

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas**

Karla Fernanda dos Santos

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA ESTENDIDA ACOPLADA À TÉCNICA**  
**GLOBAL-LOCAL**

Belo Horizonte

2024

Karla Fernanda dos Santos

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA ESTENDIDA ACOPLADA À TÉCNICA  
GLOBAL-LOCAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros

Belo Horizonte

2024

S237a	<p>Santos, Karla Fernanda dos. Análise isogeométrica estendida acoplada à técnica global-local [recurso eletrônico] / Karla Fernanda dos Santos. – 2024. 1 recurso online (178 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Felício Bruzzi Barros.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Bibliografia: f. 162-178.</p> <p>1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Análise geométrica – Teses. 3. Método dos elementos finitos – Teses. 4. Plataformas digitais – Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624(043)</p>
-------	---



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



## ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 105 DA ALUNA KARLA FERNANDA DOS SANTOS

Às **14:30** horas do dia **23** do mês de **agosto** de **2024**, reuniu-se em ambiente virtual, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **14 de junho de 2024**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Análise Isogeométrica Estendida Acoplada à Técnica Global-local**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa da candidata. Logo após, a Comissão, listada abaixo, se reuniu, sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do resultado final.

**Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG (Orientador)**

**Prof. Dr. Lapo Gori - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Alfredo Gay Neto - USP**

**Prof. Dr. Evandro Parente Junior - UFC**

Após reunião, a Comissão considerou a candidata **APROVADA**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 23 de agosto de 2024.

Observações:

1. A aprovação da candidata na defesa da Tese de Doutorado não significa que a mesma tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Felício Bruzzi Barros, Professor(a)**, em 23/08/2024, às 17:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Lapo Gori, Professor do Magistério Superior**, em 23/08/2024, às 17:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 23/08/2024, às 17:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Alfredo Gay Neto, Usuário Externo**, em 27/08/2024, às 07:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Evandro Parente Junior, Usuário Externo**, em 29/08/2024, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Coordenador(a)**, em 15/10/2024, às 15:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3475177** e o código CRC **2033C04D**.

---

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelos dons da sabedoria e da persistência, indispensáveis para a conclusão de mais uma etapa da minha vida acadêmica.

Aos meus pais e ao meu marido pela paciência e auxílio durante toda a jornada.

Ao Professor Felício Bruzzi Barros, pelo compromisso, sabedoria e dedicação manifestados durante a orientação deste trabalho e, principalmente pelo apoio despendido durante os momentos de dificuldade e que foram fundamentais para a conclusão desse projeto.

Ao Professor Ramon Pereira da Silva, pela pronta colaboração diante das demandas auxiliares à esse trabalho, bem como o apoio e conhecimentos compartilhados nos processos de publicação.

Aos professores do PROPEEs pelos ensinamentos acadêmicos compartilhados em sala de aula e também fora dela.

Aos profissionais do DEES e PROPEEs, pela solicitude e dedicação em suas atividades.

Aos amigos de pós-graduação, pelos companheirismo, união e troca de experiências.

A CAPES pelo apoio financeiro durante a vigência da bolsa de Doutorado.

*“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez.”*

*George Bernard Shaw.*

# Resumo

A Análise Isogeométrica (AIG) vem se mostrando uma metodologia de solução de problemas de interesse da engenharia muito eficiente e eficaz. Quando comparada ao Método dos Elementos Finitos (MEF), a AIG apresenta como vantagens a exata representação da geometria do problema, a possibilidade de utilização das mesmas funções de base para a criação da geometria do modelo e da análise da solução e a criação de malhas refinadas de maneira automatizada para a análise da solução. A Análise Isogeométrica Estendida (AIGE) propõe uma expansão do espaço de solução da AIG incorporando características descontínuas ao mesmo, similar ao que o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido (MEFG/E) faz na metodologia do MEF. A técnica global-local visa construir uma função de enriquecimento local personalizada para o problema analisado, objetivando que esta seja mais coerente com o fenômeno estudado e o menos onerosa possível para a solução. Neste trabalho, foi desenvolvida uma nova abordagem unindo os conceitos da técnica global-local às características da AIGE, denominada aqui de AIGE<sup>GL</sup> (Análise Isogeométrica Estendida com enriquecimento global-local). A AIG pode ser utilizada tanto na escala local quanto global do problema sendo que a vantagem dessa utilização se dá tanto na melhora do condicionamento da matriz de rigidez quanto na precisão e na convergência da solução. A implementação dessa metodologia foi feita na plataforma computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvida no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Diversos modelos foram apresentados para validar a implementação realizada e também atestar a vantagem da utilização da AIGE<sup>GL</sup> no que diz a acurácia da solução e condicionamento da matriz de rigidez com uma economia nos graus de liberdade dos modelos.

**Palavras-Chave:** Análise Isogeométrica (AIG); enriquecimento com partição da unidade; Análise Isogeométrica Estendida (AIGE); estratégia global-local; INSANE.

# Abstract

Isogeometric Analysis (IGA) has been shown to be a very efficient and effective method of solving problems of interest to engineering. When compared to the Finite Element Method (FEM), the IGA presents advantages in the exact representation of the problem geometry, the possibility of using the basis functions for the creation of the model geometry and analysis of the solution and the creation of refined meshes in an automated way to the solution analysis. The eXtended Isogeometric Analysis (XIGA) provides an expansion of the solution space of IGA, incorporating discontinuous resources into it, similar to what the Generalized/Extended Finite Element Method (G/XFEM) makes to the FEM methodology. The global-local technique aims to create a customized local enrichment function for the problem analyzed, making it more coherent with the phenomenon studied and less costly for the solution procedure. In this work, a new approach was developed, combining the global-local concepts with the characteristics of XIGA, named here XIGA<sup>GL</sup> (eXtended Isogeometric Analysis with global-local enrichment). The IGA can be used locally or globally, providing a better-conditioned stiffness matrix and improving the solution's accuracy and convergence rate. The implementation of this methodology was carried out on the computational platform INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) developed in the Department of Structural Engineering (DEES) UFMG. Several models were presented to validate the implementation carried out and also attest to the advantage of using XIGA<sup>GL</sup> in terms of the accuracy of the solution and conditioning of the stiffness matrix with savings in the models' degrees of freedom.

**Keywords:** Isogeometric Analysis (IGA); enrichment with partition of the unit; Extended Isogeometric Analysis (XIGA); global-local strategy; INSANE.

# Lista de Figuras

3.1	Construção da AIG - adaptada (Rauen, 2014). . . . .	47
3.2	Curva B-Spline, $n=5$ e $p=2$ (Barroso, 2015). . . . .	51
3.3	Refinamento Inserção de <i>knots</i> , pontos de controle $\bullet$ - Adaptada (Hughes et al., 2005). . . . .	54
3.4	Refinamento Elevação do grau de aproximação polinomial, pontos de controle $\bullet$ - Adaptada (Hughes et al., 2005). . . . .	55
3.5	Refinamento $k$ (Nguyen, 2011). . . . .	56
3.6	Decomposição de Bézier para o <i>knot vector</i> $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3]$ - Adaptada - (Nguyen, 2011). . . . .	68
3.7	Modos de Abertura de Trinca (Tada et al., 1939) (Adaptada). . . . .	73
3.8	Eixos em duas dimensões associados com a ponta da trinca. . . . .	76
3.9	Estratégia Global Local (Adaptada) (Alves, 2012). . . . .	80
3.10	Domínios Global e Local mais refinado para melhor representação do campo de tensões próximo à ponta da trinca de um problema genérico com os respectivos contornos (Alves, 2012). . . . .	82
3.11	(a) Em verde, nós associados às funções de enriquecimento local obtidas numericamente. (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura. . . . .	87
3.12	(a) Em verde, os pontos de controle enriquecidos pela estratégia global-local na AIGE com aproximação quadrática $p = 2$ . (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura. . . . .	87

3.13	(a) Em verde, os pontos de controle enriquecidos pela estratégia global-local na AIGE com aproximação cúbica $p = 3$ . (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura. . . . .	88
4.1	Diagrama UML do Núcleo Numérico do INSANE (Alves, 2012). . . . .	93
4.2	Diagrama de Montagem de Matriz de Rigidez no INSANE (Adaptada) (Alves, 2012). . . . .	96
4.3	Diagrama de Montagem de Matriz de Rigidez na Classe GFemParametric, usando a técnica Global-Local (Adaptada) (Alves, 2012). . . . .	97
4.4	Diagrama UML da Classe <i>IgaModel</i> . . . . .	99
4.5	Diagrama UML da Classe <i>IgaControlPoint</i> . . . . .	100
4.6	Diagrama UML das classes responsáveis pelo refinamento das malhas IGA. . . . .	100
4.7	Diagrama UML das classes responsáveis pela descrição das funções de base da IGA. . . . .	101
4.8	Diagrama UML da classe <i>EquivalentNodalGeneralValueIga</i> . . . . .	102
4.9	Diagrama UML da classe <i>QuadrilateralIga</i> . . . . .	103
4.10	Diagrama UML da classe <i>XigaModel</i> . . . . .	104
4.11	Diagrama UML da classe <i>XigaElement</i> . . . . .	105
4.12	Diagrama UML da classe <i>NewLefmCrackGrowthByXiga</i> . . . . .	106
4.13	Diagrama UML da classe <i>XigaParametric</i> . . . . .	106
4.14	Diagrama UML da classe <i>EnrichedShapeXiga</i> . . . . .	107
4.15	Diagrama UML das classes que formam o modelo de análise da AIGE. . . . .	107
4.16	Diagrama UML da classe <i>GlobalLocalXigaSimulationManager</i> . . . . .	109
4.17	Diagrama UML da classe <i>GlobalSetuperXiga</i> . . . . .	111
4.18	Diagrama UML da classe <i>LocalSetuperXiga</i> . . . . .	113
5.1	Modelo de Viga Reta. . . . .	116
5.2	Erro na Norma da Energia de Deformação para os modelos apresentados. . . . .	117
5.3	Número de condição escalonado da matriz de rigidez para os modelos apresentados. . . . .	118
5.4	Modelo de Viga Circular. . . . .	119

5.5	Erro na Norma da Energia para análise via Método da Penalidade. . .	120
5.6	Erro na Norma da Energia para análise via Método de Nitsche. . . .	120
5.7	Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez para os modelos apresentados - $p=2$ . . . . .	120
5.8	Número de condição escalonado da Matriz de Rigidez para os modelos apresentados - $p=3$ . . . . .	120
5.9	Modelo de chapa tracionada com pré-trinca: a) O modelo. b) Malha para $p=1$ (AIGE and MEFG/E). c) Malha para $p=2$ (AIGE). d) Malha para $p=3$ (AIGE). Os círculos são os nós ou pontos de controle, dentro do contexto do MEFG/E ou AIGE, respectivamente. A linha vermelha é a trinca, representada apenas via enriquecimento. A cor rosa nos círculos representa que os nós/pontos de controle foram enriquecidos com função de Heaviside nas análises <i>A</i> , <i>B</i> and <i>C</i> . A cor verde nos círculos representa que os nós/pontos de controle foram enriquecidos com as funções OD nas análises <i>B</i> and <i>C</i> . A cor amarela nos círculos representa os nós/pontos de controle adicionais enriquecidos com as funções OD na análise <i>C</i> ., Por fim, a cor azul nos círculos representa os nós/pontos de controle sem enriquecimento. . .	121
5.10	Log Erro na Energia de Deformação para os modelos apresentados. . .	124
5.11	Erro na tensão $\sigma_{yy}$ em um ponto para os modelos apresentados. . . .	124
5.12	Número de condição escalonado para os modelos apresentados. . . . .	125
5.13	Log do erro no $K_I$ para os modelos apresentados. . . . .	125
5.14	Chapa com uma trinca de Canto em Modo Misto. . . . .	126
5.15	(a)Malha global de 105 elementos, sem nós duplicados. Em vermelho, está indicada a posição da trinca na malha global, ainda que esta esteja apenas descrita na malha local. (b) A região amarela representa o subdomínio local. (c) Problema global enriquecido. Os círculos azuis indicam os nós associados com as funções de enriquecimento numericamente obtidas no problema local. . . . .	128

5.16	Malhas locais. a) AIGE com $p = 1$ e para MEFG/E. b) AIGE com $p = 2$ . c) AIGE com $p = 3$ . Os círculos são os nós dentro do contexto do MEFG/E e os pontos de controle da AIGE. A trinca, em vermelho, é representada pelas funções de Heaviside e OD, respectivamente associadas com os nós/pontos de controle de cor amarela e verde. Para MEFG/E $p = 2$ e $p = 3$ a malha (a) é também utilizada e todos os nós são enriquecidos com funções polinomiais. . . . .	130
5.17	Erro na Norma da Energia de Deformação. . . . .	131
5.18	Erro em $K_I$ . . . . .	131
5.19	Erro em $K_{II}$ . . . . .	132
5.20	Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez do problema global enriquecido. . . . .	132
5.21	Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez do Problema Local. . . . .	134
5.22	Malhas globais utilizadas nas análises AIGE e MEFG/E para aproximação polinomial $p = 2$ . (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos. . . . .	136
5.23	Domínio Local demarcado no domínio global. (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos. .	137
5.24	Representação do conjuntos de pontos de controle associados com o esquema de enriquecimento geométrico do procedimento global-local para a AIGE. Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo.(a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos.	138
5.25	Representação do conjuntos de nós associados com o esquema de enriquecimento geométrico do procedimento global-local para a MEFG/E. Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos. . . . .	139
5.26	Representação da Malha Local. Os círculos amarelos são os nós enriquecidos com função de Heaviside e os círculos verdes os enriquecidos com funções OD. (a) Malha de 270 elementos. (b) Malha de 2430 elementos. (c) Malha de 21870 elementos. . . . .	140
5.27	Erro na Norma da Energia de Deformação. . . . .	141

5.28	Erro em $K_I$ . . . . .	141
5.29	Erro em $K_{II}$ . . . . .	142
5.30	Número de condição escalonado para o problema global enriquecido. .	142
5.31	Passo de propagação 1. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	144
5.32	Passo de propagação 4. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	144
5.33	Passo de propagação 7. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	145
5.34	Número de condição escalonado ao longo dos passos de propagação de trinca. . . . .	145
5.35	Chapa com uma trinca inclinada no centro. . . . .	146
5.36	Malhas globais utilizadas nas análises via AIGE e MEFG/E para aproximação polinomial $p = 2$ . (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos. . . . .	148
5.37	Subdomínio Local. (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos. . . . .	149
5.38	Pontos de controle enriquecidos numericamente com a solução local na terceira etapa do processo global-local (AIGE). Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos. . . . .	150
5.39	Nós enriquecidos numericamente com a solução local na terceira etapa do processo global-local (MEFG/E). (a) Malha de 121 elementos. Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos. . . . .	151
5.40	Erro em $K_I$ . . . . .	151
5.41	Erro em $K_{II}$ . . . . .	152
5.42	Número de Condição Escalonado do problema global enriquecido. . .	152
5.43	Passo de propagação 1. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	153
5.44	Passo de propagação 3. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	154
5.45	Passo de propagação 10. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ . . .	154
5.46	Número de condição escalonado ao longo dos passos de propagação de trinca. . . . .	155

# Lista de Tabelas

5.1	Posição da ponta da trinca ao longo dos passos de propagação para as metodologias apresentadas. . . . .	144
5.2	Posição da ponta da trinca ao longo dos passos de propagação para as metodologias apresentadas. . . . .	154

# Lista de Abreviaturas e Símbolos

Na sequência, a organização da lista de símbolos é realizada na ordem em que os símbolos aparecem inicialmente.

## Capítulo 3

### Fundamentação Teórica

$\Xi$	<i>knot vector</i> na direção x
$\xi_i$	<i>knot</i> dentro do <i>knot vector</i>
$n$	número de funções de base e número de pontos de controle
$p$	grau de aproximação polinomial
$k$	ordem
$N_{i,p}(\xi)$	B-Spline na direção x
$\mathbb{C}(\xi)$	Curva criada por B-Spline ou NURBS
$\mathbf{P}_i$	pontos de controle
$\mathcal{H}$	<i>knot vector</i> na direção y
$M_{i,p}(\xi)$	B-Spline na direção y
$\mathbb{S}$	superfície criada por B-Splines ou por NURBS
$\bar{\mathbf{P}}_i$	novos pontos de controle após refinamento
$\alpha_i$	coeficiente calculado para inserção de <i>knots</i>
$\beta_i$	coeficiente calculado para elevação de grau de aproximação polinomial
$R_i^p(\xi)$	funções do tipo NURBS
$w_i$	peso associado a um pontos de controle
$W(\xi)$	função de pesos
$\mathbf{Q}_i$	pontos de controle mapeados em 3D
$\tilde{x}$	aproximação da geometria na direção x
$\tilde{y}$	aproximação da geometria na direção y

$\tilde{u}$	aproximação dos deslocamentos na direção do grau de liberdade $x$
$\tilde{v}$	aproximação dos deslocamentos na direção do grau de liberdade $y$
$\mathbf{d}$	vetor de aproximação dos deslocamentos
$\mathbf{N}$	a matriz das funções de aproximação dos deslocamentos
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor de deformações
$\mathbf{B}$	a matriz deformação-deslocamentos
$\mathbf{J}$	Jacobiano da transformação
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor das componentes de tensão no plano
$\mathbf{u}$	vetor do campo de deslocamentos
$\mathbf{v}$	vetor do campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível
$\mathbf{b}$	vetor das forças de corpo
$\bar{\mathbf{t}}$	vetor das forças de superfície
$\partial\Omega_n$	contorno de Neumann
$\hat{\mathbf{n}}$	versor normal à superfície para $\partial\Omega_n$
$\partial\Omega_d$	contorno de Dirichlet
$\mathbf{u}_d$	vetor do campo de deslocamentos de Dirichlet
$\mathbf{D}$	matriz constitutiva elástica
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{f}$	vetor de forças
$\eta$	parâmetro de penalidade
$B_{i,p}(\xi)$	Polinômio de Bernstein
$\mathbf{C}$	matriz de extração de Bézier
$\mathbf{P}_b$	pontos de controle de Bézier
$\mathbf{w}$	vetor de peso dos pontos de controle de um elemento
$\mathbf{w}_b$	vetor de peso dos pontos de controle de um elemento de Bézier
$\mathbf{W}$	matriz diagonal que contém os pesos dos pontos de controle de um elemento
$\mathbf{W}_b$	matriz diagonal que contém os pesos dos pontos de controle de um elemento de Bézier
$W^b(\xi)$	função de pesos de Bézier
$L_{ji}(\mathbf{x})$	função de enriquecimento local
$\phi_{ji}(\mathbf{x})$	conjunto de funções enriquecidas
$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$	aproximação genérica da solução da AIGE
$h_j$	diâmetro do círculo que circunscreve o maior elemento que compartilha o nó $j$

$H(\boldsymbol{x})$	função de Heaviside
$\kappa$	constante do material
$G$	módulo de elasticidade transversal
$\nu$	coeficiente de Poisson
$E$	módulo de elasticidade longitudinal
$Q_j^I$	parâmetro da trinca
$Q_j^{II}$	parâmetro da trinca
$\Omega_G$	domínio do problema global
$\partial\Omega_G$	contorno do domínio global
$\partial\Omega_G^d$	contorno do domínio global de Dirichlet
$\partial\Omega_G^n$	contorno do domínio global de Neumann
$\tilde{\boldsymbol{u}}_G^0$	aproximação da solução do problema global inicial
$\Omega_L$	domínio do problema local
$\partial\Omega_L$	contorno do domínio local
$\tilde{\boldsymbol{u}}_L$	aproximação da solução do problema global inicial
$\bar{\kappa}$	parâmetro de penalidade para impor condições de contorno de Cauchy
$V_0$	volume do elemento global que original o local
$\tilde{\boldsymbol{u}}_G^E$	aproximação da solução do problema global enriquecido
$\lambda_{max}$	maior autovalor da matriz
$\lambda_{min}$	menor autovalor da matriz
$C(\mathbf{K})$	número de condição da matriz de rigidez
$\bar{\mathbf{D}}$	matriz diagonal utilizada para escalonar matriz de rigidez
$\delta_{ij}$	Delta de <i>Kronecker</i>
$k(\mathbf{K})$	número de condição escalonado da matriz de rigidez
$\ \cdot\ $	norma
$\ \cdot\ _2$	norma 2 ou normal espectral

## Capítulo 4

### Aspectos Computacionais

$\mathbf{K}_{uu}$	parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos incógnitos nas equações associadas às forças prescritas
$\mathbf{K}_{up}$	parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos prescritos nas equações associadas às forças prescritas

$\mathbf{K}_{pu}$	parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos incógnitos nas equações associadas às forças incógnitas
$\mathbf{K}_{pp}$	parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos prescritos nas equações associadas às forças incógnitas
$\mathbf{X}_u$	vetor de deslocamentos incógnitos
$\mathbf{X}_p$	vetor de deslocamentos prescritos
$\mathbf{D}_p$	vetor de forças nodais prescritas
$\mathbf{D}_u$	vetor de forças nodais incógnitas
$\mathbf{N}_u$	vetor de forças aplicadas diretamente nos nós incógnitas
$\mathbf{N}_p$	vetor de forças aplicadas diretamente nos nós prescritas
$\mathbf{E}_u$	vetor de forças nodais equivalentes incógnitas
$\mathbf{E}_p$	vetor de forças nodais equivalentes prescritas

## Capítulo 5

### Análise de Modelos Estruturais Utilizando AIGE

$E_r$	erro
$(\bullet)_r$	solução de referência
$(\bullet)_h$	solução numérica

### Abreviaturas

CAD	Computer-Aided Design
CAE	Computer-Aided Engineering
NURBS	Non-Uniform Rational B-Splines
B-Splines	Basis Splines
AIG	Análise Isogeométrica
MEF	Método dos Elementos Finitos
PU	Partição da Unidade
AIGE	Análise Isogeométrica Estendida
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFE	Método dos Elementos Finitos Estendido
MEFG/E	Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica

DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
INSANE	INteractive Structural ANalysis Environment
POO	Programação orientada a objetos
UML	Unified Modeling Language
MEFG/E <sup>gl</sup>	MEFG/E é utilizado tanto no modelo global quanto no local
AIGE <sup>gl1</sup>	MEFG/E é utilizado no modelo global a AIGE no problema local
AIGE <sup>gl2</sup>	AIGE é utilizado no modelo global a MEFG/E no problema local
$p_G$	grau de aproximação polinomial do problema global
$p_L$	grau de aproximação polinomial do problema local
MEFGE	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
1.1	Contextualização . . . . .	22
1.2	Objetivos . . . . .	25
1.2.1	Objetivo Geral . . . . .	25
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	25
1.3	Organização do Texto . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>27</b>
2.1	Análise Isogeométrica . . . . .	28
2.2	Aplicações da AIG . . . . .	30
2.3	AIG com enriquecimento extrínseco para a representação de trincas . . . . .	32
2.4	Refinamento da Malha . . . . .	36
2.5	Integração Numérica . . . . .	39
2.6	Condições de Contorno . . . . .	40
2.7	Técnica Global-Local . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>44</b>
3.1	Conceitos Gerais . . . . .	44
3.2	Funções de Base . . . . .	48
3.2.1	<i>Knot Vector</i> . . . . .	48
3.2.2	B-Splines . . . . .	49
3.2.3	B-Splines não uniformes racionais (NURBS) . . . . .	56
3.3	Análise Isogeométrica . . . . .	58
3.3.1	Geometria . . . . .	58
3.3.2	Deslocamentos . . . . .	59
3.3.3	Deformações . . . . .	59
3.3.4	Equações de Equilíbrio . . . . .	60
3.3.5	Aplicação das Condições de Contorno Essenciais . . . . .	62
3.4	Extração de Bézier . . . . .	64
3.4.1	Elementos de Bézier e os Polinômios de Bernstein . . . . .	65

3.4.2	Operador de Extração de Bézier . . . . .	66
3.5	Análise Isogeométrica Estendida - AIGE . . . . .	71
3.6	Mecânica da Fratura Linear Elástica . . . . .	73
3.7	Funções de Enriquecimento . . . . .	74
3.7.1	Funções Polinomiais . . . . .	74
3.7.2	Funções de Heaviside . . . . .	75
3.7.3	Funções de Enriquecimento com Derivadas Singulares . . . . .	75
3.8	Técnica Global-Local . . . . .	79
3.8.1	Formulação da Técnica Global-Local . . . . .	81
3.8.2	Domínio Local . . . . .	86
3.9	Condicionamento do Sistema de Equações . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Aspectos Computacionais</b>	<b>92</b>
4.1	Principais Aspectos do Sistema INSANE . . . . .	92
4.2	Ampliação do Sistema INSANE . . . . .	98
4.2.1	Ampliação para modelagem da AIG . . . . .	98
4.2.2	Ampliação para modelagem da AIGE . . . . .	103
4.2.3	Ampliação para utilização da estratégia global-local . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Análise de Modelos Estruturais Utilizando AIGE</b>	<b>114</b>
5.1	Problema 1 - Chapa com deslocamento prescrito . . . . .	115
5.1.1	Chapa Retangular . . . . .	115
5.1.2	Chapa de formato curvo . . . . .	118
5.2	Problema 2 - Chapa Tracionada . . . . .	121
5.3	Problema 3 - Chapa em Modo Misto de Abertura de Trinca . . . . .	126
5.3.1	Modelo Global-Local - Primeira Análise . . . . .	128
5.3.2	Modelo Global-Local - Segunda Análise . . . . .	134
5.4	Problema 4 - Chapa com uma trinca inclinada no centro . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>156</b>
6.1	Breve Resumo . . . . .	156
6.2	Conclusões do Trabalho e Sugestões de Trabalhos Futuros . . . . .	157
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>162</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

Com o avanço da tecnologia é cada vez mais acessível o uso de máquinas robustas além de complexos programas computacionais. Assim, clássicos problemas da engenharia podem ser solucionados via estratégias numéricas utilizando diferentes metodologias. Além desses modelos clássicos, cada vez mais é possível representar com fidelidade os fenômenos naturais e as situações presentes na prática da engenharia, como por exemplo, da engenharia de estruturas. Quanto melhor a representação do fenômeno, melhores são as soluções de engenharia possíveis de serem aplicadas, reduzindo gastos desnecessários com materiais e mão de obra.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma estratégia numérica de solução aproximada, utilizada para solucionar problemas de valor de contorno e de valor inicial, incluindo os de engenharia de estruturas. Sua abordagem convencional consiste no particionamento dos modelos em pequenas unidades, nas quais é possível obter uma adequada descrição do fenômeno de interesse e unir o resultado de todos esses particionamentos para representar o comportamento físico do modelo analisado.

A possibilidade de resolver, de uma forma simples e aplicável computacionalmente, problemas complexos e que se distanciam dos problemas clássicos da engenharia é uma grande vantagem do MEF. Entretanto, uma desvantagem do MEF está na descrição geométrica do problema, que é realizada de forma aproximada pelos elementos que compõem a metodologia do método. Além disso, quando se está

procurando o equacionamento de problemas que se desenvolvem em etapas, como é o caso de modelos com propagação de trincas, é necessário um remalhamento constante, de difícil automatização e que requer comunicação constante com o modelo geométrico.

A Análise Isogeométrica (AIG), foi proposta com o objetivo de possibilitar a representação exata da geometria dos problemas através das funções CAD, “Computer Aided Design”, (funções utilizadas para desenho auxiliado por computador) além de tornar possível o refinamento dessa representação primária mínima, sem que se perca essa exatidão. Assim, a AIG busca aliar a funções CAD com as funções CAE, “Computer Aided Engineering”, (funções utilizadas na engenharia auxiliada por computador), ou seja, unificar a tipologia das funções que representam a geometria dos modelos com as que representam o campo de soluções. É justamente a proposição da metodologia que dá origem ao seu nome, composto pelo prefixo *iso-*, ou seja, a descrição da geometria e das funções de forma se utilizam das mesmas funções. A AIG utiliza funções de base capazes de realizar esse acoplamento, como, por exemplo, as funções B-Splines e as B-Splines racionais não uniformes (NURBS). Assim, é possível descrever a geometria exata do problema que está sendo analisado, além de reduzir o gasto computacional oriundo da tarefa de geração e processamento da malha. Além disso, o processo de refinamento de malha na AIG pode ser feito de maneira automatizada, o que possibilita a criação de malhas simplificadas para descrição da geometria da estrutura e malhas mais complexas para a aproximação do campo de soluções.

A depender da escolha da função de base ou da estratégia de refinamento de malha, outra vantagem da AIG é que essas funções de base podem apresentar um caráter mais suave quando comparada ao MEF. Adicionalmente, bons resultados podem ser observados via AIG com modelos que possuem menos graus de liberdade, desonerando computacionalmente o processo de solução. Desta maneira, um amplo campo de utilização da AIG se abre, não tornando a sua utilização restrita apenas

a problemas que necessitam de uma representação exata de geometria.

Por outro lado, a elevada continuidade e a forma com que a aproximação é construída fazem com que a AIG enfrente problemas na representação de informações descontínuas em um meio contínuo, como por exemplo, na inclusão de diferentes materiais ou na presença de fratura. Há a possibilidade de trabalhar com múltiplos subdomínios e outras técnicas de acoplamento. Como alternativa, surge a Análise Isométrica Estendida (AIGE) que alia a descrição exata da geometria e a suavidade das funções de base da AIG com os conceitos apresentados no Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido (MEFG/E). No MEFG/E as descontinuidades são incorporadas aos problemas via funções de enriquecimento da solução. De maneira similar ao MEFG/E, a AIGE enriquece a solução do problema analisado via AIG com funções previamente conhecidas e que notoriamente descrevem bem o comportamento descontínuo incorporado. Assim como no MEFG/E, em que a solução é composta por uma parcela referente a análise feita via MEF, a chamada solução convencional, e uma parcela correspondente ao enriquecimento realizado utilizando funções do tipo Partição da Unidade (PU), na AIGE ocorre a mesma combinação de soluções, sendo a parcela da solução clássica obtida via AIG e a parcela do enriquecimento obtida utilizando como PU as mesmas funções de base na solução clássica. Como vantagem, a AIGE adiciona poucos graus de liberdade ao problema e não exige remalhamento, além de não exigir técnicas de compatibilização de interface.

Muitas vezes, as funções de enriquecimento originárias de problemas da elasticidade ou de outros fenômenos já estudados, não são suficientemente satisfatórias para produzir o efeito desejado. Uma forma de se obter uma função de enriquecimento personalizada para o modelo analisado é utilizando a técnica global-local. A técnica global-local consiste na divisão da solução em três etapas distintas e complementares, análise global, local e global enriquecida, onde se consegue uma melhor representação do fenômeno descontínuo com redução do custo computacional.

No presente trabalho, a AIGE é aliada aos conceitos da técnica global-local,

possibilitando a análise de modelos sujeitos à presença e propagação de trincas de maneira consistente, robusta e gerando resultados condizentes com a realidade do fenômeno a um baixo custo computacional. Com esse objetivo, a técnica global-local é combinada com os conceitos do MEF<sub>G</sub>/E e da AIGE nos seus níveis de análise global e local da maneira mais conveniente. O resultado é uma nova abordagem numérica, denominada aqui de Análise Isométrica Estendida com enriquecimento global-local, (AIGE<sup>GL</sup>). A referida abordagem foi implementada na plataforma computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvida no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo central desse trabalho é combinar a AIGE com o MEF<sub>G</sub>/E dentro da estratégia global-local, originando a AIGE<sup>GL</sup>. Desta maneira modelos dentro do domínio da Mecânica da Fratura Linear Elástica serão analisados de forma a validar e atestar a viabilidade dessa metodologia, mostrando os seus ganhos em menores valores de condicionamento da matriz de rigidez, melhoria na acurácia das soluções e economia no número de graus de liberdade dos modelos analisados.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos desse trabalho, pode-se listar:

- Viabilizar a implementação da AIG, bem como os processos acessórios a ela, como Extração de Bézier, refinamento automatizado de malha e aplicação indireta das condições de contorno essenciais dentro do sistema INSANE.
- Viabilizar a implementação da AIGE, adaptando a criação das funções de forma enriquecidas e as funções de enriquecimento locais também dentro do INSANE.

- Estudo e implementação da AIGE<sup>GL</sup>, garantindo que as particularidades da AIGE sejam satisfeitas dentro da estratégia global-local.
- Análise de diversos problemas a fim de validar as implementações realizadas.
- Análise de diversos aspectos de problemas bidimensionais, regidos pela Mecânica da Fratura Linear Elástica, em que a AIGE<sup>GL</sup> foi utilizada a fim de comprovar as vantagens do método.
- Investigar o comportamento do condicionamento da matriz de rigidez para as metodologias utilizadas, a partir do refinamento das malhas e mudanças na ordem polinomial da aproximação.

### 1.3 Organização do Texto

Neste trabalho, além da introdução realizada no Capítulo 1, são apresentados no Capítulo 2 a revisão bibliográfica do tema proposto. No Capítulo 3, conceitos e informações relevantes para o entendimento das análises feitas e da proposta deste trabalho, como os fundamentos e formulação da AIG, AIGE e da técnica global-local, são apresentados. No Capítulo 4, as principais informações do sistema INSANE são descritas, além de todo o processo de expansão realizado a fim de incluir as novas funcionalidades. No Capítulo 5 os exemplos de modelagem conduzidas com a expansão do sistema INSANE utilizando a metodologia proposta são apresentados. Por fim, no capítulo 6 as conclusões do trabalho são formuladas.

## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

Muitos fenômenos da engenharia como, por exemplo, da área de estruturas em geral, podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Para modelos mais simples, soluções analíticas podem ser facilmente encontradas. A maior parte, porém, dos problemas de interesse são compostos por geometrias complexas o que inviabiliza a busca pela solução analítica das equações diferenciais do modelo.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), desenvolvido entre os anos de 1950 e 1960, é uma estratégia para solução aproximada, geralmente numérica, muito utilizada, até hoje, nos casos complexos descritos anteriormente, pois o modelo é dividido em elementos e neles as equações diferenciais parciais são resolvidas de forma aproximada descrevendo a solução total do sistema. Do ponto de vista da engenharia, essa ferramenta pode ser utilizada para resolver problemas de análise de tensão-deformação, transferência de calor, escoamento de fluido, propagação de trincas e várias outras simulações computacionais (Fish e Belytschko, 2007).

O modelo estrutural, a ser analisado via MEF, tem sua representação geométrica construída de maneira independente das funções de aproximação do MEF, ou seja, a descrição do problema é, em geral, exportada para dentro de um programa computacional que irá, posteriormente, gerar o campo de soluções aproximado. Assim, duas etapas, uma de representação do modelo geométrico e a outra de discretização e solução do problema são executadas de maneira desacoplada no que diz respeito às funções que descrevem as aproximações geométricas e da solução.

Na primeira etapa, são definidos os modelos geométricos, que podem ser construídos, por exemplo, utilizando programas computacionais baseados em projeto assistido por computador (CAD, do inglês “computer-aided-design”), que, por sua vez, têm a construção das linhas e curvas baseadas nas chamadas funções de base splines que são, em sua maioria, do tipo B-Splines racionais não uniformes (NURBS, do inglês *non uniform rational B-Splines*). A segunda etapa utiliza, em geral, no processo de solução, a aproximação via polinômios de Lagrange ou Serendipity para cada elemento finito, que, por sua vez, é resultado da malha formada a partir da percepção do usuário como sendo a que melhor descreve o problema analisado. Essa diferença entre as funções que descrevem a geometria e o campo de soluções do problema gera o desacoplamento entre modelagem e processamento da solução (Nguyen, 2011).

Considerando que esse processo de aproximação da solução via MEF, dividido em duas etapas consome muito tempo de processamento e não descreve com exatidão a geometria do problema a ser analisado, Hughes et al. (2005) propôs uma metodologia de solução que acopla a descrição do modelo geométrico com o modelo utilizado no estudo da solução, a chamada Análise Isogeométrica (AIG), em inglês Isogeometric Analysis (IGA).

## 2.1 Análise Isogeométrica

A AIG possibilita que as mesmas funções CAD utilizadas para descrever a geometria do modelo sejam utilizadas para aproximar a solução do problema, como por exemplo, os campos de tensões e de deslocamentos. Além disso, a AIG possibilita representar a geometria exata do problema independente do quão grosseira for a malha e também há ganhos a partir da facilidade que a AIG proporciona no refinamento ou aumento do grau de aproximação da solução, sem que seja necessário uma nova comunicação com a geometria do problema (Hughes et al., 2005).

A criação de malhas a partir de um modelo geométrico previamente concebido

mostra-se computacionalmente muito onerosa. Observa-se isso, sobretudo, considerando que cada pequena modificação no modelo inicial ou durante o processo de solução, como por exemplo na propagação de trincas, necessita-se de comunicação do sistema CAD com o sistema do MEF para geração de uma nova malha, alterada de tal forma a atender aos novos requisitos (Hughes et al., 2005). Nesse contexto, observa-se um ganho na utilização da AIG, visto que uma vez definida a malha que descreve a geometria inicial do problema, possíveis refinamentos que possam vir a ser necessários durante o processo de análise da solução são realizados de forma automatizada, independente do processo de criação da malha inicial. Desta forma a construção da malha a ser utilizada no processo de solução é feita de maneira exata com relação à geometria, automática, menos onerosa computacionalmente e menos sujeita a erros.

Os primeiros trabalhos realizados em AIG utilizaram funções de base do tipo B-Splines racionais não uniformes, do inglês, Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). Tais funções são construídas a partir das funções B-Spline para descrever a geometria e o espaço de soluções das variáveis dependentes. Isso porque as funções do tipo NURBS são as mais amplamente utilizadas nos sistemas CAD (Hughes et al., 2005). As funções do tipo NURBS foram amplamente discutidas em Piegl e Tiller (1997), como sua construção, utilização e algoritmos que possibilitam sua implementação em programas computacionais.

Adicionalmente, a AIG realizada utilizando funções do tipo NURBS, tende a gerar sistemas de equações mais homogêneos e uma matriz mais bem condicionada, quando comparados àqueles gerados por malhas de elementos finitos de alta ordem, o que implica em ganhos no processo de solução dessas equações. Isso, porque, a medida que o grau das funções do tipo NURBS aumenta, seu comportamento torna-se mais suave o que não se observa durante a elevação da ordem dos polinômios de Lagrange. Por outro lado, as funções do tipo NURBS não são interpolatórias, o que dificulta o processo de imposição das condições de contorno e aplicação de cargas no

modelo (Hughes et al., 2005).

A análise isogeométrica, porém não está limitada ao uso das funções do tipo NURBS. Outras funções podem ser utilizadas, desde que sigam os critérios de geometria descritos por Hughes et al. (2005), tais como exata representação geométrica mesmo com uma malha grosseira, facilidade de refinamento de malha e uma comunicação direta com as metodologias CAD, além de serem as mesmas funções a descrever a geometria e o modelo numérico a ser analisado. Tomam-se, por exemplo, funções que permitem o enriquecimento local da malha, tais como as T-Splines, introduzidas posteriormente por Sederberg et al. (2003) e utilizadas no contexto da AIG posteriormente (Bazilevs et al., 2010; Nguyen, 2011).

## 2.2 Aplicações da AIG

Em Hughes et al. (2005) a AIG foi inicialmente aplicada a problemas estruturais lineares e problemas de escoamento de fluido. Foram investigados o comportamento da solução em energia de deformação, na norma de energia, na norma  $L^2$  e na norma Euclidiana de deslocamento para diversos refinamentos de malha. Nos problemas estruturais foi observado uma boa convergência. Verificou-se, também, que o aumento do grau da função do tipo NURBS combinado com o refinamento da malha produz melhoras substanciais na solução aproximando-a dos valores de referência. Além disso, as aplicações em modelos tridimensionais de cascas também produziram resultados convergentes. O mesmo padrão de comportamento foi encontrado na modelagem de escoamento de fluidos.

Em Nguyen (2011) a AIG foi discutida para problemas clássicos da mecânica dos sólidos e os resultados, em termos de energia de deformação, demonstraram que a utilização de funções do tipo NURBS de ordens maior ou igual a dois geram resultados melhores, e, portanto, mais próximos daqueles de referência obtidos analiticamente, do que quando se faz a utilização do MEF com elementos Lagrangianos de ordem elevada. Isso atesta a superioridade da AIG, que consegue, para um

mesmo grau de aproximação polinomial e com a mesma ordem de graus de liberdade do MEF, obter resultados mais próximos da solução exata.

Outros trabalhos foram desenvolvidos na análise de modelos estruturais utilizando AIG, como por exemplo a aplicação em vigas formadas por compósitos submetidas a uma pré-torção (Ghafari e Rezaeepazhand, 2020). Observou-se que a AIG aplicada em 1D gerou resultados em concordância com aqueles obtidos em programas computacionais comerciais, que utilizam o MEF, realizadas em 3D. Assim, mais uma vez, as vantagens de utilização de B-Splines de alta ordem além de um refinamento automático, independente da malha inicial, mostraram-se presentes nos modelos analisados, resultando em um ganho no custo computacional e na acurácia. Em Dvořáková e Patzák (2019), foram analisadas, via AIG, vigas curvas submetidas a cargas pontuais. Nesse caso, a AIG tem o ganho de representar exatamente a geometria curva e utilizar essa mesma representação para a análise da solução, garantindo a continuidade dos esforços de momento e do campo de deslocamentos, além de, com pequenas modificações ser capaz de representar com solidez as cargas pontuais. Em Marchiori e Neto (2020), foram realizadas análises bidimensionais em vigas curvas baseadas na teoria de Bernoulli-Euler, tendo como foco a imposição de restrições via método da penalidade ou pelo método de Lagrange na vizinhança entre os *patches*. Cada *patch* desempenha o papel de um subdomínio e contém os elementos descritos por um *knot vector*.

Outra utilização muito comum da AIG é na análise de placas (Veiga et al., 2012) e cascas (Uhm e Youn, 2009; Kiendl et al., 2009; Benson et al., 2010a, 2011, 2013; Echter et al., 2013), muito em virtude da possibilidade de utilizar aproximações de elevada continuidade mais adequadas à cinemática destes problemas. Os elementos de placas e cascas podem ser mais facilmente construídos devido à suavidade das funções do tipo NURBS além de estarem, via de regra, muito menos sujeitos aos efeitos de travamento por cisalhamento quando comparado aos elementos baseados na teoria do MEF (Nguyen et al., 2015). Elementos estruturais com condições de

contorno suaves, tais como os de placas e cascas cilíndricas ou circulares são descritas com exatidão pela AIG (Lu, 2009; Lu e Zhou, 2011). Recentemente, a análise, via AIG de placas formadas por materiais funcionalmente graduados, apresentada em Yin et al. (2016), mostrou-se promissora graças a facilidade de se conseguir, utilizando funções do tipo NURBS, a continuidade das funções necessárias ao método de estudo das placas. Em Loibl (2019), foi desenvolvido um estudo de cascas analisadas via teoria de Kirchhoff-Love utilizando a AIG. Neste estudo, observou-se que a facilidade com que são construídas funções de elevada continuidade com as funções do tipo NURBS representa para a AIG uma vantagem com relação ao MEF, tendo em vista a exigência de continuidade  $C^1$  para a aproximação neste tipo de problema.

A suavidade que as funções utilizadas na AIG podem incorporar aos problemas tornam-as também atrativas para utilizações diversas no campo da engenharia, tais como: mecânica dos fluidos (Bazilevs e Akkerman, 2010; Gómez et al., 2010; Nielsen et al., 2011; Bazilevs et al., 2008; Gómez et al., 2008), fraturamento hidráulico (Hageman e de Borst, 2019), problemas envolvendo a mecânica do dano (Verhoosel et al., 2011), modelos que analisam o gradiente de elasticidade (Fischer et al., 2011), problemas de análise dinâmica (Rauen, 2014; Rauen et al., 2017), processo de fraturamento frágil usando a metodologia *phase-field* (Li et al., 2022) e problemas de contato (Otto et al., 2019).

### **2.3 AIG com enriquecimento extrínseco para a representação de trincas**

Para inserir nos modelos, explicitamente, características descontínuas, como por exemplo representar a presença de trincas, aberturas ou inclusões de materiais e outros eventos que causam concentrações no campo de tensões, Oden et al. (1998) e Strouboulis et al. (2000), propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que pode ser entendido como uma formulação não convencional do MEF, colocando-se como alternativa a ele na solução de determinados tipos de

problema. Propõe-se tratar a presença de descontinuidades nos deslocamentos e de singularidades no campo de tensões, não pelo refinamento da malha, mas sim pelo enriquecimento extrínseco da função de forma, reconhecida como uma partição da unidade, associada aos nós que estão próximos a esses fenômenos com funções previamente conhecidas (Duarte et al., 2000). Cria-se, então, um novo espaço de solução enriquecido a partir de uma base de funções ou um conjunto de soluções particulares conhecidas *a priori*, reduzindo os custos computacionais envolvidos no processo.

Paralelamente ao desenvolvimento do MEF $\bar{G}$ , o Método dos Elementos Finitos Estendidos, MEFE, (XFEM, do inglês) foi proposto por Belytschko e Black (1999). No MEFE a técnica de enriquecimento é também realizada utilizando o conceito da partição da unidade (PU). Nas suas primeiras aplicações, foi utilizado para enriquecer localmente problemas de propagação de trincas, inicialmente na Mecânica da Fratura Linear Elástica (Belytschko e Black, 1999; Sukumar et al., 2000) e, mais tarde, em problemas com não-linearidade (Moës e Belytschko, 2002; Mariani e Perego, 2003; Unger et al., 2007; Belytschko e Gracie, 2007). Diferenças inicialmente observadas entre o MEF $\bar{G}$  e o MEFE, como o enriquecimento polinomial em todo o domínio do primeiro método, perderam relevância, com o avanço de suas aplicações. Devido às características em comum que compartilham ambas as estratégias, atualmente elas são tratadas como equivalentes (Fries e Belytschko, 2010), sendo referenciadas aqui como MEF $\bar{G}$ /E.

Seguindo a mesma lógica do MEF $\bar{G}$ /E, foi desenvolvido por Benson et al. (2010b) a Análise Isogeométrica Estendida, AIGE, (XIGA, do inglês). Benson et al. (2010b) apresentaram os primeiros fundamentos da AIGE em que se propôs utilizar funções do tipo NURBS dentro do conceito do MEFE, a partir da ideia de facilitar a expansão das plataformas computacionais já existentes, generalizando a construção dos processos de solução, sendo assim possível de utilizar qualquer funções de base ou de PU. Em Luycker et al. (2011), a ideia da AIGE foi proposta inicialmente a partir de duas abordagens para a construção do esquema da aproximação. Na primeira

abordagem, as funções do tipo NURBS foram combinadas às funções Lagrangianas empregadas como PU na parcela que associada ao enriquecimento. Na segunda abordagem apenas funções do tipo NURBS foram utilizadas, ou seja, a característica de PU das funções do tipo NURBS foi, portanto, empregada para a definição do espaço de aproximação enriquecido. Ainda em Luycker et al. (2011), foi demonstrado que, embora não seja necessário que as funções de base utilizadas como partição da unidade para enriquecimento sejam as mesmas utilizadas na parcela que descreve a aproximação convencional, melhor resposta dos modelos foi encontrada quando a segunda abordagem era adotada. Esse estudo foi realizado a partir do enriquecimento da solução com funções descontínuas de Heaviside. A partir desse contexto observou-se que uma excelente acurácia poderia ser alcançada ao se combinar as funções de base de alta ordem do tipo NURBS e os conceitos de enriquecimento da solução do MEFGE.

A vantagem de se acoplar à análise isogeométrica os conceitos de enriquecimento da solução do MEFGE deve-se a diversos fatores tais como uma exata representação da geometria do problema; a fácil construção de aproximações de característica suave, com elevada continuidade entre elementos em regiões afastadas do fenômeno local de interesse; possibilidade de se representar os fenômenos localizados descontínuos com uma pequena adição de graus de liberdade (Luycker et al., 2011).

Em problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica simulados pela AIGE, foram obtidos bons resultados para os fatores de intensidade de tensão e com maior taxa de convergência quando comparado ao MEFGE e utilizando um menor número de graus de liberdade (Luycker et al., 2011; Ghorashi et al., 2012; Thien et al., 2015; Shoheib et al., 2022). Outra vantagem observada nas análises via AIGE é que se torna desnecessário o remalhamento a medida que os fenômenos descontínuos se movem, por exemplo, a medida que uma trinca se propaga. Ainda no caso de presença de trinca é desnecessário que esta esteja alinhada com o contorno dos elementos, uma vez que sua descrição não é feita geometricamente, mas sim via

enriquecimento da solução. Por fim, é possível enriquecer o modelo com funções que descrevem o campo de tensões singulares próximo à ponta da trinca. Isso é feito a partir da combinação da PU dos pontos de controle que se encontram próximos à região em que se localiza a ponta da trinca, com as referidas funções singulares. Melhora-se, assim, ainda mais o espaço de aproximação da solução com pequeno acréscimo de graus de liberdade.

Outros trabalhos também atestaram que a AIGE possui superioridade na convergência da solução para problemas que envolvem a presença de trincas, em termos de energia de deformação e abertura de trinca quando comparada ao MEFG/E (Tran et al., 2015), além de também possuir maior acurácia em problemas de trinca plana em meio dotado da presença de furos e inclusões de materiais (Bhardwaj et al., 2013). Em Singh et al. (2018) foram analisado modelos tridimensionais com a presença de trincas e, mais uma vez, a AIGE mostrou-se superior na convergência da solução se comparada ao MEFG/E. Com uma abordagem um pouco diferente, Jiang et al. (2022) utilizou a AIGE para a modelagem de trincas utilizando B++ Splines, uma variação das B-Splines. Nesse trabalho a descontinuidade foi descrita no modelo de forma forte, ou seja, foram criadas duas camadas de pontos de controle de colocação para descrever a trinca. A análise dos modelos possibilitou verificar que a metodologia alcança bons resultados em acordo com a AIGE convencional utilizando funções do tipo NURBS.

Ainda para análises de mecânica da fratura, destaca-se a utilização da AIGE combinada com a metodologia do *phase-field*, como apresentado em Qiu et al. (2024). Outra ramificação dessa temática foi apresentada Fardaghaie et al. (2022), em que a AIGE é utilizada para predição de comportamento de fadiga para placas com trincas e também em tubulações soldadas em Shoheib (2023).

A AIGE também foi usada em uma abordagem adaptativa para análise de cargas limites, melhorando a descrição dos mecanismos de colapso em estruturas que

possuem a presença de inclusões e furos (Li et al., 2021). Yuan et al. (2021) modelou a propagação de trincas em placas de geometria complexas utilizando a teoria de Reissner-Mindlin. Para isso, a AIGE foi utilizada em um domínio composto por *multi-patches* em que o acoplamento é feito utilizando o método de Nitsche. Em Fathi e de Borst (2021), uma análise geometricamente não linear via AIGE foi proposta para a análise de fratura coesiva e aplicada para investigar flambagem de estruturas formadas por compósitos.

Problemas envolvendo a análise de placas com trincas, (Singh, Singh, e Mishra, 2019; Singh, Singh, Mishra, e Bhardwaj, 2019; Bhardwaj et al., 2015; Zhang et al., 2021), formadas por material funcionalmente graduado também foram resolvidos via AIGE. Demonstrou-se a superioridade do modelo à medida que alcança continuidade  $C^1$ , necessária aos elementos de placa empregados aliada à facilidade de representação de descontinuidades da estratégia de enriquecimento extrínseco. A AIGE também foi utilizada para simular o comportamento à fratura de materiais funcionalmente graduados reforçados com nanotubos de carbono quando sujeitos a cargas termo-mecânicas (Yadav et al., 2022, 2023).

Em Rauen et al. (2020) o enriquecimento com funções trigonométricas foi utilizado para representar as vibrações livre e forçada em barras retas e treliças no contexto da AIGE e da análise estrutural dinâmica. Excelentes resultados foram observados quando comparados com a AIG convencional, MEF e MEFG/E em relação à taxa de convergência, espectro de erro e condicionamento.

## 2.4 Refinamento da Malha

Há uma dificuldade deixada pelas B-Splines e pelas funções do tipo NURBS, que se trata da incapacidade de realizar um refinamento localizado na malha que não onere o processamento desnecessariamente. Tal incapacidade pode prejudicar o processo de solução, porque, ainda que a AIG tenha maior acurácia que o MEF para malhas com um número de graus de liberdade de mesma grandeza, para problemas

mais complexos pode ser necessária uma malha muito refinada para capturar um evento localizado. Utilizando-se, para a construção da AIG, as funções B-Splines e NURBS, o refinamento da malha precisa ser feito em todo o domínio, onerando a solução. Para resolver essa limitação, outras funções mais complexas, e que possibilitam o refinamento localizado foram propostas tanto para a AIG quanto para a AIGE. São exemplos de funções de base que permitem refinamento localizado: T-Splines, apresentada por Sederberg et al. (2003) e utilizada por Bazilevs et al. (2010), quando aliada à AIG e por Singh et al. (2017) à AIGE; truncated hierarchical B-Splines (Giannelli et al., 2012); PHT-Splines apresentada por Wang, Yang, Jin, Deng, e Chen (2011) e Wang, Xu, Deng, e Chen (2011) quando aliada à AIG e por Yang et al. (2020) à AIGE; LR B-Splines utilizada por Dokken et al. (2013) e Johannessen et al. (2014) aliada à AIG e por Gu et al. (2018) à AIGE.

Outra possibilidade, é fazer a compatibilização entre malhas distintas. Liu et al. (2019), mostra a compatibilização da interface entre uma malha grosseira desenvolvida com Elementos Finitos de B-Splines e uma malha mais refinada, localizada próximo a uma trinca, sem enriquecimento, desenvolvida utilizando funções B-Splines. A compatibilização é feita baseada na condição de reconstrução polinomial, e as funções de base relevantes à modelagem da malha refinada são substituídas pelas funções de base da interface obtidas na malha grosseira. Uma técnica de decomposição de domínio para a introdução e propagação de trinca utilizando a AIG foi apresentada por Rosa et al. (2022). As funções de base da AIG formam o modelo isogeométrico (problema global) e uma malha triangular discretizada pelo MEF tradicional (problema local) é superposta ao modelo isogeométrico. Ambas as discretizações são modificadas e mescladas sobre uma região do domínio físico, levando a um novo espaço de funções. Lapina et al. (2022) propôs uma estratégia global/local não invasiva para acoplar um modelo global analisado pela AIG e uma malha local do MEF mais refinada para simular o comportamento de estruturas sujeitas a trincas, contato, atrito e delaminação.

Existe também a possibilidade de trabalhar com mais de um subdomínio de splines, ou seja, utilizar os *multi-patches* e utilizar diferentes níveis de refinamento em cada um deles. Na Seção 2.2 brevemente foi citado esse conceito. Quando apenas um *knot vector* é capaz de definir todas as funções de bases, existindo apenas um espaço paramétrico em cada dimensão do problema, trata-se de uma análise composta por apenas um subdomínio, um *patch*. Quando modelos mais complexos são analisados, nem sempre essa possibilidade é mantida, ou então quando se deseja refinar localmente uma malha a ser discretizada por B-Splines ou NURBS, sendo necessária a utilização dos *multi-patches*. Nos modelos *multi-patches*, mais de um *knot vector* forma o domínio do problema, ou seja, ele é composto por vários subdomínios e diversas técnicas são utilizadas para compatibilizar a interface desses *patches*.

A compatibilização de *patches* foi feita utilizando multiplicadores de Lagrange por Dornisch e Klinkel (2011). Em Apostolatos et al. (2014) uma versão mais estável do método de Nitsche foi proposta para a compatibilização entre os *patches* e comparada com o Método da Penalidade e dos multiplicadores de Lagrange, cada uma das metodologias tem suas vantagens e desvantagens e é passível de ser utilizada a depender do problema analisado. Em Guo e Ruess (2015) são compatibilizados *multi-patches* de elementos de cascas. Em Ruess et al. (2014) é realizada a compatibilização de malhas não conformes de cada *patch* através do Método de Nitsche. Nesse tipo de abordagem é possível realizar um refinamento localizado da malha utilizando a estratégia de *multi-patches*. A compatibilização de *patches* também pode ser realizada utilizando o método Mortar, (Hesch e Betsch, 2012; Brivadis et al., 2015; Dornisch et al., 2015; Bouclier et al., 2017), que também é capaz de acoplar malhas não conformes e realizar refinamentos localizados de malhas através da utilização de múltiplos subdomínios.

## 2.5 Integração Numérica

De maneira similar ao MEF, a AIG também pode utilizar a quadratura de Gauss-Legendre para a realização da integração numérica do problema de valor de contorno (Hughes et al., 2010; Nguyen, 2011). Luycker et al. (2011) sugerem adotar o mesmo número de pontos por elemento utilizados para integração exata do MEF.

A estratégia sugerida por Luycker et al. (2011), contudo, não se mostra ótima para a AIG, segundo (Nguyen et al., 2015). Outros pesquisadores buscaram novas formas de realizar a integração numérica na AIG de maneira ótima, ou quase ótima. Segundo Hughes et al. (2010), uma outra maneira, eficiente de realizar a integração numérica sobre os elementos isogeométricos é dada a partir da “Regra do ponto do meio”, (Half-point rule, do inglês), trata-se de uma maneira exata de se integrar B-Splines e NURBS com o mínimo de pontos de integração possível, porém pode gerar problemas de mau condicionamento do sistema de equações analisado, por exemplo, na construção da matriz de rigidez de discretização com muitos elementos ou ordens de aproximação polinomial muito elevadas. Outra técnica de integração numérica para a AIG, mais simples de ser empregada do que aquela proposta por Hughes et al. (2010), foi apresentada por Auricchio et al. (2012). Nela uma integração quase ótima é proposta a partir da solução local de um sistema de equações preservando a montagem matricial de elemento a elemento. Schillinger et al. (2014) explorou várias técnicas de integração numérica com quadratura reduzida para elementos formados por splines quadráticas e cúbicas. Buscando aquelas que com menos pontos de integração foi possível alcançar a mesma precisão e estabilidade da quadratura completa de Gauss. Foi observado por Schillinger et al. (2014) que algumas dessas técnicas podiam reduzir o custo computacional durante a construção das matrizes e vetores relacionados aos problemas analisados.

Um abordagem completamente distinta foi proposta por Auricchio et al. (2010) e aplicada posteriormente em problemas de grandes deformações e de contato por

Kruse et al. (2015). Trata-se dos métodos de colocação dentro da AIG. Os métodos de colocação aliados a AIG tem como objetivo fazer com que a forma forte das equações diferenciais que governam o problema sejam verificadas diretamente em um conjunto de pontos de colocação discretos. Assim, os pontos de controle transformam-se nesses pontos de colocação discretos. Nessa metodologia nenhuma quadratura de integração é necessária, o que significativamente reduz o custo computacional de problemas que normalmente seriam dependentes da integração numérica para a construção de suas matrizes e vetores. Tal abordagem mostra-se, portanto, vantajosa à medida que consegue reduzir os custos computacionais em problemas com elevados níveis de discretização.

Alguma atenção precisa ser despendida, também, quando da integração numérica utilizada em modelos analisados via AIGE, porque de maneira similar ao que acontece no MEFGE a introdução das descontinuidades no campo de tensões requer técnicas adequadas de integração para que este não se torne um fator de geração de erros (Nguyen et al., 2015). Observou-se que alguns trabalhos que tratam da AIGE, utilizam a quadratura de Gauss-Legendre como metodologia de integração, porém subdividindo os elementos em células de integração e aumentando o número de pontos nessas células (Nguyen et al., 2015; Luycker et al., 2011; Ghorashi et al., 2012).

## 2.6 Condições de Contorno

A maior parte dos pontos de controle, em AIG, sobretudo quando se trata de funções do tipo NURBS, foco desse trabalho, são não interpolatórios. Exceção à regra será detalhada no Capítulo 3, que são os pontos de controle das extremidades das curvas formadas por funções do tipo NURBS e alguns pontos que correspondem a um *knot* com uma multiplicidade específica no espaço paramétrico. Por esse motivo, as condições de contorno do problema analisado podem ser diretamente aplicadas apenas nessas regiões.

Isso acontece, porque quando a multiplicidade de um *knot*, dentro do *knot vector* é igual ao grau da aproximação, a função de base assume caráter interpolatório (Hughes et al., 2005). Assim, tem-se que os pontos de controle das regiões de extremidade coincidem com a malha geométrica, tornando a região de extremidade interpolatória, facilitando a imposição das condições de contorno. Os conceitos de *knot* e *knot vector* serão detalhados na Seção 3.2.1 do Capítulo 3. A estratégia de imposição direta de condições de contorno, no entanto, mostra-se insuficiente, porque abrange um número muito restrito de problemas.

A utilização de técnicas de imposição indireta de condições de contorno para a AIG e AIGE em muito se assemelha àquela empregada nas metodologias sem malha, que possuem funções com essa mesma característica não interpolatória. De acordo com Fernández-Méndez e Huerta (2004), as metodologias de imposição de condições de contorno de forma indireta podem ser classificadas em dois grandes grupos: as que modificam a forma fraca do problema e as que modificam as funções de forma. As metodologias que modificam a forma fraca do problema fazem mais sentido dentro da metodologia da AIG e são as mais utilizadas. Destaca-se a utilização das técnicas de Multiplicadores de Lagrange, Método da Penalidade e Método de Nitsche dentro do contexto dos método sem malha, (Fernández-Méndez e Huerta, 2004), que podem ser estendidos para a AIG e AIGE.

Entre as estratégias de imposição de condições de contorno quando empregadas empregadas em AIG e AIGE, pode-se destacar: Método dos mínimos quadrados (Hughes et al., 2005; Luycker et al., 2011), Interpolação de pontos a partir da construção de uma função linear entre os pontos de controle (Luycker et al., 2011), a as técnicas aplicadas nas metodologias sem malha já citadas, como o: Multiplicadores de Lagrange em (Dornisch e Klinkel, 2011; Ghorashi et al., 2012), Método da Penalidade em (Nguyen et al., 2015), numa abordagem um pouco diferente da AIG, mas que tem como semelhança a utilização de B-Splines e a dificuldade de imposição de condições de contorno essenciais o Método de Nitsche apresentado em Embar et al.

(2010).

## 2.7 Técnica Global-Local

A técnica global-local em abordagem do MEFG/E foi inicialmente proposta por Duarte e Babuška (2005). Trata-se de um mecanismo para criação de funções de enriquecimento numericamente personalizadas, a partir do conceito de divisão do problema analisado em três etapas. Na primeira etapa resolve-se o problema incluindo todo o seu domínio, sem muita preocupação com refinamento de malha ou enriquecimentos com funções previamente conhecidas. Na segunda etapa, utilizando-se de informações da solução na primeira etapa, resolve-se somente a porção do modelo em que se encontram os fenômenos de interesse de natureza localizada. Nessa etapa preocupa-se em descrever da melhor maneira o esses fenômenos a partir de enriquecimentos e de refinamento de malha. Na terceira e última etapa a solução do problema analisado localmente retorna ao problema global como forma de enriquecimento.

Diversos trabalhos acoplaram a técnica global-local ao MEFG/E, definindo o MEFG/E<sup>gl</sup>, e alcançando resultados convergentes e com boa acurácia, além da redução do custo computacional, uma vez que adiciona poucos graus de liberdade ao sistema. São trabalhos desenvolvidos utilizando MEFG/E<sup>gl</sup>: análise bidimensional e tridimensional de trincas em meio elástico linear (Duarte e Kim, 2008; Kim et al., 2010; Pereira et al., 2012; Malekan e Barros, 2016; Malekan et al., 2017, 2018; Santos, 2018; Fonseca et al., 2020); análise de múltiplas trincas estáticas e também propagando por fadiga, incluindo a verificação dos efeitos causados pela união dessas trincas (O'Hara et al., 2016); análise de soldas em estruturas de grande porte (Li e Duarte, 2018); análise de propagação de trinca em estado plano de tensões/deformações utilizando a teoria de Reissner-Mindlin para placas (Malekan et al., 2018); análise de propagação de trincas em meio elástico linear com a criação do domínio local automatizada (Fonseca, 2019); análise não-linear de meios parcialmente frágeis submetidos a propagação de dano (Pinheiro, 2019; Monteiro, 2019; Monteiro et al.,

2020; Evangelista et al., 2020; Novelli et al., 2020); análise de propagação de trinca coesiva em meios de comportamento elástico-linear (Kim et al., 2012; Kim e Duarte, 2015).

A técnica global-local utilizada dentro do contexto da AIGE, proposta nesse trabalho, foi primeiramente apresentada em Santos e Barros (2023), em artigo de mesma autoria. Em Santos e Barros (2023), a AIGE foi combinada ao MEFG/E dentro das etapas da técnica global-local e apresentou bons resultados. Os modelos numéricos apresentados nesse artigo são aqui novamente abordados e estendidos, além de outros exemplos que fizeram parte da análise dentro do processo de implementação da metodologia.

## Capítulo 3

# Fundamentação Teórica

Com o objetivo de contextualizar a proposta de trabalho e ratificar sua relevância, apresentam-se os principais aspectos inerentes à Análise Isogeométrica. Os conceitos gerais a respeito da Análise Isogeométrica são apresentados na Seção 3.1. Complementando a teoria da AIG, as Seções 3.2 e 3.3 apresentam a formulação clássica a respeito da mesma. Na Seção 3.4 é mostrada a técnica da Extração de Bézier para implementação da AIG. Na Seção 3.5 são introduzidos os conceitos e formulação da Análise Isogeométrica Estendida. Na Seção 3.6 são apresentados os principais conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica relevantes para esse trabalho. Alguns tipos de funções que podem ser utilizadas como funções de enriquecimento locais são apresentados na Seção 3.7. Como o trabalho objetiva a resolução de problemas via AIGE utilizando a técnica Global-Local, como forma de enriquecimento, descreve-se na Seção 3.8 a referida técnica e sua formulação, além dos aspectos mais importantes para fazer o acoplamento gerando a metodologia AIGE<sup>GL</sup>.

### 3.1 Conceitos Gerais

A Análise Isogeométrica (AIG) permite uma comunicação direta entre o modelo CAD analisado e a malha desenvolvida para a análise do modelo geométrico. Isso, porque utiliza as mesmas funções de base para a descrição da geometria e para a geração da base do espaço de solução aproximada. Além disso, as funções de forma empregadas possibilitam a exata descrição da geometria, eliminando o erro

na representação do domínio típico das malhas de elementos finitos e contribuindo para uma melhor aproximação da solução.

Na AIG a malha utilizada na solução do problema é definida de forma automática. Como a comunicação com a geometria do problema ocorre apenas uma vez, qualquer outro refinamento de malha é realizado de forma iterativa e independente da geometria inicial do problema. Elimina-se assim a etapa de geração de malha, que muitas vezes requer a intervenção do usuário da plataforma computacional de análise.

Adicionalmente, com sua utilização em diversos problemas clássicos da mecânica dos sólidos, da mecânica da fratura linear elástica, problemas envolvendo a mecânica do dano e análises de estruturas formadas por compósitos, a AIG mostrou ser um método robusto, com alta acurácia nas soluções desejadas com menos graus de liberdade no modelo e, assim, um ótimo custo computacional quando comparado a outras metodologias (MEF) (Hughes et al., 2005; Nguyen, 2011; Rauen, 2014; Nguyen et al., 2015; Hageman e de Borst, 2019; Ghafari e Rezaeepazhand, 2020).

A AIG utiliza funções de base capazes de fazer a representação exata da geometria do modelo analisado. Em suas primeiras aplicações, desde a proposição do método por Hughes et al. (2005), funções do tipo B-Splines não uniforme racionais (NURBS) foram incorporadas ao modelo e, até o presente momento, estas se mostram eficientes para a análise de diversos problemas no âmbito da engenharia.

Na Análise Isogeométrica existem dois conceitos de malha: a malha de controle e a malha física. A malha de controle é composta por pontos, chamados pontos de controle que servem de base para a construção das funções do tipo NURBS que, por sua vez, descrevem a malha física. Os graus de liberdade do problema estão vinculados aos pontos de controle (Rauen, 2014).

As funções de forma da AIG, incluindo-se as funções do tipo NURBS, são construídas no espaço paramétrico a partir de um “*knot vector*”. Esse *knot vector* é

composto por “*knots*”, que representam pontos no espaço paramétrico e que constituem os parâmetros necessários à criação das referidas funções. Esses *knots* podem aparecer mais de uma vez dentro do *knot vector*, sendo o termo multiplicidade,  $m$ , aplicado para mostrar quantas vezes determinado *knot* aparece no *knot vector*. Cada direção do modelo, seja ele uni, bi ou tridimensional, é composta por uma representação paramétrica através do *knot vector*.

Nesse trabalho o conceito de elemento se dá como o domínio entre dois *knots*, de valores diferentes, dentro do *knot vector*, o chamado *knot span*, para modelos unidimensionais e estendendo essa definição para modelos bidimensionais e tridimensionais a partir da ideia de elemento construído a partir do espaço entre dois *knots* em cada direção considerada (Nguyen, 2011).

A Figura 3.1 reúne os conceitos básicos que envolvem a Análise Isogeométrica. A malha de controle e a malha física para determinado problema analisado via AIG são apresentadas na Figura 3.1(a). A malha física, contida no espaço físico, é formada pela combinação das funções de base da AIG, apresentadas na Figura 3.1(b), com os pontos de controle  $P_{ij}$  presentes na malha de controle.

O espaço índice, ilustrado na Figura 3.1(e), mostra o posicionamento de cada *knot* dentro do *knot vector*, respeitando sua multiplicidade e, este espaço forma o espaço paramétrico, apresentado na Figura 3.1(b), onde serão descritas as funções de base da AIG. Para a construção do espaço índice e do espaço paramétrico é necessário apenas a definição dos *knot vectors*, apresentados na Figura 3.1(d).

Conforme mencionado, no *knot vector*, cada domínio entre dois *knots* diferentes participa da definição de um elemento, (*knot span*), dentro do espaço paramétrico, Figura 3.1(b). Esses elementos, dentro do processo de solução da AIG, serão mapeados para um elemento de referência, Figura 3.1(c), para a realização da integração numérica do problema de valor de contorno, por exemplo, para a construção da matriz de rigidez.

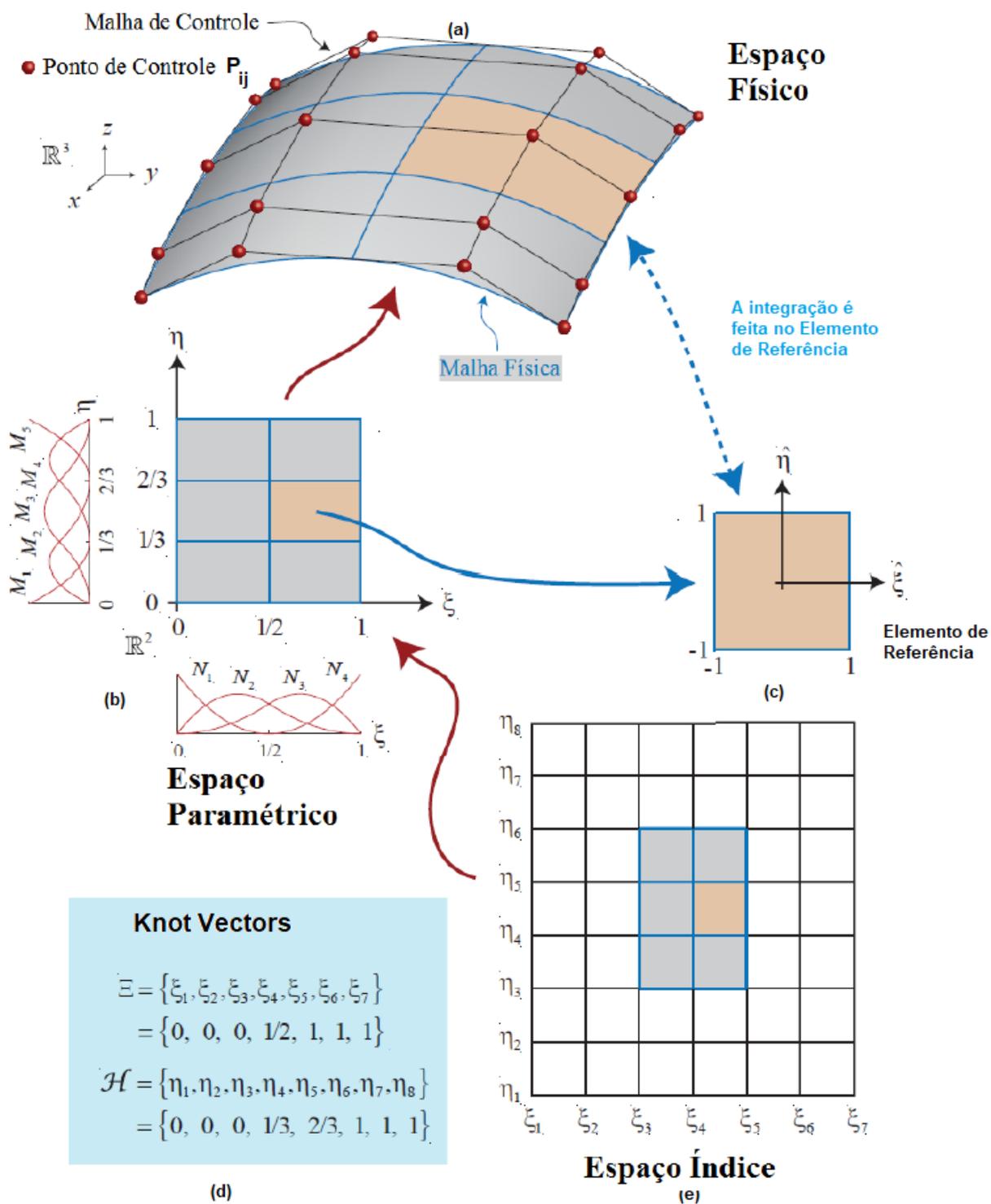


Figura 3.1: Construção da AIG - adaptada (Rauen, 2014).

## 3.2 Funções de Base

Conforme já mencionado, diversas são as funções de base que podem ser utilizadas dentro da AIG. Cada função guarda consigo aspectos diferenciados quanto à sua formulação e utilização. Neste trabalho, funções do tipo B-Splines não uniforme racionais (NURBS) serão utilizadas. As funções do tipo NURBS são um tipo especial de B-Spline. Essa seção trata as características e formulação das B-Splines e sua especialização para as funções do tipo NURBS. A formulação é aqui apresentada seguindo Piegl e Tiller (1997) e Hughes et al. (2005), onde mais detalhes podem ser encontrados.

### 3.2.1 *Knot Vector*

Os *knot vectors* são vetores compostos por um conjunto não-decrescente de *knots* que determinam os pontos do espaço paramétrico. O único requerimento para compor um *knot vector* é que satisfaça a relação  $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ . São descritos no formato:  $\Xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_i \ \dots \ \xi_{n+p+1}]$ , no qual o número total de *knots* dentro do *knot vector* é igual a soma do número de funções de base,  $n$ , que ele é capaz de representar sendo esta a mesma quantidade de pontos de controle do modelo, mais o grau do polinômio representado,  $p$ , mais 1. O conceito de ordem,  $k$ , é dado pela soma do grau do polinômio representado pela B-Spline mais 1.

Os *knot vectors* tem grande influência na formação da funções de base e comunicam-se com o grau de aproximação polinomial das mesmas, portanto devem ser propriamente escolhidos. Os *knot vectors* podem ser enquadrados nas categorias aberto ou periódico e uniforme ou não-uniforme. As definições de cada categoria seguem:

- Aberto: São *knot vectors* cujos *knots* de início e fim possuem multiplicidade igual a ordem da B-Spline que será representada, por exemplo,  $\Xi = [0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1]$   
 $k = 2$

- Periódico: São *knot vectors* cujos *knots* de início e fim não possuem multiplicidade igual a ordem da B-Spline representada, por exemplo,  $\Xi = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$   
 $k = 2$
- Uniforme: São *knot vectors* cujos espaçamentos entre os *knots* aumentam por um mesmo fator, por exemplo,  $\Xi = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$
- Não-Uniforme: São *knot vectors* cujos espaçamentos entre os *knots* não são iguais ou se repetem, por exemplo,  $\Xi = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$

Com base na literatura e segundo Nguyen et al. (2015), tradicionalmente para descrever B-Splines são utilizados *knot vectors* não-uniformes e abertos.

### 3.2.2 B-Splines

O primeiro passo para a construção de uma B-Spline, como aquelas apresentadas na Figura 3.1(b), é a escolha de um *knot vector*. A partir disso, utiliza-se a seguinte fórmula recursiva de Cox-de Boor (Nguyen, 2011):

Para  $p=0$ :

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

Para  $p=1,2,3,\dots$ :

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.2)$$

É importante ressaltar que cada função de base de grau  $p$  depende da função de base de grau imediatamente inferior  $p - 1$ .

As funções B-Splines, segundo Hughes et al. (2005):

- Constituem uma Partição da Unidade:  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ ,
- São linearmente independentes:  $\sum_{i=1}^n a_i N_{i,p}(\xi) = 0 \iff a_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ ,
- Têm suporte compacto:  $N_{i,p}(\xi) = 0$  se  $\xi$  estiver fora do intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ ,

- São sempre não-negativas:  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ ,
- Possuem continuidade das derivadas  $(p - 1)$ , se o *knot* somente aparecer uma vez no *knot vector* ou  $(p - m)$ , sendo  $m$  a multiplicidade do *knot*,
- Possui  $(p + 1)$  funções de base não nulas em um *knot span*  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ .

A primeira derivada das B-Splines segue a formulação:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.3)$$

### 3.2.2.1 Curvas B-Splines

Para a construção de uma curva B-Spline são necessários pontos de controle  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Constrói-se  $n$  funções de base, caso se tenha  $n$  pontos de controle. A curva é então interpolada por:

$$\mathbb{C}(\xi) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Os pontos de controle estão associados aos graus de liberdade para os modelos analisados via AIG, porém as funções de base B-Spline não são interpolatórias em todos os pontos de controle, a menos que linhas retas estejam sendo construídas. De maneira geral a curva B-Spline passa fora da linha que liga os pontos de controle, sendo, então, as curvas B-Splines interpolatórias apenas nas extremidades. A Figura 3.2 mostra um exemplo de uma curva B-Spline construída a partir de um *knot vector* e um conjunto de pontos de controle.

### 3.2.2.2 Superfície B-Splines

As superfícies B-Splines são construídas a partir de duas funções B-Splines,  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,q}(\eta)$ , cada uma em uma direção, da Figura 3.1(b), construídas utilizando dois *knot vectors* diferentes,  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e  $\mathcal{H} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j, \dots, \eta_{m+q+1}]$ , da Figura 3.1(d), de acordo com as Equações (3.1) e (3.2). Frequentemente utiliza-se

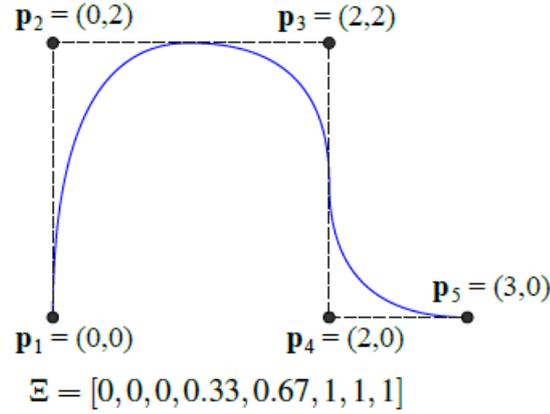


Figura 3.2: Curva B-Spline,  $n=5$  e  $p=2$  (Barroso, 2015).

o mesmo grau do polinômio de aproximação para as duas direções, logo  $p = q$ . A superfície B-Spline, para um conjunto de pontos de controle  $P_{i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ . é dada por:

$$\mathbb{S}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \begin{bmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O suporte local das funções de base formado pelo produto tensorial de duas B-Splines é:

$$N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \xrightarrow{\text{suporte}} [\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \quad (3.6)$$

onde  $i, j$  são os índices do *knot* em questão e  $p, q$  são a ordem polinomial da aproximação na direção  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente.

Nos limites, ou seja, no contorno do elemento bidimensional formado pela superfície B-Spline as funções assumem caráter interpolatório, pois os *knots* possuem multiplicidade maior ou igual a  $p$  fazendo com que os pontos de controle tenham suas posições coincidentes com a malha física (Hughes et al., 2005; Luycker et al., 2011).

### 3.2.2.3 Refinamento

As malhas física e paramétrica, Figuras 3.1(a) e 3.1(b), respectivamente, que descrevem a geometria exata do problema estrutural analisado via AIG, muitas vezes precisam ser refinadas no momento em que serão processadas as soluções do fenômeno físico analisado. Isso, porque, a malha física e paramétrica utilizadas na descrição da geometria podem ser consideradas grosseiras e incapazes de capturar as sutilezas da análise estrutural que está sendo realizada. Assim, uma malha menos refinada pode ser suficiente para descrever a geometria do problema, porém insuficiente para descrever o fenômeno estrutural ali representado, sobretudo em modelos sujeitos a concentrações no campo de tensões.

O refinamento utilizado na AIG é feito de forma simples e automatizada, sem a necessidade da comunicação constante com a descrição geométrica do modelo (Hughes et al., 2005). Tal procedimento é realizado preservando a descrição da geometria inicial e também o intervalo de representação paramétrica. Existem três tipos de refinamento de malha possíveis de serem implementados dentro da abordagem da AIG, são eles:

- Inserção de *knots*
- Elevação do grau de aproximação polinomial
- Refinamento  $k$

O refinamento do tipo **Inserção de *knots*** é equivalente ao refinamento  $h$  realizado dentro da abordagem clássica do MEF (Hughes et al., 2005). Um *knot* pode ser inserido sem modificar a curva já descrita tanto geometricamente quanto parametricamente. Conseguem-se, assim, uma subdivisão dos elementos, criando mais elementos ou mais *knot spans*, o que torna o modelo mais refinado. Durante a inserção de *knots* aumenta-se também o número de pontos de controle da curva B-Spline.

Considerando um *knot vector*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e desejando-se inserir um novo *knot*  $\bar{\xi}$  que está compreendido no intervalo  $[\xi_k, \xi_{k+1}[$ , as novas funções de base

$n + 1$  serão formadas recursivamente através das Equações (3.1) e (3.2), com o novo *knot vector*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}]$ . Os novos  $n + 1$  pontos de controle,  $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{n+1}\}$ , formados a partir dos pontos de controle iniciais,  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  são dados por:

$$\bar{P}_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad (3.7)$$

onde

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0, & k + 1 \leq i \leq n + p + 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

A Figura 3.3 ilustra o processo de Inserção de *knots*, onde se incluiu um novo *knot*, a saber  $\frac{1}{2}$ , no *knot vector* inicial. Assim, onde antes havia um elemento (*knot span*), agora existem dois elementos (*knot spans*). Nesse caso o grau da curva se mantém inalterado  $p = 2$ . Utilizando as Equações (3.7) e (3.8) é possível encontrar os novos pontos de controle necessários a representação da curva com o novo *knot vector*.

O refinamento de **Elevação do grau de aproximação polinomial** é equivalente ao refinamento  $p$  praticado no MEF. Para realizar esse tipo de refinamento, várias estratégias podem ser adotadas, uma delas, de simples entendimento é apresentada em Piegl e Tiller (1994). Trata-se de aumentar a multiplicidade de todos os *knots* dentro do *knot vector* a fim de decompor a B-Spline em curvas de Bézier, utilizando as Equações (3.7) e (3.8). Em seguida as curvas de Bézier tem seu grau de aproximação polinomial elevado através da equação:

$$\bar{P}_i = (1 - \beta_i) P_i + \beta_i P_{i-1} \quad (3.9)$$

onde

$$\beta_i = i/(p + 1) \quad (3.10)$$

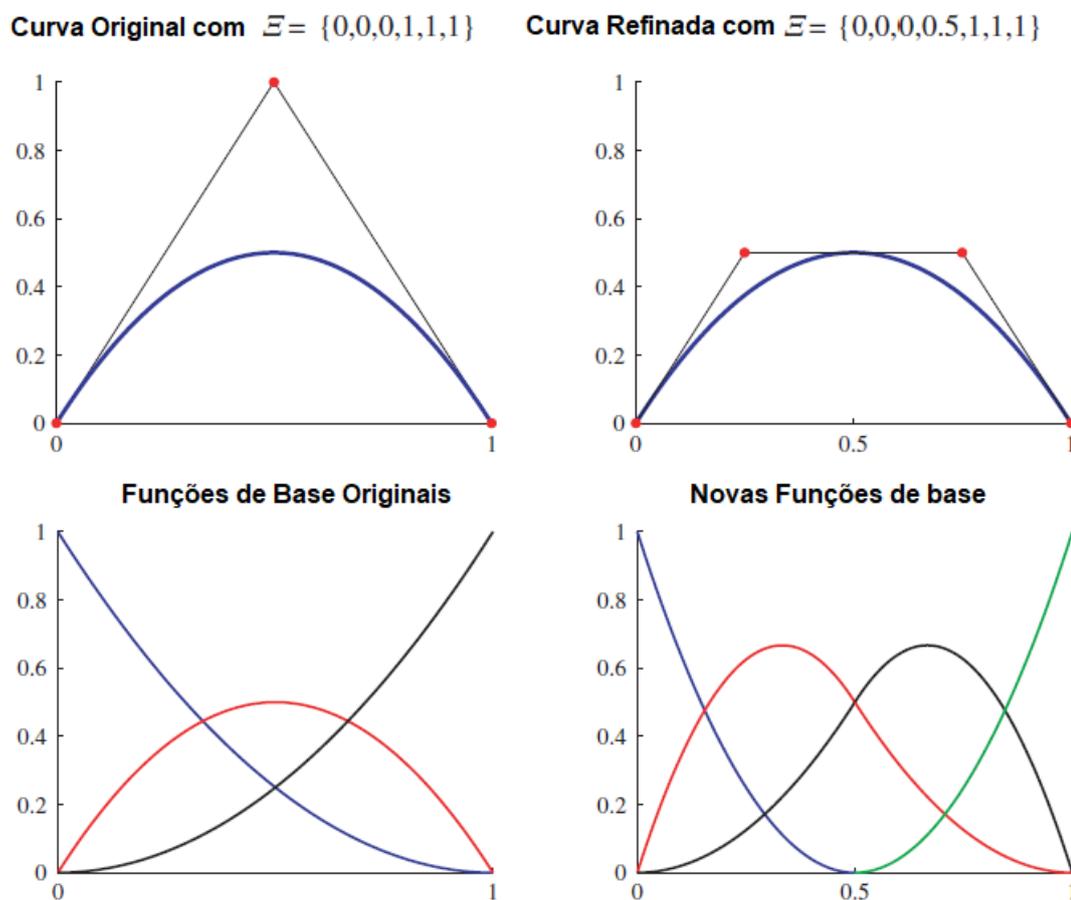


Figura 3.3: Refinamento Inserção de *knots*, pontos de controle  $\bullet$  - Adaptada (Hughes et al., 2005).

Por fim, os *knots* inseridos apenas para decompor a B-Spline em segmentos de curvas de Bézier são removidos. Mais detalhes dessa formulação podem ser encontrados em Piegl e Tiller (1994).

Mais uma vez o enriquecimento é realizado sem modificar a geometria ou a parametrização da curva B-Spline. Sobre esse refinamento é importante salientar que, para preservar a continuidade existente na curva inicial é preciso que cada *knot* dentro do *knot vector*,  $\Xi$ , seja repetido mais uma vez, ou seja, tenha sua multiplicidade aumentada em 1, para cada elevação do grau de aproximação polinomial. O número de pontos de controle, e por consequência o número de funções de base aumenta e a continuidade e o número de elementos são preservados. A Figura 3.4 ilustra o refinamento de Elevação do grau de aproximação polinomial, onde o grau inicial da

curva era  $p = 2$  e passou para  $p = 3$  a partir da inserção sucessiva dos *knots*  $0$  e  $1$ .

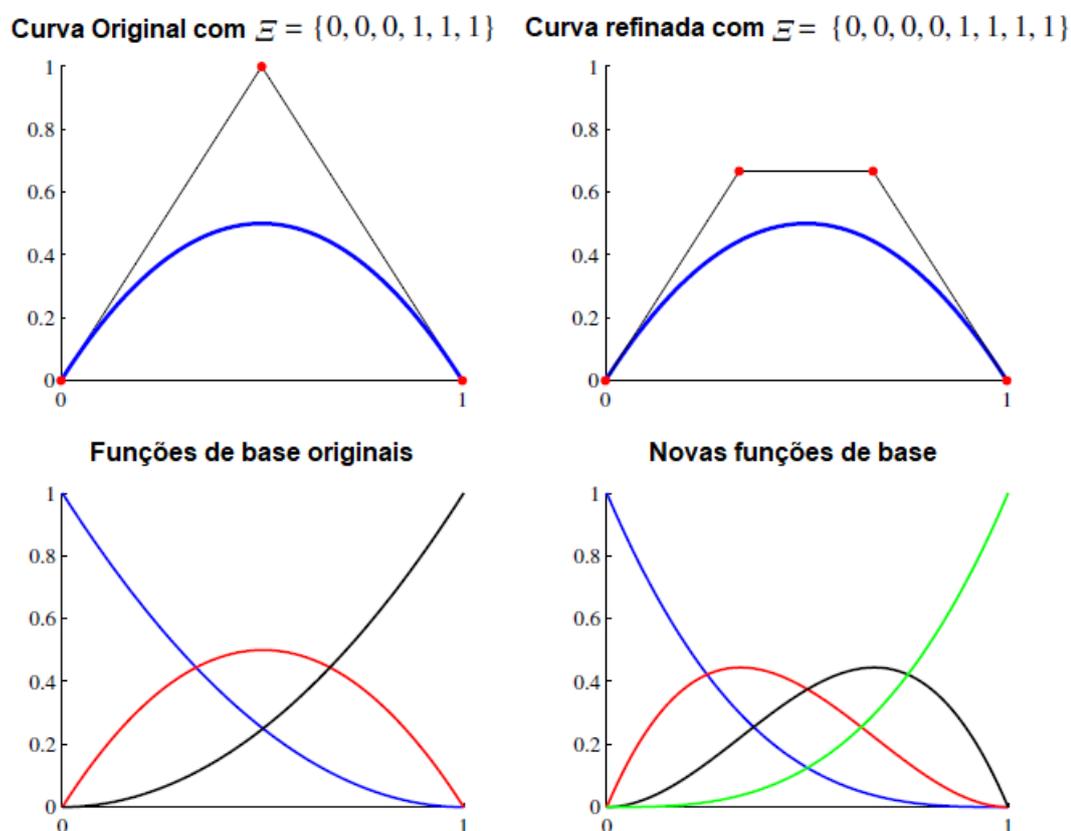


Figura 3.4: Refinamento Elevação do grau de aproximação polinomial, pontos de controle  $\bullet$  - Adaptada (Hughes et al., 2005).

O **Refinamento  $k$**  é uma combinação entre o refinamento de elevação de grau de aproximação polinomial e o de inserção de *knot*. A ideia desse refinamento é aumentar o grau da aproximação, sua continuidade e o número de elementos do modelo. Primeiramente aumenta-se o grau do polinômio, seguindo a mesma ideia descrita no refinamento de elevação do grau da aproximação polinomial e depois insere-se *knots* subdividindo os elementos. Outra possibilidade é apenas aumentar a multiplicidade dos *knots* de extremidade, após praticar o refinamento de inserção de *knots*, o que gera o mesmo resultado. É importante ressaltar que o refinamento  $k$  não possui nenhuma equivalência na teoria clássica do MEF.

A Figura 3.5 ilustra a metodologia do refinamento  $k$ , sendo realizado do gráfico  $a$  para o  $b$  e do  $b$  para o  $c$ . Ainda na Figura 3.5 é possível perceber que inicialmente

foi praticado um refinamento de inserção de *knots*, o que gerou uma subdivisão em três elementos a partir da inserção dos *knots* 1 e 2, depois do gráfico *a* para o *b* o grau foi elevado de  $p = 2$  para  $p = 3$  e do gráfico *b* para o *c* o grau foi elevado de  $p = 3$  para  $p = 4$ .

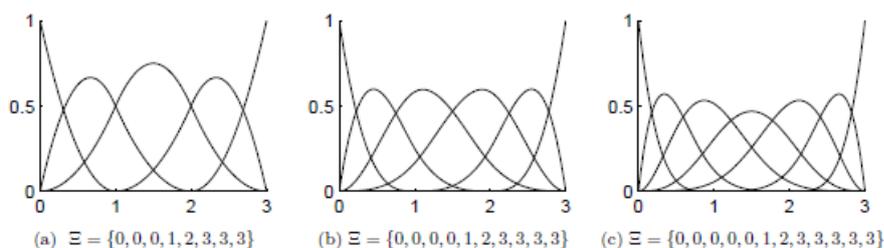


Figura 3.5: Refinamento k (Nguyen, 2011).

### 3.2.3 B-Splines não uniformes racionais (NURBS)

B-Splines são funções de base não racionais e, por isso, formam curvas, superfícies e sólidos de descrição não racional também. Por sua vez, funções do tipo NURBS (*non uniform rational B-Splines*) são capazes de representar de maneira exata seções cônicas, incluindo círculos e curvas de forma livre, apenas pela inserção de pesos nos pontos de controle. Elas são, assim, capazes de representar curvas, superfícies e sólidos de descrição racional. A única diferença das funções do tipo NURBS para as B-Splines originais se dá na formulação da função de base, sendo que a formação de curvas, superfícies e as formas de refinamento de malha se mantêm inalterados.

#### 3.2.3.1 Formulação das funções do tipo NURBS

A Função de Base do tipo NURBS é formulada da maneira que segue:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} \quad (3.11)$$

onde  $W(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}$  é a função de pesos,  $N_{i,p}(\xi)$  são as funções B-Splines definidas na Seção 3.2.2 e  $w_i$  é o peso associado a um determinado ponto de controle.

Uma curva construída com funções do tipo NURBS é descrita por:

$$\mathbb{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) P_i \quad (3.12)$$

Uma superfície construída com funções do tipo NURBS é descrita por:

$$\mathbb{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}} P_{i,j} \quad (3.13)$$

A primeira derivada de uma função do tipo NURBS é dada utilizando a regra do quociente:

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi) N'_{i,p}(\xi) - W' N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi)} \quad (3.14)$$

onde:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) \quad (3.15)$$

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N'_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}} \quad (3.16)$$

As propriedades das funções do tipo NURBS são bem semelhantes àsquelas das B-Splines, são elas (Hughes et al., 2005):

- Constituem partição da unidade,
- Possuem o mesmo suporte e continuidade que as B-Splines,
- Se os pesos são iguais, a NURBS transforma-se em B-Spline.

O procedimento de refinamento das funções do tipo NURBS segue a mesma ideia e roteiro daquele apresentado para as B-Splines na Seção 3.3. Uma única diferença aparece em virtude dos pesos associados aos pontos de controle. A primeira etapa é projetar os pontos de controle, originalmente descritos bidimensionalmente através

das coordenadas  $-x$  e  $-y$ , para um espaço 3D, que considera o peso desse ponto de controle como uma terceira coordenada, conforme:

$$\mathbf{P}_i = (x_i, y_i) \longrightarrow \mathbf{Q}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i) \quad (3.17)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas originais dos pontos de controle e  $w_i$  é o peso original.

Depois de realizada essa projeção, realizam-se os refinamentos desejados, podendo ser tanto o refinamento de elevação de grau de aproximação polinomial, quanto o de inserção de *knots* ou  $k$ . Por fim, projeta-se de volta para o espaço 2D, obtendo-se assim a descrição das funções refinadas na estrutura de coordenadas originais:

$$\mathbf{Q}_i = (w_i^1 x_i^1, w_i^1 y_i^1, w_i^1) \longrightarrow \bar{\mathbf{P}}_i = (x_i^1/w_i^1, y_i^1/w_i^1) \quad (3.18)$$

onde  $x_i^1$  e  $y_i^1$  são as coordenadas após o refinamento dos pontos de controle e  $w_i^1$  é o peso após o refinamento.

É importante ressaltar que o peso encontrado após o refinamento se mantém inalterado, não sendo necessária qualquer projeção ou manipulação.

### 3.3 Análise Isogeométrica

A Análise Isogeométrica (AIG) utiliza a mesma representação de funções de base para aproximar a geometria exata do modelo analisado e para aproximar a solução do modelo físico, por exemplo. Assim as funções do tipo NURBS podem ser também utilizadas na formulação da solução do problema conforme é apresentado nessa seção.

#### 3.3.1 Geometria

A geometria é aproximada utilizando as funções do tipo NURBS, construídas a partir da Equação (3.11), e as coordenadas dos pontos de controle,  $P_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de pontos de controle do modelo:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n R_i x_i \quad \tilde{y} = \sum_{i=1}^n R_i y_i \quad (3.19)$$

### 3.3.2 Deslocamentos

De forma semelhante à descrição da geometria, os deslocamentos são aproximados pelas mesmas funções do tipo NURBS:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n R_i u_i \quad \tilde{v} = \sum_{i=1}^n R_i v_i \quad (3.20)$$

onde  $u_i, v_i$  são graus de liberdade dos pontos de controle. Essa mesma Equação (3.20) em formato matricial:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de aproximação dos deslocamentos, composta por uma série de submatrizes correspondentes a cada ponto de controle:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

É importante ressaltar que os pontos de controle não necessariamente pertencem ao modelo geométrico criado, portanto, os graus de liberdade associados a esses pontos de controle não possuem sentido físico, servindo apenas como base para o cálculo dos deslocamentos que de fato ocorrem no interior do domínio. Exceções, por exemplo, no caso de multiplicidades de *knots* específicas ou pontos das extremidades de um *knot vector*.

### 3.3.3 Deformações

Considerando pequenos deslocamentos, em um problema da elasticidade bidimensional, as componentes de deformações são representadas vetorialmente como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 \\ 0 & R_{i,y} \\ R_{i,y} & R_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento, composta por várias submatrizes correspondentes a cada ponto de controle:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

As funções de base  $R_i$  são dadas em função de coordenadas paramétricas  $(\xi, \eta)$ , portanto, para o cálculo de  $\mathbf{B}$  é necessário, assim como no MEF, utilizar o Jacobiano da transformação para retorna-las às coordenadas  $(x, y)$ . O Jacobiano da transformação é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum R_{i,\xi} x_i & \sum R_{i,\xi} y_i \\ \sum R_{i,\eta} x_i & \sum R_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

A transformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} R_{i,x} \\ R_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} R_{i,\xi} \\ R_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

### 3.3.4 Equações de Equilíbrio

Considerando deformações infinitesimais, tensor das tensões de Green-Lagrange, e utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.27)$$

onde a integral do lado esquerdo da igualdade é o trabalho virtual interno e as integrais do lado direito representam o trabalho virtual das forças externas,  $\mathbf{u}$  é o vetor do campo de deslocamentos,  $\mathbf{v}$  é o vetor do campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível,  $\mathbf{b}$  é o vetor das forças de corpo e  $\bar{\mathbf{t}}$  o vetor das forças de superfície, definido no contorno de Neumann,  $\partial\Omega_n$ :

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{em} \quad \partial\Omega_n \quad (3.28)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor das direções normais à superfície para  $\partial\Omega_n$ .

No contorno de Dirichlet,  $\partial\Omega_d$ , define-se  $\mathbf{u}$ , como condições de contorno essenciais, dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{em} \quad \partial\Omega_d \quad (3.29)$$

Além disso, considerando comportamento elástico linear, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva elástica,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das componentes de tensão no plano e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é definida pela Equação (3.23).

Substituindo-se as funções de deslocamentos virtuais pela aproximação descrita na Equação (3.21) e utilizando-se as Equações (3.23) e (3.30), tem-se:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.31)$$

O Vetor de forças  $\mathbf{f}$  e a Matriz de Rigidez  $\mathbf{K}$  são dados por:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.33)$$

Por fim:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{d}$  o vetor de deslocamentos nodais da Equação (3.21),  $\mathbf{N}$  é definido na Equação (3.22) e  $\mathbf{B}$  é definido na Equação (3.24).

### 3.3.5 Aplicação das Condições de Contorno Essenciais

As funções de base B-Spline e, especialmente, as funções do tipo NURBS são não interpolatórias na maioria de seus pontos, conforme abordado na Seção 3.2.2.1. Esse comportamento dificulta a imposição das condições de contorno essenciais dos problemas analisados. Para superar esse obstáculo, estratégias tradicionalmente utilizados nos Métodos sem Malhas, cujas funções de base possuem essa mesma característica, podem e são utilizadas na AIG.

Algumas estratégias de imposição de condições de contorno se concentram em modificar a forma fraca do problema a partir da introdução de parcelas de modo a garantir que tais condições de contorno sejam consideradas na forma indireta (Fernández-Méndez e Huerta, 2004). Dentro desse contexto, dois métodos serão analisados e abordados nesse trabalho: Método da Penalidade e Método de Nitsche (Fernández-Méndez e Huerta, 2004). Ambos os métodos adicionam termos de penalização ao funcional de energia forçando a solução a satisfazer as condições de contorno essenciais do problema.

O Método da Penalidade e o Método de Nitsche dependem apenas da escolha de um valor escalar, conhecido como parâmetro de penalidade, para realizar a imposição das condições de contorno. A diferença entre os dois é que o Método da Penalidade tende a requerer maiores valores desse parâmetro, o que, em alguns problemas, pode levar a um mau condicionamento das matrizes associadas ao processo de solução. O Método de Nitsche, em compensação, tende a ser menos suscetível às variações desse parâmetro, não sofrendo com mau condicionamento. A formulação do método de Nitsche é feita de forma que a imposição das condições de contorno seja feita de maneira mais estável, a partir do acréscimo de um termo de acoplamento, além do termo de penalização, o que torna sua implementação mais complexa.

A Formulação do Método da Penalidade, a partir da modificação da Equação (3.31), é descrita a seguir:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \eta \left( \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T (\mathbf{u}_d - \mathbf{d}) d\Gamma \right) \quad (3.35)$$

onde  $\eta$  é o parâmetro de penalidade.

O termo multiplicado por  $\eta$  é uma imposição evidente da relação  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ . O novo problema a ser resolvido torna-se, portanto:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T \mathbf{u}_d d\Gamma \quad (3.36)$$

A formulação do Método de Nitsche é adaptada aqui a partir do trabalho de Hah et al. (2014). Resumidamente, a Equação (3.31) é reescrita, levando em conta o fato que os deslocamentos virtuais não se anulam numericamente no contorno:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} - \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.37)$$

O componente adicionado trata-se do termo de acoplamento. Ele é importante dentro do Método de Nitsche, porque garante que as condições de contorno de Dirichlet sejam incorporadas ao sistema de maneira estável e precisa. Além disso, ele melhora a estabilidade do sistema na medida em que garante que a transição dos valores na fronteira  $\partial\Omega_d$  seja suave.

Para garantir a simetria da forma bi-linear são adicionados os termos  $-\left( \int_{\partial\Omega_d} (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B})^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d}$  e seu correspondente, no lado esquerdo e direito da equação:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) d\Gamma - \int_{\partial\Omega_d} (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B})^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\partial\Omega_d} (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B})^T \mathbf{u}_d d\Gamma \quad (3.38)$$

Por fim, o termo multiplicado por  $\eta$  (termo de penalização) é adicionado aos dois lados, a fim de possibilitar a imposição de  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ . O novo problema a ser resolvido torna-se, portanto:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) d\Gamma - \int_{\partial\Omega_d} (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B})^T \mathbf{N} d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} = \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\partial\Omega_d} (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{B})^T \mathbf{u}_d d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{N}^T \mathbf{u}_d d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.39}$$

### 3.4 Extração de Bézier

A implementação de um programa computacional baseado na Análise Isogeométrica segue os mesmos princípios fundamentais que os clássicos problemas de solução via MEF. Sobretudo para modelos da mecânica dos sólidos e das estruturas, os campos de tensões e deslocamentos e o equilíbrio de forças são representados em uma formulação comum ao MEF. As diferenças significativas na implementação de um código baseado na formulação da AIG estão associados às funções de aproximação.

No contexto da implementação, não se trata somente de modificar as funções de base para AIG e seguir a formulação apresentada na Seção 3.3. Na formulação do MEF é necessário percorrer cada elemento finito realizando apenas uma sequência de operações para se obter a contribuição para a construção da matriz de rigidez do modelo. Já na AIG, em cada elemento finito são realizadas duas sequências de operações, para problemas bidimensionais ou três para problemas tridimensionais. Isso ocorre, porque as funções de base da AIG (NURBS) são distintas em cada direção do problema e, portanto, definidas separadamente (Nguyen, 2011). Além disso, na análise via AIG são necessários dois mapeamentos de coordenadas (Nguyen, 2011):

- são definidos os pontos de Gauss no elemento de referência, Figura 3.1(c), similar ao MEF,
- as coordenadas dos pontos de Gauss são mapeadas de volta para o espaço paramétrico, Figura 3.1(b),

- as funções de base e suas derivadas são avaliadas dentro do espaço paramétrico,
- as derivadas são novamente mapeadas para o elemento de referência, Figura 3.1(c),
- com essas informações o Jacobiano da transformação e as derivadas físicas do modelo podem ser avaliadas, ligação entre a Figura 3.1(c) e a Figura 3.1(a).

Uma maneira de evitar o excesso de ciclos na formação dos elementos e de transformação de coordenadas é utilizar a Extração de Bézier (Borden et al., 2011). Esse excesso de ciclos onera a solução computacionalmente, conforme apresentado em Van Do et al. (2020) para o caso de placas formadas por compósitos, tornando a técnica da Extração de Bézier ainda mais vantajosa de ser utilizada na implementação da AIG. Com essa técnica a implementação fica bastante similar à implementação do MEF, diferindo apenas as funções de base e o cálculo da matriz de extração e, assim, fazendo com que a AIG seja facilmente implementada em programas computacionais já existentes que utilizam o MEF.

### 3.4.1 Elementos de Bézier e os Polinômios de Bernstein

Os elementos de Bézier, são em geral formados por *knot vectors*, em cada direção paramétrica, que não possuem *knots* internos, ou seja, são formados apenas por 0 e 1, que se repetem  $(p + 1)$  vezes, cada, sendo  $p$  a ordem polinomial da aproximação do elemento de Bézier. As funções de base que formam os elementos de Bézier são chamadas de Polinômios de Bernstein. Uma opção é utilizar o intervalo de atuação do polinômio de Bernstein de  $[-1,1]$  (Borden et al., 2011; Nguyen, 2011), para torná-lo similar ao elemento de referência utilizado em MEF.

Os polinômios de Bernstein podem ser formados a partir da formulação das B-Splines, Equação (3.1) e (3.2). Porém como eles não possuem *knots* internos e alcançam apenas o intervalo  $[-1,1]$ , repetidos  $(p + 1)$  vezes, sua formulação pode ser compactada:

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)B_{i,p-1}(\xi) + \frac{1}{2}(1 + \xi)B_{i-1,p-1}(\xi) \quad (3.40)$$

onde:

$$B_{1,0}(\xi) = 1 \quad e \quad B_{i,p}(\xi) = 0 \quad se \quad i < 1 \quad ou \quad i > p + 1 \quad (3.41)$$

Assim como as B-Splines, os polinômios de Bernstein constituem partição da unidade e são não-negativos em todo o domínio. Além disso, assim como os polinômios de Lagrange são simétricos e interpolatórios nos pontos extremos, ainda que caiba ressaltar que os polinômios de Lagrange são interpolatórios em todo o domínio.

Sua primeira derivada é dada por:

$$\frac{d}{d\xi} B_{i,p}(\xi) = \frac{p}{2}[B_{i-1,p-1}(\xi) - B_{i,p-1}(\xi)] \quad (3.42)$$

A curva de Bézier é dada por uma combinação linear entre os pontos de controle,  $P_i$ , e os polinômios de Bernstein:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) P_i = P^T B(\xi) \quad (3.43)$$

### 3.4.2 Operador de Extração de Bézier

O Operador de Extração de Bézier mapeia as B-Splines ou NURBS em polinômios de Bernstein. Essa transformação torna possível que os elementos de Bézier tenham continuidade  $C^0$  entre eles e, portanto, possam ser representados de maneira semelhante ao que é feito em MEF. Essa seção tem o objetivo de mostrar como fazer a decomposição das B-Splines e NURBS em polinômios de Bernstein através da obtenção do operador de extração de Bézier.

Para decompor um conjunto de funções de base do tipo NURBS em elementos de Bézier, a chamada decomposição de Bézier, primeiramente é preciso aumentar a multiplicidade dos *knots*, a partir da inserção de *knots*, apresentada na Seção 3.2.2.3,

até que esta chegue ao valor igual ao grau de aproximação polinomial da B-Spline ou da NURBS,  $p$ . Assim, alcança-se a continuidade  $C^0$  entre elementos, característica dos elementos formados por polinômios de Bernstein, também chamados de Funções de Base de Bézier.

Ainda que a continuidade alcançada, após a criação dos elementos de Bézier, e conseqüentemente de concluída a extração de Bézier, seja  $C^0$ , nenhum impacto na continuidade das funções utilizadas para a aproximação da solução é prejudicada, isso porque os ponto de controle, que são graus de liberdade do problema, são os originais, sendo a extração de Bézier apenas uma estratégia de solução, um caminho a ser percorrido para chegar às funções originais.

Tomando como exemplo um *knot vector*,  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3]$ , cujo grau de aproximação polinomial é  $p = 3$  e o número de funções de base que ele é capaz de representar, igual ao número de pontos de controle, é  $n = 6$ . Para realizar a extração de Bézier é necessário que os *knots* internos, 1 e 2, alcancem a multiplicidade igual a 3. Assim, deverão ser adicionados em ordem os *knots*  $[1, 1, 2, 2]$ . O número de funções de base, então, aumenta de 6 para 10. A Figura 3.6 mostra a decomposição de Bézier para o exemplo apresentado e ilustra que mesmo após a inserção dos *knots* em nada a curva final é alterada.

Operador de extração de Bézier para uma função do tipo NURBS deve ser computado de maneira que essa NURBS seja dividida em vários elementos de Bézier. Assume-se um *knot vector*,  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e um conjunto de pontos de Controle  $\mathbf{P} = \{P_A\}_{A=1}^n$  que definem uma curva B-Spline e um conjunto  $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_m]$  de *knots* que precisam ser inseridos para realizar a decomposição de Bézier. Então, para cada *knot*,  $\bar{\xi}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  inserido, define-se um  $\alpha_A^j$ ,  $A=1, 2, \dots, n+j$ , como sendo o  $A$ -ésimo  $\alpha$  calculado na  $j$ -ésima inserção de *knot*, calculado na Equação (3.8). Assim, o operador de extração de Bézier é dado por:

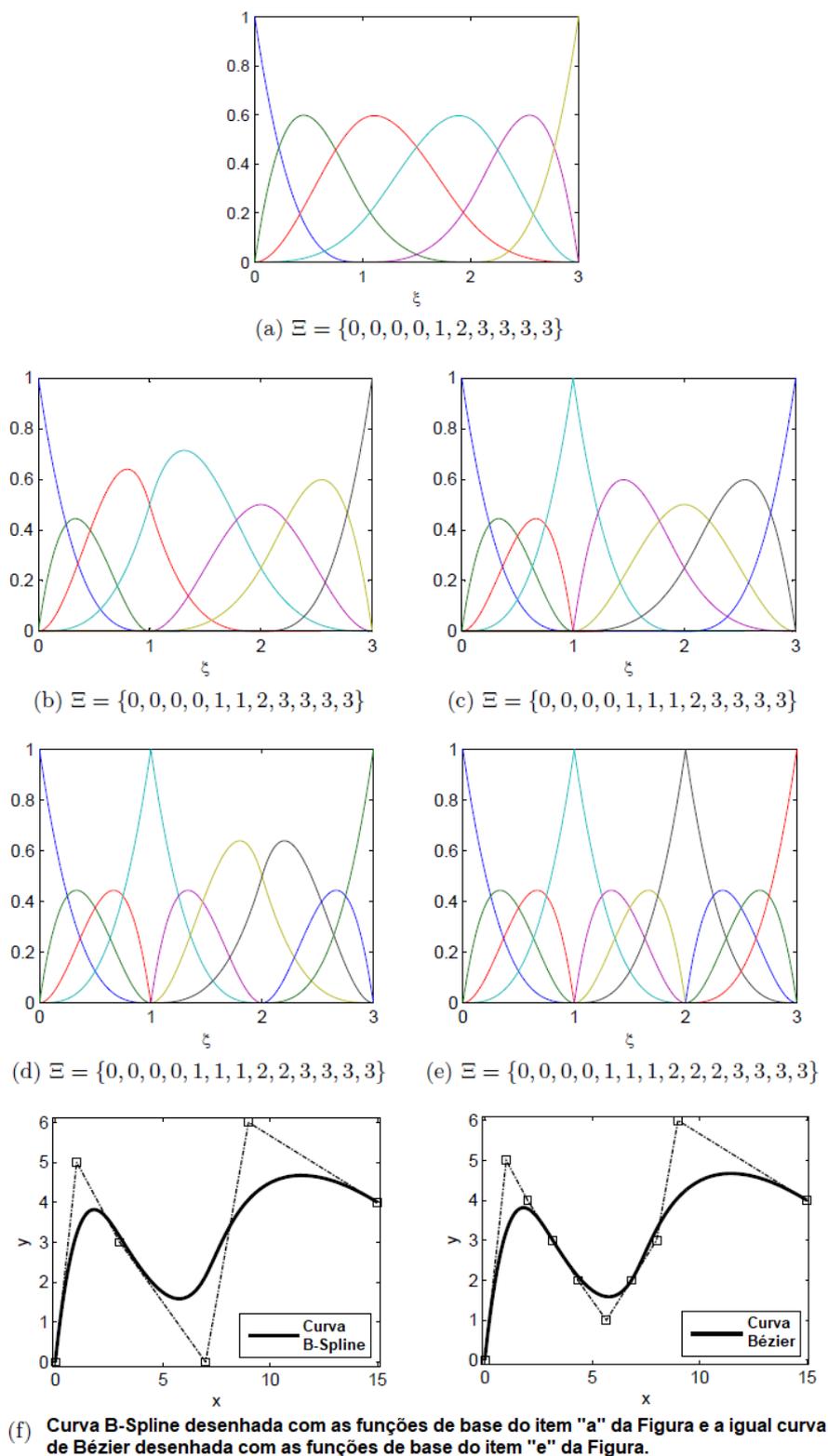


Figura 3.6: Decomposição de Bézier para o *knot vector*  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3]$   
 - Adaptada - (Nguyen, 2011).



O que leva à relação entre as funções B-Splines e as funções de Bézier, igualando-se as Equações (3.48) e (3.49):

$$\mathbf{N}(\xi) = \mathbf{C}\mathbf{B}(\xi) \quad (3.50)$$

sendo que  $\mathbf{C}$  é o chamado operador de extração de Bézier. O único dado necessário para a construção do operador de extração de Bézier é o *knot vector*, sendo ele, portanto, independente das funções de base e dos pontos de controle. O que significa dizer que a formulação para o operador é a mesma tanto quanto se trata de B-Splines quanto se trata de NURBS.

Para a descrição das funções tipo NURBS como resultado da combinação das funções de base de Bézier e do operador de extração de Bézier é necessário reescrever a função de pesos,  $W(\xi)$ :

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi) = \mathbf{w}^T \mathbf{C}\mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{C}^T \mathbf{w})^T \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{w}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = W^b(\xi) \quad (3.51)$$

onde  $\mathbf{w}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{w}$  são os pesos associados as funções de base, ou pontos de controle, de Bézier.

Escrevendo a Equação (3.11) em formato matricial:

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{W}\mathbf{N}(\xi) \quad (3.52)$$

Substituindo na Equação (3.52) a Equação (3.50):

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W^b(\xi)} \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{B}(\xi) \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz diagonal que contém os pesos associados a cada um dos pontos de controle e, conseqüentemente, das funções tipo NURBS, conforme Seção 3.2.3.

A relação entre os pontos de controle das funções do tipo NURBS e os pontos de controle obtidos após a decomposição de Bézier é dada, combinando as Equações

(3.12), (3.43) e (3.53), por:

$$\mathbf{P}^b = (\mathbf{W}^b)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (3.54)$$

onde  $\mathbf{W}^b$  é a matriz diagonal que contém os pesos de Bézier  $w^b$ .

A Equação (3.54) pode ser interpretada como o mapeamento dos pontos de controle originais no espaço de projeção dos elementos de Bézier criado (Borden et al., 2011). De maneira similar ao que foi realizado na Equação (3.47) para B-Splines.

Multiplicando a Equação (3.54) por  $\mathbf{W}^b$ :

$$\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (3.55)$$

Reescrevendo a Equação (3.12) em formato matricial e substituindo nela às Equações (3.53) e (3.55), uma curva construída com funções do tipo NURBS descrita após a decomposição em polinômio de Bézier é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\xi) &= \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{P}_i = \mathbf{P}^T \mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W^b(\xi)} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) = \frac{1}{W^b(\xi)} (\mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P})^T \mathbf{B}(\xi) = \\ &= \frac{1}{W^b(\xi)} (\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\xi) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Exemplos práticos de utilização da extração de Bézier podem ser encontrados em Borden et al. (2011) e Nguyen (2011).

### 3.5 Análise Isogeométrica Estendida - AIGE

Na Análise Isogeométrica Estendida (AIGE) o espaço de aproximação da solução obtida via AIG é estendido a partir do enriquecimento das funções de base dos pontos de controle. Torna-se interessante realizar esta operação, em regiões próximas a fenômenos geradores de concentrações no campo de tensões com funções de enriquecimento locais, previamente conhecidas, que descrevem bem esse fenômeno.

A estratégia de enriquecimento utilizada na AIGE é derivada de métodos como o Método das Nuvens (Duarte, 1996), o Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (Babuška e Melenk, 1997) e o MEFGE/E (Belytschko e Black, 1999; Duarte et al., 2000). A diferença entre estes métodos e a AIGE é a construção da partição da unidade, PU, que neste último é realizada com as funções do tipo NURBS (Tran et al., 2015). Uma definição mais completa do conceito de PU pode ser encontrado em Oden e Reddy (2011).

As funções de enriquecimento locais,  $L_{ji}(\mathbf{x})$ , que são específicas para cada problema a ser analisado, são  $q_j$  funções linearmente independentes, definidas para cada função de base ou ponto de controle,  $\mathbf{x}_j$ , como:

$$\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} = \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\}, \quad \text{com } L_{j1}(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.57)$$

O conjunto de funções de enriquecimento local multiplica a PU, que no caso da AIGE é formada pelas funções do tipo NURBS, definidas na Equação (3.11), a fim de criar o conjunto de funções enriquecidas,  $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ :

$$\{\phi_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} = R_j^p(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (3.58)$$

sem somatório em  $j$ .

Com base na formulação apresentada, uma aproximação genérica  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  é obtida através da combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n R_j^p(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ji} \right\} \quad (3.59)$$

onde  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{b}_{ji}$  são parâmetros nodais associados com cada componente  $R_j^p(\mathbf{x})$  da AIG e  $R_j^p(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$  da AIGE, respectivamente.

### 3.6 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A análise do comportamento das trincas apresentadas nesse trabalho será dada dentro do domínio da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), em que se considera que a zona plástica formada ao redor da ponta da trinca é muito pequena quando comparada ao tamanho do comprimento da própria trinca. Dentro da MFLE o principal parâmetro de análise é o Fator de Intensidade de Tensão,  $K$ . A Figura 3.7 mostra os dois modos de deslocamento da superfície de trinca que podem ocorrer a depender do carregamento para um problema bi-dimensional. Há um terceiro modo, correspondente ao segmento no plano  $xz$ , não mencionado, porque não será abordado nesse texto. O Modo I está associado com uma tração aplicada, também chamado de modo de abertura e está relacionado ao parâmetro  $K_I$ . O Modo II está associado a um esforço de cisalhamento aplicado, é o modo de deslizamento e está relacionado ao parâmetro  $K_{II}$ . Esses modos podem ser superpostos e combinados, formando a solução geral do campo de tensões e deformações próximos à ponta da trinca (Tada et al., 1939).

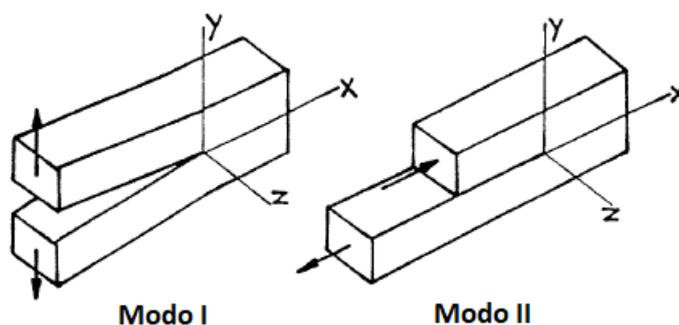


Figura 3.7: Modos de Abertura de Trinca (Tada et al., 1939) (Adaptada).

A determinação do campo de deslocamentos e de tensões na vizinhança da ponta da trinca estende dos conhecimentos da análise de problemas bidimensionais através da teoria da elasticidade (Szabo e Babuška, 1988, 1991). Mais detalhes dessa formulação serão fornecidos oportunamente na Seção 3.7.3, uma vez que a solução de

deslocamentos é utilizada como função de enriquecimento da PU dentro do contexto da AIGE e obviamente também do MEFGE.

### 3.7 Funções de Enriquecimento

As funções de enriquecimento utilizadas na AIGE podem ser quaisquer, tais como funções de salto representando descontinuidades, ou com gradientes singulares associados às concentrações de tensões. Outro tipo de função de enriquecimento muito utilizada no contexto do MEFGE são as funções polinomiais também apresentadas nessa seção. Além disso, até mesmo uma função advinda de um outro processo de solução resolvido *a priori*, como por exemplo da técnica global-local, pode ser utilizada como função de enriquecimento da PU, sendo esta a proposta desse trabalho. A Técnica Global-Local é apresentada na Seção 3.8.

#### 3.7.1 Funções Polinomiais

As funções de aproximação polinomial são, geralmente, utilizadas para descrever soluções de comportamento suave. No Capítulo 5 os modelos analisados com o MEFGE são por vezes enriquecidos com essas funções polinomiais a fim de aumentar o grau de aproximação da solução. Somente a primeira e a segunda funções monomiais são usadas neste trabalho para enriquecer a PU dos nós do MEFGE a fim de alcançar aproximação polinomial quadrática ( $p = 2$ ) e cúbica ( $p = 3$ ), respectivamente:

$$\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^3 = \left\{ 1, \left( \frac{x - x_j}{h_j} \right), \left( \frac{y - y_j}{h_j} \right) \right\} \quad (3.60)$$

$$\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^5 = \left\{ 1, \left( \frac{x - x_j}{h_j} \right), \left( \frac{y - y_j}{h_j} \right), \left( \frac{x - x_j}{h_j} \right)^2, \left( \frac{y - y_j}{h_j} \right)^2 \right\} \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$  são as coordenadas dos nós  $j$  e  $h_j$  é o diâmetro do círculo que circunscreve o maior elemento finito que compartilha o nó  $j$ . A subtração pela

coordenada nodal e divisão pelo parâmetro  $h_j$  tem o objetivo de reduzir erros de arredondamento durante a análise numérica (Duarte et al., 2000).

### 3.7.2 Funções de Heaviside

A função de Heaviside é usada para introduzir descontinuidades no modelo, como no caso da presença de segmentos de trinca. Ela foi inicialmente proposta, quando sua utilização foi aliada ao MEF/E, por Moës et al. (1999) para modelos bidimensionais e posteriormente em Sukumar et al. (2000) para modelos tridimensionais. Em Luycker et al. (2011); Ghorashi et al. (2012); Tran et al. (2015); Bhardwaj et al. (2013) a função de Heaviside foi utilizada aliada a AIG para modelos 2D e em Singh et al. (2018) para modelos tridimensionais.

Seguindo Moës et al. (1999),  $H(\mathbf{x})$  pode ser dada por:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.62)$$

Na Equação (3.62),  $\mathbf{x}$  é o vetor posição do ponto de cálculo de  $H(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}^*$  é o vetor posição do ponto mais próximo de  $\mathbf{x}$  que está contido na trinca e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à face da trinca.

### 3.7.3 Funções de Enriquecimento com Derivadas Singulares

Alguns problemas contêm características, tais como cantos, reentrâncias e trincas que são muito pobremente descritos via AIG, apenas. Nesses casos, convém utilizar funções com singularidades em suas derivadas e descontínuas para melhor descrever os campos de tensão e deslocamento que não se comportam de forma suave.

Com o objetivo de reproduzir a singularidade no campo de tensões produzida pela ponta da trinca, dois tipos de funções são tipicamente usadas. São as funções conhecidas como OD e BB, conforme descrito em Park et al. (2009). As funções OD, que são utilizadas nesse trabalho, derivam da teoria da elasticidade conforme comentado na Seção 3.6 (Szabo e Babuška, 1988, 1991). Essas funções foram utilizadas por

Oden e Duarte (1997) em problemas bidimensionais e em problemas tridimensionais por Duarte et al. (2000). Já as funções BB foram propostas por Belytschko e Black (1999) para problemas de qualquer dimensão. Na sequência a teoria e formulação das funções OD são apresentadas.

Para o entendimento das funções de singularidade mencionadas, considera-se um modelo bidimensional, com a concavidade descrita por bordas retas que se encontram no vértice O de coordenadas  $(O_x, O_y)$ , Figura 3.8. O ângulo de abertura entre as bordas é dado por  $2\pi - \alpha$  e, alinhado com sua bissetriz, tem-se o eixo cartesiano local  $(\xi, \eta)$  e o eixo local de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , ambos com a mesma origem no vértice O, (Szabo e Babuška, 1988).

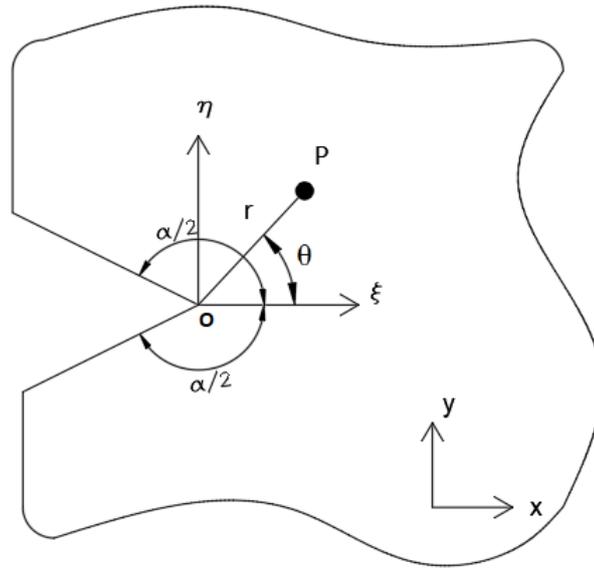


Figura 3.8: Eixos em duas dimensões associados com a ponta da trinca.

Na vizinhança do vértice, o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(r, \theta)$ , pode ser descrito como:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \begin{Bmatrix} u_\xi(r, \theta) \\ u_\eta(r, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_j^{(I)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(I)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(I)}(r, \theta) \end{Bmatrix} + A_j^{(II)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(II)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(II)}(r, \theta) \end{Bmatrix} \right] \quad (3.63)$$

Na Equação (3.63),  $u_\xi(r, \theta)$  e  $u_\eta(r, \theta)$  são os componentes do vetor  $\mathbf{u}$  apresentado nas direções  $\xi$ - e  $\eta$ -, respectivamente, os índices (I) e (II) referem-se às contribuições

associadas aos modos I e II de abertura entre as bordas, e o índice  $j$  refere-se aos termos da série infinita que descreve o campo de deslocamentos.

Considerando que o modelo está livre de tração nas bordas retas e desconsiderando as forças de corpo, tem-se que  $u_{\xi_j}^{(I)}$ ,  $u_{\eta_j}^{(I)}$ ,  $u_{\xi_j}^{(II)}$  e  $u_{\eta_j}^{(II)}$ :

$$u_{\xi_j}^{(I)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[ \kappa - Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(1)} \theta - \lambda_j^{(1)} \cos(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (3.64)$$

$$u_{\xi_j}^{(II)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[ \kappa - Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \operatorname{sen} \lambda_j^{(2)} \theta - \lambda_j^{(2)} \operatorname{sen}(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (3.65)$$

$$u_{\eta_j}^{(I)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[ \kappa + Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \operatorname{sen} \lambda_j^{(1)} \theta + \lambda_j^{(1)} \operatorname{sen}(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (3.66)$$

$$u_{\eta_j}^{(II)}(r, \theta) = -\frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[ \kappa + Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(2)} \theta + \lambda_j^{(2)} \cos(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (3.67)$$

Para o caso de trincas, as bordas se encontram, ou seja,  $\alpha=2\pi$ . Desta maneira tem-se  $\lambda_j^{(I)} = \lambda_j^{(II)} = \lambda_j$ :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{j+1}{2} \quad j \geq 2 \quad (3.68)$$

As constantes do material  $\kappa$  e  $G$ :

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \mapsto \quad \text{Estado plano de deformação (EPD)} \quad (3.69a)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \mapsto \quad \text{Estado plano de tensão (EPT)} \quad (3.69b)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.70)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.

Para trincas, os parâmetros  $Q_j^I$  e  $Q_j^{II}$ :

$$Q_j^I = \begin{cases} -1 & j = 3, 5, 7, \dots \\ -\Lambda_j^{(1)} & j = 1, 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.71)$$

$$Q_j^{II} = \begin{cases} -1 & j = 1, 2, 4, 6, \dots \\ -\Lambda_j^{(2)} & j = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (3.72)$$

Nas Equações (3.71) e (3.72) a variável  $\Lambda_j^{(s)}$ :

$$\Lambda_j^{(s)} = \frac{\lambda_j^{(s)} - 1}{\lambda_j^{(s)} + 1} \quad s = 1, 2 \quad (3.73)$$

Por fim, faz-se necessária a transformação das funções para o campo de deslocamentos, Equações (3.64 - 3.67), das coordenadas cartesianas locais para as coordenadas cartesianas globais:

$$\begin{bmatrix} u_{xj}^{(I)} & u_{xj}^{(II)} \\ u_{yj}^{(I)} & u_{yj}^{(II)} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(I)} & u_{\xi j}^{(II)} \\ u_{\eta j}^{(I)} & u_{\eta j}^{(II)} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação que aplicada ao vetor  $\mathbf{u}$ , descrito nas componentes  $\xi$ - e  $\eta$ -, permite obtê-lo nas componentes  $x$ - e  $y$ -.

Assim, a matriz resultante da Equação (3.74) representa a aproximação local a ser utilizada na AIGE. Por último, deve ser destacado que prevalece na literatura para o caso de problemas bidimensionais o uso de somente o primeiro termo da série na Equação (3.63). Por essa razão, neste trabalho, a Equação (3.74), a ser usada no processo de enriquecimento das aproximações pelo MEFGE/E ou pela AIGE, é particularizada para  $j = 1$ .

### 3.8 Técnica Global-Local

Segundo Duarte e Kim (2008), a eficácia do MEFG/E está intimamente ligada a escolha das funções de enriquecimento mais adequadas para determinado problema. Dentro desse contexto, foi proposto o MEFG/E acrescido da técnica Global-Local (MEFG/E<sup>gl</sup>), no qual uma função de enriquecimento personalizada é criada a partir da análise local das regiões de concentração de tensões do problema e essa é utilizada dentro da análise via MEFG/E do problema completo. Trata-se de um recurso importante porque, muitas vezes, funções de enriquecimento polinomiais e singulares não são capazes de descrever de maneira satisfatória o comportamento de fenômenos de interesse.

A técnica Global-Local consiste em realizar três etapas distintas e complementares. Na primeira etapa soluciona-se um problema denominado “global”, preferencialmente, um problema com malha de discretização grosseira que compreende todo o domínio do modelo e, geralmente, não são descritos os fenômenos geradores das concentrações de tensões, ou seja, nenhuma singularidade precisa ser representada, via enriquecimento, nessa etapa. Em seguida, na segunda etapa, define-se o problema denominado “local” que abrange a região onde se estima que vão ocorrer as concentrações de tensão, refina-se a malha dessa região e aplicam-se como condições de contorno os deslocamentos e/ou tensões calculadas no problema “global” neste problema “local” que, nesta etapa, é resolvido em separado. Por fim, na última etapa, a solução numérica “local” pode ser utilizada como função de enriquecimento compondo a Equação (3.57) e ampliando o campo de soluções do domínio “global” com o objetivo de realizar uma análise final do problema (Alves, 2012).

A Figura 3.9 mostra, resumidamente, as etapas da estratégia Global-Local. Nota-se ainda na Figura 3.9, que deve ser transmitida a solução do problema global como condições de contorno para o domínio local. Estas condições de contorno podem ser de Neumann, Dirichlet ou Cauchy. As condições de contorno de Neumann estão relacionadas a imposição de tensões, as de Dirichlet correspondem à imposição

de deslocamentos e as de Cauchy são um misto entre a imposição de tensões e deslocamentos. A imposição pode ser feita via método da penalidade.

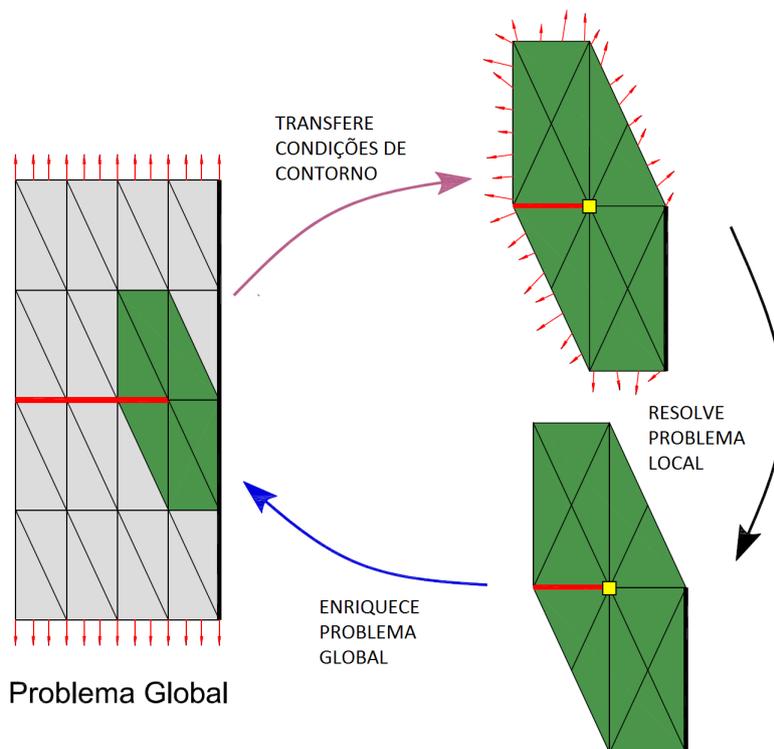


Figura 3.9: Estratégia Global Local (Adaptada) (Alves, 2012).

Para reduzir erros advindos da utilização da solução de um problema Global com malha grosseira, a imposição das condições de contorno para o problema Local, utilizando a técnica Global-Local pode ser feita de forma iterativa. Assim, na primeira iteração, o modelo local é analisado considerando-se as condições de contorno retiradas do problema global com aproximação grosseira. Depois de obtida a solução do problema global enriquecido, esse agora servirá de base para a descrição de novas condições de contorno. O problema Local é então resolvido novamente e, assim, o problema global será novamente solucionado com esse novo enriquecimento. Esse processo se repete quantas vezes for necessário. Pode-se impor uma tolerância a ser alcançada pela norma de energia ou fatores de intensidade de tensão, por exemplo, para determinar a convergência das iterações. Tal processo iterativo é muito útil e pode ser utilizado até mesmo no caso de trincas coesivas em que se deseja modelar o

amolecimento do material à medida que a trinca se propaga (Kim e Duarte, 2015). Em geral, poucas iterações no processo Global-Local são necessárias até se alcançar a convergência de resultados, obtendo-se uma convergência mais rápida para o caso de imposição das condições de contorno de Cauchy (Gupta et al., 2012).

Nesse trabalho, propõe-se, pela primeira vez, a extensão dos conceitos da técnica global-local para análises realizadas via AIGE, criando uma função de enriquecimento personalizada para ser utilizada próximo aos fenômenos geradores de concentração de tensões.

### 3.8.1 Formulação da Técnica Global- Local

A formulação dos três problemas que envolvem a técnica Global-Local, ainda que semelhantes, apresenta particularidades que merecem ser destacadas e que facilitam o entendimento de cada uma das etapas de resolução do problema, isoladamente. Por esse motivo, trata-se nessa seção as formulações do problema Global, Local e Global Enriquecidos de maneira separada.

#### 3.8.1.1 Problema Global

Inicialmente, considera-se o problema de elasticidade bidimensional, cujo contorno do domínio global é decomposto em  $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^d \cup \partial\Omega_G^n$  com  $\partial\Omega_G^d \cap \partial\Omega_G^n = \emptyset$ , sendo  $d$  e  $n$  referentes às regiões em que as condições de contorno de Dirichlet e Neumann são respectivamente aplicadas. A Figura 3.10 apresenta esses contornos, para um modelo hipotético, que mostra uma chapa, que em seu centro há uma trinca horizontal e está submetida a uma força distribuída em parte do contorno  $\partial\Omega_G^n$  e também há uma restrição em seu lado direito, ou seja, no contorno  $\partial\Omega_G^d$ .

Considerando-se ausentes as forças de corpo, a equação de equilíbrio para o problema global é a mesma daquela apresentada nas Seções 3.3.4 e 3.3.5.

O problema representado através do equilíbrio diferencial descrito na Equação (3.27) pode ser resolvido de maneira aproximada na sua forma variacional descrita a seguir:

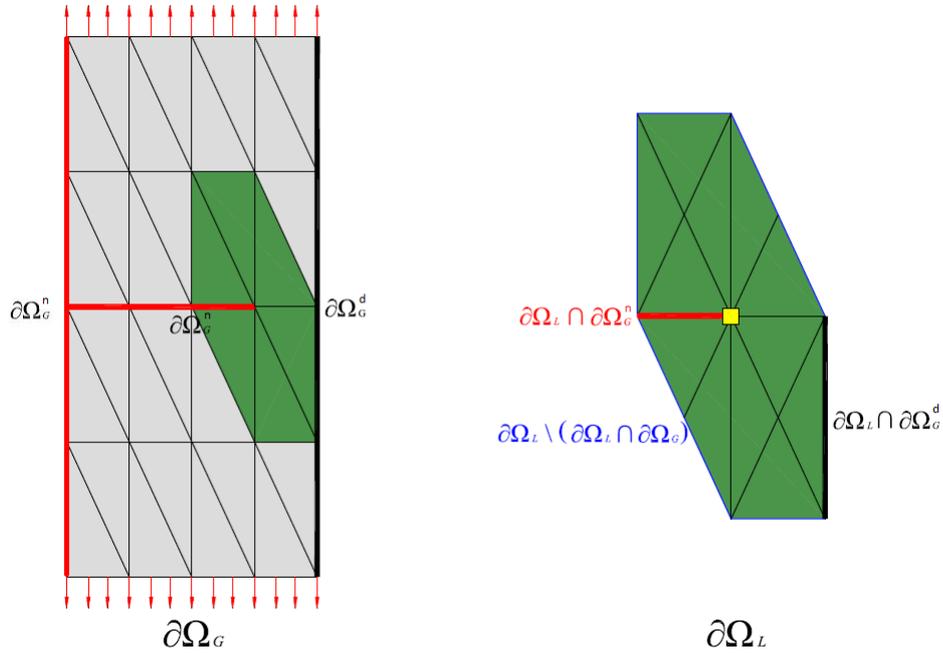


Figura 3.10: Domínios Global e Local mais refinado para melhor representação do campo de tensões próximo à ponta da trinca de um problema genérico com os respectivos contornos (Alves, 2012).

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_G^0) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) d\Omega = \int_{\partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_G^0)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.75a)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_G^0) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega_G^d} \mathbf{v}_G^0 \tilde{\mathbf{u}}_G^0 d\Gamma = \int_{\partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_G^0)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_G^d} \mathbf{v}_G^0 \mathbf{u}_d d\Gamma \quad (3.75b)$$

Na Equação (3.75), tem-se que  $\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$ , um espaço de Hilbert de ordem um definido em  $\Omega_G$ , construído pelo método discreto utilizado (MEF ou MEFGE/E, Equação (3.75a), ou AIG ou AIGE, Equação (3.75b)). No caso da AIG, a aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$  é construída como na Equação (3.20) e para AIGE de acordo com a Equação (3.59). Não foram apresentadas as equações para a solução do problema global utilizando o método de Nitsche, pois, ele não foi utilizado. A justificativa dessa escolha é apresentada em detalhes no Capítulo 5.

Nesta primeira etapa, a função enriquecedora  $L_{ji}$  na Equação (3.59) pode ser qualquer função, como por exemplo uma função polinomial ou descontínua, de gradiente singular, ou até mesmo não ser utilizada nenhuma função enriquecedora. Ou seja, pode-se criar um problema global inicial enriquecido de forma a melhorar a transmissão de condições de contorno para o problema Local, caso seja de interesse.

### 3.8.1.2 Problema Local

Considera-se, inicialmente, o subdomínio Local  $\Omega_L$  que está contido no domínio Global  $\Omega_G$ . O problema Local é resolvido no domínio  $\Omega_L$  depois que a primeira etapa global foi resolvida e se dispõe da solução global inicial  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ . Nesta segunda etapa, busca-se a solução do problema local  $\tilde{\mathbf{u}}_L$ . Os contornos do domínio Local são divididos em:  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^d$ ,  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^n$  e  $\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)$ , ilustradas pela Figura 3.10.

O problema representado através do equilíbrio descrito na Equação (3.27) pode ser resolvido de maneira aproximada na sua forma variacional descrita a seguir, considerando que o domínio do problema local está afastado do contorno de Dirichlet do problema global:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall \mathbf{v}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L)}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_L) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{v}_L)^T \tilde{\mathbf{u}}_L d\Gamma = \\ & \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{v}_L)^T (\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \eta \tilde{\mathbf{u}}_G^0) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde  $\tilde{\chi}_L(\Omega_L)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$ , um espaço de Hilbert de ordem um definido em  $\Omega_L$ , construído pelo método discreto utilizado (MEF ou MEF/G/E ou AIG ou AIGE). No caso da AIG, a aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$  é construída como na Equação (3.20) e para AIGE de acordo com a Equação (3.59). Já o índice  $L$  refere-se aos parâmetros Locais e  $G$  aos parâmetros Globais,  $\eta$  é o parâmetro de penalidade para imposição dos deslocamentos transferidos a partir da solução do modelo global.

Para a formulação do problema Local, segundo Kim et al. (2010), pode-se definir que tipo de condições de contorno serão transmitidas do problema Global para o Problema Local. Conforme mencionado anteriormente, podem ser transmitidos três tipos de condições de contorno, são elas:

- Condições de contorno de Neumann: são transmitidas informações de tensões. Nessa caso  $\eta$  é tomado como zero, implicando em um problema mal posto e sem solução se as tensões não estiverem devidamente equilibradas.
- Condições de contorno de Dirichlet: são transmitidas informações de deslocamentos. Utiliza-se um valor muito elevado que faz com que a aplicação das tensões (termo  $(\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0))$  da Equação (3.76)) torne-se irrelevante.

Segundo Duarte e Kim (2008), uma boa aproximação para o parâmetro de penalidade ( $\eta$ ) é:

$$\eta = 10^8 \cdot E \cdot J \quad (3.77)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $J$  é o Jacobiano da transformação do elemento global que origina o elemento local da malha, respectivamente.

- Condições de contorno de Cauchy: equivale à combinação dos dois tipos anteriores. Nesse caso, utiliza-se um parâmetro  $\eta = \bar{\kappa}$  bastante menor do que o  $\eta$  utilizado nas condições de Dirichlet e, assim, permitindo que força e deslocamentos sejam impostos no contorno. Empiricamente o valor de  $\bar{\kappa}$  é igual a (Kim et al., 2010):

$$\bar{\kappa} = \frac{E}{\sqrt[n]{V_0 J}} \quad (3.78)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $n$  é a dimensão do problema analisado,  $V_0$  e  $J$  são o volume e o Jacobiano da transformação do elemento global que origina o elemento local da malha, respectivamente.

Nesse trabalho optou-se por impor as condições de contorno oriundas do problema global no problema local por deslocamentos, por simplicidade de aplicação sem que os resultados sejam comprometidos. A Equação (3.76) se reduz, então, à:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_L) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{v}_L)^T \tilde{\mathbf{u}}_L d\Gamma = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{v}_L)^T \tilde{\mathbf{u}}_G^0 d\Gamma \end{aligned} \quad (3.79)$$

### 3.8.1.3 Problema Global Enriquecido

De posse da solução  $\tilde{\mathbf{u}}_L$ , retorna-se ao problema global a fim de utilizar essa solução como enriquecimento da PU deste mesmo problema global e assim obter a sua solução  $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$ .

As funções de forma do problema Global enriquecido são agora modificadas, com a inclusão no conjunto  $\{L_{ji}(\mathbf{x})\}$ , Equação (3.57), da solução do problema local. Para o caso da AIGE tem-se:

$$\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} = \{1, L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{u}}_L\} \quad (3.80)$$

O problema representado através do equilíbrio descrito na Equação (3.27) pode ser resolvido de maneira aproximada na sua forma variacional descrita a seguir:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^E \in \tilde{\chi}_G^E(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^E \in \tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)}$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_G^E) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) d\Omega = \int_{\partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_G^E)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.81a)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_G^E) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega_G^d} \mathbf{v}_G^E \tilde{\mathbf{u}}_G^E d\Gamma = \int_{\partial\Omega_G^n} (\mathbf{v}_G^E)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \eta \int_{\partial\Omega_G^d} \mathbf{v}_G^E \mathbf{u}_d d\Gamma \quad (3.81b)$$

onde  $\tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$ , um espaço de Hilbert de ordem um definido em  $\Omega_G$ , construído, neste caso, pelas funções de aproximação originais do problema global, acrescidas daquelas enriquecidas com a solução do problema local,

de acordo com o método discreto utilizado (MEF ou MEFG/E, Equação (3.81a), ou AIG ou AIGE, Equação (3.81b)). No caso da AIG, a aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$  é construída como na Equação (3.20) e para AIGE de acordo com a Equação (3.59). Não foram apresentadas as equações para a solução do problema global utilizando o método de Nitsche, pois, ele não foi utilizado. A justificativa dessa escolha é apresentada em detalhes no Capítulo 5.

Por fim, a solução  $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$  será:

$$\tilde{\mathbf{u}}_G^E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n R_j^p(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} + \tilde{\mathbf{u}}_L \mathbf{c}_j \right\} \quad (3.82)$$

onde  $\mathbf{c}_j$  é um parâmetro nodal relacionado ao número de graus de liberdade acrescentados ao problema Global em virtude da solução do problema Local.

### 3.8.2 Domínio Local

A escolha do domínio local pode ser diferente quando o MEFG/E ou a AIGE são utilizados para definir a aproximação do problema global. Em geral, o domínio local mínimo do MEFG/E pode ser menor do que aquele utilizado na AIGE. A Figura 3.11 mostra de forma esquemática o domínio local mínimo necessário numa modelagem feita utilizando o MEFG/E. Considerando uma trinca cruzando dois elementos da malha global mostrada na Figura 3.11(a), o tamanho mínimo do domínio local abrange a nuvem de elementos atravessada pela trinca, Figura 3.11(b).

A mesma ideia da Figura 3.11 é válida para a AIGE quando a aproximação polinomial é linear  $p = 1$ . Para outros graus de aproximação polinomial, entretanto, outra abordagem precisa ser realizada. Nesses casos, o suporte da PU, Equação (3.6) é maior do que os elementos físicos que contêm os pontos de controle, então é necessário que o domínio local abranja toda a região compreendida pelo suporte da PU dos pontos de controle enriquecidos com a solução numérica do problema local.

As Figuras 3.12 e 3.13 a mesma malha física da Figura 3.11, mas agora com os pontos de controle cujo suporte é atravessado pela trinca quando  $p = 2$  e  $p = 3$ ,

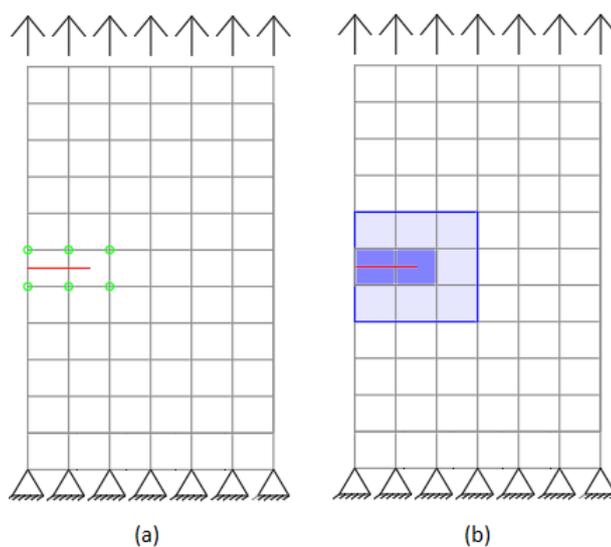


Figura 3.11: (a) Em verde, nós associados às funções de enriquecimento local obtidas numericamente. (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura.

respectivamente. Aqui também existe uma camada de elementos que não é completamente enriquecida pela solução local, definindo para a AIGE a região de mistura.

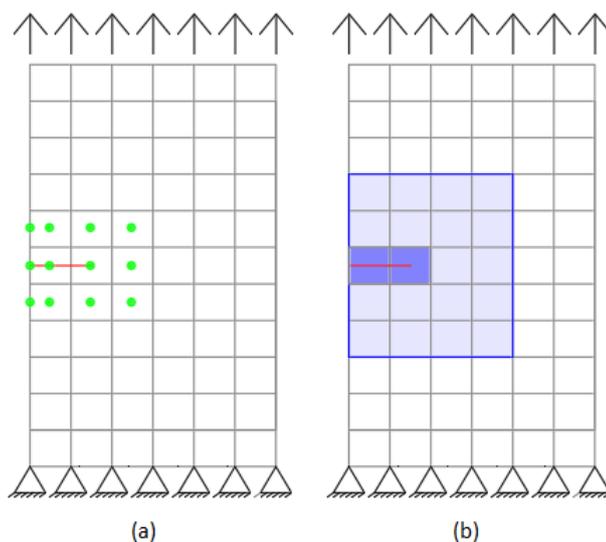


Figura 3.12: (a) Em verde, os pontos de controle enriquecidos pela estratégia global-local na AIGE com aproximação quadrática  $p = 2$ . (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura.

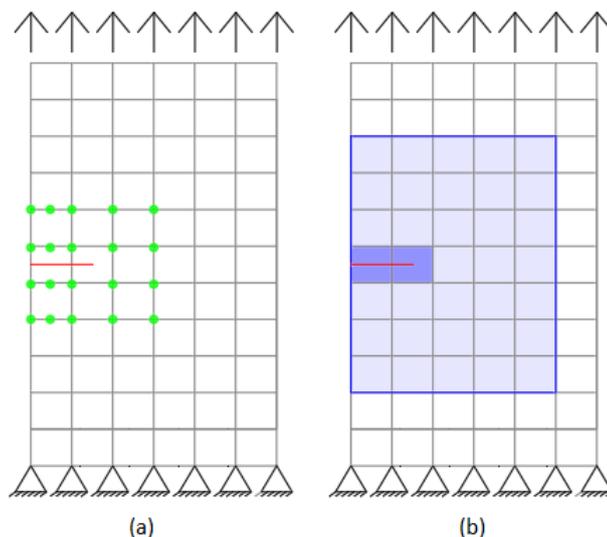


Figura 3.13: (a) Em verde, os pontos de controle enriquecidos pela estratégia global-local na AIGE com aproximação cúbica  $p = 3$ . (b) Região local mínima correspondente. Em azul escuro estão representados os elementos completamente enriquecidos pela solução global-local e em azul claro a região de mistura.

Comparando as Figuras 3.11, 3.12 e 3.13, pode-se observar que quanto maior o grau de aproximação polinomial na AIGE, maior é o domínio local mínimo necessário para a correta descrição da trinca no modelo local via solução de enriquecimento numericamente obtida previamente.

Em resumo, se o problema global é representado pelo mesmo grau de aproximação polinomial e regiões equivalentes serão completamente enriquecidas com as soluções numéricas vindas do problema local, a AIGE requer um domínio local e uma região de mistura maior ou igual à do MEFG/E. O domínio local maior aumenta o custo computacional da segunda etapa da solução global-local. Por outro lado, uma maior zona de mistura, nesse caso, pode ter um comportamento semelhante à *zona buffer*, já que os elementos mais distantes da ponta da trinca são pouco influenciados pelo enriquecimento. Isso implica em uma maior distância entre a região de enriquecimento completo e o contorno, fazendo com que a solução global transferida seja menos influenciada pela presença da trinca. Pode-se então melhorar a qualidade dos enriquecimentos globais-locais sem a necessidade de um

número grande de ciclos do processo de solução iterativo, (Gupta et al., 2012). Além disso, as aproximações polinomiais de maior ordem da AIGE requerem um número menor de graus de liberdade quando comparados ao MEFG/E. Por essas duas características, o tamanho da região de mistura e o número menor de graus de liberdade, podem compensar o custo mais elevado do problema local, reduzindo o tempo de processamento computacional geral.

### 3.9 Condicionamento do Sistema de Equações

O condicionamento das matrizes que envolvem o cálculo da AIGE, sobretudo da matriz de rigidez, são investigados nesse trabalho. Dessa maneira, espera-se que matrizes com um bom condicionamento sejam menos sujeitas a erros numéricos e por isso, produzam soluções mais confiáveis aos modelos propostos.

É sabido que as análises realizadas com o MEFG/E apresentam frequentemente problemas de mau condicionamento, conforme reforçado por Gupta et al. (2015). O fato do MEFG/E se utilizar frequentemente do enriquecimento formado por funções polinomiais para aumentar o grau de aproximação polinomial das soluções, leva a casos de dependência linear na matriz de rigidez semi-definida positiva, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido. Para se contornar tal problema e se extrair a solução do sistema de equações resultante, são empregadas estratégias como a proposta por Strouboulis et al. (2000). Tais estratégias possibilitam a solução do problema, mas não eliminam a deterioração do condicionamento à medida que os enriquecimentos polinomiais são acrescentados à aproximação. Lins (2015) destaca que, ainda que em menor escala, outros tipos de enriquecimento utilizados no MEFG/E também são capazes de piorar o número de condição das matrizes envolvidas. Para estes casos, contudo, são utilizadas versões estáveis para o Método dos Elementos Finitos Generalizado em diversos trabalhos propostos a partir do importante artigo de Babuška e Banerjee (2012).

Alternativamente ao enriquecimento polinomial, a elevação do grau de aproximação polinomial dentro da estrutura da AIGE torna-se uma boa opção para reduzir o impacto sobre o número de condição do sistema de equações. Além disso, o acréscimo de graus de liberdade na AIGE é significativamente menor quando são realizadas análises com bases quadráticas ou cúbicas, por exemplo, quando comparadas as mesmas análises utilizando o MEFGE/E. Esse aspecto gera matrizes de rigidez menores e mais simples de serem solucionadas a partir das metodologias iterativas.

Segundo Szabo e Babuška (1991), o número de condição de uma matriz  $\mathbf{K}$  simétrica pode ser definido como sendo a razão entre o seu maior ( $\lambda_{max}$ ) e menor ( $\lambda_{min}$ ) autovalor. O número de condição é dado por:

$$C(\mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1 \quad (3.83)$$

Uma definição mais genérica do número de condição é apresentada por Strang (1976), diferenciando-se da definição clássica apresentada na Equação (3.83). Trata-se conforme:

$$C(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\| \|\mathbf{K}^{-1}\| \quad (3.84)$$

onde,

$\|\mathbf{K}\|$  é a norma de  $\mathbf{K}$ ;

$\|\mathbf{K}^{-1}\|$  é a norma da inversa de  $\mathbf{K}$ ;

Neste trabalho, a definição mais genérica do cálculo do número de condição da matriz de rigidez é utilizada, tendo em vista que tal procedimento já se encontra implementado dentro da plataforma computacional utilizada e é, portanto, de mais fácil adaptação para a AIGE. Além disso, a matriz de rigidez que será utilizada para esse cálculo sofre uma pequena modificação, definindo-se a matriz de rigidez escalonada  $\hat{\mathbf{K}}$ :

$$\hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{D}} \quad (3.85)$$

onde  $\bar{\mathbf{D}}$  é a matriz diagonal definida por:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{K_{ij}}} \quad (3.86)$$

e  $\delta_{ij}$  é o delta de kronecker.

O número de condição será calculado com base na norma  $\|\cdot\|_2$  sobre a matriz de rigidez escalonada, como recomendado por Gupta et al. (2013). Desta maneira chega-se ao número de condição escalonado:

$$k(\mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} k_2(\hat{\mathbf{K}}) = k_2(\bar{\mathbf{D}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{D}}) = \|\hat{\mathbf{K}}\|_2 \|\hat{\mathbf{K}}^{-1}\|_2 \quad (3.87)$$

Assim, quanto maior o valor do número de condição escalonado, pior condicionada está a matriz. Além disso, a medida que se refinam os modelos a tendência é que esse valor de condicionamento aumente.

## Capítulo 4

# Aspectos Computacionais

Para o presente trabalho decidiu-se fazer a implementação da Análise Isogeométrica Estendida com funções de enriquecimento global-local no ambiente INSANE, por esse ser um programa computacional robusto, aberto e de fácil ampliação.

### 4.1 Principais Aspectos do Sistema INSANE

O INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é um sistema computacional em desenvolvimento do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), implementado em linguagem de programação JAVA e que utiliza o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) (Fonseca e Pitangueira, 2007). O INSANE foi expandido no trabalho de Alves et al. (2013) para permitir análises pelo MEFG/E. O enriquecimento com funções representativas do campo de tensões singulares na vizinhança da ponta de uma trinca, bem como o uso da técnica Global-Local, foram validados para os problemas de estado plano de tensão e de deformação em Alves (2012) e para problemas tridimensionais em Santos (2018). Uma abordagem mais completa da técnica global-local tem sua implementação apresentada em Malekan et al. (2017) em que foi estendida para problemas de placas e Fonseca (2019) em que a propagação de trincas, descrita a partir do problema local, é automatizada. Cabe ao presente trabalho, expandir o sistema INSANE e torná-lo capaz de realizar análises via AIG, AIGE e AIGE com enriquecimento via técnica global-local (AIGE<sup>GL</sup>).

O INSANE pode ser dividido em três aplicações, pré-processador, processador e pós-processador. A primeira e a última são responsáveis, respectivamente, pelas entradas e saídas de dados do programa, via interface gráfica e arquivo, ou seja, materializam a interação homem-máquina. Por sua vez, o processador é responsável pela resolução dos modelos já que representa o núcleo numérico do sistema para os diversos métodos de resolução, como, por exemplo, o MEFG/E. A estrutura do núcleo numérico é composta pelas interfaces *Assembler* e *Persistence* e as classes abstratas *Model* e *Solution*. Através do diagrama de classes Unified Modeling Language (UML) apresentado na Figura 4.1 é possível observar esses componentes e a relação existente entre eles (Fonseca, 2008).

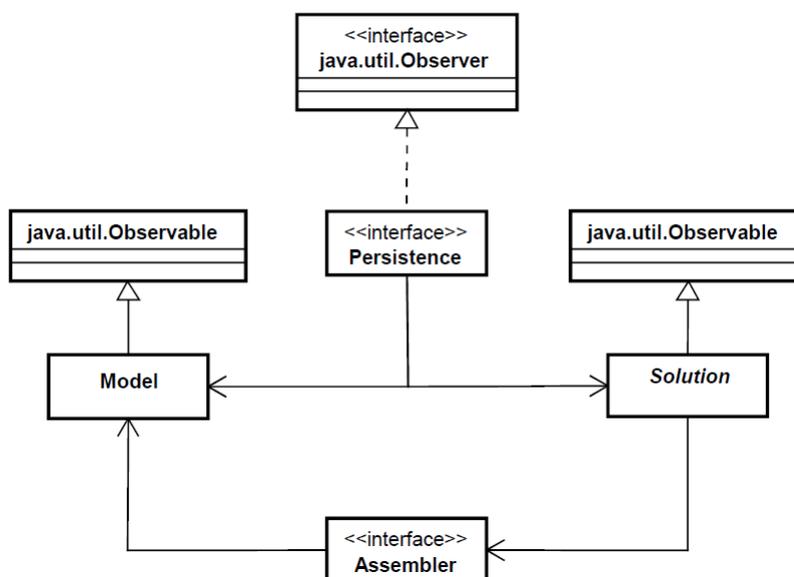


Figura 4.1: Diagrama UML do Núcleo Numérico do INSANE (Alves, 2012).

A interface *Assembler* é responsável pela montagem do sistema de equações matricial que resolve aproximadamente um problema de valor de contorno e de valor inicial. Para o caso específico do MEFG/E, a classe *GFemAssembler* que implementa *Assembler*. O sistema matricial de segunda ordem a ser montado é apresentado na equação:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = D \quad (4.1)$$

Na Equação (4.1),  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes de coeficientes,  $\mathbf{D}$  é um vetor com os termos independentes do sistema de equações e  $\mathbf{X}$  representa o vetor solução do sistema, contemplando o caso geral de um problema de valor inicial e de contorno.

Segundo Alves (2012), simplificando para o caso de análise estrutural estática elástica linear, os dois primeiros termos são eliminados e as matrizes e vetores resultantes são mostrados nas equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_p \\ \mathbf{D}_u \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}_p \\ \mathbf{D}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_u \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Na Equação (4.2),  $\mathbf{K}$  representa a matriz de rigidez,  $\mathbf{X}$  o vetor de deslocamentos,  $\mathbf{D}$  o vetor de forças nodais. Na Equação (4.3), há a decomposição do vetor  $\mathbf{D}$ , que se separa nas parcelas  $\mathbf{N}$  que representa as forças aplicadas diretamente nos nós e  $\mathbf{E}$  que inclui as forças nodais equivalentes. É importante mencionar que os índices  $u$  e  $p$  significam incógnitos e prescritos, respectivamente.

A classe abstrata *Model* organiza a forma como são armazenadas as informações referentes ao modelo discreto. Estende-se dela a classe *GFemModel*, específica do método MEFG/E.

A interface *Persistence* faz a comunicação entre a Classe Abstrata *Model* e a Classe Abstrata *Solution* a partir da interpretação de dados de entrada e o fornecimento de dados de saída para outras aplicações.

A classe abstrata *Solution* reúne os recursos necessários para a solução do sistema matricial. Na abordagem do MEFG/E, dependendo do tipo de enriquecimento nodal utilizado, é possível que seja criada uma matriz de rigidez positiva semi-definida tornando a solução do sistema existente, porém não única. Exige-se, neste caso, a

aplicação de procedimentos especiais para a solução deste tipo de problema (Strouboulis et al., 2000) que se encontram implementados em *Solution*.

Uma classe abstrata importante para esse trabalho é a *EnrichmentType*. A referida classe reúne, de forma geral, os métodos necessários para realizar o enriquecimento das funções de forma via MEFG/E, independentemente do tipo de função de enriquecimento local utilizada. Nela é possível chamar métodos que retornam as funções de enriquecimento multiplicadoras da PU e suas derivadas nas três direções.

Os diversos tipos de enriquecimento das funções de forma estendem da classe *EnrichmentType* e são utilizados na composição das funções de forma enriquecidas. As funções de forma enriquecidas são montadas na classe *EnrichedShape*.

A Figura 4.2 mostra, resumidamente, como se dá o processamento no INSANE da montagem da matriz de rigidez de um modelo para o MEFG/E, considerando que os dados de entrada já foram fornecidos pelo ator através de arquivo texto ou entrada gráfica.

Na Figura 4.2 os números e letras representam:

**1** - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para o modelo.

**2** - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para cada elemento.

**3a** - Consultar elemento e retornar tipo de modelo de análise.

**4a** - Consultar/Retornar tipo de modelo de análise.

**3b** - Consultar elemento e retornar coordenadas naturais e propriedades dos materiais.

**4b** - Consultar degeneração e retornar coordenadas naturais e propriedades dos materiais.

**3c** - Consultar elemento e retornar função de forma e derivadas.

**4c** - Informar incidência e retornar função de forma e derivadas.

**5c** - Consultar/Retornar Partição da Unidade.

**6c** - Consultar cada nó e retornar função de enriquecimento.

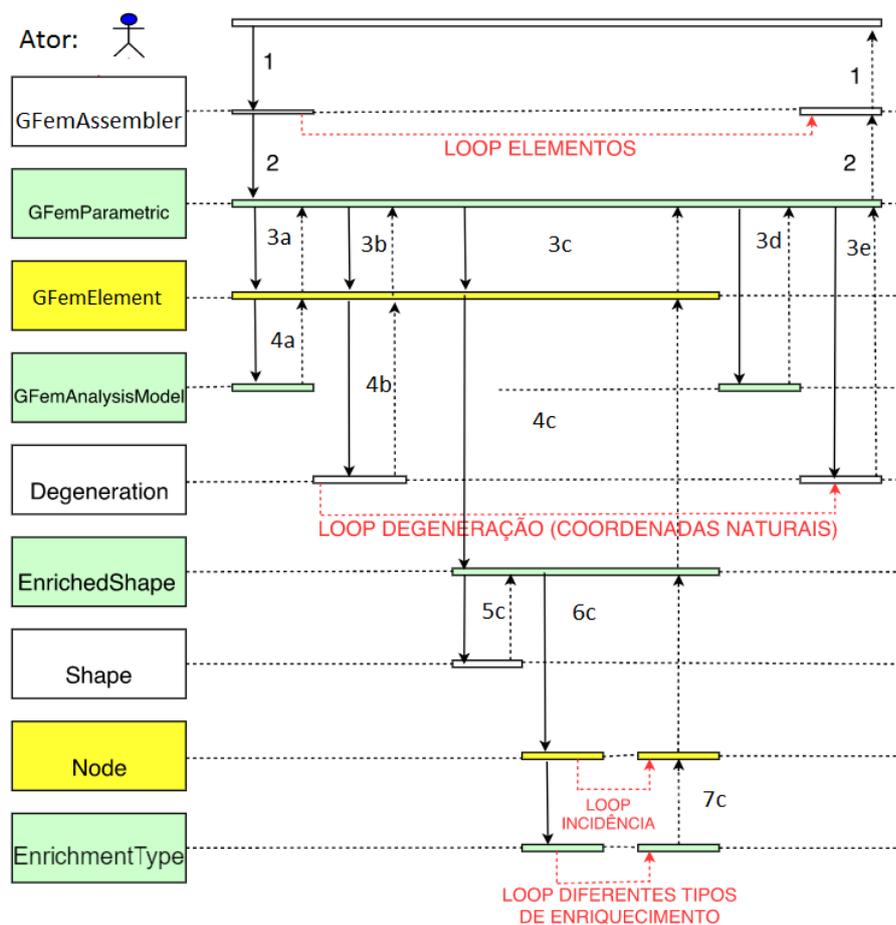


Figura 4.2: Diagrama de Montagem de Matriz de Rigidez no INSANE (Adaptada) (Alves, 2012).

**7c** - Consultar cada tipo de enriquecimento e retornar a função de enriquecimento.

**3d** - Fornecer função de forma e derivadas e retornar matriz B, fator de integração e Jacobiano da transformação.

**3e** - Consultar degeneração e retornar função peso.

Ainda na Figura 4.2 as classes ilustradas, não mencionadas no texto até este momento, são descritas de forma simplificada a seguir (Alves, 2012):

*Degeneration* - Representa os pontos de integração e propriedades geométricas.

*Shape* - Representa a função de forma do elemento.

*Node* - Representa a entidade nó e as informações discretas associadas a ele.

*GFemElement* - Representa o elemento finito.

*GFemAnalysisModel* - Representa o modelo de análise do elemento.

*GFemParametric* - Responsável pelas informações dos elementos paramétricos.

A Figura 4.3 apresenta, de forma concisa, como se faz a montagem da matriz de rigidez dentro da classe *GFemParametric* no caso do enriquecimento via estratégia Global-Local, para a terceira etapa da técnica, problema Global enriquecido, Seção 3.8.1.3. Nas outras duas etapas, o procedimento é o mesmo mostrado na Figura 4.2. Os números apresentados na Figura 4.3 representam:

- 1 - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para o modelo.
- 2 - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para cada elemento.
- 3 - Consultar/Retornar função de forma e derivadas.
- 4 - Consultar/Retornar cada tipo de enriquecimento.

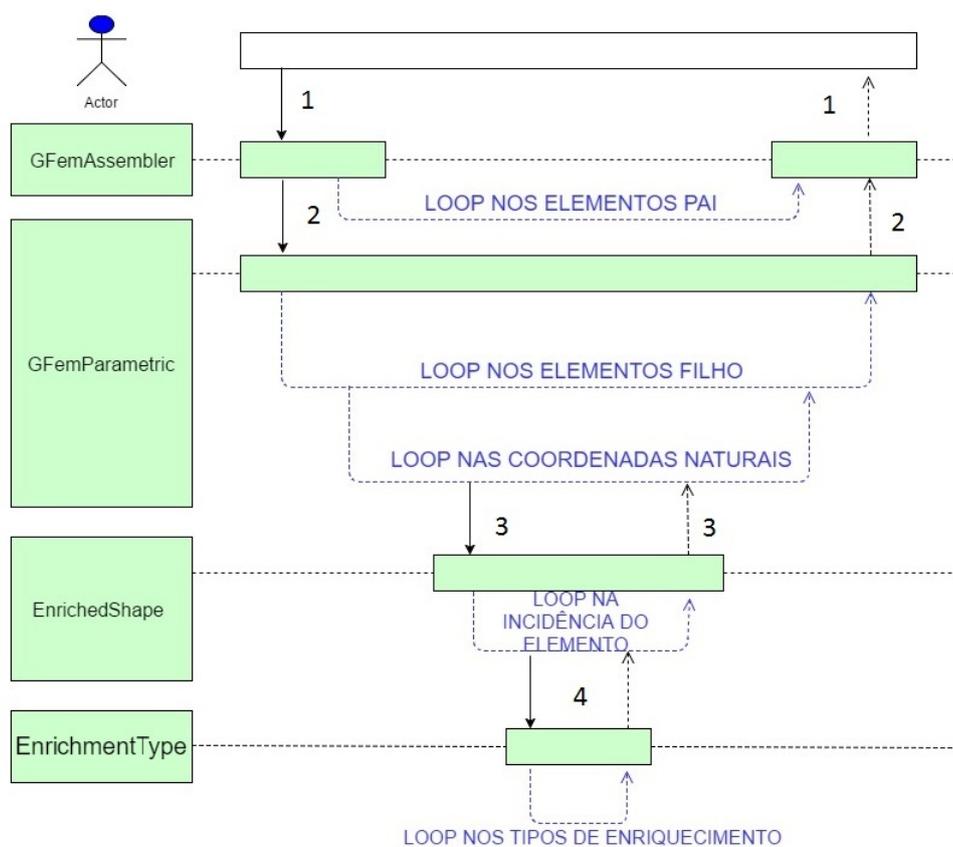


Figura 4.3: Diagrama de Montagem de Matriz de Rigidez na Classe *GFemParametric*, usando a técnica Global-Local (Adaptada) (Alves, 2012).

Uma vez que a formulação da AIGE é muito similar ao do MEFG/E, tendo como diferença básica a função de base utilizada tanto para a solução do modelo sem enriquecimento quanto aquele enriquecido, muito da implementação já existente para o MEFG/E será aproveitada e/ou ampliada. Assim, mais uma vez a utilização do sistema INSANE se justifica, pois com ajustes pontuais a estrutura da AIGE, após a implementação da AIG, poderá ser empregada.

## 4.2 Ampliação do Sistema INSANE

A partir do estudo do arcabouço já existente no sistema INSANE, propõe-se a expansão do mesmo para que este se torne capaz de solucionar problemas via Análise Isogeométrica. A ideia inicial é adaptar a entrada de dados para que esta seja capaz de capturar os dados necessários à AIG, tais como campos a serem preenchidos para coletar informações do *Knot Vector*, dos pontos de controle, grau de aproximação polinomial e do nível de refinamento desejado para a malha que processará a solução. Além disso, é necessário tornar o sistema capaz de fazer a leitura do parâmetro de penalidade para posteriormente ser utilizado na imposição das condições de contorno do problema, através do Método da Penalidade ou Nitsche, uma vez que as funções de base B-Splines e NURBS são não interpolatórias.

### 4.2.1 Ampliação para modelagem da AIG

Para tornar possível que os modelos sejam solucionados através da AIG, classes semelhantes às já existentes para o MEF foram criadas derivando-se dessas originais. A classe *IgaModel* foi estendida da classe *FemModel* que por sua vez estende da classe *Model*, que teve sua função descrita na Seção 4.1. O diagrama UML apresentado na Figura 4.4 mostra o diagrama da classe *IgaModel*, seus principais atributos e métodos.

Outra importante função da classe *IgaModel* é realizar a extração de Bézier apresentada na Seção 3.4. Todos os operadores são processados nessa classe e como

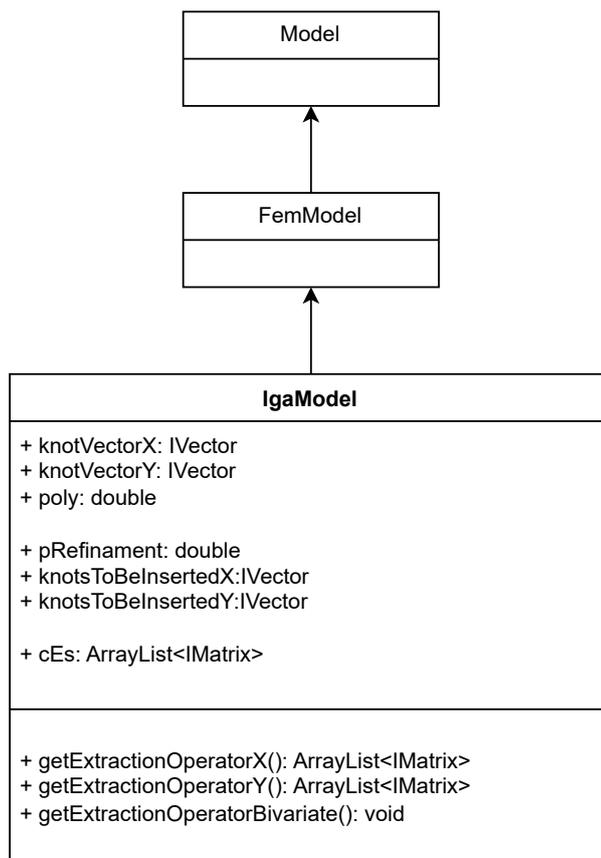


Figura 4.4: Diagrama UML da Classe *IgaModel*.

resultados obtém-se as matrizes de extração. Essas matrizes são gravadas, para cada elemento da malha, no atributo da classe *cEs*, conforme evidencia a Figura 4.4.

A classe *IgaControlPoint* estende da classe *Node*, também descrita na Seção 4.1. A maior diferença da classe *IgaControlPoint* é a presença dos pesos de ponderação que os pontos de controle precisam ter para serem capazes de juntamente com as funções do tipo NURBS formarem a geometrias de problemas diversos. A Figura 4.5 ilustra o referido atributo da classe.

As classes criadas para realizar os refinamentos  $-p$  e  $-h$  e, quando combinadas, o refinamento  $-k$ , dentro da lógica do IGA, Seção 3.2.2.3, foram concebidas de forma independente e podem ser utilizadas e combinadas da maneira que o usuário preferir realizar o refinamento da malha. A Figura 4.6 mostra os principais métodos e atributos dessas classes. A classe *PRefinementB* é responsável pelo procedimento de

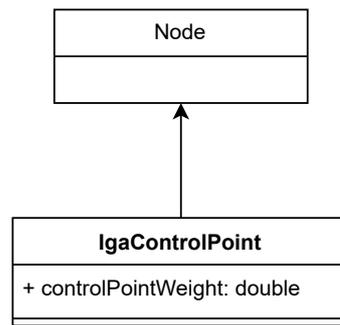


Figura 4.5: Diagrama UML da Classe *IgaControlPoint*.

refinamento de elevação de ordem do grau de aproximação polinomial da B-Spline ou da NURBS. As classes *HRefinement1D* e *HRefinement2D* realizam o refinamento do tipo inserção de *knots* de forma a subdividir em mais elementos as malhas unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. Combinações entre os métodos dessas classes são capazes de realizar o refinamento  $-k$ , exclusivo da AIG. Por fim, as classes *Mesh1D* e *Mesh2D* montam as novas malhas refinadas unidimensionais e bidimensionais, respectivamente.

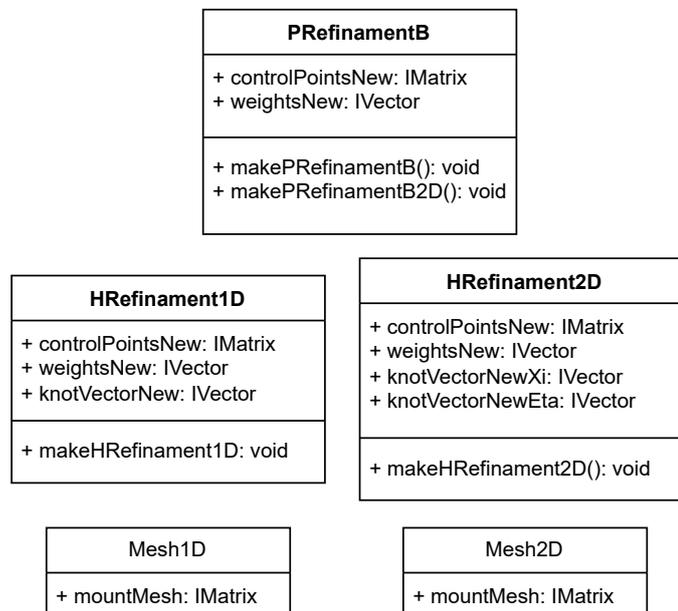


Figura 4.6: Diagrama UML das classes responsáveis pelo refinamento das malhas IGA.

Outra parte importante da implementação diz respeito a criação das classes que

descrevem as funções utilizadas nas análises via AIG. Para tanto foi criada uma interface *IgaShape* a fim de encapsular as funções de base utilizadas nesse trabalho e outras que ainda poderão ser estendidas do arcabouço já construído para a AIG. A principal classe utilizada é a *NURBS2D* apresentada na Figura 4.7, com seus principais atributos e métodos. Pode-se perceber pelos métodos implementados na classe *NURBS2D*, que as funções do tipo NURBS estão sendo construídas a partir da Extração de Bézier, Seção 3.4, uma vez que combinam as matrizes de extração obtidas na classe *Model* com as funções de base de Bernestein. Além disso, na Figura 4.7 foi apresentada também a classe *NURBS1D*, que é o ponto de partida para a criação da classe *NURBS2D*.

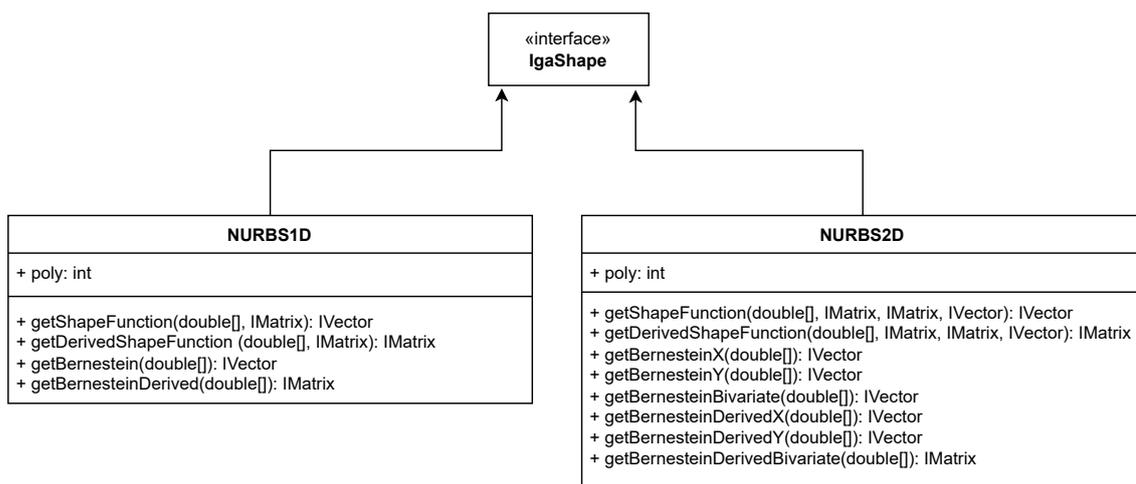


Figura 4.7: Diagrama UML das classes responsáveis pela descrição das funções de base da IGA.

Conforme apresentado na Seção 3.3.5, é um desafio impor as condições de contorno nos modelos isogeométricos. Foram implementadas duas metodologias Penalidade e Nitsche, a partir daquelas implementadas para outros métodos existentes no INSANE, sendo o principal deles o *MeshFree*. Para compor as parcelas das Equações (3.36) e (3.39), das referidas metodologias, expandiu-se a classe *EquivalentNodalGeneralValue* criando a classe *EquivalentNodalGeneralValueIga* que tem os métodos necessários para construir cada uma dessas parcelas. A Figura 4.8 ilustra

o diagrama das referida classe.

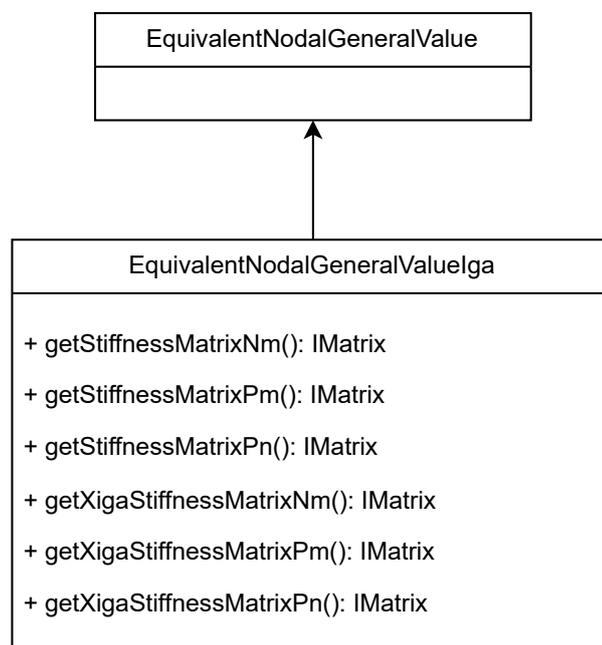


Figura 4.8: Diagrama UML da classe *EquivalentNodalGeneralValueIga*.

Com a extração de Bézier realizada, resta guardar as informações para cada elemento da matriz de extração. Além disso, cada elemento isogeométrico também precisa conter o vetor de pesos dos pontos de controle, uma vez que a análise está sendo feita utilizando funções do tipo NURBS. A Figura 4.9 mostra o diagrama da classe *QuadrilatelIga* que cria um elemento quadrilateral para análise via AIG contendo os elementos citados. Dessa maneira, com essas informações armazenadas nos elementos fica mais simples a implementação da AIG no INSANE, um programa computacional tradicionalmente criado para análises do MEF. Isso, porque, a cada iteração na construção da matriz de rigidez ou no vetor de forças, cada um dos elementos é percorrido para acrescentar às matrizes e aos vetores a sua contribuição e essa estrutura principal se mantém praticamente inalterada. A classe *IgaAssembler* estende da classe *Assembler* descrita na Seção 4.1, e tem as mesmas funções com poucas alterações. Além disso, a classe *IgaAssembler* tem a responsabilidade de construir as matrizes e vetores complementares do modelo referentes ao método da

penalidade e de Nitsche, a partir das iterações nos elementos. Em cada um dos elementos a classe *IgaParametric* é chamada para o cálculo das matrizes e vetores que fornecem a contribuição de cada elemento, sendo que os cálculos necessários reportam à classe *EquivalentNodalGeneralValueIga*.

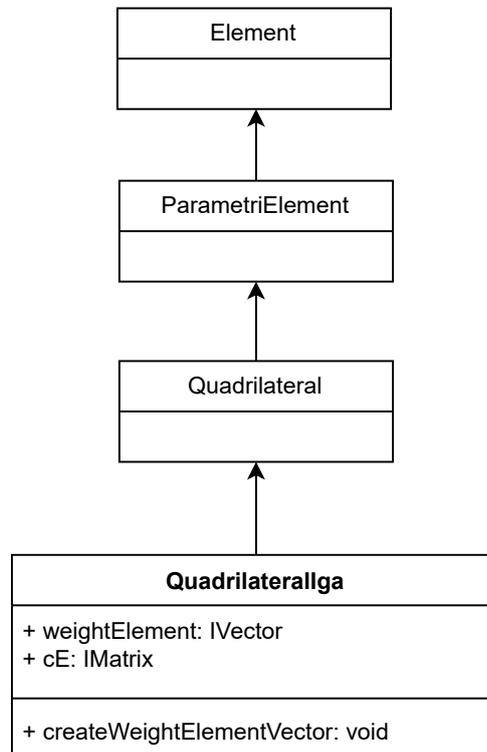


Figura 4.9: Diagrama UML da classe *Quadrilaterallga*.

## 4.2.2 Ampliação para modelagem da AIGE

A ampliação do sistema INSANE para contemplar a AIGE, reúne elementos da própria AIG e do MEFG/E. A classe *XigaModel* foi criada para armazenar as informações do modelo discreto relativas à análise pela AIGE. Essa classe estende a classe *IgaModel* e guarda semelhanças com a classe *GfemModel*, uma vez que sua função principal é guardar a lista de enriquecimentos e a lista de descontinuidades existentes no modelo. A Figura 4.10 mostra o diagrama UML da classe *XigaModel* e seus principais atributos.

Como tanto o MEFG/E quanto a AIGE utilizam a técnica de enriquecimento da

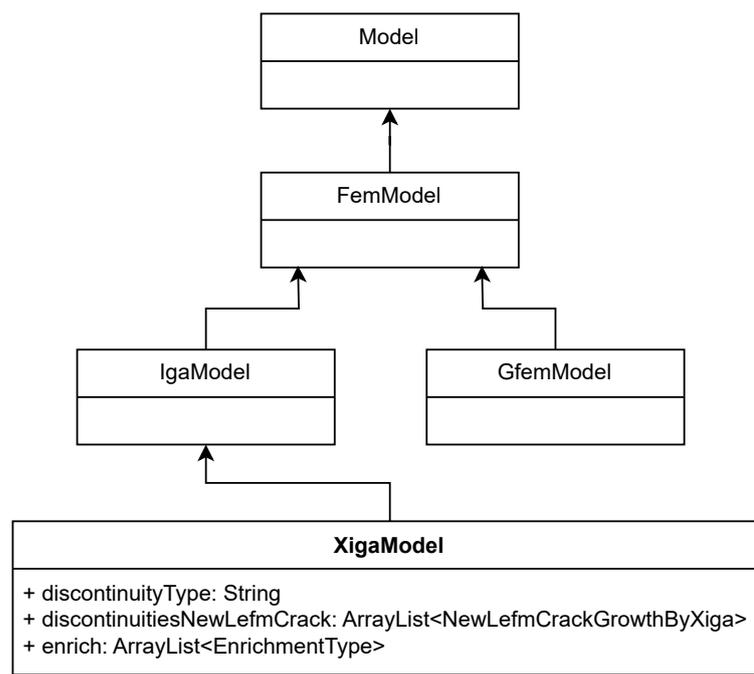


Figura 4.10: Diagrama UML da classe *XigaModel*.

PU, as chamadas de construção de função de forma e suas derivadas são diferentes daquelas da AIG e MEF. Portanto, criou-se a classe *XigaElement*, baseada na classe *GfemElement*, conforme Figura 4.11 onde são apresentados os principais atributos e métodos dessas classes. Na classe *XigaElement* todas as chamadas de construção de matrizes e vetores são sobrecarregadas, isso em virtude do enriquecimento da PU. Além disso, é possível descrever as trincas de forma automatizada no elemento da AIGE e do MEFG/E. Para tanto, a lista de segmentos de trinca é guardada nesses elementos, cada um com a sua respectiva particularidade e, dentro da AIGE, para tratar a geometria do problema, se faz útil guardar as informações da posição da incidência física do elemento. Essa informação, portanto, é gerada e guardada na classe *XigaElement*.

*NewLefmCrackGrowthByXiga* é a classe que guarda as informações da trinca adicionada de forma automatizada nos elementos. Ela estende a classe *NewLefmCrackGrowthByGfem* e a principal diferença entre essas duas classes diz respeito às peculiaridades da metodologia da AIGE. Em função da propagação da trinca, essa

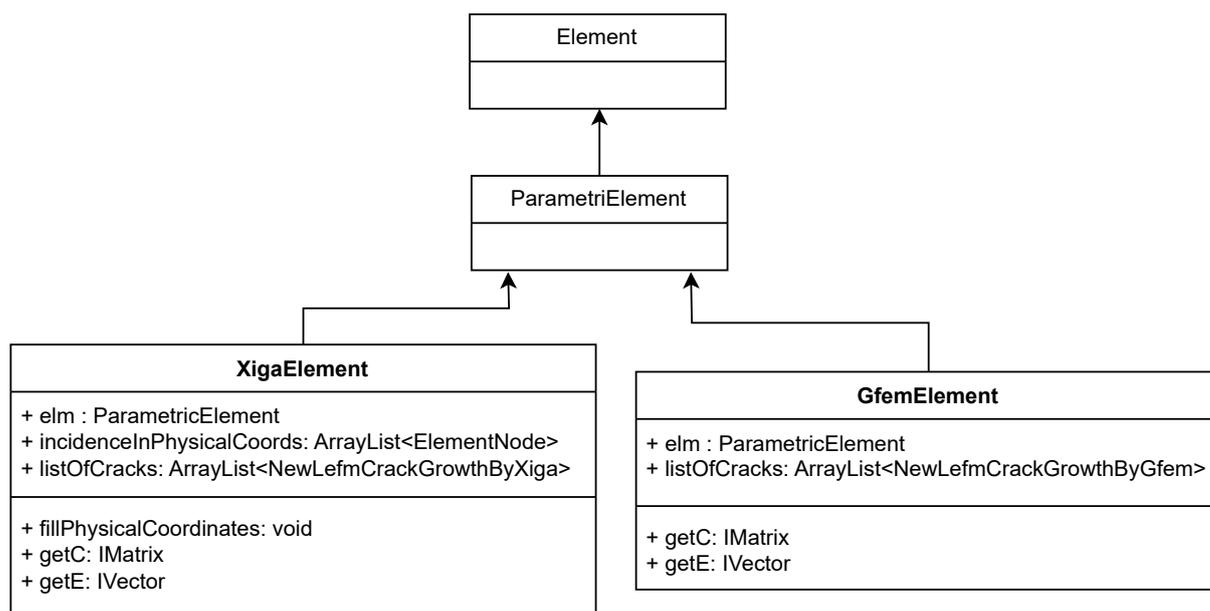


Figura 4.11: Diagrama UML da classe *XigaElement*.

classe determina quais elementos terão seus pontos de controle enriquecidos e com quais funções. Para tanto são resgatadas as coordenadas na malha física correspondentes aos pontos de controle que formam a incidência dos elementos de forma a identificar quais desses elementos são cortados pela trinca ou se contêm a ponta da trinca e, assim, determinar o enriquecimento nesses pontos de controle. A Figura 4.12 mostra o diagrama UML dessas classes.

A partir da chamada da classe *XigaElement*, na classe *XigaParametric*, são de fato construídas as matrizes e vetores por elementos para se montar o problema apresentado na Equação (4.2). Essa classe é similar à classe *GfemParametric*, na qual a principal distinção se faz a partir da chamada das funções de forma e suas derivadas quando enriquecida. Nota-se que dentro do contexto da AIG, não foi necessário modificar e criar uma classe similar a *Parametric*, isso porque ainda que a função de base da AIG seja diferente toda a estrutura de cálculo do MEF foi preservada. A Figura 4.13 mostra o diagrama UML da classe *XigaParametric*.

Para a construção das funções de forma enriquecidas da AIGE foi criada a classe *EnrichedShapeXiga* estendida da classe *EnrichedShape*. O passo mais importante

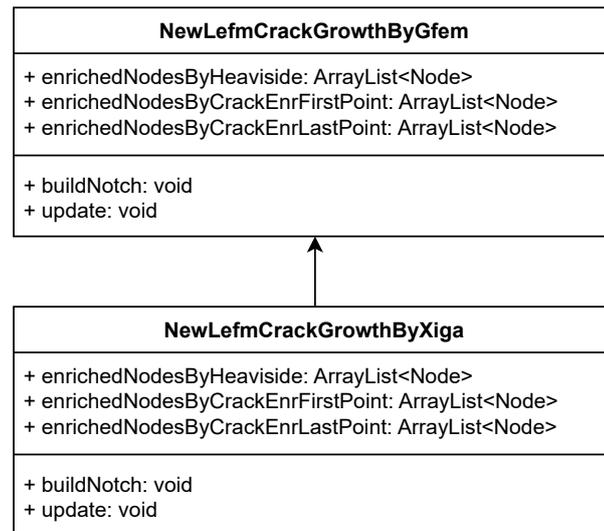


Figura 4.12: Diagrama UML da classe *NewLefmCrackGrowthByXiga*.

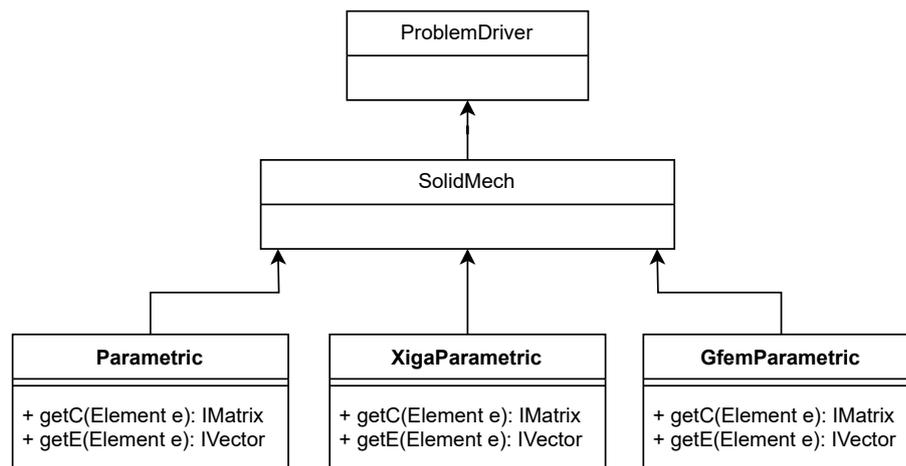


Figura 4.13: Diagrama UML da classe *XigaParametric*.

foi sobrecarregar os métodos de construção da função de forma e de suas derivadas com as particularidades dos elementos e das funções do tipo NURBS. Assim, dentro dos métodos da classe *EnrichedShapeXiga*, são requeridas informações referentes aos pontos de controle e seus pesos, das funções do tipo NURBS e sua chamada para construção como função de PU. Também são requeridas informações dos elementos, sobretudo aquelas referentes ao processo de extração de Bézier. A Figura 4.14 mostra o diagrama UML da classe *EnrichedShapeXiga* e os métodos sobrecarregados com as informações mencionadas.

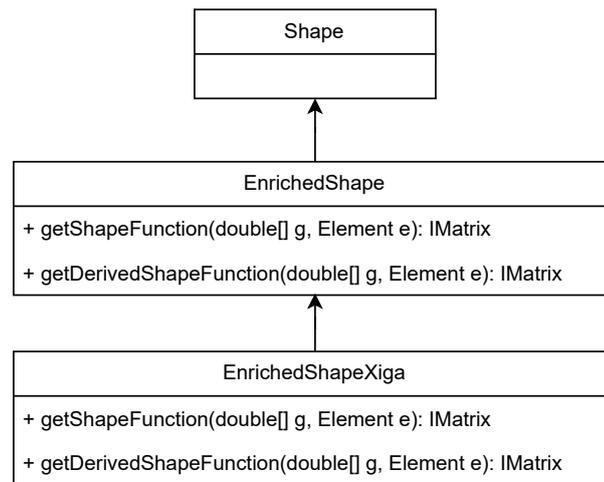


Figura 4.14: Diagrama UML da classe *EnrichedShapeXiga*.

Em virtude do enriquecimento a construção da matriz dos operadores das variáveis internas (**B**), Equação (3.24), e a matriz do operador das variáveis de estado (**N**), Equação (3.23), é diferente na AIGE e no MEF<sub>G</sub>/E. Por esse motivo, criou-se a interface *XigaAnalysisModel* e as classes *XigaPlaneStress* e *XigaPlaneStrain* que a implementam e fazem as modificações necessárias para montar os modelos de análise do problema. A Figura 4.15 mostra o diagrama UML dessas classes.

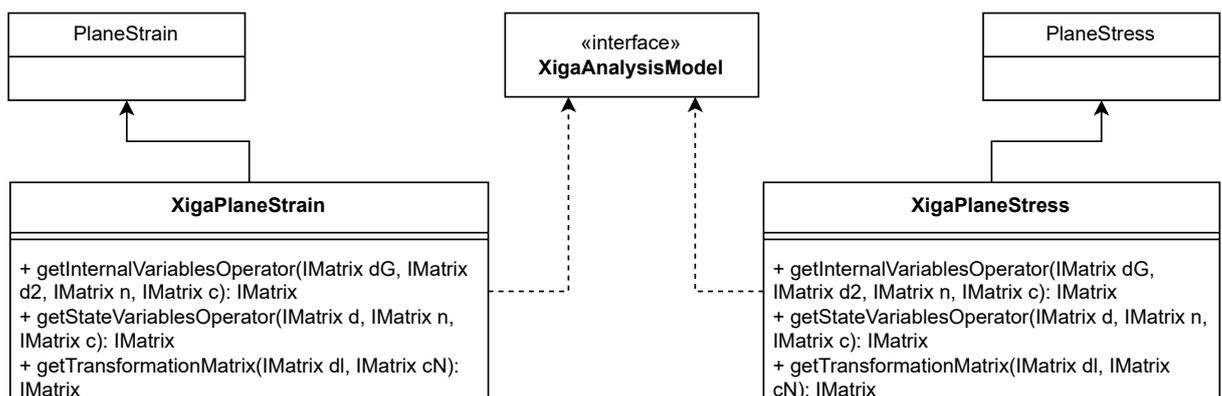


Figura 4.15: Diagrama UML das classes que formam o modelo de análise da AIGE.

Da mesma maneira que na AIG, na AIGE as condições de contorno essenciais também exigem de técnicas especiais para serem impostas. Para compor as parcelas

das Equações (3.36) e (3.39), das estratégias da Penalidade e de Nitsche, respectivamente, a classe *EquivalentNodalGeneralValueIga* também foi ampliada e conta com os métodos necessários à aplicação dessas metodologias dentro da AIGE, conforme Figura 4.8.

Por fim, a classe *XigaAssembler* estende a classe *Assembler* descrita na Seção 4.1, e tem as mesmas funções com poucas alterações. Além disso, a classe *XigaAssembler* contém os métodos necessários para construir as matrizes e vetores completos do modelo referentes aos métodos da Penalidade e de Nitsche, Equações (3.36) e (3.39), respectivamente, que são formadas a partir da contribuição de cada um dos elementos.

### 4.2.3 Ampliação para utilização da estratégia global-local

Foi generalizado o processo de criação das funções de enriquecimento local utilizadas dentro da AIGE, sobretudo a classe referente à técnica global-local. Para tanto o MEF<sup>G</sup>/E<sup>GL</sup>, cuja implementação pode ser encontrada em Alves (2012), Malekan et al. (2017) e Fonseca (2019), foi estendido para possibilitar a AIGE<sup>GL</sup> e posteriores combinações entre as metodologias.

A classe abstrata *GlobalLocalSimulationManager* é a classe que executa as tarefas referentes à técnica global-local. Dessa classe se originam outras específicas aos diversos direcionamentos e possibilidades de modelagem com a técnica global-local. No caso desse trabalho, foi criada a classe *GlobalLocalXigaSimulationManager*. Nela o método *execute()* desempenha o papel de chamar cada um dos métodos que executa as etapas para solucionar o problema global inicial (método *solveGlobalProblem*), em seguida solucionar o problema local (método *solveLocalProblem*) e também solucionar o problema global enriquecido (método *solveEnrichedGlobalProblem*). Como o procedimento global-local é realizado de forma iterativa as duas últimas etapas são chamadas dentro no método *solveGlobalLocalCycles()* até que a convergência

da energia de deformação seja atingida. Além disso, em cada uma das funções solucionadoras é possível fazer a troca entre as metodologias MEFG/E e AIGE de forma a possibilitar análises por metodologias diferentes em cada etapa da técnica global-local. A Figura 4.16 mostra o diagrama UML da classe *GlobalLocalXigaSimulationManager*.

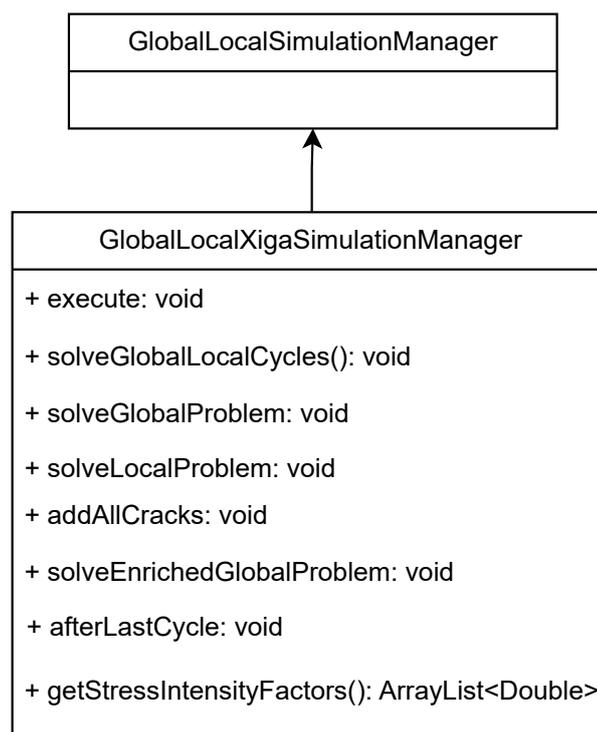


Figura 4.16: Diagrama UML da classe *GlobalLocalXigaSimulationManager*.

O método *solveGlobalLocalCycles()* também é responsável por fazer a chamada da construção do modelo local. O modelo local pode ser construído de duas maneiras. Na primeira maneira o domínio local é fixo e o seu tamanho e posicionamento dentro do domínio global é informado pelo usuário. Trata-se de uma forma prática de delimitação do modelo local, porém inviável, por exemplo, para análises de propagação de trinca, na qual não se sabe o caminho que a trinca irá tomar e corre-se o risco de adotar um domínio local muito grande ou até mesmo ineficiente. Outra maneira é o domínio local adaptativo, no qual o domínio local é delimitado a partir da análise da ponta da trinca e ele se modifica de acordo com a propagação da

mesma. Informações relevantes sobre a definição do domínio local para a análise pelo MEFG/E e pela AIGE são discutidas na Seção 3.8.2. Além disso, nesse mesmo método acontece a inserção da trinca no modelo a partir da chamada de outro método o *addAllCracks()*.

Outra tarefa realizada dentro do método *solveGlobalLocalCycles()* é a de propagação de trincas, quando esta ocorre. Para tanto, os fatores de intensidade de tensão são calculados através do método *getStressIntensityFactors()*, utilizando o método energético da Integral de Iteração, proposto inicialmente por Yau et al. (1980) e cujos detalhes de formulação e implementação dentro do Insane podem ser encontrados em Fonseca (2019). A direção do novo segmento de trinca é calculada de acordo com o critério da máxima tensão circunferencial (Moës et al., 1999). O novo segmento de trinca é adicionado através do método *afterLastCycle()* bem como a definição da nova ponta da trinca. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão estende a formulação do MEFG/E, conforme formulado em Fonseca (2019). Poucas modificações são necessárias ao cálculo dos fatores de intensidade de tensão dentro da AIG. Uma delas é a definição de uma circunferência de raio  $r$  e posterior seleção dos elementos compreendidos em seu interior tendo como referência a ponta da trinca. Esse procedimento é realizado nas coordenadas físicas dos pontos de controle que compõem os elementos isogeométricos e não as próprias coordenadas dos pontos de controle. Essa diferença implica num tratamento dessas transições de coordenadas entre malha de controle e malha física que não era originalmente necessária no contexto do MEFG/E. As demais modificações são aquelas relacionadas às diferenças na construção das funções de base e suas derivadas já mencionadas para a AIG.

A classe *GlobalSetupperXiga* estende a classe *GlobalSetupper* e elas têm a função de realizar as tarefas referentes à construção e manipulação do problema global e do problema global enriquecido. O problema global inicial não requer grandes mudanças na implementação já mencionada, porque basicamente realiza-se a análise convencional do MEFG/E ou da AIGE. Já para o problema global enriquecido, um

método importante é o *getAllEnrichedGlobalNodes()*. Nesse método todos os pontos de controle cuja PU será enriquecida com a solução advinda do problema local são selecionados. Essa seleção conta com a informação de que todos os elementos físicos cortados pela trinca têm todos os pontos de controle que compõem sua incidência enriquecidos com a solução numérica do problema local, para garantir a consistência com o que é feito no MCFG/E, conforme exemplificado na Seção 3.8.2. Além disso, são criados os graus de liberdade adicionais à metodologia global-local. A Figura 4.17 mostra o diagrama UML da classe *GlobalSetuperXiga*.

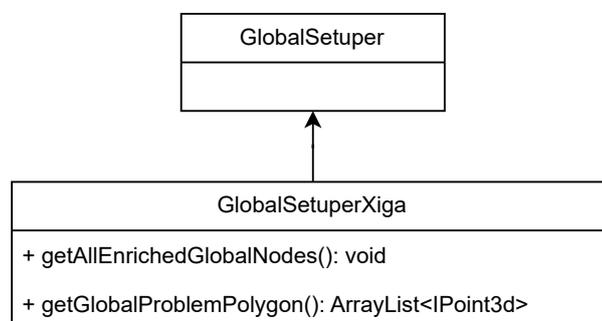


Figura 4.17: Diagrama UML da classe *GlobalSetuperXiga*.

A classe *LocalSetuperXiga* estende a classe *LocalSetuper* e elas têm a função de realizar as tarefas referentes à construção e manipulação do problema local. Nessa classe, o método *getGlobalElementsForLocalModel()* seleciona os elementos do problema global que vão compor o domínio do problema local e o método *getLocalProblemPolygon()* informa os vértices do polígono que contorna esses elementos selecionados. Esses dois métodos funcionam tanto para o caso do usuário selecionar um domínio local fixo ou se for adaptativo, ou seja, que se move para acompanhar a propagação da trinca. Depois da seleção do domínio do problema local, se o modelo local for solucionado via AIGE, o método *buildLocalProblem()* constrói a malha local, utilizando os métodos *fillRefinedModel()*, que realiza o refinamento da malha de acordo com a quantidade de divisões indicadas pelo usuário e o método *fillIgaElementsList()* preenche as informações de todos os elementos locais criados, de acordo

com formulação apresentada na Seção 3.2.2.3. Caso o problema local seja solucionado via MEFG/E o método *buildLocalProblem()* constrói a malha local utilizando o mapeamento transfinito já consolidado no sistema INSANE (Gonçalves, 2004). Utilizando os parâmetros de nós/pontos de controle enriquecidos com função de Heaviside ou função que descreve o comportamento na vizinhança da ponta da trinca, descrevem-se os segmentos de trinca existentes no problema local. É importante ressaltar que todo esse processo pode ser feito tanto para análises em que o problema local é realizado pela AIGE, quanto pelo MEFG/E. Desde que o problema global seja analisado pela AIGE, esses métodos já fazem a transição entre as estratégias. Sendo o problema global analisado pelo MEFG/E a transição de metodologias do problema local ocorre em métodos semelhantes na classe *LocalSetuperGfem*.

Por fim, os métodos *setGlobalElement()* e *setBoundaryInformation()* informam aos elementos locais em qual elemento global estão aninhados e quais as condições de contorno que devem ser impostas. Nesse ponto, vale ressaltar que os elementos da malha física isogeométricos globais têm de conter integralmente os elementos da malha física isogeométricos locais ou os elementos finitos locais, ainda que na malha de controle nenhuma coincidência seja necessária. A Figura 4.18 mostra o diagrama UML da classe *LocalSetuperXiga* com os métodos mencionados.

Atenção especial foi dada ao mecanismo de integração numérica no modelo local. Isso, porque, os elementos que contêm nós enriquecidos com funções para descrever a trinca são regiões de concentração de tensões e como está sendo utilizada a quadratura de Gauss-Legendre, para evitar erros numéricos, coloca-se mais pontos de integração nesses elementos. Já no modelo global enriquecido, os elementos locais que compõem cada elemento global, funcionam como células de integração, reduzindo também os erros numéricos nas regiões em que os pontos de controle são enriquecidos com a solução advinda do problema local.

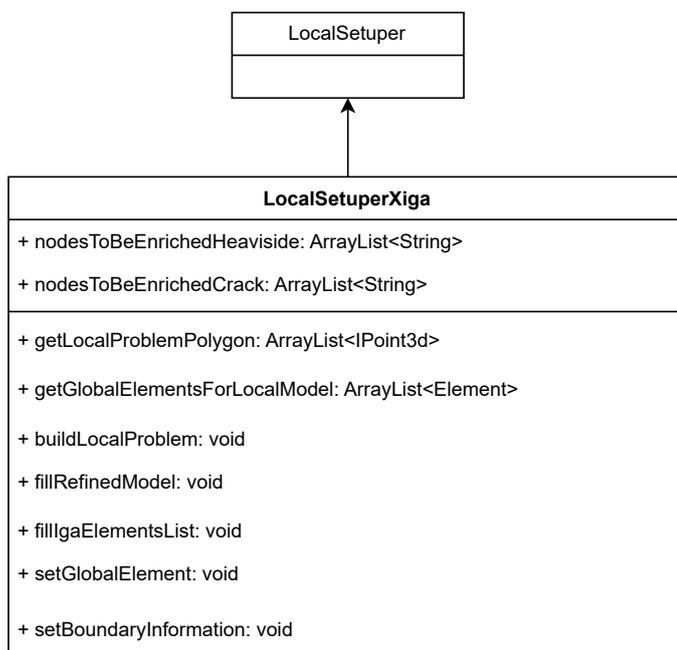


Figura 4.18: Diagrama UML da classe *LocalSetuperXiga*.

## Capítulo 5

# Análise de Modelos Estruturais Utilizando AIGE

Nesse capítulo são propostos problemas da mecânica e da mecânica da fratura, a fim de validar a implementação realizada no Capítulo 4 e também mostrar de forma prática a viabilidade da AIGE<sup>GL</sup> quando comparada ao MCFG/E<sup>GL</sup> convencional. Alguns desses resultados foram apresentados em artigos de mesma autoria, (Santos e Barros, 2021, 2023).

Para o cálculo dos erros utilizados na avaliação das simulações, a seguinte expressão é adotada:

$$E_r(\%) = \frac{|(\bullet)_r - (\bullet)_h|}{|(\bullet)_r|} \times 100\% \quad (5.1)$$

onde  $(\bullet)_h$  é o resultado obtido pelo modelo numérico seja em energia, tensão ou fator de intensidade de tensão e  $(\bullet)_r$  é o valor de referência correspondente.

Todos os gráficos apresentados mostram os resultados analisados considerando o seu logaritmo na base 10. Tradicionalmente os resultados são apresentados dessa maneira, porque as diferenças entre os valores tornam-se mais perceptíveis quando estão sendo tratados valores muito próximos ou muito pequenos.

Para o presente trabalho, optou-se em utilizar a quadratura de Gauss-Legendre, considerando um aumento no número de pontos de integração para os elementos que possuem algum tipo de enriquecimento associado aos seus nós/pontos de controle. Essa escolha foi motivada por ser uma estratégia amplamente utilizada dentro do

contexto da AIG e AIGE, além de contar com a simplicidade de implementação dentro de um sistema já apto para resoluções utilizando MEF e MEF/G/E.

## 5.1 Problema 1 - Chapa com deslocamento prescrito

Com o objetivo de validar a implementação da AIG dentro do sistema INSANE bem como analisar o impacto da utilização de diferentes técnicas de imposição de condições de contorno essenciais, dois modelos de chapas com deslocamento prescrito foram analisados.

O primeiro modelo trata-se de uma chapa retangular e o segundo de uma chapa de formato curvo. Propõe-se, assim, verificar o funcionamento da AIG em casos onde seus resultados devem ser idênticos às análises via MEF e também naqueles em que a AIG, diferentemente do MEF, consegue descrever de forma exata a geometria do problema. Além disso, dada a dificuldade da imposição das condições de contorno essenciais diretamente nos pontos de controle das malhas de AIG, duas metodologias são avaliadas: Método da Penalidade e Método de Nitsche, Seção 3.3.5. Por fim, uma análise da convergência de resultados a partir do valor do parâmetro de penalidade utilizado é apresentada.

### 5.1.1 Chapa Retangular

Nessa seção a chapa da Figura 5.1 é analisada. Trata-se de uma estrutura de dimensões  $5,0 \times 10,0$  u.c., engastada em um de seus lados e, no lado oposto, um deslocamento prescrito de  $0,10$  u.c. é imposto. Além disso, está sendo considerada sob o regime de estado plano de tensão, o material adotado tem módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a  $10000$  u.c. e coeficiente de Poisson de  $0,25$ . Unidades consistentes (u.c.) são adotadas.

A solução de referência para esse problema foi obtida usando o programa *ANSYS*, a partir da modelagem do problema utilizando uma malha de  $5000$  elementos quadrilaterais capazes de reproduzir uma aproximação polinomial quadrática (Q8). O

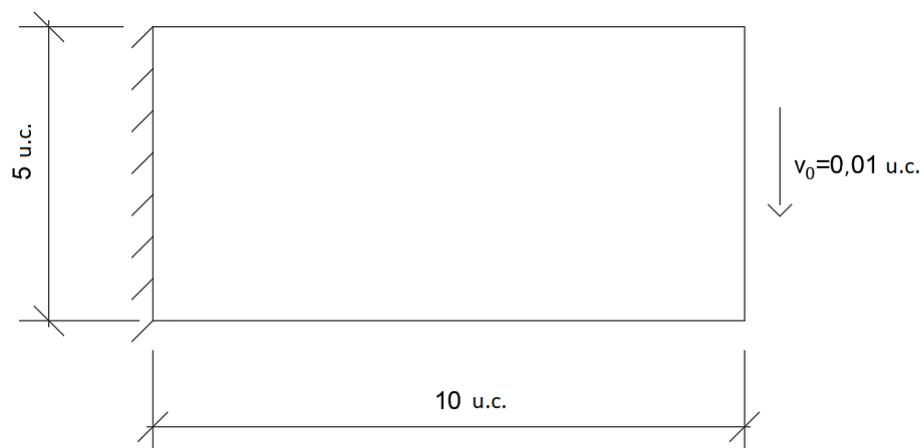


Figura 5.1: Modelo de Viga Reta.

resultado de energia de deformação para todo o domínio foi de 0,01326675 u.c..

A chapa foi discretizada utilizando duas malhas diferentes, uma com  $5 \times 10$  elementos e outra com  $10 \times 20$  elementos. Além disso, as condições de contorno foram impostas utilizando as estratégias da Penalidade e de Nitsche. O parâmetro de penalidade foi variado dentro do espectro de  $1 \times 10^5$  e  $1 \times 10^{20}$ .

Para o cálculo dos erros utilizados na avaliação das simulações e, posteriormente, apresentados nos gráficos foi utilizada a Equação (5.1).

O gráfico da Figura 5.2 mostra no eixo -x o log do parâmetro de penalidade e no eixo -y o log do erro na norma da energia de deformação para as duas malhas de análise (M1 e M2), para imposição de condição de contorno via Método da Penalidade e Nitsche (Penalidade e Nitsche) e para a aproximação polinomial linear, quadrática e cúbica (p1, p2 e p3). Nesse problema, nenhum tipo de enriquecimento foi utilizado, por se tratar da AIG. Os graus da aproximação polinomial nas análises são obtidos fazendo-se o refinamento  $k$ , descrito na Seção 3.2.2.3.

A partir do gráfico da Figura 5.2 é possível observar que, apesar da grande dispersão inicial, há uma convergência para as análises com aproximações de mesma ordem e mesma malha, a partir do parâmetro de penalidade  $1 \times 10^{10}$ . É possível concluir também que a utilização tanto do Método da penalidade quanto do método

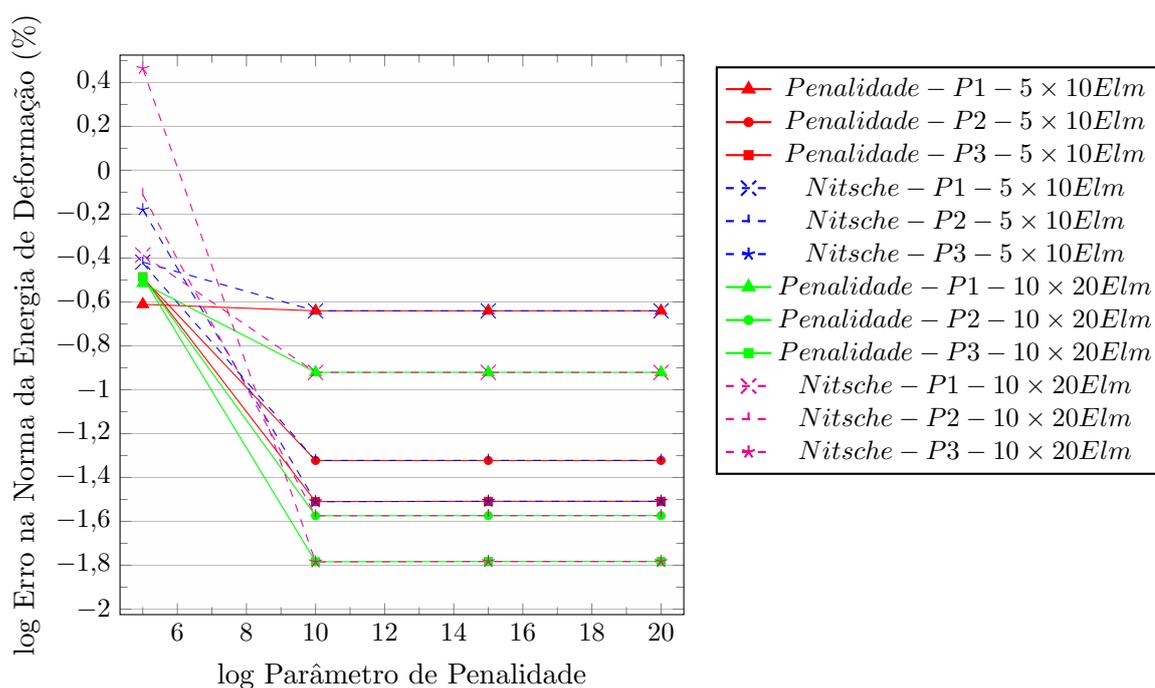


Figura 5.2: Erro na Norma da Energia de Deformação para os modelos apresentados.

de Nitsche produz resultados semelhantes. Além disso, conforme esperado quanto mais refinada a malha e maior o grau de aproximação polinomial utilizado na análise, menores são os erros na norma de energia. Outro comentário pertinente diz respeito a que, conforme o esperado, o resultado do modelo analisado com grau de aproximação polinomial  $p=1$ , após convergência do parâmetro de penalidade, reproduz os resultados encontrados nos programas de elementos finitos, no caso foi utilizado o *ANSYS* para fazer essa validação.

O gráfico da Figura 5.3 mostra no eixo -x o log do parâmetro de penalidade e no eixo -y o log do número de condição escalonado da matriz de rigidez, Equação (3.87), para os métodos analisados. A partir dele é possível perceber que a variação do parâmetro de penalidade não prejudicou o condicionamento da matriz de rigidez em nenhum dos casos.

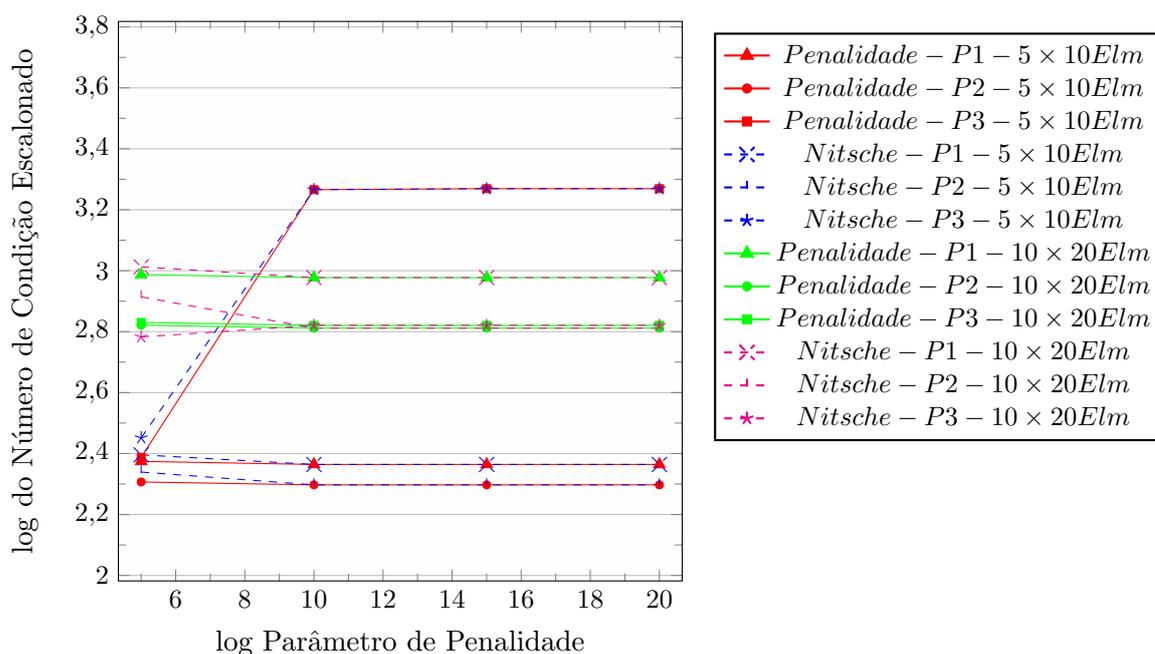


Figura 5.3: Número de condição escalonado da matriz de rigidez para os modelos apresentados.

### 5.1.2 Chapa de formato curvo

Um modelo de chapa de formato curvo é proposto a fim de confirmar a metodologia implementada da AIG contemplando a sua capacidade de exata descrição da geometria. A Figura 5.4 mostra a geometria do problema, que possui raio interno de 5,0 u.c. e raio externo de 10,0 u.c.. Os deslocamentos horizontais encontram-se impedidos em uma de suas extremidades e pontualmente também os deslocamentos verticais. Na extremidade oposta um deslocamento horizontal de 0,01 u.c. é imposto. Além disso, está sendo considerada sob o regime de estado plano de tensão, o material adotado tem módulo de elasticidade (E) igual a 10000 u.c. e coeficiente de Poisson de 0,25.

A solução de referência em energia de deformação para o problema, segundo Nguyen (2011) é de 0,029649668442377 e é obtida analiticamente de acordo com a formulação apresentada em Zienkiewicz et al. (2005).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>O valor apresentado como sendo de referência para o problema de chapa curva, não foi devidamente esclarecido nas bibliografias apresentadas e trata-se do dobro do valor encontrado para o um quarto de disco apresentado.

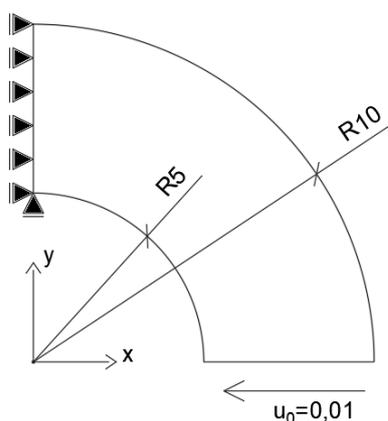


Figura 5.4: Modelo de Viga Circular.

A viga foi descrita utilizando três malhas diferentes, uma com  $2 \times 4$  elementos, outra com  $4 \times 8$  e outra com  $8 \times 16$  elementos. Além disso, as condições de contorno foram impostas utilizando a metodologia da Penalidade e de Nitsche. O parâmetro de penalidade utilizado, após teste de convergência foi de  $1 \times 10^{10}$ .

Os resultados utilizados para avaliar a precisão da análise, apresentados nos gráficos, são os erros na norma de energia de deformação, calculados utilizando a Equação (5.1).

O gráficos das Figuras 5.5 e 5.6 mostram os resultados do erro na norma de energia para o número de graus de liberdade de cada malha utilizada, variando entre Método da Penalidade e Nitsche e o grau de aproximação polinomial.

É possível perceber que os valores nos erros na norma de energia encontrados impondo as condições de contorno por Penalidade ou por Nitsche são semelhantes, resultando em taxas de convergência da solução próximos. O valor para aproximação polinomial  $p = 3$  apresentou uma ligeira diferença, porque os resultados já estão muito próximos da referência, desta forma a solução torna-se mais sensível às perturbações numéricas. Além disso, a taxa de convergência recupera e supera as taxas esperadas para  $p = 2$  esperada de 1,0 e para  $p = 3$  taxa esperada de 1,5, mostrando a capacidade aproximativa da AIG que compreende um espaço mais amplo que o polinomial. Em virtude dos resultados encontrados nesta seção e na Seção

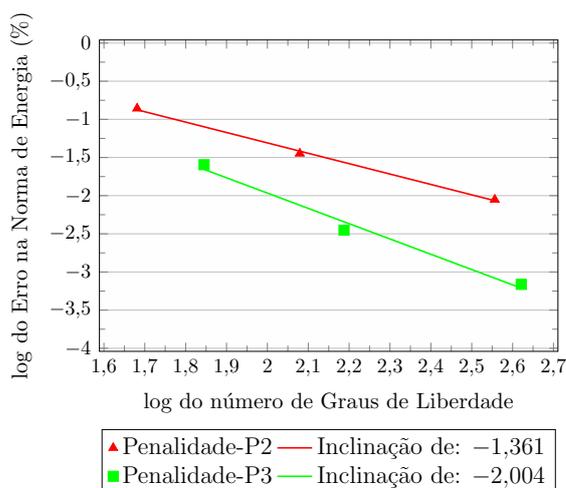


Figura 5.5: Erro na Norma da Energia para análise via Método da Penalidade.

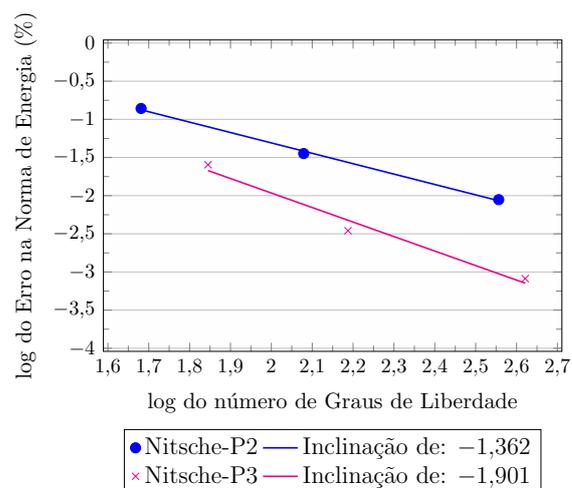


Figura 5.6: Erro na Norma da Energia para análise via Método de Nitsche.

5.1.1, optou-se por utilizar apenas o Método da Penalidade para impor condições de contorno essenciais nos demais problemas tratados nesse texto.

Além disso, a análise dos gráficos das Figuras 5.7 e 5.8 mostra que o número de condição da matriz de rigidez do problema, calculado através da Equação (3.87), se deteriora numa pequena escala a medida que se refina a malha, mas não atinge altos valores mesmo para aproximações quadráticas ou cúbicas.

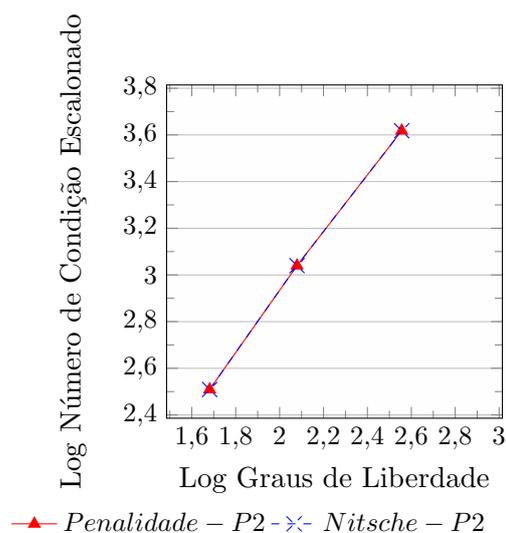


Figura 5.7: Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez para os modelos apresentados -  $p=2$ .

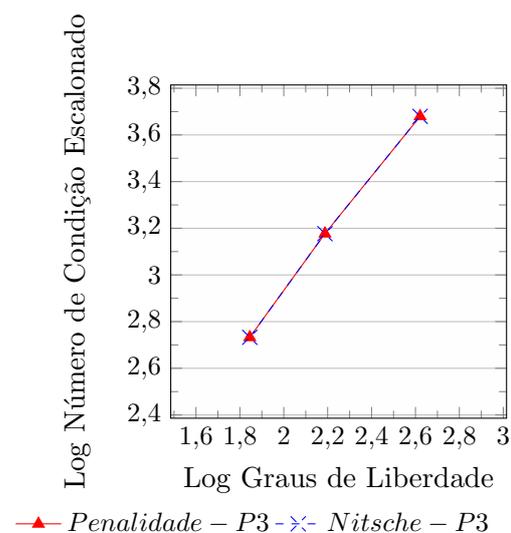


Figura 5.8: Número de condição Escalonado da Matriz de Rigidez para os modelos apresentados -  $p=3$ .

## 5.2 Problema 2 - Chapa Tracionada

A chapa que será analisada nessa seção tem caráter de validação da implementação da metodologia da AIGE no sistema INSANE. Trata-se de uma chapa com dimensões (20,00 x 10,00) u.c. e espessura de 0,10 u.c. que contém uma pré-trinca de 2,00 u.c.. Ela está submetida a tração constante de valor 1 u.c. no contorno superior e no contorno inferior é considerada simplesmente apoiada. Além disso, está sendo adotado o regime de estado plano de tensão e material elástico linear com módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 1 u.c. e coeficiente de Poisson de 0,3. A Figura 5.9(a) mostra em detalhes as características descritas e demais informações do modelo.

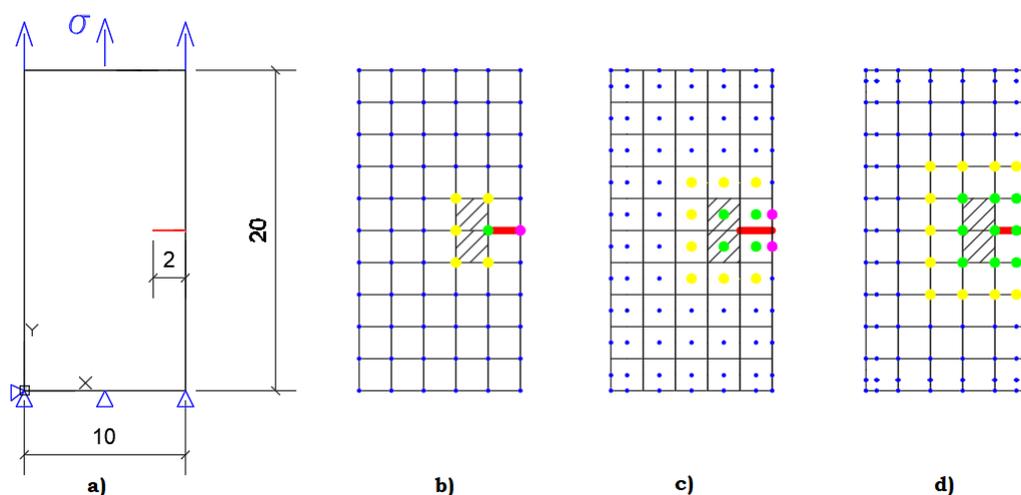


Figura 5.9: Modelo de chapa tracionada com pré-trinca: a) O modelo. b) Malha para  $p=1$  (AIGE and MEFG/E). c) Malha para  $p=2$  (AIGE). d) Malha para  $p=3$  (AIGE). Os círculos são os nós ou pontos de controle, dentro do contexto do MEFG/E ou AIGE, respectivamente. A linha vermelha é a trinca, representada apenas via enriquecimento. A cor rosa nos círculos representa que os nós/pontos de controle foram enriquecidos com função de Heaviside nas análises  $A$ ,  $B$  and  $C$ .

A cor verde nos círculos representa que os nós/pontos de controle foram enriquecidos com as funções OD nas análises  $B$  and  $C$ . A cor amarela nos círculos representa os nós/pontos de controle adicionais enriquecidos com as funções OD na análise  $C$ . Por fim, a cor azul nos círculos representa os nós/pontos de controle sem enriquecimento.

De acordo com Alves (2012), a solução de referência para esse problema foi obtida usando o programa *ANSYS*, a partir da modelagem do problema utilizando uma malha de 12087 p-elementos quadrilaterais, considerando simetria do problema e extrapolando a aproximação polinomial de graus  $p=1, 2$  e  $3$ . O resultado de energia de deformação para todo o domínio foi de 10,98326746 u.c. e tensão  $\sigma_{yy}$  no ponto  $x=7,99944$  e  $y=10,00$  é 66,769 u.c.. Além disso, o fator de intensidade de tensão  $K_I$  foi calculado de forma empírica, de acordo com Tada et al. (1939), pela expressão:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (5.2)$$

onde  $a$  é o tamanho da trinca,  $b$  a largura da chapa  $\sigma$  a tensão aplicada na extremidade e  $F\left(\frac{a}{b}\right)$ , no caso específico analisado, em que  $a/b \leq 0,6$  é dado por:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1,122 - 0,231\left(\frac{a}{b}\right) + 10,550\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,710\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,382\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (5.3)$$

O resultado para o problema analisado, utilizando as Equações (5.2) e (5.3), é  $K_I = 3,4403$ .

O modelo foi analisado utilizando a estratégia da AIGE e comparado com os resultados obtidos pelo MEF $G/E$  clássico. Para as análises feitas utilizando o MEF $G/E$  uma malha de 50 elementos finitos quadrilaterais bilineares (4 nós) foi construída, conforme Figura 5.9(b). Para a elevação do grau de aproximação polinomial da solução dentro do contexto do MEF $G/E$ , funções de enriquecimento polinomiais são utilizadas para enriquecer a PU, Equações (3.60) e (3.61). A malha se mantém, inalterada, portanto. Dentro do contexto da AIGE, para manter uma equivalência de comparação, a mesma malha física foi utilizada. A diferença, contudo, é que para realizar a elevação do grau de aproximação polinomial três diferentes malhas de controle precisam ser adotadas. A primeira malha de controle é a mesma malha do MEF $G/E$ , em que os pontos de controle coincidem com os nós físicos e representa a aproximação de primeiro grau ( $p=1$ ), apresentada na

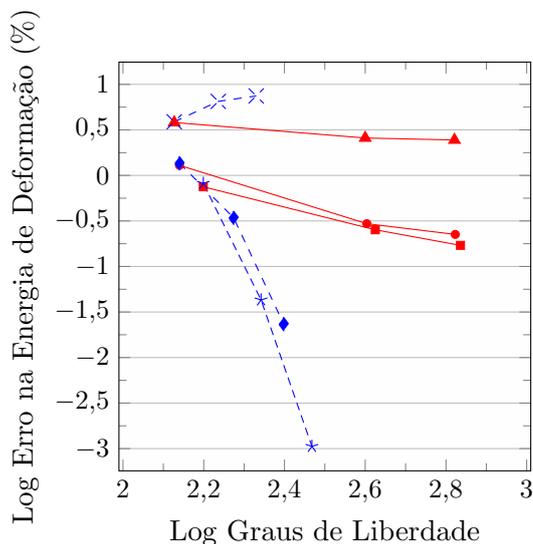
Figura 5.9(b). A segunda malha de controle é associada com a aproximação quadrática ( $p=2$ ), conforme Figura 5.9(c) e a última representa a aproximação cúbica ( $p=3$ ) de acordo com a Figura 5.9(d). A trinca foi descrita na malha através de uma combinação das funções de Heaviside, Equação (3.62), a fim de introduzir as descontinuidades ao modelo e as funções de enriquecimento OD, Equações (3.64) a (3.67), que introduzem as singularidades ao campo de tensões ao redor da trinca e são capazes de representar os dois modos de abertura de trinca.

Para integração numérica,  $(8 \times 8)$  pontos de Gauss foram utilizados nos elementos que contêm algum nó cuja PU esteja enriquecida com função de Heaviside ou função OD, a fim de representar com maior exatidão o comportamento da região de interesse do problema. Já nos demais elementos, apenas  $(4 \times 4)$  pontos de integração foram utilizados e são suficientes para descrever a aproximação na região em que se encontram.

Três tipos de análises foram realizadas, *A*, *B* and *C*, à medida que a aproximação é refinada/enriquecida polinomialmente. Na análise *A*, somente a descontinuidade é inserida no modelo através do enriquecimento com função de Heaviside, associada aos nós/pontos de controle de cor rosa apresentados na Figura 5.9(b),(c),(d). Na análise *B*, as funções de enriquecimento OD são acrescentadas como enriquecimento da PU nos nós/pontos de controle vizinhos da ponta da trinca, representados na Figura 5.9(b),(c),(d) pela cor verde. Na análise *C*, um conjunto adicional de nós/pontos de controle àquele da análise *B* são enriquecidos com funções OD, conforme representado na Figura 5.9(b),(c),(d) pela cor amarela.

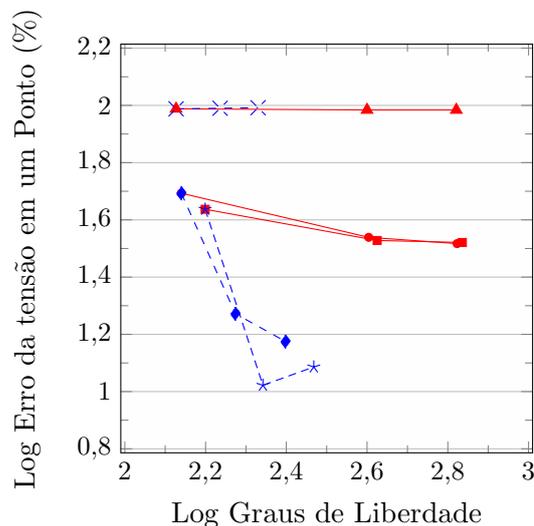
Os gráficos das Figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam, respectivamente, os resultados das análises em termos do erro na energia de deformação, erro no componente de tensão  $\sigma_{yy}$  próximo à ponta da trinca, do número de condição escalonado da matriz de rigidez, calculado através da Equação (3.87), e do erro no fator de intensidade de tensão  $K_I$  encontrados para cada simulação em função do número

de graus de liberdade dos modelos, que aumenta com a elevação da ordem de aproximação polinomial ( $p=1, 2$  e  $3$ ). O cálculo dos erros utilizados nas avaliações de resultados foram feitos com base na Equação (5.1).



▲ MEFG/E - A    ● MEFG/E - B  
 ■ MEFG/E - C    ✖ AIGE - A  
 ◆ AIGE - B    ✱ AIGE - C

Figura 5.10: Log Erro na Energia de Deformação para os modelos apresentados.



▲ MEFG/E - A    ● MEFG/E - B  
 ■ MEFG/E - C    ✖ AIGE - A  
 ◆ AIGE - B    ✱ AIGE - C

Figura 5.11: Erro na tensão  $\sigma_{yy}$  em um ponto para os modelos apresentados.

Analisando os resultados de energia de deformação, tensão ( $\sigma_{yy}$ ) próximo à ponta da trinca e fator  $K_I$  nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.13, é possível notar que há uma coincidência de resultados das análises feitas via MEFG/E e AIGE quando o grau de aproximação polinomial é  $p=1$ . Este resultado já era esperado, pois, neste caso, as funções de forma do tipo NURBS coincidem com a função de forma Lagrangiana. Quando são utilizados graus mais elevados ( $p=2, p=3$ ), há uma melhoria nos resultados, em ambos os métodos. A vantagem da AIGE neste aspecto é a obtenção de uma solução satisfatória, à medida que mais pontos de controle são enriquecidos com funções do tipo OD, às custas de um menor aumento de graus de liberdade do modelo, quando comparado ao MEFG/E. Certamente, um pequeno número de graus de liberdade reduz o custo computacional do problema. Além disso, na análise

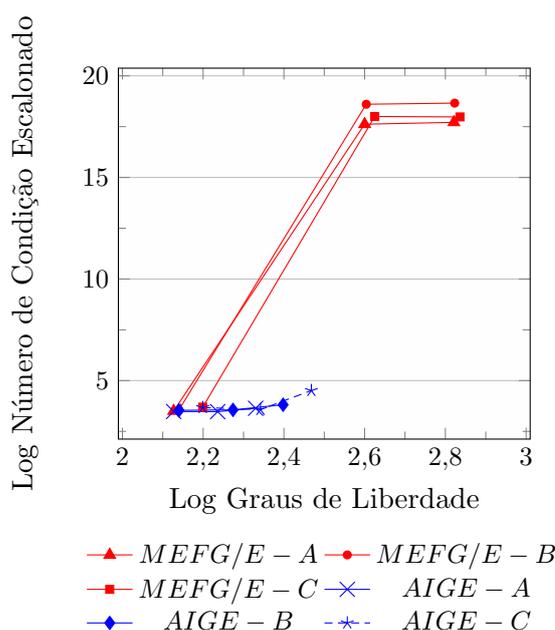


Figura 5.12: Número de condição escalonado para os modelos apresentados.

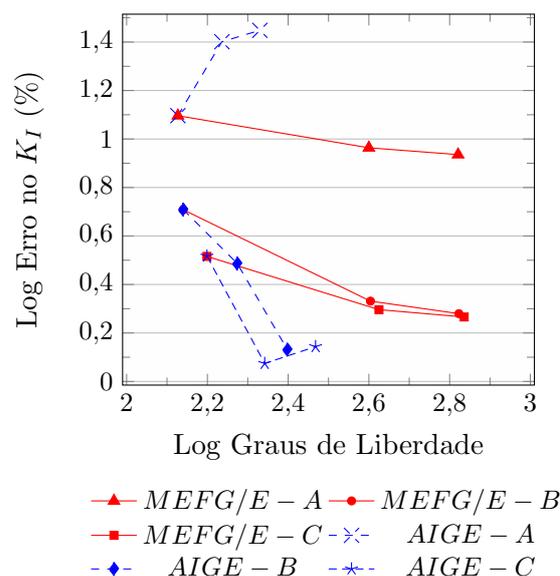


Figura 5.13: Log do erro no  $K_I$  para os modelos apresentados.

via AIGE de ordem polinomial superior, os valores de energia de deformação, tensão próximos à ponta da trinca e  $K_I$  mostram-se mais próximos da referência. A deterioração dos resultados encontrados na análise *A* pode ser explicada pela descrição pobre da solução aproximada ao redor da trinca. Na verdade, apenas funções de Heaviside são utilizadas, o que não contribui para simular a singularidade esperada do campo de tensões na ponta da trinca. Particularmente, para a AIGE, esta descrição pobre é combinada com o aumento do número de pontos de controle enriquecidos com as funções Heaviside, o que prejudica a qualidade da aproximação. Para o caso da AIGE-C com  $p=3$ , observou-se um erro um pouco maior quando comparado com o ponto anterior da mesma curva, tanto para tensão próxima à ponta da trinca quanto para  $K_I$ . No entanto, o AIGE-C ainda fornece valores mais precisos que as outras simulações. Perturbações numéricas do cálculo do componente de tensão  $\sigma_{yy}$  na borda do elemento, e conseqüentemente em  $K_I$ , e da integração numérica podem estar interferindo nesses resultados e causando essas pequenas alterações em aproximações já muito próximas da solução de referência.

Em relação ao número de condição escalonado apresentado na Figura 5.12, é

possível perceber que à medida que o grau de aproximação aumenta nos modelos MEFG/E, o número de condição cresce muito mais do que nos modelos AIGE. Assim, matrizes resolvidas via MEFG/E têm muito mais probabilidade de adicionar erros numéricos ao modelo, uma vez que lidam com dependência linear de suas variáveis e pequenas perturbações podem levar a grandes mudanças na solução tornando os resultados numericamente menos confiáveis.

### 5.3 Problema 3 - Chapa em Modo Misto de Abertura de Trinca

Nessa seção, a influência dos enriquecimentos do tipo global-local quando associados, em diferentes abordagens, à estratégia da AIGE, é investigada. O condicionamento da matriz de rigidez e a precisão da solução numérica é avaliada, mais uma vez em um problema 2-D da Mecânica da Fratura Linear Elástica. O modelo é definido por uma placa de dimensões  $(16,00 \times 7,00)$ u.c., com pré-trinca de canto de dimensão  $3,5$ u.c., apresentada em vermelho na Figura 5.14.

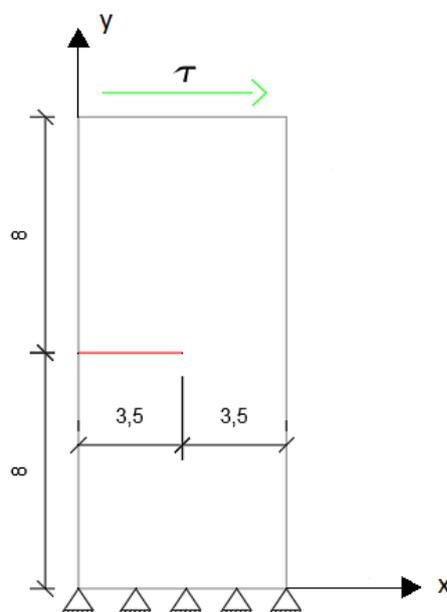


Figura 5.14: Chapa com uma trinca de Canto em Modo Misto.

Ainda de acordo com a Figura 5.14, a chapa está engastada do contorno inferior e

uma tensão de cisalhamento constante  $\tau = 1,0$  u.c. é aplicada em sua face superior. Além disso, está sendo considerado o regime de estado plano de deformação e o material adotado tem módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a  $100 \times 10^3$  u.c. e coeficiente de Poisson de 0,3. Nesse modelo, tem-se predominantemente o modo misto de abertura de trinca.

Condições de Dirichlet são utilizadas para a imposição da solução global no contorno do problema local, Seção 3.8.1.2. O parâmetro de penalidade da Equação (3.76), seguindo Fonseca (2019), foi adotado como  $\eta = 1 \times 10^{10}$ . Os ciclos de enriquecimento global-local são realizados até que a convergência de  $K_I$  com tolerância de  $1 \times 10^{-2}$  seja atingida no problema global enriquecido. Foram necessários seis ciclos para alcançar a convergência, quando uma aproximação linear é usada para representar o problema global. Para graus polinomiais superiores quatro ciclos foram suficientes. Apenas os resultados do último ciclo convergente são apresentados.

A trinca é descrita no problema local através das funções de enriquecimento. Ao redor da ponta da trinca, são utilizadas as funções OD, Equações (3.63-3.67). Ao longo do comprimento da trinca são utilizadas funções de enriquecimento de Heaviside, Equação (3.62). Nesse problema, os elementos com funções OD ou Heaviside têm a integração de domínio realizada com  $(8 \times 8)$  pontos de Gauss enquanto nos demais elementos apenas  $(4 \times 4)$  são suficientes para os graus superiores de aproximação no problema local a serem considerados, conforme apresentado em Fonseca (Fonseca, 2019).

Esse mesmo problema foi analisado por Wilson (1969) e (Fonseca, 2019) e a solução de referência adotada nestes trabalhos é de: Energia de deformação: 0,02467211 u.c., Fator de Intensidade de Tensão - Modo I de abertura de trinca:  $K_I=34,0$  e Fator de Intensidade de Tensão - Modo II de abertura de trinca:  $K_{II}=4,55$ .

### 5.3.1 Modelo Global-Local - Primeira Análise

Nesta primeira análise, a intenção é avaliar a influência da utilização da AIGE na escala local dentro de uma abordagem completa global-local. Para tanto, uma malha de 105 elementos quadriláteros de quatro nós de dimensões  $(1,000 \times 1,067)$ u.c. é utilizada para a representação do problema na escala global, Figura 5.15(a). A trinca é descrita apenas a nível local, porém quando superposta no domínio global, atravessa quatro elementos dessa malha. É importante destacar que não há nós duplicados, nem funções de Heaviside, nem funções OD representando a trinca no modelo global. Tal representação, na malha global, é obtida, na terceira etapa do procedimento global-local, pelas funções de enriquecimento obtidas numericamente da solução do modelo local, Seção 3.8.

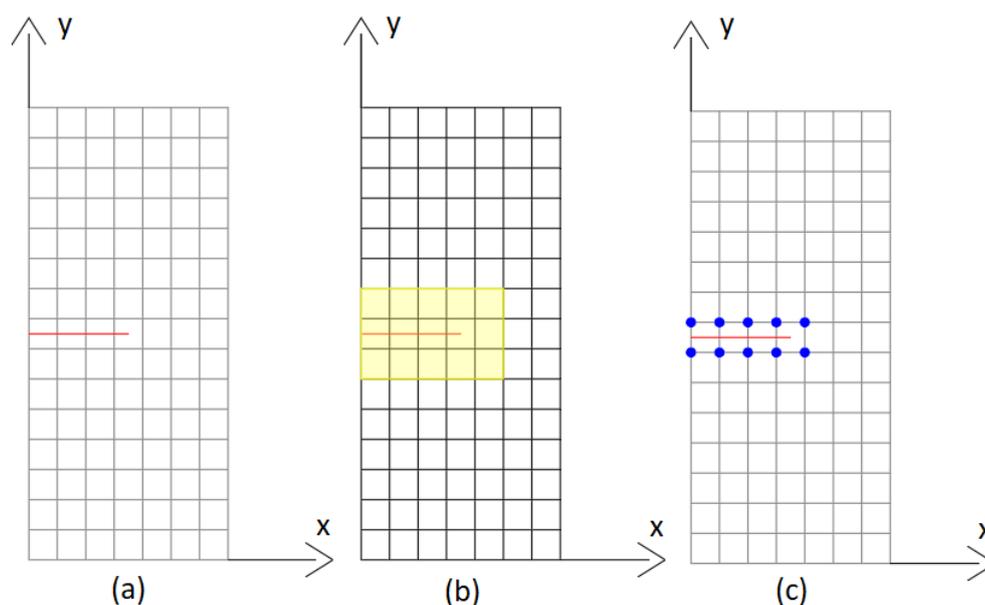


Figura 5.15: (a) Malha global de 105 elementos, sem nós duplicados. Em vermelho, está indicada a posição da trinca na malha global, ainda que esta esteja apenas descrita na malha local. (b) A região amarela representa o subdomínio local. (c) Problema global enriquecido. Os círculos azuis indicam os nós associados com as funções de enriquecimento numericamente obtidas no problema local.

Conforme mencionado anteriormente, a AIGE será utilizada na análise do problema local. Portanto, o problema global na primeira e na segunda etapa do procedimento global-local é resolvido via MEF3/E. O problema global ora é avaliado

com grau de aproximação polinomial linear ( $p = 1$ ) ora com grau de aproximação polinomial quadrática ( $p = 2$ ). Para o caso de ( $p = 2$ ) as PUs foram enriquecidas com as funções polinomiais da Equação (3.60).

O domínio local retangular adotado nesta análise tem tamanho  $(5,00 \times 3,20)$ u.c. e fica entre as coordenadas  $(x = 0,00; y = 6,40)$  e  $(x = 5,00; y = 9,60)$ . A Figura 5.15(b) mostra a região do domínio global que define o problema local. Na terceira etapa do procedimento global-local, apenas os nós dos elementos atravessados pela trinca são associados às funções de enriquecimento obtidas numericamente no problema local, Figura 5.15(c).

O objetivo é avaliar o comportamento da solução quando o problema local é resolvido por MEFGE ou AIGE. O grau polinomial da aproximação local varia de  $p = 1$  a  $p = 3$ . Uma malha local regular de 135 elementos quadrilaterais de dimensões  $(0,333 \times 0,355)$ u.c. é usada. Quando o modelo local é resolvido por MEFGE as Equações (3.60) e (3.61) são usadas para realizar o enriquecimento polinomial e o refinamento  $h$  é executado para subdividir os elementos globais originais nos novos elementos locais. Quando o modelo local é resolvido pela AIGE, o refinamento  $k$  é realizado conforme apresentado na Seção 3.2.2.3. A descontinuidade da trinca é simulada pelas funções de enriquecimento de Heaviside, Equação (3.62), e o campo de tensões singular na ponta da trinca é aproximado pelas funções de enriquecimento OD, Equações (3.64-3.67). A Figura 5.16 mostra esse conjunto de nós que tem as respectivas PUs enriquecidas. É importante observar que todas as análises utilizando MEFGE possuem a continuidade  $C^0$ . Por outro lado, para a AIGE, a continuidade  $C^0$  é observada apenas para  $p = 1$ . Devido à estratégia de refinamento  $k$ , a continuidade  $C^1$  e  $C^2$  é alcançada para aproximações com  $p = 2$  e  $p = 3$ , respectivamente.

Os resultados são apresentados nos gráficos a seguir, os acrônimos que aparecem nas legendas dos gráficos representam a estratégia de solução adotada em cada caso:

- MEFGE/ $E_{p_G=i, p_L=j}^{gl}$  para o procedimento global-local convencional, no qual o

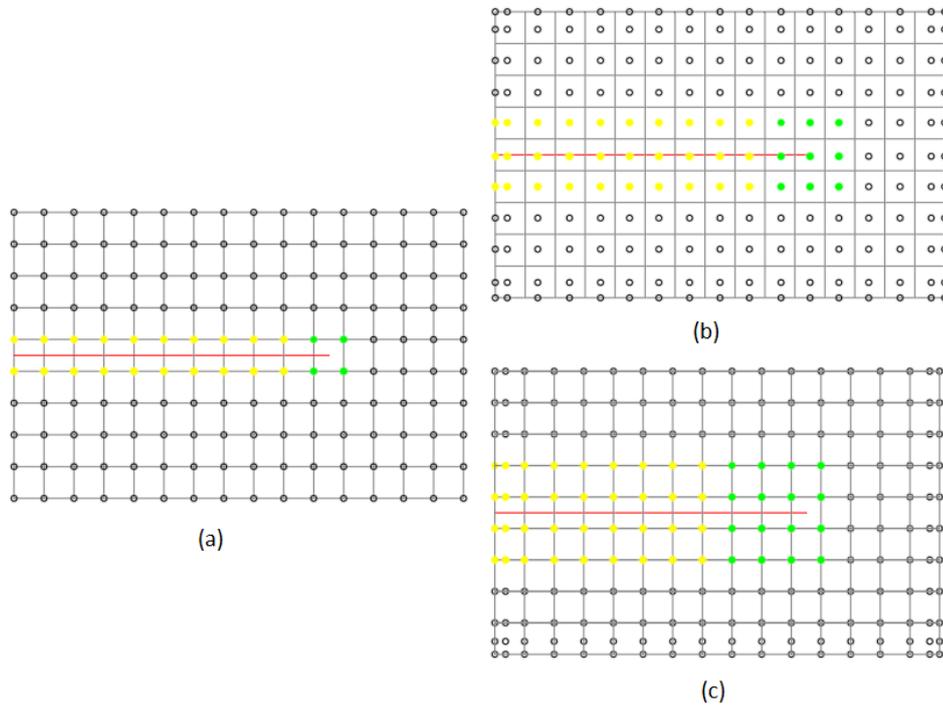


Figura 5.16: Malhas locais. a) AIGE com  $p = 1$  e para MFG/E. b) AIGE com  $p = 2$ . c) AIGE com  $p = 3$ . Os círculos são os nós dentro do contexto do MFG/E e os pontos de controle da AIGE. A trinca, em vermelho, é representada pelas funções de Heaviside e OD, respectivamente associadas com os nós/pontos de controle de cor amarela e verde. Para MFG/E  $p = 2$  e  $p = 3$  a malha (a) é também utilizada e todos os nós são enriquecidos com funções polinomiais.

MFG/E é utilizado tanto no modelo global quanto no local;

- $\text{AIGE}_{p_G=i, p_L=j}^{\text{gl}_1}$  para a estratégia composta pelo MFG/E sendo utilizado na primeira e terceira etapa do procedimento global-local e a AIGE na segunda etapa, ou seja, representando o problema local.

$i$  and  $j$  se referem ao grau de aproximação polinomial utilizados a nível global ( $p_G$ ) e local ( $p_L$ ), respectivamente.

Os erros na norma de energia de deformação e nos fatores de intensidade de tensão são avaliados utilizando a Equação (5.1). Adicionalmente, o número de condição escalonado da matriz de rigidez, Equação (3.87), é também analisado.

Os dados são reunidos para avaliar o comportamento do número de condição

escalonado, norma de energia de deformação e os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  à medida que a aproximação polinomial da solução local aumenta de  $p=1$  para  $p=3$ . Os gráficos das Figuras 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20 mostram a evolução desses parâmetros, considerando o aumento da aproximação polinomial local.

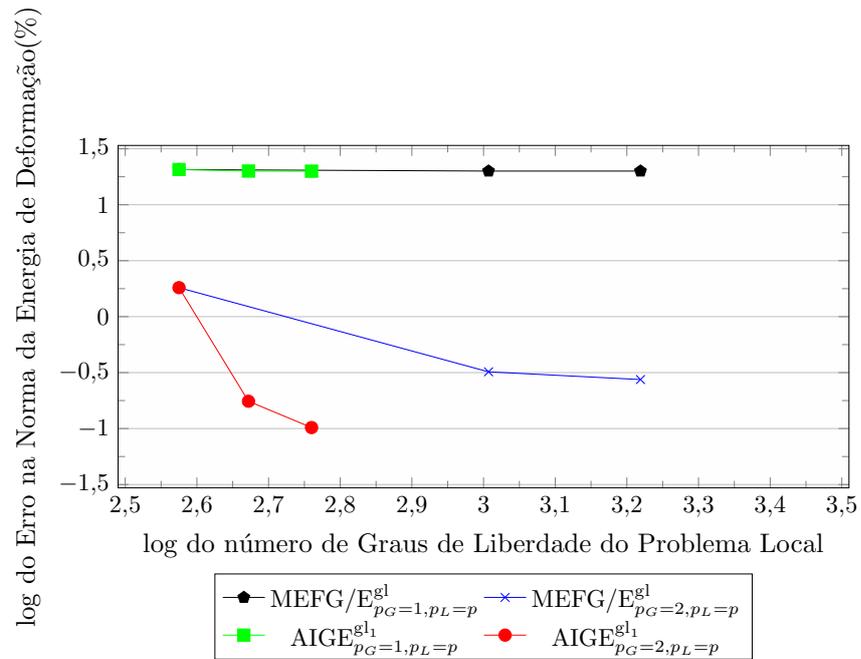


Figura 5.17: Erro na Norma da Energia de Deformação.

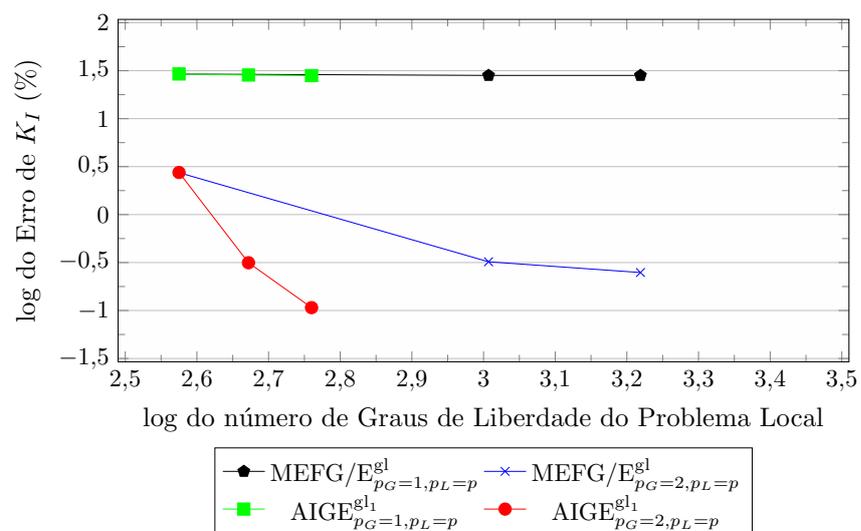


Figura 5.18: Erro em  $K_I$ .

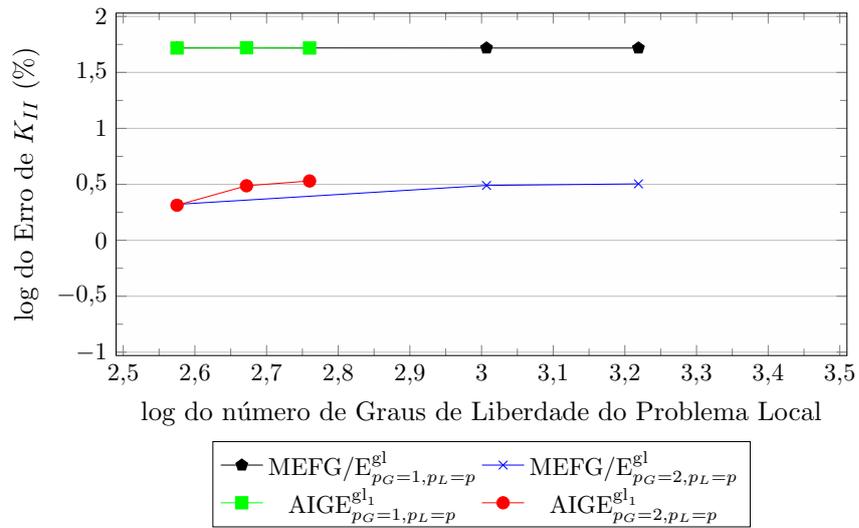


Figura 5.19: Erro em  $K_{II}$ .

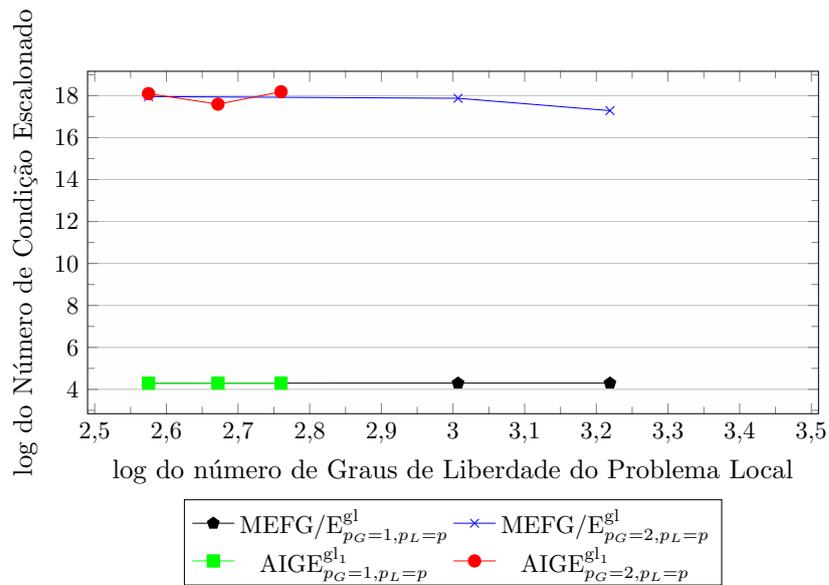


Figura 5.20: Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez do problema global enriquecido.

Conforme esperado, os gráficos das Figuras 5.17 e 5.18 mostram uma melhora significativa nos resultados quando a aproximação quadrática é utilizada na análise do modelo global. Também como era esperado, as duas análises com aproximação

linear, tanto com MEFG/E quando com AIGE na escala local, culminam em resultados equivalentes, comportamento semelhante ao observado na Seção 5.2. Além disso, nota-se que usar a AIGE na escala local do problema, tem um impacto positivo considerável na solução para graus de aproximação polinomial maiores, ademais de exigir um menor número de graus de liberdade quando comparada à solução com o MEFG/E de mesmo grau de aproximação polinomial. Na Figura 5.19, é observado que o erro em  $K_{II}$  não é reduzido com o aumento do grau de aproximação polinomial da solução local, sendo afetado apenas pelo enriquecimento polinomial do problema global.

A Figura 5.20 mostra o mesmo comportamento para MEFG/E<sup>gl</sup> e para a AIGE<sup>gl</sup> quando o número de condição escalonado é avaliado na matriz de rigidez do problema global enriquecido. Nos dois métodos ocorre um aumento muito significativo nesse parâmetro quando o grau de aproximação polinomial da solução global salta de  $p = 1$  para  $p = 2$ . Como somente o MEFG/E é utilizado na escala global tal comportamento já é bem conhecido e esperado.

A piora do condicionamento da matriz de rigidez do problema local também é observado quando se utiliza MEFG/E com enriquecimento polinomial, Figura 5.21. Por outro lado, para aproximações utilizando a AIGE, o número de condição escalonado muda em uma taxa menor à medida que os graus de aproximação polinomial aumentam. Isso se justifica, porque, a AIGE<sup>gl</sup> proposta realiza o refinamento  $k$  modificando a PU do problema local. Esta estratégia tem menos impacto na deterioração do condicionamento da matriz de rigidez associada, quando comparada com a estratégia de enriquecimento polinomial MEFG/E. Um número de condição menor pode evitar a perda de precisão da solução local usada para enriquecer o problema global na terceira etapa do procedimento global-local.

Nesta seção, o problema global é analisado apenas com MEFG/E. Os erros em termos da norma de energia de deformação,  $K_I$  e  $K_{II}$  estão relacionados ao grau

polinomial das soluções global e local e às soluções locais obtidas numericamente utilizadas para enriquecer a aproximação global. Quando a AIGE substitui o MEFG/E na análise do problema local, um número menor de graus de liberdade locais é necessário para melhorar a solução global enriquecida, contribuindo para reduzir o custo computacional do problema e minimiza o impacto sobre o condicionamento do sistema de equações do problema local.

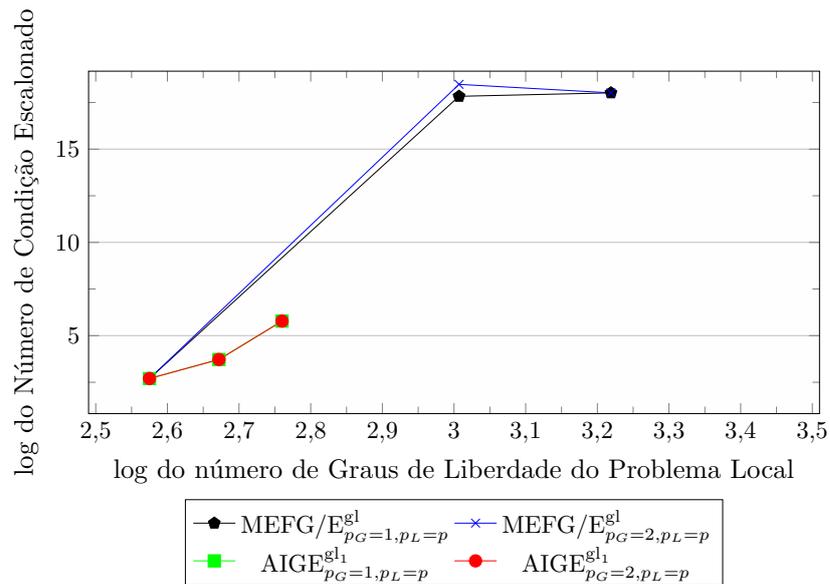


Figura 5.21: Número de Condição Escalonado da Matriz de Rigidez do Problema Local.

### 5.3.2 Modelo Global-Local - Segunda Análise

O mesmo problema da Figura 5.14 foi novamente analisado. A diferença é que nessa seção uma combinação diferente entre MEFG/E e AIGE é adotada:

- $\text{MEFG}/E_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}}$ , novamente o MEFG/E acoplado à técnica global-local de maneira convencional;

- $\text{AIGE}_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}_2}$  - com a AIGE na análise do problema global inicial e enriquecido dentro do processamento global-local e o MEFG/E sendo utilizado para descrever o problema local.

$p_G = 2$  e  $p_L = 1$  se referem ao grau de aproximação polinomial usados na análise global e local, respectivamente.

Três malhas de 105, 945 e 8505 elementos quadrilaterais de dimensões  $(1,000 \times 1,067)$ u.c.,  $(0,333 \times 0,356)$ u.c. e  $(0,111 \times 0,119)$ u.c., respectivamente, são usadas para a representação do problema em escala global, Figura 5.22. O problema global, analisado na primeira e terceira etapas do procedimento global-local, é sempre de aproximação quadrática. Para realizar o refinamento das malhas globais, no MEFG/E o refinamento  $h$  é adotado e todos os nós da malha são enriquecidos com funções polinomiais, Equações (3.60) e (3.61). Já na AIGE o refinamento  $k$ , descrito na Seção 3.2.2.3 é aplicado. A trinca é introduzida apenas no problema local pelas funções de enriquecimento Heaviside e OD, Equações (3.62) e (3.64-3.67), respectivamente. Nenhum nó duplicado é usado no problema global para descrever geometricamente a trinca que é representada pela solução obtida numericamente do problema local usado para enriquecer a função de PU.

Para  $\text{AIGE}_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}_2}$  a distribuição dos pontos de controle se assemelha à apresentada na Figura 5.16(b). Ainda que a malha apresentada na Figura 5.16(b) seja uma malha local, o mesmo padrão de distribuição de pontos de controle é observado também para a malha global atual.

A Figura 5.23 mostra o subdomínio local posicionado dentro do domínio global. Esse subdomínio tem o tamanho de  $(6,00 \times 5,33)$ u.c. e fica entre as coordenadas  $(x = 0,00; y = 6,00)$  e  $(x = 5,33; y = 10,67)$ . O objetivo é garantir que os elementos atravessados pela trinca sejam totalmente enriquecidos pela solução local obtida numericamente. Nota-se que o domínio local, Figura 5.23, é maior que o utilizado na Seção 5.3.1, Figura 5.15(b). A mesma região local poderia ser adotada se somente a metodologia MEFG/E fosse utilizada. Como também é utilizada a metodologia

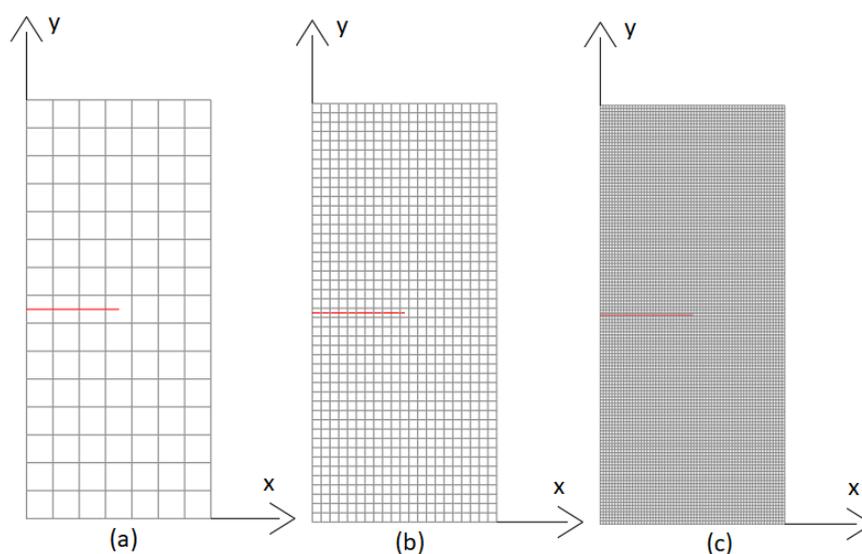


Figura 5.22: Malhas globais utilizadas nas análises AIGE e MEFG/E para aproximação polinomial  $p = 2$ . (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos.

AIGE no modelo global, optou-se por adotar uma região local consistente ao que seria o mínimo necessário aos dois métodos como discutido na Seção 3.8.2. Assim, as análises  $\text{MEFG}/E_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}}$  e  $\text{AIGE}_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}_2}$  ficam comparáveis. De acordo com a Equação (3.6), o suporte do PU para AIGE é maior que para MEFG/E quando a aproximação é de ordem superior a um. Para as aproximações quadráticas utilizadas na análise do problema global a seguir, a região amarela da Figura 5.23 é a menor necessária, na AIGE, para garantir o enriquecimento completo dos elementos atravessados pela trinca na malha física relacionada. Na verdade, esta é a região das três malhas que cobrem todos os pontos de controle cujos suportes contêm esses elementos, Figura 5.24. É importante observar que  $\text{MEFG}/E^{\text{gl}}$  fornece uma aproximação  $C^0$  para o problema global. Diferentemente, uma aproximação  $C^1$  é obtida para  $\text{AIGE}^{\text{gl}}$ .

O esquema de enriquecimento adotado é geométrico. A mesma região é enriquecida pelo procedimento global-local à medida que o refinamento  $h$  para MEFG/E ou o refinamento  $k$  no caso da AIGE são realizados. Na Figura 5.24, todos os pontos de controle relacionados aos elementos da região verde estão associados às funções de

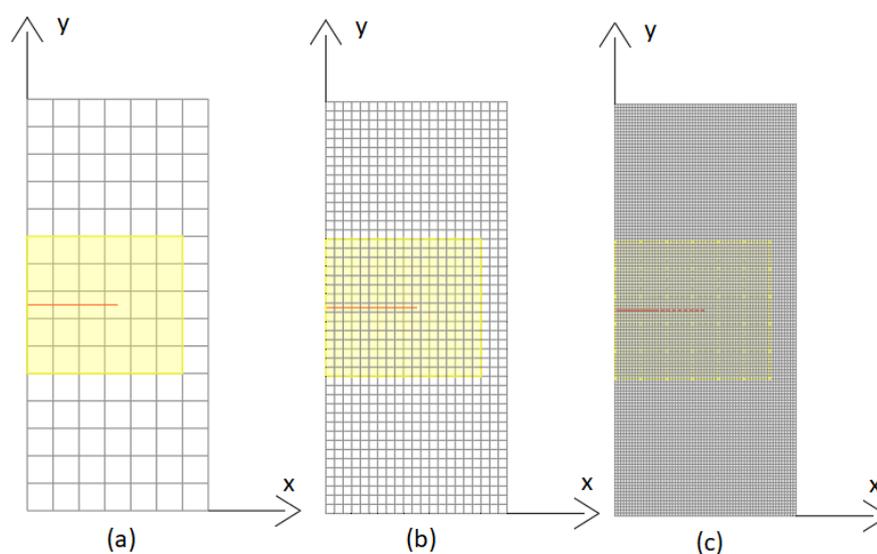


Figura 5.23: Domínio Local demarcado no domínio global. (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos.

enriquecimento fornecidas pela solução local obtida numericamente. Isto equivale ao enriquecimento realizado para MEF<sub>G</sub>/E mostrado na Figura 5.25. A mesma região verde é, portanto, mantida como aquela com o enriquecimento completo advindo da solução local.

As malhas locais de 270, 2430 e 21870 elementos quadrilaterais de quatro nós, de dimensões  $(0,333 \times 0,356)$ u.c.,  $(0,111 \times 0,119)$ u.c. e  $(0,037 \times 0,040)$ u.c., respectivamente, são apresentadas na Figura 5.26. Além disso, são indicados os nós associados às funções Heaviside e OD da análise MEF<sub>G</sub>/E, Equações (3.62) e (3.64-3.67) respectivamente. Observa-se que o enriquecimento de Heaviside é topológico<sup>2</sup> e o enriquecimento de OD é geométrico.<sup>3</sup>

Os parâmetros considerados para avaliar a qualidade das soluções são os erros, medidos utilizando a Equação (5.1), na norma da energia de deformação e nos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ . Essas informações foram reunidas nos gráficos das Figuras 5.27, 5.28 e 5.29, respectivamente. O número de condição escalonado,

<sup>2</sup>À medida que se refina a malha, a utilização do enriquecimento topológico mantém o mesmo número de nós enriquecidos.

<sup>3</sup>À medida que se refina a malha, a utilização do enriquecimento geométrico mantém a mesma região de enriquecimento, ou seja, mais nós são enriquecidos.

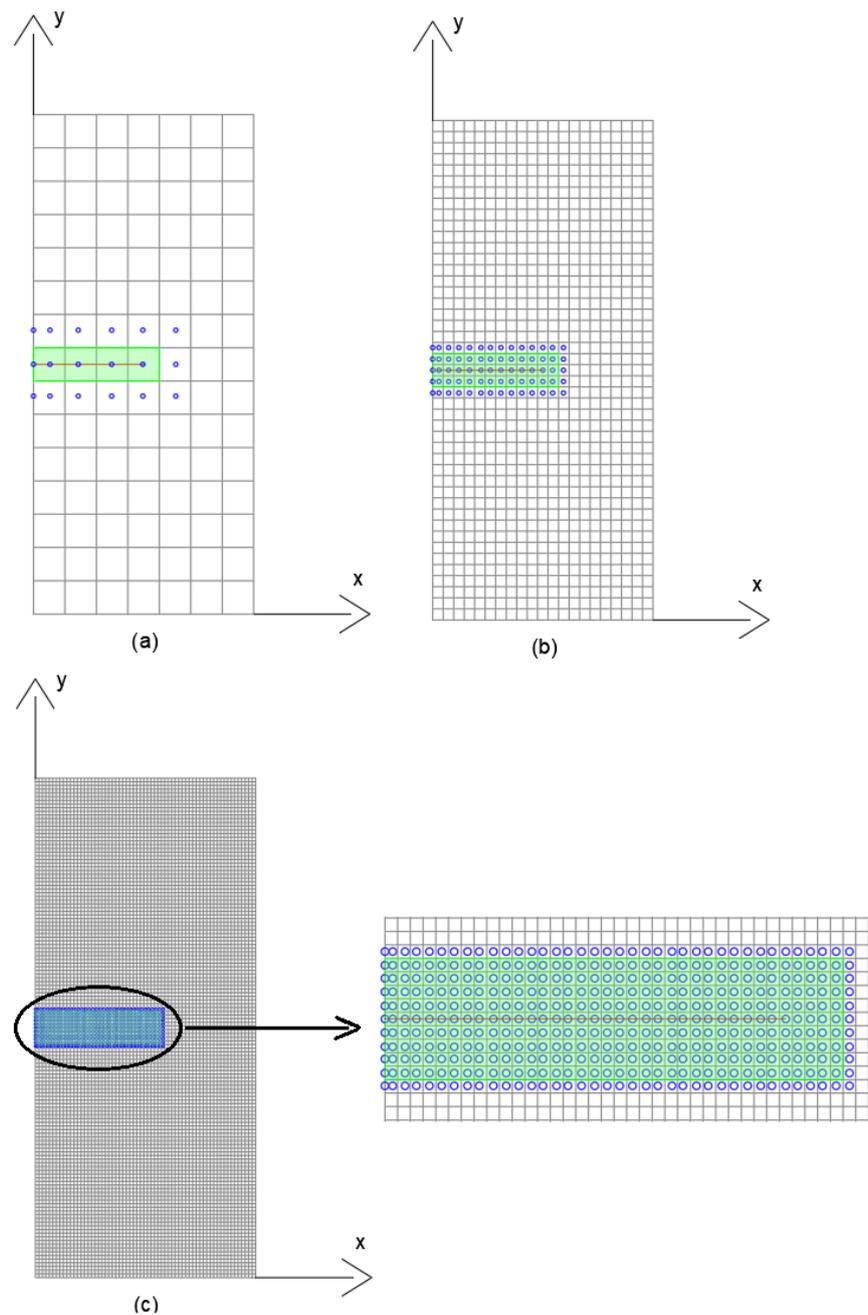


Figura 5.24: Representação do conjuntos de pontos de controle associados com o esquema de enriquecimento geométrico do procedimento global-local para a AIGE.

Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos.

Equação (3.87), da matriz de rigidez também foi avaliado e apresentado no gráfico da Figura 5.30.

A Figura 5.27 mostra que o enriquecimento global-local recupera uma taxa de

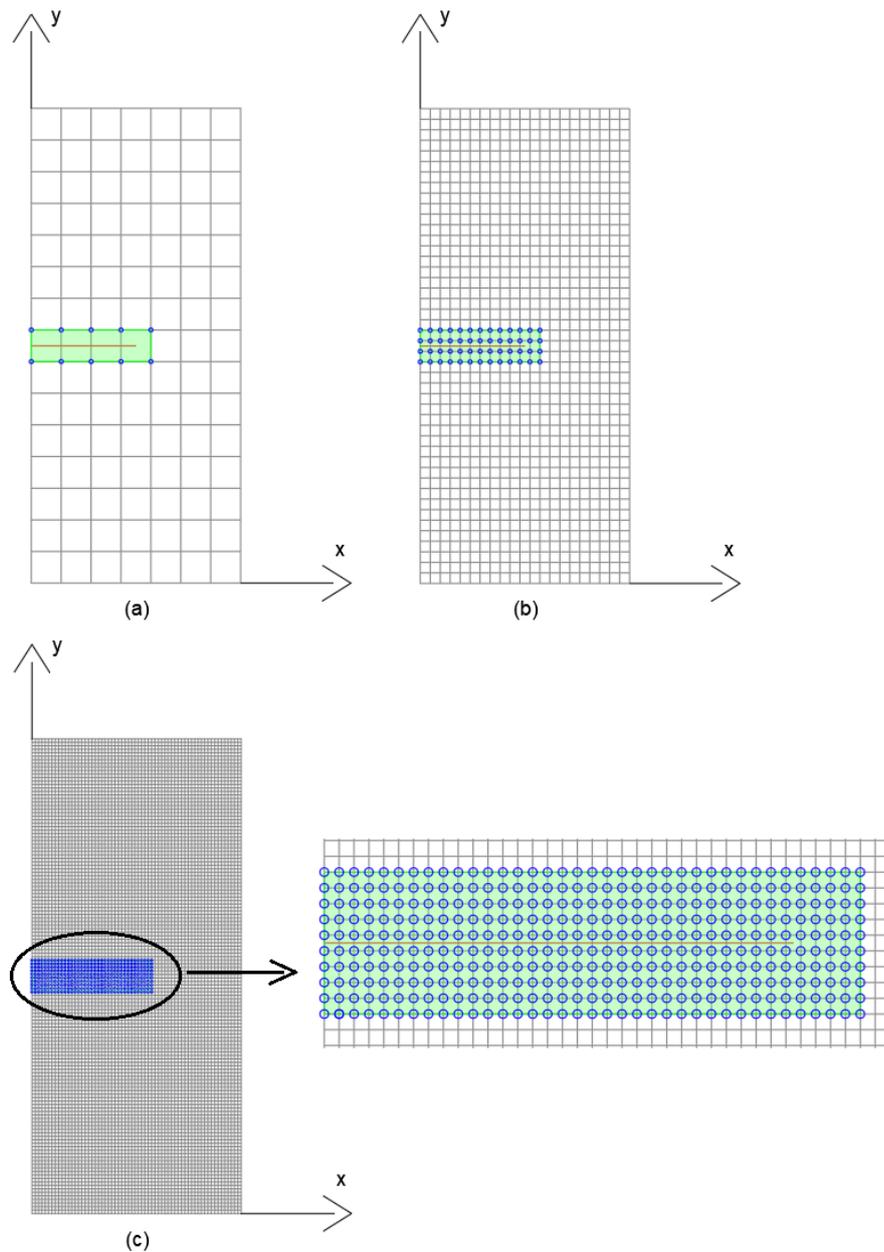


Figura 5.25: Representação do conjuntos de nós associados com o esquema de enriquecimento geométrico do procedimento global-local para a MFG/E. Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (a) Malha de 105 elementos. (b) Malha de 945 elementos. (c) Malha de 8505 elementos.

convergência da solução que não é limitada pela singularidade da solução do problema. Em problemas da MFLE o grau de suavidade da solução na ponta da trinca é 0,5, o que implicaria em uma taxa de convergência de 0,25 (Szabo e Babuška,

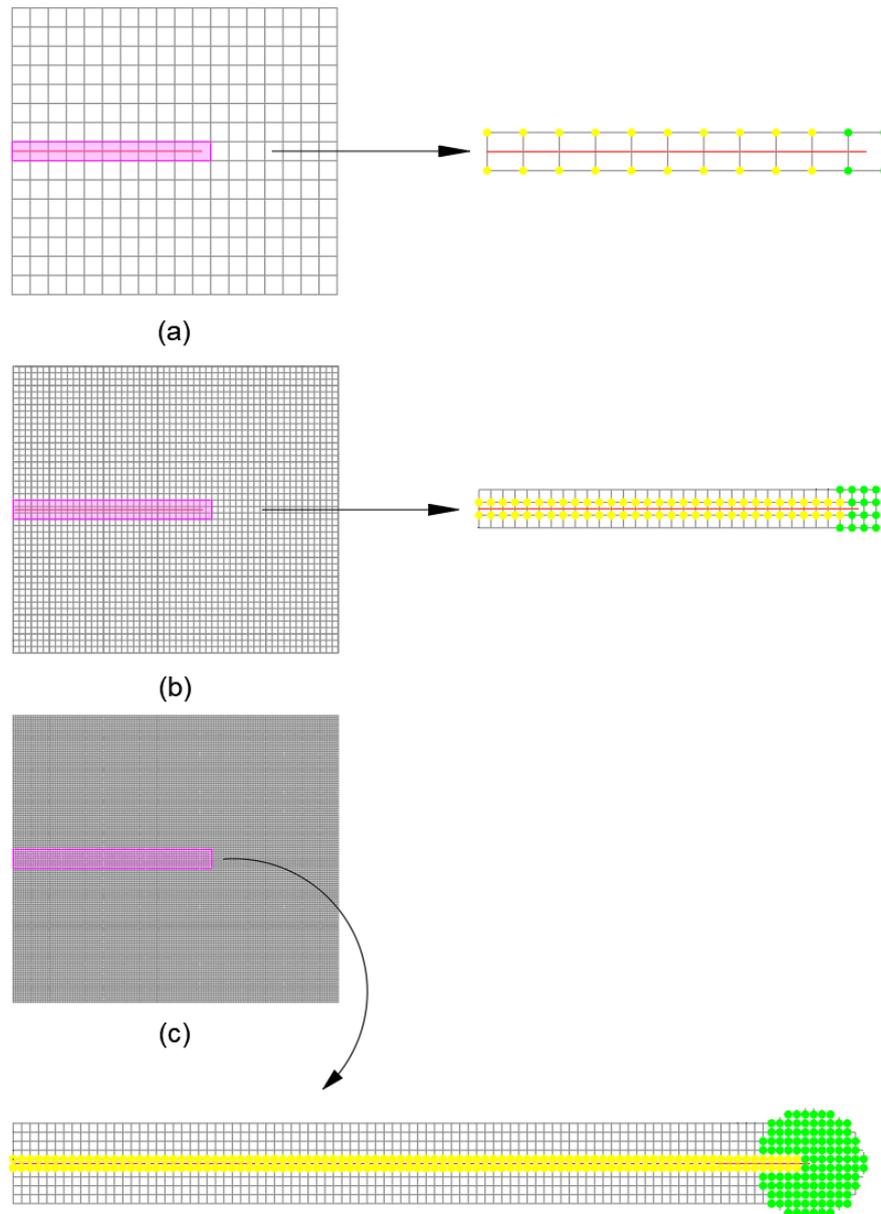


Figura 5.26: Representação da Malha Local. Os círculos amarelos são os nós enriquecidos com função de Heaviside e os círculos verdes os enriquecidos com funções OD. (a) Malha de 270 elementos. (b) Malha de 2430 elementos. (c) Malha de 21870 elementos.

1988). Somente os modelos analisados com a AIGE<sup>gl</sup> alcançam, contudo, a taxa de convergência de 1,0 esperada (metade do valor da aproximação polinomial  $p$ , (Szabo e Babuška, 1988)). Uma taxa de convergência maior quando a AIGE<sup>gl</sup> é utilizada também é alcançada em termos de  $K_I$ , Figura 5.28. Para  $K_{II}$ , esse resultado tão

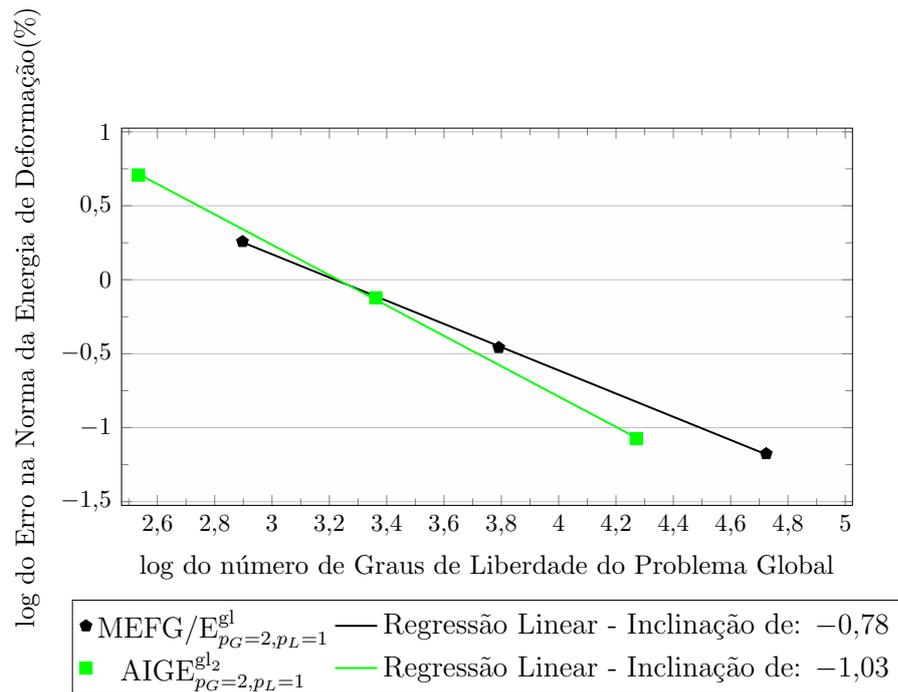


Figura 5.27: Erro na Norma da Energia de Deformação.

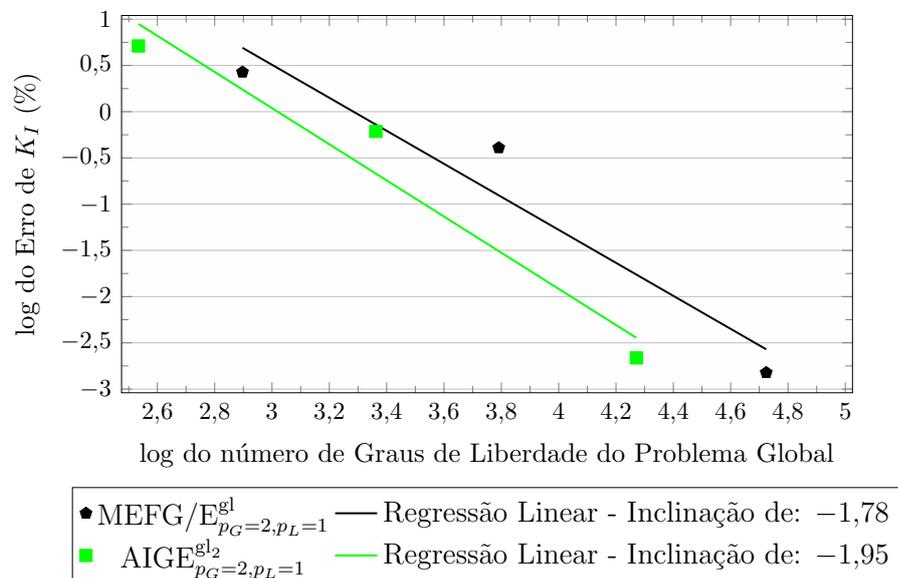


Figura 5.28: Erro em  $K_I$ .

expressivo não acontece, porém é possível notar que a AIGE $^{gl}$  proporciona resultados mais precisos e convergentes, enquanto os resultados obtidos com o MEFG/ $E^{gl}$  apresentam uma tendência de divergir da solução de referência.

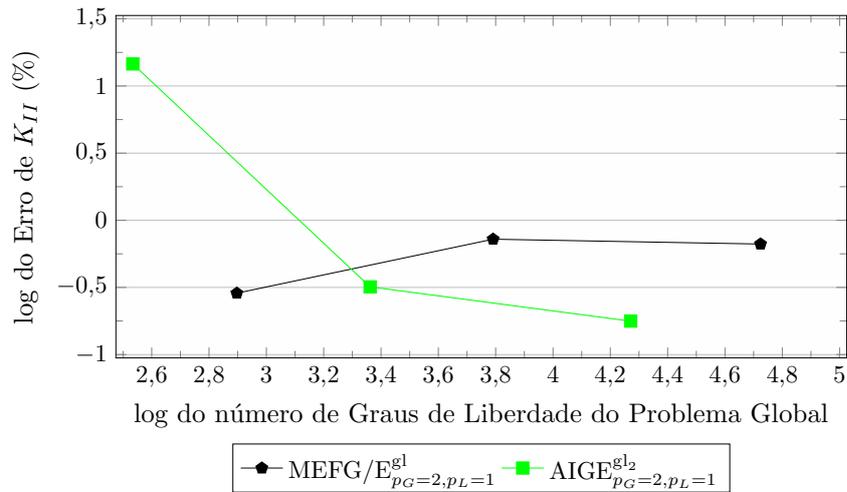


Figura 5.29: Erro em  $K_{II}$ .

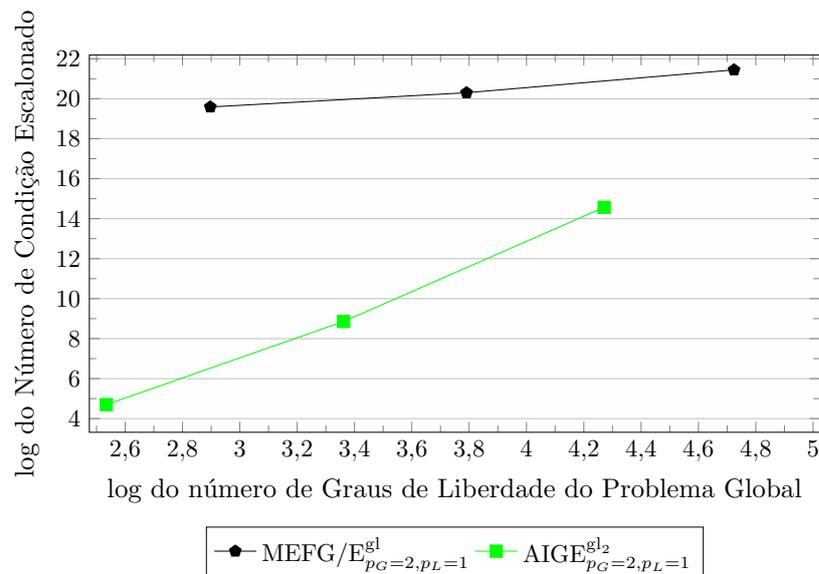


Figura 5.30: Número de condição escalonado para o problema global enriquecido.

Finalmente, o comportamento do número de condição escalonado à medida que o refinamento da malha é realizado é representado pelo gráfico da Figura 5.30. O refinamento aumenta não só o número de nós ou pontos de controle, mas também o número de nós ou pontos de controle associados às funções de enriquecimento fornecidas pela solução local obtida numericamente, Figuras 5.24 e 5.25. O impacto destes enriquecimentos é a deterioração do condicionamento da matriz de rigidez

associada. É notável a diferença entre os resultados de  $MEFG/E^{gl}$  e  $AIGE^{gl}$ . Além disso, a menor taxa observada com  $MEFG/E^{gl}$  pode ser explicada pelos altos valores obtidos na primeira malha. As operações de ponto flutuante realizadas aqui em valores de precisão dupla podem estar definindo um limite superior para o cálculo da taxa entre os autovalores extremos relacionados ao número de condição.

O condicionamento do sistema resultante foi também avaliado ao longo do processo de propagação de trinca. Para isso, foi utilizado um incremento de trinca de tamanho 0,3330 com a orientação desse novo segmento definida através da relação entre  $K_I$  e  $K_{II}$ , seguindo o critério da máxima tensão circunferencial (Moës et al., 1999). Apenas as discretizações apresentadas nas Figuras 5.24(a) e 5.25(a) foram utilizadas para a simulação utilizando a  $AIGE^{gl}$  e o  $MEFG/E^{gl}$ , respectivamente. O domínio local se modifica automaticamente com o passar dos passos de propagação de forma a acomodar o novo comprimento e ponta da trinca. A exemplo da trinca estática, novamente, domínios locais de tamanhos equivalentes são utilizados nas duas metodologias de análise de forma a manter a compatibilidade a possibilidade de comparação entre elas.

Os caminhos de propagação são mostrados nas Figuras 5.31, 5.32 e 5.33, além da Tabela 5.1. A Figura 5.31 mostra o caminho resultante na primeira etapa de propagação e é possível observar que a trinca sofre uma pequena inclinação para baixo enquanto caminha para frente. A Figura 5.32 representa a quarta etapa de propagação em que a trinca segue a tendência de propagação observada na primeira etapa, conforme esperado para este tipo de problema em que o cisalhamento está atuando. Trajetória semelhante é encontrada no trabalho de Tran et al. (2015) para um problema com condições semelhantes. Por fim, na etapa de propagação 7, representada na Figura 5.33, é possível observar a confirmação da trajetória de propagação da trinca. Além disso, todas as etapas de propagação mostradas na análise do  $MEFG/E^{gl}$  estão de acordo com aquelas apresentadas na análise da  $AIGE^{gl}$ , conforme é possível, inclusive se confirmar com a Tabela 5.1.

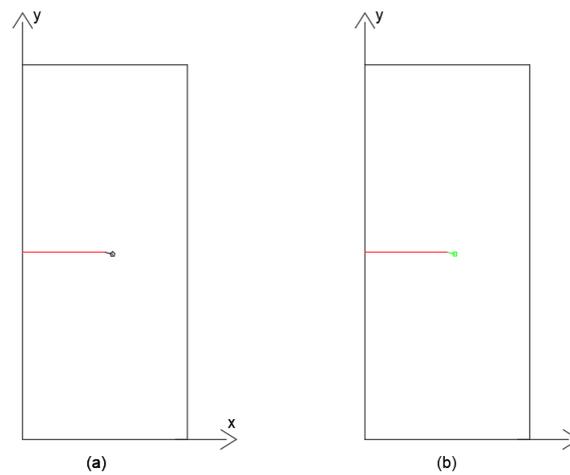


Figura 5.31: Passo de propagação 1. (a)MEFG/ $E_{p_G=2, p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $E_{p_G=2, p_L=1}^{gl_2}$ .

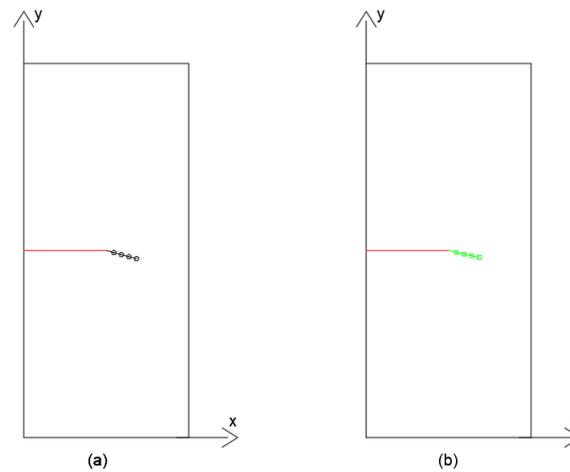


Figura 5.32: Passo de propagação 4. (a)MEFG/ $E_{p_G=2, p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $E_{p_G=2, p_L=1}^{gl_2}$ .

	$\text{MEFG}/E_{p_G=2, p_L=1}^{gl}$		$\text{AIGE}_{p_G=2, p_L=1}^{gl_2}$	
	x	y	x	y
<b>Início</b>	3,500000	8,000000	3,500000	8,000000
<b>Passo 1</b>	3,821653	7,913813	3,823232	7,919939
<b>Passo 2</b>	4,141826	7,822280	4,148174	7,847125
<b>Passo 3</b>	4,463064	7,734557	4,473313	7,775198
<b>Passo 4</b>	4,785757	7,652351	4,799762	7,709469
<b>Passo 5</b>	5,108592	7,570701	5,128818	7,658371
<b>Passo 6</b>	5,429914	7,483287	5,457041	7,602170
<b>Passo 7</b>	5,747701	7,383786	5,783981	7,538928

Tabela 5.1: Posição da ponta da trinca ao longo dos passos de propagação para as metodologias apresentadas.

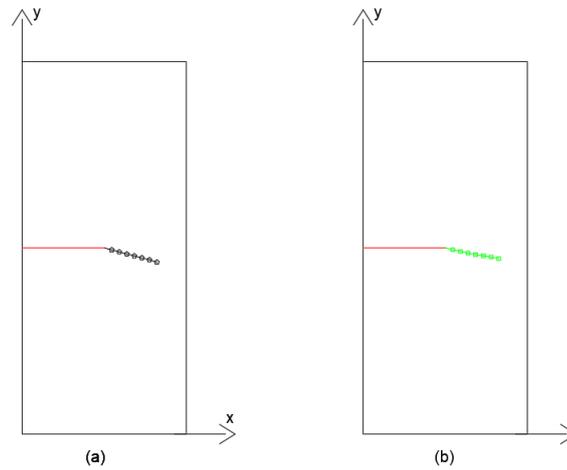


Figura 5.33: Passo de propagação 7. (a)  $\text{MEFG}/E_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}}$ . (b)  $\text{AIGE}_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}_2}$ .

O gráfico da Figura 5.34 mostra os valores do log do número de condição escalonado para cada etapa de propagação. É possível notar que os valores se mantêm estáveis ao longo da propagação. A ordem de grandeza é a mesma daquela observada para a trinca estática em que o número de condição mostra-se bastante superior para as simulações com o  $\text{MEFG}/E_{p_G=2, p_L=1}^{\text{gl}}$ .

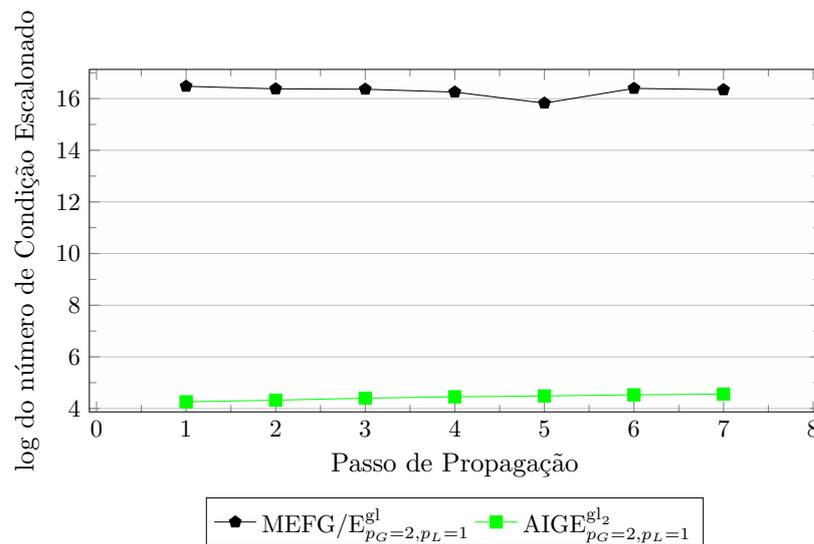


Figura 5.34: Número de condição escalonado ao longo dos passos de propagação de trinca.

## 5.4 Problema 4 - Chapa com uma trinca inclinada no centro

Nesse exemplo, uma chapa com uma trinca inclinada em seu centro é analisada. De acordo com os resultados obtidos nas Seção 5.3, optou-se por comparar a estratégia do MEEG/ $E^{gl}$  com a estratégia da AIGE $^{gl2}$ . Novamente é investigada a acurácia e o condicionamento da solução e é realizada a simulação da propagação de trinca para os dois métodos. O modelo é definido por uma chapa de dimensões  $(10,00 \times 10,00)$ u.c., com uma trinca central de dimensão 0,75u.c. inclinada em  $35^\circ$  com o eixo  $x$ . A chapa está sujeita a uma tensão de tração de  $\sigma = 1,0$  u.c.. A Figura 5.35 mostra em detalhes as características descritas, bem como a trinca em vermelho e as demais informações do modelo.

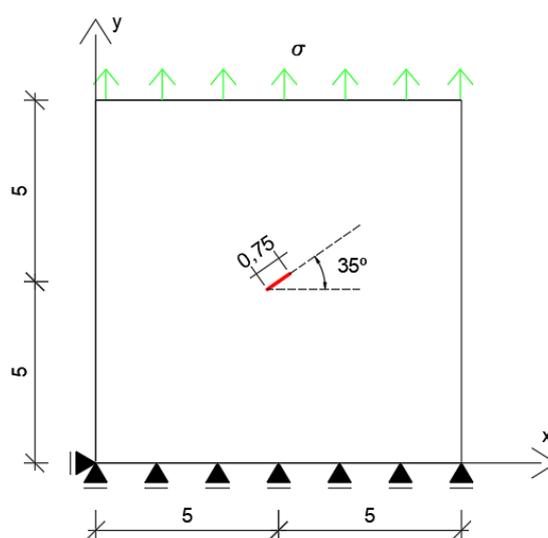


Figura 5.35: Chapa com uma trinca inclinada no centro.

Além disso, está sendo considerado regime de estado plano de deformação e o material elástico linear adotado tem módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 1,0 u.c. e coeficiente de Poisson de 0,3. A presença da trinca inclinada induz um modo de abertura de trinca misto.

As mesmas condições para o procedimento global-local adotado na Seção 5.3 são

utilizadas aqui, como condições de contorno de Dirichlet para o problema local, número de pontos de integração ( $8 \times 8$ ) pontos de Gauss nos elementos que contêm algum nó/ponto de controle enriquecido e demais elementos apenas ( $4 \times 4$ ), parâmetro de penalidade  $\eta = 1 \times 10^{10}$  e critério de convergência dos ciclos globais-locais com tolerância de  $1 \times 10^{-2}$ .

De acordo com Moës et al. (1999), o problema proposto tem como solução de referência: Fator de Intensidade de Tensão - Modo I:  $K_I = 0,7283$  e Fator de Intensidade de Tensão - Modo II:  $K_{II} = 0,5100$ .

As análises realizadas são nomeadas por  $\text{MEFG}/E_{p_G=2,p_L=1}^{\text{gl}}$  e  $\text{AIGE}_{p_G=2,p_L=1}^{\text{gl}2}$  e seguem o mesmo padrão estabelecido na Seção 5.3.2.

Três malhas de 121, 1089 e 9801 elementos quadrilaterais de dimensões  $(0, 9090 \times 0, 9090)$ u.c.,  $(0, 3030 \times 0, 3030)$ u.c. e  $(0, 1010 \times 0, 1010)$ u.c., respectivamente, foram utilizadas para representar o problema global, Figura 5.36.

A aproximação do problema global é quadrática na primeira e terceira etapas do procedimento global-local. A trinca é introduzida no problema local pelas funções de enriquecimento Heaviside e OD, Equações (3.62) e (3.64-3.67), respectivamente. Nenhum nó duplicado é usado no problema global para descrever geometricamente a trinca, que é representada apenas pela solução obtida numericamente do problema local usado para enriquecer o PU na terceira etapa do procedimento global-local.

A Figura 5.37 ilustra o subdomínio local posicionado no domínio global. Ele tem o tamanho de  $(4, 54 \times 4, 54)$ u.c. e está entre as coordenadas  $(x = 2, 72; y = 2, 72)$  e  $(x = 7, 27; y = 7, 27)$ . O menor subdomínio local possível foi escolhido para garantir a mesma região de enriquecimento completo no problema global nas análises pelo  $\text{MEFG}/E^{\text{gl}}$  e pela  $\text{AIGE}^{\text{gl}}$ , de acordo com a Seção 3.8.2. Os problemas global inicial e global enriquecido apresentam continuidade da aproximação  $C^0$  quando analisados via  $\text{MEFG}/E$  e  $C^1$  quando analisados por  $\text{AIGE}$ .

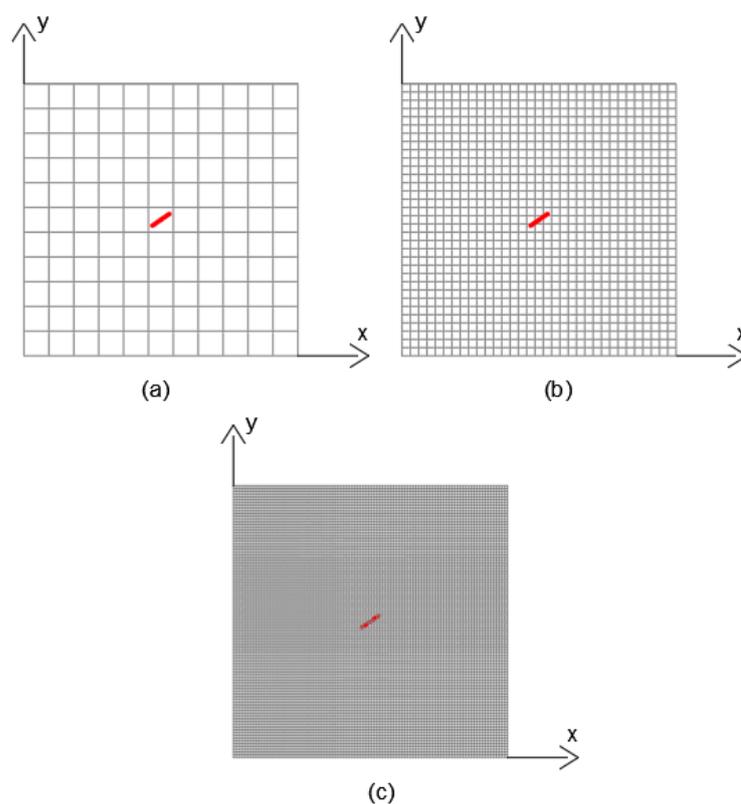


Figura 5.36: Malhas globais utilizadas nas análises via AIGE e MEFG/E para aproximação polinomial  $p = 2$ . (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos.

Da mesma maneira que na Seção 5.3.2, o esquema de enriquecimento aqui adotado é geométrico. A mesma região é enriquecida de forma completa pelo procedimento global-local à medida que o refinamento  $h$  para MEFG/E ou o refinamento  $k$  no caso da AIGE são realizados. Na Figura 5.38, todos os pontos de controle relacionados aos elementos da região verde estão associados às funções de enriquecimento fornecidas pela solução local obtida numericamente. Isto equivale ao enriquecimento realizado para MEFG/E mostrado na Figura 5.39.

As malhas locais foram criadas utilizando a região global representada na Figura 5.37, na qual os elementos globais foram subdivididos em 9 elementos formando a malha local de 225, 2025 e 18225 elementos quadriláteros de quatro nós, de dimensões  $(0,3030 \times 0,3030)$ u.c.,  $(0,1010 \times 0,1010)$ u.c. e  $(0,0337 \times 0,0337)$ u.c., respectivamente. Além disso, os nós ao longo da trinca estão associados à função de

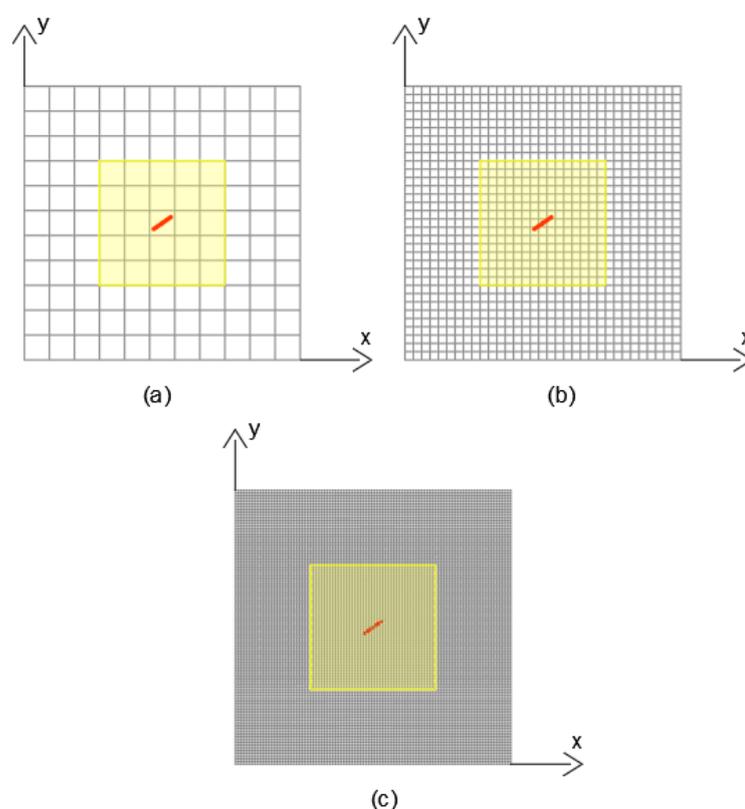


Figura 5.37: Subdomínio Local. (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos.

enriquecimento de Heaviside e os nós ao redor da ponta da trinca estão associados às funções OD na análise MEF<sub>G</sub>/E, Equações (3.62) e (3.64-3.67) respectivamente. O mesmo esquema da Seção 5.3.2 é usada aqui, sendo que o enriquecimento de Heaviside é topológico e o enriquecimento de OD é geométrico.

Para os três níveis de malhas globais, foram avaliados os erros dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  em relação à solução de referência através da Equação (5.1). Os valores foram computados nas duas pontas da trinca, e observou-se que os resultados ficaram praticamente idênticos. Por simplicidade, apenas os erros nos valores de uma das pontas são apresentados nos gráficos das Figuras 5.40 e 5.41. O condicionamento da matriz de rigidez também foi analisado e apresentado na Figura 5.42.

As Figuras 5.40 e 5.41 mostram que, quando comparado com MEF<sub>G</sub>/E<sup>gl</sup>, a

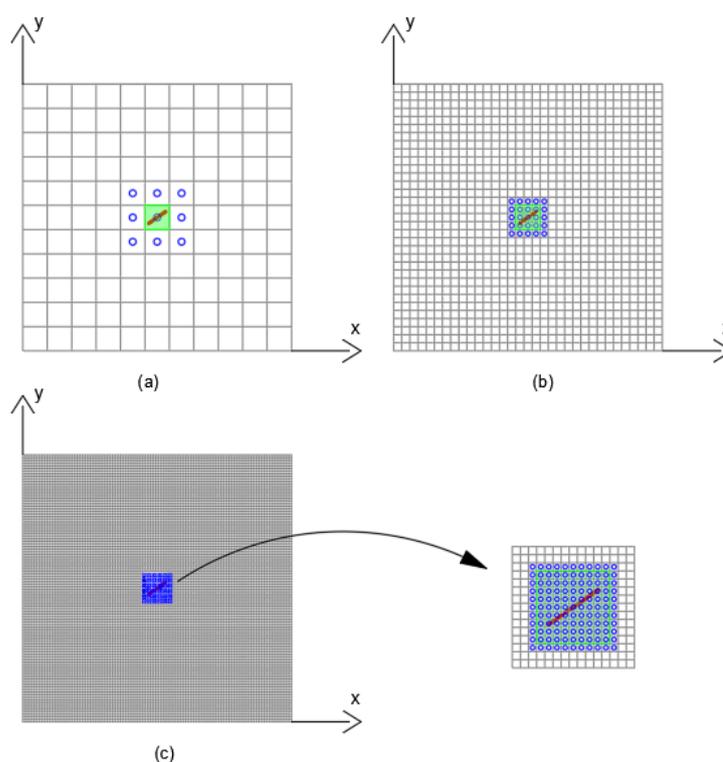


Figura 5.38: Pontos de controle enriquecidos numericamente com a solução local na terceira etapa do processo global-local (AIGE). Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (a) Malha de 121 elementos. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos.

$AIGE^{gl}$  sempre fornece erros menores para o mesmo número de graus de liberdade. Além disso, a taxa de convergência para  $K_I$  é ligeiramente maior, Figura 5.40, e diferentemente da Seção 5.3.2, é significativamente maior para  $K_{II}$ , Figura 5.41. Uma explicação para este comportamento é o fato de que a ordem de grandeza do  $K_{II}$  é maior e, portanto, o erro da aproximação é menos impactado por perturbações numéricas.

Por fim, o comportamento do número de condição escalonado, Equação (3.87), com o refinamento da malha é ilustrado pelo gráfico da Figura 5.42. É notável a diferença entre os resultados de  $MEFG/E^{gl}$  e  $AIGE^{gl}$  e, mais uma vez, o número de condição de  $MEFG/E^{gl}$  é sempre maior que a da  $AIGE^{gl}$ .

Para simular a propagação da trinca, utilizou-se um incremento de tamanho 0,3030 e a orientação do novo segmento de trinca foi definido através da relação

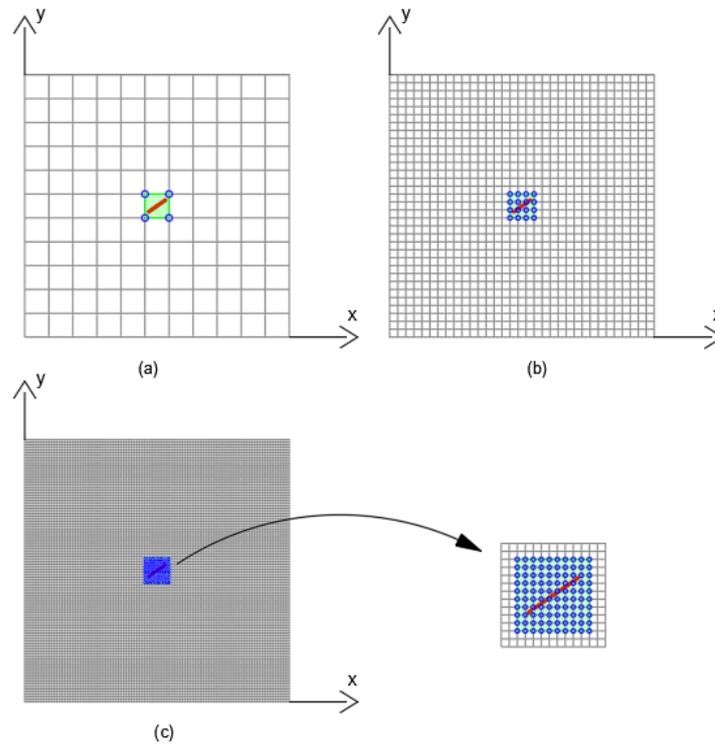


Figura 5.39: Nós enriquecidos numericamente com a solução local na terceira etapa do processo global-local (MEFG/E). (a) Malha de 121 elementos. Em verde estão representados os elementos nos quais o enriquecimento com a solução local é completo. (b) Malha de 1089 elementos. (c) Malha de 9801 elementos.

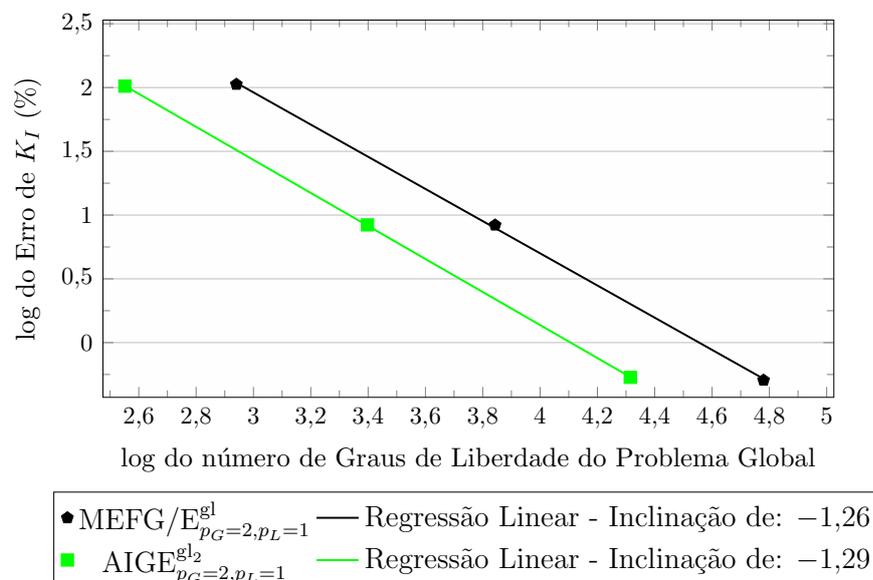


Figura 5.40: Erro em  $K_I$ .

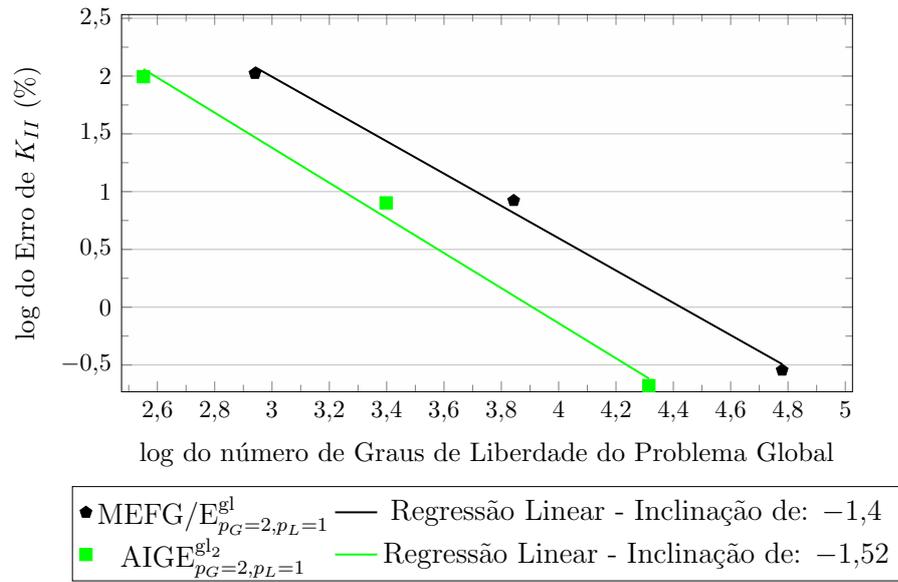
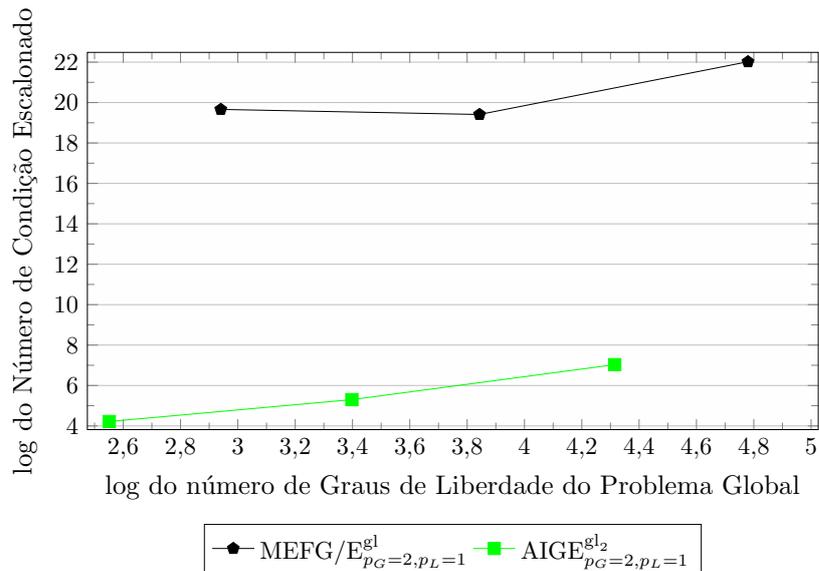
Figura 5.41: Erro em  $K_{II}$ .

Figura 5.42: Número de Condição Escalonado do problema global enriquecido.

entre  $K_I$  e  $K_{II}$ , seguindo o critério da máxima tensão circunferencial (Moës et al., 1999). As malhas apresentadas nas Figuras 5.38(a) e 5.39(a) foram utilizadas para a simulação utilizando a AIGE<sup>gl</sup> e o MEFG/E<sup>gl</sup>, respectivamente.

As trajetórias de propagação são mostradas nas Figuras 5.43, 5.44 e 5.45 e também na Tabela 5.2. A Figura 5.43 mostra o caminho resultante na primeira etapa de propagação e é possível observar que a trinca sofre uma pequena inclinação em ambas as extremidades. A Figura 5.44 representa a terceira etapa de propagação em que a trinca apresenta tendência à orientação horizontal, conforme esperado para este tipo de problema. Por fim, na etapa de propagação 10, representada na Figura 5.45, é possível observar a tendência de propagação horizontal da fissura sendo confirmada. Além disso, todas as etapas de propagação mostradas na análise do MEF $G/E^{gl}$  estão de acordo com aquelas apresentadas na análise da AIGE $^{gl}$ , conforme apresentado na Tabela 5.2.

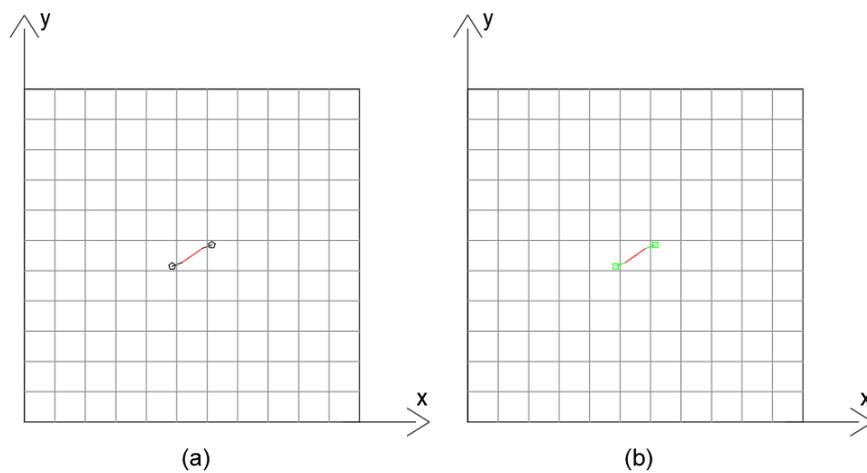


Figura 5.43: Passo de propagação 1. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ .

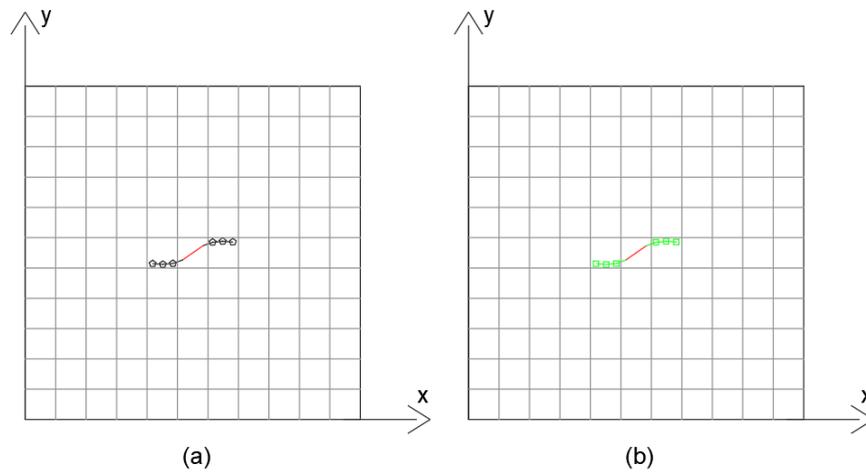


Figura 5.44: Passo de propagação 3. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ .

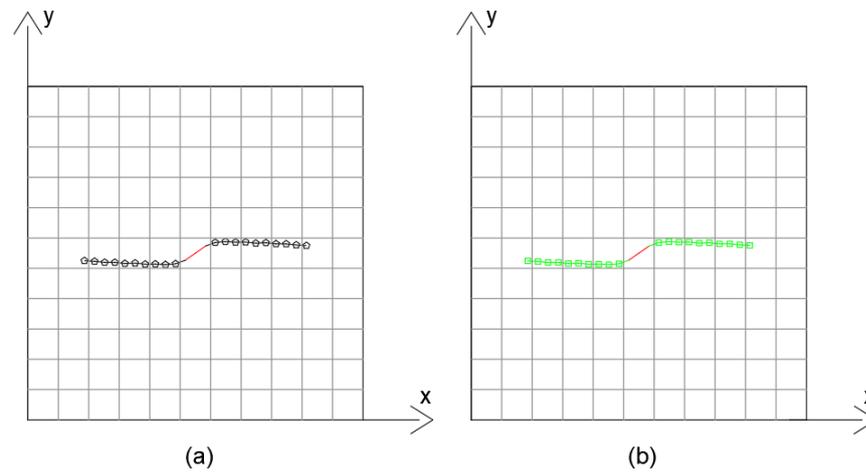


Figura 5.45: Passo de propagação 10. (a)MEFG/ $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$ . (b)AIGE $E_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$ .

	$MEFG/E_{p_G=2,p_L=1}^{gl}$		$AIGE_{p_G=2,p_L=1}^{gl_2}$	
	x	y	x	y
<b>Início</b>	5,307182	5,215091	5,307182	5,215091
<b>Passo 1</b>	4,408073	4,681268	4,408073	4,681268
<b>Passo 2</b>	5,893774	5,345140	5,893774	5,345140
<b>Passo 3</b>	6,196202	5,326535	6,196297	5,328142
<b>Passo 4</b>	6,499170	5,330987	6,499274	5,331822
<b>Passo 5</b>	6,800317	5,297533	6,800584	5,299857
<b>Passo 6</b>	7,103039	5,310523	7,103394	5,310577
<b>Passo 7</b>	7,404234	5,277505	7,404677	5,278367
<b>Passo 8</b>	7,707233	5,276808	7,707677	5,278905
<b>Passo 9</b>	8,008677	5,246140	8,009337	5,250442
<b>Passo 10</b>	8,311050	5,226659	8,311799	5,232391

Tabela 5.2: Posição da ponta da trinca ao longo dos passos de propagação para as metodologias apresentadas.

O número de condição escalonado foi avaliado ao longo de todo o processo de propagação e apresentado na Figura 5.46. Observou-se que os valores obtidos na análise inicial, para a pré-trinca apresentado no gráfico da Figura 5.42, se mantêm praticamente os mesmos em ordem de grandeza a cada etapa de propagação. Isso significa que o processo de propagação não penalizou o condicionamento da matriz de rigidez e, novamente, a simulação do MEFG/ $E^{gl}$  mantém-se com o condicionamento mais deteriorado.

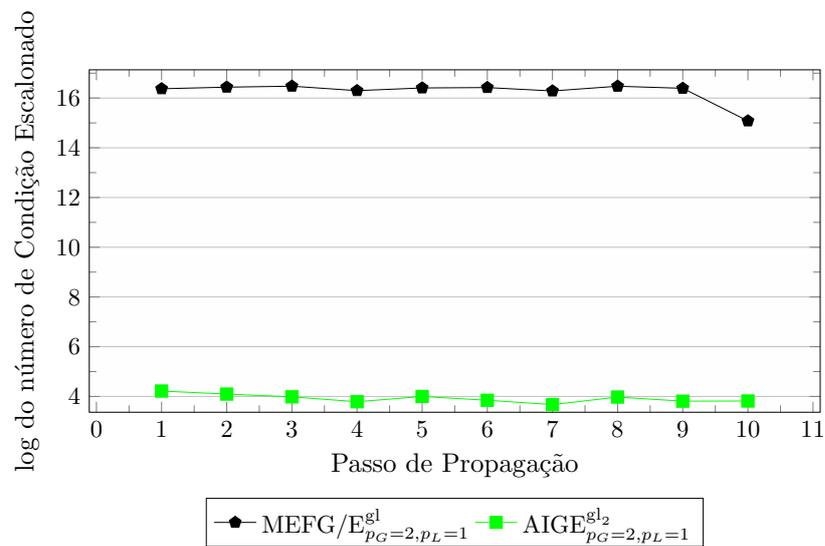


Figura 5.46: Número de condição escalonado ao longo dos passos de propagação de trinca.

# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1 Breve Resumo

O Capítulo 1 apresentou um contexto geral sobre o trabalho seus objetivos e metodologia. O Capítulo 2 mostrou a revisão bibliográfica acerca dos principais conceitos da AIG, AIGE e técnica Global-Local, bem como suas principais aplicações em diversos problemas da engenharia e os desafios na construção das aproximações, tais como aplicação das condições de contorno e integração numérica. O Capítulo 3 descreve com mais detalhes os assuntos apresentados na revisão bibliográfica, contendo considerações importantes sobre a utilização prática de todos eles, a formulação dos métodos e estratégias que foram adotadas no trabalho e também informações sobre as funções de enriquecimento. O Capítulo 4 apresentou os principais aspectos do sistema INSANE e a implementação necessária ao funcionamento do enriquecimento via AIGE, combinada com o MEFG/E, e funções vindas da estratégia global-local.

Já no Capítulo 5, foram discutidos os exemplos realizados para investigar o funcionamento da nova implementação realizada no sistema INSANE. Foram analisados quatro grandes problemas. O primeiro problema (P1), mostra a verificação da implementação da AIG. O segundo problema (P2) mostra a verificação da implementação da AIGE. Por fim, os problemas P3 e P4 mostram o funcionamento da metodologia de fato investigada nesse trabalho, combinando AIGE, MEFG/E e a técnica global-local. Conforme já mencionado, os problemas P3 e P4 estão também apresentados em artigo publicado de mesma autoria (Santos e Barros, 2023).

## 6.2 Conclusões do Trabalho e Sugestões de Trabalhos Futuros

Considera-se que os objetivos propostos neste trabalho foram satisfatoriamente atingidos. Os estudos sobre a AIG, MEFG/E, AIGE, funções que contêm singularidade e técnica Global-Local, além de estratégias suporte a essas, como imposição de condições de contorno essenciais via Método da Penalidade e Método de Nitsche, Extração de Bézier e condicionamento de matrizes, foram fundamentais para a implementação desses conceitos no sistema INSANE. O núcleo numérico do sistema INSANE foi adequadamente expandido de modo a ser capaz de realizar análise da elasticidade bidimensional, utilizando a AIGE combinada com o MEFG/E. Nestas análises, a aproximação pode ser enriquecida com funções que contêm singularidade e descrevem os modos de abertura de trinca, função de Heaviside, funções polinomiais e funções originárias da técnica Global-Local. É importante ressaltar que as implementações da AIG e da AIGE encontram-se disponíveis para diversas outras aplicações.

O AIGE, assim como o MEFG/E, vem se mostrando uma ferramenta poderosa para a modelagem de problemas estruturais com a presença de concentração de tensões e de descontinuidades no campo de deslocamentos, como é o caso da análise de meios com a presença de trincas. Simulações via AIGE, graças à técnica de enriquecimento da aproximação, são capazes de reproduzir os fenômenos inerentes a estes problemas, de forma mais adequada do que a AIG/MEF para uma mesma malha de elementos. Torna-se possível descrever a concentração de tensões na vizinhança da ponta da trinca e a descontinuidade no campo de deslocamentos, em malhas grossas e sem a necessidade de se fazer a duplicação dos nós ao longo da superfície de trinca. Algumas vantagens foram observadas com respeito à AIGE em comparação com o MEFG/E, como por exemplo, melhor condicionamento das matrizes e soluções com menor erro com relação às soluções de referência.

No primeiro exemplo, apresentado na Seção 5.1, é possível confirmar que a AIG

foi implementada adequadamente, tanto para o caso da chapa reta, quanto para o caso da chapa curva, demonstrando a capacidade da AIG em descrever de forma exata a geometria, sobretudo quando adotadas funções do tipo NURBS. Além disso, ficou claro que, nos problemas apresentados, pouca diferença foi constatada quando se impõem as condições de contorno essenciais utilizando o Método da Penalidade ou o Método de Nitsche. É importante sempre realizar o teste de convergência dos resultados de variando os parâmetros de penalidade utilizados, de forma a garantir a correta imposição das condições de contorno.

O segundo problema, apresentado na Seção 5.2, mostra a AIGE sendo verificada para a implementação realizada. Trata-se de um problema interessante, pois aqui, os resultados foram comparados com o MEFG/E. Constatou-se a correspondência de resultados quando o grau de aproximação polinomial da solução é de  $p = 1$ . Além disso, para graus de aproximação polinomial maiores que um, observou-se que os resultados encontrados com a AIGE apresentaram erros inferiores quando comparados ao MEFG/E, para um menor número de graus de liberdade e matrizes mais bem condicionadas.

O terceiro problema, apresentado na Seção 5.3, foi subdividido em duas análises distintas. Nesse problema, os resultados do objetivo central dessa pesquisa começam a ser discutidos. Na análise da Seção 5.3.1, optou-se por utilizar o MEFG/E no problema global e alternar entre MEFG/E e AIGE no problema local. Observou-se, mais uma vez, que, quando se utiliza grau de aproximação polinomial  $p = 1$  no problema local, os mesmos resultados são encontrados para AIGE e MEFG/E. Quando o problema global foi resolvido com grau de aproximação  $p = 1$  é possível perceber que os resultados encontrados foram equivalentes para as respectivas abordagens locais utilizando MEFG/E ou AIGE. A única ressalva é que quando tratava-se de AIGE no problema local, o número de graus de liberdade é consideravelmente menor do que aquele do MEFG/E, o que tornou a solução menos onerosa computacionalmente. Já quando o problema global foi analisado com grau de aproximação  $p = 2$

a AIGE mostrou superioridade de resultados tanto em relação à acurácia da solução quanto ao menor custo computacional, anteriormente citado.

Outra consideração importante sobre o problema apresentado na Seção 5.3.1, diz respeito ao condicionamento da matriz de rigidez. Quando se avalia o condicionamento da matriz de rigidez do problema global enriquecido (analisado utilizando o MEFG/E), percebe-se que o tipo de estratégia de solução empregada na escala local não tem influência significativa. Diferentemente quando são utilizadas funções de enriquecimento polinomial para se definir no problema global o grau de aproximação polinomial  $p = 2$ , em que observa-se uma grande deterioração do condicionamento. Na sequência, avaliou-se também o condicionamento da matriz de rigidez do problema local. Conforme o esperado o problema local analisado utilizando a AIGE apresenta um número de condição muito menor, e que cresce de uma forma menos acentuada à medida que se aumenta o grau de aproximação polinomial local, quando comparada ao MEFG/E. Tendo em vista essa observação, foi realizada a investigação apresentada na Seção 5.3.2, distinguindo-se da discretização anterior, o problema global tem sua representação alternando-se entre MEFG/E e AIGE e o problema local é exclusivamente analisado com MEFG/E tendo o grau de aproximação polinomial  $p = 1$ , de forma a não onerar o condicionamento da matriz de rigidez do problema local. Foi, então, possível mostrar que a AIGE utilizada no problema global produz resultados com maior taxa de convergência bem como possui uma matriz mais bem condicionada.

O problema apresentado na Seção 5.4 corrobora com as conclusões encontradas no problema da Seção 5.3.2. Além disso, nesses dois problemas, a propagação de trinca foi avaliada, observando-se trajetórias semelhantes entre os métodos comparados e também condizentes com o que seria esperado.

A técnica global-local, utilizada dentro do conceito da AIGE, para a obtenção de uma função de aproximação personalizada para o modelo, mostrou-se, de fato,

uma estratégia adequada para a obtenção de soluções com baixo erro e bem condicionadas. O refinamento da malha local não onera computacionalmente a solução do modelo global, pois é independente deste, não demandando a compatibilização entre elementos de tamanhos diferentes. Para melhor capturar o gradiente elevado do campo de deslocamentos na região da ponta de trinca, estas malhas precisariam reduzir drasticamente o tamanho dos elementos, o que pode ser realizado mais facilmente em malhas locais mais refinadas.

Além disso, as análises realizadas com a AIGE possibilitam criar modelos com alto grau de aproximação polinomial com baixo acréscimo de graus de liberdade. Esse fato, inclusive, contribui para que a necessidade de uma maior região local não inviabilize o uso da AIGE, já que ela é compensada pelo menor número de graus de liberdade inerente às malhas analisadas via AIGE. Por fim, o uso do MEFG/E no problema global e, principalmente, no local pode tornar-se interessante pela facilidade de construção do método, sobretudo no que diz respeito à imposição direta nos nós das condições de contorno, à construção das funções de forma e de PU e também ao tratamento geométrico dos elementos para o posicionamento da trinca e das funções de enriquecimento responsáveis pela sua descrição. Tendo em vista esses aspectos, é preciso que haja uma ponderação de forma a melhor combinar as metodologias, considerando, por exemplo, a geometria do problema a ser solucionado, posição da trinca, trajetória de propagação, condições de contorno e outras variáveis.

Para alguns dos problemas apresentados, seria possível impor diretamente as condições de contorno essenciais nos pontos de controle. Isso, porque, as restrições dos modelos recaem sobre linhas retas, o que torna as funções do tipo NURBS interpolatórias nessas regiões. Tal estratégia não foi adotada, porque, esses são casos bem específicos e a implementação da imposição indireta pelo Método de Nitsche ou Método da Penalidade é genérica e abrange também os casos em que as funções do tipo NURBS não descrevem linhas retas e portanto não são interpolatórias em

todo o seu domínio.

Concluindo, sugere-se para trabalhos futuros a implementação de geradores de malha para a AIG. Isso, porque, nas análises utilizadas, os domínios dos problemas ficaram restritos a contornos retos ou dependentes da utilização de programas externos para a sua geração. Além disso, muitos programas CAD atuais fazem apenas a representação de fronteira das geometrias (do inglês *Boundary representation (B-ref)*) o que dificulta a descrição do interior dos modelos. Com um gerador de malha integrado ao sistema INSANE é possível explorar todo o potencial da AIG em descrever domínios curvos ou complexos. É importante ressaltar que, o refinamento de malha está totalmente implementado no sistema INSANE, logo a dificuldade existe apenas na criação da malha inicial e grosseira para a descrição da geometria. Outro benefício seria construir domínios locais com geometria genérica e assim permitir que esses sejam os menores possíveis durante a propagação de trinca, sem que esse seja limitado ao menor domínio retangular possível. Além disso, essa funcionalidade permitiria com facilidade expandir o sistema criado para utilizar mais de um *patch* na descrição do problema.

Ainda para trabalhos futuros sugere-se a implementação de outras funções de base (e de partição da unidade) compatíveis com a AIG, a análise de múltiplas trincas e a interação entre elas, bem como a expansão para problemas tridimensionais. Outra sugestão versa sobre a combinação da AIGE com outras estratégias de solução como os métodos sem malha e de contorno dentro da estratégia global-local. Seria possível, também, aliar os conceitos estáveis, oriundos do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), dentro da técnica global-local. Ainda dentro da estratégia global-local sugere-se a utilização de malhas locais não aninhadas na malha global e a investigação de outras possibilidades de integração numérica, como, por exemplo, as apresentadas, brevemente, nesse trabalho. Por fim, sugere-se também a investigação do uso de estimadores de erro para a proposição de uma análise adaptativa dentro do contexto da AIGE<sup>GL</sup>.

## Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., 2013. ‘An object-oriented approach to the generalized finite element method’. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1–18.
- Apostolatos, A., Schmidt, R., Wüchner, R. e Bletzinger, K., 2014. ‘A nitsche-type formulation and comparison of the most common domain decomposition methods in isogeometric analysis’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 97, pp. 473–504.
- Auricchio, F., Calabrò, F., Hughes, T. J. R., Realli, A. e Sangalli, G., 2012. ‘A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for nurbs-based isogeometric analysis’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 249, pp. 15–27.
- Auricchio, F., da Veiga, L. B., Hughes, T. J. R., Reali, A. e Sangalli, G., 2010. ‘Isogeometric collocation methods’. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 20, pp. 2075–2107.
- Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. ‘Stable generalized finite element method (sg-fem)’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, .

- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The partition of unity finite element method’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, pp. 727–58.
- Barroso, E. S., 2015. Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.
- Bazilevs, Y. e Akkerman, I., 2010. ‘Large eddy simulation of turbulent taylor-couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method’. *Journal of Computational Physics*, vol. 229, pp. 3402–3414.
- Bazilevs, Y., Calo, V. M., Conttrel, J. A., Evans, J. A., Hughes, T. J. R., Lipton, S., Scott, M. A. e Sederberg, T. W., 2010. ‘Isogeometric analysis using t-splines’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 229–263.
- Bazilevs, Y., Calo, V. M., Hughes, T. J. R. e Zhang, Y., 2008. ‘Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations’. *Computational Mechanics*, vol. 43, pp. 3–37.
- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 45, pp. 601–620.
- Belytschko, T. e Gracie, R., 2007. ‘On xfem applications to dislocations and interfaces’. *International Journal of Plasticity*, vol. 23, pp. 1721–1738.
- Benson, D. J., Bazilevs, Y., Hsu, M. C. e Hughes, T. J. R., 2010a. ‘Isogeometric shell analysis: The reissner-mindlin shell’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 276–289.
- Benson, D. J., Bazilevs, Y., Hsu, M. C. e Hughes, T. J. R., 2011. ‘A large deformation, rotation-free, isogeometric shell’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 1367–1378.

- Benson, D. J., Bazilevs, Y., Luycker, E. D., Hsu, M. C., Scott, M., Hughes, T. J. e Belytschko, T., 2010b. ‘A generalized finite element formulation for arbitrary basis functions: From isogeometric analysis to XFEM’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 83, pp. 765–785.
- Benson, D. J., Hartmann, S., Bazilevs, Y., Hsu, M. C. e Hughes, T. J. R., 2013. ‘Blended isogeometric shells’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 255, pp. 133–146.
- Bhardwaj, G., Singh, I., Mishra, B. e Bui, T., 2015. ‘Numerical simulation of functionally graded cracked plates using nurbs based xiga under different loads and boundary conditions’. *Composite Structures*, vol. 126.
- Bhardwaj, G., Singh, I. V. e Mishra, B. K., 2013. ‘Numerical simulation of plane crack problems using extended isogeometric analysis’. *International Conference On DESIGN AND MANUFACTURING*, vol. 64, pp. 661–670.
- Borden, M. J., Scott, M. A., Evans, J. A. e Hughes, T. J. R., 2011. ‘Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 87, pp. 15–47.
- Bouclier, R., Passieux, J. e Salaün, M., 2017. ‘Development of a new, more regular, mortar method for the coupling of nurbs subdomains within a nurbs patch: Application to a non-intrusive local enrichment of nurbs patches’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 316, pp. 123–150.
- Brivadis, E., Buffa, A., Wohlmuth, B. e Wunderlich, L., 2015. ‘Isogeometric mortar methods’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 284, pp. 292–319.
- Dokken, T., Lyche, T. e Pettersen, K. F., 2013. ‘Polynomial splines over locally refined box-partitions’. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 30, pp. 331–356.

- Dornisch, W. e Klinkel, S., 2011. ‘Boundary conditions and multi-patch connections in isogeometric analysis’. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 11, pp. 207–208.
- Dornisch, W., Vitucci, G. e Klinkel, S., 2015. ‘The weak substitution method - an application of the mortar method for patch coupling in nurbs-based isogeometric analysis’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 103, pp. 205–234.
- Duarte, C. A., 1996. The hp cloud method. Tese de Doutorado, University of Texas at Austin, Austin, TX, USA.
- Duarte, C. A. e Babuška, I., (2005), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to three-dimensional cracks, *in* ‘ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods’, Lisbon, Portugal.
- Duarte, C. A., Babuska, I. e Oden, J. T., 2000. ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 215–232.
- Duarte, C. A. e Kim, D.-J., 2008. ‘Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 197, pp. 487–504.
- Dvořáková, E. e Patzák, B., 2019. ‘Isogeometric bernoulli beam element with an exact representation of concentrated loadings’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, .
- Echter, E., Oesterle, B. e Bischoff, M., 2013. ‘A hierarchic family of isogeometric shell finite elements’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 254, pp. 170–180.

- Embar, A., Dolbow, J. e Harari, I., 2010. ‘Imposing dirichlet boundary condition with nitsche’s method ans spline-based finite element method’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 83, pp. 877–898.
- Evangelista, F., Alves, G. S., Moreira, J. F. A. e Paiva, G. O. F., 2020. ‘A global-local strategy with the generalized finite element framework for continuum damage models’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 363, pp. 112888.
- Fardaghaie, A., Shahrooi, S. e Shishehsaz, M., 2022. ‘The application of the extended isogeometric analysis (xiga) with k-refinement approach for the prediction of fatigue life in linear elastic fracture mechanic’. *Advanced Design and Manufacturing Technology*, vol. 15.
- Fathi, F. e de Borst, R., 2021. ‘Geometrically nonlinear extended isogeometric analysis for cohesive fracture with applications to delamination in composites’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 191.
- Fernández-Méndez, S. e Huerta, A., 2004. ‘Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, pp. 1257–1275.
- Fischer, P., Klassen, M., Mergheim, J., Steinmann, P. e Müller, R., 2011. ‘Isogeometric analysis of 2d gradient elasticity’. *Computational Mechanics*, vol. 47, pp. 325–334.
- Fish, J. e Belytschko, T., 2007. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, Inc., West Sussex, England.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fonseca, F. T. e Pitangueira, R. L. S., 2007. ‘An object oriented class organization for dynamic geometrically nonlinear fem analysis’. *Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Belém, PA, Brazil*, .
- Fonseca, G. M., 2019. Propagação de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, G. M., Barros, F. B., de Oliveira, T. S., Monteiro, H. A. e L. Novelli, R. L. P., 2020. ‘2-d crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 118, pp. 70–83.
- Fries, T. P. e Belytschko, T., 2010. ‘The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 84, pp. 253–304.
- Ghafari, E. e Rezaeepazhand, J., 2020. ‘Isogeometric-based cross-sectional analysis of pre-twisted composite beams’. *Thin-Walled Structures*, vol. 146.
- Ghorashi, S. S., Valizadeh, N. e Mohammadi, S., 2012. ‘Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 89, pp. 1069–1101.
- Giannelli, C., Jüttler, B. e Speleers, H., 2012. ‘Thb-splines: The truncated basis for hierarchical splines’. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 29, pp. 485–498.
- Gómez, H., Calo, V. M., Bazilevs, Y. e Hughes, T. J. R., 2008. ‘Isogeometric analysis of the cahn-hilliard phase-field model’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 4333–4352.

- Gómez, H., Hughes, T. J. R., Nogueira, X. e Calo, V. M., 2010. ‘Isogeometric analysis of the isothermal navier-stokes-korteweg equations’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 1828–1840.
- Gonçalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo horizonte, MG, Brasil.
- Gu, J., Yu, T., Lich, L. V., Nguyen, T.-T., Tanaka, S. e Bui, T. Q., 2018. ‘Multi-inclusions modeling by adaptive xiga based on lr b-splines and multiple level sets’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 148, pp. 48–66.
- Guo, Y. e Ruess, M., 2015. ‘Nitsche’s method for a coupling of isogeometric thin shells and blended shell structures’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 284, pp. 881–905.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2013. ‘A stable and optimally convergent generalized fem (sgfem) for linear elastic fracture mechanics’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 266, pp. 23–39.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2015. ‘Stable gfem (sgfem): Improved conditioning and accuracy of gfem/xfem for three-dimensional fracture mechanics’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 289, pp. 355–386.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A., 2012. ‘Analysis and improvements of global-local enrichments for the generalized finite element method’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 245-246, pp. 47–62.
- Hageman, T. e de Borst, R., 2019. ‘A convergence study of monolithic simulations of flow and deformation in fractured poroelastic media’. *International journal for numerical methods in engineering*, .

- Hah, Z.-H., Kim, H.-J. e Youn, S.-K., 2014. ‘Spline-based meshfree method with extended basis’. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 31, pp. 111–126.
- Hesch, C. e Betsch, P., 2012. ‘Isogeometric analysis and domain decomposition methods’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 213.
- Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. e Bazilevs, Y., 2005. ‘Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 194, pp. 4135–4195.
- Hughes, T. J. R., Reali, A. e Sangalli, G., 2010. ‘Efficient quadrature for nurbs-based isogeometric analysis’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 199, pp. 301–313.
- Jiang, K., Zhu, X., Hu, C., Hou, W., Hu, P. e Bordas, S. P. A., 2022. ‘An enhanced extended isogeometric analysis with strong imposition of essential boundary conditions for crack problems using b++ splines’. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 116, pp. 393–414.
- Johannessen, K. A., Kvamsdal, T. e Dokken, T., 2014. ‘Isogeometric analysis using lr b-splines’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 269, pp. 471–514.
- Kiendl, J., Bletzinger, K. U., Linhard, J. e Wüchner, R., 2009. ‘Isogeometric shell analysis with kirchhoff-love elements’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 3902–3914.
- Kim, D.-J. e Duarte, C. A., 2015. ‘A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-d’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 104, pp. 1139–1172.
- Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Proença, S. P., 2012. ‘A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems’. *Computational Mechanics (Berlin. Internet)*, vol. 1, pp. 1.

- Kim, D.-J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A., 2010. ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 81, pp. 335–365.
- Kruse, R., Nguyen-Thanh, N., Lorenzis, L. D. e Hughes, T. J. R., 2015. ‘Isogeometric collocation for large deformation elasticity and frictional contact problems’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 296, pp. 73–112.
- Lapina, E., Oumaziz, P., Bouclier, R. e Passieux, J., 2022. ‘A fully non-invasive hybrid iga/fem scheme for the analysis of localized non-linear phenomena’. *Computational Mechanics*, vol. 71, pp. 213–235.
- Li, H. e Duarte, C. A., 2018. ‘A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, .
- Li, K., Yu, T. e Bui, T. Q., 2021. ‘Efficient kinematic upper-bound limit analysis for hole/inclusion problems by adaptive xiga with locally refined nurbs’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 133, pp. 138–152.
- Li, Y., Yu, T. e Natarajan, S., 2022. ‘An adaptive isogeometric phase-field method for brittle fracture in rock-like materials’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 263.
- Lins, R. M., 2015. A posteriori error estimations for the Generalized Finite Element Method and modified versions. Tese de Doutorado, EESC-USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Liu, Y., Liu, Y. e Ding, K., 2019. ‘A structured grid based b-spline finite elements method combining local isogeometry analysis technique for crack problems’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 348, pp. 753–775.

- Loibl, M., 2019. Implementation and validation of an isogeometric hierarchic shell formulation. Dissertação de Mestrado, Technical University of Munich, Munich-Germany.
- Lu, J., 2009. ‘Circular element: Isogeometric elements of smooth boundary’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 2391–2402.
- Lu, J. e Zhou, X., 2011. ‘Cylindrical element: Isogeometric model of continuum rod’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 233–241.
- Luycker, E. D., Benson, D. J., Belytschko, T., Bazilevs, Y. e Hsu, M. C., 2011. ‘X-fem in isogeometric analysis for linear fracture mechanics’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 87, pp. 541–565.
- Malekan, M. e Barros, F. B., 2016. ‘Well-conditioning global-local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics’. *Computational Mechanics*, vol. 58, pp. 819–831.
- Malekan, M., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., 2018. ‘Fracture analysis in plane structures with the two-scale g/xfem method’. *International Journal of Solids and Structure*, .
- Malekan, M., Barros, F. B., Pitangueira, R. L. S., Alves, P. D. e Penna, S. S., 2017. ‘A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method’. *Engineering Computations*, vol. 34, pp. 988–1019.
- Marchiori, G. e Neto, A. G., 2020. ‘Isogeometric analysis applied to 2d bernoulli-euler beam model: imposition of constraints by lagrange and penalty methods’. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 17.
- Mariani, S. e Perego, U., 2003. ‘Extended finite element method for quasi-brittle fracture’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 58, pp. 103 – 126.

- Moës, N. e Belytschko, T., 2002. ‘Extended finite element method for cohesive crack growth’. *Engineering fracture mechanics*, vol. 69, pp. 813–833.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, pp. 131–150.
- Monteiro, A. B., 2019. Análise Não Linear de Meios Parcialmente Frágeis via Abordagem Global-Local do Método dos Elementos Finitos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Monteiro, H. A. S., Novelli, L., Fonseca, G. M., Pitangueira, R. L. S. e Barros, F. B., 2020. ‘A new approach for physically nonlinear analysis of continuum damage mechanics problems using the generalized/extended finite element method with global-local enrichment’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 113, pp. 277–295.
- Nguyen, T. N., 2011. Isogeometric finite element analysis based on bézier extraction of nurbs and t-splines. Dissertação de Mestrado, NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY NTNU, Norwegian.
- Nguyen, V. P., Anitescu, C., Bordas, S. P. A. e Rabczuk, T., 2015. ‘Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects’. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 117, pp. 89–116.
- Nielsen, P. N., Gersborg, A. R., Gravesen, J. e Pedersen, N. L., 2011. ‘Discretizations in isogeometric analysis of navier-stokes flow’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 3242–3253.
- Novelli, L., de Oliveira, T. S., da Silveira Monteiro, H. A., Fonseca, G. M., da Silva Pitangueira, R. L. e Barros, F. B., 2020. ‘Stable generalized/extended finite element method with global-local enrichment for material nonlinear analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 372.

- Oden, J. T. e Duarte, C. A., 1997. ‘Chapter: Cloud, cracks and fems’. *Recent Developments in Computational and Applied Mechanics*, pp. 302–321.
- Oden, J. T., Duarte, C. A. e Zienkiewicz, O. C., 1998. ‘A new cloud-based hp finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 117–126.
- Oden, J. T. e Reddy, J. N., 2011. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Finite Element Method*. Dover.
- O’Hara, P., Duarte, C. A. e Eason, T., 2016. ‘A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 163.
- Otto, P., Lorenzis, L. D. e Unger, J. F., 2019. ‘Coupling a nurbs contact interface with a higher order finite element discretization for contact problems using the mortar method’. *Computational Mechanics*, vol. 63, pp. 1203–1222.
- Park, K., Pereira, J. P., Duarte, C. A. e Paulino, G. H., 2009. ‘Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 78, pp. 1220–1257.
- Pereira, J. P. A., Duarte, C. A. e Kim, D.-J., 2012. ‘A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures’. *Computational Mechanics*, vol. 49.
- Piegl, L. e Tiller, W., 1994. ‘Software-engineering approach to degree elevation of b-spline curves’. *Computer-Aided Design*, vol. 26, pp. 17–28.
- Piegl, L. e Tiller, W., 1997. *The NURBS book*. Springer-Verlag, New York, NY, USA.

- Pinheiro, D. C. C., 2019. Estratégias Baseadas na Partição da Unidade para Simulação do Comportamento de Meios Parcialmente Frágeis. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Qiu, W., Wang, Q., He, J., Xiong, Y., Gao, L. e Xia, Z., 2024. ‘Phase-field fracture analysis for implicit geometric model via adaptive extended isogeometric analysis’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 420.
- Rauen, M., 2014. Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PA, Brasil.
- Rauen, M., Machado, R. D. e Arndt, M., 2017. ‘Isogeometric analysis of free vibration of framed structures: comparative problems’. *Engineering Computations*, vol. 34, pp. 377–402.
- Rauen, M., Machado, R. D. e Arndt, M., 2020. ‘An enriched formulation of isogeometric analysis applied to the dynamical response of bars and trusses’. *Engineering Computations*, vol. 37, pp. 2439–2466.
- Rosa, R. J. R., Coda, H. B. e Sanches, R. A. K., 2022. ‘Blended isogeometric-finite element analysis for large displacements linear elastic fracture mechanics’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 392.
- Ruess, M., Schillinger, D., Özcan, A. I. e Rank, E., 2014. ‘Weak coupling for isogeometric analysis of non-matching and trimmed multi-patch geometries’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 269, pp. 46–71.
- Santos, K. F., 2018. Método dos elementos finitos generalizados aplicado a problemas de fratura elástica em 3d. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Santos, K. F. e Barros, F. B., 2021. ‘extended isogeometric analysis - a numerical investigation of simulation of two-dimensional elastic fracture’. *Cilamce 2021*:

*XLII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering,*

- Santos, K. F. e Barros, F. B., 2023. ‘Extended isogeometric analysis: a two-scale coupling fem/iga for 2d elastic fracture problems’. *Computational Mechanics*, vol. 73, pp. 639–665.
- Schillinger, D., Hossain, S. J. e Hughes, T. J. R., 2014. ‘Reduced bézier element quadrature rules for quadratic and cubic splines in isogeometric analysis’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 277, pp. 1–45.
- Sederberg, T. W., Zheng, J., Bakenov, A. e Nasri, A., 2003. ‘T-splines and t-nurccs’. *SIGGRAPH '03: ACM SIGGRAPH 2003*, pp. 477–484.
- Shoheib, M. M., 2023. ‘Stress intensity factor and fatigue life evaluation for important points of semi-elliptical cracks in welded pipeline by bezier extraction based xiga and new correlation model’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 155, pp. 264–280.
- Shoheib, M., Shahrooi, S., Shishehsaz, M. e Hamzehei, M., 2022. ‘Investigating stress intensity factor and fatigue life using extended isogeometric analysis based on bézier extraction of nurbs’. *Journal of Solid Mechanics*, vol. 14, pp. 377–397.
- Singh, S. K., Singh, I. V. e Mishra, B. K., 2019. ‘A bézier extraction based xiga approach for vibration analysis of cracked fgm plate using simple first-order shear deformation theory’. , .
- Singh, S. K., Singh, I. V., Mishra, B. K. e Bhardwaj, G., 2019. ‘Analysis of cracked functionally graded material plates using xiga based on generalized higher-order shear deformation theory’. *Composite Structures*, vol. 225.
- Singh, S., Singh, I., Bhardwaj, G. e Mishra, B., 2018. ‘A bézier extraction based xiga approach for three-dimensional crack simulations’. *Advances in Engineering Software*, vol. 125, pp. 55–93.

- Singh, S., Singh, I., Mishra, B., Bhardwaj, G. e Bui, T., 2017. ‘A simple, efficient and accurate bézier extraction based t-spline xiga for crack simulations’. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 88, pp. 74–96.
- Strang, G., 1976. *Linear algebra and its applications*. Academic Press, Inc., New York, NY, USA.
- Strouboulis, T., Babuska, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the generalized finite element method’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 181, pp. 43–69.
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. e Belytschko, T., 2000. ‘Extended finite element method for three-dimensional crack modelling’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 48, pp. 1549–1570.
- Szabo, B. A. e Babuška, I., 1988. *Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners*. Cruse TA (ed) Fracture mechanics: nineteenth symposium.
- Szabo, B. e Babuška, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 1939. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. ASME Press, New York, NY, USA.
- Thien, T. T., Bang, T. K., Khuong, N. D., Minh, N. N. e Nha, N. T., 2015. ‘Extended iso geometry analysis of crack propagation’. *SCIENCE & TECHNOLOGY DEVELOPMENT*, vol. 18.
- Tran, L., Nguyen-Xuan, H. e Wahab, M. A., 2015. ‘Extended isogeometric analysis in modelling cracked structures’. *International journal of Fracture Fatigue and Wear*, vol. 3, pp. 57–64.
- Uhm, T. K. e Youn, S. K., 2009. ‘T-spline finite element method for the analysis of shell structures’. *Numerical Methods in Engineering*, vol. 80, pp. 507–536.

- Unger, J. F., Eckardt, S. e Könke, C., 2007. ‘Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 4087–4100.
- Van Do, V. N., Lee, Y.-K. e Lee, C.-H., 2020. ‘Isogeometric analysis of fg-centrc plates in combination with hybrid type higher-order shear deformation theory’. *Thin-Walled Structures*, vol. 148.
- Veiga, L. B., Buffa, A., Lovadina, C., Martinelli, M. e Sangalli, G., 2012. ‘An isogeometric method for the reissner-mindlin plate bending problem’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 209.
- Verhoosel, C. V., Scott, M. A., Hughes, T. J. R. e de Borst, R., 2011. ‘An isogeometric analysis approach to gradient damage models’. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 86, pp. 115–134.
- Wang, J., Yang, Z., Jin, L., Deng, J. e Chen, F., 2011. ‘Parallel and adaptive surface reconstruction based on implicit pht-splines’. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 28, pp. 463–474.
- Wang, P., Xu, J., Deng, J. e Chen, F., 2011. ‘Adaptive isogeometric analysis using rational pht-splines’. *Computer-Aided Design*, vol. 43, pp. 1438–1448.
- Wilson, W. K., 1969. Combined-Mode Fracture Mechanics. Tese de Doutorado, University of Pittsburgh, Pittsburgh, EUA.
- Yadav, A., Bhardwaj, G. e Godara, R. K., 2022. ‘Influence of discontinuities on the fracture behaviour of cnt reinforced composites subjected to thermo-mechanical load using xiga’. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, .
- Yadav, A., Bhardwaj, G. e Godara, R. K., 2023. ‘Fracture analysis of cnt reinforced fg structures under thermo-mechanical loading using xiga framework’. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, .

- Yang, H., Dong, C., Qin, X. e Wu, Y., 2020. ‘Vibration and buckling analyses of fgm plates with multiple internal defects using xiga-pht and fcm under thermal and mechanical loads’. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 78, pp. 433–481.
- Yau, J. F., Wang, S. S. e Corten, H. T., 1980. ‘A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, pp. 247–259.
- Yin, S., Yu, T., Bui, T. Q., Zheng, X. e Tanaka, S., 2016. ‘In-plane material inhomogeneity of functionally graded plates: A higher-order shear deformation plate isogeometric analysis’. *Composites Part B*, vol. 106, pp. 273–284.
- Yuan, H., Yu, T. e Bui, T., 2021. ‘Multi-patch local mesh refinement xiga based on lr nurbs and nitsche’s method for crack growth in complex cracked plates’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 263.
- Zhang, J., Yu, T. e Bui, T. Q., 2021. ‘An adaptive xiga with locally refined nurbs for modeling cracked composite fg mindlin-reissner plates’. *Engineering with Computers*, vol. 38, pp. 3639–3661.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. e Zhu, J. Z., 2005. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.