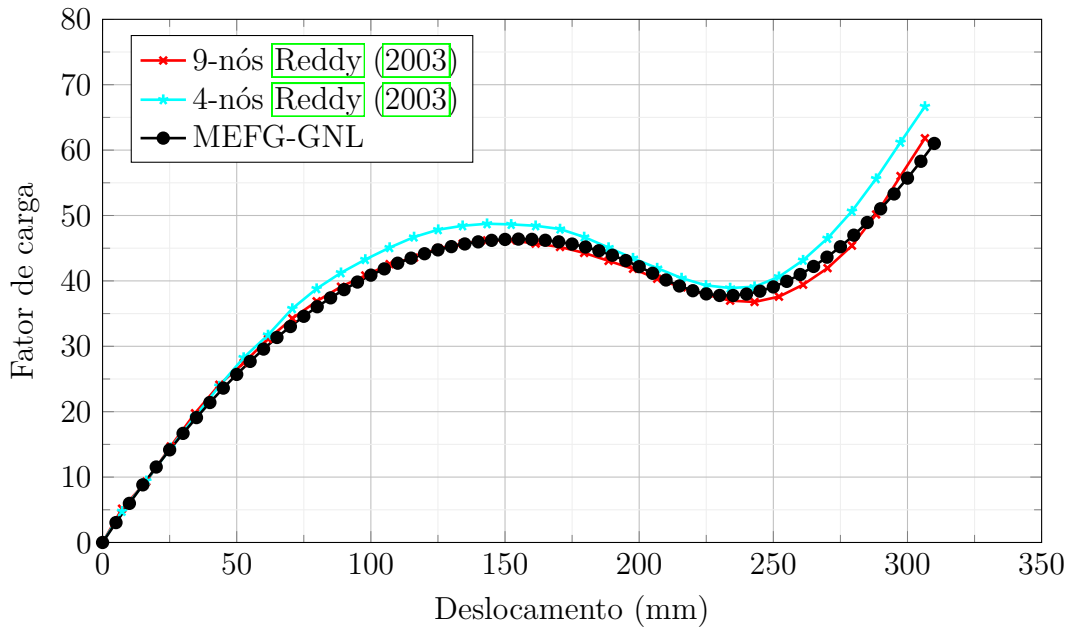


Figura 6.22: Casca esférica - Trajetória de equilíbrio: Fator de carga $\times$ Deslocamento do nó central.

Com base nos resultados apresentados nas curvas exibidas na Figura 6.22, pode-se observar uma boa concordância entre o resultado alcançado com o elemento de casca enriquecido e o elemento de 9 nós empregado por Reddy (2003). Essa correspondência valida as implementações realizadas, demonstrando sua capacidade de reproduzir resultados obtidos com malhas e elementos sofisticados, mesmo quando utilizando malhas menos refinadas.

A fim de investigar a eficiência do método para satisfazer as várias condições de contorno na análise não linear da casca, três condições de contorno adicionais são modeladas (Figura 6.23). As condições de contorno assumidas para este exemplo são definidas como:

(CC2) $x = \pm a : u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0$ e $y = \pm b : u = v = w = 0$;

(CC3) $x = \pm a : u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0$ e $y = \pm a : u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0$;

(CC4) $x = \pm a : u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0$;

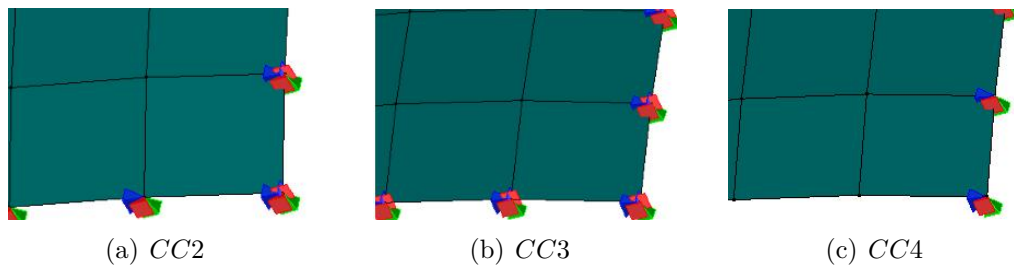


Figura 6.23: Casca esférica

Comparando os resultados apresentados nos gráficos da Figura 6.24, nota-se que o comportamento é semelhante durante o trecho inicial linear da curva. Esses resultados

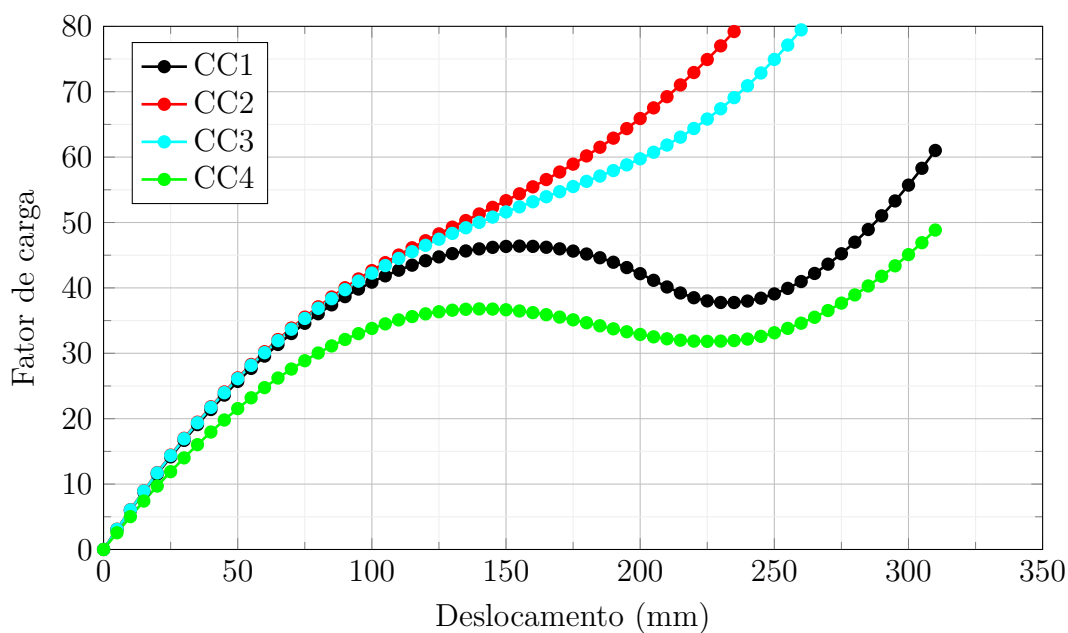


Figura 6.24: Casca esférica - Variação das condições de contorno

confirmam a necessidade da abordagem não linear, especialmente quando consideramos a influência das condições de contorno na resposta da estrutura. A diferença entre as cargas críticas no trecho linear e os valores de carga nos pontos limite do caminho carga-deslocamento da solução não linear varia significativamente (dependendo das condições de contorno). Isso destaca como as condições de contorno desempenham um papel fundamental na resposta da estrutura e por que a análise não linear é essencial para uma avaliação mais precisa.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO COM DEFORMAÇÕES FINITAS

Neste capítulo, são apresentadas simulações numéricas para validar a implementação e a generalização do modelo constitutivo. As simulações foram baseadas em casos clássicos da literatura, destacando as características individuais do modelo de deformações finitas.

Dentre os problemas estabelecidos para análise e validação dos modelos, têm-se:

- (1) viga em balanço;
- (2) chapa tracionada com furo;
- (3) flexão pura de uma barra;
- (4) placa circular com carregamento uniforme;

Para a análise incremental, as iterações de Newton-Raphson foram realizadas em cada etapa considerando a tolerância de 10^{-6} . É importante observar que uma tolerância de convergência tão pequena é usada essencialmente para enfatizar as taxas quadráticas de convergência obtidas pela adoção do módulo tangente consistente com o algoritmo de mapeamento de retorno.

7.1 Viga em balanço

O primeiro problema apresentado é o colapso plástico de uma viga em balanço modelada com 2×50 elementos quadrilaterais de oito nós. A configuração geométrica, o carregamento, as condições de contorno e a malha de elementos finitos são mostrados na figura 7.1.

Foram utilizados os modelos de von Mises e de Drucker-Prager, considerando módulo de elasticidade de 210,0 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e tensão de escoamento de 0,24 GPa. Com base no trabalho de [Nguyen *et al.* \(2020\)](#), um endurecimento linear de 0,4 GPa foi inserido nesta análise em condições de estado plano de tensões.

A solução analítica para a carga limite de colapso da viga apresentada neste problema

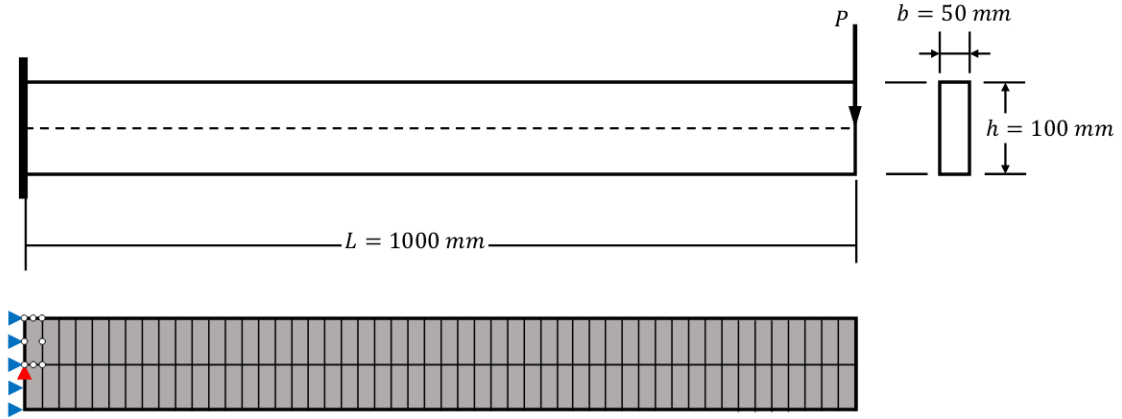


Figura 7.1: Viga em balanço: geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto *et al.*, 2008).

foi fornecida por Lubliner (1990). A carga limite analítica é dada por

$$P_{lim} = \frac{\sigma_y b h}{4L} \quad (7.1)$$

em que b e h são a largura e a altura da seção transversal, respectivamente, e L o comprimento total da viga. Para a geometria e propriedades do material apresentados, o limite de carga analítico é $P_{lim} = 30,0$ kN.

A análise não linear foi processada utilizando o método de controle de deslocamento generalizado descrito em Yang e Shieh (1990), com incremento de deslocamento de 0,05 mm. A figura 7.2 apresenta as trajetórias de equilíbrio “Carga aplicada × Deslocamento vertical” correspondentes ao deslocamento do nó de aplicação da carga.

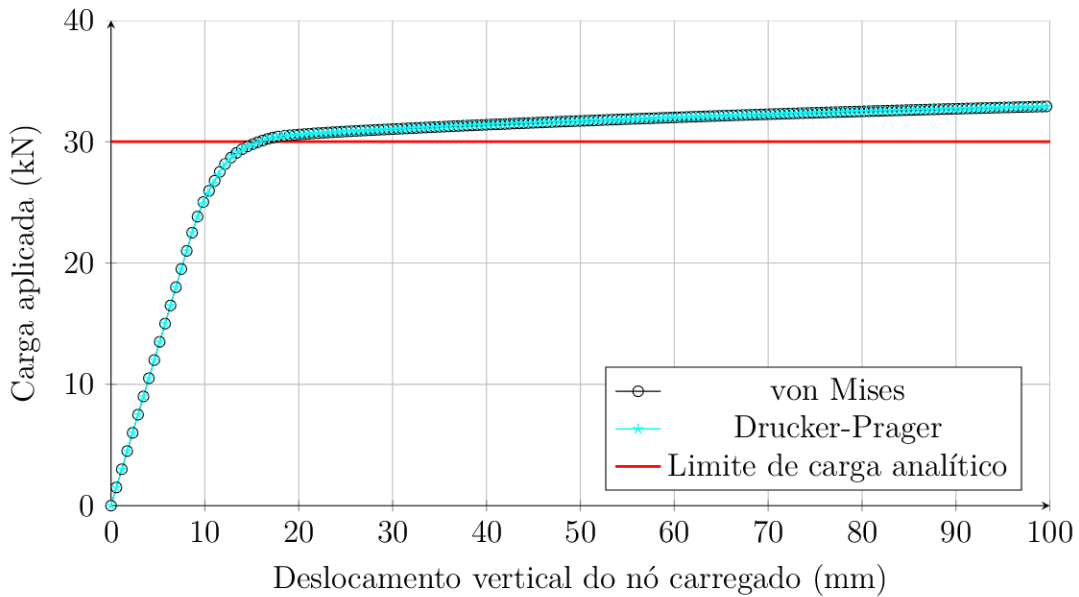


Figura 7.2: Viga em balanço: Carga aplicada × Deslocamento vertical para a viga em balanço.

Os deslocamentos, estado de tensões e deformações plásticas quando a carga de colapso delimitada pela resposta analítica é atingida, são mostrados na Figura 7.3. Observa-se

os deslocamentos e a carga limite plástica obtidos com o modelo de deformações finitas são consistentes com a solução analítica ressaltando-se que o deslocamento vertical máximo (100 mm) é de 10% do comprimento da viga, o que significa um deslocamento grande e significativo, que resulta em grandes deformações plásticas próximas ao apoio da viga. Observa-se nas figuras 7.3(a) e 7.3(b) que grandes deslocamentos e também grandes deformações plásticas são atingidos.

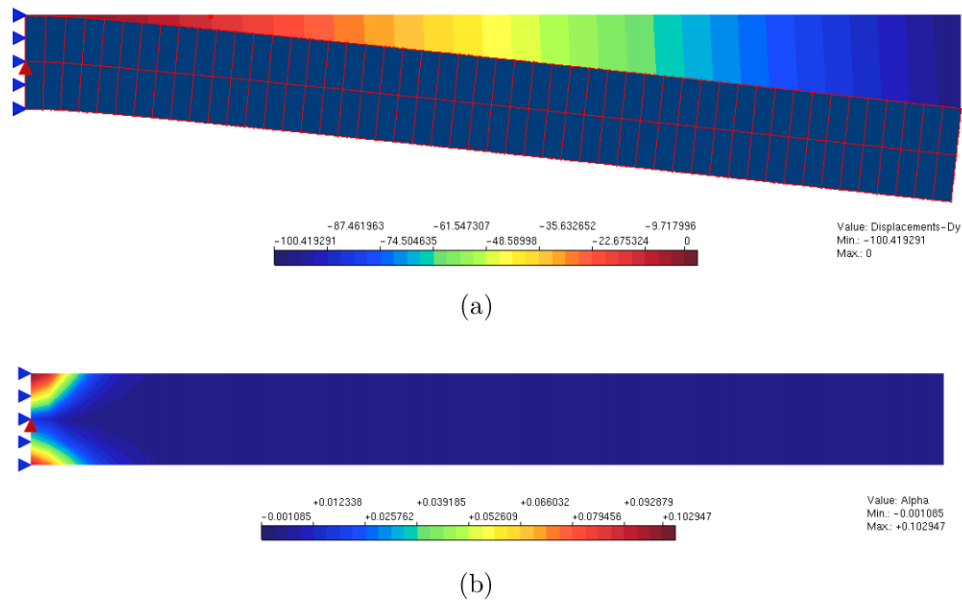


Figura 7.3: Viga em balanço: (a) Malha deformada; (b) Deformações plásticas acumuladas associadas ao hardening.

7.2 Chapa com furo

Neste exemplo, é apresentada a simulação numérica de uma chapa fina perfurada submetida a esforços de tração ao longo do seu eixo longitudinal. Este é um exemplo clássico, frequentemente utilizado como referência para validação do estado plano de tensões de modelos de plasticidade (Fuschi *et al.*, 1992). Este problema já foi avaliado em diversos trabalhos (Souza Neto *et al.*, 2008), Caminero *et al.*, (2011), Nguyen *et al.*, (2020) e Bruno *et al.*, (2020)), e é particularmente popular para verificar não linearidades sob deformações finitas.

A geometria da placa e a malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós adotada são mostradas na Figura 7.4. A placa é carregada ao longo do eixo longitudinal e apenas um quarto dela é modelado, dada a sua simetria.

Foram adotados os modelos elastoplásticos de von Mises e Rankine, com módulo de Elasticidade $E = 70,0$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tensão de escoamento $\sigma_y = 0,243$ GPa e módulo de endurecimento de $H = 0,2$ GPa. A análise não linear

foi processada para Estado Plano de Tensão (EPT) utilizando o método de controle de deslocamentos generalizado, com incremento de 0,001 N do fator de carga inicial e com carga de referência $P = 1 \text{ N}$

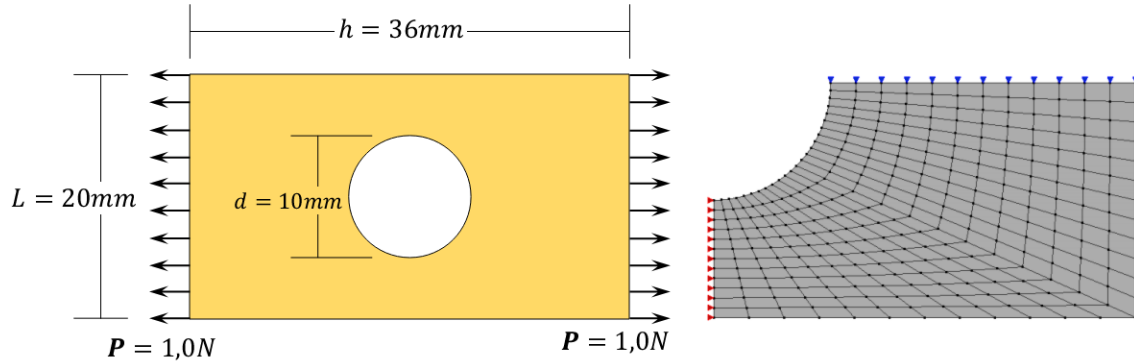


Figura 7.4: Chapa com furo: Geometria e malha de elementos finitos

A Figura 7.5 mostra o caminho de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical da face de aplicação de carga para ambos os modelos. As respostas das análises numéricas são comparadas com os resultados apresentados em Souza Neto *et al.* (2008). Pode-se observar que, após o escoamento, ambos os modelos apresentam uma boa concordância com a referência, porém, o modelo de Rankine simplesmente para não avança por instabilidade numérica.

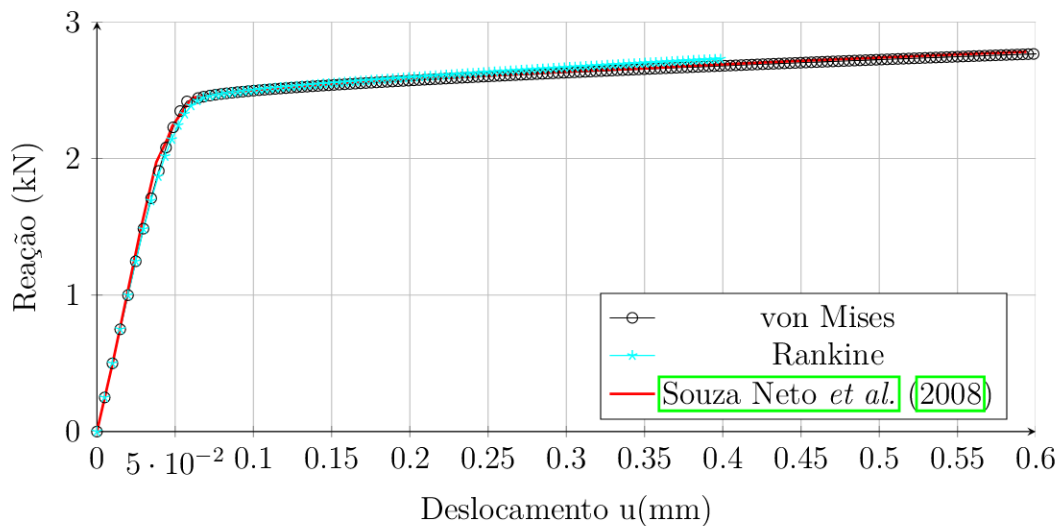


Figura 7.5: Chapa com furo: Reação na borda (kN) $\times$ Deslocamento na borda (mm)

A evolução do fluxo plástico é representada na Figura 7.6 que mostra os gráficos de contorno da variável interna correspondente às deformações plásticas acumuladas (α) em diferentes etapas do processo de carregamento para os modelos de von Mises e Rankine. Pode-se observar que os dois modelos são capazes de representar a evolução da região de plastificação.

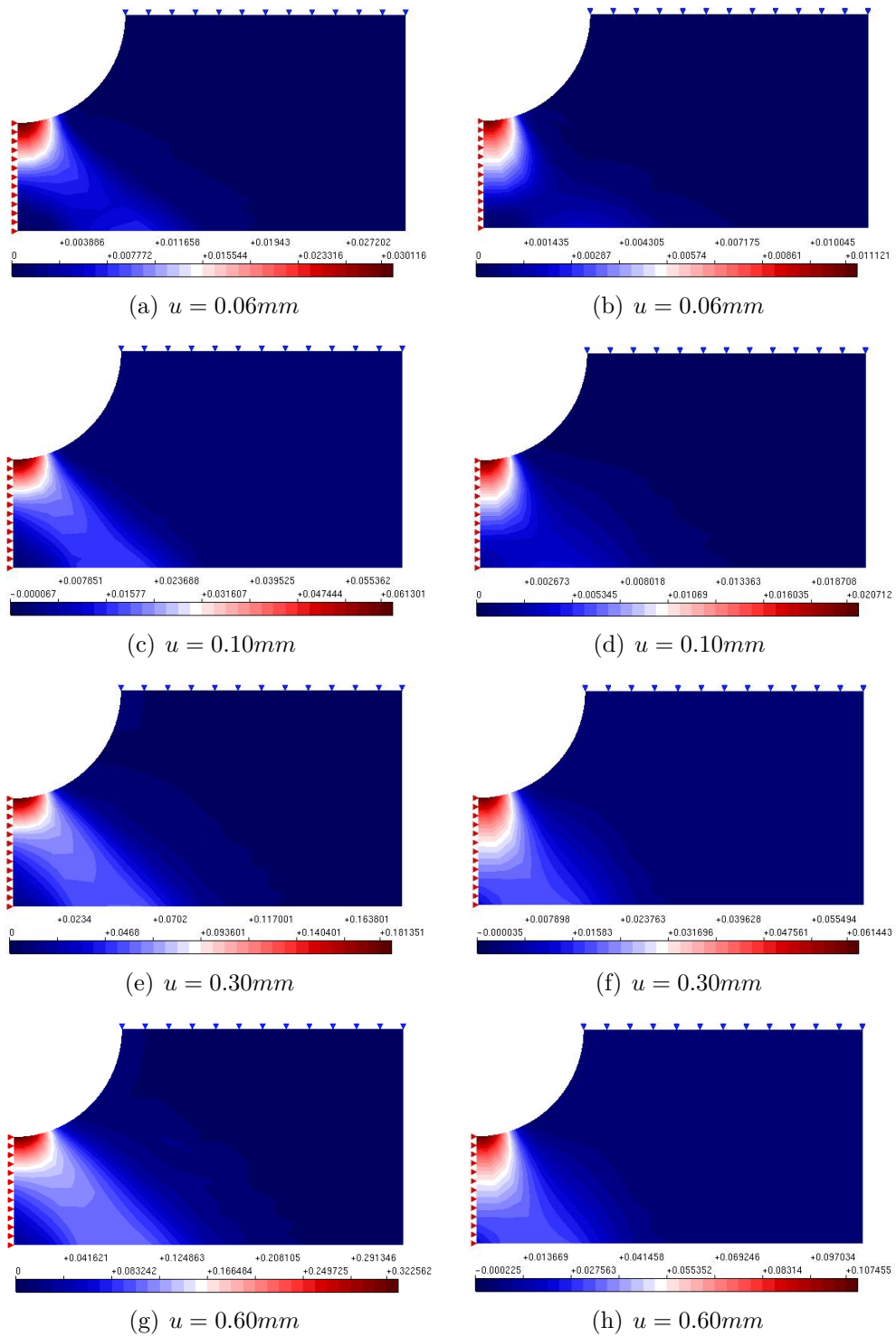


Figura 7.6: Chapa com furo - von Mises (a), (c), (e) e (g); Rankine (b), (d), (f) e (h).

7.3 Barra com entalhe sujeita a flexão

O colapso de uma barra metálica retangular contendo um entalhe profundo em forma de V e submetido a flexão é analisado nesta simulação. A Figura [7.7](#) mostra a geometria da

barra e a malha de elementos finitos adotada na análise. Conforme apresentado por Souza Neto *et al.* (2008), o material é caracterizado por um módulo de elasticidade $E = 210000$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e tensão de escoamento $\sigma_y = 240$ MPa.

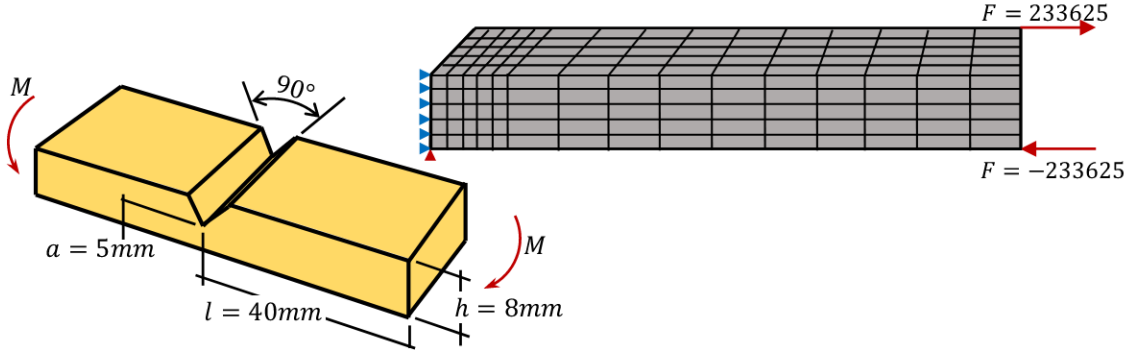


Figura 7.7: Flexão pura de uma barra com entalhe em V: Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto *et al.* (2008)

Esta barra foi estudada por Green (1953), que determinou um limite de carregamento para este problema. Para um ângulo de entalhe de 90° , o momento limite por unidade de largura da barra é

$$M_u = 0,623ca^2 \quad (7.2)$$

onde a é a espessura da barra medida a partir do entalhe e c é a resistência ao cisalhamento, definida por

$$c = \frac{\sigma_0}{2} \quad (7.3)$$

onde σ_0 é a tensão de escoamento do material.

Substituindo a equação 7.3 em 7.2 e usando o valor prescrito para a tensão de escoamento e as medidas que definem a geometria da barra, o valor limite para o momento é dado por

$$M_u \approx 1869 N.m \quad (7.4)$$

Da equação do momento fletor

$$M_u = Fh \quad (7.5)$$

onde F é a força aplicada e h é a altura da barra, obtemos

$$F = 233625 N \quad (7.6)$$

que é a carga aplicada na modelagem deste problema.

A solução não linear foi realizada usando o método de controle de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990), fator de carga inicial $2,50 \times 10^{-5}$. O modelo de material adotado para a barra é a extensão para deformações finitas multiplicativa dos modelos elasto-perfeitamente plásticos de von Mises e Tresca. As trajetórias de equilíbrio com relação entre a deflexão da aresta $\times$ momento fletor analítico normalizado, M/ca^2 , é

apresentada na Figura 7.8

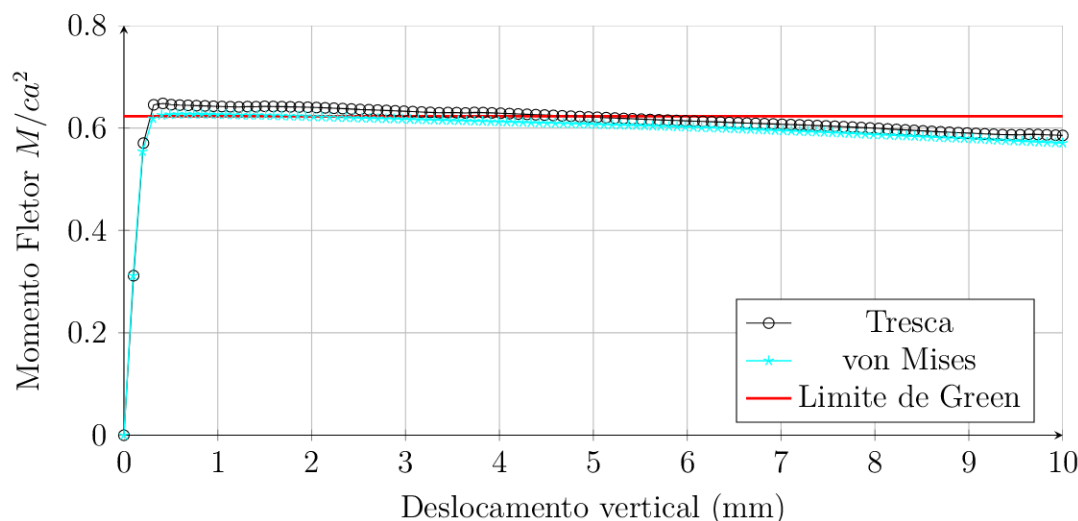


Figura 7.8: Flexão pura de uma barra com entalhe em V: Comparação entre o limite de Green (1953) e os resultados obtidos pelos modelos de deformações finitas de Tresca e von Mises

Como pode ser observado, as trajetórias de equilíbrio estão de acordo com os resultados obtidos em Green (1953) considerando o regime de deformações finitas. Uma vez que a carga limite é atingida, um comportamento de amolecimento é observado. Este fenômeno pode ser explicado por uma redução da área da seção transversal próxima ao entalhe e que não é captado na análise de pequenas deformações.

7.4 Placa circular com carregamento uniforme

A placa circular simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniformemente distribuído ilustrada na Figura 7.9 foi analisada com os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb para deformações finitas. Devido à simetria, foi considerada uma análise axisimétrica do problema. A malha é composta por 10 elementos axissimétricos de oito nós distribuídos em duas camadas ao longo da espessura.

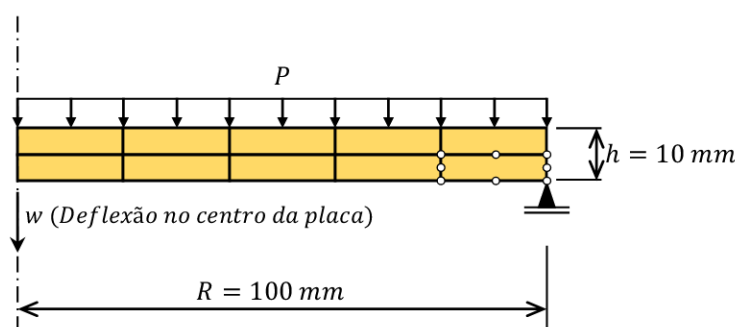


Figura 7.9: Placa circular. Geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto *et al.*, 2008).

Para determinar o limite de carga da placa por análise numérica, adotou-se plasticidade perfeita em ambos os modelos, com módulo de elasticidade de 10^7 kPa, coeficiente de Poisson de 0,24 e tensão de escoamento de 16000 kPa.

A carga limite para o presente problema pode ser obtida usando métodos de análise limite combinados com o método de diferenças finitas. O procedimento é descrito por Skrzypek (1993) e a carga correspondente é

$$P_{lim} \approx \frac{1,63\sigma_y h^2}{R^2} \quad (7.7)$$

Para os parâmetros apresentados nesta análise a carga limite é

$$P_{lim} \approx 260,8 \text{ N/mm}^2 \quad (7.8)$$

Para a análise não linear utilizou-se o método de controle de deslocamento direto, controlando o deslocamento vertical do nó central da parte inferior da placa com incremento de 0,05 mm e carga de referência $P = 1$ N.

As curvas mostradas nas Figuras 7.10 e 7.11 representam a trajetória de equilíbrio “Deslocamento no centro da placa $\times$ Carga aplicada” para pequenas deformações e plasticidade de deformações finitas, respectivamente.

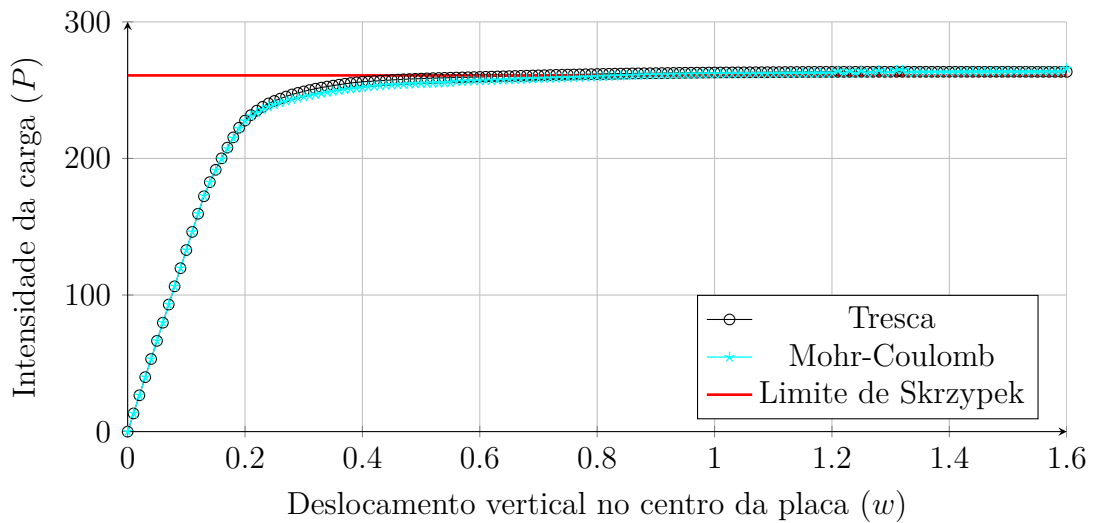


Figura 7.10: Placa circular, modelo de pequenas deformações: Diagrama Carga $\times$ Deslocamento.

Foram obtidos resultados semelhantes entre os modelos de plasticidade de Tresca e Mohr-Coulomb. Os modelos apresentaram uma diferença relativa de 0,89% e 1,99%, respectivamente, quando comparados com a solução analítica, e esta precisão foi obtida apesar da utilização de uma malha pouco refinada.

O efeito das grandes deformações exerce uma influência significativa na resistência final da estrutura. No início da trajetória de equilíbrio, ambas as soluções (de pequenas deformações e de deformações finitas) exibem comportamento semelhante, como mostrado na Figura 7.11. No entanto, à medida que a análise prossegue com a evolução

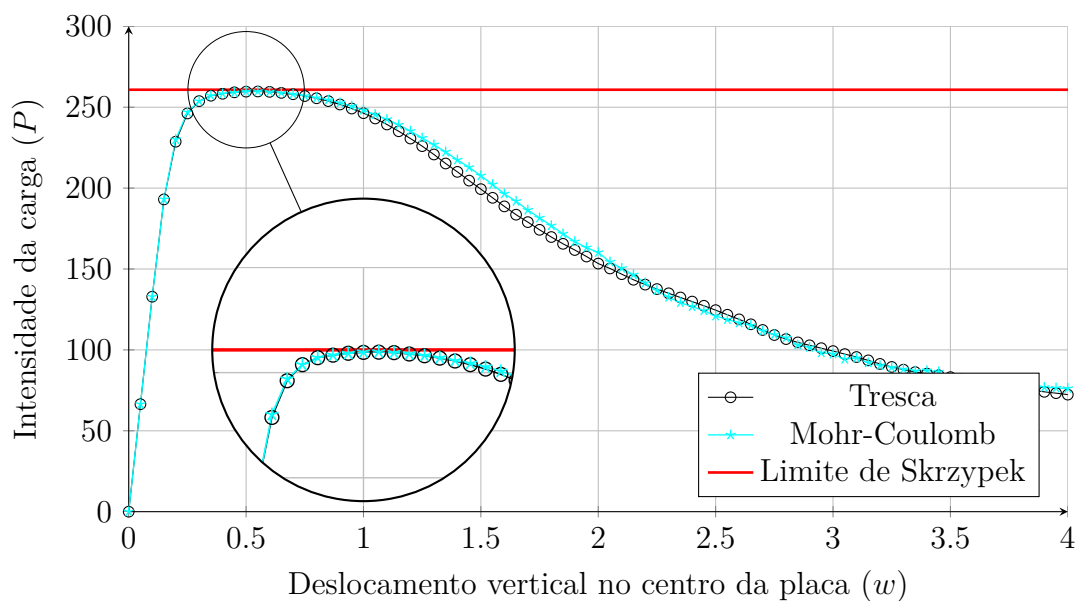


Figura 7.11: Placa circular, modelo de grandes deformações: Diagrama Carga $\times$ Deslocamento.

dos deslocamentos, é observado uma diminuição sensível na rigidez da placa, indicando um amolecimento. É fundamental apontar que esse comportamento não é observado ao utilizar o modelo de pequenas deformações, destacando a importância de estudar o comportamento do material em condições de grandes deformações e os seus efeitos no comportamento das estruturas

CAPÍTULO 8

EXEMPLOS PARA VALIDAÇÃO DO ACOPLAMENTO DAS NÃO LINEARIDADES GEOMÉTRICA E DO MATERIAL

Neste capítulo, são apresentados exemplos para avaliar o acoplamento das não linearidades do material e da geometria, comparando os resultados obtidos com referências da literatura.

O acoplamento das não linearidades pode aumentar significativamente o nível de dificuldade do problema. Esses efeitos acoplados podem ser de difícil representação, especialmente em problemas mais complexos.

Para todas as análises apresentadas nesse capítulo foi adotado o modelo elastoplástico de deformações finitas multiplicativa com critério de plasticidade J2 (von Mises). Esse critério é comum em análises estruturais não lineares, permitindo a simulação de comportamentos inelásticos de materiais, como o escoamento plástico. Além disso, o ajuste dos parâmetros de endurecimento é importante para a simulação de materiais que apresentam endurecimento com o aumento da deformação, o que é comum, por exemplo, em materiais metálicos.

O acoplamento de não linearidades é um tema essencial, embora desafiador, na análise estrutural avançada. É relevante destacar que a aplicação do MEFG nesse contexto, permite a utilização de malhas mais simples e menos refinadas sem comprometer a representatividade, o que é particularmente valioso. No entanto, é fundamental observar que a literatura sobre o acoplamento de não linearidades ainda é limitada e, portanto, os estudos apresentados se baseiam em cenários conhecidos, com modificações propostas para capturar o comportamento dos materiais em condições de não linearidade geométrica. Isso reflete a carência de resultados abrangentes nessa área e enfatiza a necessidade de pesquisas adicionais para explorar completamente o acoplamento das não linearidades em estruturas.

8.1 Cascas dobradas - Pórticos estruturais

O teste do pórtico abatido introduzido por Williams (1964), será analisado com o uso

de elementos de casca, submetidos a diferentes tipos de não linearidades. Para esta análise, o modelo foi simulado em diferentes cenários, incluindo casos com e sem consideração das não linearidades. Nas análises com acoplamento das não linearidades (PGNLMODEL), foi empregado um modelo elastoplástico com critério de escoamento de von Mises.

Este é um problema frequentemente abordado para a validação de modelos numéricos não lineares e já foi apresentado por diversos autores, começando por Williams (1964) e seguido por outros como Wood e Zienkiewicz (1977), Meek e Tan (1984), Fonseca (2008), Gomes (2018). O comportamento com não linearidades acopladas foi investigado anteriormente por Chan (1988), que considerou um material elastoplástico perfeito.

O material puramente elástico foi utilizado nas análises linear e geometricamente não linear (GNLMODEL) com os parâmetros propostos por Wood e Zienkiewicz (1977), que incluem o módulo de elasticidade de $E = 200 \times 10^3 \text{ uf/uc}^2$ e o coeficiente de Poisson de $\nu = 0,0$. Os materiais elastoplásticos utilizados possuem o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do primeiro material, bem como tensões de escoamento de $\sigma_y = 165 \text{ uf/uc}^2$ e $\sigma_y = 124 \text{ uf/uc}^2$, respectivamente, conforme sugerido por Chan (1988). As análises elastoplásticas também incluíram o ajuste dos parâmetros de encruamento para o comportamento de plasticidade perfeita, com um coeficiente de encruamento (para uma lei de endurecimento linear) definido como $H = 0,0$.

As condições de contorno e a malha MEFG adotadas no modelo estão ilustradas na Figura 8.1. Foram utilizados 10 elementos quadrilaterais de quatro nós, com enriquecimento do tipo P2 aplicado a todos os nós. Isso permite a representação de gradientes elevados de deslocamento na fronteira de cada elemento, o que é essencial para simular o comportamento da estrutura sob grandes deformações. As restrições impostas incluíram fixações em todos os graus de liberdade nas extremidades do pórtico.

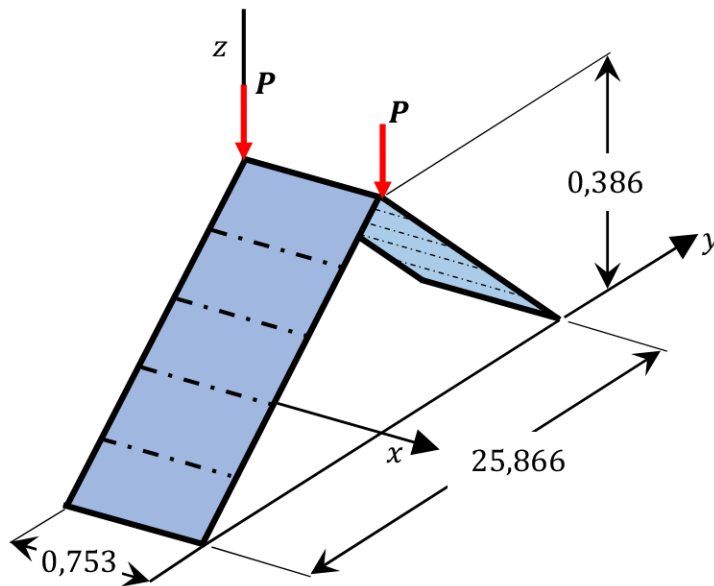


Figura 8.1: Pórtico de Williams: Geometria e malha de elementos finitos.

A espessura do pórtico foi discretizada em 10 camadas, garantindo a representação do comportamento da estrutura em cada uma delas.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, empregou-se o método de controle direto de deslocamentos com fator de incremento de $0,00325\ uc$ para um dos nós de aplicação da carga, e uma tolerância para a convergência do deslocamento de 1×10^{-4} . A intensidade de carga de referência foi definida como $P_0 = 20\ uf$.

Os gráficos das Figuras 8.2 e 8.3 apresentam as trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

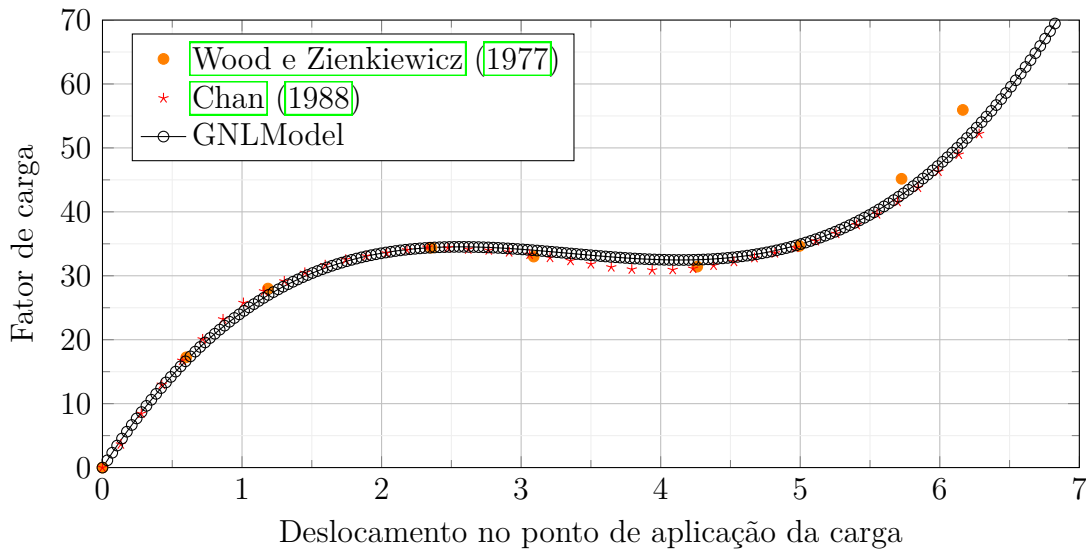


Figura 8.2: Pórtico de Williams - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - Análise geometricamente não linear

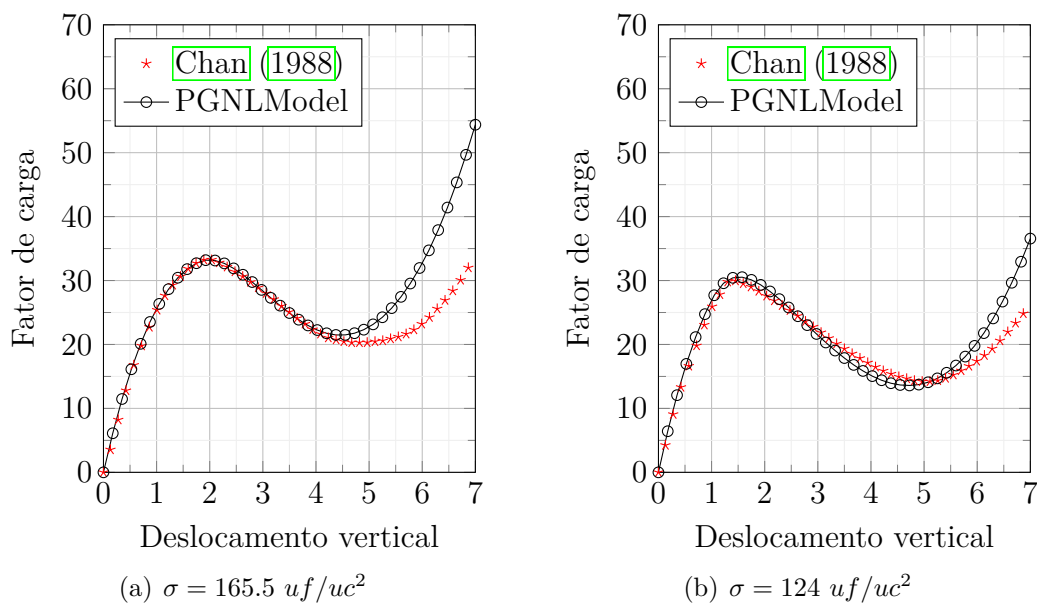


Figura 8.3: Pórtico de Williams - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - Acoplamento de não linearidades

As trajetórias de equilíbrio mostram boa conformidade entre os resultados aqui obtidos e os de [Wood e Zienkiewicz \(1977\)](#) e [Chan \(1988\)](#) tanto para o modelo com não linearidade geométrica quanto para o modelo com acoplamento das não linearidades. Observa-se nas análises elastoplásticas, conforme destacado por [Chan \(1988\)](#), que a plastificação da seção exerce uma influência significativa na resistência final da estrutura. Para melhor visualização deste efeito a Figura 8.4 apresenta num mesmo gráfico as curvas incluindo os casos com e sem consideração das não linearidades.

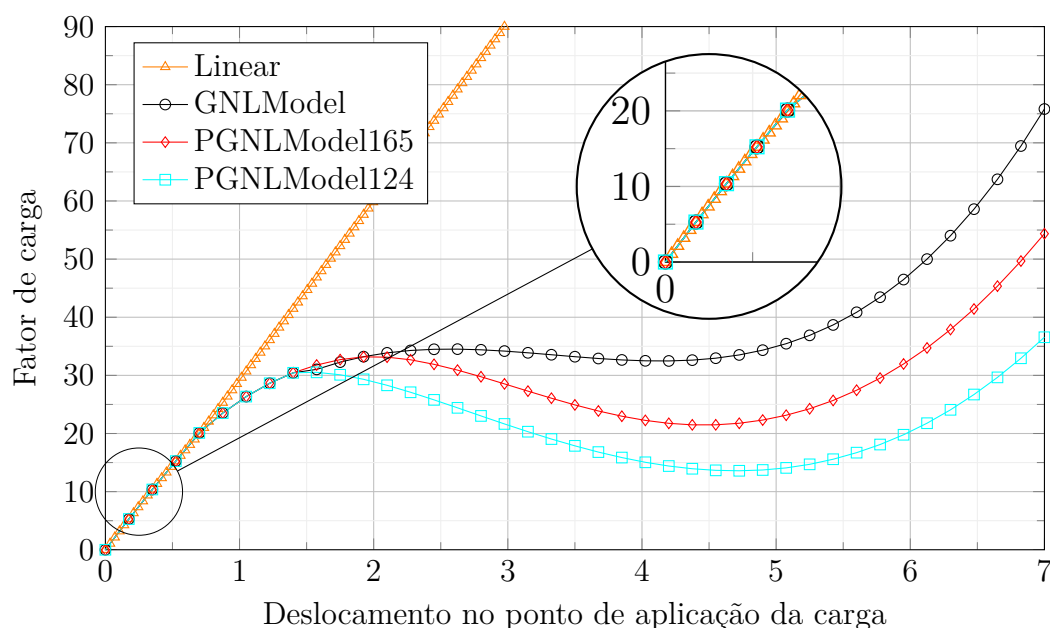


Figura 8.4: Pórtico de Williams - Efeito das Não Linearidades

No início da trajetória de equilíbrio, como esperado, ambas as soluções apresentam a mesma resposta. No entanto, pode-se observar que as curvas correspondentes ao acoplamento das não linearidades apresentam cargas significativamente menores nos pontos limites. Devido à plastificação da seção, ocorre uma diminuição na rigidez, o que resulta numa redução na carga crítica da estrutura, mesmo que este ponto tenha sido atingido no mesmo nível de deslocamento da estrutura com material elástico. À medida que a trajetória avança, a diferença entre as duas curvas é ampliada, em resposta à plastificação adicional das camadas a cada etapa de carregamento.

As Figuras 8.5 e 8.6 apresentam as isofaixas suavizadas de valores para o fluxo plástico, juntamente com as deformadas correspondentes, para os dois casos elastoplásticos apresentados. Os pontos críticos considerados abrangem o início do escoamento do material, o ponto imediatamente anterior à ocorrência do fenômeno de “snap-through” e o momento em que a estrutura começa a endurecer novamente. Essas Figuras ilustram o processo de plastificação ao longo da estrutura.

É importante notar que, nas simulações numéricas, a localização dos pontos de maior concentração de deformações plásticas varia de acordo com o estágio de escoamento e a

intensidade da tensão de escoamento. Em níveis de escoamento mais baixos, o início do escoamento ocorre no centro das barras que compõem o pórtico. Ao longo da análise, as maiores deformações plásticas gradualmente se concentram na região mais próxima ao ponto de aplicação da carga.

Por outro lado, em patamares de escoamento mais elevados, observa-se um comportamento diferente. Conforme representado nas Figura 8.6, o início do escoamento ocorre na região mais próxima ao ponto de aplicação das cargas e é nessa região onde se registra a maior concentração de deformações plásticas ao longo de toda a análise.

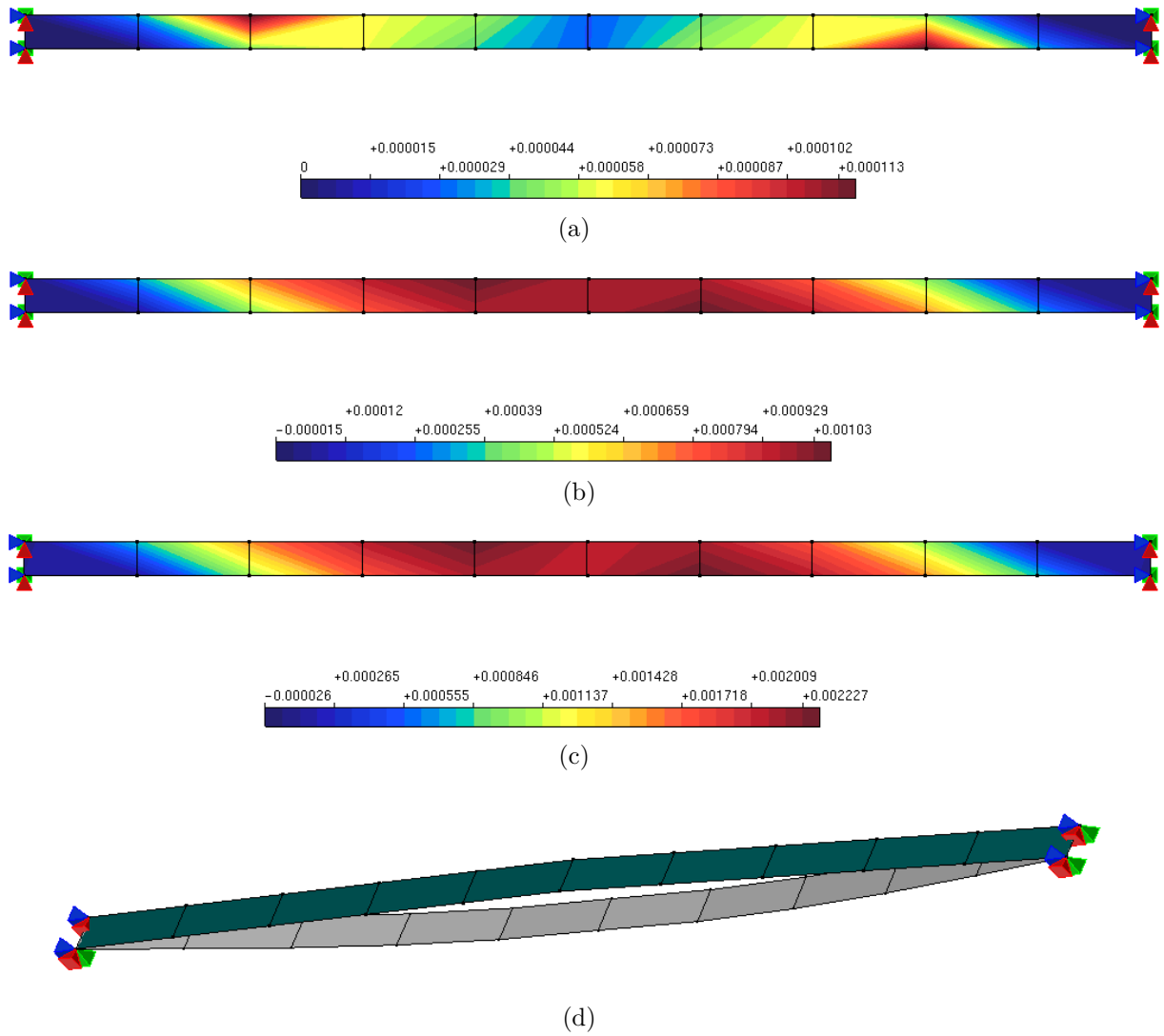


Figura 8.5: Pórtico de Willians (PGNL124): (a) - (c) Fluxo plástico nos pontos críticos; (d) Deformada

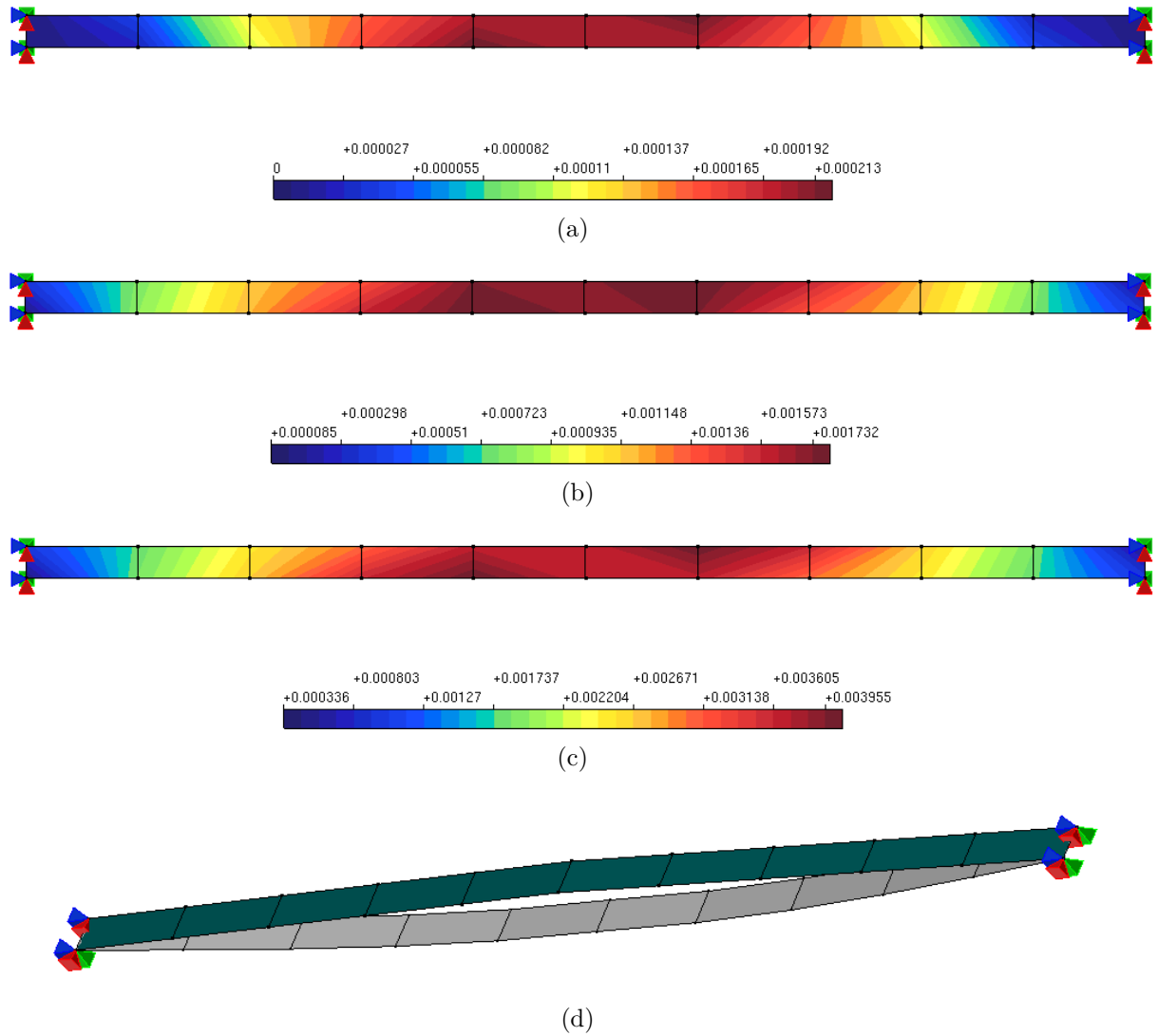


Figura 8.6: Pórtico de Willians (PGNL165): (a) - (c) Fluxo plástico nos pontos críticos; (d) Deformada

8.2 Casca abatida

Esta simulação consiste em se considerar o comportamento inelástico do material no problema da casca abatida em que a não linearidade geométrica é bastante acentuada. O objetivo deste exemplo é analisar o comportamento da trajetória de equilíbrio carga-deslocamento da estrutura quando as não linearidades geométrica e física ocorrem simultaneamente, a fim de compreender como o modelo responde a cada uma delas.

A geometria, condições de contorno e os parâmetros elásticos do material adotados para análise são os mesmos da casca isotrópica de espessura $h = 12,7uc$ apresentada na seção 6.6. O parâmetro de escoamento, que caracteriza o colapso plástico da estrutura, utilizado nas simulações elastoplásticas, σ_y , foi sucessivamente alterado, assumindo os valores $30 \, uf/uc^2$, $20 \, uf/uc^2$, $15 \, uf/uc^2$ e $10 \, uf/uc^2$ para as análises com acoplamento

das não linearidades. Ressalva-se que o material não falha por escoamento plástico para a análise que considera apenas a não linearidade geométrica. Foi realizado o ajuste dos parâmetros de escoamento para o comportamento de plasticidade perfeito.

Os gráficos da Figura 8.7 apresentam as curvas “carga $\times$ deflexão” obtidas. Conforme destacado as trajetórias de equilíbrio estão em boa concordância. O comportamento inelástico do material tem grande influência na resposta da estrutura. Quando ocorre a falha do material é possível observar uma sensível diminuição da rigidez, que pode ser associada ao parâmetro de escoamento. A medida que os deslocamentos vão crescendo pode-se observar que as curvas, apesar de apresentarem comportamento semelhantes, apresentam diferenças quanto as cargas críticas. Quanto menor a tensão de escoamento, menor será a carga crítica da estrutura devido à plastificação da seção. Também vale destacar que o modelo foi afetado de maneira mais intensa para uma tensão de escoamento $\sigma_y = 10 \text{ uf}/uc^2$ a simulação acabou sendo interrompida por instabilidade numérica para um deslocamento de aproximadamente $1,47 \text{ uc}$ resultando numa não convergência da análise.

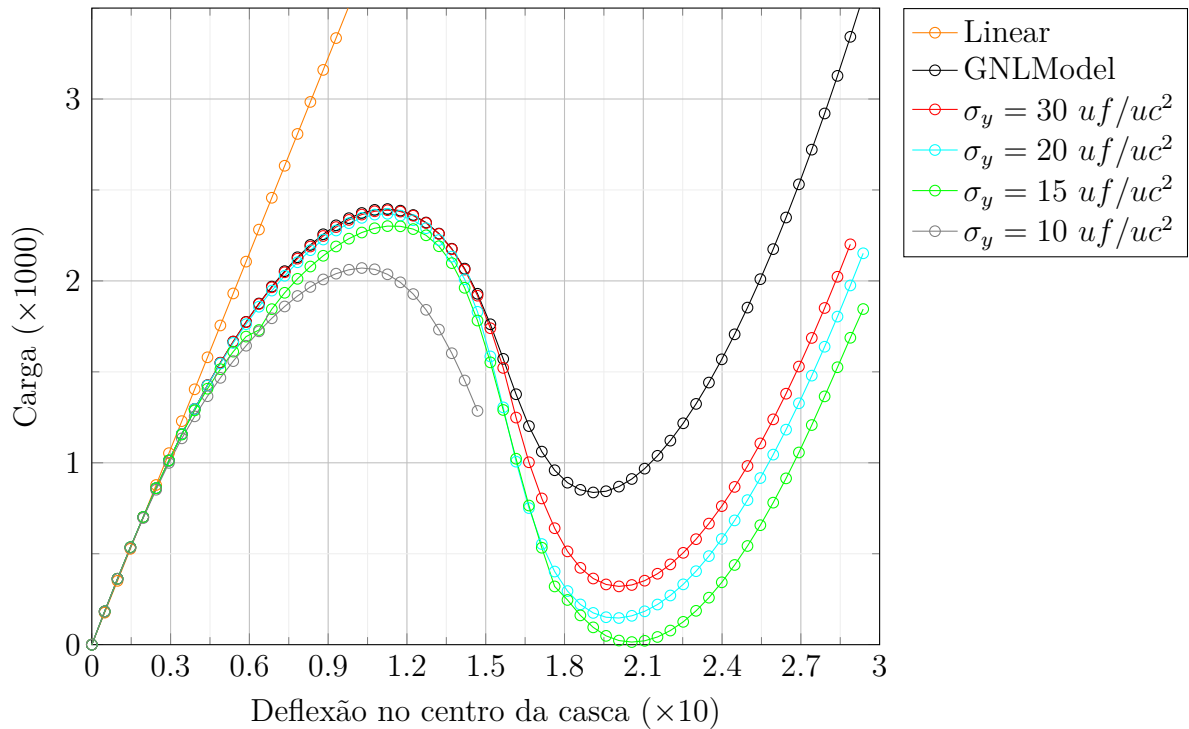


Figura 8.7: Casca abatida - Diagrama Carga $\times$ deflexão

Em relação ao comportamento da estrutura quando submetida a um material não linear, tem-se nas Figuras 8.8 a 8.11 as isofaixas suavizadas do fluxo plástico no passo em que ocorre o escoamento do material e no final da análise.

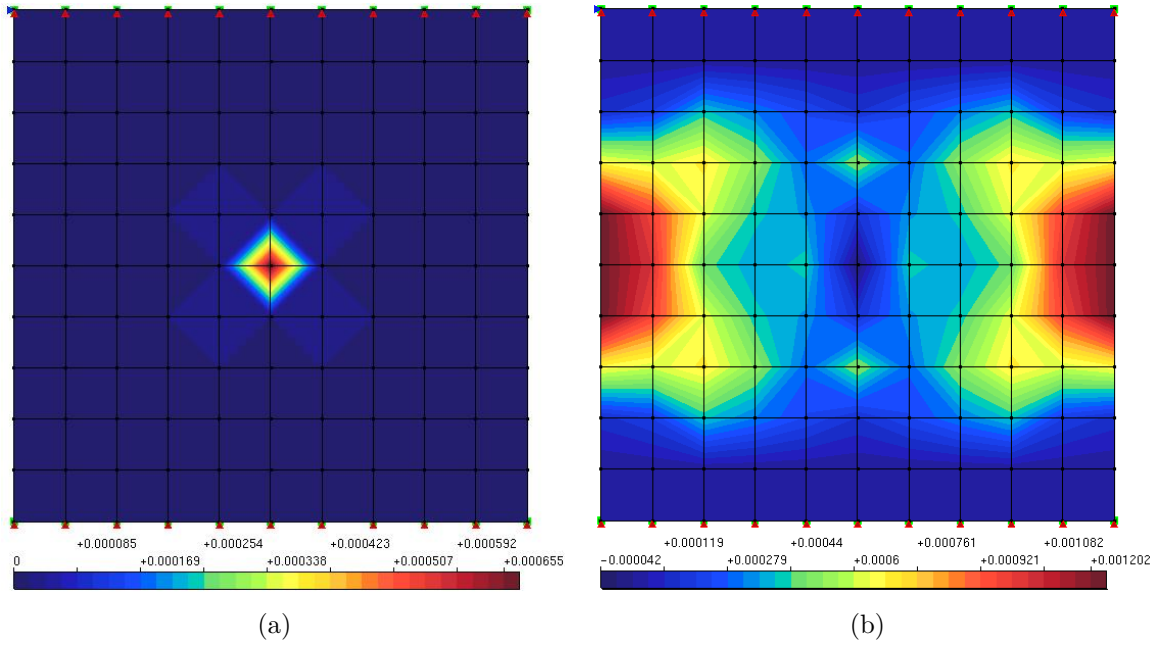


Figura 8.8: Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 10 uf/uc^2$

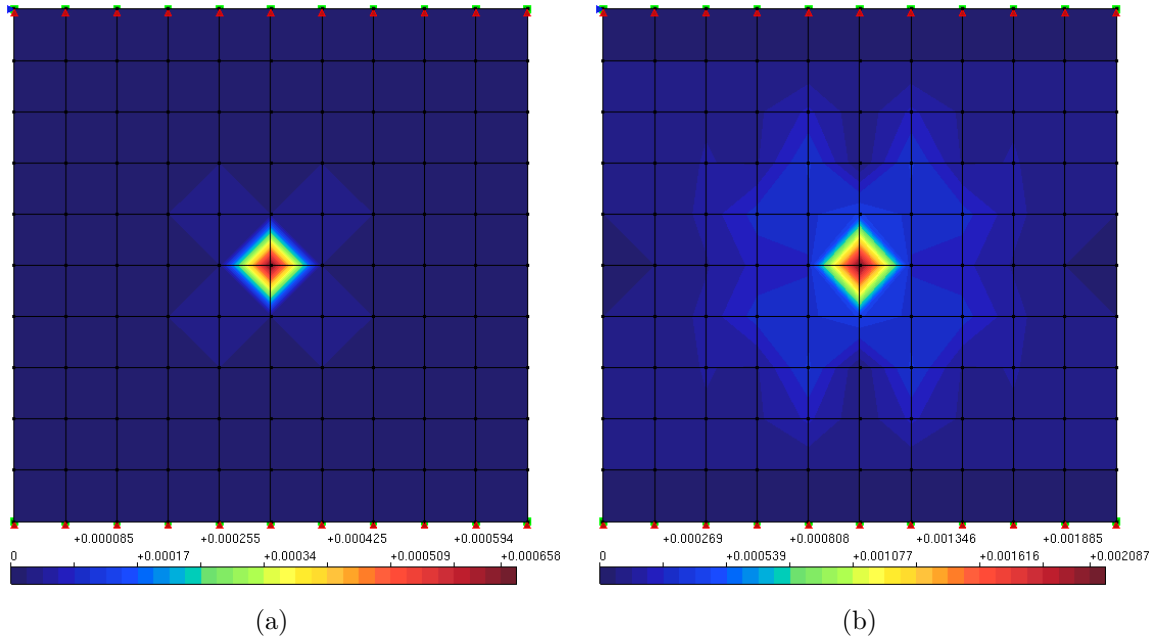


Figura 8.9: Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 15 uf/uc^2$

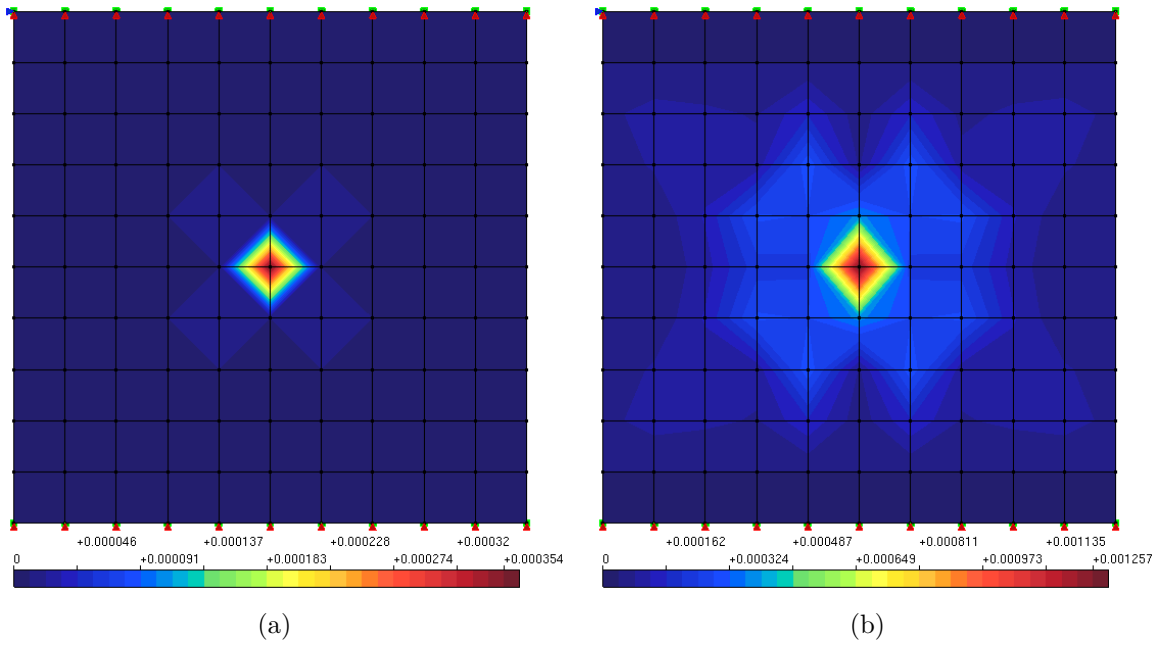


Figura 8.10: Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 20 uf/uc^2$

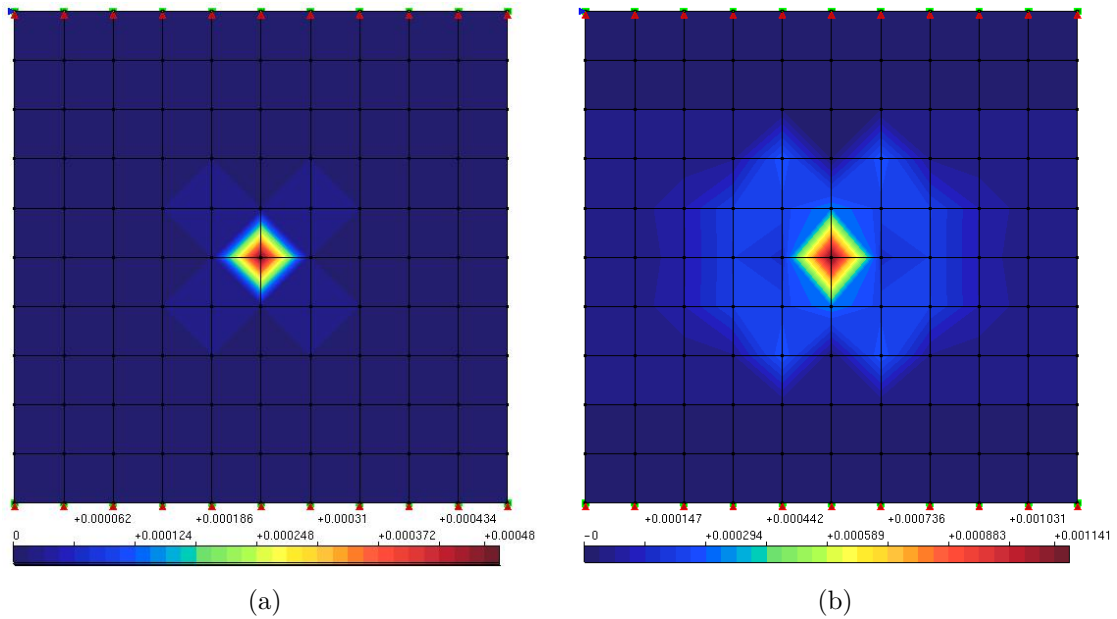


Figura 8.11: Casca Abatida. Fluxo plástico $\sigma_y = 30 uf/uc^2$

Para todos os níveis de tensão de escoamento, a plastificação da estrutura esteve localizada no centro da placa. Posteriormente, ela foi se distribuindo ao longo da casca em direção às extremidades livres. Ao final do processo, apesar de boa parte da estrutura ter atingido o escoamento, plastificação estava altamente concentrada no nó central da casca.

Esse comportamento só foi diferente na casca com a menor tensão de escoamento, $\sigma_y = 10 uf/uc^2$, que apresentou um escoamento de toda a estrutura e uma maior concentração

de deformações plásticas nas extremidades livres. Essa diferença na resposta do fluxo plástico pode ser explicada pelo colapso da solução, causada por instabilidade numérica, já observada na trajetória de equilíbrio da Figura 8.7

8.3 Placa quadrada simplesmente apoiada

Neste exemplo, é realizada uma análise elastoplástica do problema da placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um conjunto de cargas de pressão (a placa é semelhante à apresentada na Figura 6.9) com comprimento total de $L = 508$ mm e espessura $t = 2,54$ mm). Os trabalhos de Eberlein e Wriggers (1999), Betsch e Stein (1999) e Valente (2004) trataram deste exemplo, adotando diversas configurações de malha.

O comportamento do material é descrito pelas seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 6,9 \times 10^4$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e tensão de escoamento $\sigma_0 = 248$ MPa. Para representar o comportamento de plasticidade perfeita, a análise procedeu com o ajuste dos parâmetros de encruamento, adotando uma lei de endurecimento/amolecimento linear ($\sigma(\kappa) = \sigma_0 + \mathcal{H}\kappa$) com o módulo isotrópico $H_{iso} = 0,0$.

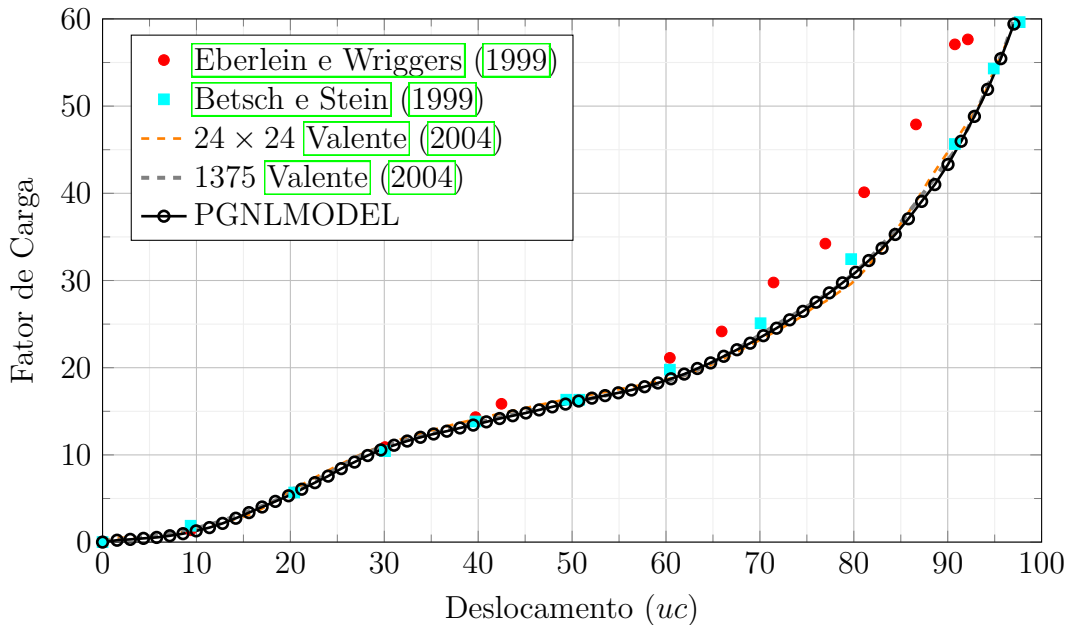


Figura 8.12: Placa simplesmente apoiada - Deflexão do ponto central $\times$ Fator de carga

Para avaliar como o acoplamento das não linearidades influencia a análise da placa, adotou-se uma malha com 20×20 elementos regulares. A Figura 8.21 apresenta a trajetória de equilíbrio obtida, que mostra a deflexão correspondente do ponto central da placa para um fator de carga máximo em comparação com as soluções obtidas por outros autores, como Eberlein e Wriggers (1999) (usando uma malha 15×15 refinada nos cantos), Betsch e Stein (1999) (usando uma malha regular de 24×24 elementos) e duas soluções apresentadas

por Valente (2004): a primeira com uma topologia de 24×24 elementos regulares e a segunda com 1375 elementos, incluindo refinamento nos cantos.

De forma geral, os resultados obtidos convergiram para os resultados da literatura. Pode-se observar, nessa análise, um enrijecimento da estrutura à medida que os deslocamentos aumentam. Esse enrijecimento está provavelmente relacionado ao efeito de membrana, característico em estruturas de casca fina, em que, devido à capacidade da membrana de suportar tensões tangenciais, a rigidez da estrutura acaba aumentando.

A configuração deformada da placa quando a mesma atinge a carga de colapso e o contorno da variável de fluxo plástico acumulado, α , são ilustrados na Figura 8.13.

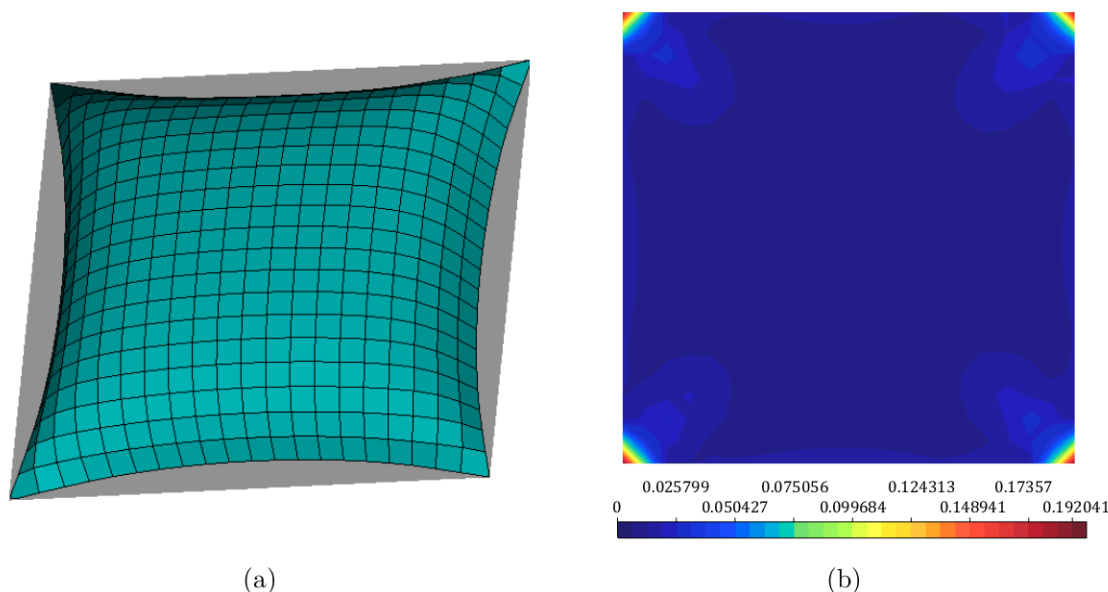


Figura 8.13: Placa simplesmente apoiada: (a) Malha deformada e (b) Fluxo Plástico.

Após a análise da estrutura deformada, é possível compreender melhor o comportamento da placa avaliada nesse problema. Conforme apresentado na Figura 8.13(a), a estrutura deformada adquiriu uma configuração em forma de almofada, resultado de distorções consideráveis fora do plano dos elementos próximos aos vértices da placa. Esse comportamento pode ser confirmado ao avaliar o diagrama de contorno das deformações plásticas acumuladas, ilustrado na Figura 8.13(b). Como esperado, é observada uma maior concentração de deformações plásticas nas proximidades dos vértices e bordas da placa, indicando o local onde ocorre a plastificação do material e, consequentemente, maiores deformações na estrutura.

8.4 Problema de estrição

Os testes a seguir incluem a análise de um corpo de prova plano e de um cilindro vazado, utilizados para simular a estrição em estruturas submetidas à tensões ao longo

do eixo longitudinal. A definição das geometrias e das malhas de elementos finitos, bem como os carregamentos são vistos na Figura 8.14. O comprimento total dos corpos de prova é de $L = 50 \text{ mm}$, enquanto a largura (o raio interno, no caso do cilindro) é de $W = 10 \text{ mm}$, e a espessura é de $t = 1 \text{ mm}$. Os corpos de prova são fixados em uma extremidade e submetidos a tração uniaxial na outra extremidade.

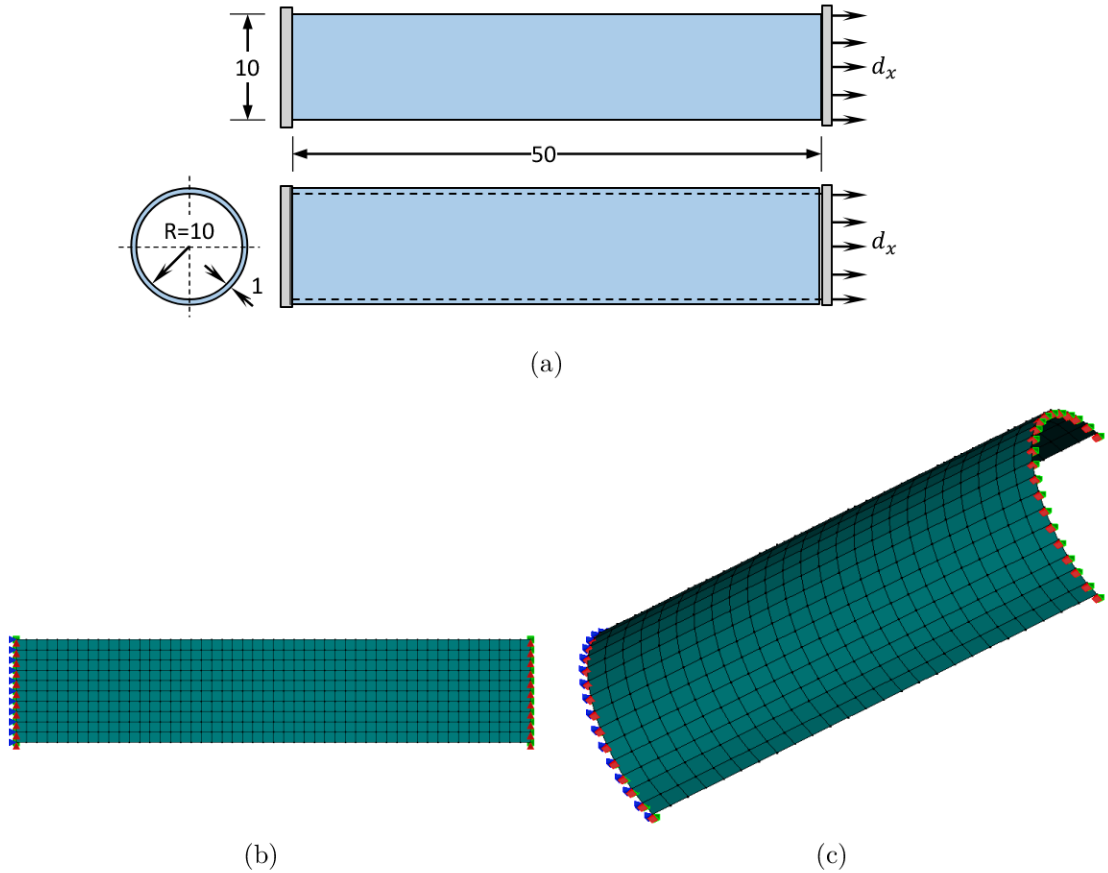
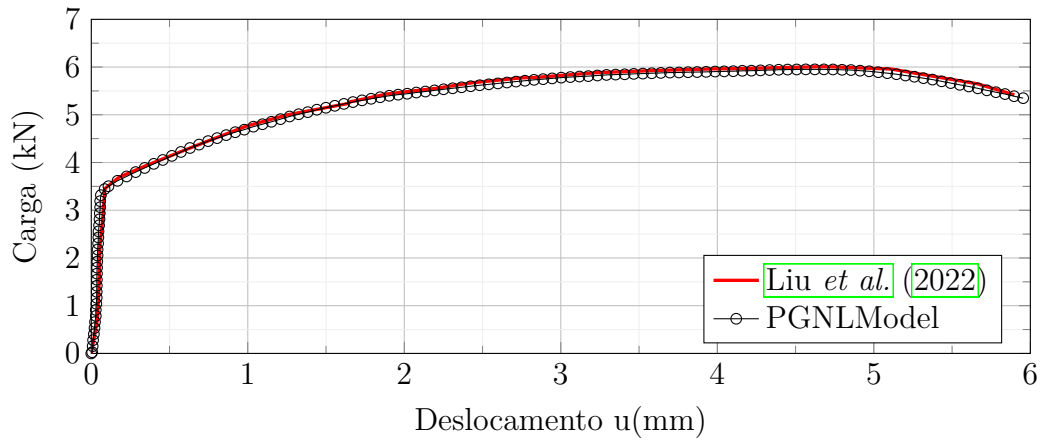


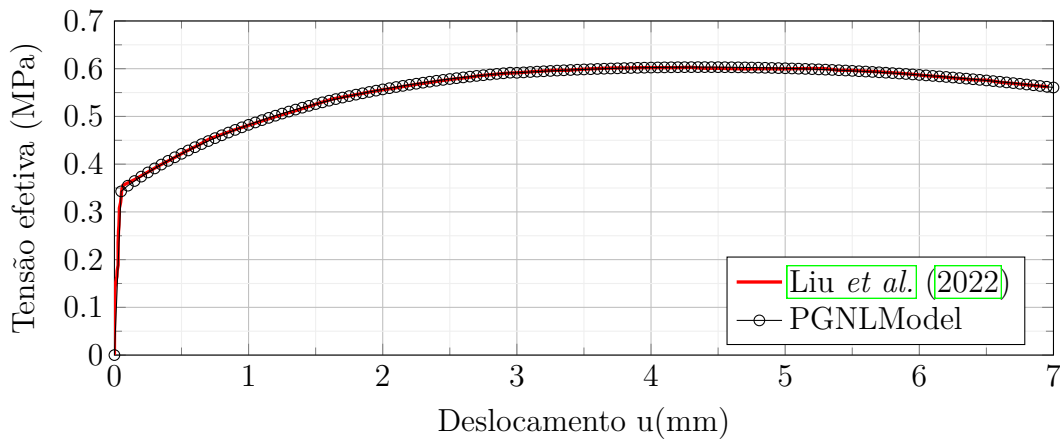
Figura 8.14: Problema de estricção sob tensão plana. (a) Geometria e condições de contorno. Malha de elementos finitos do (b) corpo de prova plano e do (c) cilindro vazado.

Para ambos os casos, os parâmetros do material utilizados na análise são: o módulo de elasticidade $E = 1,89 \times 10^5 \text{ MPa}$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$, e a tensão de escoamento $\sigma_0 = 343 \text{ MPa}$. Nesta análise, é utilizada uma função de endurecimento exponencial dada por $\sigma(\kappa) = 343 + (680 - 343)(1 - e^{-16,93\kappa}) + 300\kappa$. Foram utilizadas malhas com 500 elementos (50 na direção do comprimento e 10 na direção da largura), sendo adotado o elemento PGNLMODEL com análise de não linearidades acopladas. As simulações são realizadas sob controle de deslocamento com incrementos fixos de deslocamento.

As curvas carga-deslocamento obtidas são comparadas com os dados de referência apresentados em Liu *et al.* (2022) e plotadas na Figura 8.15, onde uma boa concordância é alcançada.



(a) Chapa plana



(b) Cilindro vazado

Figura 8.15: Problema de estricção sob tensão plana - Trajetórias de equilíbrio

As Figuras 8.16 e 8.17 exibem o contorno do fluxo plástico acumulado, obtido na simulação numérica, utilizando o modelo elastoplástico de von Mises para grandes deformações em várias etapas do processo de carga.

Uma vez que o material da placa entra na zona de escoamento e antes que a resistência máxima seja alcançada (Figura 8.16(a)), pode-se observar uma concentração de deformações plásticas na região próxima ao engaste, indicando o local onde a plastificação do material tem início. Conforme a deformação progride, em uma determinada etapa após a resistência máxima ser alcançada (Figura 8.16(b)), a deformação plástica começa a se concentrar de maneira mais intensa no centro da chapa onde o estrangulamento se forma (Figura 8.16(d)) e se ramifica em direção às bordas livres até a falha final (Figura 8.16(c)).

Para o corpo de prova cilíndrico, a estricção, de maneira semelhante ao apresentado na chapa plana, também ocorre na região central (Figura 8.18(d)). Como pode-se observar nas Figuras 8.18(a)-8.18(c), após a carga máxima ser atingida, a variável de endurecimento se localiza na região central do espécime e tem o valor máximo ao longo de toda a circunferência do cilindro na zona de estrangulamento.

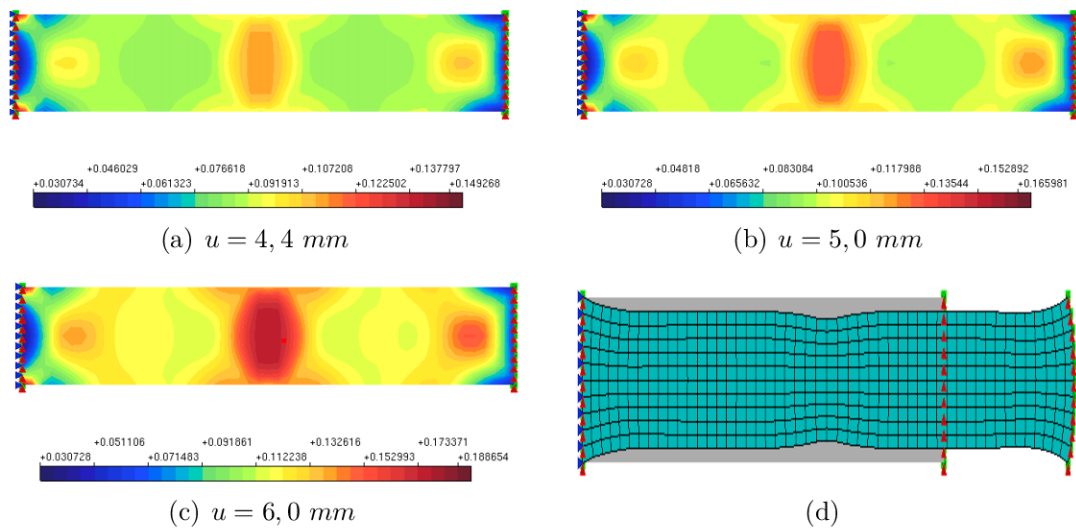


Figura 8.16: Chapa plana: (a) - (c) Fluxo plástico em vários estágios de carregamento. (d) Malha deformada

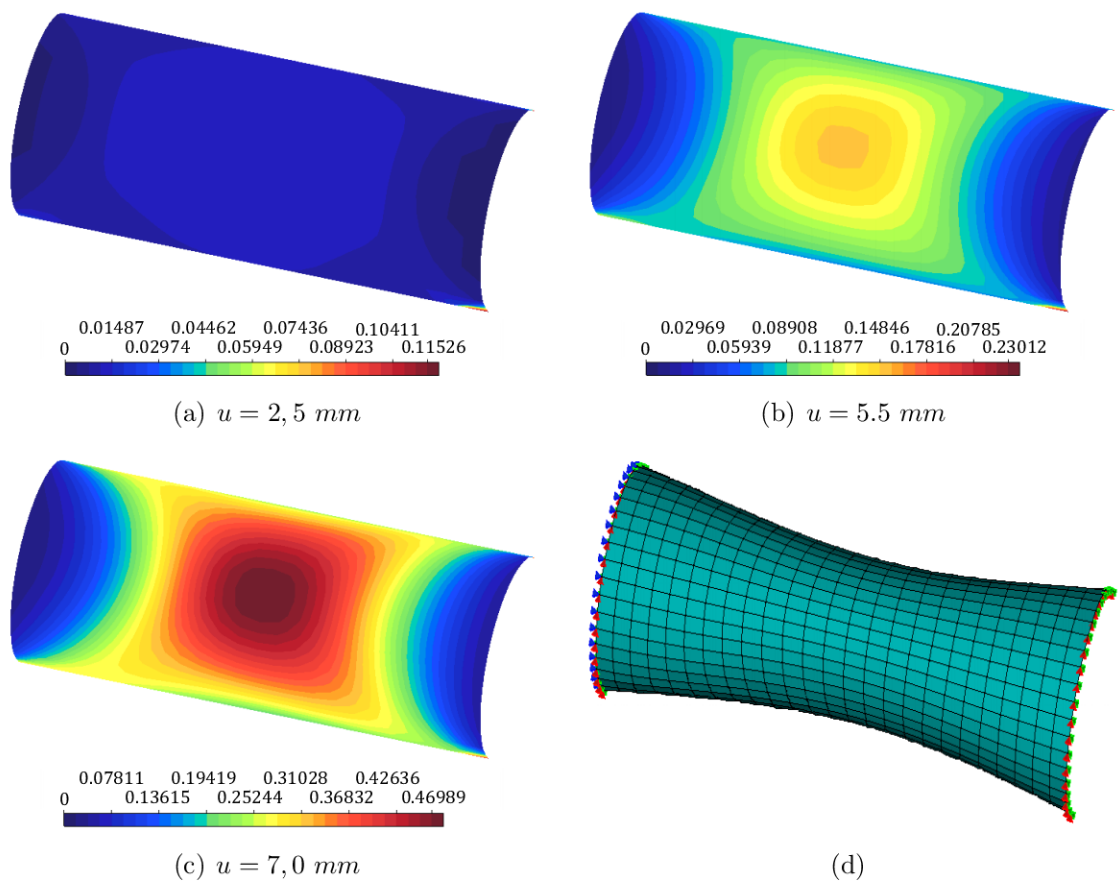


Figura 8.17: Cilindro vazado: (a) - (c) Fluxo plástico em vários estágios de carregamento. (d) Malha deformada

8.5 Painei quadrado - Polak e Vechio (1994)

No estudo conduzido por Polak e Vechio (1994), foram realizados ensaios experimentais em três painéis quadrados de concreto armado submetidos a flexão fora do plano combinada com cisalhamento no plano, conforme ilustrado na Figura 8.18. Para modelar as estruturas, a espessura do painei foi discretizada em 10 camadas de concreto armado e 4 camadas com 1,25% e 0,42% de aço por camada nas direções x e y, respectivamente, seguindo a definição do experimento.

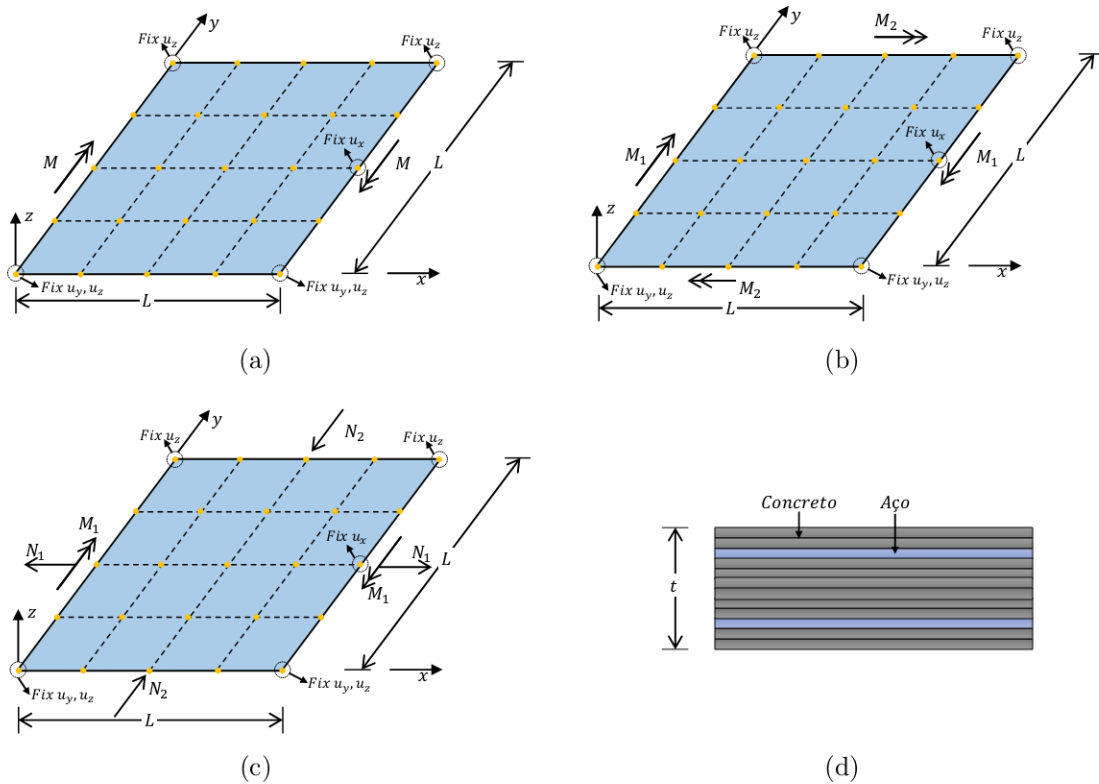


Figura 8.18: Painei quadrado de Polak: (a) - (c) Condições de contorno e carregamento; (d) Seção transversal.

Para representar o concreto simples foi adotado um modelo de fissuração distribuída. Neste trabalho, o modelo de fissuração distribuída foi combinado com as leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone *et al.* (1986), para tração (Apêndice C). Para análise dos três painéis quadrados, foram consideradas as resistências à compressão e à tração apresentadas na Tabela 8.1, além de um módulo de elasticidade de $E = 30000\ MPa$, um coeficiente de Poisson de $\nu = 0,20$, uma energia de fratura de $G_f = 0,0001\ MN/m$ e um comprimento característico do material de $h = 0,075\ m$.

Para modelar as armaduras, foi adotado o critério elastoplástico de von Mises, assumindo plasticidade perfeita, caracterizado por um módulo de elasticidade $E = 210000,0\ MPa$, um coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As tensões de escoamento nas direções x e y são

dadas na tabela 8.1. Em todos os três casos foi considerada aderência perfeita entre aço e concreto.

Tabela 8.1: Pannel quadrado de Polak - Parâmetros dos materiais

Modelo	f'_c (MPa)	f'_t (MPa)	Reforço na dir. x		Reforço na dir. y	
			f'_c (MPa)	ρ_x^a (%)	f'_c (MPa)	ρ_y^a (%)
SM1	47	4,7	425	1,25	430	0,42
SM2	62	6,2	425	1,25	430	0,42
SM3	56	5,6	425	1,25	430	0,42

Na presente simulação, foi adotada uma malha composta por 16 elementos quadriláterais de quatro nós para o MEFG, com enriquecimento polinomial do tipo P2 associado a todos os nós. Para fins de comparação com outros estudos, [Luu *et al.* \(2017\)](#) utilizaram 16 elementos quadriláterais de oito nós, enquanto [Silva e Horowitz \(2022\)](#) optaram por 64 elementos quadriláterais de quatro nós.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas utilizando-se método de controle de deslocamentos, assumindo incrementos de $0,001\text{ uc}$ no nó central, e uma tolerância para a convergência no deslocamento de 1×10^{-3} . Os resultados dos momentos $\times$ curvaturas para os carregamentos modelados a partir da análise MEFG foram comparados com os resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura, conforme mostrado nos gráficos das Figuras 8.19 - 8.21.

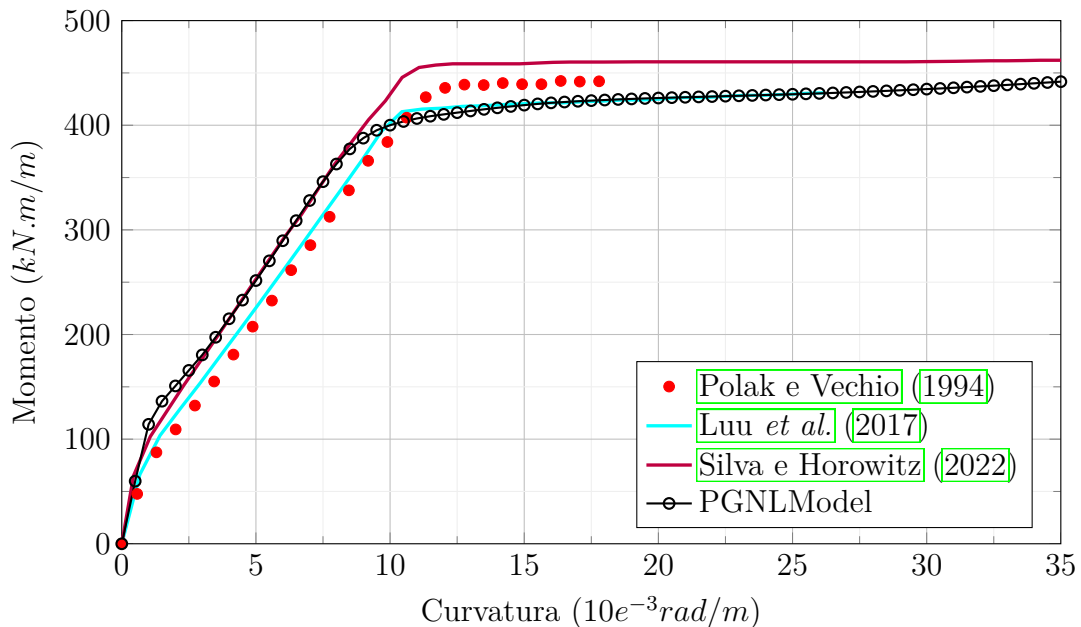


Figura 8.19: Pannel quadrado de Polak - Momento $\times$ curvatura SM1

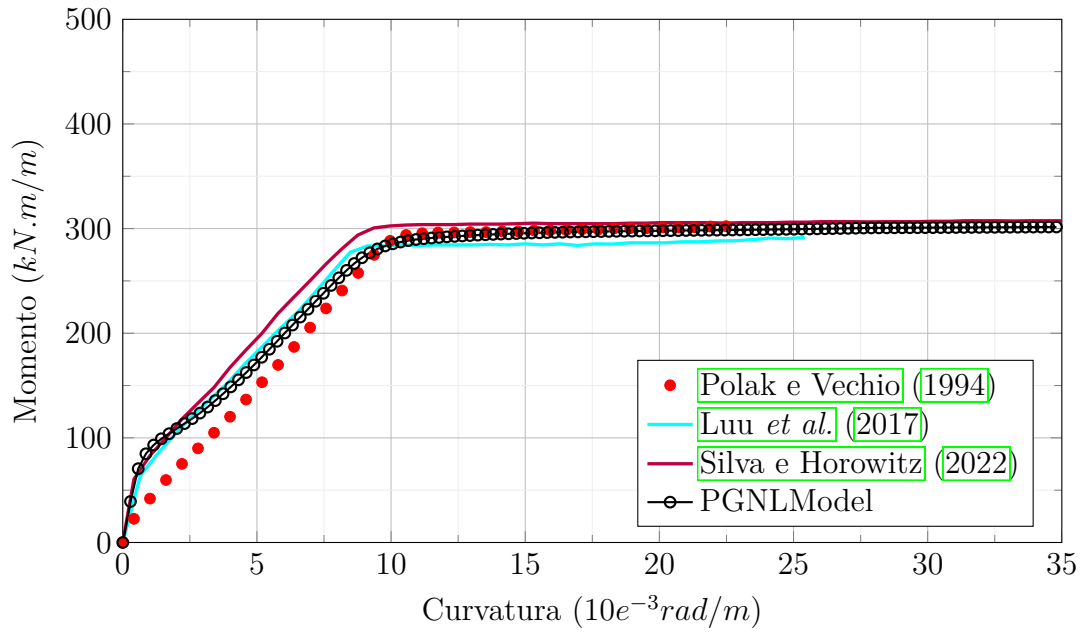


Figura 8.20: Paine! quadrado de Polak - Momento $\times$ curvatura SM2

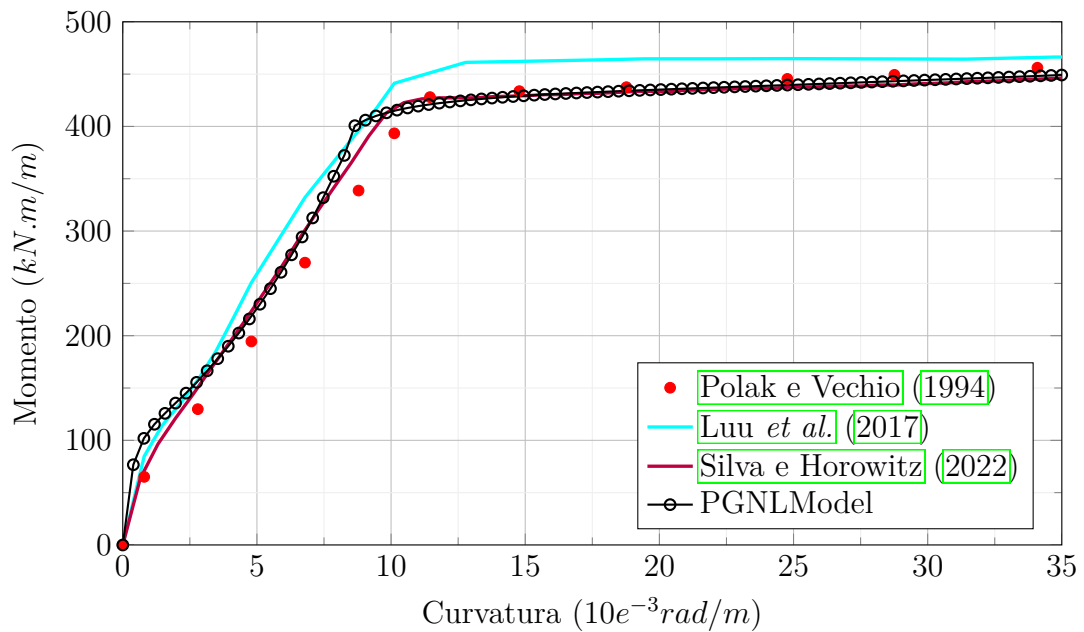


Figura 8.21: Paine! quadrado de Polak - Momento $\times$ curvatura SM3

O modelo desenvolvido apresentou boa concordância com os resultados experimentais e numéricos das referências. Isso se deve à estratégia de enriquecimento do MEFG, que permite a combinação de diferentes graus polinomiais, possibilitando a representação da resposta estrutural de forma muito próxima àquela obtida pela análise referencial, mesmo com uma malha mais simples. A estratégia de enriquecimento polinomial utilizada no modelo apresentou um caminho de equilíbrio praticamente coincidente com a resposta obtida pelo MEF clássico, porém, com a vantagem de requerer uma malha menos refinada.

Esses resultados evidenciam a eficiência do modelo desenvolvido na análise estrutural e sua capacidade de proporcionar resultados precisos e econômicos.

Este teste é fundamental para validar a eficácia do acoplamento das não linearidades física e geométrica na análise estrutural. Essa abordagem avançada leva em consideração os efeitos da deformação e das forças não lineares na geometria da estrutura, proporcionando resultados mais precisos e completos do que as análises estruturais convencionais.

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 Sobre as contribuições deste trabalho

Neste trabalho é proposta uma formulação numérica para descrever o comportamento de cascas e placas sob grandes deformações que incorpora a teoria da plasticidade de deformações finitas, contornando as limitações impostas por esse tipo de análise. O acoplamento de não linearidades pode ser particularmente desafiador em termos de modelagem e simulação computacional, pois é necessário levar em conta os efeitos de cada uma das fontes de não linearidade individualmente, bem como os efeitos da interação entre elas. Isso pode exigir modelos matemáticos e algoritmos computacionais mais complexos do que aqueles usados para sistemas lineares ou para sistemas que apresentam apenas uma fonte de não linearidade.

A principal contribuição deste trabalho consiste na implementação de um elemento finito de cascas combinando formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Generalizados em uma estrutura Lagrangiana total com a metodologia do Método da Interpolação Mista das Componentes Tensoriais, o que possibilita a realização de análises de estruturas de cascas finas e grossas acoplando as não linearidades física e geométrica. Os elementos utilizados são baseados na teoria clássica de placas e cascas e são adequados para o tratamento de patologias numéricas, como o travamento de cisalhamento transversal e o travamento de membrana. Essas patologias podem surgir tanto em faixas lineares quanto não lineares, sejam elas materiais e/ou geométricas.

Um ponto distintivo desta formulação é que ela utiliza exclusivamente a abordagem do MEFG, juntamente com a formulação convencional baseada em deslocamento. Isso a torna uma abordagem robusta e confiável para análise de estruturas de cascas e placas sujeitas a grandes deformações.

Os modelos constitutivos elastoplásticos apresentados no Capítulo 4 tem como principal característica a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em partes elásticas e plásticas, o que permite modelar adequadamente a plasticidade no regime de deformações finitas. A formulação é apresentada inicialmente de forma geral e, em se-

guida, é particularizada para o clássico modelo de plasticidade J2, seguindo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011).

É importante destacar a formulação do algoritmo de mapeamento de retorno para a integração das relações constitutivas que governam o comportamento do material. Para os modelos de plasticidade de deformações finitas, foi apresentado que o algoritmo de mapeamento de retorno pode ser derivado com base em conceitos análogos da teoria infinitesimal de forma simples. Dessa forma, foi apresentada uma versão modificada do algoritmo Implícito/Explícito, combinado com o algoritmo de retorno padrão, expandindo os algoritmos para a aplicação em modelos de deformações finitas.

A formulação implementada neste trabalho é considerada relativamente simples e capaz de considerar os relevantes efeitos do acoplamento das não linearidades física e geométrica. Vale ressaltar que a abordagem adotada para a modelagem constitutiva possui grande potencial, uma vez que não é particularizada apenas para os modelos de análise de cascas e placas, podendo ser adaptada para modelos unidimensionais, planos e sólidos, independentemente do método numérico aplicado.

A implementação computacional foi realizada no sistema INSANE (INteractive Struc-tural ANalysis Environment) e foi facilitada por sua estrutura segmentada, permitindo a incorporação de novos modelos de análise ao sistema. Além disso, a generalidade das implementações dos modelos e dos recursos para modelagem constitutiva permitiu a incorporação dos modelos de plasticidade de deformações finitas ao arcabouço teórico e computacional para modelagem fisicamente não linear do INSANE, ampliando significativamente sua já vasta biblioteca de modelos constitutivos.

9.2 Sobre as simulações numéricas

Nos capítulos 6, 7 e 8, foram apresentadas diversas simulações numéricas de casos clássicos encontrados na literatura com a finalidade de ilustrar, validar e ressaltar as características do elemento de casca e do modelo constitutivo implementados. A partir do que foi apresentado, podem ser feitas as seguintes considerações:

- O modelo numérico proposto é adequado para a análise de estruturas de placas e cascas (com pequenas curvaturas) finas em que ocorrem grandes deslocamentos e grandes deformações.
- Com o aumento do número de elementos finitos, as soluções numéricas convergem para as soluções de referência, no entanto, a taxa de convergência utilizando o elemento implementado a partir do MEFG é tão boa quanto a obtida utilizando os elementos tradicionais.
- A implementação específica do método dos elementos finitos generalizados para problemas não lineares mostrou-se uma escolha direta e eficiente, uma vez que a

estrutura teórica da abordagem para problemas lineares foi mantida inalterada.

- O acoplamento das não linearidades foi tratado com sucesso, permitindo a análise efetiva de diversos problemas já tratados na literatura.
- A não linearidade do material é implementada levando em consideração o modelo elastoplástico de von Mises (Modelo J2), no entanto, o sistema já dispõe de outras leis constitutivas elastoplásticas integradas, conforme os exemplos apresentados no capítulo 7.
- As simulações numéricas mostraram que o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos é capaz de usar uma ampla gama de modelos constitutivos para diferentes simulações em modelos discretos comuns, sem a necessidade de grandes intervenções.
- O algoritmo de mapeamento de retorno proposto mostrou-se adequado para o modelo de deformações finitas.
- Analisando as simulações numéricas, os modelos constitutivos elastoplásticos de deformações finitas apresentaram uma boa correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais e analíticos para situações com cargas monotônicas. Conclui-se que esses exemplos foram capazes de validar os modelos implementados.

9.3 Sobre a continuidade da linha de pesquisa

A partir desta tese, têm-se as seguintes sugestões de trabalhos futuros:

- Desenvolver a formulação combinando a metodologia MITC e o MEFG para análise de cascas com grandes curvaturas.
- Desenvolver a formulação combinando a metodologia MITC+ e o MEFG.
- Avaliar o comportamento dos modelos elastoplásticos de deformações finitas com a inserção de novas medidas de deformação.
- Implementar modelos de deformações finitas mais complexos, compostos por múltiplas superfícies acopladas ou não.
- Adaptar os modelos de deformações finitas para carregamentos cíclicos, a fim de realizar análises em fadiga, por meio da implementação de leis de encruamento cinemático ou misto.
- Realizar análises utilizando o elemento de cascas finas em estruturas de concreto armado, incluindo painéis de concreto armado submetidos a uma combinação de cisalhamento e flexão, paredes de cisalhamento de concreto armado e tanques cilíndricos de concreto armado submetidos a carregamentos monotônicos e cíclicos.

BIBLIOGRAFIA

- Ahmad, S., Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C. (1970), ‘Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements’, *Int. J Numerical Methods in Engiennering* vol. 2, 419–451.
- Alves, P. D. (2012), *Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados*, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Andelfinger, U. e Ramm, E. (1993), ‘Eas-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shells and their equivalence to hr-elements’, *Int. J Numerical Methods in Engiennering* vol. 58, 1637–1682.
- Arciniega, R. A. e Reddy, J. N. (2005), ‘Consistent third-order shell theory with application to composite circular cylinders’, *AIAA Journal* vol. 43.
- Areias, P. M. A. e Belytschko, T. (2004), ‘Non-linear analysis of shells with arbitrary involving cracks using xfem’, *International Journal For Numerical Methods In Engineering* vol. 62, 384–415.
- Areias, P. M. A. e Belytschko, T. (2006), ‘Analysis of finite strain anisotropic elastoplastic fracture in thin plates and shells’, *Journal of Aerospace Engineering* vol. 19, 259–270.
- Areias, P. M. A., Song, J.-H. e Belytschko, T. (2005), ‘A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete kirchhoff-love constraints’, *International Journal For Numerical Methods In Engineering* vol. 64, 1166–1206.
- Areias, P., Rabczuk, T. e Msek, M. (2016), ‘Phase-field analysis of finite-strain plates and shells including element subdivision’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 312, 322–350.
- Asaro, R. J. (1983), ‘Micromechanics of crystals and polycrystals’, *Advances in applied mechanics* vol. 23, 1–115.
- Ayad, R., Dhat, G. e Batoz, J. L. (1998), ‘A new hybrid-mixed variational approach for reissner-mindlin plates: The misp model.’, *International Journal Numerical Methods in Engineering* vol. 42, 1149–1179.

- Babuska, I., Caloz, G. e Osborn, J. E. (1994), ‘Special finite element method for a class of second order elliptic problems with trough coefficients’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* vol. 36, 3553–3576.
- Barros, F. B. (2002), Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas, PhD thesis, EESC-USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Bathe, K.-J. (2006), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Nova Jersey, EUA.
- Bathe, K.-J., Bucalem, M. L. e Brezzi, F. (1990), ‘Displacement and stress convergence of our mitc plate bending elements’, *Engineering computations* vol. 7, 291–302.
- Bathe, K.-J. e Dvorkin, E. N. (1984), ‘A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis’, *Engineering computations* .
- Bathe, K.-J. e Dvorkin, E. N. (1985), ‘A four-node plate bending element based on min-dlin/reissner plate theory and a mixed interpolation’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 21(2), 367–383.
- Bathe, K.-J. e Dvorkin, E. N. (1986), ‘A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components’, *International journal for numerical methods in engineering* vol. 22(3), 697–722.
- Bathoz, J. L., Chattopadhyay, A. e Dhatt, G. (1976), ‘Finite element large deflection analysis of shallow shells’, *International Journal for Numerical Method Engineering* vol. 10, 39–58.
- Bathoz, J. L., Chattopadhyay, A. e Dhatt, G. (1979), ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’, *International Journal for Numerical Method Engineering* vol. 14, 1262–1267.
- Belo, I. M. (2009), Desenvolvimento da Formulação Corrotacional em Elementos Finitos de Cscs para Análise Hiperelástica, PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W., Carpenter, N. e Ong, J. (1985), ‘Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements.’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 1, 221–258.
- Betsch, P. e Stein, E. (1999), ‘Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 179, 215–245.

- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R. (1986), ‘Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing’, *International Journal of Rock Mechanics and Minig Science* vol. 23(3), 255–265.
- Brouzoulis, J. e Fagerstrom, M. (2013), ‘Modelling of multiple delaminations in shells using xfem’, *19th Int. Conf. Composite Materials* .
- Brouzoulis, J. e Fagerstrom, M. (2015), ‘An enriched shell element formulation for efficient modeling of multiple delamination propagation in laminates’, *Composite Structures* vol. 126, 196 – 206.
- Bruno, H., Barros, G., Menezes, I. F. M. e Martha, L. F. (2020), ‘Return-mapping algorithms for associative isotropic hardening plasticity using conic optimization’, *Applied Mathematical Modeling* vol. (78), 724–748.
- Bucalem, M. L. e Bathe, K. J. (1983), ‘High-order mitc general shell elements’, *International Journal For Numerical Methods in Engineering* vol. 36, 3279–3274.
- Bucalem, M. L. e Bathe, K. J. (1997), ‘Finite element analysis of shell structures’, *Computational Methods in Engineering* vol. 4, 3–61.
- Buechter, N. e Ramm, E. (1992), ‘Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis’, *Journal of Applied Mechanics* vol. 34, 39–59.
- Buechter, N., Ramm, E. e Roehl, D. (1994), ‘Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 37, 2551–2568.
- Burzyński, S., Chróścielewski, J., Daszkiewicz, K. e Witkowsk, W. (2016), ‘Geometrically nonlinear fem analysis of fgm shells based on neutral physical surface approach in 6-parameter shell theory’, *Composites Part B: Engineering* vol. 107, 203 – 213.
- Caminero, M. A., Montáns, F. J. e Bathe, K.-J. (2011), ‘Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measures’, *Computers and Structures* vol. 89, 826–84.
- Carol, I., Rizzi, E. e William, K. (1994), ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’, *International Journal of Solid and Structures* vol. 31 (20), 2835–2865.
- Carreira, D. J. e Chu, K. (1985), ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’, *ACI Journal* vol. 82, 797–804.

- Carrera, E., Pagani, A., Augello, R. e Wu, B. (2020), ‘Popular benchmarks of nonlinear shell analysis solved by 1d and 2d cuf-based finite elements’, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* vol. 27(13), 1098–1109.
- Chan, S. L. (1988), ‘Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 26, 2657–2669.
- Chapelle, D. e Bathe, K.-J. (1998), ‘Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures’, *Computer and Structures* vol. 66, 19–36.
- Chapelle, D. e Bathe, K.-J. (2010), *The finite element analysis of shells-fundamentals*, Springer Science & Business Media.
- Chapelle, D., Oliveira, D. L. e Buclea, M. L. (2003), ‘Mitc elements for a classical shell model’, *Computers & Structures* vol. 81, 523–533.
- Chen, W. F. e Han, D. J. (2007), *Plasticity for Structural Engineers*, J. Ross Publishing Classics, J. Ross Pub.
- Choi, H.-G. e Lee, P.-S. (2023), ‘The simplified mitc4+ shell element and its performance in linear and nonlinear analysis’, *Composite Structures* vol. 290, 107–177.
- Cinefra, M., D’Ottavio, M., Polit, O. e Carrera, E. (2020), ‘Assessment of mitc plate elements based on cuf with respect to distorted meshes’, *Composite Structures* vol. 238, 111962.
- Coda, H. B. (2003), ‘An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on position description’, *XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Coda, H. B. e Paccola, R. R. (2007), ‘An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements’, *Computational Mechanics* vol. 40, 185–200.
- COPILLOT* (2023), Online. Generated by Copilot on November 10, 2023.
URL: <https://copilot.microsoft.com>
- Crisfield, A. M. (1981), ‘A fast incremental-interactive solution procedure that handles snap-through’, *Computers & Structures* vol. 13, 55–62.
- Crisfield, A. M. (1983), ‘An arc length method including line searches and accelerations’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 19, 1269–1289.
- Crisfield, M. A. (1991), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1, John Wiley & Sons.

- Dolbow, J., Moes, N. e Belytschko, T. (2000), ‘Modeling fracture in mindlin-reissner plates with the extended finite element method’, *International Journal of Solids and Structures* vol. 37, 7161–7183.
- Donnell, L. H. (1934), ‘A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending’, *ASME* vol. 56, 795–806.
- Dornish, W., Muller, R. e Klinkel, S. (2016), ‘An efficient and robust rotational formulation for isogeometric reissner-mindlin shell elements’, *Computer methods in applied mechanics and engineering* vol. 303, 1–34.
- Duarte, C. A. (1996), The hp-cloud method, PhD thesis, University of Texas, Austis.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T. (1995), Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem, Technical report, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T. (1996), ‘An h-p adaptive method using cloud’, *International Journal of Solids and Structures* vol. 98, 137–149.
- Dvorkin, E. N. (1995), ‘Nonlinear analysis of shells using the mitc formulation’, *Archives of Computational Methods in Engineering* vol. 2), 1–50.
- Eberlein, R. e Wriggers, P. (1999), ‘Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerings* vol. 171, 243–279.
- Flores, F., Onate, E. e Zarate, F. (1995), ‘New assumed strain triangles for non linear shell analysis’, *Computational Mechanics* vol. 17, 107–114.
- Fonseca, F. T. (2008), Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fooppl, A. (1923), *Vorlesungen uber technische Mechanik*, Teubner.
- Fornel, G. F. (2018), Implementação numérica de um modelo de plasticidade cristalina para estado plano de deformações e aplicação ao estudo de trinca em monocristal, Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Fuina, J. S. (2009), Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados, PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuschi, P., Perić, D. e Owen, D. R. J. (1992), ‘Studies on generalized midpoint integration in rate-independent plasticity with reference to plane stress j2-flow theory’, *Computers & Structures* vol. 43, 1117–1133.

- Gaiotti, M., Rizzo, C. M., Branner, K. e Berring, P. (2014), ‘An high order mixed interpolation tensorial components (mitc) shell element approach for modeling the buckling behavior of delaminated composites’, *Computers & Structures* vol. 108, 657–666.
- Gallagher, R. H. (1973), ‘The finite element method in shell stability analysis’, *Computers & Structures* vol. 3, 543–557.
- Garcia, O. A. (2003), Elementos Finitos Generalizados na Análise Estática de Placas e Cascas, PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Ginsberg, J. H. (1973), ‘Large-amplitude forced vibrations of simply supported thin cylindrical shells’, *Journal of Applied Mechanics* vol. 40, 471–477.
- Gomes, L. L. (2018), Análise geometricamente não linear por métodos baseados na partição da unidade modelagem e simulação elastoplástica em elemento finitos, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gomes, L. L., Penna, S. S., Barros, F. B. e da Silva Pitangueira, R. L. (2020), ‘Geometrically nonlinear analysis by the generalized finite element method’, *Engineering Computations* .
- Gori, L., Penna, S. S. e da Silva Pitangueira, R. L. (2017), ‘A computational framework for constitutive modelling’, *Computers & Structures* vol. 187, 1–23.
- Greco, M. (2004), Análise de Problemas de Contato/Impacto em Estruturas de Comportamento Não Linear pelo Método dos Elementos Finitos, PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Green, A. P. (1953), ‘The plastic yielding of notched bars due to bending’, *Quart. J. Mech. Appl. Math* vol. 50, 29–54.
- Guo, Y., Yu, G. e Xie, X. P. (2013), ‘Uniform analysis of a stabilized hybrid finite element method for reissner-mindlin plates’, *Science China Mathematics* vol. 56, 1521–1742.
- Hale, J. S., Brunetti, M., Bordas, S. P. e Maurini, C. (2018), ‘Simple and extensible plate and shell finite element models through automatic code generation tools’, *Computers and Structures* vol. 209, 163–181.
- Hernández, E., Hervella-Nieto, L. e Rodríguez, R. (2003), ‘Computation of the vibration modes of plates and shells by low-order mitc quadrilateral finite elements’, *Computers and Structures* vol. 81, 615–628.
- Horrigmoe, G. e Bergan, P. G. (1978), ‘Nonlinear analysis of free-form shells by flat elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 16, 11–35.

- Huang, H. C. e Hinton, E. (1986), ‘A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation’, *International Journal For Numerical Methods In Engineering* vol. 22, 73–92.
- Jeon, H.-M., Lee, Y., Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2015), ‘The mitc3+ shell element in geometric nonlinear analysis’, *Computer and Structures* vol. 146, 91–104.
- Juna, H., Yoonb, K., Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2018), ‘The mitc3+ shell element enriched in membrane displacements by interpolation covers’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 377, 458–480.
- Kant, T. e Kommineni, J. R. (1992), ‘C0 finite element geometrically non linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory’, *Computers and Structures* vol. 42, 511–520.
- Kant, T. e Kommineni, J. R. (1994), ‘Geometrically non-linear transient analysis of laminated composite and sandwich shells with a refined theory and c0 finite elements’, *Computer and Structures* vol. 52, 1243–1259.
- Katili, I., Batoz, J. L., M, I. J. e Lardeur, P. (2018), ‘A comparative formulation of dkmq, dsq and mitc4 quadrilateral plate elements with new numerical results based on s-norm tests’, *Computers and Structures* vol. 204, 48–64.
- Kiendl, J., Hsu, M.-C., Wu, M. C. H. e Reali, A. (2015), ‘Isogeometric kirchhoff-love shell formulations for general hyperelastic materials’, *Computer methods in applied mechanics and engineering* vol. 291, 280–303.
- Kirchhoff, G. (1850), ‘Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe’, *J. Math.* vol. 40, 51–58.
- Ko, Y., Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2016), ‘The mitc4+ shell element and its performance’, *Computer and Structures* vol. 169, 57–68.
- Ko, Y., Lee, P. S. e Bathe, K. J. (2017), ‘A new 4-node mitc element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element’, *Computer and Structures* vol. 192, 34–49.
- Ko, Y., Lee, Y., Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2017), ‘Performance of the mitc3+ and mitc4+ shell elements in widely-used benchmark problems’, *Computer and Structures* vol. 193.
- Koiter, W. T. (1966), ‘On the nonlinear theory of thin elastic shells i- introductory sections. ii- basic shell equations. iii- simplified shell equations’, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* vol. 69, 1–54.

- Krenk, S. (1995), ‘An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 38, 823–839.
- Krenk, S. e Hededal, O. (1993), ‘A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 123, 95–107.
- Kumar, S., Singh, I., Mishra, B. e Singh, A. (2016), ‘New enrichments in xfem to model dynamic crack response of 2-d elastic solids’, *International Journal of Impact Engineering*. pp. 1–14”.
- Kzam, A. K. L. (2016), Análise da Instabilidade Estrutural Global e Local pelo MEF Posicional com Determinação de Pontos Críticos na trajetória de Equilíbrio, PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Lee, C., Lee, D.-H. e Lee, P.-S. (2022), ‘The strain-smoothed mitc3+ shell element in nonlinear analysis’, *Computers & Structures* vol. 265, 106768.
- Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2004), ‘Development of mitc isotropic triangular shell finite elements’, *Computer and Structures* vol. 82, 945–962.
- Lee, P.-S. e Bathe, K.-J. (2010), ‘The quadratic mitc plate and mitc shell elements in plate bending’, *Advances in Engineering Software* vol. 41, 712–728.
- Li, D. (2016), ‘Extended layerwise method of laminated composite shells’, *Composite Structures* vol. 136, 313 – 344.
- Li, D. e Zhang, F. (2017), ‘Full extended layerwise method for the simulation of laminated composite plates and shells’, *Computers & Structures* vol. 187, 101 – 113.
- Li, Z., Izzuddin, B. A., Vu-Quoc, L., Rong, Z. e Zhuo, X. (2017), ‘A 3-node co-rotational triangular elasto-plastic shell element using vectorial rotational variables’, *Advanced Steel Construction* vol. 3, 206–240.
- Liu, N., Hsu, M.-C., Lua, J. e Phan, N. (2022), ‘A large deformation isogeometric continuum shell formulation incorporating finite strain elastoplasticity’, *Computers Mechanics* vol. 70, 965–976.
- Lubliner, J. (1990), *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, Nova York, EUA.
- Luu, C., Mo, Y. e Hsu, T. T. (2017), ‘Development of csmm-based shell element for reinforced concrete structures’, *Engineering Structures* vol. 132, 778–790.
- Meek, J. L. e Tan, H. (1984), ‘Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique’, *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 47, 261–282.

- Mendonça, P. d. T. R. (2019), *Materiais compostos e estruturas-sandwiche: projeto e análise*, Orsa Maggiore, Brasil.
- Menin, R. C. G. (2006), Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas, PhD thesis, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Mi, Y. e Yu, X. (2021), ‘Isogemtric mitc shell’, *Computer Method in Apllied Mechanics and Engineering* vol. 377, 113693.
- Miehe, C. (1998), ‘A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 155, 193 – 233.
- Mindlin, R. D. (1951), ‘Influence of rotatory inertial and shear on flexural motions of isotropic elastic plates’, *Journal of Applied Mechanics* vol. 73.
- Morley, L. S. D. (1963), *Skew Plates and Structures*, Pergamon Press, Oxford.
- Mostofizadehand, S., Fagerstrom, M. e Larsson, R. (2016), ‘Xfem-based element sub-scale refinement for detailed representation of crack propagation in large-scale analyses’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 110, 549–572.
- Murakami, S. (2012), *Contiunuum Damage Mechanics*, Springer, Nagoya, Japão.
- Naghdi, P. M. (1990), ‘A critical review of the state of finite plasticity’, *Journal of applied mathematics and physics (ZAMP)* vol. 41, 315–394.
- Nasirmanesh, A. e Mohammadi, S. (2017a), ‘Eigenvalue buckling analysis of cracked functionally graded cylindrical shells in the framework of the extended finite element method’, *Composite Structures* vol. 159, 548 – 566.
- Nasirmanesh, A. e Mohammadi, S. (2017b), ‘An extended finite element framework for vibration analysis of cracked fgm shells’, *Composite Structures* vol. 180, 298 – 315.
- Nguyen, K., Sanz, M. A. e Montáns, F. J. (2020), ‘Plane-stress constrained multiplicative hyperelasto-plasticity with nonlinear kinematic hardening. consistent theory based on elastic corrector rates and algorithmic implementation’, *International Journal of Plasticity* .
- Nguyen-Thanh, N., Valizadeh, N., Nguyen, M., Nguyen-Xuan, H., Zhuang, X., Areias, P., Zi, G., Bazilevs, Y., Lorenzis, L. D. e Rabczuk, T. (2015), ‘An extended isogeometric thin shell analysis based on kirchhoff-love theory’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 284, 265 – 291.

- Nirschl, G. C. e Proença, S. P. B. (2008), ‘Método dos elementos finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas’, *Cadernos de Engenharia de Estruturas* vol. 10, 17–51.
- Oliveira, D. B. (2016), Implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Oliveira, D. B., Penna, S. S. e da Silva Pitangueira, R. L. (2020), ‘Elastoplastic constitutive modeling for concrete: a theoretical and computational approach’, *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais* vol. 13, 171–182.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Cante, J. C. (2008), ‘An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems’, *Computer methods in applied mechanics and engineering* vol. 197, 1865–1889.
- Oñate, E. (2013), *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*, Springer Netherlands.
- Ortiz, M. e Popov, E. P. (1985), ‘Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations’, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* vol. 21, 1561–1576.
- Owen, D. R. J. e Hinton, E. (1980), *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, EUA.
- Pagani, A., Azzara, R., Wu, B. e Carrera, E. (2021), ‘Effect of different geometrically nonlinear strain measures on the static nonlinear response of isotropic and composite shells with constant curvature’, *International Journal of Mechanical Sciences* vol. 209.
- Peng, X. e Crisfield, M. (1992), ‘A consistent corotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle’, *International Journal Numerical Methods Engineering* vol. 35, 1829–1847.
- Penna, S. S. (2011), Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto, PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pham, Q., Pham, T., Trinh, Q. V. e Phan, D. (2019), ‘Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells using an edge-based smoothed mitc 3 (es mitc 3) finite elements’, *Cadernos de Engenharia de Estruturas* vol. 10, 17–51.

- Pitangueira, R. L. S. (1998), *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*, PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pitkaranta, J., Matache, A.-M. e Schwab, C. (1999), ‘Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations’, *Computer Methods Applied Mechanis and Engineering* vol. 190, 2943–2975.
- Polak, M. A. e Vechio, R. J. (1994), ‘Reinforced concrete shell elements subjected to bending and membrane loads’, *ACI Structural Journal* vol. 91, 261–268.
- Prazeres, P. G. C., Bittencourt, L. A. G. B. J. T. N. e Manzoli, O. L. (2015), ‘A modified implicit/explicit integration scheme: an application to elastoplasticity problems’, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* vol. 38, 151–161.
- Ramm, E. (1981), ‘Strategies for tracing the nonlinear response near limit points’, pp. 63–83.
- Razzaque, A. (1973), ‘Program for triangular bending elements with derivative smoothing’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 3, 333–343.
- Reddy, J. N. (1990), ‘A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness’, *International Journal of Non-Linear Mechanics* vol. 27, 677–686R.
- Reddy, J. N. (2003), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC PRESS, Boca Raton, EUA.
- Reddy, J. N. e Chandrasekhara, K. (1985), ‘A review of the literature on finite-element modeling of laminated composite plates’, *Shock and Vibration Digest* vol. 17(4), 3–8.
- Reddy, J. N. e Chandrashekhara, K. (1985), ‘Geometrically non-linear transient analysis of laminated’, *International Journal of Non-Linear Mechanics* vol. 20, 79–90.
- Reissner, E. (1944), ‘On the theory of bending of elastic plates’, *Journal of Mathematics and Physics* vol. 23.
- Reissner, E. (1945), ‘The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates’, *Journal of Applied Mechanics* vol. 12.
- Reissner, E. (1947), ‘On bending of elastic plates’, *Quarterly of Applied Mechanics* vol. 5.
- Ribeiro, F. L. B. e Landau, L. (1991), ‘Formulação não linear geométrica para análise de cascas usando elementos finitos degenerados’, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo Y Diseño en Ingenieria* vol. 7, 301–320.

- Ricks, E. (1972), 'The application of newton method to the problem of elastic stability', *Journal of Applied Mechanics* pp. 1060–1065.
- Ricks, E. (1979), 'An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems', *International Journal of Solids and Structures* vol. 15, 529–551.
- Saliba, S. S. (2007), Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas, Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Sampaio, M. S. M., Paccola, R. R. e Coda, H. B. (2015), 'A geometrically nonlinear fem formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells', *Composite Structures* vol. 119, 799–814.
- Sanders Jr, J. L. (1963), 'Nonlinear theories for thin shells', *Quarterly of Applied Mathematics* vol. 21, 21–36.
- Schmitd, R. (1977), 'A refined non linear thory of plates with transverse shear deformation', *Journal of Industrial Mathematic Society* vol. 27, 23–38.
- Scordelis, A. e Lo, K. S. (1964), 'Computer analysis of cylindrical shells', *Journal of the American Concrete Association* vol. 61, 539–562.
- Silva, J. R. B. e Horowitz, B. (2022), 'Nonlinear analysis of reinforced concrete structures using thin flat shell elements', *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* vol. 15.
- Simo, J. C. e Hughes, T. J. R. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, Nova York, EUA.
- Simo, J., Fox, D. e Rifai, M. (1989), 'On a stress resultant geometrically exact shell model. part II: The linear theory - computational aspects.', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 73, 53–92.
- Simo, J. e Rifai, M. (1990), 'A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes', *International Journal of Numerical Methods in Engineering* vol. 29, 1595–1638.
- Skrzypek, J. J. (1993), *Plasticity and Creep Theory*, CRC Press, Londres.
- Song, Z. e Dai, H.-H. (2016), 'On a consistent finite-strain shell theory based on 3-d nonlinear elasticity', *Computer Methods in Apllied Mechanics and Engineering* vol. 139, 237–262.
- Soriano, H. L. (2009), *Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas*, Ciência Moderna.

- Souza Neto, E. A., Perić, D. e Owen, D. R. J. (2008), *Computational Methods For Plasticity: Theory and Application*, Wiley, Swansea, EUA.
- Stroubolis, T., I. B. e Coops, K. (2000), ‘The design and analysis of the generalized finite element method’, *Computer methods in applied mechanics and engineering* vol. 181, 43–69.
- Suarez, O. A. G., Rossi, R. e da Silva Jr, C. R. A. (2011), ‘Enrichment of a rational polynomial family of a shape functions with regularity c_0^k , $k=0, 2, 4$. applications in axisymmetric plates and shells’, *Engineering Computations* vol. 27.
- Sussman, T. e Bathe, K.-J. (2013), ‘3d-shell element for structures in large strains’, *Computers & Structures* vol. 122, 2–12.
- Sze, K., Chan, W. e Pian, T. (2002), ‘An eight-node hybrid-stress solid-shell element for geometric nonlinear analysis of elastic shells’, *Int. J. Numer. Methods* vol. 55, 853–878.
- Sze, K. Y., Liu, X. H. e Lo, S. H. (2004), ‘Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells’, *Finite Elements and Analysis and Design* vol. 40, 1551–1569.
- Sze, K. e Zheng, S. (1999), ‘A hybrid stress nine-node degenerated shell element for geometric nonlinear analysis’, *Computational Mechanics* vol. 23, 448–456.
- Szilar, R. (2004), *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Method*, Jonh Wiley & Sons, Nova Jérsei, EUA.
- Tang, Y. Q., Zhou, Z. H. e Chan, S. L. (2017), ‘A simplified co-rotational method for quadrilateral shell elements in geometrically nonlinear analysis’, *Internationl Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 112, 1519–1538.
- Taqieddin, Z. N. (2008), *Elasto-Plastic and Damage Modeling of Reinforced Concrete*, PhD thesis, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, EUA.
- Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, Macgraw-Hill, Nova York, EUA.
- Trinh, M.-C. e Jun, H. (2021), ‘A higher-order quadrilateral shell finite element for geometrically nonlinear analysis’, *European Journal of Mechanics/A Solids* vol. 89.
- Trinh, M.-C. e Jun, H. (2023), ‘Geometrically nonlinear analysis of functionally graded composite shells using mitc4 and mitc9 elements’, *Thin-Walled Structures* vol. 185, 110632.

- Truesdell, C. (1966), *Continuum mechanics I: the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, Gordon & Breach, Nova York, EUA.
- Valente, R. A. F. (2004), Developments on Shell and Solid-Shell Finite Elements Technology in Nonlinear Continuum Mechanics, PhD thesis, Universidade do Porto, Portugal.
- von Kármán, T. (1910), ‘Festigkeitsprobleme im maschinenbau’, *Encycl. der math* vol. 4, 348–351.
- von Kármán, T. e Tsien, H. S. (1941), ‘The buckling of thin cylindrical shells under axial compression.’, *Journal of the Aeronautical Sciences* vol. 8, 303–312.
- Williams, F. W. (1964), ‘An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections’, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* vol. 17(4), 451–469.
- Wood, R. D. e Zienkiewicz, O. C. (1977), ‘Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches, and axisymmetric shells’, *Computer and structures* vol. 7, 725–735.
- Wu, B., Pagani, A., Chen, W. Q. e Carrera, E. (2021), ‘Geometrically nonlinear refined shell theories by Carrera unified formulation’, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* vol. 28 (16), 1721–1741.
- Yamaki, N. (1984), *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, Elsevier Science.
- Yang, H. T. Y., Saigal, S., Massud, S. e Kapania, R. K. (2000), ‘A survey of recent shell finite elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 47, 101–127.
- Yang, Y. B. e McGuire, W. (1985), ‘A work control method for geometrically nonlinear analysis’, *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application* pp. 913–921.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S. (1990), ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’, *AIAA Journal* vol. 28(12), 2110–2216.
- Yazdani, S., Rust, W. J. H. e Wriggers, P. (2016), ‘An xfem approach for modelling delamination in composite laminates’, *Composite Structures* vol. 135, 353 – 364.
- Yazdani, S., Rust, W. J. H. e Wriggers, P. (2018), ‘Delamination onset and growth in composite shells’, *Composite Structures* vol. 195, 1–15.
- Zarrimzadeh, H., Kabir, M. Z. e Deylami, A. (2016), ‘Extended finite element fracture analysis of a cracked isotropic shell repaired by composite patch’, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* vol. 39, 1352–1365.

Zarrinzadeh, H., Kabir, M. e Varvani-Farahani, A. (2020), ‘Static and dynamic fracture analysis of 3d cracked orthotropic shells using xfem method’, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* vol. 108, 102648.

Apêndices

APÊNDICE A

ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Para se obter as trajetórias de equilíbrio executa-se um processo incremental-iterativo cujo objetivo é resolver um sistema com $N + 1$ incógnitas, sendo N deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga, e $N + 1$ equações de equilíbrio e uma equação de restrição. O diagrama da Figura A.1 mostra os principais passos do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), relativo a um processo incremental-iterativo.

Um dos processos incrementais-iterativos implementados no sistema INSANE é o método de Newton-Raphson. Segundo Bathe (2006), esse método pressupõe que a matriz de rigidez tangente seja recalculada a cada interação. Desse modo, a equação de equilíbrio incremental que corresponde a interação j do passo i pode ser escrita na forma que se segue:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (\text{A.1})$$

onde,

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente da interação $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{\delta U\}_{j-1}^i$, obtida a partir da soma das parcelas linear e não linear da matriz de rigidez indicadas na equação 4.23;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais da interação j do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de carga da interação j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência. Na equação 4.23 o vetor de cargas é representado pela soma dos vetores R e F ;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da interação interação $j - 1$ do passo i ;

A solução da equação A.1 passa por estabelecer um valor para o incremento de fator de carga, $\delta \lambda_j$, em função do método de controle, a partir do qual, pode-se obter o incremento dos parâmetros nodais, $\{\delta U\}_j$

$$\{\delta U\}_j = \delta \lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q \quad (\text{A.2})$$

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \quad (\text{A.3})$$

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1} \quad (\text{A.4})$$

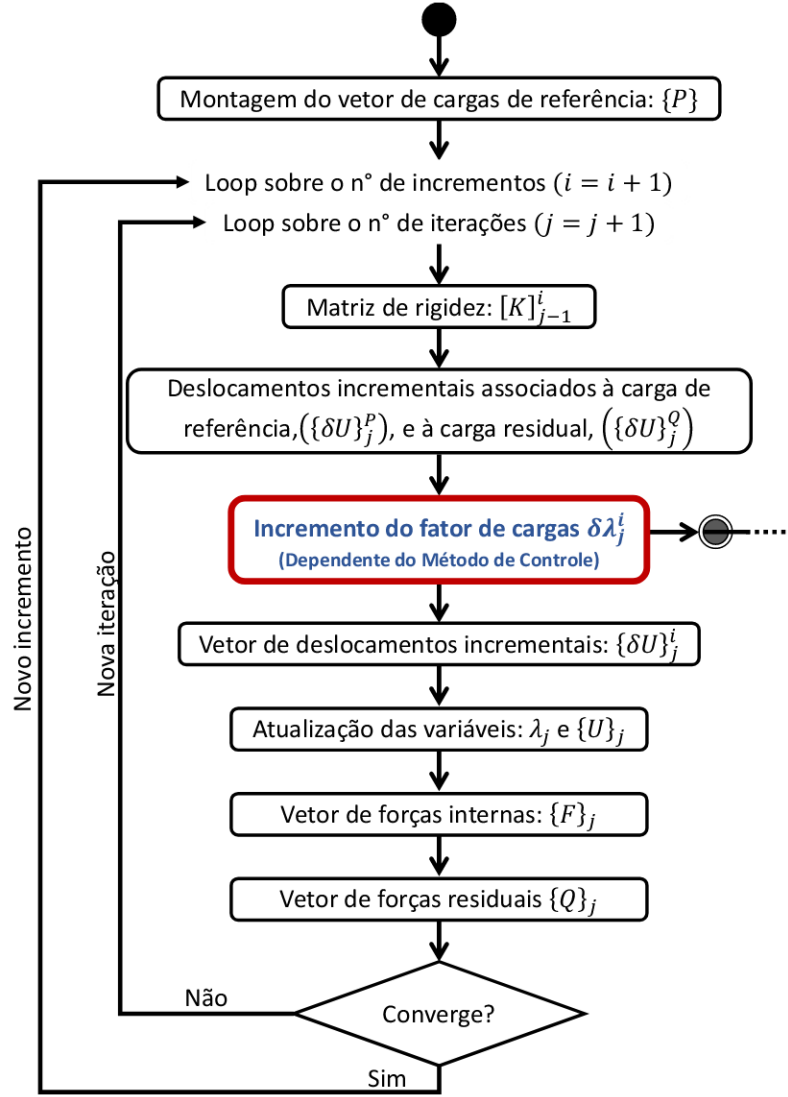


Figura A.1: Algoritmo para métodos de controle

Obtidos os valores de $\delta\lambda_j$ e $\{\delta U\}_j$ a atualização das variáveis fator de carga e de deslocamentos é feita da seguinte forma

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j \quad (\text{A.5})$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (\text{A.6})$$

Na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais, $\{Q\}_j$, é igual a zero. Nas iterações seguintes ele é dado por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j \quad (\text{A.7})$$

onde $\{F\}_j$ é o vetor de forças equivalentes às tensões ao final da iteração j .

Ao final de cada iteração, o equilíbrio/convergência do sistema é verificado pelo critério de forças e/ou pelo critério de deslocamentos, através da magnitude dos vetores de forças

residuais ($\{Q\}_j$) e de deslocamentos incrementais ($\{\delta U\}_j$), respectivamente. O processo iterativo é repetido até que a convergência seja alcançada.

Novas iterações serão necessárias se a convergência não for atingida. Nesse caso, após calculados os valores de $\{\delta U\}_j^P$ e $\{\delta U\}_j^Q$ através das equações A.3 e A.4, o valor de $\delta\lambda_j$ pode ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

A.1 Métodos de Controle

Como destacado no diagrama da Figura A.1, a obtenção do parâmetro de carga $\delta\lambda_j^i$ requer uma atenção especial, pois é um valor que pode ser calculado por diferentes maneiras, dependendo do método de controle adotado. A escolha do método de controle é importante para o estudo pós-crítico em placas e cascas, permitindo classificar a perda de estabilidade, determinar a capacidade de carga da estrutura e quantificar a sensibilidade da mesma às imperfeições iniciais. Dentre os vários métodos de controle existentes para a realização dos procedimentos incrementais iterativos, destacam-se os métodos de controle de carga, de controle de deslocamentos e de controle de comprimento de arco.

O modo mais simples de resolver o sistema de $N + 1$ equações é através do método chamado controle de carga. Neste método, a carga externa é incrementada de um valor constante em cada passo, não variando durante as iterações, assim a variável $\delta\lambda_j = 0$ para as outras iterações. A Figura A.2 apresenta um esquema do processo deste método.

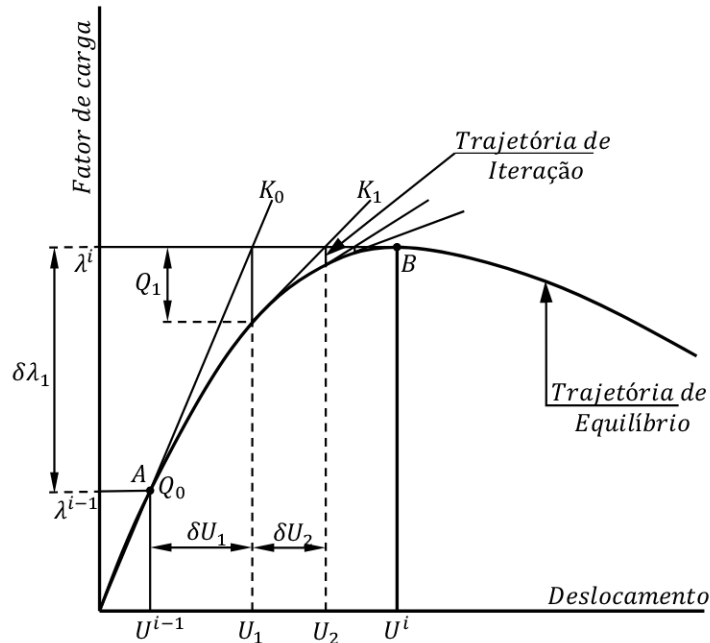


Figura A.2: Processo incremental-iterativo com controle de carga. Fuina (2009)

Uma vez que as iterações são processadas à carga constante, utilizando o método de

controle de carga, pode-se traçar o caminho de equilíbrio completo de estruturas nas quais a carga se apresente sempre crescente ou sempre decrescente. Caso haja mudança no sinal da carga, haverá o surgimento de um ponto limite (ponto B na Figura A.2). Nesse caso o método de controle de carga irá falhar, pois uma vez que a carga externa ultrapassa o valor correspondente ao ponto limite, a linha horizontal que controla a trajetória de iteração não obtém correspondência na trajetória de equilíbrio, logo nenhum ponto de convergência será obtido.

O método de controle direto de deslocamento, proposto inicialmente por Bathoz *et al.* (1979), pressupõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante. Assim como no método de controle de carga, uma das variáveis é eliminada do problema, já que $\delta U_j^k = 0$ para $j > 1$. Portanto, torna-se necessário isolar o restante das componentes do vetor de deslocamentos incrementais, δU , e o incremento do fator de carga, $\delta \lambda_j$.

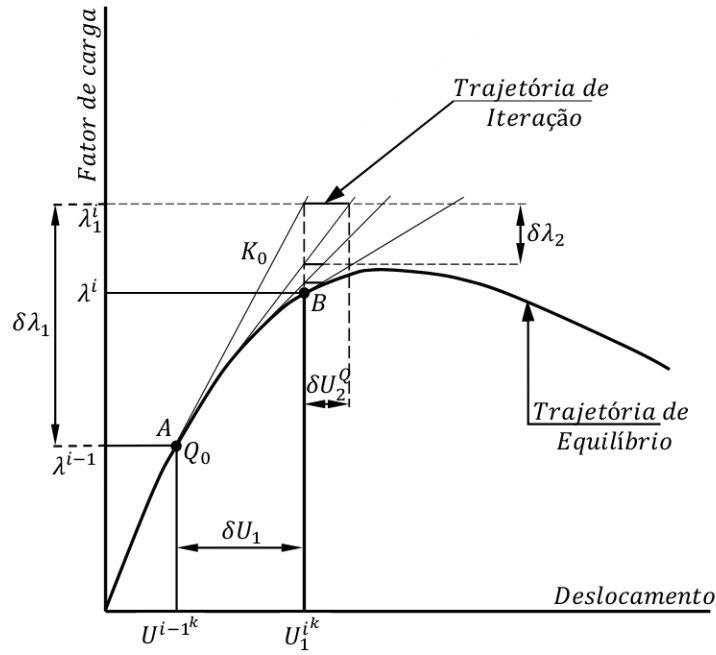


Figura A.3: Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamentos. Fuina (2009)

Ao contrário do método de controle de carga, esse método permite ultrapassar pontos limites de carga. Porém, o método de controle de deslocamentos torna-se ineficiente em estruturas em que se observe um decréscimo do deslocamento de controle experimente diminuição de um nível de carga para outro. Isto se deve ao fato da trajetória de iteração, controlada por uma linha vertical, nunca cruzar a trajetória de equilíbrio (Figura A.3). Além disto a escolha do deslocamento a ser controlado pode ser difícil dependendo da estrutura analisada e a escolha de um incremento em deslocamento não é tão natural quanto a escolha de um incremento de carga, de modo a requerer um conhecimento prévio da estrutura a ser analisada, para que se possa escolher o grau de liberdade adequado a ser usado para o controle.



MÉTODOS DE CONTROLE	$\delta\lambda$ para $j = 1$	$\delta\lambda$ para $j > 1$
Controle de carga	$\delta\lambda_1 = \text{constante}$	$\delta\lambda_j = 0$
Controle Direto de Deslocamento	$\delta\lambda_1 = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{pk}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_1^{Q^k}}{\delta U_1^{pk}}$
Controle de Comprimento de Arco	$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{pT} \cdot \{\delta U\}_1^p}}$	Trajectoria de iteração ortogonal à tangente inicial: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^p}$
		Trajectoria de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^p}$
		Trajectoria cilíndrica: Equação do 2º grau que permite obter $\delta\lambda_j$
Controle de Deslocamento Generalizado	$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \left(\frac{\{\delta U\}_1^{p,1T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,1}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}} \right)^{0,5}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^{p,1-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\{\delta U\}_1^{p,1-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{p,i}}$
Controle por Trabalho	$\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}^{pT} \{P\}}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q^T} \cdot \{P\}}{\{\delta U\}_j^{pT} \cdot \{P\}}$
Método do Resíduo Ortogonal	$\delta\lambda_1 = \pm \text{constante}$	$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \left(-\frac{\{\bar{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\}^T \cdot \{\Delta U\}_j} \right)$

Figura A.5: Fatores de carga para os métodos de controle. Fuina (2009)

APÊNDICE B

MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PARA DEFORMAÇÕES FINITAS

No capítulo 5 foi apresentada a formulação matemática geral do modelo hiperelastoplástico formulado segundo o Ambiente Unificado proposto por Penna (2011). Não foi abordada diretamente a formulação de todos os modelos elasto-plásticos, sendo especificado apenas o modelo J_2 . A seguir, será apresentada a formulação para os modelos constitutivos elasto-plásticos de Tresca, Rankine, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, seguindo a estrutura teórica proposta. As parcelas necessárias à descrição de cada modelo são explicitadas indicando a correlação entre a forma original e a proposta por este trabalho.

B.1 Tresca

O critério de Tresca é um critério isotrópico e por isso pode ser descrito em termos dos invariantes do tensor de tensões. O critério de Tresca pode ser escrito em função do segundo invariante do tensor desviador ou tensor anti-esférico, $J_2 = J_2(\mathbf{s})$, e do ângulo de carregamento, θ . A função de escoamento, com encruamento linear isotrópico, assume o formato

$$\Phi(\tau, \mathbf{A}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - (\sigma_y + \mathcal{H} \mathbf{A}) \quad (\text{B.1})$$

O ângulo de carregamento é definido como uma função do segundo e terceiro invariantes do tensor anti-esférico:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (\text{B.2})$$

Assim como o critério de von Mises o critério de Tresca é associativo, assim, os gradientes da função de escoamento e da função de potencial plástico, para um material isotrópico, podem ser obtidos por:

$$n_{ij} = m_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \tau} \quad (\text{B.3})$$

em que as derivadas dos invariantes em relação a tensão são:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \tau} = \delta_{ij} \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \tau} = s_{ij} \quad (\text{B.4b})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \tau} = t_{ij} = s_{ik}s_{kj} - \frac{1}{3}J_2\delta_{ij} \quad (\text{B.4c})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecher, s_{ij} são as componentes do tensor de tensões desviadoras e t_{ij} é o desvio quadrático do tensor de tensões desviadoras. As derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes são

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 0 \quad (\text{B.5a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{J_2}} - \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^2(4\cos^2 \theta - 1)} \quad (\text{B.5b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{3}}{J_2(4\cos^2 \theta - 1)} \quad (\text{B.5c})$$

B.2 Drucker-Prager

O critério proposto por Drucker-Prager é uma generalização do critério de von Mises, consistindo numa modificação do critério, no qual um termo extra é incluído para que o modelo se torne sensível ao efeito da pressão hidrostática. Enquanto o critério de von Mises é interpretado em termos do tensor de tensões octaédrico, o critério de Drucker-Prager impõe que o escoamento plástico ocorre quando o invariante da tensão desviadora J_2 e a tensão hidrostática atingem uma combinação crítica (Lubliner, 1990). A função que modela o critério de Drucker-Prager é dada por:

$$\Phi(\tau, \mathbf{A}) = \sqrt{J_2(s(\tau))} + \eta p(\tau) - k \quad (\text{B.6})$$

onde $p(\tau) = I_1/3$ é a componente da pressão hidrostática e η é uma constante relacionada ao material e à função k . Considerando endurecimento isotrópico, a função k está relacionada à curva de tensão uniaxial de tração (Chen e Han, 2007) e pode ser definida como:

$$k = \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \tau(\mathbf{A}) \quad (\text{B.7})$$

O modelo de Drucker-Prager é não associado ($F \neq Q$). A lei não associativa Drucker-Prager é obtida através da adoção, para a função de potencial plástico, de função uma similar à função de escoamento, em que o ângulo de atrito, ϕ , é substituído pelo ângulo de dilatação (ψ)

$$Q(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{J_2(s(\tau))} + \bar{\eta} p(\tau) \quad (\text{B.8})$$

em que $\psi < \phi$ e $\bar{\eta}$ é uma constante adicional do material, obtida através da substituição de ϕ por ψ nas equações

Portanto, os gradientes de F e Q , para valores constantes do multiplicador plástico, representados pelos tensores $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, são dados por:

$$m_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\tau \end{bmatrix} + \frac{\bar{\eta}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$n_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\tau \end{bmatrix} + \frac{\eta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

O módulo inelástico, é dado por

$$H = \left(\frac{\eta}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \mathcal{H} \quad (\text{B.11})$$

B.3 Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é baseado na hipótese de que as deformações plásticas resultam do escorregamento entre as partículas materiais. Generalizando a lei de atrito de Coulomb, estabelece-se que o escoamento plástico inicia quando, num plano do corpo, a tensão limite de cisalhamento, τ , e a tensão normal, σ_n , atingem uma combinação crítica:

$$\tau_s = c - \sigma_n \tan \phi \quad (\text{B.12})$$

onde c é a coesão e ϕ é o ângulo de atrito interno. A forma tridimensional da superfície de falha de Mohr-Coulomb é dada por:

$$\Phi(\tau, \mathbf{A}) = \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \sqrt{J_2} + p(\tau) \sin \phi - c \cos \phi \quad (\text{B.13})$$

Da definição geral da função de escoamento, tem-se o gradiente dado por

$$n_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (\text{B.14})$$

As derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes para o critério de Mohr-

Coulomb são

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = \frac{\text{sen} \phi}{3} \quad (\text{B.15a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(\cos \theta - \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{B.15b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\sqrt{J_2} \left(\text{sen} \theta + \frac{\cos \theta \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{B.15c})$$

A derivada $\partial \theta / \partial \tau$ é dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \left(\frac{-9\sqrt{3}J_3}{4J_2^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial J_2}{\partial \tau} \right) \left(\frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{27J_3^2}{4J_2^3}}} \right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial J_3}{\partial \tau} \right) \left(\frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{27J_3^2}{4J_2^3}}} \right) \quad (\text{B.16})$$

O modelo de Mohr-Coulomb é não associado ($F \neq Q$). As derivadas para a lei não associativa de Mohr-Coulomb são obtidas através da substituição do ângulo de atrito, ϕ , pelo ângulo de dilatação, ψ .

O módulo inelástico é dado por

$$H = \mathcal{H} \cos \phi \quad (\text{B.17})$$

B.3.1 Tratamento das singularidades

Os modelos Tresca e Mohr-Coulomb possuem superfícies de escoamento descontínuas com vértices ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$) em que a função de escoamento não é diferenciável. Existem várias abordagens para lidar com essas singularidades. Este trabalho utilizou uma das abordagens clássicas, o chamado método do "arredondamento" dos vértices da superfície de escoamento. Nas imediações dos vértices, este procedimento utiliza a função de escoamento de von Mises para arredondar o critério de Tresca e a função de escoamento de Drucker-Prager para arredondar o critério de Mohr-Coulomb. Assim, para valores de θ nas imediações dos vértices ($\theta = 0$ ou $\theta = 60^\circ$) temos

A abordagem prática adotada neste trabalho é usar as expressões gerais dos critérios de Tresca e Mohr-Coulomb indicados nas Equações [B.1](#) e [B.13](#) para regiões afastadas dos vértices ($0,5^\circ \leq \theta \leq 59,5^\circ$) e, nas proximidades das singularidades, utilizar o critério de von Mises em substituição ao critério de Tresca e o critério de Drucker-Prager no lugar de Mohr-Coulomb. Fisicamente esse artifício é equivalente a um "arredondamento" dos cantos da superfície de escoamento. Portanto, as derivadas da função de cedência em relação aos invariantes são dadas por:

Para o modelo de Tresca:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 0 \quad (\text{B.18a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{s}{||s||} \quad (\text{B.18b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_3} = 0 \quad (\text{B.18c})$$

Para o critério de Mohr-Coulomb:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 0 \quad (\text{B.19a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{s}{||s||} + \frac{\bar{\eta}}{3} I_1 \quad (\text{B.19b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.19c})$$

Embora esta abordagem permite obter os gradientes das funções de escoamento para todos os casos em que o estado de tensão se encontra em um vértice da superfície, ou em suas imediações, deve-se ressaltar que em algumas situações pode ocorrer um salto no gradiente no ponto em que a transição é feita de uma superfície de escoamento para a outra. Isso pode fazer com que as tensões calculadas passem a ser imprecisas.

B.4 Rankine

O critério de escoamento de Rankine é geralmente usado para determinar se um material frágil falha por tração. De acordo com esse critério, a falha ocorre quando a tensão principal máxima em um ponto no interior do material atinge um valor igual ao da resistência à tração encontrada num teste de tração simples, independentemente das tensões normais ou de cisalhamento que atuam em outros planos através deste ponto. A equação para a superfície de ruptura definida por este critério é:

$$\Phi(\tau, \mathbf{A}) = 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3(\sigma_y + \mathcal{H} \mathbf{A}) \quad (\text{B.20})$$

As derivadas das funções de escoamento e de potencial plástico podem ser obtidas a partir da equação [B.3](#), em que as derivadas dos invariantes em relação à tensão são as mesmas apresentadas na equação [B.4](#) e as derivadas da função de escoamento em relação

aos invariantes são

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 1 \quad (\text{B.21a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{J_2}} - \frac{9J_3}{2J^2 2(4 \cos^2 \theta - 1)} \quad (\text{B.21b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J_3} = \frac{3}{J_2(4 \cos^2 \theta - 1)} \quad (\text{B.21c})$$

O módulo inelástico associado ao critério de Rankine será

$$H = (3) (\mathcal{H}) \quad (\text{B.22})$$

APÊNDICE C

MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

Nos modelos de fissuração distribuída, utilizados para representar o processo de fraturamento do concreto, o meio material é idealizado como contínuo durante todo o processo de análise. A partir desse pressuposto, o processo de fissuração e as descontinuidade no campo de deslocamentos causadas por ele são propagados pelo meio através da alteração das equações constitutivas. Relações tensão-deformação são adotadas para seguir o processo de fratura, sendo os limites do concreto e a energia de fratura os parâmetros característicos do material.

Tradicionalmente, a lei tensão-deformação para os modelos de fissuração distribuída é formulada em relação aos eixos principais do tensor de deformação ε . A possibilidade de se ter funções diferentes para cada direção permite ao modelo que capte de forma independente o comportamento, seja de tração ou de compressão e de modo indireto o cisalhamento (no caso particular do modelo aqui formulado). A equação das variações de tensão podem ser escritas da seguinte forma

$$\sigma_{kl} = E_{ijkl} \left(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_{rs} \right) \varepsilon_{kl} \quad (\text{C.1})$$

em que $E_{ijkl} \left(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_{rs} \right)$ é o tensor de rigidez escrito em função das variáveis de dano, $\bar{\mathcal{D}}$, que por sua vez podem ser escritas em um tensor de integridade dado por

$$\bar{\phi}_{nm} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

onde as componentes $\bar{\phi}$ dependem das relações tensão-deformação ou das lei de evolução do dano.

O processo de degradação é então assumido como sendo governado por F_i funções de carregamento desacopladas, expressas como:

$$F_i = \varepsilon_i - k_i \quad (\text{C.3})$$

onde ε_i são os autovalores do tensor de deformação e k_i é uma variável histórica, depen-

dente dos autovalores do tensor de deformação. As derivadas das funções de carregamento em relação às deformações principais são então expressas como:

$$\bar{n}_{nkl} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} \bigg|_p = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon_3} \end{array} \right] \quad (\text{C.4})$$

Supondo que a variável histórica é dada como o maior valor de deformação (em cada direção) já atingido pelo material durante a análise, o tensor das derivadas das funções de dano é a forma inversa do dos módulos pós-crítico, obtido em [5.44](#). Assim,

$$\bar{H}_{nm}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \varepsilon_3} \end{array} \right] \quad (\text{C.5})$$

O tensor de evolução do dano, $\mathbf{m}$, pode ser obtido pela degradação do tensor de rigidez e pode ser calculado da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{m}}_{mij} = \left[\bar{M}_{1ijpq} \varepsilon_{pq} \quad \bar{M}_{2ijpq} \varepsilon_{pq} \quad \bar{M}_{3ijpq} \varepsilon_{pq} \right] \quad (\text{C.6})$$

onde o tensor $\bar{M}_{mijpq}$ é dado por

$$\bar{M}_{mijpq} = \frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \mathcal{M}_{mrs} \quad (\text{C.7})$$

e representa a forma como a rigidez irá se degradar. O tensor $\mathcal{M}_{mrs}$ indica a direção da propagação do dano. Desta forma, considerando as direções locais de dano, para o caso de funções desacopladas, tem-se

$$\bar{\mathcal{M}}_{mrs} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{C.8})$$

Obtidos os tensores descritos nas equações [C.4](#), [C.5](#) e [C.6](#), o operador tangente pode ser expresso como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{M}_{mijpq} \varepsilon_{pq} \bar{n}_{nkl} \quad (\text{C.9})$$

Como já destacado, este modelo permite a utilização de diferentes hipóteses para as leis de evolução (relações tensão-deformação ou leis de dano) capazes de calcular a degradação das propriedades físicas do material. Neste trabalho, o modelo constitutivo de fissuração distribuída combina as leis de [Carreira e Chu \(1985\)](#), para compressão, e a lei de [Boone *et al.* \(1986\)](#), para tração, como mostrado na Figura [C.1](#). Os parâmetros materiais necessários para descrever as relações tensão-deformação incluem o módulo de elasticidade inicial, E_0 , as tensões limites de resistência à compressão, f_c , e à tração,

f_t , a energia de fratura por unidade de comprimento de fissura, G_f e o comprimento característico do material, h .

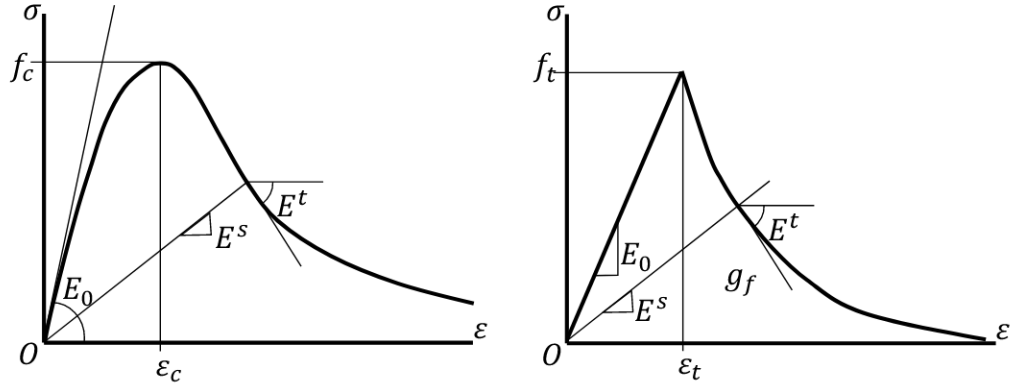


Figura C.1: Leis Tensão-Deformação adotadas no modelo - Carreira-Ingrafea

A proposta de Carreira e Chu (1985) utilizada neste trabalho para modelar o comportamento a compressão do concreto apresenta formas polinomiais baseadas nos limites de tensão e deformação para compressão, dado pela equação

$$\sigma = f_c \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^k} \quad \text{with} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{\varepsilon_c E_0} \right)} \quad (\text{C.10})$$

A proposta de Boone *et al.* (1986) utilizada para representar a resposta à tração do concreto, aproxima o comportamento por uma lei exponencial baseada na energia da fratura e nos limites de tensão e deformação admitidos. O modelo é dado por

$$\sigma = f_t e^{-k(\varepsilon - \varepsilon_t)} \quad \text{com} \quad k = \frac{h f_t}{G_t} \quad (\text{C.11})$$