

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Lucas Ribeiro Alves

**PROPOSTA DE UM MODELO GEOMÉTRICO PARAMETRIZADO PARA ANÁLISE
AERODINÂMICA DE AVES UTILIZANDO O MÉTODO DOS PAINÉIS**

Belo Horizonte
2023

Lucas Ribeiro Alves

**PROPOSTA DE UM MODELO GEOMÉTRICO PARAMETRIZADO PARA ANÁLISE
AERODINÂMICA DE AVES UTILIZANDO O MÉTODO DOS PAINÉIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas
Pinto

Belo Horizonte
2023

A474p

Alves, Lucas Ribeiro.

Proposta de um modelo geométrico parametrizado para análise aerodinâmica de aves utilizando o método dos painéis [recurso eletrônico] / Lucas Ribeiro Alves. - 2023.

1 recurso online (75 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 74-75.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Modelos geométricos - Teses. 3. Aerodinâmica - Teses. 4. Aves - Teses. I. Pinto, Ricardo Luiz Utsch de Freitas. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

“PROPOSTA DE UM MODELO GEOMÉTRICO PARAMETRIZADO PARA ANÁLISE AERODINÂMICA DE AVES UTILIZANDO O MÉTODO DOS PAINÉIS”

LUCAS RIBEIRO ALVES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto (Orientador - Departamento de engenharia Mecânica/UFMG), Ricardo Poley Martins Ferreira (Departamento de Engenharia Mecânica/ UFMG), Guilherme de Souza Papini (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **"Mestre em Engenharia Mecânica"**, na área de concentração de **"Projeto e Sistemas"**.

Dissertação aprovada no dia 05 de setembro de 2023.

Por:



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Poley Martins Ferreira, Professor do Magistério Superior**, em 07/09/2023, às 23:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, Professor do Magistério Superior**, em 11/09/2023, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme de Souza Papini, Membro**, em 11/09/2023, às 17:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2606723** e o código CRC **E8F94FB1**.

RESUMO

É proposto um modelo geométrico parametrizado de aves voadoras do grupo carinata, utilizado para gerar malhas superficiais com o objetivo de serem utilizadas em análises aerodinâmicas. Com esse intuito, é implementado um método dos painéis com condição de contorno de Dirichlet, condição de Kutta linearizada e esteira de vórtices livres. Ambos os modelos são apresentados e o método dos painéis é validado. Por fim, é realizada uma análise aerodinâmica comparativa entre duas aves com características geométricas distintas, uma com asa de planeio larga, como o urubu, e outra com asa de planeio longa, como o albatroz. Os resultados obtidos foram condizentes com as expectativas teóricas do campo da aeronáutica.

Palavras-chave: Modelo Geométrico Parametrizado; Malha Superficial; Método dos Painéis.

ABSTRACT

A parameterized geometric model of flying birds from the carinatae group is proposed and used to generate surface meshes to be used in aerodynamic analyses. To this end, a panel method with Dirichlet boundary condition, linearized Kutta condition and free vortex wake is implemented. Both models are presented and the panel method is validated. Finally, a comparative aerodynamic analysis is carried out between two birds with different geometric characteristics, one with passive ascending wings, like the vulture, and the other with active ascending wings, like the albatross. The results obtained were consistent with theoretical expectations in the field of aeronautics.

Keywords: Parameterized Geometric Model; Superficial Mesh; Panel Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Fluxograma da metodologia aplicada neste trabalho.	13
Figura 2.1 – Estrutura esquelética da asa.	15
Figura 2.2 – Influência do modo de voo na estrutura esquelética da asa.	16
Figura 2.3 – Estrutura esquelética da cauda.	16
Figura 2.4 – Musculatura da asa.	17
Figura 2.5 – Musculatura da cauda.	17
Figura 2.6 – Disposição das penas primárias e secundárias na asa.	18
Figura 2.7 – Formatos de asa.	19
Figura 2.8 – Ilustração de quatro formatos de caudas diferentes.	19
Figura 2.9 – Perfil aerodinâmico com a linha tracejada separando a região da camada limite próxima à superfície.	22
Figura 2.10–Potencial gerado por uma distribuição constante de fontes e dipolos em um painel quadrado.	26
Figura 2.11–Ilustração de um perfil aerodinâmico com diferentes quantidades de circulação.	27
Figura 2.12–Influência do formato da esteira de vórtices nos coeficientes de sustentação e arrasto.	28
Figura 2.13–Discretização da superfície de uma aeronave.	29
Figura 2.14–Força dos dipolos de painéis que compartilham uma aresta do bordo de fuga.	31
Figura 2.15–Representação da marcha no tempo para a criação da esteira.	31
Figura 3.1 – Etapas para a definição de uma superfície da geometria.	34
Figura 3.2 – Ilustração simplificada dos pontos de controle e curvas definidos pelo modelo geométrico.	34
Figura 3.3 – Parâmetros para definição da geometria da asa.	35
Figura 3.4 – Sistemas de referência utilizados para definir as seções da asa.	36
Figura 3.5 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para a asa.	37
Figura 3.6 – Ilustração de como são definidos os pontos de controle em vermelho na curva entre os pontos $\vec{p}_2$ e $\vec{p}_3$	38
Figura 3.7 – Posicionamento dos perfis aerodinâmicos ao longo da envergadura.	40
Figura 3.8 – Pontos de controle para definição da geometria do corpo central.	40
Figura 3.9 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para o corpo central.	41
Figura 3.10–Pontos de controle para definição da geometria da cabeça.	43
Figura 3.11–Representação geométrica dos parâmetros h_i para a cabeça.	43
Figura 3.12–Pontos de controle para definição da geometria de quatro tipos diferentes de cauda.	44
Figura 3.13–Sistema de referência $(xyz)_5$ na base da cauda.	44
Figura 3.14–Representação geométrica dos parâmetros h_i para a cauda.	45
Figura 3.15–Posição dos perfis aerodinâmicos na cauda.	45
Figura 4.1 – Parâmetros envolvidos durante o cálculo da interpolação de uma curva.	47

Figura 4.2 – Pontos de controle utilizados na implementação da asa.	48
Figura 4.3 – Pontos de controle utilizados na implementação do corpo central.	50
Figura 4.4 – Pontos de controle utilizados na implementação da cabeça.	51
Figura 4.5 – Pontos de controle utilizados na implementação da cauda.	52
Figura 4.6 – Sentido de refinamento de malha na geometria.	54
Figura 4.7 – Definição dos parâmetros de um painel da malha superficial.	55
Figura 4.8 – Fluxograma do módulo de processamento.	57
Figura 4.9 – Fluxograma do módulo de processamento.	58
Figura 5.1 – Exemplo de ave com asa de planeio larga e asa de planeio longa geradas a partir do pacote <i>pybird</i>	59
Figura 5.2 – Perfis aerodinâmicos utilizados na asa e na cauda.	60
Figura 5.3 – Ave da Figura 5.1b na posição de mergulho.	61
Figura 5.4 – Ave da Figura 5.1b em diferentes instantes de tempo durante uma batida da asa.	62
Figura 5.5 – Malha superficial.	63
Figura 5.6 – Malha na região da cauda cujos vértices de um elemento não são coplanares.	63
Figura 5.7 – Vista superior de uma asa retangular, com razão de aspecto igual a 8 e malha superficial com elementos quadrangulares e refinados no bordo de ataque, bordo de fuga e pontas da asa.	64
Figura 5.8 – Coeficiente de sustentação e diferença percentual em função do número de elementos na direção da corda (n_c) e do número de elementos na direção da envergadura (n_s).	65
Figura 5.9 – Coeficiente de arrasto induzido e diferença percentual em função do comprimento da esteira (l_w) para diferentes valores de incremento de tempo (Δt).	66
Figura 5.10–Coeficiente de sustentação e diferença percentual em função do comprimento da esteira (l_w).	66
Figura 5.11–Tempo gasto para gerar a condição inicial e a esteira em função do número de seções da esteira.	67
Figura 5.12–Coeficiente de sustentação e arrasto em função do ângulo de ataque.	67
Figura 5.13–Inclinação da curva $C_L \times \alpha$ e diferença percentual em função da razão de aspecto.	68
Figura 5.14–Distribuição de pressão em um perfil NACA 0012.	69
Figura 5.15–Desenvolvimento da esteira livre.	70
Figura 5.16–Interação entre a esteira de vórtices da asa e cauda com a superfície, que apresenta uma distribuição de dipolos.	70
Figura 5.17–Coeficiente de sustentação e arrasto induzido em função do número de seções na esteira de vórtices.	71
Figura 5.18–Coeficiente de sustentação, arrasto induzido e momento para diferentes valores de ângulo de ataque para as aves mostradas na Figura 5.1.	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Condições para incompressibilidade.	21
Tabela 3.1 – Definição dos parâmetros utilizados para definir a posição dos perfis aerodinâmicos ao longo da envergadura da asa.	40
Tabela 4.1 – Definição das curvas presentes na asa.	49
Tabela 4.2 – Definição das superfícies presentes na asa.	50
Tabela 4.3 – Definição das curvas presentes no corpo central.	51
Tabela 4.4 – Definição das superfícies presentes no corpo central.	51
Tabela 4.5 – Definição das curvas presentes na cabeça.	52
Tabela 4.6 – Definição das superfícies presentes na cabeça.	52
Tabela 4.7 – Definição das curvas presentes na cauda.	53
Tabela 4.8 – Definição das superfícies presentes na cauda.	53
Tabela 5.1 – Parâmetros para definir os perfis aerodinâmicos da asa e cauda.	60
Tabela 5.2 – Ângulos das articulações utilizados para gerar a Figura 5.3.	61
Tabela 5.3 – Ângulos das articulações utilizados para gerar a Figura 5.4, sendo T é o período de uma batida de asa.	62
Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados durante o teste de convergência de malha.	64

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Velocidade do som
c_{ref}	Corda de referência na base da asa
$C_{D_{ind}}$	Coeficiente de arrasto induzido
C_L	Coeficiente de sustentação
C_{L_α}	Derivada da região linear do gráfico do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque
C_m	Coeficiente de momento de arfagem
C_p	Calor específico a pressão constante
c_p	Coeficiente de pressão
e	Energia interna específica
E_u	Número de Euler
F	Força aerodinâmica
F_r	Número de Froude
l_w	Comprimento da esteira de vórtices
n_c	Número de divisões na asa na direção da corda
n_s	Número de divisões na asa na direção da envergadura
M	Número de Mach
p	Pressão estática
p_{avg}	Ponto médio do painel
p_{ctrl}	Ponto de controle do painel
P_r	Número de Prandtl
U	Velocidade do escoamento livre mais velocidade induzida em um ponto no escoamento
U_∞	Velocidade do escoamento livre
q_i	Quatérnio de rotação definido a partir de um ângulo e de um vetor unitário
r	Distância entre dois pontos

R_e	Número de Reynolds
S_i	Área de um painel
S_{ref}	Área de referência igual à metade da área superficial
S_t	Número de Strouhal
T	Temperatura absoluta
w	Velocidade perpendicular ao painel na esteira de vórtices
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Base ortogonal do sistema de coordenada em uma articulação da ave ou no painel
Δl	Largura de um painel na esteira de vórtices
Δt	Incremento de tempo durante a criação da esteira livre
α	Ângulo de ataque
μ	Força de um dipolo
σ	Força de uma fonte
ρ	Massa específica
ϕ	Potencial de velocidade
Γ	Circulação
ζ	Vorticidade
θ_i	Ângulo de rotação das articulações da ave

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação e Justificativa	14
1.2	Objetivos	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	Características das Aves	15
2.1.1	Sistema Esquelético	15
2.1.2	Sistema Muscular	16
2.1.3	Morfologia Funcional: Asa e Cauda	18
2.2	Modelagem Aerodinâmica	20
2.2.1	Fluido Incompressível, Invíscido e Irrotacional	20
2.2.1.1	Condições para Incompressibilidade	20
2.2.1.2	Efeito Alto Reynolds	21
2.2.2	Fluido Potencial	22
2.2.3	Acoplamento Pressão-Velocidade	24
2.2.4	Método das Singularidades	24
2.2.4.1	Circulação e Vorticidade	24
2.2.4.2	Singularidades: Fontes e Dipolos	25
2.2.4.3	Unicidade de Solução	26
2.2.4.4	Esteira de Vórtice	27
2.2.5	Método dos Painéis	28
2.2.5.1	Sistema de Equações	29
2.2.5.2	Condição de Kutta	30
2.2.5.3	Modelo de Esteira Livre	31
2.2.5.4	Cálculo da Velocidade na Superfície	32
3	MODELO GEOMÉTRICO	34
3.0.1	Asa	35
3.0.1.1	Rotação das Articulações	35
3.0.1.2	Contorno: Bordo de Ataque e Bordo de Fuga	36
3.0.1.3	Perfis Aerodinâmicos	39
3.0.2	Corpo Central	40
3.0.3	Cabeça	43
3.0.4	Cauda	43
3.0.4.1	Rotação das Articulações	44
3.0.4.2	Contorno	44
3.0.4.3	Perfis Aerodinâmicos	45

4	IMPLEMENTAÇÃO	47
4.1	Modelo Geométrico	47
4.1.1	Asa	48
4.1.2	Corpo Central	50
4.1.3	Cabeça	51
4.1.4	Cauda	52
4.1.5	Malha superficial	53
4.2	Modelo Aerodinâmico	54
4.2.1	Processamento da Malha	54
4.2.2	Solução do Modelo Aerodinâmico	56
4.2.3	Processamento da Solução	57
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	59
5.1	Modelo Geométrico	59
5.1.1	Rotação nas Articulações	61
5.1.1.1	Mergulho	61
5.1.1.2	Bater de Asas	61
5.1.2	Malha Superficial	62
5.2	Modelo Aerodinâmico	63
5.2.1	Análise de Convergência de Malha	63
5.2.2	Coeficiente de Sustentação e Arrasto Induzido	67
5.2.3	Distribuição de Pressão	68
5.2.4	Esteira Livre	69
5.3	Análise Aerodinâmica dos Modelos Geométricos	69
5.3.1	Esteira de Vórtices	70
5.3.2	Análise Comparativa	71
5.3.2.1	Teste de Convergência de Malha	71
5.3.2.2	Coeficientes Aerodinâmicos	72
6	CONCLUSÃO	74
6.1	Considerações Finais	74
6.2	Conclusões	74
6.3	Sugestões	74
	REFERÊNCIAS	76

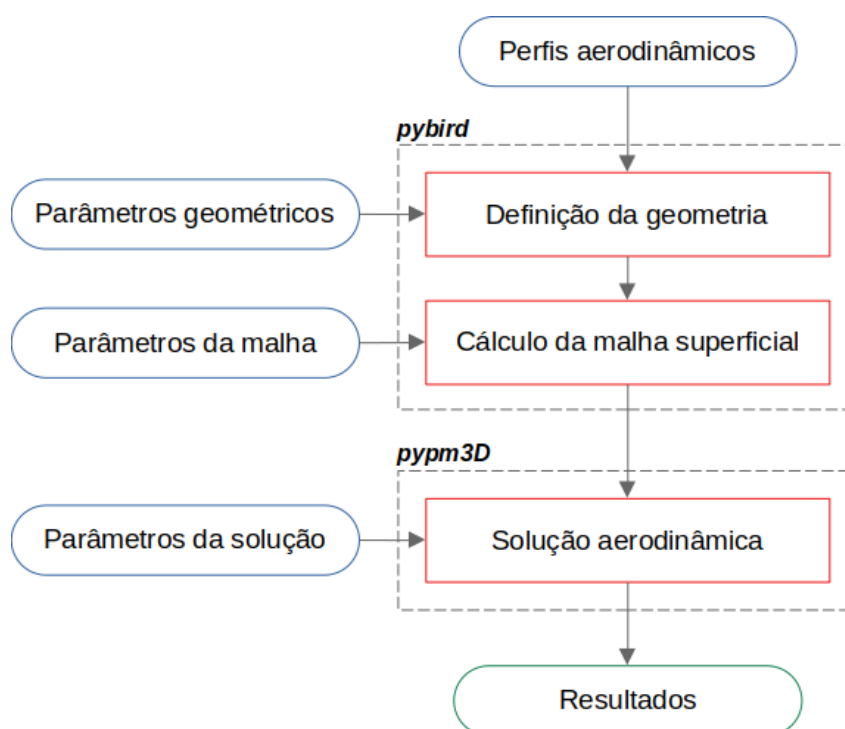
1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho é proposto um modelo geométrico parametrizado que representa diferentes espécies de aves voadoras, contidas no grupo carinata. Além disso, é implementado um modelo de método dos painéis utilizado para analisar a geometria de duas aves com formatos de asas diferentes, uma com asa de planeio larga, como um urubu, e outra com asa de planeio longa, como o albatroz (KARDONG, 2016).

A Revisão Bibliográfica apresenta aspectos importantes sobre duas áreas. No campo da biologia, são apresentados detalhes sobre a morfologia das aves que serão relevantes para o desenvolvimento do modelo geométrico. Já no campo da aerodinâmica, são apresentados os aspectos relevantes da modelagem do método dos painéis utilizado neste trabalho de pesquisa.

A Metodologia adotada neste trabalho, mostrada na Figura 1.1, pode ser dividida em três etapas: definição da geometria, cálculo da malha superficial e solução aerodinâmica. Visando facilitar as análises, as três partes foram agrupadas de forma que dois pacotes na linguagem de programação Python foram implementados: *pybird*¹ e *pypm3D*² (ROSSUM; JR, 1995). O pacote *pybird* implementa o modelo geométrico e cria uma malha superficial utilizando o software Gmsh através da API disponível em Python (GEUZAIN; REMACLE, 2020). Já o pacote *pypm3D* contém a implementação do método dos painéis e utiliza dados da malha superficial de uma geometria qualquer para calcular a distribuição de pressão e velocidade na superfície.

Figura 1.1 – Fluxograma da metodologia aplicada neste trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

¹ Disponível em: <https://github.com/lucasralves/pybird>.

² Disponível em: <https://github.com/lucasralves/pypm3D>.

Por fim, no capítulo Resultados e Discussões são apresentados os resultados obtidos a partir da implementação do modelo geométrico, visando a validação do modelo aerodinâmico. A validação foi realizada por meio de uma análise comparativa de duas geometrias de aves, uma com asa de planeio larga e outra com asa de planeio longa.

1.1 Motivação e Justificativa

A motivação consistiu em, através de uma análise interdisciplinar, desenvolver ferramentas que ajudem a compreender as soluções encontradas pela natureza para o voo dos pássaros, aplicando conhecimentos de engenharia e biologia durante o processo.

Em contraste com aeronaves convencionais, o voo das aves é um processo complexo que envolve movimentos coordenados e deformações de diferentes partes do corpo. Enquanto as aeronaves possuem estruturas conhecidas, como o grupo motopropulsor e superfícies aerodinâmicas, as aves realizam o voo de forma única e diferenciada (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011; KARDONG, 2016).

Portanto, desenvolver ferramentas capazes de analisar o voo das aves é crucial para entender como diferentes partes do corpo da ave atuam durante o voo. A análise interdisciplinar permite, além da obtenção de informações sobre os mecanismos envolvidos no voo das aves, a utilização dessas informações no campo da engenharia no desenvolvimento de novas tecnologias bioinspiradas, micro veículos aéreos (MAV), dentre outros. Já no campo da biologia, o estudo do voo das aves pode fornecer dados relevantes para colaborar em análises filogenéticas e ajudar a entender como algumas espécies ocuparam determinados nichos ecológicos ao longo da evolução (KARDONG, 2016).

1.2 Objetivos

O trabalho possui 3 objetivos:

- Desenvolver, na área da biomimética, um modelo geométrico parametrizado capaz de modelar diferentes espécies de aves com base em suas características morfológicas.
- Implementar, no campo da aerodinâmica, um modelo de método dos painéis com condição de contorno de Dirichlet, condição de Kutta linearizada e esteira livre.
- Utilizar o modelo geométrico para gerar malhas superficiais, de forma que possam ser analisadas a partir da implementação do método dos painéis.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica apresenta os aspectos importantes sobre a anatomia e biomecânica das asas e caudas de aves que serão utilizados para o desenvolvimento do modelo geométrico. Além disso, também é apresentado os aspectos relevantes da modelagem matemática utilizada em soluções potenciais no campo da aerodinâmica externa, a fim de compreender as simplificações e limitações deste tipo de modelo.

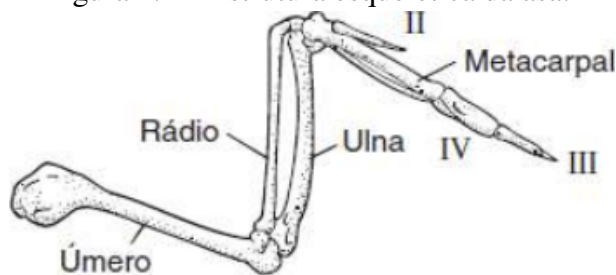
2.1 Características das Aves

Neste trabalho, serão modeladas matematicamente as aves com a capacidade de voar, que pertencem ao grupo das carinatas. Esse grupo apresenta o esterno em formato de quilha, onde os músculos peitorais, os principais responsáveis pelo voo, se ligam (KARDONG, 2016). A seguir, serão apresentados os aspectos mais importantes sobre o sistema esquelético, muscular e sobre a morfologia funcional da asa e cauda.

2.1.1 Sistema Esquelético

A estrutura esquelética da asa de uma ave é composta por vários ossos, como o úmero, o rádio, a ulna, os carpometacárpicos e os dígitos, conforme ilustrado na Figura 2.1 (DYCE, 2010; MCLELLAND, 1991). O úmero é conectado ao restante do corpo por meio da junta do ombro e nele é inserido o músculo peitoral, que é um dos principais músculos responsáveis pela geração de potência durante o voo. A ulna, por sua vez, é mais espessa e longa do que o rádio e serve como ponto de fixação para as penas de voo secundárias, responsáveis pela forma aerodinâmica da asa, conforme ilustrado na Figura 2.6. As penas de voo primárias são inseridas nos demais ossos da mão. Além disso, o dígito 2 contém os ossos que formam a álula, uma estrutura visível em algumas aves durante o voo, semelhante à slats encontrados em aeronaves, que alteram a distribuição de pressão no extradorso minimizando gradientes de pressão adversa (KARDONG, 2016; ANDERSON, 2011).

Figura 2.1 – Estrutura esquelética da asa.

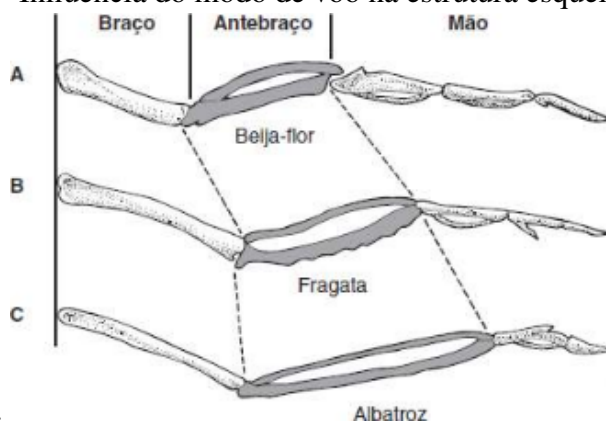


Fonte: KARDONG, 2016, p. 537.

Além disso, a estrutura óssea da asa se diferencia entre as espécies como resultado da adaptação ao estilo de voo. A terceira seção da asa, na qual estão presentes os ossos da mão, é responsável pela maior parte da tração gerada durante o movimento de bater das asas. Por usa

vez, as duas primeiras seções, são responsáveis pela produção da maior parte da sustentação durante o voo. A Figura 2.2 mostra como os ossos carpometacárpicos e os dígitos são alongados na asa de um beija-flor, cujo bater de asas é essencial durante o voo. O albatroz, por sua vez, aproveita as correntes de ar acima do oceano para planar por longos períodos de tempo e possui o rádio e a ulna mais alongados que os demais ossos da asa, indicando que as penas secundárias desempenham um papel mais significativo no voo (KARDONG, 2016).

Figura 2.2 – Influência do modo de voo na estrutura esquelética da asa.



Fonte: KARDONG, 2016, p. 541.

A estrutura esquelética da cauda das aves, mostrado na Figura 2.3, é composta por aproximadamente seis vértebras livres que permitem a movimentação. O pigóstilo, onde as penas da cauda são inseridas, é um osso maior formado pela fusão de várias vértebras livres e está localizado no final da cauda (DYCE, 2010).

Figura 2.3 – Estrutura esquelética da cauda.



Fonte: KARDONG, 2016, p. 470.

2.1.2 Sistema Muscular

As Figuras 2.4a e 2.4b ilustram os músculos esqueléticos presentes na região da asa de aves. O peitoral maior é o principal músculo responsável pelo voo, atuando durante a fase descendente no movimento de bater de asas. Além disso, é importante destacar que os movimentos das articulações da asa são realizados por mais de um músculo que podem cruzar diferentes articulações, o que torna necessária a coordenação de vários músculos para executar

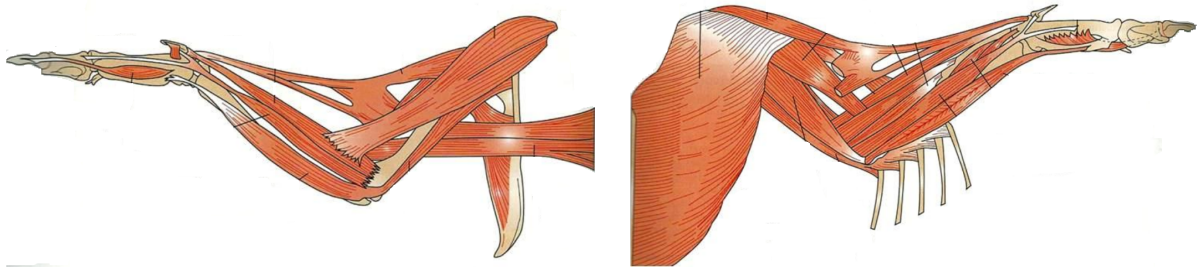
qualquer tipo de movimento. O bíceps, por exemplo, flexiona o ombro, cuja função se assemelha ao deltoide, e flexiona o cotovelo (KARDONG, 2016).

Aves com grande capacidade de voo apresentam o músculo peitoral avermelhado, pois são mais vascularizados, possuem uma maior quantidade de mioglobina, mitocôndrias e glóbulos lipídicos. Assim, utilizam gordura como fonte principal de energia e são mais adaptáveis ao esforço prolongado. Aves pouco adaptadas ao voo, por sua vez, não apresentam essas características, possuem o músculo peitoral com coloração esbranquiçada e utilizam o glicogênio como fonte principal de energia (COLVILLE, 2010).

Figura 2.4 – Musculatura da asa.

(a) Musculatura interna.

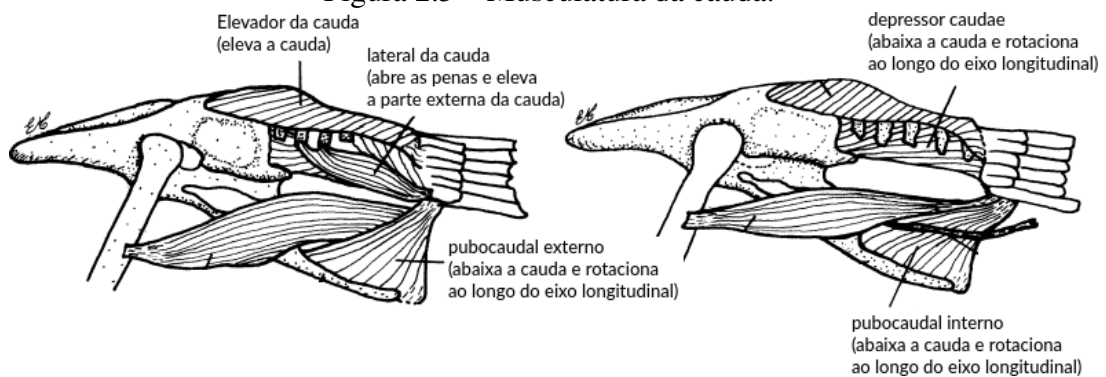
(b) Musculatura externa.



Fonte: COLVILLE, 2010, p. 414.

Os músculos presentes na cauda, mostrados na Figura 2.5, possuem semelhanças com os músculos da asa, pois existe uma sobreposição de funções, o que torna necessário um movimento coordenado entre os músculos para executar os movimentos. Além disso, a partir das funções de cada músculo, é possível definir 5 tipos de movimentos para a cauda: levantar, abaixar, rotacionar em torno do eixo lateral, rotacionar em torno do eixo longitudinal e abrir ou fechar as penas alterando a geometria da cauda (MORENO; MOLLER, 1996).

Figura 2.5 – Musculatura da cauda.

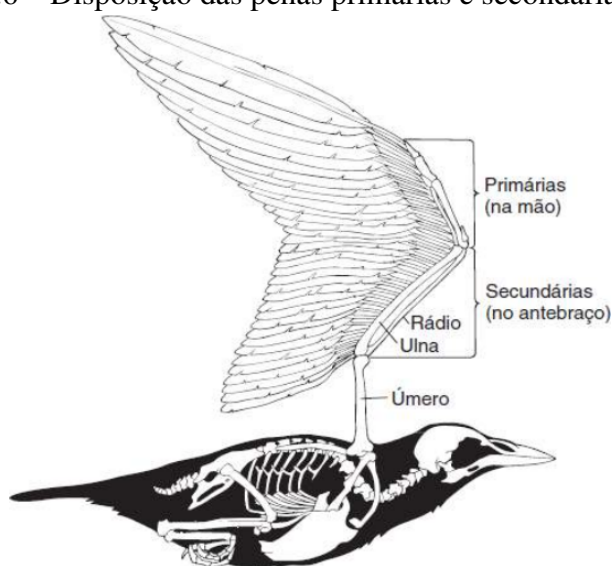


Fonte: MOLLER, 1996, p. 4.

2.1.3 Morfologia Funcional: Asa e Cauda

O formato das asas depende, além da estrutura esquelética já discutido anteriormente, das penas que são inseridas nos ossos da mão e no antebraço, como mostrado na Figura 2.6. As penas primárias se originam na mão, e são as principais responsáveis pela produção da força propulsiva. Essas penas são longas, estreitas e muitas vezes afiladas nas pontas. Além disso, as penas primárias rotacionam durante a fase ascendente no movimento de bater de asas, criando espaços para passagens de ar que minimizam as forças aerodinâmicas. As penas secundárias, por outro lado, estão localizadas na parte interna das asas, conectadas ao antebraço, e são as principais responsáveis pela produção de sustentação (KARDONG, 2016).

Figura 2.6 – Disposição das penas primárias e secundárias na asa.



Fonte: KARDONG, 2016, p. 538.

Portanto, a estrutura esquelética e o formato das penas, em conjunto, formam diferentes tipos de asas, mostradas na Figura 2.7, adaptadas para diferentes tipos de voo. A asa elíptica, Figura 2.7a, é comum em pássaros que vivem dentro de florestas e apresenta baixa razão de aspecto e penas de voo primárias espaçadas. Já a asa de planeio longa, Figura 2.7b, é comum em aves que passam grande parte do tempo utilizando correntes de ar para planar próximas aos oceanos, possuindo alta razão de aspecto e penas de voo sem espaçamento entre si. As aves de caça, como as águias, possuem a asa de planeio larga, Figura 2.7c, apresentando uma razão de aspecto menor do que a asa de planeio longa, e com as penas de voo espaçadas próximas à ponta da asa. Por fim, a asa de alta velocidade, Figura 2.7d, é afilada e geralmente não possui espaçamento entre as penas (KARDONG, 2016).

A cauda, ao contrário da asa, apresenta formatos mais variados, como pode ser observado na Figura 2.8. O formato se deve às penas inseridas no pigóstilo, sendo que, além do fator aerodinâmico na seleção natural, a seleção sexual também desempenha um papel importante no formato (BALO, 2013; THOMAS; BALMFORD, 1995).

¹ Fonte: <<https://www.jsu.utexas.edu/news/2016/10/bird-wing-shape-depends-on-family-more-than-flight-style/>>. Acesso em: 19 de abril de 2022.

Figura 2.7 – Formatos de asa.

(a) Asa elíptica.



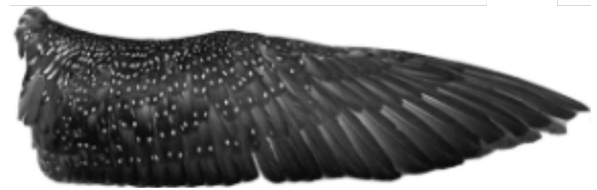
(b) Asa de planeio longa.



(c) Asa de planeio larga.

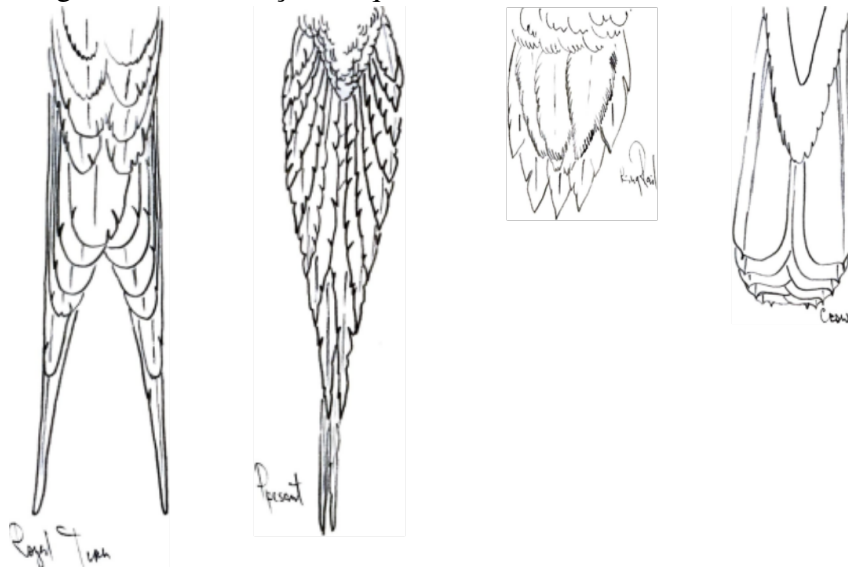


(d) Asa de alta velocidade.

Fonte: Universidade do Texas em Austin ¹.

As implicações da influência da aerodinâmica da cauda no processo evolutivo através da seleção natural se tornam visíveis na análise de aves adaptadas a diferentes ambientes. Espécies que habitam ambientes florestas fechadas e necessitam de alta manobrabilidade durante o voo frequentemente exibem caudas com maior área quando comparadas a aves adaptadas a ambientes abertos, como os albatrozes, que possuem asas longas voltadas ao planar, onde a otimização da relação entre sustentação e arrasto assume importância primordial (KARDONG, 2016; BALO, 2013).

Figura 2.8 – Ilustração de quatro formatos de caudas diferentes.



Fonte: BALO, 2013, p. 25.

2.2 Modelagem Aerodinâmica

A descrição matemática do movimento dos fluidos sempre foi um desafio para matemáticos e físicos. As equações de Navier-Stokes, em homenagem a Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes, compõem o modelo mais completo e realista de fluidos até hoje. Esse conjunto de equações possuem poucas soluções analíticas e, por isso, é comum a utilização de métodos de CFD (Dinâmica dos Fluidos Computacional), especialmente a partir dos anos 90, para obter uma solução. Uma simplificação comumente aplicada, principalmente na segunda metade do século passado, é o uso de uma solução potencial (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011). (ANDERSON, 2011; KATZ; PLOTKIN, 2001; SCHLICHTING; GERSTEN, 2000; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O método potencial é amplamente utilizado no campo da aerodinâmica externa, com uma de suas aplicações mais conhecidas sendo o método dos painéis. Este método é capaz de calcular a distribuição de pressão em superfícies aerodinâmicas e pode ser acoplado a métodos de correção de camada limite e de compressibilidade. No entanto, a solução potencial possui algumas limitações, como a incapacidade de capturar regiões de recirculação sobre superfícies aerodinâmicas, tais como as que ocorrem próximo ao estol (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

A seguir serão apresentadas as simplificações para um fluido incompressível, invíscido e irrotacional, necessárias para estabelecer o contexto do problema potencial. Em seguida, será discutido o método das singularidades, com foco especial no método dos painéis que será aplicado no decorrer deste trabalho.

2.2.1 Fluido Incompressível, Invíscido e Irrotacional

2.2.1.1 Condições para Incompressibilidade

A compressibilidade de um fluido é resultado de variações de pressão e temperatura, seja no espaço ou no tempo. A verificação se um fluido é compressível pode ser feita analisando a variação adimensional de densidade ($\Delta\rho/\rho$) em função da variação de temperatura ($\Delta T/T$) e pressão ($\Delta p/p$), a partir das equações de momento e energia. BOYD (1967) apresenta um conjunto de critérios, apresentados na Tabela 2.1, que, se satisfeitos, permitem desprezar a influência da temperatura e pressão sobre a densidade, a qual passa a ser considerada constante no fluido.

Para desprezar o efeito da pressão sobre a compressibilidade de fluidos, são utilizados três critérios que envolvem os três parâmetros adimensionais: Número de Mach, Reynolds e Froude. Na análise de aerodinâmica externa, como no cálculo do campo de escoamento em aeronaves e perfis aerodinâmicos, tanto o Número de Reynolds, que representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas, quanto o Número de Froude, que representa a razão entre as forças inerciais e a força gravitacional, assumem valores maiores que 1. Portanto, o número de Mach ser suficientemente menor que 1, representado pela primeira condição, é critério suficiente

Tabela 2.1 – Condições para incompressibilidade.

Pressão	Temperatura
$M \ll 1$	$M \frac{a^2}{e} \ll 1$
$\left(\frac{M}{Fr}\right)^2 \ll 1$	$\left(\frac{M}{Fr}\right)^2 \frac{a^2}{e} \ll 1$
$\frac{M^2}{Re} \ll 1$	$\frac{M^2}{Re} \frac{a^2}{e} \ll 1$
	$\frac{1}{Pr Re} \frac{C_p}{e} (T - T_\infty) \ll 1$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em BOYD (1967).

para desprezar o efeito da pressão sobre a variação da densidade, já que o restante das condições assumem valores menores (BOYD, 1967).

Já as restrições impostas pela temperatura, representam 4 critérios. Os três primeiros são semelhantes aos da pressão, com a exceção do termo a^2/e que é multiplicado nas equações e que, sozinho, representa um critério. Em gases ideais, a razão a^2/e assume o valor de 0,56 e é função da razão dos calores específicos à pressão e volume constante. Dessa forma, o número de Mach ser suficientemente menor que 1, nesse cenário, também garante que os três primeiros critérios sejam atendidos. O último critério pode ser satisfeito assumindo que não há troca de calor entre o corpo e o fluido (BOYD, 1967).

2.2.1.2 Efeito Alto Reynolds

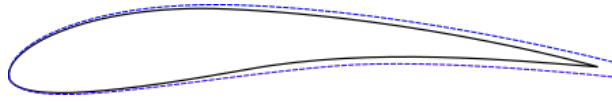
Em 1904, Prandtl definiu, para altos valores de Re , o conceito de camada limite como uma região pouco espessa, próxima à parede, na qual as forças viscosas são maiores ou possuem ordem de grandeza similar às forças inerciais. Nessa região, a velocidade assume valor igual a zero na parede, conhecido como condição de não deslizamento, e se forma um perfil de velocidade que pode ser caracterizado como laminar ou turbulento (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011). Nessas condições, o escoamento pode ser dividido em duas regiões, uma invíscida, suficientemente longe da superfície, e outra próxima da superfície, na qual as forças viscosas não podem ser desprezadas.

Matematicamente, os efeitos de alto Reynolds podem ser percebidos através da Equação 2.1, que mostra a componente x da equação de momento adimensionalizada. Nela é possível verificar 4 números adimensionais: S_t , Fr , Eu e Re . O número de Reynolds, que representa a razão entre a força inercial e a força viscosa, aparece dividindo a parte difusiva da equação. Portanto, para um número de Reynolds suficiente grande, $Re > 10^4$, é possível desprezar essa parcela, fazendo com que a equação da quantidade de movimento se reduza à Equação de Euler (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\frac{1}{S_t} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \vec{U}^* \cdot \nabla^* u^* = \frac{S_{M_x}^*}{Fr^2} - Eu \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (2.1)$$

A Figura 2.9 mostra um exemplo de um perfil aerodinâmico sujeito a uma situação de alto Reynolds, com a linha azul delimitando a região da camada limite que se desenvolve, aumentando de espessura em direção ao bordo de fuga. Além disso, nesse cenário, a variação da pressão no sentido normal à parede pode ser desprezado, de forma que a distribuição de pressão calculada através das Equações de Euler na interface com a camada limite, é igual à pressão na superfície (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

Figura 2.9 – Perfil aerodinâmico com a linha tracejada separando a região da camada limite próxima à superfície.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A presença da camada limite também tem efeito sobre a distribuição de vorticidade no fluido. A vorticidade, definido como o rotacional do vetor velocidade, é gerado na interface entre o fluido e a superfície através de um processo invíscido, devido à diferença de velocidade ou à presença de gradiente de pressão. A vorticidade criada nessa interface, dentro da camada limite, é carregada pelos termos advectivos para a esteira de vórtices, regiões às quais se restringe (MORTON, 1984). Portanto, o fluido, fora da região da camada limite e da esteira, pode ser tratado como irrotacional.

2.2.2 Fluido Potencial

O fluido potencial é definido a partir de um escoamento irrotacional, ou seja, fora da camada limite. Dessa forma, o campo vetorial, correspondente ao campo de velocidade, pode ser tratado como um campo conservativo, permitindo a definição de um potencial ϕ , cujo gradiente corresponde ao campo de velocidade, como mostrado pela Equação 2.2 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\vec{U} = \nabla \phi \quad (2.2)$$

O cálculo do potencial ϕ é feito utilizando a equação da continuidade aplicada a um fluido incompressível. Dessa forma, ao substituir o vetor velocidade pelo gradiente de ϕ , a equação da continuidade se reduz ao laplaciano do potencial, como mostrado pela Equação 2.3 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.3)$$

A solução da Equação 2.3 depende das condições de contorno impostas ao problema. Existem duas condições: uma aplicada a uma distância onde o escoamento não é perturbado e outra na superfície do corpo em análise. A condição de contorno referente ao escoamento não perturbado pode ser estabelecida a partir da definição do potencial ϕ_∞ , referente ao escoamento livre, e ϕ_b , referente ao potencial gerado pela presença do corpo. Ambos se relacionam ao potencial ϕ através da Equação 2.4.

$$\phi = \phi_\infty + \phi_b \quad (2.4)$$

Assim, a condição de contorno aplicada ao escoamento não perturbado pode ser definida a partir do potencial ϕ_b , de forma que a velocidade gerada por ϕ_b tende a zero à medida que a distância ao corpo tende ao infinito, como mostrado pela Equação 2.5.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi_b = 0 \quad (2.5)$$

A condição de contorno na superfície do corpo em análise é definida a partir de duas considerações: o fluido fora da camada limite pode ser tratado como invíscido e a variação de pressão dentro da camada limite, na direção normal à parede, é zero. Dessa forma, é possível definir que a velocidade seja tangente à curva, no caso bidimensional, ou à superfície, no caso tridimensional, que separa a camada limite do fluido invíscido. Essa condição, no entanto, é útil quando é utilizado, em conjunto com a solução potencial, um método de correção de camada limite, de forma a se obter a distância da superfície que será aplicada a condição de contorno (KATZ; PLOTKIN, 2001; SCHLICHTING; GERSTEN, 2000).

Para se ser possível aplicar a condição de contorno na própria superfície, é necessário analisar o caso limite, quando Re tende ao infinito. Nesse cenário, a altura da camada limite é zero e todo o fluido passa a ser tratado como invíscido e irrotacional, com exceção da esteira de vórtices que passa a ser representada por uma descontinuidade, na qual há uma variação pontual do potencial. Portanto, ao considerar o Re infinito, é possível aplicar a condição de não permeabilidade na parede, de forma que as linhas de corrente contidas no corpo sejam tangentes à superfície (KATZ; PLOTKIN, 2001; SCHLICHTING; GERSTEN, 2000).

Nesse cenário, existem duas maneiras de se aplicar essa condição, através do método direto ou indireto, que utilizam condições de contorno de Neumann e Dirichlet respectivamente. O método direto define o potencial ϕ_b satisfazendo a Equação 2.6 na superfície analisada, sendo $\hat{n}$ o vetor unitário normal à superfície (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\nabla \phi|_{superfície} \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.6)$$

Já o método indireto divide a domínio analisado em duas regiões, uma dentro do objeto em análise e outra fora. Dentro do objeto é definido um potencial constante, Equação 2.7, de forma que o gradiente seja zero e, conseqüentemente, a velocidade. Dessa forma, a condição de contorno de Dirichlet garante que a velocidade de transpiração na superfície seja zero de forma

indireta (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\phi|_{interior} = constante \quad (2.7)$$

2.2.3 Acoplamento Pressão-Velocidade

O cálculo da pressão é feito apenas através do campo de velocidade utilizando a Equação de Bernoulli, Equação 2.8, que pode ser deduzida a partir da Equação de Euler. É importante destacar que a Equação 2.8 costuma ser apresentada sem a parcela da derivada temporal do potencial. Nesse cenário, o fluido costuma ser tratado como rotacional e a Equação de Bernoulli pode ser aplicada somente entre dois pontos de uma linha de corrente. No entanto, ao considerar o fluido irrotacional, a Equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer do domínio, além de permitir incluir o termo não estacionário relacionado à variação de potencial no tempo (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + E = C(t) \quad (2.8)$$

Com a intenção de calcular a distribuição de pressão em torno de superfícies, é possível aplicar a Equação 2.8 em um ponto qualquer no escoamento e no escoamento não perturbado, de forma a se obter o coeficiente de pressão, representado pela parcela do lado esquerda da Equação 2.9. Em fluidos em estado estacionário, a derivada temporal do potencial é omitida da Equação 2.9, fazendo com que o coeficiente de pressão seja função apenas da razão de velocidades.

$$\frac{p - p_{\infty}}{0,5\rho U^2} = 1 - \frac{U^2}{U_{\infty}^2} - \frac{2}{U_{\infty}^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.9)$$

2.2.4 Método das Singularidades

A solução mais comum da formulação potencial se baseia na linearidade da Equação 2.3, que permite representar uma solução complexa a partir de soluções elementares. Dessa forma, um perfil aerodinâmico ou aeronave é substituída por um conjunto de soluções básicas, que induzem uma velocidade no escoamento como se houvesse a presença de um corpo. O nome do método se deve ao fato de que as soluções elementares possuem singularidades, que são posicionadas na superfície do corpo em análise (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

2.2.4.1 Circulação e Vorticidade

A vorticidade e a circulação são parâmetros que podem ser calculados a partir do campo de velocidade. A vorticidade é definida como o rotacional do campo de velocidade, enquanto a circulação é a integral de linha fechada do campo de velocidade. Esses parâmetros podem ser relacionados pelo Teorema de Stokes, como mostrado na Equação 2.10.

$$\Gamma = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\zeta} \cdot \hat{n} dS \quad (2.10)$$

No início do século XX, os matemáticos M. W. Kutta e N. E. Joukowski descobriram, independentemente, que a circulação em um campo incompressível e invíscido está relacionada com a força produzida pela distribuição de pressão em uma superfície através do Teorema que ficou conhecido como Kutta-Joukowski, Equação 2.11 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\vec{F} = \rho \vec{U}_\infty \times \vec{\Gamma} \quad (2.11)$$

Portanto, para que a distribuição de pressão em um corpo submerso em um fluido incompressível e invíscido gere sustentação, é necessário que o corpo em análise contenha vorticidade, mesmo que o fluido ao redor seja irrotacional.

2.2.4.2 Singularidades: Fontes e Dipolos

As duas singularidades apresentadas são fontes e dipolos. As fontes são singularidades que não possuem vorticidade, ou seja, o campo de velocidade induzido não é capaz de gerar sustentação. Esse tipo de singularidade é utilizada para descrever uma superfície não sustentadora, como o corpo central de uma aeronave, ou para dar estabilidade numérica na solução. Os dipolos, por sua vez, possuem vorticidade no ponto de singularidade, mas induzem um campo de velocidade irrotacional. Essas duas singularidades são distribuídas ao longo da superfície do corpo em análise e apenas dipolos são utilizados na modelagem da esteira de vórtices (KATZ; PLOTKIN, 2001).

As Equações 2.12 e 2.13 calculam os potenciais gerados pela distribuição constante de fontes e dipolos, respectivamente. Ambas as equações já satisfazem a condição de contorno no infinito, mas é necessário definir os valores de σ e μ para que a condição de contorno na superfície e a condição de Kutta no bordo de fuga sejam atendidas (KATZ; PLOTKIN, 2001).

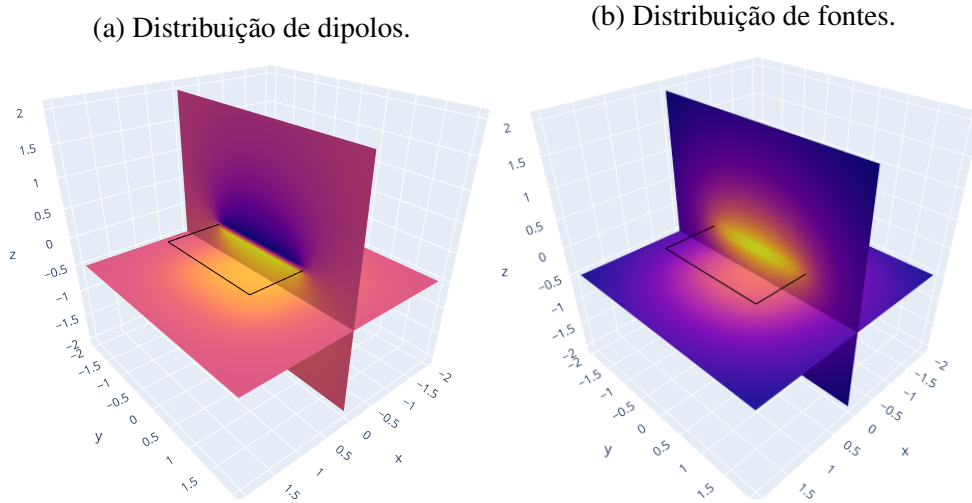
$$\phi_\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma \log r \, dS \quad (2.12)$$

$$\phi_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dS \quad (2.13)$$

A Figura 2.10 apresenta os potenciais gerados pela aplicação das Equações 2.12 e 2.13 em um painel quadrado. O potencial gerado pela distribuição de dipolos, ilustrado na Figura 2.10a, apresenta um salto de potencial entre os dois lados do painel que corresponde ao valor de μ na Equação 2.13. No caso da distribuição de fontes, o valor de σ na Equação 2.12 corresponde à diferença entre as derivadas do potencial na direção normal ao painel dos dois lados (KATZ; PLOTKIN, 2001).

A partir da Equação 2.4, o termo ϕ_b pode ser expresso como uma integral das Equações 2.12 e 2.13 sobre a superfície e a esteira. Dessa forma, o potencial total pode ser representado como a soma do potencial induzido pela superfície e esteira, juntamente com o potencial livre, como mostrado na Equação 2.14 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Figura 2.10 – Potencial gerado por uma distribuição constante de fontes e dipolos em um painel quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \log r - \mu_s \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_W} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dS + \phi_\infty \quad (2.14)$$

Com o objetivo de aplicar a condição de contorno de Dirichlet, KATZ; PLOTKIN (2001) sugere definir o potencial interno como sendo igual ao potencial livre, resultando na Equação 2.15.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \log r - \mu_s \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_W} \left[\mu_w \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dS = 0 \quad (2.15)$$

Ademais, como o valor de σ é igual à diferença entre a derivada do potencial na direção normal ao painel dos dois lados, σ assume o valor de menos a velocidade do escoamento livre normal à superfície, como mostrado pela Equação 2.16 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\sigma = -\vec{U}_\infty \cdot \hat{n} \quad (2.16)$$

2.2.4.3 Unicidade de Solução

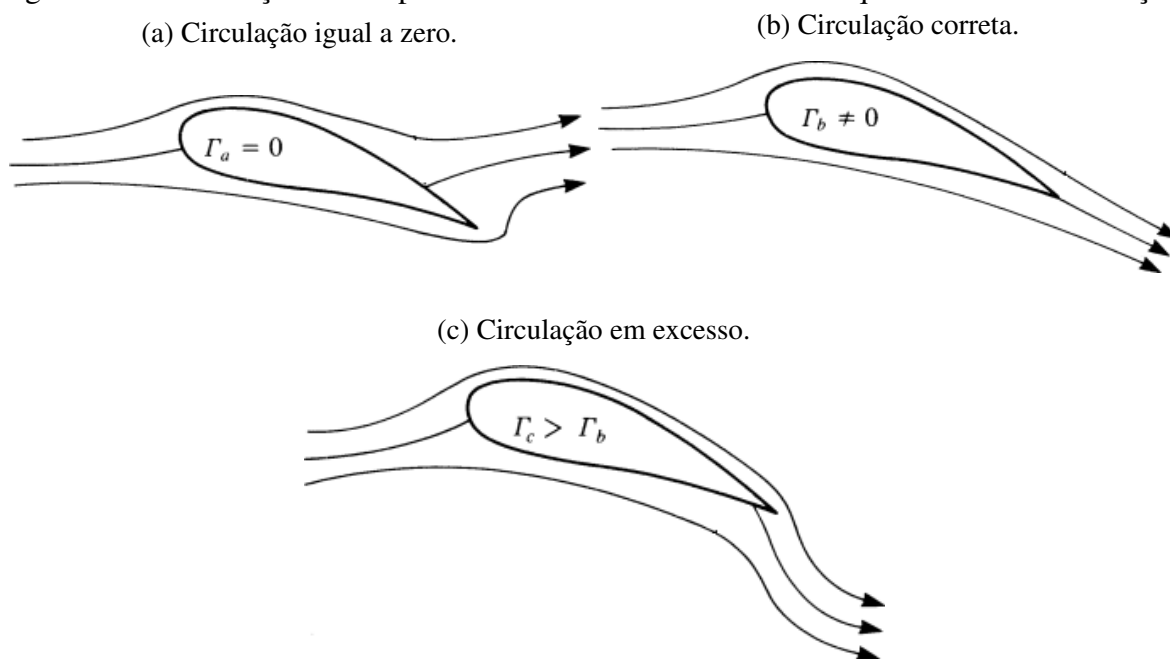
Para determinar a distribuição correta de dipolos na superfície e na esteira, é necessário respeitar não apenas a condição de contorno, mas também a condição de Kutta. A condição de Kutta define que as linhas de corrente contidas na superfície deixem o bordo de fuga de um corpo aerodinâmico com velocidade finita e de maneira suave (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

Existem algumas maneiras de se determinar a condição de Kutta: a) definir a direção e sentido da velocidade no bordo de fuga; b) definir como zero a diferença de pressão entre o intradorso e o extradorso no bordo de fuga; c) definir a direção e a força dos dipolos que são inseridos na esteira através do bordo de fuga (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011).

Neste trabalho será utilizado o método c), conhecido como método linear, no qual a direção da esteira é determinada pelo ângulo do bordo de fuga e a força do dipolo é definido como a diferença entre o dipolo no extradorso e intradorso da asa.

As ilustrações na Figura 2.11 ilustra como a quantidade de circulação, ou vorticidade, gerada pela distribuição de dipolos afeta as linhas de corrente ao redor do perfil. Apenas o perfil mostrado na Figura 2.11b apresenta a quantidade correta de circulação que permite que as linhas de corrente deixem o perfil no bordo de fuga de maneira suave e com velocidade finita (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Figura 2.11 – Ilustração de um perfil aerodinâmico com diferentes quantidades de circulação.



Fonte: KATZ; PLOTKIN, 2001, p. 88.

2.2.4.4 Esteira de Vórtice

A esteira de vórtices é causada pela diferença de pressão entre diferentes regiões de uma superfície sustentadora, como o intradorso e o extradorso de uma asa, gerando vórtices no escoamento livre. Embora esse fenômeno seja modelado como uma distribuição de dipolos, ele não pode gerar sustentação, uma vez que não é uma superfície sólida e está livre para se movimentar de acordo com a velocidade local. Uma forma de verificar a ausência de sustentação é aplicar o Teorema de Kutta-Joukowski, o qual afirma que a força resultante deve ser nula (KATZ; PLOTKIN, 2001). A Equação 2.17 aplica esse teorema e mostra que a vorticidade deve ser paralela à velocidade local para que não haja força.

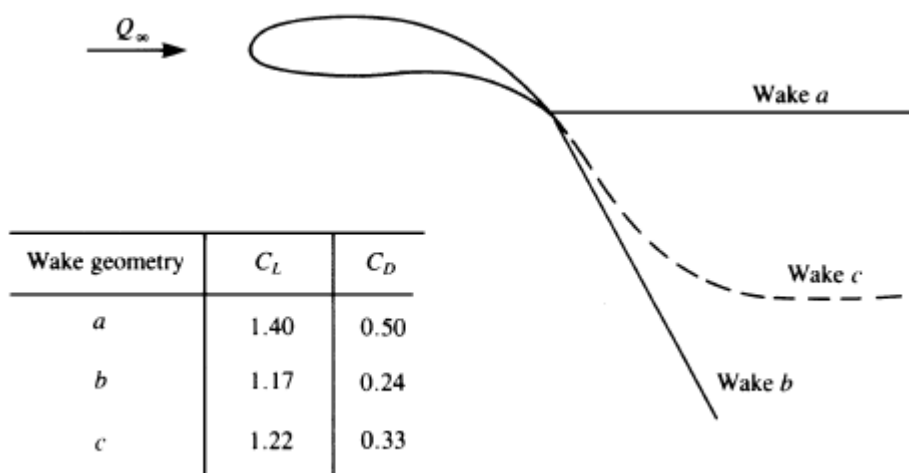
$$\Delta \vec{F} = \rho \vec{U} \times \vec{\zeta} \Rightarrow 0 = \vec{U} \times \vec{\zeta} \quad (2.17)$$

Existem diversas maneiras de se determinar o formato da esteira de vórtices, sendo três

delas as mais comuns: a) definir a esteira como plana; b) inicialmente definir a esteira como plana e utilizar um método de relaxação para permitir que a velocidade do escoamento livre, a velocidade induzida pelo corpo e a própria esteira alterem seu formato; c) aplicar um método de esteira livre, que utiliza uma marcha no tempo para inserir a esteira no escoamento a partir do bordo de fuga (KATZ; PLOTKIN, 2001).

O cálculo correto do formato da esteira é importante pois afeta a velocidade induzida na superfície que, por consequência, afeta o arrasto induzido produzido. O perfil ilustrado na Figura 2.12 mostra como o formato da esteira interfere no valor dos coeficientes aerodinâmicos. Entre os formatos de esteira avaliados, o formato *c* representa melhor a realidade, pois a esteira deixa o perfil de maneira suave, tangente ao ângulo do bordo de fuga, e se alinha com escoamento livre, minimizando a força gerada a partir da Equação 2.17.

Figura 2.12 – Influência do formato da esteira de vórtices nos coeficientes de sustentação e arrasto.



Fonte: KATZ; PLOTKIN, 2001, p. 213.

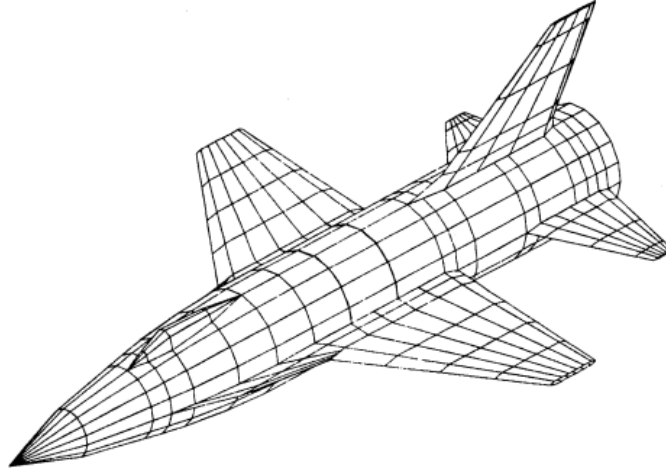
2.2.5 Método dos Painéis

Existem vários métodos dos painéis que utilizam diferentes soluções elementares e modelos de esteira. Inicialmente, HESS; SMITH (1966) propôs a utilização de uma distribuição de fontes na superfície como solução elementar. No entanto, esse tipo de solução não possui vorticidade e, portanto, só pode ser usado para superfícies não sustentadoras. Para contornar essa limitação, outras soluções foram combinadas com a distribuição de fontes, como o dipolo, que gera um campo de velocidade irrotacional, mas tem vorticidade no ponto de singularidade (KATZ; PLOTKIN, 2001). Um método que não utiliza dipolos, mas gera sustentação, foi proposto por HESS; COMPANY (1973), que considera distribuições de fontes na superfície e filamentos de vorticidade no interior do corpo. A seguir, é apresentado um modelo que utiliza distribuições de fontes e dipolos para solucionar o problema.

O método dos painéis utilizado neste trabalho envolve a discretização da superfície do objeto em análise em painéis, como ilustrado na Figura 2.13, nos quais são aplicados distribuições

constantes de fontes e dipolos. A condição de contorno de Dirichlet é aplicada em pontos no centro de cada um dos painéis. Além disso, é utilizado um modelo de esteira livre, no qual, em cada instante de tempo, é acrescentado painéis com distribuição constante de dipolos no escoamento por meio das arestas da malha no bordo de fuga (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Figura 2.13 – Discretização da superfície de uma aeronave.



Fonte: KATZ; PLOTKIN, 2001, p. 354.

2.2.5.1 Sistema de Equações

A Equação 2.15 é aplicada a todos os painéis presentes na superfície. Como resultado, a integral sobre a superfície pode ser substituída por um somatório que engloba todos os painéis, gerando um conjunto de equações que compõem o sistema linear. Quando aplicada a um único painel i , a Equação 2.15 resulta na Equação 2.18. Os termos a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} correspondem aos coeficientes de influência de cada painel j no ponto i . É importante destacar que a_{ij} e b_{ij} são constantes, pois dependem apenas da superfície. Porém, os termos c_{ij} e d_{ij} dependem da geometria da esteira, sendo que c_{ij} corresponde aos painéis conectados ao bordo de fuga e d_{ij} ao resto da esteira.

$$\sum_{j=1}^{n_f} \mu_{s_j} b_{ij} + \sum_{j=1}^{n_{te}} \mu_{w_j} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n_f} \sigma_j a_{ij} - \sum_{j=n_{te}}^{n_w} \mu_{w_j} d_{ij-n_w} \quad (2.18)$$

As fontes são calculadas aplicando-se a Equação 2.16 em cada painel individualmente, o que resulta na Equação 2.19. Já os dipolos são encontrados resolvendo a Equação 2.18, aplicada em todos os painéis, em conjunto com a condição de Kutta (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\sigma_j = -\vec{U}_\infty \cdot \hat{z}_j \quad (2.19)$$

Os coeficientes de influência correspondentes à distribuição de fontes são calculados utilizando a Equação 2.20. Já os coeficientes relacionados à distribuição de dipolos são obtidos por meio da Equação 2.21. Ambas as equações são expressas no sistema de coordenadas local de cada painel contido no plano xy .

$$\frac{\phi_\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(x - x_k)(y_{k+1} - y_k) - (y - y_k)(x_{k+1} - x_k)}{d_{(k,k+1)}} \log \frac{r_k + r_{k+1} + d_{(k,k+1)}}{r_k + r_{k+1} - d_{(k,k+1)}} \right. \\ \left. - |z| \left[\arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_k - h_k}{zr_k} - \arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_{k+1} - h_{k+1}}{zr_{k+1}} \right] \right\} \quad (2.20)$$

$$\frac{\phi_\mu}{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \left[\arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_k - h_k}{zr_k} - \arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_{k+1} - h_{k+1}}{zr_{k+1}} \right] \quad (2.21)$$

É importante ressaltar que os somatórios presentes nas Equações 2.20 e 2.21 correspondem a cada um dos lados do painel. Assim, o limite superior do somatório n é determinado pelo número de lados do painel, que pode ser 3 ou 4. Quando a variável k presente nas equações ultrapassa o valor de n , ela retorna para o valor 1, representando o último lado do painel, que conecta o último ponto ao primeiro. Os parâmetros $d_{(k,k+1)}$, $m_{(k,k+1)}$, r_k , e_k e h_k são calculados, respectivamente, pelas Equações 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 e 2.26 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$d_{(k,k+1)} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \quad (2.22)$$

$$m_{(k,k+1)} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (2.23)$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + z^2} \quad (2.24)$$

$$e_k = (x - x_k)^2 + z^2 \quad (2.25)$$

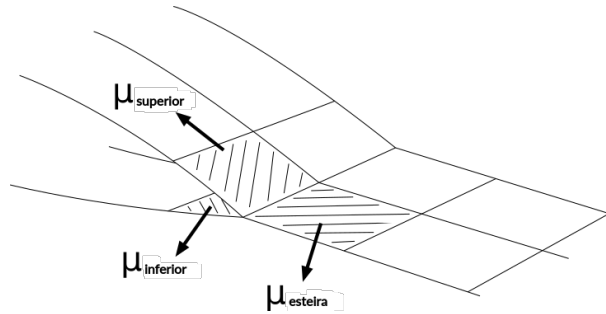
$$h_k = (x - x_k)(y - y_k) \quad (2.26)$$

2.2.5.2 Condição de Kutta

A condição de Kutta é satisfeita definindo a força do dipolo do painel adicionado ao escoamento, de forma que a circulação no bordo de fuga seja zero. Utilizando a Figura 2.14 para ajudar a visualizar os painéis no bordo de fuga, a força do dipolo adicionado é definida como a diferença entre a força do painel no extradorso e do painel no intradorso, representada pela Equação 2.27 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\mu_{wake} = \mu_{upper} - \mu_{lower} \quad (2.27)$$

Figura 2.14 – Força dos dipolos de painéis que compartilham uma aresta do bordo de fuga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.5.3 Modelo de Esteira Livre

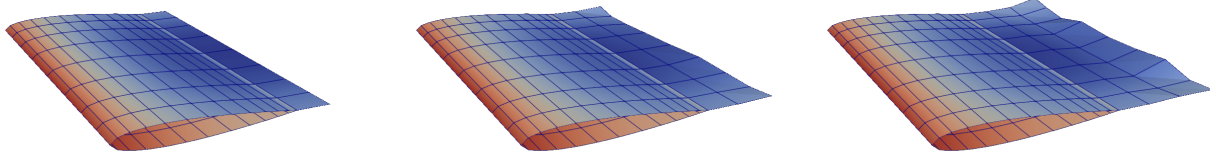
A necessidade de simular uma esteira realista se deve à sua influência na distribuição de pressão na superfície do objeto em análise. A complexidade do modelo geométrico, como a proximidade entre a asa e a cauda, impossibilita a definição de uma geometria da esteira prescrita que seja realista e minimize a força gerada nela. Portanto, é utilizado um modelo de esteira livre, no qual, como mostrado na Figura 2.15, é adicionado uma nova seção na esteira em cada instante a partir da velocidade em cada um dos vértices no bordo de fuga (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Figura 2.15 – Representação da marcha no tempo para a criação da esteira.

(a) $t = 0,0$ s.

(b) $t = \Delta t$ s.

(c) $t = 2\Delta t$ s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As componentes do vetor velocidade induzida pela presença de fontes em um painel são calculadas pelas Equações 2.28, 2.29 e 2.30 escritas no sistema local previamente definido (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$u_{\sigma} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{y_{k+1} - y_k}{d_{(k,k+1)}} \log \frac{r_k + r_{k+1} - d_{(k,k+1)}}{r_k + r_{k+1} + d_{(k,k+1)}} \quad (2.28)$$

$$v_{\sigma} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k+1}}{d_{(k,k+1)}} \log \frac{r_k + r_{k+1} - d_{(k,k+1)}}{r_k + r_{k+1} + d_{(k,k+1)}} \quad (2.29)$$

$$w_{\sigma} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \left(\arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_k - h_k}{zr_k} - \arctan \frac{m_{(k,k+1)}e_{k+1} - h_{k+1}}{zr_{k+1}} \right) \quad (2.30)$$

Já as componentes da velocidade induzida pela presença de dipolos em um painel são calculadas pelas Equações 2.31, 2.32 e 2.33 também no sistema local (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$u_\mu = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{z(y_k - y_{k+1})(r_k + r_{k+1})}{r_k r_{k+1} \{r_k r_{k+1} - [(x - x_k)(x - x_{k+1}) + (y - y_k)(y - y_{k+1}) + z^2]\}} \quad (2.31)$$

$$v_\mu = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{z(x_{k+1} - x_k)(r_k + r_{k+1})}{r_k r_{k+1} \{r_k r_{k+1} - [(x - x_k)(x - x_{k+1}) + (y - y_k)(y - y_{k+1}) + z^2]\}} \quad (2.32)$$

$$w_\mu = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{[(x - x_{k+1})(y - y_k) - (x - x_k)(y - y_{k+1})](r_k + r_{k+1})}{r_k r_{k+1} \{r_k r_{k+1} - [(x - x_k)(x - x_{k+1}) + (y - y_k)(y - y_{k+1}) + z^2]\}} \quad (2.33)$$

O movimento livre dos vértices na esteira altera a área dos painéis e, como não pode haver criação de circulação na esteira, o valor de μ_w em um determinado painel precisa ser corrigido devido à variação de área que pode ocorrer. Portanto, ao calcular a velocidade induzida pela esteira em um painel, o valor correto de μ_w é corrigido pela Equação 2.34, na qual S é a área do painel e o subscrito "o" representa o valor da variável no momento em que o painel foi inserido na esteira (KATZ; PLOTKIN, 2001).

$$\mu_w = \mu_{w_o} \frac{S_o}{S} \quad (2.34)$$

2.2.5.4 Cálculo da Velocidade na Superfície

A velocidade em cada painel é determinada somando a velocidade do escoamento livre com a velocidade gerada pela distribuição de singularidades, como mostrado pela Equação 2.35, na qual os subscritos σ e μ correspondem à velocidade induzida pela distribuição de fontes e dipolos respectivamente.

$$\vec{U} = \vec{U}_\infty + \vec{U}_\sigma + \vec{U}_\mu \quad (2.35)$$

O modo como as velocidades $\vec{U}_\sigma$ e $\vec{U}_\mu$ são calculadas se altera dependendo do tipo de condição de contorno aplicada, seja de Dirichlet ou Neumann. Para um problema que utiliza a condição de contorno de Dirichlet, a velocidade no ponto de controle no centro do painel é determinada pela força da fonte no painel e pelo gradiente de dipolos, calculado a partir dos dipolos nos painéis vizinhos (KATZ; PLOTKIN, 2001).

A distribuição de fontes induz uma velocidade normal ao painel com valor igual à σ , como mostrado na Equação 2.36. Devido à Equação 2.19, percebe-se que σ tem valor igual à componente normal ao painel do vetor velocidade $\vec{U}_\infty$. Portanto, a distribuição de fontes é responsável pela impermeabilidade na superfície. A distribuição de dipolos, por sua vez, induz uma velocidade tangente à superfície, igual ao gradiente de dipolos, com mostrado pela Equação 2.37 (KATZ; PLOTKIN, 2001).

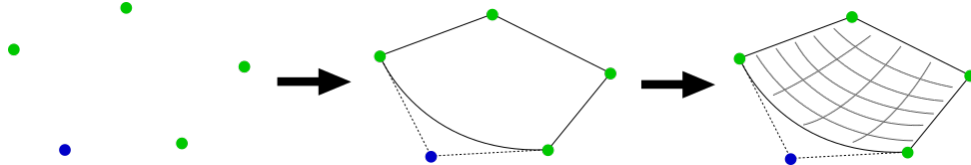
$$\vec{U}_\sigma = \sigma \hat{z} \quad (2.36)$$

$$\vec{U}_\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \hat{y} \quad (2.37)$$

3 MODELO GEOMÉTRICO

A geometria é definida a partir de três elementos: vértices, curvas e superfícies, como mostrado na Figura 3.1. Esta seção, Modelo Geométrico, tem como objetivo apresentar os pontos de controle e as curvas que os conectam. As superfícies, por sua vez, são definidas na próxima seção, na fase de implementação.

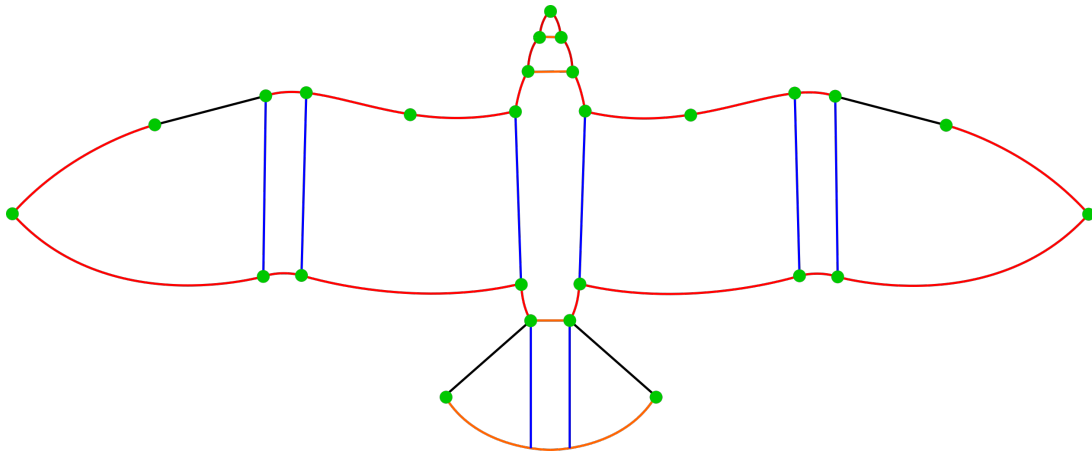
Figura 3.1 – Etapas para a definição de uma superfície da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 3.2 ilustra, de forma simplificada, alguns pontos de controle e curvas definidas pelo modelo geométrico. As curvas de Bézier, mostradas em vermelho, foram definidas como o elementos básicos de construção da geometria devido à facilidade de se definir curvas em três dimensões a partir de alguns pontos de controle. Além das curvas de Bézier, também foram utilizadas círculos, elipses, curvas de perfis aerodinâmicos e retas.

Figura 3.2 – Ilustração simplificada dos pontos de controle e curvas definidos pelo modelo geométrico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, com o objetivo de facilitar o desenvolvimento das Equações 3.7 a 3.55, foram definidos dois parâmetros: $\vec{B}(X, t)$ e $q(\theta, \hat{u})$, calculados, respectivamente, pelas Equações 3.1 e 3.2. A função $\vec{B}(X, t)$ define um ponto de uma curva de Bézier a partir de uma lista ordenada X contendo $n + 1$ pontos de controle e um parâmetro de interpolação t entre 0 e 1. Já a função $q(\theta, \hat{u})$ define um quatérnio utilizado para representar as rotações das articulações da ave a partir de um ângulo de rotação θ e um vetor unitário $\hat{u}$, cujas componentes são definidas pelos subscritos x , y e z .

$$\vec{B}(X, t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i X_i \quad (3.1)$$

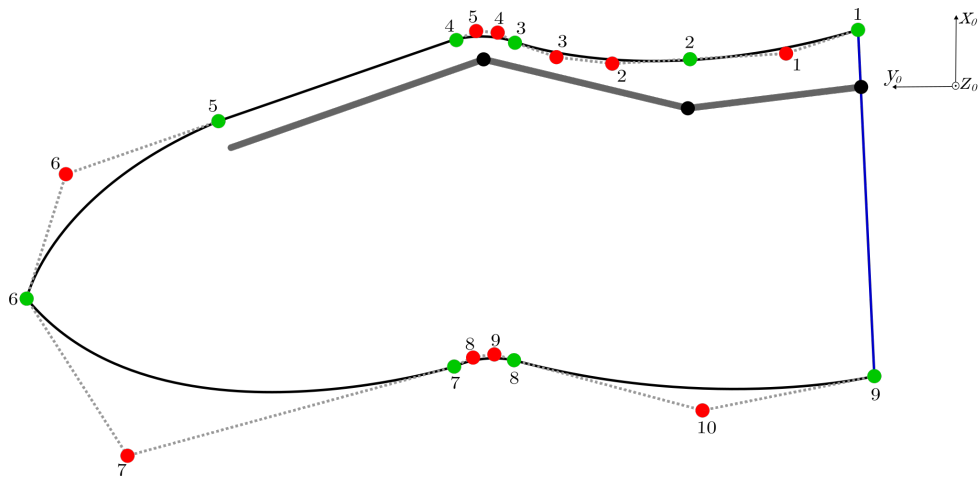
$$q(\theta, \hat{u}) = \cos \theta + (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) \sin \theta \quad (3.2)$$

A seguir, visando facilitar a apresentação do modelo geométrico, os pontos de controle e curvas serão apresentados a partir da divisão do corpo do pássaro em 4 partes: asa, corpo central, cabeça e cauda.

3.0.1 Asa

A definição da asa pode ser dividida em três etapas: rotação das articulações, curvas de contorno e perfis aerodinâmicos. Em primeiro lugar, as seções correspondentes aos comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4, são definidas de acordo com a estrutura esquelética das aves, correspondendo, a partir da articulação do ombro, ao úmero, rádio/ulna e os ossos das mãos. Em seguida são definidos os pontos de controle representados na Figura 3.3 pelos pontos verdes, contidos na superfície, e pelos pontos vermelhos, necessários para dar forma às curvas de Bézier. Por fim, são definidos as posições dos perfis aerodinâmicos, necessários para dar forma e espessura à asa.

Figura 3.3 – Parâmetros para definição da geometria da asa.



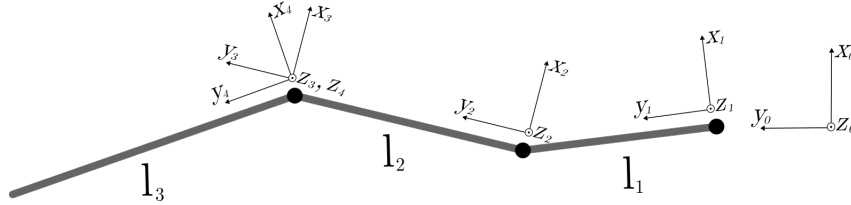
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.0.1.1 Rotação das Articulações

As rotações nas articulações do ombro, cotovelo e punho são descritas a partir de quatro sistemas de referência localizados nas seções correspondentes aos comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , como mostrado na Figura 3.4. Todos os sistemas possuem a componente $\hat{y}$ na direção da seção que representa a estrutura esquelética local e são obtidos rotacionando o sistema de referência inercial $(xyz)_0$. Os sistemas $(xyz)_1$, $(xyz)_2$ e $(xyz)_4$ estão localizados no início de cada uma das três

seções da asa. O sistema $(xyz)_3$, por sua vez, está localizado no final da segunda seção. Essa diferença foi definida de forma a facilitar a representação da rotação do antebraço, cuja rotação em torno do eixo $\hat{y}$ ocorre ao longo da seção representada por l_2 e não na articulação do cotovelo.

Figura 3.4 – Sistemas de referência utilizados para definir as seções da asa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, os sistemas de 1 a 4 são escritos em função de 14 ângulos, 7 de cada lado da asa, definidos como θ_{ie} e θ_{id} , sendo que os subscritos e e d representam o lado esquerdo e direito respectivamente. A seguir será apresentado como cada um dos quatro sistemas são definidos. Afim de simplificar a explicação, serão apresentados apenas os sistemas do lado esquerda da asa. Os sistemas do lado direito, por sua vez, são definidos de maneira similar, porém invertendo o sentido de rotação dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{z}$.

O sistema de referência $(xyz)_1$, localizado na base da primeira seção, corresponde à articulação do ombro e pode sofrer rotação em torno dos eixos $\hat{x}_1$, $\hat{y}_1$ e $\hat{z}_1$. Assumindo que inicialmente a orientação do sistema 1 coincide com a do sistema inercial, as rotações são θ_1 , θ_2 e θ_3 em torno de $\hat{x}_1$, $-\hat{y}_1$ e $\hat{z}_1$ respectivamente.

Já a articulação do cotovelo, localizada na ligação entre a primeira e a segunda seção, pode sofrer rotação em torno de dois eixos, $\hat{y}_2$ e $\hat{z}_2$, referentes aos ângulos θ_4 e θ_5 respectivamente. A rotação em torno de $\hat{y}_2$ não é aplicada em toda a seção, mas varia, começando de 0 na base, até o valor máximo na ponta, como ocorre no antebraço humano. Portanto, são definidos dois sistemas de referência, um no início e outro no final da segunda seção, chamados respectivamente de $(xyz)_2$ e $(xyz)_3$. Portanto, o sistema $(xyz)_2$ é obtido assumindo uma orientação inicial igual ao sistema $(xyz)_1$ e rotacionando θ_5 em torno de $-\hat{z}_2$. Já o sistema $(xyz)_3$ é obtido assumindo uma orientação inicial igual ao sistema $(xyz)_2$ e rotacionando θ_4 em torno de $-\hat{y}_3$.

Por fim, a articulação do punho, localizado na base da terceira seção, pode sofrer rotação em torno dos eixos $\hat{x}_3$ e $\hat{z}_3$, referentes aos ângulos θ_6 e θ_7 . As rotações ocorrem em torno dos eixos $-\hat{x}_3$ e $\hat{z}_3$.

3.0.1.2 Contorno: Bordo de Ataque e Bordo de Fuga

O contorno da asa é definido pelos pontos de controle verdes e vermelhos mostrados na Figura 3.3. Os pontos verdes chamados de $\vec{p}_i$ representam a ligação entre duas ou mais curvas da geometria e os vermelhos $\vec{c}_i$ dão forma às curvas de Bézier. Ambos possuem o subscrito i que assume os valores de 1 a 9 para os pontos verdes e de 1 a 10 para os pontos vermelhos.

Na Figura 3.3, somente a curva entre os pontos 4 e 5 não possui pontos de controle do tipo $\vec{c}_i$, pois são os únicos pontos ligados por uma reta, os demais são conectados por curvas de

Bézier. Ademais, como a ave possui simetria em relação ao plano xz , somente os pontos do lado esquerdo da ave serão apresentados ao longo do desenvolvimento das Equações. Dessa forma, para se obter os pontos do lado direito, é necessário multiplicar o vetor $\hat{y}_i$ em todas as Equações por -1.

Além disso, com objetivo de simplificar as Equações 3.7 a 3.15, os pontos no início e final de cada uma das seções que representam a estrutura esquelética da asa são definidos como $\vec{l}_0$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ e $\vec{l}_3$, de acordo com as Equações 3.3 a 3.6.

$$\vec{l}_0 = h_1 \hat{y}_0 \quad (3.3)$$

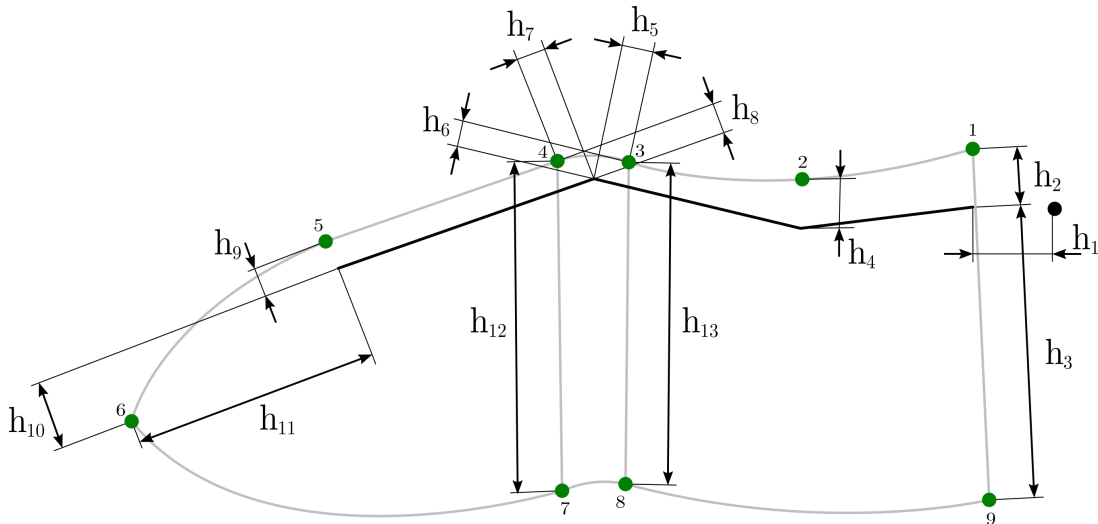
$$\vec{l}_1 = \vec{l}_0 + l_1 \hat{y}_1 \quad (3.4)$$

$$\vec{l}_2 = \vec{l}_1 + l_2 \hat{y}_2 \quad (3.5)$$

$$\vec{l}_3 = \vec{l}_2 + l_3 \hat{y}_4 \quad (3.6)$$

Dessa forma, a partir das Equações 3.3 a 3.6 e dos parâmetros h_i mostrados na Figura 3.5, é possível calcular os pontos contidos na superfície da asa, definidos como $\vec{p}$ a partir das Equações 3.7 a 3.15. Ademais, ao se aplicar a Equação 3.7 do lado direito da asa é necessário multiplicar o ângulo θ_0 por -1, assim como é feito para os vetores $\hat{y}_i$.

Figura 3.5 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para a asa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{p}_1 = \vec{l}_0 + q(\theta_0, \hat{z}_0)(h_2 \hat{x}_0)q'(\theta_0, \hat{z}_0) \quad (3.7)$$

$$\vec{p}_2 = \vec{l}_1 + h_4 \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{\|\hat{x}_1 + \hat{x}_2\|} \quad (3.8)$$

$$\vec{p}_3 = \vec{l}_2 - h_5 \hat{y}_2 + h_6 \hat{x}_3 \quad (3.9)$$

$$\vec{p}_4 = \vec{l}_2 + h_7 \hat{y}_4 + h_8 \hat{x}_4 \quad (3.10)$$

$$\vec{p}_5 = \vec{l}_3 + h_9 \hat{x}_4 \quad (3.11)$$

$$\vec{p}_6 = \vec{p}_5 - (h_9 + h_{10})\hat{x}_4 + h_{11}\hat{y}_4 \quad (3.12)$$

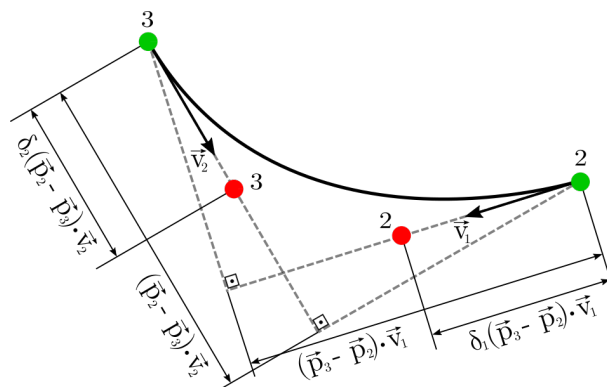
$$\vec{p}_7 = \vec{p}_4 - h_{12} \frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_4}{\|\hat{x}_3 + \hat{x}_4\|} \quad (3.13)$$

$$\vec{p}_8 = \vec{p}_3 - h_{13} \frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_4}{\|\hat{x}_3 + \hat{x}_4\|} \quad (3.14)$$

$$\vec{p}_9 = \vec{l}_0 - q(\theta_0, \hat{z}_0)(h_3 \hat{x}_0)q'(\theta_0, \hat{z}_0) \quad (3.15)$$

Os pontos de controle em vermelho, por sua vez, calculados pelas Equações 3.16 a 3.25, são definidos utilizando os parâmetros δ_i , que representam uma porcentagem das distâncias entre os pontos verdes, que podem ser projetadas no eixo definido pelas derivadas nas extremidades, como mostrado na Figura 3.6. Esse método de construção é utilizado nas curvas cúbicas e na curva quadrática entre os pontos $\vec{p}_5$ e $\vec{p}_6$, de forma a manter a derivada primeira contínua entre as seções que definem o contorno.

Figura 3.6 – Ilustração de como são definidos os pontos de controle em vermelho na curva entre os pontos $\vec{p}_2$ e $\vec{p}_3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{c}_1 = \vec{p}_2 - \delta_1 l_1 \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{\|\hat{y}_1 + \hat{y}_2\|} \quad (3.16)$$

$$\vec{c}_2 = \vec{p}_2 + \delta_2 \frac{l_2 - h_5}{2} \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{\|\hat{y}_1 + \hat{y}_2\|} \quad (3.17)$$

$$\vec{c}_3 = \vec{p}_3 - \delta_3 \frac{l_2 - h_5}{2} \hat{y}_2 \quad (3.18)$$

$$\vec{c}_4 = \vec{p}_3 + \delta_4 h_5 \hat{y}_3 \quad (3.19)$$

$$\vec{c}_5 = \vec{p}_3 + \delta_5 h_7 \hat{y}_4 \quad (3.20)$$

$$\vec{c}_6 = \vec{p}_5 + \delta_6 h_{11} \hat{y}_4 \quad (3.21)$$

$$\vec{c}_7 = \vec{p}_5 + \delta_7 h_{11} \hat{y}_4 + (1 + \delta_8)(h_9 + h_{10})\hat{x}_4 \quad (3.22)$$

$$\vec{c}_8 = \vec{p}_7 + \delta_8 \frac{(\vec{p}_8 - \vec{p}_7) \cdot \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=1}}{\left\| \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=1} \right\|^2} \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=1}; \quad X = (\vec{p}_6, \vec{c}_7, \vec{p}_7) \quad (3.23)$$

$$\vec{c}_9 = \vec{p}_8 - \delta_9 \frac{(\vec{p}_8 - \vec{p}_7) \cdot \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=0}}{\left\| \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=0} \right\|^2} \vec{B}'(X, t) \Big|_{t=0}; \quad X = (\vec{p}_8, \vec{c}_{10}, \vec{p}_9) \quad (3.24)$$

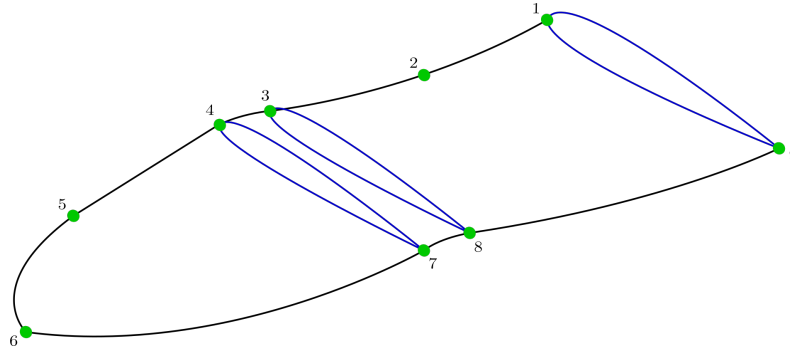
$$\vec{c}_{10} = \vec{p}_2 + (1 + \delta_{10}) \frac{h_3 + h_{13}}{2} \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{\|\hat{x}_1 + \hat{x}_2\|} \quad (3.25)$$

3.0.1.3 Perfis Aerodinâmicos

São utilizados três perfis aerodinâmicos na asa de forma a garantir que cada região possua as características aerodinâmicas desejadas. Os perfis estão posicionados na raiz, próximo à articulação do punho e na ponta da asa, como mostrado pela na Figura 3.7. O perfil na ponta da asa não está representado na Figura 3.7, já que ele é utilizado apenas para interpolar a superfície e será aplicado somente na fase de implementação.

O posicionamento de cada perfil é definido pela posição do bordo de ataque, do bordo de fuga e pelo vetor normal ao plano no qual o perfil está contido, como mostrado na Tabela 3.1. É importante ressaltar que o segundo perfil, diferentemente dos demais, é utilizado em duas seções da asa, entre os pontos $\vec{p}_3$ e $\vec{p}_8$ e os pontos $\vec{p}_4$ e $\vec{p}_7$. Isso é feito para evitar distorções próximo à articulação do punho devido à rotação em torno do eixo $\hat{x}_4$.

Figura 3.7 – Posicionamento dos perfis aerodinâmicos ao longo da envergadura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3.1 – Definição dos parâmetros utilizados para definir a posição dos perfis aerodinâmicos ao longo da envergadura da asa.

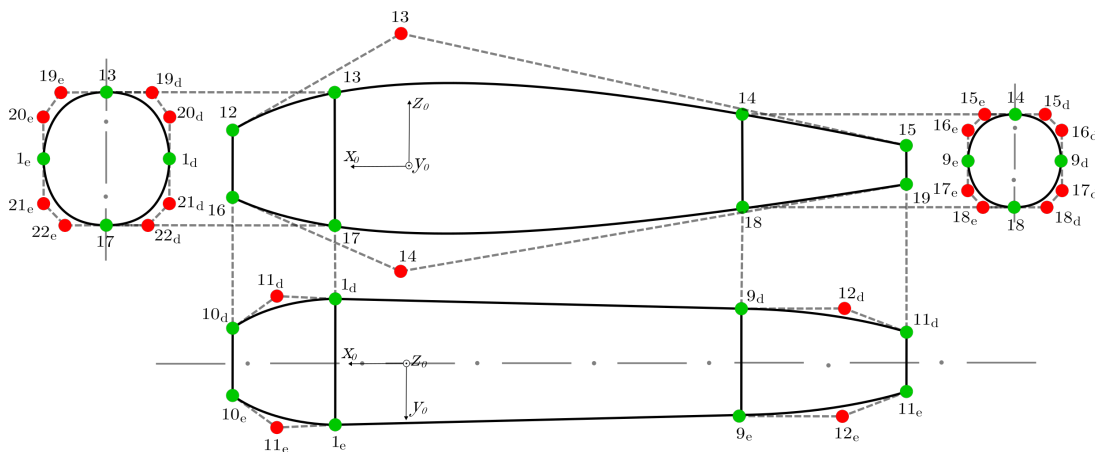
Perfil	Bordo de ataque	Bordo de fuga	Vetor normal
1	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_9$	$(\vec{p}_9 - \vec{p}_1) \times \hat{z}_1$
2	$\vec{p}_3$	$\vec{p}_8$	$(\vec{p}_8 - \vec{p}_3) \times \hat{z}_3$
2	$\vec{p}_4$	$\vec{p}_7$	$(\vec{p}_7 - \vec{p}_4) \times \hat{z}_4$
3	$\vec{p}_6$	$\vec{p}_6$	$(\vec{p}_7 - \vec{p}_4) \times \hat{z}_4$

Fonte: Elaboração própria.

3.0.2 Corpo Central

Assim como a asa, o corpo central é definido a partir de curvas de Bézier, cujos pontos de controle estão apresentados na Figura 3.8. Porém, diferentemente da asa, o corpo central não possui rotação, ainda que a coluna permita movimentos, principalmente próximo à região da cabeça.

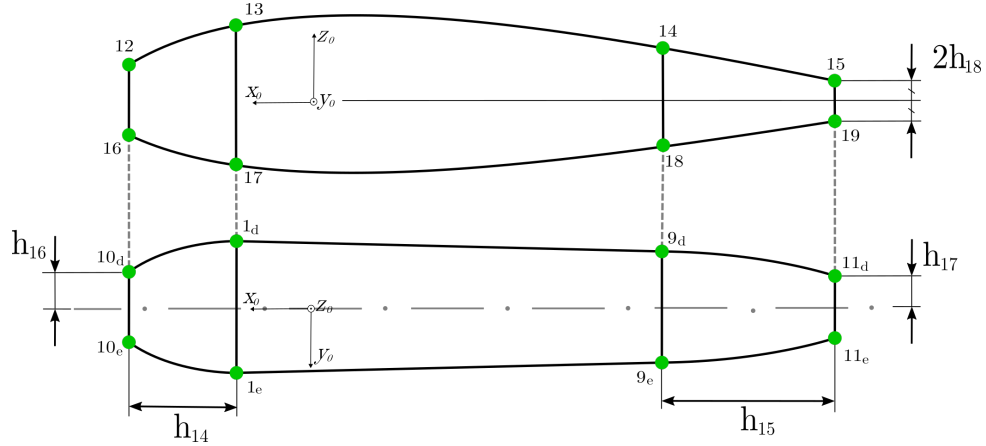
Figura 3.8 – Pontos de controle para definição da geometria do corpo central.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os pontos contidos na superfície são calculados de duas maneiras diferentes. Os pontos na seção que conecta o corpo central e a cabeça é formado por uma circunferência de raio h_{16} , mostrado na Figura 3.9, e são calculados pelas Equações 3.26 a 3.28.

Figura 3.9 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para o corpo central.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{p}_{10} = (h_{14} + h_2 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 + h_{16}\hat{y}_0 \quad (3.26)$$

$$\vec{p}_{12} = (h_{14} + h_2 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 + h_{16}\hat{z}_0 \quad (3.27)$$

$$\vec{p}_{16} = (h_{14} + h_2 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 - h_{16}\hat{z}_0 \quad (3.28)$$

A conexão entre o corpo central e a cauda, por sua vez, é definida por uma elipse, cujo semi eixo maior e menor são, respectivamente, h_{17} e h_{18} . Os pontos contidos nessa elipse são calculados pelas Equações 3.29 a 3.31.

$$\vec{p}_{11} = -(h_{15} + h_3 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 + h_{17}\hat{y}_0 \quad (3.29)$$

$$\vec{p}_{15} = -(h_{15} + h_3 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 + h_{18}\hat{z}_0 \quad (3.30)$$

$$\vec{p}_{19} = -(h_{15} + h_3 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 - h_{18}\hat{z}_0 \quad (3.31)$$

As curvas no plano de simetria são definidos por duas curvas de Bézier: $\vec{B}_1(X_1, t)$ e $\vec{B}_2(X_2, t)$, sendo que $X_1 = (\vec{p}_{12}, \vec{c}_{13}, \vec{p}_{15})$ e $X_2 = (\vec{p}_{16}, \vec{c}_{14}, \vec{p}_{19})$. Os pontos $\vec{c}_{13}$ e $\vec{c}_{14}$ são calculados pelas Equações 3.32 e 3.33.

$$\vec{c}_{13} = \delta_{11} \frac{h_{14} + h_{15} + (h_2 + h_3) \cos(\theta_0)}{2} \hat{x}_0 + \delta_{12} (h_2 + h_3) \cos(\theta_0) \hat{z}_0 \quad (3.32)$$

$$\vec{c}_{14} = \delta_{13} \frac{h_{14} + h_{15} + (h_2 + h_3) \cos(\theta_0)}{2} \hat{x}_0 - \delta_{14} (h_2 + h_3) \cos(\theta_0) \hat{z}_0 \quad (3.33)$$

Os pontos $\vec{p}_{13}$ e $\vec{p}_{17}$ são definidos pela interseção, respectivamente, das curvas $\vec{B}_1(X_1, t)$ e $\vec{B}_2(X_2, t)$ com o plano definido pelo ponto $\vec{p}_1$ e vetor normal $\hat{x}_0$. Já os pontos $\vec{p}_{14}$ e $\vec{p}_{18}$ são definidos pela interseção, respectivamente, das curvas $\vec{B}_1(X_1, t)$ e $\vec{B}_2(X_2, t)$ com o plano definido pelo ponto $\vec{p}_9$ e vetor normal $\hat{x}_0$. Dessa forma, os pontos $\vec{p}_{13}$, $\vec{p}_{14}$, $\vec{p}_{17}$ e $\vec{p}_{18}$ podem ser calculados encontrando a raiz da Equação 3.34 ajustando o valor dos índices e substituindo o valor encontrado para t na Equação da curva de Bézier correspondente.

$$f(t) = (\vec{B}_i(X_i, t) - \vec{p}_j) \cdot \hat{x}_0 \quad (3.34)$$

Por fim, os pontos de controle em vermelho visíveis na vista superior na Figura 3.8 são calculados pelas Equações 3.35 e 3.36. Já os pontos pertencentes às duas seções transversais ao eixo longitudinal da ave são calculados pelas Equações 3.37 a 3.44.

$$\vec{c}_{11} = \vec{p}_1 + \delta_{15} h_{14} \hat{x}_0 \quad (3.35)$$

$$\vec{c}_{12} = \vec{p}_9 - \delta_{16} h_{15} \hat{x}_0 \quad (3.36)$$

$$\vec{c}_{15} = \vec{p}_{14} + \delta_{17} ((\vec{p}_9 - \vec{p}_{14}) \cdot \hat{y}_0) \hat{y}_0 \quad (3.37)$$

$$\vec{c}_{16} = \vec{p}_9 + \delta_{18} ((\vec{p}_{14} - \vec{p}_9) \cdot \hat{z}_0) \hat{z}_0 \quad (3.38)$$

$$\vec{c}_{17} = \vec{p}_9 - \delta_{19} ((\vec{p}_9 - \vec{p}_{18}) \cdot \hat{z}_0) \hat{z}_0 \quad (3.39)$$

$$\vec{c}_{18} = \vec{p}_{18} - \delta_{20} ((\vec{p}_9 - \vec{p}_{18}) \cdot \hat{y}_0) \hat{y}_0 \quad (3.40)$$

$$\vec{c}_{19} = \vec{p}_{13} + \delta_{21} ((\vec{p}_1 - \vec{p}_{13}) \cdot \hat{y}_0) \hat{y}_0 \quad (3.41)$$

$$\vec{c}_{20} = \vec{p}_1 + \delta_{22} ((\vec{p}_{13} - \vec{p}_1) \cdot \hat{z}_0) \hat{z}_0 \quad (3.42)$$

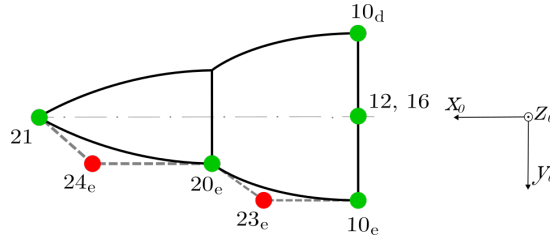
$$\vec{c}_{21} = \vec{p}_1 - \delta_{23} ((\vec{p}_1 - \vec{p}_{17}) \cdot \hat{z}_0) \hat{z}_0 \quad (3.43)$$

$$\vec{c}_{22} = \vec{p}_{17} - \delta_{24} ((\vec{p}_1 - \vec{p}_{17}) \cdot \hat{y}_0) \hat{y}_0 \quad (3.44)$$

3.0.3 Cabeça

Embora as aves apresentem cabeças com diferentes formatos, neste modelo foi utilizada uma geometria menos adaptável se comparado com a asa ou a cauda. Conforme ilustrado na Figura 3.10, a cabeça é definida como uma superfície de revolução em torno do eixo $\hat{x}_0$, com duas curvas de Bézier utilizadas como guia.

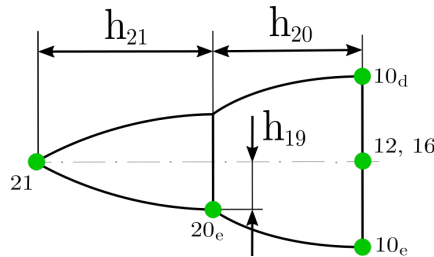
Figura 3.10 – Pontos de controle para definição da geometria da cabeça.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os pontos de controle $\vec{p}_{20}$ e $\vec{p}_{21}$ são calculados pelas Equações 3.45 e 3.46 utilizando os parâmetros h_i apresentados na Figura 3.11. Já os pontos em vermelho são calculados pelas Equações 3.44 e 3.47 utilizando os parâmetros δ_i .

Figura 3.11 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para a cabeça.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{p}_{20} = h_{19}\hat{y}_0 + (h_{20} + h_{14} + h_2 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 \quad (3.45)$$

$$\vec{p}_{21} = h_{19}\hat{y}_0 + (h_{21} + h_{20} + h_{14} + h_2 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 \quad (3.46)$$

$$\vec{c}_{23} = \vec{p}_{10} + \delta_{25}h_{20}\hat{x}_0 \quad (3.47)$$

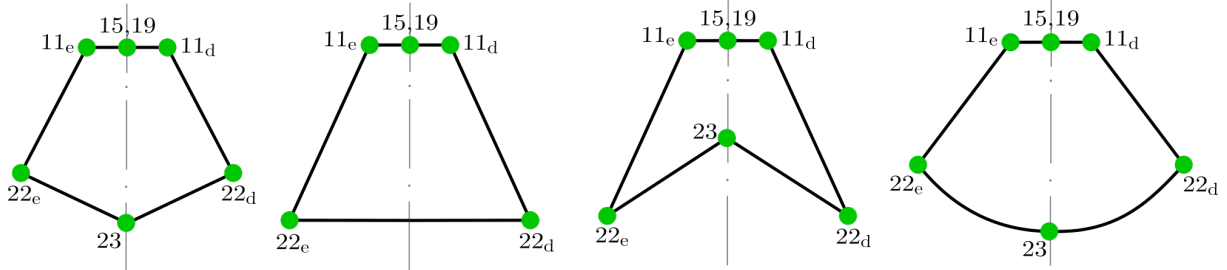
$$\vec{c}_{24} = \vec{p}_{20} + \delta_{26}h_{21}\hat{x}_0 \quad (3.48)$$

3.0.4 Cauda

Devido à diversidade de formatos encontrados nas caudas de pássaros e às restrições impostas pelo modelo aerodinâmico adotado para análise, foram selecionados apenas 4 formatos

fixos: cauda reta, cauda redonda, cauda com ponta e cauda em V, como ilustrado na Figura 3.12. Esses formatos foram escolhidos por serem observados na natureza e permitirem a aplicação do método dos painéis para obter suas características aerodinâmicas.

Figura 3.12 – Pontos de controle para definição da geometria de quatro tipos diferentes de cauda.

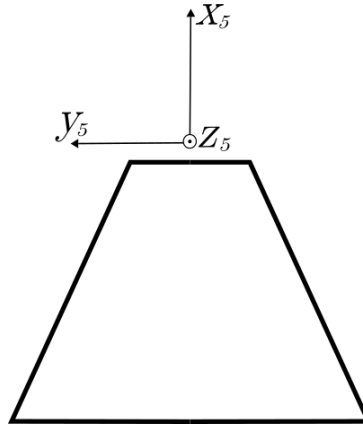


Fonte: Elaborado pelo autor.

3.0.4.1 Rotação das Articulações

O modelo permite que 3 rotações sejam realizadas em torno dos eixos do sistema $(xyz)_5$ fixo na base da cauda como mostrado na Figura 3.13. As rotações são representadas pelos ângulos θ_8 , θ_9 e θ_{10} em torno dos eixos $\hat{x}_5$, $\hat{y}_5$ e $\hat{z}_5$, respectivamente.

Figura 3.13 – Sistema de referência $(xyz)_5$ na base da cauda.



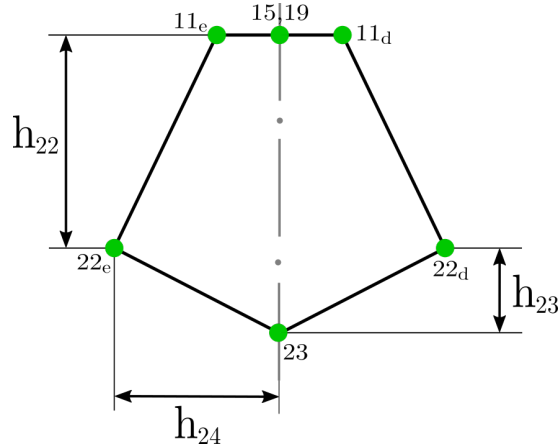
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.0.4.2 Contorno

O contorno da cauda é determinado pelos pontos calculados pelas Equações 3.49 e 3.50, a partir das dimensões mostradas na Figura 3.14. Os pontos do bordo de ataque e do bordo de fuga são conectados por retas, como mostrado na Figura 3.12, com exceção da cauda redonda, cujo bordo de fuga é formado por um arco de círculo que passa pelos pontos $\vec{p}_{22e}$, $\vec{p}_{23}$ e $\vec{p}_{22d}$.

$$\vec{p}_{22} = h_{24}\hat{y}_4 + (h_{15} + h_3 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 - h_{22}\hat{x}_4 \quad (3.49)$$

Figura 3.14 – Representação geométrica dos parâmetros h_i para a cauda.



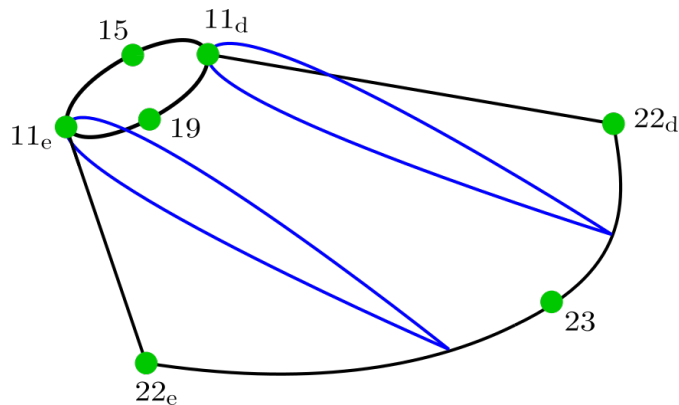
Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{p}_{23} = (h_{15} + h_3 \cos(\theta_0))\hat{x}_0 - (h_{22} + h_{23})\hat{x}_4 \quad (3.50)$$

3.0.4.3 Perfis Aerodinâmicos

A cauda possui um perfil aerodinâmico posicionado em duas seções, como mostrado na Figura 3.15. O bordo de ataque do perfil é definido pelo ponto que conecta o bordo de ataque da cauda ao corpo. O ponto do bordo de fuga do perfil, porém, precisa ser calculado a partir da interseção do plano do perfil, definido a partir do ponto do bordo de ataque $\vec{p}_{11}$ e do vetor normal $\hat{y}_5$, com o bordo de fuga.

Figura 3.15 – Posição dos perfis aerodinâmicos na cauda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, para as geometrias nas quais os pontos $\vec{p}_{22}$ e $\vec{p}_{23}$ são conectados por uma reta, o ponto do bordo de fuga, definido como $\vec{p}_{te}$, pode ser calculado pela Equação 3.51.

$$\vec{p}_{te} = \vec{p}_{22} + \frac{(\vec{p}_{11} - \vec{p}_{22}) \cdot \hat{y}_5}{(\vec{p}_{23} - \vec{p}_{22}) \cdot \hat{y}_5} (\vec{p}_{23} - \vec{p}_{22}) \quad (3.51)$$

Já o ponto para a cauda com bordo de fuga circular pode ser calculado a partir da definição da Equação 3.52, que calcula os pontos do bordo de fuga em função do ângulo β , cujos limites são calculados pelas Equações 3.53 e 3.54.

$$\vec{p}_{te}(\beta) = \vec{p}_{23} - \frac{(h_{24}^2 + h_{23}^2)}{2h_{23}^2} q(\beta, \hat{z}_5) \hat{x}_5 q'(\beta, \hat{z}_5) \quad (3.52)$$

$$\beta \in (-\beta_{max}, \beta_{max}) \quad (3.53)$$

$$\beta_{max} \triangleq \arccos \left(\frac{||h_{24}^2 - h_{23}^2||}{h_{23}^2 + h_{24}^2} \right) \quad (3.54)$$

Assim, o valor de beta correspondente ao bordo de fuga do perfil pode ser encontrado a partir da raiz da Equação 3.55, substituindo o valor encontrado para β na Equação 3.52.

$$f(\beta) = (\vec{p}_{te}(\beta) - \vec{p}_{11}) \cdot \hat{y}_5 \quad (3.55)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO

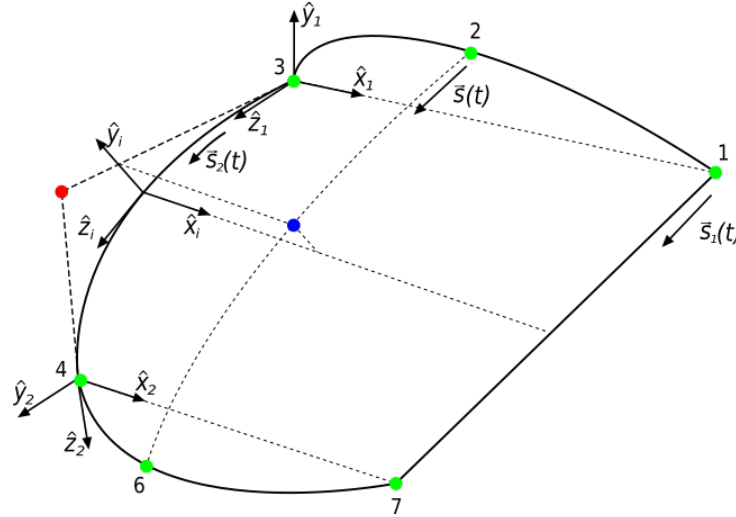
A implementação tem como objetivo apresentar os detalhes sobre como o modelo geométrico foi implementado no software Gmsh para criar a malha superficial e sobre a implementação do método dos painéis (GEUZAINÉ; REMACLE, 2020).

4.1 Modelo Geométrico

A implementação do modelo geométrico é feita no pacote pybird utilizando o software Gmsh através da API disponível em Python (GEUZAINÉ; REMACLE, 2020; ROSSUM; JR, 1995). O software Gmsh possui algumas particularidades, por exemplo, cada superfície é definida a partir de três ou quatro curvas que formam um conjunto fechado. Portanto, é necessário adaptar as Equações do modelo geométrico com o objetivo de serem implementadas.

É importante destacar o método utilizado para criar as curvas interpoladas, que serão utilizadas nesta seção com o intuito de se adequar às particularidades do software utilizado e permitir um maior controle sobre a malha superficial gerada. Conforme ilustrado na Figura 4.1, a curva entre os pontos $\vec{p}_2$ e $\vec{p}_6$, que não tem relação com os pontos reais na superfície da asa, é obtida por meio da Equação 4.1 aplicada no ponto i , interpolando entre o ponto inicial e final por meio do parâmetros t .

Figura 4.1 – Parâmetros envolvidos durante o cálculo da interpolação de uma curva.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\vec{s}(t_i) = \hat{x}_i ((1 - t_i)x_1 + t_ix_2) + \hat{y}_i ((1 - t_i)y_1 + t_iy_2) \quad (4.1)$$

O sistema $(xyz)_i$ é calculado com base na definição do quatérnio, descrito na Equação 4.4, que é responsável por rotacionar o vetor $\hat{x}_1$ até $\hat{x}_i$, que é calculado por meio da Equação 4.2. Dessa forma, o vetor $\hat{y}_i$ é calculado por meio da Equação 4.3, que realiza a rotação do vetor $\hat{y}_1$. O vetor $\hat{z}_i$, por sua vez, não é calculado, uma vez que não é utilizado na definição da curva.

$$\hat{x}_i = \frac{\vec{s}_1(t_i) - \vec{s}_2(t_i)}{\|\vec{s}_1(t_i) - \vec{s}_2(t_i)\|} \quad (4.2)$$

$$\hat{y}_i = q_i \cdot \hat{y}_1 \cdot q'_i \quad (4.3)$$

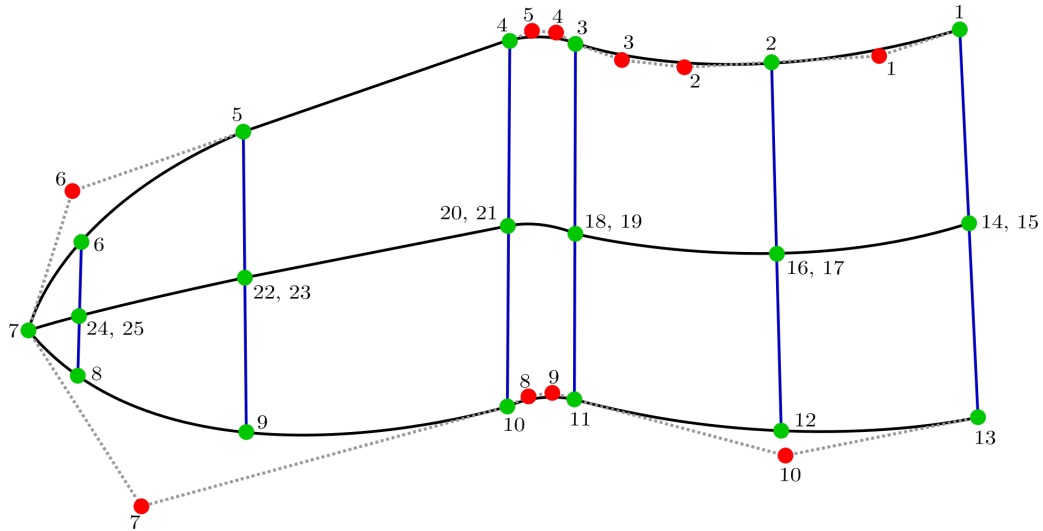
$$q_i = q \left(\arccos(\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_i), \frac{\hat{x}_1 \times \hat{x}_i}{\|\hat{x}_1 \times \hat{x}_i\|} \right) \quad (4.4)$$

Os valores de x_1 e y_1 correspondem às componentes do ponto $\vec{p}_2$, que representam, respectivamente, as coordenadas x e y desse ponto no sistema de referência $(xyz)_1$. Da mesma forma, os valores de x_2 e y_2 correspondem às componentes do ponto $\vec{p}_6$, que representam, respectivamente, as coordenadas x e y desse ponto no sistema de referência $(xyz)_2$.

4.1.1 Asa

Os pontos de controle da asa, que estão mostrados na Figura 3.3, são substituídos pelos mostrados na Figura 4.2. Dessa forma, a asa é definida por um conjunto de superfícies que, por sua vez, são definidas por um conjunto de quatro ou três curvas que formam um conjunto fechado. É possível perceber, a partir da Figura 4.2, que apenas as superfícies da ponta da asa são formadas por um conjunto de três curvas.

Figura 4.2 – Pontos de controle utilizados na implementação da asa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As retas azuis, que ligam o bordo de ataque ao bordo de fuga, representam perfis aerodinâmicos. O perfil entre o ponto $\vec{p}_2$ e $\vec{p}_{12}$ é interpolado a partir do perfil na raiz e do meio da asa e é necessário para impedir deformações na superfície devido à rotação do antebraço em torno do eixo $\hat{y}_2$. Isso também é feito com o perfil entre os pontos 5 e 9, no qual são utilizados os perfis do meio e da ponta para interpolação. Já o perfil entre o ponto 6 e 8 é o próprio perfil da ponta, que é posicionado próximo à extremidade para ser utilizado na interpolação da superfície.

Os pontos que dividem cada perfil ao meio, como os pontos $\vec{p}_{14}$ e $\vec{p}_{15}$ na raiz, estão posicionado no meio do extradorso e intradorso do perfil. Esses pontos tem como objetivo dividir o extradorso e intradorso em duas regiões, cada uma contendo o bordo de ataque ou o bordo de fuga. Dessa forma, é possível, a partir da implementação no software Gmsh, definir refinamento diferente no bordo de fuga e no bordo de ataque, o que permite um maior controle sobre o tamanho dos elementos de malha (GEUZAINÉ; REMACLE, 2020).

Portanto, a partir dos novos pontos de controle é possível definir as curvas na asa a partir de um identificador, dos pontos inicial e final, e do tipo de curva, como mostrado na Tabela 4.1. A definição do ponto inicial e final é importante porque define o sentido da curva, necessário para se determinar a orientação do vetor normal à superfície.

Tabela 4.1 – Definição das curvas presentes na asa.

Id.	Início	Fim	Tipo	Id.	Início	Fim	Tipo
1	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	Bézier	25	$\vec{p}_{10}$	$\vec{p}_{20}$	Segmento de Perfil
2	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$	Bézier	26	$\vec{p}_{20}$	$\vec{p}_4$	Segmento de Perfil
3	$\vec{p}_3$	$\vec{p}_4$	Bézier	27	$\vec{p}_{10}$	$\vec{p}_{21}$	Segmento de Perfil
4	$\vec{p}_4$	$\vec{p}_5$	Segmento de reta	28	$\vec{p}_{21}$	$\vec{p}_4$	Segmento de Perfil
5	$\vec{p}_5$	$\vec{p}_6$	Segmento de Bézier	29	$\vec{p}_9$	$\vec{p}_{22}$	Segmento de Perfil
6	$\vec{p}_6$	$\vec{p}_7$	Segmento de Bézier	30	$\vec{p}_{22}$	$\vec{p}_5$	Segmento de Perfil
7	$\vec{p}_7$	$\vec{p}_8$	Segmento de Bézier	31	$\vec{p}_9$	$\vec{p}_{23}$	Segmento de Perfil
8	$\vec{p}_8$	$\vec{p}_9$	Segmento de Bézier	32	$\vec{p}_{23}$	$\vec{p}_5$	Segmento de Perfil
9	$\vec{p}_9$	$\vec{p}_{10}$	Segmento de Bézier	33	$\vec{p}_8$	$\vec{p}_{24}$	Segmento de Perfil
10	$\vec{p}_{10}$	$\vec{p}_{11}$	Bézier	34	$\vec{p}_{24}$	$\vec{p}_6$	Segmento de Perfil
11	$\vec{p}_{11}$	$\vec{p}_{12}$	Segmento de Bézier	35	$\vec{p}_8$	$\vec{p}_{25}$	Segmento de Perfil
12	$\vec{p}_{12}$	$\vec{p}_{13}$	Segmento de Bézier	36	$\vec{p}_{25}$	$\vec{p}_6$	Segmento de Perfil
13	$\vec{p}_{13}$	$\vec{p}_{14}$	Segmento de Perfil	37	$\vec{p}_{14}$	$\vec{p}_{16}$	Interpolada
14	$\vec{p}_{14}$	$\vec{p}_1$	Segmento de Perfil	38	$\vec{p}_{16}$	$\vec{p}_{18}$	Interpolada
15	$\vec{p}_{13}$	$\vec{p}_{15}$	Segmento de Perfil	39	$\vec{p}_{18}$	$\vec{p}_{20}$	Interpolada
16	$\vec{p}_{15}$	$\vec{p}_1$	Segmento de Perfil	40	$\vec{p}_{20}$	$\vec{p}_{22}$	Interpolada
17	$\vec{p}_{12}$	$\vec{p}_{16}$	Segmento de Perfil	41	$\vec{p}_{22}$	$\vec{p}_{24}$	Interpolada
18	$\vec{p}_{16}$	$\vec{p}_2$	Segmento de Perfil	42	$\vec{p}_{24}$	$\vec{p}_7$	Interpolada
19	$\vec{p}_{12}$	$\vec{p}_{17}$	Segmento de Perfil	43	$\vec{p}_{15}$	$\vec{p}_{17}$	Interpolada
20	$\vec{p}_{17}$	$\vec{p}_2$	Segmento de Perfil	44	$\vec{p}_{17}$	$\vec{p}_{19}$	Interpolada
21	$\vec{p}_{11}$	$\vec{p}_{18}$	Segmento de Perfil	45	$\vec{p}_{19}$	$\vec{p}_{21}$	Interpolada
22	$\vec{p}_{18}$	$\vec{p}_3$	Segmento de Perfil	46	$\vec{p}_{21}$	$\vec{p}_{23}$	Interpolada
23	$\vec{p}_{11}$	$\vec{p}_{19}$	Segmento de Perfil	47	$\vec{p}_{23}$	$\vec{p}_{25}$	Interpolada
24	$\vec{p}_{19}$	$\vec{p}_3$	Segmento de Perfil	48	$\vec{p}_{25}$	$\vec{p}_7$	Interpolada

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 4.2, por sua vez, define as superfícies na asa a partir de um identificador e de uma lista de curvas. É possível perceber que alguns identificadores das curvas tem sinal negativo, indicando que a curva tem sentido contrário ao que foi definido, com o ponto inicial e final trocados. Dessa forma, utilizando a regra da mão direita para se definir o vetor normal à superfície, é possível perceber que todas as superfícies na Tabela 4.2 possuem vetor normal

apontando para fora da geometria. Essa propriedade se mantém nos elementos de malha gerados, o que permitirá calcular os pontos de controle do modelo aerodinâmico de forma correta.

Tabela 4.2 – Definição das superfícies presentes na asa.

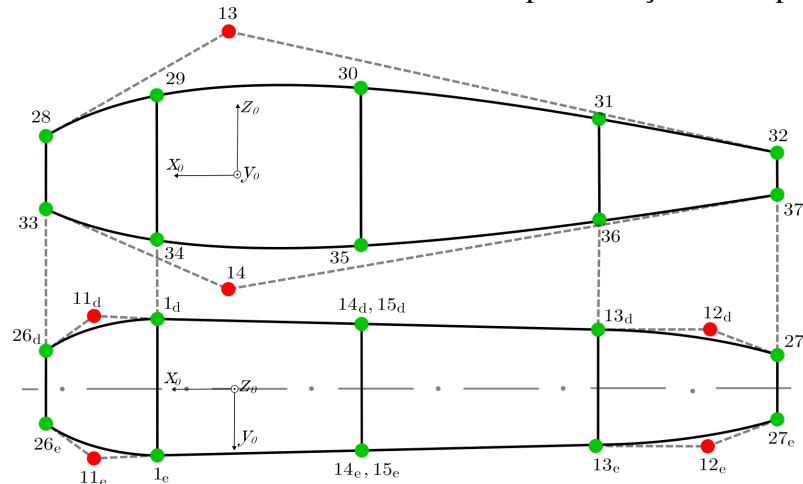
Id.	Id. das curvas	Id.	Id. das curvas
1	[1, -18, -37, 14]	13	[1, -16, 43, 20]
2	[2, -22, -38, 18]	14	[2, -20, 44, 24]
3	[3, -26, -39, 22]	15	[3, -24, 45, 28]
4	[4, -30, -40, 26]	16	[4, -28, 46, 32]
5	[5, -34, -41, 30]	17	[5, -32, 47, 36]
6	[6, -42, 34]	18	[6, -36, 48]
7	[7, 33, 42]	19	[7, -48, -35]
8	[8, 29, 41, -33]	20	[8, 35, -47, -31]
9	[9, 25, 40, -29]	21	[9, 31, -46, -27]
10	[10, 21, 39, -25]	22	[10, 28, -45, -23]
11	[11, 17, 38, -21]	23	[11, 23, -44, -19]
12	[12, 13, 37, -17]	24	[12, 19, -43, -15]

Fonte: Elaboração própria.

4.1.2 Corpo Central

O corpo central precisou ser modificado devido aos pontos de controle $\vec{p}_{14}$ e $\vec{p}_{15}$ que dividem o extradorso e intradorso do perfil na raiz da asa ao meio. Portanto, para garantir que todas as superfícies tenham no máximo 4 lados, foram adicionados os pontos $\vec{p}_{30}$ e $\vec{p}_{35}$ no corpo central, como mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Pontos de controle utilizados na implementação do corpo central.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, como foi feito para a asa, as curvas e superfícies no corpo central estão definidas, respectivamente, nas Tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4.3 – Definição das curvas presentes no corpo central.

Id.	Início	Fim	Tipo	Id.	Início	Fim	Tipo
49	$\vec{p}_{26}$	$\vec{p}_1$	Bézier	59	$\vec{p}_{13}$	$\vec{p}_{36}$	Bézier
50	$\vec{p}_{13}$	$\vec{p}_{27}$	Bézier	60	$\vec{p}_{27}$	$\vec{p}_{37}$	Arco de elipse
51	$\vec{p}_{26}$	$\vec{p}_{28}$	Arco de circunferência	61	$\vec{p}_{28}$	$\vec{p}_{29}$	Segmento de Bézier
52	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_{29}$	Bézier	62	$\vec{p}_{29}$	$\vec{p}_{30}$	Segmento de Bézier
53	$\vec{p}_{14}$	$\vec{p}_{30}$	Bézier	63	$\vec{p}_{30}$	$\vec{p}_{31}$	Segmento de Bézier
54	$\vec{p}_{13}$	$\vec{p}_{31}$	Bézier	64	$\vec{p}_{31}$	$\vec{p}_{32}$	Segmento de Bézier
55	$\vec{p}_{27}$	$\vec{p}_{32}$	Arco de elipse	65	$\vec{p}_{33}$	$\vec{p}_{34}$	Segmento de Bézier
56	$\vec{p}_{26}$	$\vec{p}_{33}$	Arco de circunferência	66	$\vec{p}_{34}$	$\vec{p}_{35}$	Segmento de Bézier
57	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_{34}$	Bézier	67	$\vec{p}_{35}$	$\vec{p}_{36}$	Segmento de Bézier
58	$\vec{p}_{14}$	$\vec{p}_{35}$	Bézier	68	$\vec{p}_{36}$	$\vec{p}_{37}$	Segmento de Bézier

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.4 – Definição das superfícies presentes no corpo central.

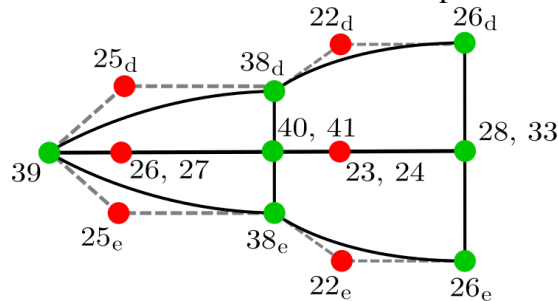
Id.	Id. das curvas
25	[49, 52, -61, -51]
26	[14, 53, -62, -52]
27	[13, 59, -63, -58]
28	[50, 55, -64, -54]
29	[-49, 56, 65, -57]
30	[-14, 57, 66, -58]
31	[-13, 58, 67, -59]
32	[-50, 59, 68, -60]

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.3 Cabeça

Devido à dificuldade de gerar a geometria da cabeça a partir de uma superfície de revolução no software Gmsh, foi decidido dividir a superfície em oito superfícies menores, definidas a partir dos pontos de controle mostrados na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Pontos de controle utilizados na implementação da cabeça.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os novos pontos de controle são calculados de maneira análoga aos definidos anteriormente, porém, partindo dos demais vértices na base da cabeça. Assim, como foi feito para a asa e corpo central, as curvas e superfícies na cabeça estão definidas, respectivamente, nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5 – Definição das curvas presentes na cabeça.

Id.	Início	Fim	Tipo
69	$\vec{p}_{26}$	$\vec{p}_{36}$	Bézier
70	$\vec{p}_{36}$	$\vec{p}_{39}$	Bézier
71	$\vec{p}_{28}$	$\vec{p}_{37}$	Bézier
72	$\vec{p}_{37}$	$\vec{p}_{39}$	Bézier
73	$\vec{p}_{32}$	$\vec{p}_{38}$	Bézier
74	$\vec{p}_{38}$	$\vec{p}_{39}$	Bézier
75	$\vec{p}_{36}$	$\vec{p}_{37}$	Arco de circunferência
76	$\vec{p}_{36}$	$\vec{p}_{38}$	Arco de circunferência

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.6 – Definição das superfícies presentes na cabeça.

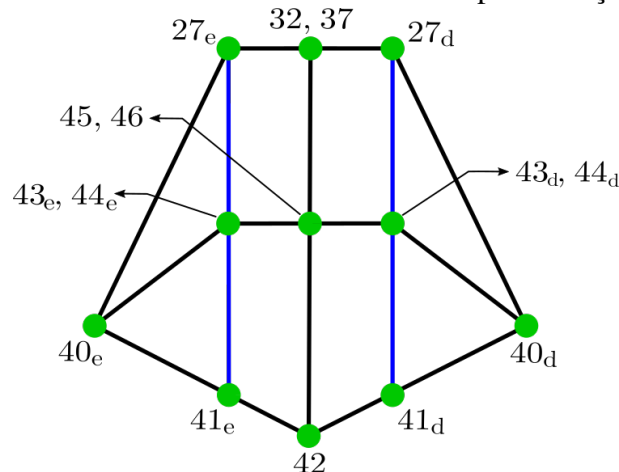
Id.	Id. das curvas
33	[51, 71, -75, -69]
34	[72, -70, 75]
35	[69, 76, -73, -56]
36	[70, -74, -76]

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.4 Cauda

A cauda, como foi feito na asa, foi dividida em pequenas superfícies de forma que fosse possível definir o refinamento de malha de maneira diferente na direção do bordo de ataque e do bordo de fuga. As novas conexões entre os pontos de controle, que dividem o extradorso e intradorso da cauda, são definidas como retas.

Figura 4.5 – Pontos de controle utilizados na implementação da cauda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, como foi para as demais regiões do corpo, as curvas e superfícies na cauda estão definidas, respectivamente, nas Tabelas 4.7 e 4.8.

Tabela 4.7 – Definição das curvas presentes na cauda.

Id.	Início	Fim	Tipo
77	$\vec{p}_{27}$	$\vec{p}_{40}$	Segmento de reta
78	$\vec{p}_{40}$	$\vec{p}_{41}$	Segmento de reta
79	$\vec{p}_{41}$	$\vec{p}_{42}$	Segmento de reta
80	$\vec{p}_{27}$	$\vec{p}_{43}$	Segmento de perfil
81	$\vec{p}_{43}$	$\vec{p}_{41}$	Segmento de perfil
82	$\vec{p}_{32}$	$\vec{p}_{45}$	Segmento de reta
83	$\vec{p}_{45}$	$\vec{p}_{42}$	Segmento de reta
84	$\vec{p}_{40}$	$\vec{p}_{43}$	Segmento de reta
85	$\vec{p}_{43}$	$\vec{p}_{45}$	Segmento de reta
86	$\vec{p}_{27}$	$\vec{p}_{44}$	Segmento de perfil
87	$\vec{p}_{44}$	$\vec{p}_{41}$	Segmento de perfil
88	$\vec{p}_{37}$	$\vec{p}_{56}$	Segmento de reta
89	$\vec{p}_{56}$	$\vec{p}_{42}$	Segmento de reta
90	$\vec{p}_{40}$	$\vec{p}_{44}$	Segmento de reta
91	$\vec{p}_{44}$	$\vec{p}_{46}$	Segmento de reta

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.8 – Definição das superfícies presentes na cauda.

Id.	Id. das curvas
37	[77, 84, -80]
38	[78, -81, -84]
39	[79, -83, -85, 81]
40	[80, 85, -82, -55]
41	[-77, 86, -90]
42	[-78, 90, 87]
43	[-79, -87, 91, 89]
44	[-85, -86, 60, 88]

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.5 Malha superficial

É criada uma malha estrutura utilizando o algoritmo de geração de malha transfinita do software Gmsh, no qual os elementos triangulares são recombinaados no final do processo para gerar elementos quadrangulares (GEUZAINÉ; REMACLE, 2020). Somente nas superfícies criadas a partir de três curvas existem elementos triangulares, como na ponta das asas, cauda e cabeça.

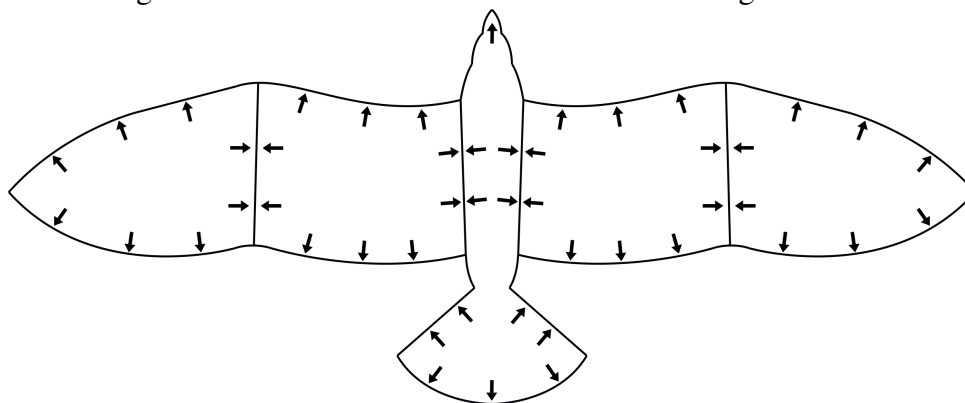
O agrupamento dos elementos triangulares reduz o número de painéis próximo da metade, já que alguns elementos são recombinaados. Isso diminui consideravelmente o tempo de processamento do modelo aerodinâmico, já que o tamanho da matriz utilizada para representar o sistema linear é igual o número de elementos na superfície elevado ao quadrado.

No entanto, a utilização de elementos quadrangulares cria o problema de que os vértices de cada painel gerado não são, necessariamente, coplanares, acrescentando mais uma fonte de erro que precisa ser analisado durante o teste de convergência de malha.

O refinamento de malha é definido utilizando uma progressão geométrica dos vértices

em cada uma das curvas, de forma que a malha seja refinada nos sentidos mostrados na Figura 4.6. As regiões com menor elemento de malha foram escolhidas onde há maiores gradientes de velocidade e pressão, no bordo de fuga para ser possível capturar a condição de Kutta e nas regiões de conexão entre diferentes partes do corpo.

Figura 4.6 – Sentido de refinamento de malha na geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Modelo Aerodinâmico

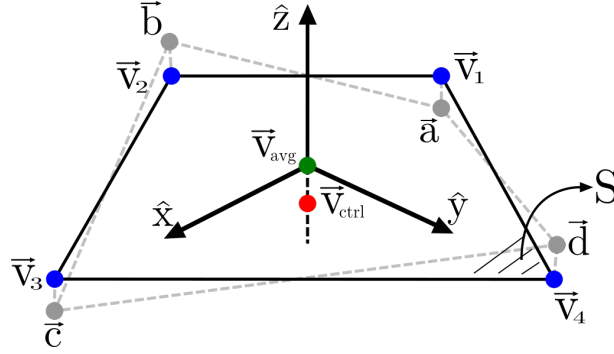
A implementação do método dos painéis foi realizada no pacote pypm3D. O objetivo principal da criação desse pacote foi simplificar a aplicação do modelo em diversas situações, não se limitando somente ao escopo deste trabalho. Para isso, o pacote foi dividido em três módulos que serão apresentados a seguir. O primeiro é responsável pelo processamento dos dados da malha superficial. O segundo é responsável pela solução do modelo aerodinâmico a partir dos dados do escoamento livre, da esteira de vórtices e da malha. Por fim, o terceiro processa os dados provenientes da solução, calculando os coeficientes aerodinâmicos e gerando os arquivos de visualização.

4.2.1 Processamento da Malha

O processamento de malha tem como objetivo calcular, em cada um dos elementos de malha, os parâmetros mostrados na Figura 4.7. A primeira etapa para se calcular os parâmetros é projetar todos os vértices do elemento, pontos cinzas, em um mesmo plano, pontos azuis, de forma a definir um painel da malha. Isso adiciona uma fonte de erro na solução, já que os novos elementos de malha não estão, necessariamente, conectados.

O vetor normal e o ponto médio são calculados pelas Equações 4.5 e 4.6, dependendo do número de lados do painel. Como os vértices obtidos na geração da malha mantém a orientação das curvas originais que formam a superfície, o vetor normal $\hat{z}$, calculado como mostrado na Equação 4.5, mantém a orientação apontando para fora da geometria.

Figura 4.7 – Definição dos parâmetros de um painel da malha superficial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\hat{z} = \begin{cases} \frac{(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{a})}{\|(\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{a})\|}, & \text{se o painel possuir 4 lados} \\ \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})}{\|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\|}, & \text{se o painel possuir 3 lados} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\vec{v}_{avg} = \begin{cases} \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}, & \text{se o painel possuir 4 lados} \\ \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, & \text{se o painel possuir 3 lados} \end{cases} \quad (4.6)$$

Assim, o ponto de controle, no qual a condição de contorno de Dirichlet é aplicada, é calculada pela Equação 4.7. O sinal negativo do produto $\epsilon \hat{z}$ indica que o ponto está no interior da geometria. Caso fosse utilizado a condição de contorno de Neumann, o ponto deveria ser posicionado na parte externa. O parâmetro ϵ assume o valor de 10^{-6} .

$$\vec{v}_{ctrl} = \vec{v}_{avg} - \epsilon \hat{z} \quad (4.7)$$

Os vértices, por sua vez, calculados pelas Equações 4.8 a 4.11, são obtidos projetando os pontos da malha no plano definido pelo vetor normal $\hat{z}$ e ponto médio $\vec{v}_{avg}$.

$$\vec{v}_1 = \vec{a} - ((\vec{a} - \vec{v}_{avg}) \cdot \hat{z}) \hat{z} \quad (4.8)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{b} - ((\vec{b} - \vec{v}_{avg}) \cdot \hat{z}) \hat{z} \quad (4.9)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{c} - ((\vec{c} - \vec{v}_{avg}) \cdot \hat{z}) \hat{z} \quad (4.10)$$

$$\vec{v}_4 = \vec{d} - ((\vec{d} - \vec{v}_{avg}) \cdot \hat{z}) \hat{z} \quad (4.11)$$

Por fim, os vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$ do sistema local são calculados pelas Equações 4.12 a 4.13. É importante ressaltar que a orientação dos vetores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ não interfere no resultado do

modelo aerodinâmico.

$$\hat{x} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_{avg}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_{avg}\|} \quad (4.12)$$

$$\hat{y} = \hat{z} \times \hat{x} \quad (4.13)$$

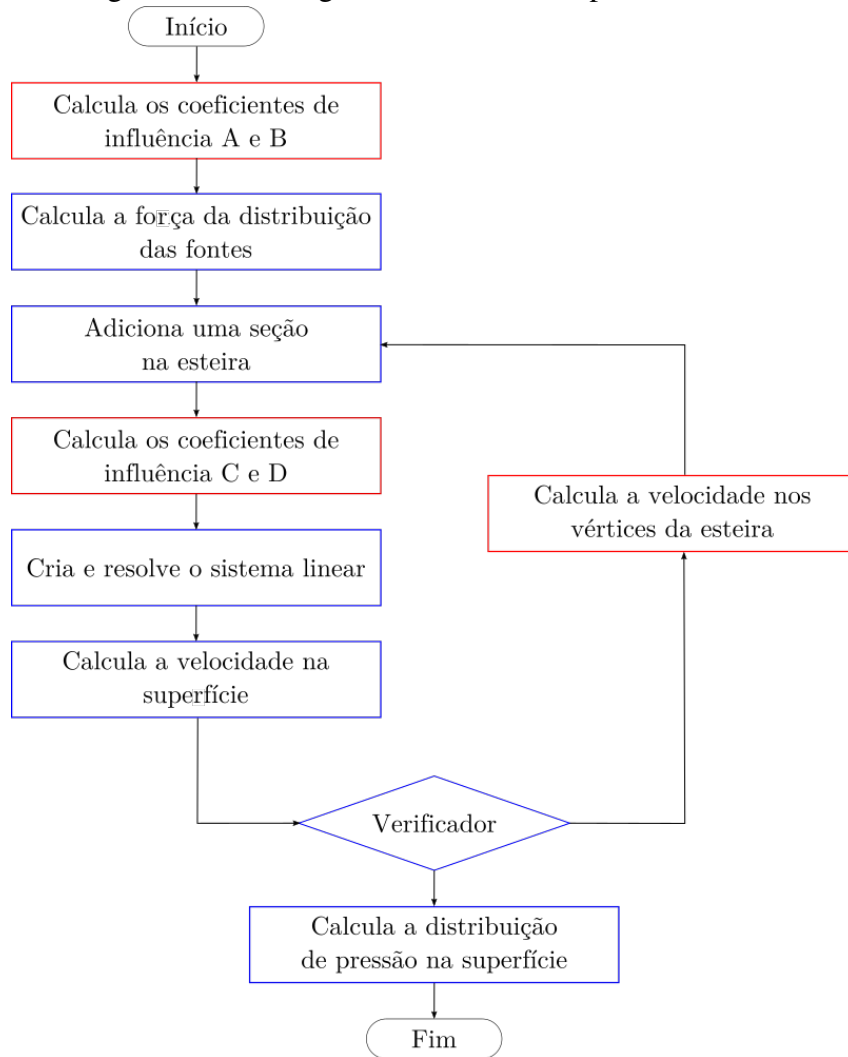
4.2.2 Solução do Modelo Aerodinâmico

A solução do modelo aerodinâmico é feito implementando o método dos painéis descrito na Revisão Bibliográfica, a partir do fluxograma mostrado na Figura 4.8. Durante a implementação inicial, foi observado que o tempo necessário para calcular todas as seções da esteira tornava inviável a utilização do método para a aplicação desejada, que é analisar diferentes geometrias de aves. Assim, verificou-se que os cálculos dos coeficientes de influência e da velocidade induzida na esteira consumiam a maior parte do tempo de processamento e, portanto, foram escritos na linguagem de programação C e utilizados como bibliotecas dentro do código principal (RITCHIE; KERNIGHAN, 1988). Essas etapas correspondem aos retângulos em vermelhos no fluxograma. Essa mudança resultou em uma redução no tempo de processamento de cerca de 27 vezes, de acordo com os testes realizados.

Os coeficientes de influência são salvos em matrizes, referentes aos parâmetros a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} na Equação 2.18. A matriz **A** e **B** armazenam os coeficientes de influência referentes à superfície e, por isso, são constantes durante a análise. A matriz **A** armazena os coeficientes calculados pela Equação 2.20, referente à distribuição de fontes. Já a matriz **B** armazena os coeficientes calculados pela Equação 2.21, referente à distribuição de dipolos. As matrizes **C** e **D**, por sua vez, são referentes aos coeficientes calculados a partir da influência da esteira de vórtices e, por isso, precisam ser calculados em toda interação. A matriz **C** armazena a influência dos painéis da esteira conectados ao bordo de fuga, cujos dipolos são variáveis do sistema linear. Já a matriz **D** armazena a influência do restante nos pontos de controle.

A inserção de novos painéis na esteira, em cada interação, é feito em duas etapas. Primeiramente, é calculado a velocidade em cada um dos vértices da esteira, considerando a velocidade induzida pelos painéis e do escoamento livre. Posteriormente, a velocidade é utilizada para atualizar a posição dos vértices da esteira utilizando o método de integração de Euler. É importante ressaltar que na superfície a velocidade é calculada no ponto de controle em cada um dos painéis. Portanto, para se calcular a velocidade nos vértices do bordo de fuga, que também pertencem à esteira, é feito uma média aritmética ponderada da velocidade dos painéis que contém cada um dos vértices, sendo que os pesos utilizados nessa média são os ângulos formados pelas arestas dos painéis que se encontram no vértice em questão.

Figura 4.8 – Fluxograma do módulo de processamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.3 Processamento da Solução

O processamento da solução contém a implementação para o cálculo dos coeficientes de sustentação, arrasto induzido e momento de arfagem, além de gerar arquivos de visualização da malha superficial que mostram a distribuição de velocidade, coeficiente de pressão, fontes e dipolos na superfície.

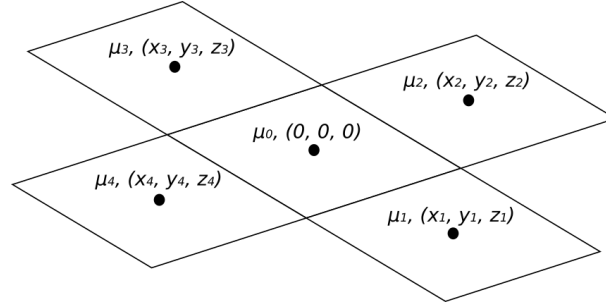
Uma das dificuldades da utilização da condição de contorno de Dirichlet é o cálculo do gradiente de μ na superfície. Neste trabalho, o gradiente de μ em um determinado painel é calculado a partir da diferença entre os pontos de controle e os dipolos com os painéis vizinhos, como mostrado na Equação 4.14. A diferença entre os pontos de controle $\Delta \vec{v}$ é escrito no sistema local, referente ao painel no qual se deseja calcular o gradiente.

$$\Delta \vec{v} \cdot \nabla \mu \approx \Delta \mu \quad (4.14)$$

Assim, ao aplicar a Equação 4.14 nos painéis mostrados na Figura 4.9, de forma a calcular o gradiente no painel central com subscrito 0, é obtido o sistema sobredeterminado mostrado na

Equação 4.15, cuja solução aproximada é obtida utilizando o método dos mínimos quadrados.

Figura 4.9 – Fluxograma do módulo de processamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_0 \\ \mu_2 - \mu_0 \\ \mu_3 - \mu_0 \\ \mu_4 - \mu_0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Após a obtenção do gradiente dos dipolos no painel, a velocidade pode ser calculada a partir da Equação 2.35, utilizando as Equações 2.36 e 2.37. Assim, com o vetor velocidade calculado, pode-se determinar o coeficiente de pressão no painel usando a Equação 2.9 e, posteriormente, os coeficientes de sustentação e momento de arfagem com as Equações 4.16 e 4.17 respectivamente.

$$C_L = \frac{1}{S_{ref}} \left(\sum_{i=1}^n c_{p_i} S_i \hat{z}_i \right) \cdot \hat{u} \quad (4.16)$$

$$C_m = \frac{1}{S_{ref} c} \left(\sum_{i=1}^n (\vec{v}_{avg} \times \hat{z}) (\hat{z}_i \cdot \hat{u}) c_{p_i} S_i \right) \cdot \hat{y}_0 \quad (4.17)$$

O cálculo do arrasto induzido através da distribuição de pressão na superfície é inviável devido ao refino de malha necessário, principalmente próximo ao bordo de ataque. Portanto, o coeficiente de arrasto induzida é calculada no plano de Trefftz, de acordo com a Equação 4.18 (KATZ; PLOTKIN, 2001; ANDERSON, 2011). Como o modelo de esteira livre cria uma esteira finita, o plano de Trefftz é aproximado como o plano perpendicular ao escoamento livre e localizado no meio da esteira. Além disso, o arrasto induzido é calculado de duas formas: 1) calculando a velocidade induzida perpendicular ao painel w_i a partir da esteira finita, de acordo com o formato calculado pelo método de esteira livre; 2) calculando a velocidade induzida perpendicular ao painel w_i a partir da esteira infinita, na direção do escoamento livre, que passam pelos vértices criados pela interseção entre a esteira real e o plano de Trefftz.

$$C_{D_{ind}} = \frac{1}{2U_\infty^2 S_{ref}} \sum_{i=1}^{n_{te}} \mu_i w_i \Delta l \quad (4.18)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

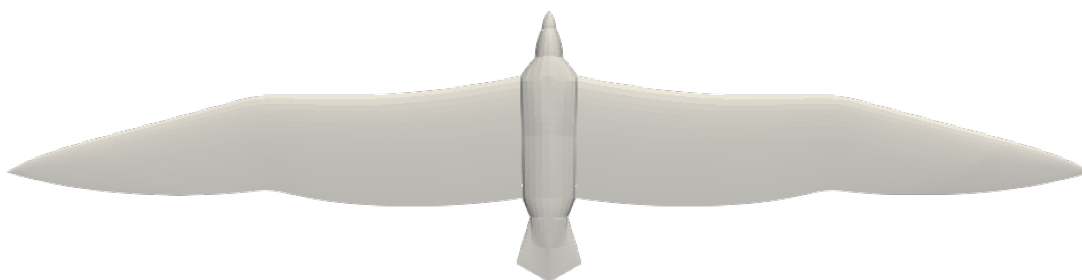
Nessa seção serão apresentados os resultados obtidos por meio do modelo aerodinâmico e geométrico, bem como uma análise comparativa entre duas aves diferentes: uma com asa de planeio larga e outra com asa de planeio longa.

5.1 Modelo Geométrico

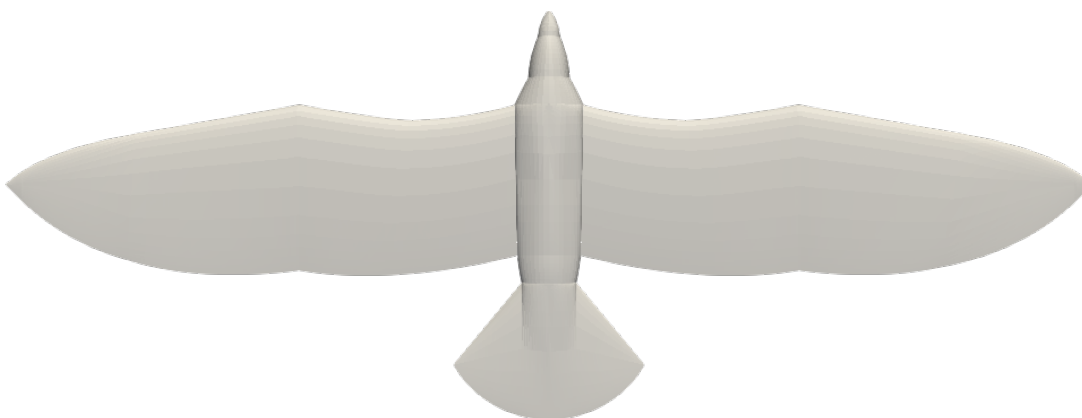
Foram desenvolvidas duas geometrias utilizando o modelo geométrico implementado no pacote *pybird*, conforme apresentado na Figura 5.1. A primeira geometria, apresentada na Figura 5.1a, representa uma ave de planeio longa com cauda em ponta, como um albatroz. Já a segunda geometria, mostrada na Figura 5.1b, representa uma ave com asa de planeio larga, como um urubu, com uma cauda arredondada.

Figura 5.1 – Exemplo de ave com asa de planeio larga e asa de planeio longa geradas a partir do pacote *pybird*.

(a) Asa de planeio longa.



(b) Asa de planeio larga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além das diferenças geométricas visíveis na Figura 5.1, as aves possuem perfis diferentes ao longo da envergadura. No entanto, não foram encontrados trabalhos que mostrem quais tipos de perfis aerodinâmicos podem ser utilizados para representar as seções da asa nesses dois tipos

de aves. Logo, como o objetivo desse trabalho é apresentar a viabilidade de aplicar o modelo geométrico e aerodinâmico, é utilizado os mesmos perfis nas duas aves de forma a evidenciar como o formato do corpo afeta as características aerodinâmicas.

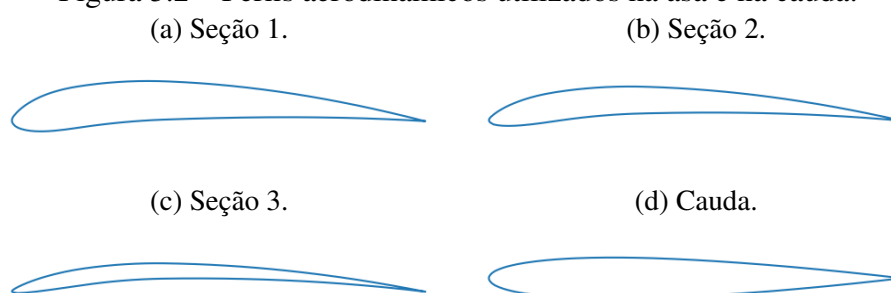
Assim, os perfis nas seções da asa foram definidos de acordo com a Tabela 5.1, que mostra as características dos perfis da asa de um pombo (THIELICKE; STAMHUIS, 2015). A Figura 5.2 mostra os perfis aerodinâmicos obtidos a partir da Tabela 5.1. Para a cauda, foi escolhido um perfil com as mesmas características do perfil na seção 1, porém simétrico, já que a cauda tem como função principal a estabilização do voo e não a geração de sustentação.

Tabela 5.1 – Parâmetros para definir os perfis aerodinâmicos da asa e cauda.

Parâmetros	Seção 1	Seção 2	Seção 3
Max. espessura [%]	10	7	4
Pos. max. espessura [%]	17	17	17
Max. camber [%]	5	5	5
Pos. max. camber [%]	37	37	37

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de THIELICKE; STAMHUIS (2015).

Figura 5.2 – Perfis aerodinâmicos utilizados na asa e na cauda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As aves com asas de planeio largas, como mostrado na Figura 5.1b, possuem espaços entre as penas na ponta da asa. Entretanto, o modelo geométrico utilizado neste trabalho não apresenta essa característica, já que ele foi desenvolvido para ser utilizado em conjunto com o método dos painéis implementado, o qual apresenta dois problemas nesse cenário. Primeiramente, a velocidade em regiões em que a área transversal ao fluxo de ar diminui, como no espaço entre as penas na ponta da asa, pode ser superestimada devido à não consideração de efeitos viscosos próximos à parede (KATZ; PLOTKIN, 2001). Em segundo lugar, seria necessário adicionar painéis na esteira através do bordo de fuga de cada uma das penas contidas nessa região. A proximidade entre diferentes esteiras pode fazer com que algum vértice se aproxime de um filamento ao ponto que a velocidade também seja superestimada, fazendo com que o formato da esteira não seja realista.

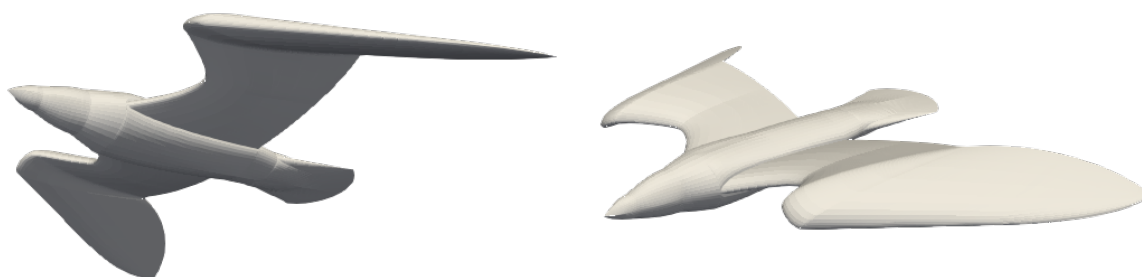
5.1.1 Rotação nas Articulações

O movimento nas articulações é definido a partir de 17 ângulos, sendo 7 ângulos para cada uma das asas e 3 ângulos para a cauda. Nas próximas duas seções esses ângulos serão definidos de forma a analisar 2 casos que demonstram como o modelo geométrico pode ser utilizado para criar situações reais de voo.

5.1.1.1 Mergulho

O movimento de mergulho é observado principalmente em aves que caçam. Esse tipo de voo pode ser comparado com planadores, cujo ângulo de descida é função da razão C_L/C_D . Para se obter o valor desejado de ângulo de descida e velocidade, as aves modificam o formato do corpo, especialmente das asas e cauda, como mostrado na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Ave da Figura 5.1b na posição de mergulho.
(a) Vista inferior. (b) Vista superior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os ângulos das articulações estão detalhados na Tabela 5.2. Vale destacar que os ângulos θ_1 até θ_7 referem-se aos ângulos das articulações da asa e, por não apresentarem subscritos *e* e *d*, são iguais para ambos os lados, esquerdo e direito.

Tabela 5.2 – Ângulos das articulações utilizados para gerar a Figura 5.3.

Parâmetro	Valor
θ_2	10°
θ_3	50°
θ_4	120°
θ_5	30°
θ_6	20°
θ_7	130°

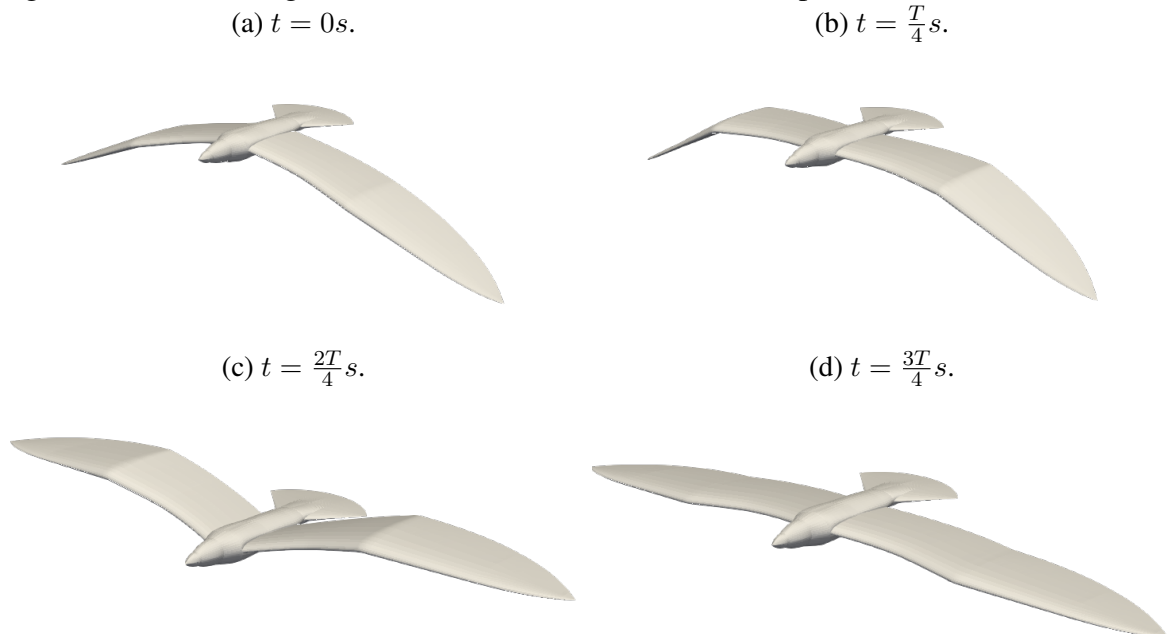
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.1.2 Bater de Asas

A Figura 5.4 ilustra a mesma geometria previamente apresentada na Figura 5.1b, contudo em quatro instantes de tempo distintos durante o movimento de bater de asas. Conforme exibido

na Tabela 5.3, os ângulos das asas empregados nesses momentos são indicados, tendo em vista que, da mesma maneira do exemplo do mergulho, os subscritos que representam o lado direito e esquerdo foram omitidos, pois são idênticos para ambos os lados.

Figura 5.4 – Ave da Figura 5.1b em diferentes instantes de tempo durante uma batida da asa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante destacar que a Figura 5.4d serve apenas como um exemplo de como o modelo pode ser aplicado. Durante a batida de asas, outras regiões do corpo e ângulos da asa também estão envolvidos, incluindo a cauda, que, neste exemplo, foi mantida com todos os ângulos de rotação iguais a zero.

Tabela 5.3 – Ângulos das articulações utilizados para gerar a Figura 5.4, sendo T é o período de uma batida de asa.

Parâmetro	$0s$	$T/4s$	$T/4s$	$T/4s$
θ_2	-5°	-15°	-5°	15°
θ_6	0°	10°	25°	20°

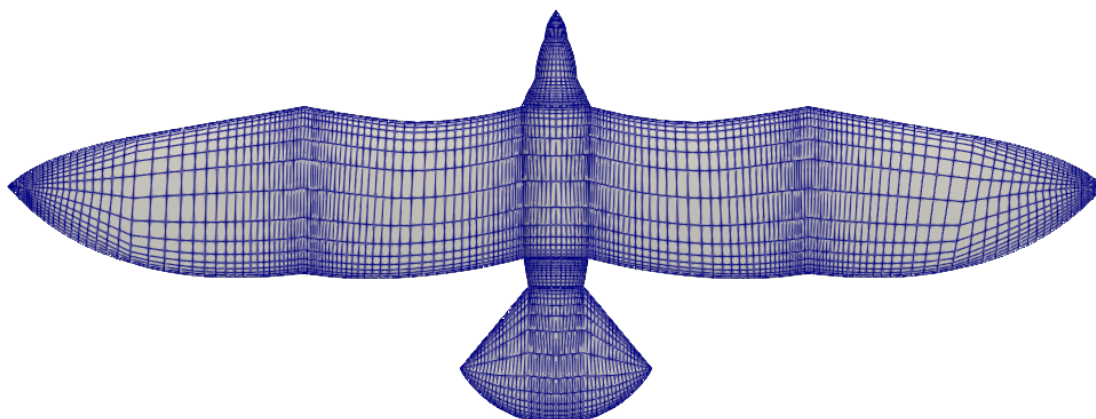
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.2 Malha Superficial

A estrutura de malha superficial presente na Figura 5.5 é composta majoritariamente por elementos quadrangulares. Elementos triangulares são utilizados apenas nas extremidades das asas, bico e cauda, locais onde a superfície apresenta três lados. As áreas de refinamento são também evidenciadas na Figura 5.5 e incluem o bordo de ataque e de fuga da asa e cauda, a raiz e ponta da asa e a seção contendo a articulação do punho.

Um ponto desfavorável no uso de malhas quadrangulares é a impossibilidade de garantir que os vértices de um mesmo elemento sejam coplanares, como pode ser observado na Figura

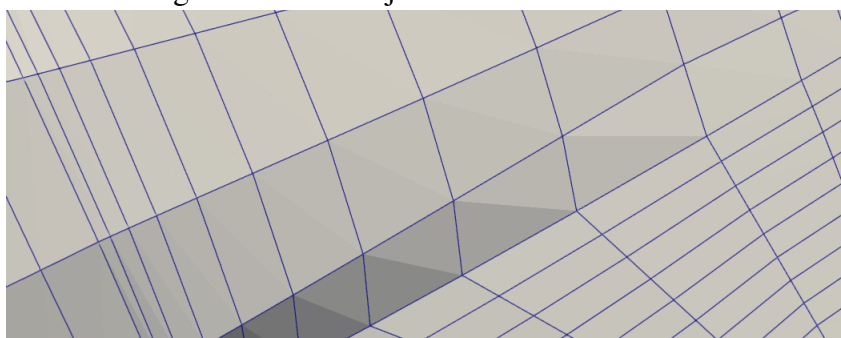
Figura 5.5 – Malha superficial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.6, na qual o tamanho da malha foi escolhido para evidenciar esse fenômeno. O método de visualização empregado gera a superfície por meio de elementos triangulares, permitindo a visualização de elementos quadrangulares cujos vértices não são coplanares, fato que é evidenciado na região de sombra. Durante o teste de convergência da malha, esse problema é minimizado.

Figura 5.6 – Malha na região da cauda cujos vértices de um elemento não são coplanares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

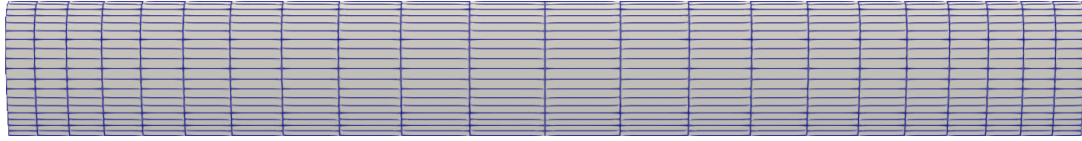
5.2 Modelo Aerodinâmico

O modelo aerodinâmico foi aplicado na análise de uma asa retangular e de um perfil NACA 0012. A asa possui perfil constante NACA 0012, sem torção e com razão de aspecto igual a 8. Esses dois cenários foram escolhidos por ser possível comparar os resultados com dados experimentais (MERABET; NECIB, 2003; HARRIS, 1981).

5.2.1 Análise de Convergência de Malha

A análise de convergência de malha é realizada para a asa retangular. A geração da malha foi executada por meio do software Gmsh, utilizando o algoritmo de geração de malha transfinita, que recombina os elementos triangulares ao final do processo, gerando elementos quadrangulares, conforme apresentado na Figura 5.7 (GEUZAIN; REMACLE, 2020).

Figura 5.7 – Vista superior de uma asa retangular, com razão de aspecto igual a 8 e malha superficial com elementos quadrangulares e refinados no bordo de ataque, bordo de fuga e pontas da asa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a criação de regiões refinadas no bordo de ataque, bordo de fuga e pontas da asa, os elementos foram dispostos nas curvas que definem as superfícies seguindo uma progressão geométrica com coeficiente constante de 1,1. Durante os testes de convergência, foram modificados 4 parâmetros, conforme indicado na Tabela 5.4, com o objetivo de obter valores dos coeficientes de sustentação C_L , arrasto induzido $C_{D_{ind}}$ e momento de arfagem C_m convergidos para o ângulo de ataque de $1,0^\circ$.

Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados durante o teste de convergência de malha.

Parâmetro	Descrição
n_s	Número de elementos na direção da envergadura.
n_c	Número de elementos na direção da corda.
l_w	Comprimento da esteira.
Δt	Incremento de tempo utilizado para gerar a esteira.

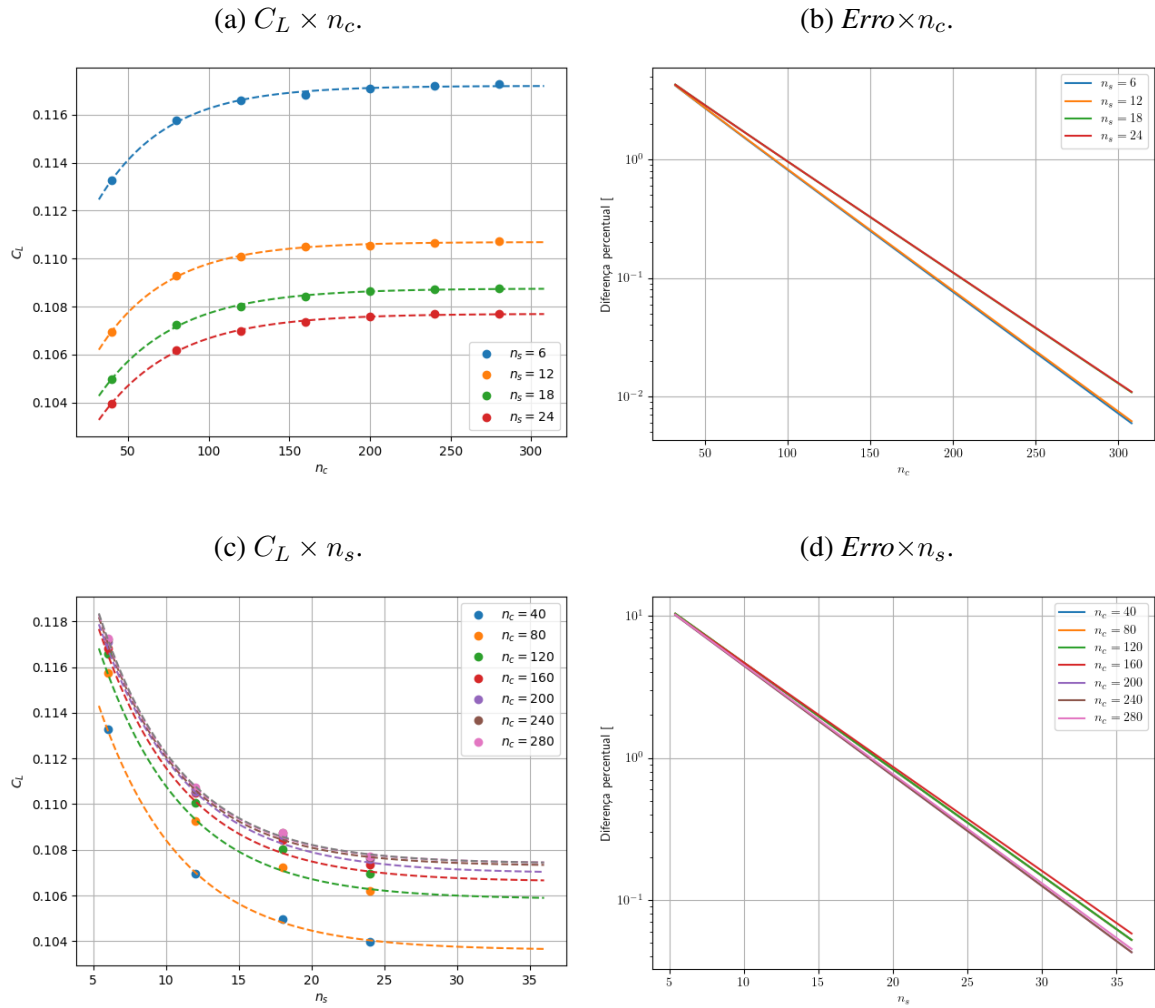
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os parâmetros n_c e n_s foram determinados com base no valor do coeficiente de sustentação C_L , que é obtido por meio da integração da pressão na superfície. A Figura 5.8a apresenta o comportamento do C_L em função de n_c , para diferentes valores de n_s . Os pontos na Figura 5.8a foram interpolados por uma função exponencial, representada pelas linhas tracejadas, com o objetivo de se obter um valor representativo para o estado convergido do coeficiente de sustentação. A Figura 5.8b apresenta a diferença percentual entre as funções obtidas pela interpolação e o valor convergido. Foi definido que o valor convergido corresponde à diferença percentual de 0,1%, que ocorre para todas as curvas quando o valor de n_c atinge o valor de 206.

Os gráficos apresentados nas Figuras 5.8c e 5.8d são semelhantes aos gráficos das Figuras 5.8a e 5.8b, respectivamente. Entretanto, agora é analisado o valor de C_L em função de n_s , para diferentes valores de n_c . Da mesma forma que anteriormente, foram utilizadas funções exponenciais para aproximar os pontos do gráfico na Figura 5.8c, e a curva interpolada foi utilizada para calcular a diferença percentual mostrada na Figura 5.8d. Novamente, definindo que o limite do erro é de 0,1%, obtém-se um resultado convergido para todas as curvas quando n_s é maior que 33.

Os parâmetros l_w e Δt foram determinados com base no $C_{D_{ind}}$, que é calculado na esteira de vórtices no plano de Trefftz. A Figura 5.9a mostra que o $C_{D_{ind}}$ calculado por meio do método da esteira infinita apresentou pouca sensibilidade em relação a l_w e Δt . Exceto pelo primeiro ponto, com l_w igual a 10 cordas, a diferença percentual em relação ao valor médio ficou abaixo

Figura 5.8 – Coeficiente de sustentação e diferença percentual em função do número de elementos na direção da corda (n_c) e do número de elementos na direção da envergadura (n_s).

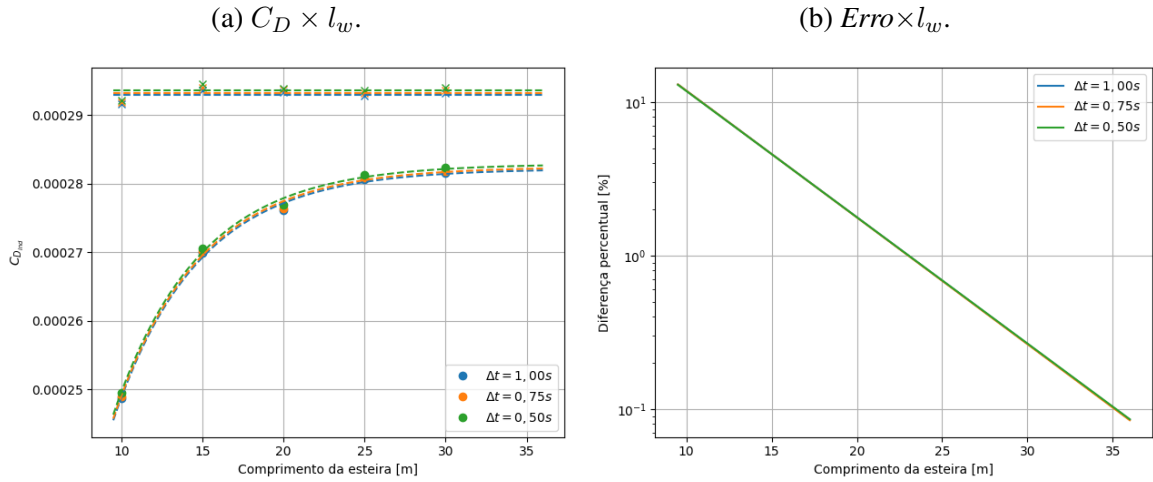


Fonte: Elaborado pelo autor.

de 0,8%. Por outro lado, para o $C_{D_{ind}}$ calculado pela esteira finita, foi observado um movimento de convergência, que foi interpolado utilizando uma função exponencial. A Figura 5.9b mostra a diferença percentual entre a função utilizada na interpolação e o valor encontrado para o estado convergido. Definindo um limite de convergência de 0,1%, foi encontrado um comprimento de esteira correspondente a 35,4 metros ou comprimentos de corda, já que a corda vale 1 metro. A variação de Δt não resultou em uma variação percentual acima de 0,1% em nenhum ponto e, portanto, foi utilizado o valor de 1,0s.

Também foi realizada uma análise da influência do comprimento da esteira no coeficiente de sustentação, como pode ser observado no gráfico apresentado na Figura 5.10. Nesse gráfico é mostrada a relação entre o coeficiente de sustentação C_L e o comprimento da esteira, juntamente com a diferença percentual em relação ao valor de estado estacionário. A Figura 5.10b indica que a diferença percentual é menor que 0,01% para um comprimento de esteira de 36,4m, valor maior do que o encontrado no teste de convergência realizado para o coeficiente de arrasto

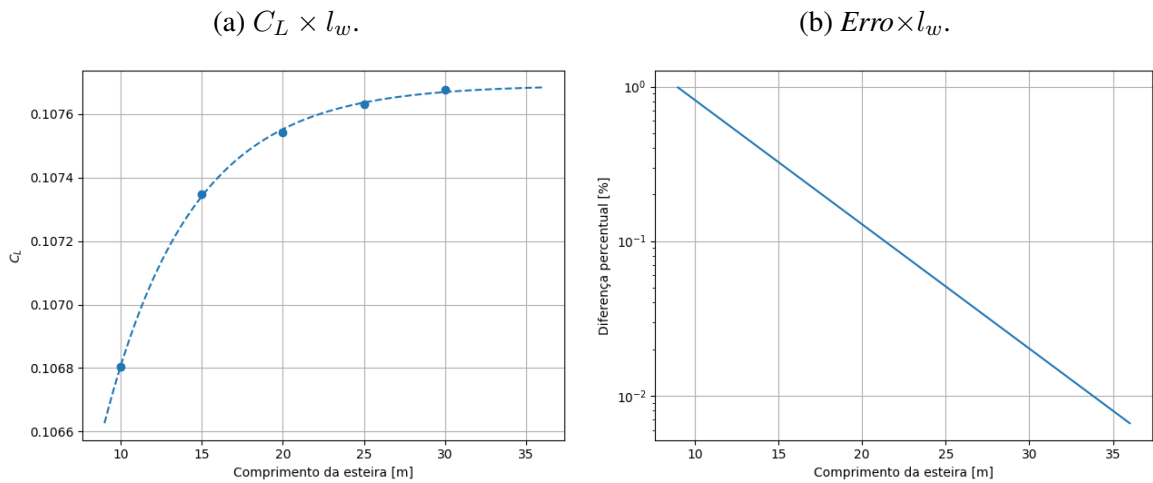
Figura 5.9 – Coeficiente de arrasto induzido e diferença percentual em função do comprimento da esteira (l_w) para diferentes valores de incremento de tempo (Δt).



Fonte: Elaborado pelo autor.

induzido e, por isso, definido como tamanho da esteira.

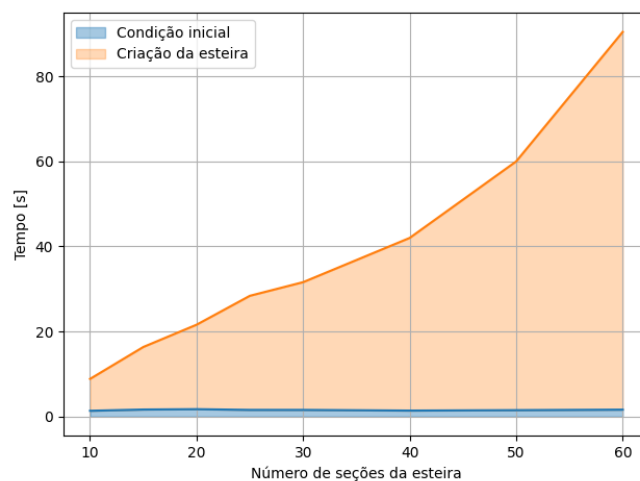
Figura 5.10 – Coeficiente de sustentação e diferença percentual em função do comprimento da esteira (l_w).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, na Figura 5.11, é apresentado o tempo necessário para gerar a condição inicial e criar a esteira de vórtices em função do comprimento da esteira. A condição inicial envolve a resolução do problema com apenas uma seção na esteira, tornando o tempo de processamento semelhante ao de um método com esteira fixa. A Figura 5.11 mostra uma das desvantagens desse método que é o aumento do tempo de processamento para criar a esteira, que varia de 11,2s com 10 seções para 92,1s com 60 seções.

Figura 5.11 – Tempo gasto para gerar a condição inicial e a esteira em função do número de seções da esteira.



Fonte: Elaborado pelo autor.

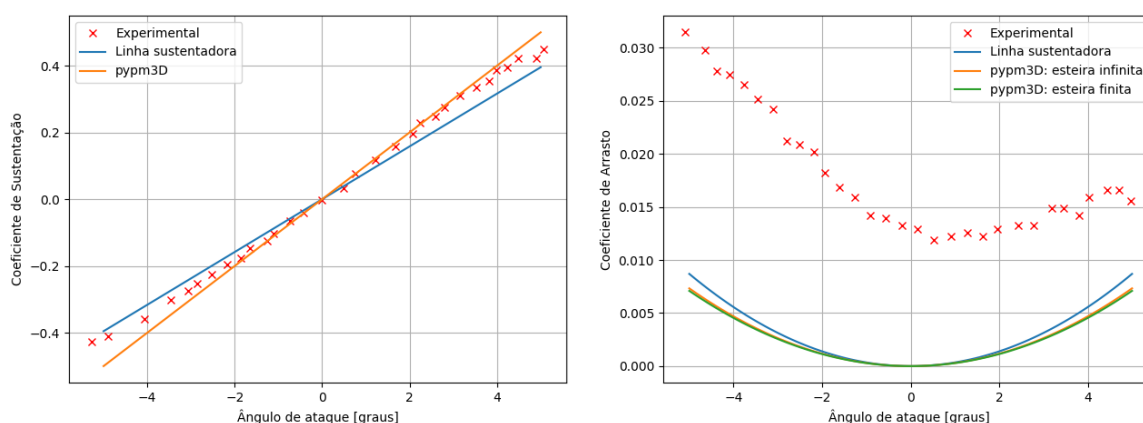
5.2.2 Coeficiente de Sustentação e Arrasto Induzido

Utilizando a malha previamente obtida, os coeficientes de sustentação e arrasto induzido foram calculados em função do ângulo de ataque, como apresentado na Figura 5.12. Os dados experimentais, apresentados nas Figuras 5.12a e 5.12b, foram obtidos a partir de (MERABET; NECIB, 2003). Adicionalmente, são exibidos os resultados obtidos por meio da linha sustentadora de Prandtl, visando a comparação com o arrasto induzido calculado por meio dos métodos da esteira finita e infinita disponíveis no pacote pypm3D.

Figura 5.12 – Coeficiente de sustentação e arrasto em função do ângulo de ataque.

(a) Coeficiente de sustentação.

(b) Coeficiente de arrasto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A inclinação da curva $C_L \times \alpha$, obtida a partir da utilização do pacote pypm3D, apresentou um valor 5,3% superior à inclinação da reta obtida por meio do método de mínimos quadrados dos pontos experimentais exibidos na Figura 5.12a. Em contrapartida, a inclinação da curva

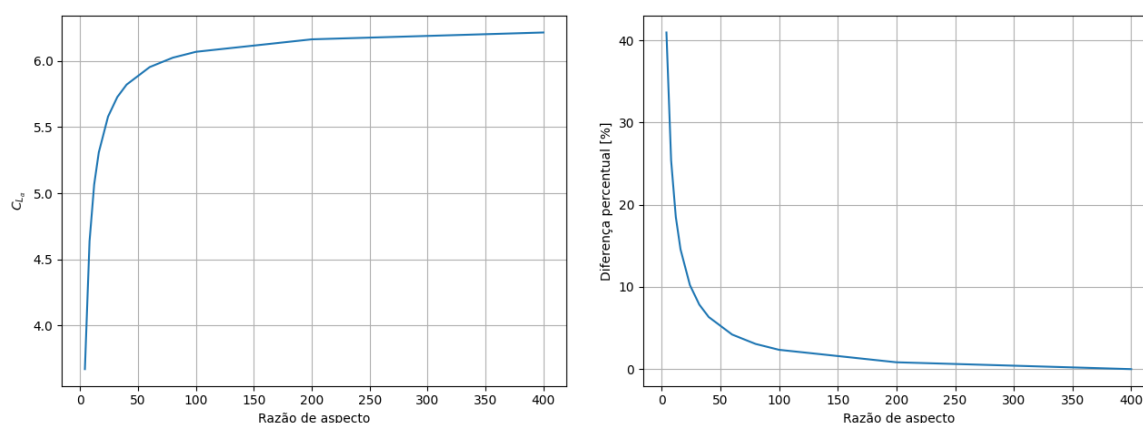
obtida por meio da utilização da linha sustentadora de Prandtl apresentou um valor 13,5% inferior.

No que se refere à Figura 5.12b, é importante ressaltar que não é possível estabelecer uma comparação direta entre os dados experimentais e os modelos invíscidos. Além disso, os pontos experimentais não apresentam a forma esperada similar a uma parábola com simetria em relação ao ângulo de ataque igual a zero. Entretanto, quando se comparam as curvas calculadas pelos modelos invíscidos, observa-se que o arrasto induzido obtido pela linha sustentadora de Prandtl foi superior ao obtido pelo pacote pypm3D. Esse cenário pode indicar que a linha sustentado de Prandtl induz um velocidade na superfície maior que o método dos painéis implementado, resultado em uma rotação maior da força resultante em direção ao vetor velocidade livre.

5.2.3 Distribuição de Pressão

A distribuição de pressão é calculada utilizando a asa obtida do teste de convergência de malha, com perfil aerodinâmico NACA 0012, aumentando a razão de aspecto com o objetivo de se obter resultados equivalentes aos de uma asa infinita na seção central. Analisando a variação da derivada do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque da seção central da asa, a partir da Figura 5.13b, foi definido uma razão de aspecto de 284. Dessa forma, foi obtido uma diferença percentual menor que 0.1%, como mostrado na Figura 5.13b.

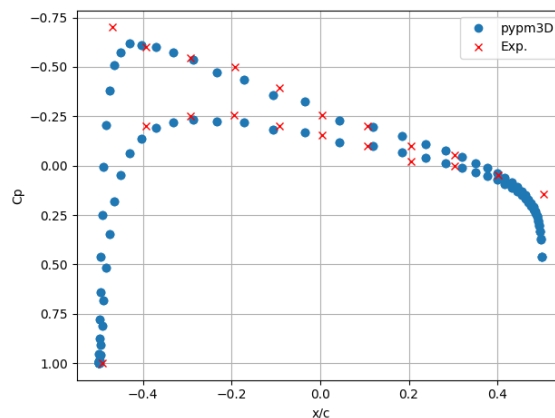
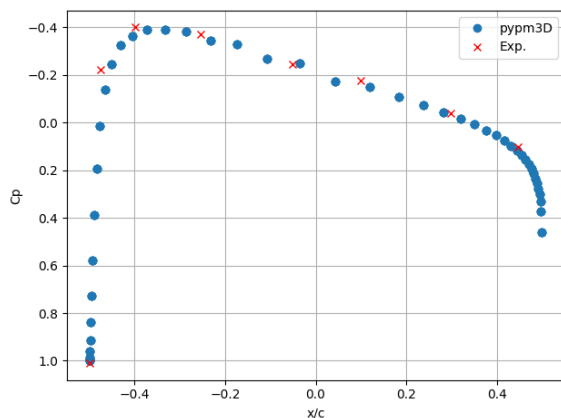
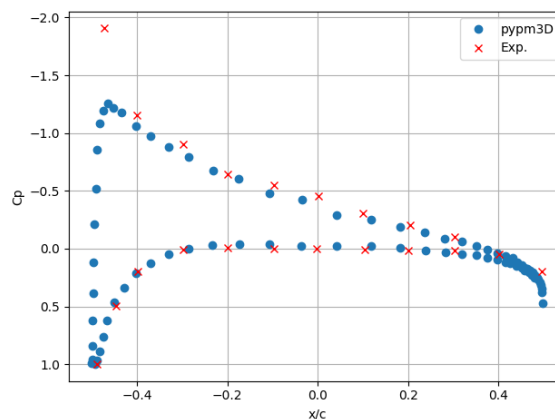
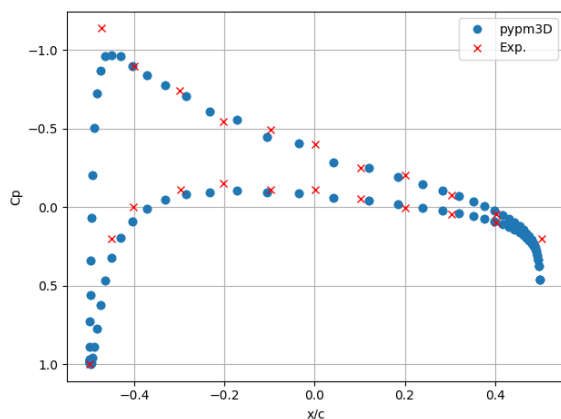
Figura 5.13 – Inclinação da curva $C_L \times \alpha$ e diferença percentual em função da razão de aspecto.
(a) $C_{L\alpha}$. (b) Erro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise comparativa da distribuição de pressão obtida por meio do programa pypm3D com os resultados experimentais do perfil NACA 0012 para quatro ângulos de ataque distintos é apresentada na Figura 5.14 (HARRIS, 1981). Observa-se que, embora as curvas calculadas reproduzam o mesmo comportamento dos dados experimentais, o valor do coeficiente de pressão próximo ao ponto de sucção é subestimado pelo programa pypm3D para ângulos de ataque diferentes de zero. A diferença percentual dos pontos experimentais próximos ao ponto de sucção

Figura 5.14 – Distribuição de pressão em um perfil NACA 0012.

(a) $\alpha = 0,0^\circ$.(b) $\alpha = 1,86^\circ$.(c) $\alpha = 3,86^\circ$.(d) $\alpha = 5,86^\circ$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

foi maior, em módulo, que os calculados, assumindo valores de: 20,8% para α igual a $1,86^\circ$, 30,6% para α igual a $3,86^\circ$ e 46,2% para α igual a $5,86^\circ$.

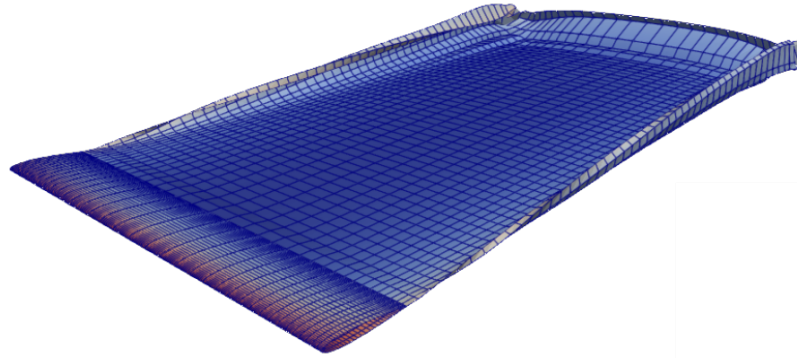
5.2.4 Esteira Livre

O modelo de esteira livre utilizado permite que os vértices da esteira se movam livremente devido à velocidade local com o objetivo de diminuir a força atuante na esteira e, assim, criar uma forma mais realista. Como resultado, as regiões nas bordas da esteira rolaram sobre si mesma, criando o formato característico mostrado na Figura 5.15.

5.3 Análise Aerodinâmica dos Modelos Geométricos

A análise aerodinâmica dos modelos geométricos é feita, inicialmente, observando a interferência entre a cauda e a esteira da asa. Posteriormente, é feita uma análise aerodinâmica das aves apresentadas na Figura 5.1, mostrando as diferenças entre os coeficientes de sustentação, arrasto induzido e momento de arfagem.

Figura 5.15 – Desenvolvimento da esteira livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

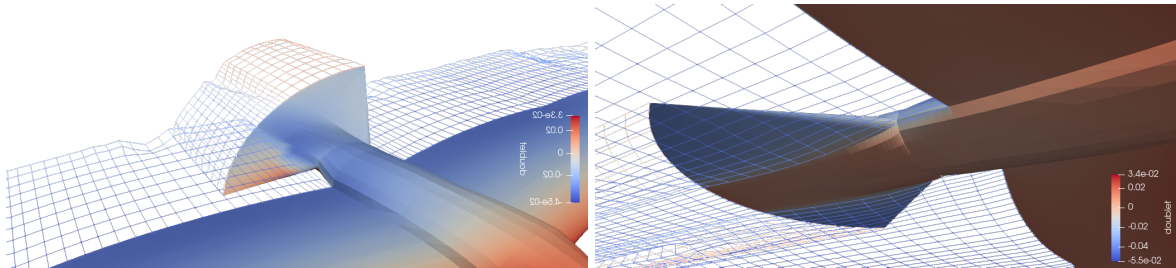
5.3.1 Esteira de Vórtices

O modelo de esteira livre permite que os vértices se movimentam de acordo com a velocidade local. A Figura 5.16 evidencia como a presença da cauda altera a posição dos vértices da esteira que são inseridos no escoamento próximo da raiz da asa em duas situações distintas: uma com a cauda sem rotação e outra com $\theta_8 = 30, 0^\circ$.

Figura 5.16 – Interação entre a esteira de vórtices da asa e cauda com a superfície, que apresenta uma distribuição de dipolos.

(a) Visão superior da cauda com $\theta_8 = 30, 0^\circ$.

(b) Visão inferior da cauda com $\theta_8 = 0, 0^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 5.16a mostra uma visão superior da parte traseira da ave, com a cauda rotacionada um ângulo $\theta_8 = 30, 0^\circ$. Nesse caso, a esteira que é inserida no escoamento é deslocada para a parte superior da cauda do lado direito e para a parte inferior do lado esquerdo. Na Figura 5.16a também é possível visualizar como a presença da esteira altera a distribuição de dipolos na superfície a partir da diferença de coloração. Essa interferência, altera o gradiente de dipolos na região, alterando a velocidade na superfície e, consequentemente, a distribuição de pressão.

Já a Figura 5.16b mostra uma visão inferior da parte traseira da ave, na qual a cauda não apresenta rotação. A esteira, inserida no escoamento através do bordo de fuga da asa, também é deslocada nessa situação, porém com menos intensidade. Além disso, também é possível visualizar que a proximidade entre a esteira e a superfície interfere na força do dipolo na região.

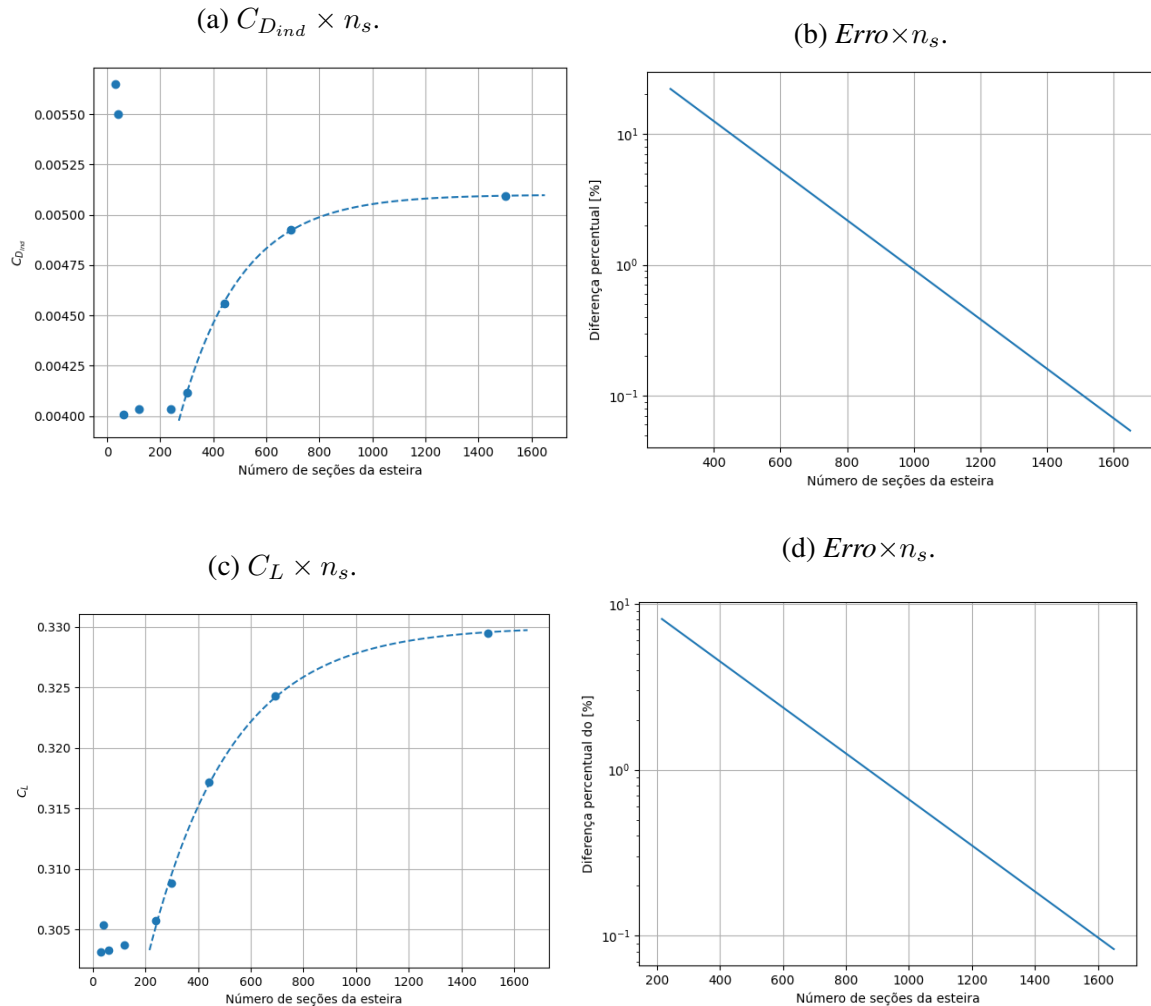
5.3.2 Análise Comparativa

A análise comparativa é feita a partir das geometrias mostradas nas Figuras 5.1 e tem como objetivo comparar as características aerodinâmicas das duas geometrias.

5.3.2.1 Teste de Convergência de Malha

Os parâmetros de malha na superfície foram definidos a partir do teste de convergência de malha para a asa retangular e, na esteira, a partir da análise da Figura 5.17. No final da análise, foi feito um teste de sensibilidade modificando os parâmetros de malha da superfície e esteira, o que não produziu variações nos coeficientes sustentação, arrasto induzido e momento de arfagem maior que 0,1%.

Figura 5.17 – Coeficiente de sustentação e arrasto induzido em função do número de seções na esteira de vórtices.



Fonte: Elaborado pelo autor.

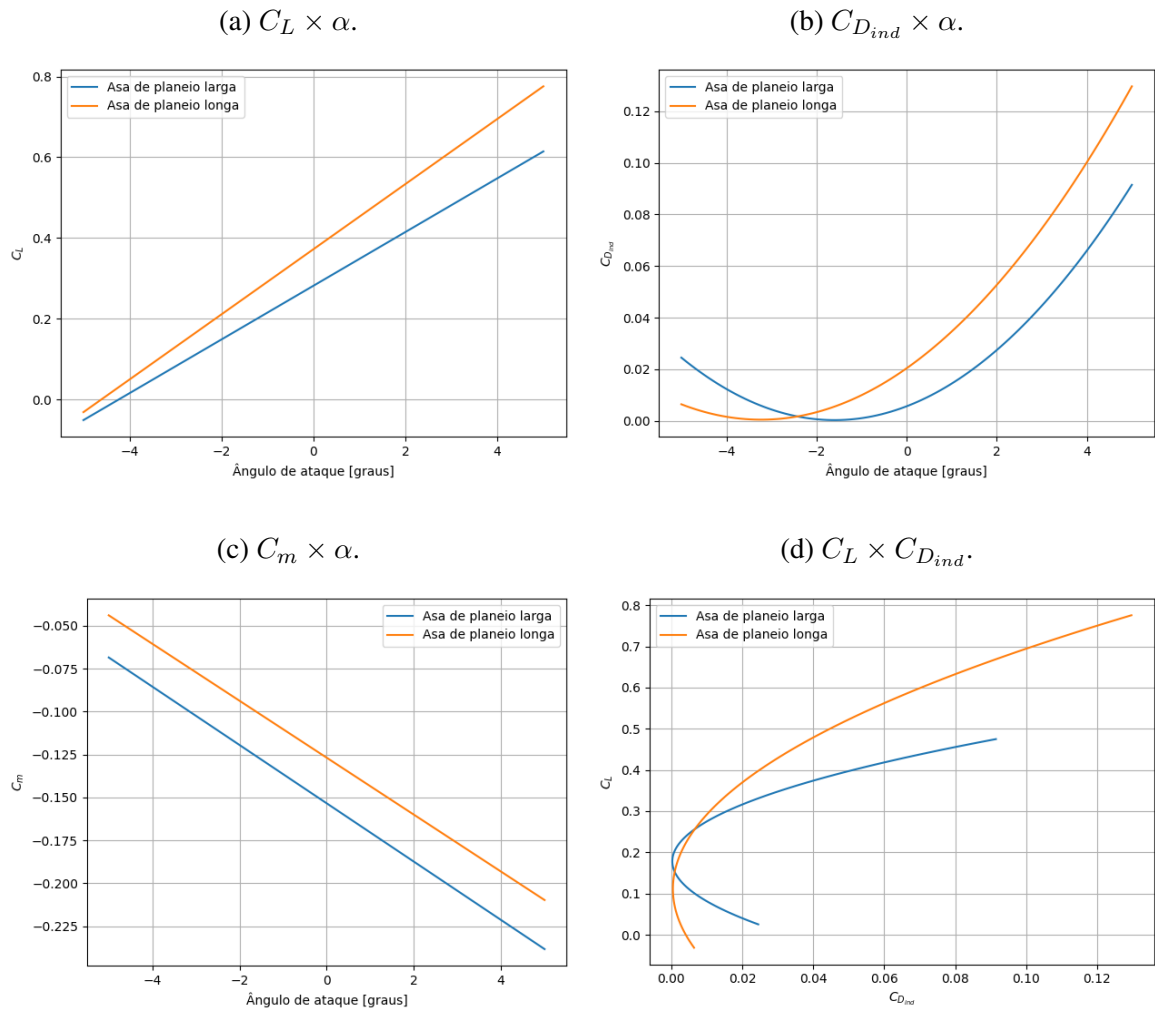
A Figura 5.17 mostra a convergência dos coeficientes de sustentação e arrasto induzido em função do número de seções na esteira, mantendo-se o comprimento total fixo em 37 vezes a corda na raiz da asa, valor obtido a partir da simulação com a asa retangular. As Figuras 5.17a

e 5.17c mostram que a partir de um determinado valor entre 200 e 300 seções na esteira, os coeficientes de sustentação e arrasto induzido passam a convergir à medida que o número de seções aumenta. Utilizando-se uma interpolação exponencial a partir desses pontos, é possível constatar que, a partir de 1586 seções, a diferença percentual passa a ser menor que 0,1%, conforme evidenciado pelas Figuras 5.17b e 5.17d. Diante disso, esse valor é definido para análise.

5.3.2.2 Coeficientes Aerodinâmicos

A Figura 5.18a mostra a curva $C_L \times \alpha$ para os dois tipos de ave, identificadas a partir do tipo de asa, cujas geometrias estão mostradas na Figura 5.1. As duas curvas apresentadas são similares, já que ambas as aves foram definidas com os mesmos perfis aerodinâmicos. Todos os perfis da asa possuem características aerodinâmicas comuns, já que a diferença se encontra na espessura relativa.

Figura 5.18 – Coeficiente de sustentação, arrasto induzido e momento para diferentes valores de ângulo de ataque para as aves mostradas na Figura 5.1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O ângulo de sustentação zero é maior para asa de planeio larga do que para a asa de planeio longa, que é, respectivamente $-4,19^\circ$ e $-4,92^\circ$. Isso ocorre principalmente pela diferença de sustentação produzida pela cauda, que, para a ave com asa de planeio larga, é maior em módulo, porém negativa nessa faixa de ângulo de ataque, o que reduz o C_L total de maneira mais significativa. Outra diferença é a inclinação da curva $C_L \times \alpha$, que vale 3,914 para a ave com asa de planeio larga e 4,625 para a ave com asa de planeio longa. Essa diferença se deve, principalmente, pela velocidade induzida na asa pela esteira ser menor na asa de planeio longa devido à maior razão de aspecto.

O coeficiente de arrasto pode ser analisado a partir dos gráficos nas Figuras 5.18b e 5.18d, que apresentam, respectivamente, a relação entre o coeficiente de arrasto induzido com o ângulo de ataque e o coeficiente de sustentação. O deslocamento do valor mínimo de $C_{D_{ind}}$ em relação ao ponto de C_L igual a zero ocorre pela presença do corpo e cauda. A geometria da cauda, por exemplo, é diferente e, como já foi mostrado, entre as duas aves, a cauda da ave com asa de planeio larga gera um C_L maior em módulo, o que também pode resultar em mais arrasto induzido dependendo da condição de voo.

Além disso, a Figura 5.18d mostra que, quando se varia o coeficiente de sustentação, a variação do coeficiente de arrasto induzido é maior para a ave com asa de planeio larga, que também é condizente com o fato dela possuir uma asa com menor razão de aspecto. É importante ressaltar que uma discussão mais completa sobre a polar de arrasto requer uma análise mais detalhada sobre os perfis aerodinâmicos utilizados por cada espécie de ave, além de analisar diferentes condições de voo.

Na Figura 5.18c, o coeficiente de momento de arfagem apresentado é calculado em relação ao eixo $\hat{y}_0$ do sistema inercial, que está situado no plano de simetria da ave, entre as articulações dos ombros. A avaliação do coeficiente de momento de arfagem desempenha um papel fundamental na análise da estabilidade longitudinal, como na determinação do ângulo de rotação da cauda necessário para alcançar um voo equilibrado.

No entanto, é importante ressaltar que a aplicação dos princípios de estabilidade de aeronaves pode não ser adequado para o contexto das aves, já que a geometria das asas e cauda das aves podem ser facilmente modificadas dependendo da condição de voo. Ademais, a diversidade de espécies de aves se reflete em variações nas características musculares, influenciadas pelo nicho ecológico que cada ave ocupa.

Por exemplo, ao analisar os gráficos dos coeficientes de momento e sustentação, verifica-se que o centro aerodinâmico da ave com asa de planeio longa é mais traseiro em comparação com aquela com asa de planeio larga. Embora a posição do centro de gravidade seja um fator crucial, o centro aerodinâmico mais traseiro, a princípio, pode indicar uma maior margem estática. Enquanto essa análise pode ser realista para as geometrias utilizadas, pois possuem asas adaptadas para planar, ela pode não ser diretamente aplicada a aves que passam a maior parte do voo batendo asas, como é o caso do beija-flor.

6 CONCLUSÃO

6.1 Considerações Finais

Neste trabalho, no campo da biomimética, foi desenvolvido e implementado um modelo geométrico parametrizado com o objetivo de representar diferentes espécies de aves voadoras do grupo carinata e criar malhas superficiais, focando-se especialmente nas asas e caudas.

Além disso, no âmbito da aerodinâmica, foi descrito e implementado um método dos painéis que utiliza condições de contorno de Dirichlet, condição de Kutta linear e esteira livre. O método foi validado analisando o coeficiente de sustentação, arrasto induzido e distribuição do coeficiente de pressão.

Durante o desenvolvimento do trabalho, surgiram algumas questões que não foram adequadamente exploradas. Dentre elas, destaca-se o efeito do espaçamento entre as penas na ponta da asa no caso da ave com asa de planeio larga, bem como a possibilidade de deformações no corpo central, como na região abdominal, serem capazes de alterar de forma perceptível as características aerodinâmicas. Além disso, a análise de estabilidade das aves se mostrou complexa devido capacidade de deformação da superfície e pela diferença das características de voo de cada espécie.

6.2 Conclusões

O modelo geométrico proposto foi capaz de representar as duas espécies de aves apresentadas, uma com asa de planeio longa e outra com asa de planeio larga. O modelo mostrou ser capaz de representar a ave em situações de voo específicas, como durante um mergulho e durante o movimento de bater de asas.

O modelo aerodinâmico demonstrou ser capaz de calcular os coeficientes de sustentação, arrasto induzido e momento de arfagem em corpos aerodinâmicos. No entanto, a distribuição de pressão, na região próxima ao ponto de sucção, apresentou diferenças mais expressivas em relação aos resultados experimentais.

Os resultados obtidos a partir da análise comparativa entre as duas espécies de aves foram condizentes com as expectativas teóricas do campo da aeronáutica.

6.3 Sugestões

- Investigar o espaçamento entre as penas na ponta da asa de algumas espécies de aves e a deformação do corpo central com o objetivo de entender qual a influência nas características aerodinâmicas.
- Investigar outras formas de se calcular o gradiente de dipolos na superfície, com o objetivo de corrigir a discrepância verificada no coeficiente de pressão próximo ao ponto de sucção.

- Aplicar o programa de geração de geometria em conjunto com o método dos painéis para analisar outras condições de voo, com o objetivo de realizar uma análise mais completa sobre como as deformações na superfície afetam a estabilidade e controle.
- Modificar a condição de Kutta utilizando o Teorema de Kelvin e empregar a equação completa do coeficiente de pressão, com a finalidade de tornar possível a aplicação do programa em condições não estacionárias.
- Alterar a condição de Kutta para incorporar um método não linear, de modo a ampliar os cenários de aplicação do modelo aerodinâmico.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of aerodynamics**. 5th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.
- BALO, N. **Bird Anatomy for Artists**. 1. ed. [S.l.]: Blackman Consulting, 2013.
- BOYD, E. A. Principles of ideal-fluid aerodynamics. **The Aeronautical Journal**, Cambridge University Press, v. 71, n. 680, p. 588–588, 1967.
- COLVILLE, T. **ANATOMIA E FISIOLOGIA CLINICA PARA MEDICINA: VETERINARIA**. ELSEVIER (MEDICINA), 2010. ISBN 9788535235951. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LEZDbwAACAAJ>>.
- DYCE, K. **Tratado de Anatomia Veterinária**. 4. ed. [S.l.]: Elsevier Editora, 2010.
- GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. **Gmsh**. 2020. Disponível em: <<http://gmsh.info/>>.
- HARRIS, C. **Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-foot Transonic Pressure Tunnel**. NASA Langley Research Center, 1981. (NASA technical memorandum). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Q0ZEGwAACAAJ>>.
- HESS, J.; COMPANY, D. A. **Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-dimensional Lifting Bodies: Final Technical Report**. Douglas Aircraft, 1973. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8pDCnQEACAAJ>>.
- HESS, J.; SMITH, A. **Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies**. Pergamon Press, 1966. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=QZqOtAEACAAJ>>.
- KARDONG, K. V. **Vertebrados: Anatomia Comparada, Função e Evolução**. 7. ed. Berlin: Guanabara Koogan, 2016.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Low-Speed Aerodynamics**. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- MCLELLAND, J. **A Color Atlas of Avian Anatomy**. [S.l.]: Wolfe Publishing, 1991.
- MERABET, A.; NECIB, B. Characterisation of wings with naca 0012 airfoils. **Rev. Energ. Ren.**, 2003.
- MORENO, E.; MOLLER, A. P. Morphological Aspects of Avian Tail Movements: A Functional Approach in Hirundines. **The Auk**, v. 113, n. 3, p. 647–654, 07 1996. ISSN 1938-4254. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/4088985>>.
- MORTON, B. R. The generation and decay of vorticity. **Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics**, v. 28, p. 277–308, 1984.
- RITCHIE, D. M.; KERNIGHAN, B. W. **The C programming language**. [S.l.]: Bell Laboratories, 1988.
- ROSSUM, G. V.; JR, F. L. D. **Python reference manual**. [S.l.]: Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995.
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-Layer Theory**. 8th. ed. [S.l.]: Springer, 2000.

THIELICKE, W.; STAMHUIS, E. J. The influence of wing morphology on the three-dimensional flow patterns of a flapping wing at bird scale. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 768, p. 240–260, 2015.

THOMAS, A. L. R.; BALMFORD, A. How natural selection shapes bird's tail. **The American Naturalist**, v. 146, p. 848–868, 1995.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method**. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2007.