

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

André Marques da Costa

RECONSTRUÇÃO PTICOGRÁFICA DE QUDITS
CODIFICADOS EM POSIÇÃO ANGULAR E MOMENTO
ANGULAR ORBITAL DE FÓTONS

Belo Horizonte
2024

André Marques da Costa

**RECONSTRUÇÃO PTICOGRÁFICA DE QUDITS
CODIFICADOS EM POSIÇÃO ANGULAR E MOMENTO
ANGULAR ORBITAL DE FÓTONS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Leonardo Teixeira Neves

Belo Horizonte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C837r Costa, André Marques da.

Reconstrução pticográfica de qudits codificados em posição angular e momento angular orbital de fótons / André Marques da Costa. – 2024.
52 f. : il.

Orientador: Leonardo Teixeira Neves.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 47-49.

1. Qudits. 2. Fótons. 3. Mecânica quântica. I. Título. II. Neves, Leonardo
Teixeira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “**Reconstrução pticográfica de qudits codificados em posição angular e momento angular orbital de fótons**”, de autoria de **ANDRÉ MARQUES DA COSTA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em três de junho de 2024.

Belo Horizonte, 03 de junho de 2024.

Prof. Leonardo Teixeira Neves
Orientador do aluno
Departamento de Física/UFMG

Prof. Carlos Henrique Monken
Departamento de Física/UFMG

Prof. Pablo Lima Saldanha
Departamento de Física/UFMG



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 04/07/2024, às 14:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Professor(a)**, em 04/07/2024, às 18:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2024, às 14:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#)



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3350410** e o código CRC **9998DD96**.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao professor Dr. Leonardo Teixeira Neves, pela orientação, paciência e compreensão.

Agradeço ao apoio de minha família, em especial de minha mãe e minha avó. Obrigado por todo o amor e cuidado.

Aos meus amigos, obrigado pelo companheirismo.

À CAPES, agradeço pelo apoio financeiro.

Resumo

No contexto da informação quântica, o uso de certos graus de liberdade fotônicos permite criar estados quânticos de altas dimensões, chamados qudits, os quais apresentam vantagens em relação a qubits em aplicações como comunicação, criptografia e testes fundamentais da mecânica quântica. Em várias dessas aplicações é necessário reconstruir o estado quântico a ser utilizado, já que ele contém todas as informações sobre propriedades mensuráveis de um sistema físico. Recentemente foi proposto um método simples para reconstrução de estados quânticos puros, chamada pticografia quântica. Ele se baseia em projeções do estado de entrada em diversos subespaços com algum grau de interseção entre si, sendo cada uma delas seguida de uma medição projetiva na base de Fourier, que é aquela gerada pela transformada de Fourier quântica (QFT) da base computacional. Ao final, um algoritmo iterativo estima o estado a partir dos dados colhidos. Neste trabalho, propomos aplicar este método em estados puros de qudits codificados em posição angular e momento angular orbital (OAM) fotônico. Para isso, definimos estes qudits a partir da discretização do perfil espacial de um fóton em coordenadas cilíndricas, por meio de um arranjo de D fendas angulares, e descrevemos sua representação na base de OAM. Para aplicar a pticografia sobre estes qudits, mostramos que as projeções intermediárias serão implementadas por simples filtros espaciais binários, enquanto a medição na base de Fourier dos estados pós-projeção será realizada medindo-se em uma base definida por D modos de OAM. Por fim, demonstramos a aplicabilidade do método pticográfico, simulando a reconstrução de qudits angulares em $D = 5$ e $D = 12$, e avaliamos sua viabilidade experimental.

Palavras-chave: Qdits, Qudit Angular, Pticografia Quântica, Momento Angular Orbital Fotônico, Reconstrução de Estados Quânticos.

Abstract

In the context of quantum information theory, the use of certain photonic degrees of freedom allows the creation of high-dimensional quantum states, called qudits, which offer advantages over qubits in applications such as communication, cryptography, and fundamental tests of quantum mechanics. In many of these applications, it is necessary to reconstruct the quantum state to be used, since it contains all the measurable properties of a physical system. Recently, a simple method for reconstructing pure quantum states, called quantum ptychography, has been proposed. It is based on projections of the input state into various partial overlapping subspaces, each one followed by a projective measurement in the Fourier basis, which is generated by the quantum Fourier transform (QFT) of the computational basis. At the end, an iterative algorithm estimates the state from the collected data. In this work, we propose to apply this method to pure states of qudits encoded in angular position and orbital angular momentum (OAM) of single photons. For this purpose, we define these qudits based on the discretization of the spatial profile of a photon in cylindrical coordinates, through an arrangement of D angular slits, and describe their representation in the OAM basis. To apply ptychography to these qudits, we show that the intermediate projections will be implemented by simple binary spatial filters, while the measurement in the Fourier basis of the post-projection states will be performed by measuring in a basis defined by D OAM modes. Finally, we demonstrate the applicability of the ptychographic method by simulating the reconstruction of angular qudits for $D = 5$ and $D = 12$, and evaluate its experimental feasibility.

Keywords: Photonic Qudits, Angular Qudit, Quantum Ptychography, Photonic Orbital Angular Momentum, Quantum State Reconstruction.

Sumário

	PREFÁCIO	10
1	CARACTERIZAÇÃO DE ESTADOS QUÂNTICOS	11
1.1	Estados de Qubits e Qudits	11
1.2	Caracterização de Estados de Qudits	12
1.2.1	Tomografia de Estados Quânticos	12
1.2.2	Pticografia de Estados Quânticos	14
2	MOMENTO ANGULAR ORBITAL DA LUZ	19
2.1	Momento Angular Orbital da Luz	19
2.1.1	Modos Laguerre-Gaussianos	19
2.1.2	Geração de Feixes com Momento Angular Orbital	22
2.2	Medição de OAM	24
2.2.1	Medição por Hologramas de Garfo	25
2.2.2	Medição por Reformatação de Imagem	25
3	QUDITS CODIFICADOS EM POSIÇÃO ANGULAR E MOMENTO ANGULAR ORBITAL FOTÔNICO	29
3.1	Geração de Qudits Angulares	29
3.1.1	Discretização da Posição Angular de um Fóton	29
3.1.2	O Qudit Angular	31
3.1.3	Preparação de Estados de Qudits Angulares	32
3.2	Estado de Qudit Angular na Base de OAM	33
4	PTICOGRAFIA DE QUDITS ANGULARES	37
4.1	Implementação dos Projetores Pticográficos	37
4.2	Medição na Base de Fourier dos Estados de Fenda Angular	38
4.2.1	QFT dos Estados de Fenda Angular	38
4.2.2	Representação da Base de Fourier na Base de OAM	38
4.2.3	Medição na Base de Fourier Através da Medição na Base de OAM	40
4.3	Simulação do Método Pticográfico para Qudits Angulares	42
5	CONCLUSÕES	45
	REFERÊNCIAS	47

APÊNDICES **50**

	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES ÚTEIS	51
A.1	Somatório de Exponenciais do Estado da Base de Fourier	51
A.2	Ortogonalidade dos Estados da Base de Fourier	52

Prefácio

Este trabalho se propõe a estudar qudits fotônicos codificados em posição angular e momento angular orbital e propor um método para a reconstrução de estados puros destes sistemas, conhecido como pticografia quântica. Para isto, a dissertação constará de cinco capítulos, sendo os dois primeiros voltados para o marco teórico básico, os dois seguintes voltados para o desenvolvimento da descrição matemática do que chamaremos de qudit angular e de como aplicarmos sobre eles a pticografia de estados quânticos e, por último, uma reunião das ideias para a conclusão.

- Capítulo 1: O primeiro capítulo de nosso marco teórico começa com uma breve discussão acerca de estados de qubits e qudits. Na sequência, apresentamos o método mais conhecido para a caracterização destes estados, a tomografia quântica, e discutimos algumas de suas dificuldades para sistemas de altas dimensões. Por fim, apresentamos um método alternativo para reconstrução de estados puros, conhecido como pticografia quântica [1], que traz algumas vantagens em relação a outros métodos tomográficos.
- Capítulo 2: Este capítulo traz um estudo sobre o momento angular orbital da luz, uma propriedade emergente da descrição de Maxwell para ondas eletromagnéticas, mas que demonstrou-se de grande utilidade para o desenvolvimento de tecnologias quânticas. Estudaremos a origem desta propriedade, assim como os perfis de intensidade e fase de feixes laguerre-gaussianos, que a contêm. Veremos como gerar estes feixes e medi-los.
- Capítulo 3: Neste capítulo começaremos a descrever o nosso qudit angular a partir da discretização da posição angular do fóton, baseando-nos no trabalho de [2]. Por meio de um arranjo de D fendas angulares, geraremos nosso qudit e definiremos o estado de fenda. Analisaremos este estado na base de posição angular e ainda na base de momento angular orbital.
- Capítulo 4: Por fim, proporemos a aplicação da reconstrução pticográfica de estados quânticos ao qudit angular, estudando como cada etapa do processo deve ser implementada. Realizaremos ainda simulações da reconstrução.
- Capítulo 5: Concluimos o trabalho, reagrupando as ideias apresentadas ao longo dos capítulos anteriores e discutiremos a viabilidade experimental do método proposto.

1 Caracterização de Estados Quânticos

Um estado que descreve um sistema quântico é chamado de estado quântico. O desenvolvimento da mecânica quântica trouxe à tona diversos debates filosóficos acerca da realidade física de um estado quântico. A mecânica newtoniana, determinista e local, foi dando espaço a uma mecânica probabilística em que os conceitos de realismo, localidade e causalidade confrontaram-se com os resultados experimentais. A partir deste embate, a mecânica quântica passou a possuir diversas interpretações, que divergem em determinabilidade, realidade da função de onda e seu colapso, existência de variáveis ocultas e de “universos paralelos”. Independente da sua preferência filosófica, todavia, todas as interpretações são empiricamente equivalentes, o que quer dizer que, apesar do conceito de um estado quântico ser passível de debate, o conhecimento acerca dele fornece as probabilidades referentes ao sistema físico, e nos permite determinar propriedades mensuráveis a respeito deste e calcular sua evolução e possíveis transformações. Neste capítulo discutiremos brevemente algumas propriedades de estados quânticos e como caracterizá-los, já que eles contêm todas as informações sobre propriedades mensuráveis de um sistema físico.

1.1 Estados de Qubits e Qudits

Na notação de Dirac, um estado quântico puro é representado por um vetor definido no espaço de Hilbert, $|\psi\rangle$, denominado ket. Se tivermos uma mistura estatística de estados puros, um único vetor não será capaz de fornecer informações completas para este novo estado. Estes estados são chamados de estados mistos, e uma forma de descrevê-los matematicamente é por meio da matriz densidade $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.1)$$

onde p_n é o fator de probabilidade, $\sum_n p_n = 1$, $|\psi_n\rangle$ são estados ortonormais e $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$.

Um sistema quântico pode carregar informação em seu estado, e uma de suas propriedades mais importantes é a possibilidade de ele existir em superposição, o que significa dizer que a combinação linear de dois possíveis estados também é um estado [3]. Um sistema bidimensional é chamado de bit quântico (qubit) e seu estado puro mais geral pode ser representado como

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad (1.2)$$

onde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é a base computacional, em que $\langle 0|1\rangle = 0$. Os termos a_0 e a_1 são números complexos que satisfazem $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ onde $|a_i|^2$ representa a probabilidade de se encontrar o estado $|\psi\rangle$ como $|i\rangle$ em uma medida na base computacional.

A geração e manipulação de qubits permitiram o desenvolvimento de diversas tecnologias quânticas, incluindo o desenvolvimento de computadores quânticos, o aprimoramento de protocolos de comunicação e, principalmente, de criptografia [3], possibilitando, também o surgimento de protocolos inovadores, como o de teleportação quântica [4].

A generalização de um qubit para um espaço D -dimensional possibilita a criação de dits quânticos (qudit). O estado puro de um qudit pode ser descrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} a_n |n\rangle, \quad (1.3)$$

onde $\{|n\rangle\}$ é a base computacional e $\sum_n |a_n|^2 = 1$. Assim como a utilização de um alfabeto de 26 caracteres (como o alfabeto latino que aqui utilizamos) é mais eficiente para a escrita e leitura deste trabalho do que um código binário (como, por exemplo, o código morse), a utilização de qudits ao invés de qubits pode trazer diversas vantagens às tecnologias de informação quântica, incluindo, mas não somente: aumento da capacidade informacional em canais de comunicação e da segurança em protocolos de criptografia, construção de circuitos quânticos mais eficientes e melhoras em testes fundamentais da mecânica quântica [5, 6].

1.2 Caracterização de Estados de Qudits

Em várias das aplicações de qubits ou qudits, é necessário reconstruir o estado quântico a ser utilizado, seja para descobrirmos um estado desconhecido ou para testarmos se um aparato está gerando o estado desejado. Nesta seção, apresentaremos o método de reconstrução de estados quânticos mais utilizado, e em seguida falaremos de uma proposta alternativa para reconstruir estados puros.

1.2.1 Tomografia de Estados Quânticos

O método mais conhecido para reconstrução de estados é chamado de tomografia de estados quânticos, e consiste em projetar um *ensemble* de sistemas físicos identicamente preparados em diferentes bases, e, a partir da distribuição de contagens de cada medição, é possível estimar o estado desconhecido por algoritmos computacionais [7].

De forma simples, podemos visualizar o processo de reconstrução tomográfica de um qubit correspondente à polarização de um fóton utilizando a esfera de Bloch, como mostra a figura 1(a): uma medição na base definida pelo eixo z (polarização circular), isolaria o estado desconhecido em um plano perpendicular a este eixo. Uma segunda medição referente ao eixo y (base de polarização diagonal/antidiagonal), isolaria o estado em um segmento de reta. Por fim, uma medição no eixo x (polarização vertical/horizontal) nos entregaria o ponto exato onde o estado se encontra.

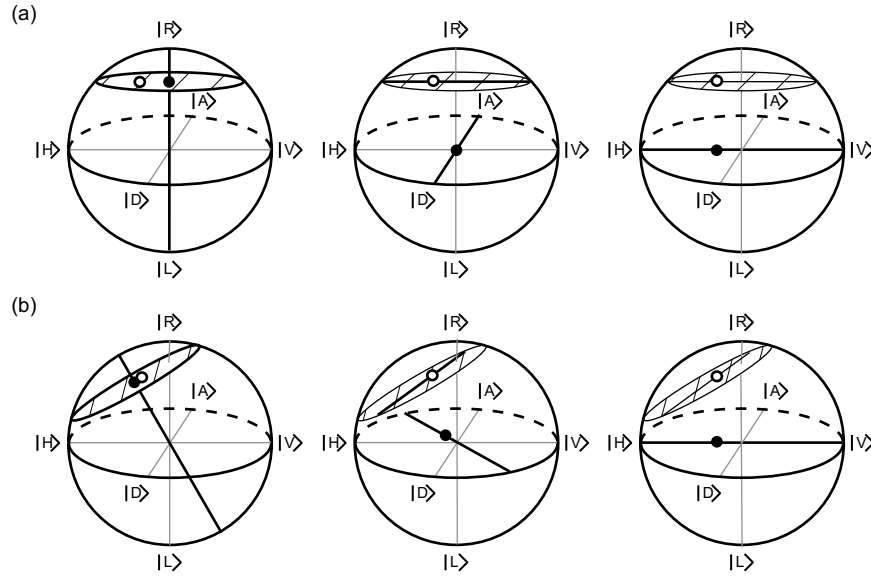


Figura 1 – Uma sequência de três medições que permitem isolar um estado desconhecido na esfera de Bloch, utilizando bases definidas em eixos ortogonais (a) e não ortogonais (b). Fonte: Retirado de [7].

Não necessariamente as projeções precisam ser realizada em bases definidas por eixos ortogonais, como mostra a figura 1(b). O importante é que os operadores das bases de medição formem um conjunto que seja informacionalmente completo, ou seja, elas permitem acessar todas as informações necessárias para completa caracterização do estado. Porém, nem tudo são flores: erros nos processos de contagens, ou mesmo incerteza quanto às bases de medição, levam o que deveria ser um ponto único à uma região da esfera de Bloch com maior probabilidade de se encontrar o estado que queremos caracterizar. Assim, é necessário, ainda, um método de pós processamento para definir o estado mais provável que se encaixe nas medições experimentais.

Existem diversas formas de se realizar a tomografia, variando em métodos experimentais, o que engloba diferentes bases de medição utilizadas, e em métodos de pós processamento, cada qual com diferente demanda computacional [8]. No caso de um estado arbitrário $\hat{\rho}$, são necessários para completa reconstrução $D^2 - 1$ parâmetros reais, pois a matriz densidade de um estado qualquer é constituída de $D \times D$ elementos, e sabemos que ela deve ser hermitiana e ainda que seu traço $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. Se tivermos a garantia de que o estado a ser reconstruído é puro, essa informação facilita o processo tomográfico e reduz o número de resultados de medição necessários, que deixa de escalar quadraticamente com a sua dimensão, e passa a escalar linearmente [9–12]. Assim, com essa informação *a priori*, são reduzido problemas de complexidade encontrados ao se estudar estados de altas dimensões, sejam problemas de natureza experimental, como o grande número de aparatos para medir um estado em diversas bases, ou problemas de natureza computacional, que surgem da complexidade cada vez maior para os algoritmos de reconstrução.

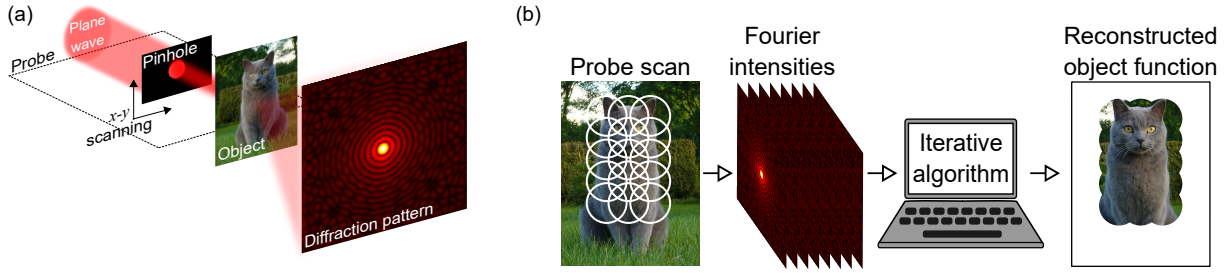


Figura 2 – Esquema da pticografia. (a) Uma pequena região é iluminada e gera um padrão de difração. (b) Um conjunto de pequenas regiões iluminadas com alguma sobreposição entre elas, cada qual com seu padrão de difração, alimenta com dados o PIE, permitindo a reconstrução da função transmissão complexa do objeto. Fonte: Retirada de [1].

1.2.2 Pticografia de Estados Quânticos

Pticografia Clássica

Recentemente foi proposta uma técnica simples para reconstrução de estados quânticos puros, chamada pticografia quântica. Ela é baseada em um método iterativo de recuperação de fase proposto em 2004 por Faulkner e Rodenburg [13]. Antes de explicarmos a versão quântica, é bom entendermos a versão clássica. Se o leitor já estiver familiarizado com a pticografia, sintam-se a vontade para pular para a próxima subseção.

A pticografia funciona da seguinte forma: Por meio de uma abertura móvel, cuja posição e função transmissão são conhecidas, um feixe de luz coerente incide em uma região localizada de um objeto. Mede-se o padrão de difração deste feixe no plano distante, como mostra a figura 2(a), o qual é equivalente à sua transformada de Fourier. Entretanto, ao fazer esta medição, o que se obtém é a intensidade luminosa, de forma que perdemos a informação relacionada à distribuição de fases da onda. Para recuperar tal informação, a luz é localizada em diferentes partes do objeto, de tal modo que haja uma interseção parcial entre elas. O padrão de difração de cada parte, juntamente com as informações referentes à abertura móvel formarão o conjunto de dados pticográficos. Estes dados servirão para alimentar um algoritmo iterativo (*ptychographic iterative engine* – PIE) que, a partir das múltiplas iluminações e da redundância de informação gerada pela interseção entre elas, será capaz de reconstruir a função complexa que caracteriza o objeto; tal processo está esquematizado na figura 2(b).

Versão Quântica da Pticografia

Na analogia quântica [1], a função objeto que desejamos conhecer é um estado quântico puro pertencente a um espaço de Hilbert D -dimensional $\mathcal{H}_D$, como, por

exemplo, o definido em (1.3), que reproduzimos aqui:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} a_n |n\rangle. \quad (1.4)$$

Se determinarmos os D coeficientes complexos $\{a_n\}$ teremos uma caracterização completa de $|\psi\rangle$. Para fazermos isso, tal estado de entrada será projetado em subespaços r -dimensionais através de um conjunto de J projetores $\{\hat{P}_j\}_{j=0}^{J-1}$ de *rank* r , satisfazendo os requisitos de *overlap* e completeza (veja o quadro abaixo).

Requisitos dos Projetores Pticográficos

Há liberdade para escolha dos projetores, porém existem duas condições a serem respeitadas:

1. *Overlap*: Cada projetor deve ter alguma sobreposição com ao menos um outro, ou seja, dado um projetor $\hat{P}_j$, deve haver um $\hat{P}_{j'}$ de forma que:

$$0 < \frac{\text{Tr}(\hat{P}_j \hat{P}_{j'})}{r} < 1;$$

2. *Completeza*: O conjunto de projetores deve abranger todas as dimensões do espaço de Hilber $\mathcal{H}_D$.

Essas projeções correspondem às diversas posições da iluminação na pticografia clássica, que incidem em um pequeno pedaço do objeto. Uma escolha simples é dada por projetores diagonais na base computacional, da forma:

$$\hat{P}_j = \sum_{k=0}^{r-1} |k \oplus s_j\rangle \langle k \oplus s_j|, \quad (1.5)$$

onde $\oplus$ representa adição módulo D e s_j é um inteiro não negativo que define o salto entre dois operadores adjacentes. O vetor de J componentes $\vec{s}_J = (s_0, s_1, \dots, s_{J-1})$, que chamaremos de vetor salto, é quem define o número de projetores a serem utilizados. O *jotésimo* projetor gerará um estado num subespaço r -dimensional

$$|\psi_j\rangle = \hat{P}_j |\psi\rangle, \quad (1.6)$$

sobre o qual realizamos uma medição projetiva na base gerada pela transformada quântica de Fourier (QFT¹) da base computacional:

$$\{|\mu_n\rangle \equiv \hat{\mathcal{F}}_{\mathcal{D}} |n\rangle\}_{n=0}^{D-1}. \quad (1.7)$$

O operador $\hat{\mathcal{F}}_{\mathcal{D}}$ será melhor detalhado no capítulo 4. Para cada projetor $\hat{P}_j$, obtemos uma distribuição de contagens

$$\Pi_j \propto \left\{ |\langle \mu_n | \psi_j \rangle|^2 \right\}_{n=0}^{D-1}, \quad (1.8)$$

¹ A sigla QFT vem do inglês *quantum Fourier transform*.

formando um conjunto de dados pticográficos $\{\sqrt{\Pi_j}\}_{j=0}^{J-1}$. Este passo equivale a medir os padrões de difração na pticografia clássica. Este conjunto, juntamente com a informação dos projetores, serão fornecidos ao algoritmo PIE que estimará um estado. A figura 3 esquematiza o processo.

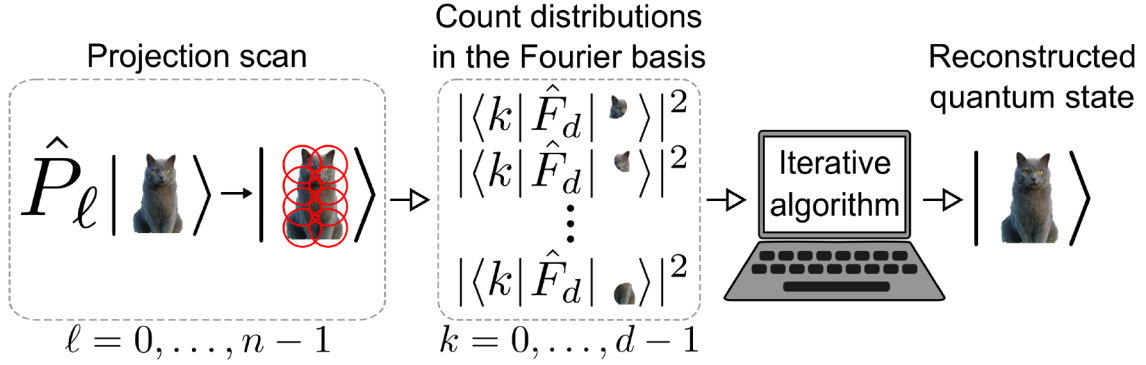


Figura 3 – Esquema demonstrativo da pticografia de estados quânticos. Fonte: Retirada de [1].

Podemos construir várias famílias de projetores da forma de (1.5), variando em quantidade e em *rank*. O *rank* ideal foi verificado empiricamente como $r = \lceil D/2 \rceil$ [1]. O número de projetores pode variar entre D e um valor fixo ($< D$), independente da dimensão. No primeiro caso, teríamos D^2 resultados de medição, o que se assemelha ao processo de tomografia para estados mistos. Já no segundo caso, o número de resultados pode ser compatível com os métodos para a tomografia de estados puros conhecidos na literatura [10–12, 14]: na referência [1] utilizou-se um conjunto de 4 projetores definidos pelo vetor salto $\vec{s}_4 = \left(0, \lceil \frac{D-r-2}{3} \rceil, 2\lceil \frac{D-r-2}{3} \rceil, \lceil \frac{D}{2} \rceil\right)$; já a referência [15] utilizou 5 projetores definidos por $s_j = j \lfloor \frac{D}{5} \rfloor$.

Uma vez colhidos os dados pticográficos, estes serão fornecidos ao PIE. O algoritmo está descrito no quadro abaixo. Uma única iteração do PIE é definida como J iterações do loop entre os passos 2 a 7, de forma que cada projetor seja utilizado ao menos uma vez, assim como os seus respectivos conjuntos de dados gerados pela medições.

O algoritmo pode ser finalizado dado um número pré-definido de iterações ou ainda por meio de um teste de convergência: A partir da normalização dos estados corrente, $|\phi_n\rangle$, e de sua próxima atualização, $|\phi'_n\rangle$, podemos calcular a distância do traço, que é uma medida de distinguibilidade entre os dois estados. Esta distância é definida por [3]:

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - \langle \phi_n | \phi'_n \rangle^2}. \quad (1.9)$$

Algoritmo de reconstrução pticográfica

Adaptado para a reconstrução de estados puros, o algoritmo segue os seguintes passos:

1. **Início:** É gerada uma estimativa aleatória para o estado:

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} \gamma_n |n\rangle.$$

2. **Projeção:** Aplica-se o jótésimo projetor:

$$|\phi_j\rangle = \hat{P}_j |\phi\rangle.$$

3. **Transformada de Fourier:** Aplica-se a QFT:

$$|\tilde{\phi}_j\rangle = \hat{\mathcal{F}}_D |\phi_j\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} \tilde{\gamma}_{nj} |n\rangle.$$

4. **Correção:** Utiliza-se então os dados experimentais $\{\sqrt{\Pi_j}\}$ para corrigir o módulo dos coeficientes complexos $\tilde{\gamma}_{nj}$, mantendo-se a fase:

$$|\tilde{\phi}'_j\rangle \propto \sum_{n=0}^{D-1} |\langle \mu_n | \phi_j \rangle| e^{i \arg \tilde{\gamma}_{nj}} |\mu_n\rangle.$$

5. **Transformada inversa:** Aplica-se a transformada inversa:

$$|\phi'_j\rangle = \hat{\mathcal{F}}_D^{-1} |\tilde{\phi}'_j\rangle.$$

6. **Atualização:** Atualiza-se a estimativa inicial:

$$|\phi'\rangle = |\phi\rangle + \eta \hat{P}_j (|\phi'_j\rangle - |\phi_j\rangle),$$

onde $\eta \in]0, 2]$ é um parâmetro determinado empiricamente que controla o salto entre duas atualizações da estimativa.

7. **Iteração:** Reinicia-se o passo a passo tomando $|\phi'\rangle$ como nova estimativa inicial e alterando o projetor utilizado.

Quanto mais próximo o valor de $\mathcal{D}$ chegar de 0, mais indistinguíveis serão os estados, sendo $\mathcal{D} = 0$ se os estados forem idênticos. É possível forçar a parada do algoritmo quando esta distância atingir um valor pré-determinado. Finalizando-se o algoritmo, será fornecido um estado puro pendente de normalização.

Vantagens do Método Pticográfico

Os métodos tomográficos padrões para reconstrução de estados puros utilizam medições em diversas bases [10–12, 14]. Na prática, a implementação de cada base corresponde a uma configuração diferente do *setup* experimental. Já a reconstrução pticográfica utiliza apenas uma base de medição (QFT da base computacional), e a diversidade dos dados é obtida através do conjunto de projetores pticográficos. A depender da forma desses projetores, a pticografia pode ser experimentalmente vantajosa. Como exemplo, no caso de qudits fotônicos codificados em caminhos transversais lineares ou angulares (como os que estudaremos neste trabalho) e longitudinais, os projetores da forma de (1.5) serão simples bloqueadores destes modos espaciais. Além disto, o algoritmo do PIE fornece um ágil pós-processamento, com menor demanda de poder computacional, tornando a reconstrução pticográfica muito interessante para estados com altas dimensões.

2 Momento Angular Orbital da Luz

Neste trabalho, apresentaremos o método pticográfico para reconstrução de estados de qudits codificados na variável de posição angular de fótons. Veremos que sua implementação requer a medição da variável conjugada que é o momento angular orbital (OAM) fotônico. Por esta razão, neste capítulo, vamos introduzir o conceito de OAM da luz, estudando sua origem, bem como algumas formas de geração e medição de feixes com OAM. Isto nos permitirá, no capítulo 4, descrever o método pticográfico para os qudits angulares, mostrando sua viabilidade experimental.

2.1 Momento Angular Orbital da Luz

2.1.1 Modos Laguerre-Gaussianos

Que a luz possui momento angular já se é conhecido desde os trabalhos de Poynting [16]. No entanto, demorou-se para compreender que esse momento possui não apenas um componente, mas dois: momento angular de spin (SAM) e momento angular orbital (OAM). O primeiro foi percebido já no início do século XX, quando Poynting identificou que luz polarizada circularmente possuía um momento angular de $\pm\hbar$, dependendo se a polarização possui helicidade positiva ou negativa [17]. Ainda na primeira metade do século XX, a relação entre momento angular L e energia E de um fóton fora sendo desenvolvida até a razão

$$\frac{L}{E} = \frac{\ell + \sigma}{\omega}, \quad (2.1)$$

onde ℓ representa o OAM, σ representa o SAM e ω a frequência angular do fóton. [16]. Porém, apenas com Allen *et al.*, em 1992 [18], foi bem definido o conceito de momento angular orbital da luz.

O trabalho de Allen, todavia, só foi possível com o desenvolvimento de lasers, que permitiram a manipulação e o estudo de feixes de luz espacialmente confinados. Tais feixes podem ter um ângulo de divergência suficientemente pequeno, de forma que, em uma certa região do espaço, se assemelham a uma onda plana. Feixes cujos ângulos de divergência não se afastam tanto do eixo de propagação são chamados de paraxiais, e devem respeitar a aproximação paraxial da equação de Helmholtz [19], que surge da hipótese de que o envelope que modula a amplitude complexa de um feixe monocromático é pouco variável em função da posição para distâncias comparáveis ao comprimento de onda.

Para uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, a equação de onda para

o campo elétrico E é dada por

$$\nabla^2 E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Assumindo uma solução de onda plana, $E(r, t) = E_0(r)e^{i(kz - \omega t)}$, onde $E_0(r)$ é a amplitude da onda, k é o número de onda e ω é a frequência angular da onda, e substituindo em (2.2), ficamos com

$$\nabla^2 E_0(r) + k^2 E_0(r) = 0. \quad (2.3)$$

Considerando que a onda varia lentamente em z se comparado às direções transversais (aproximação paraxial), podemos escrever que

$$E_0(r) = A(r)e^{ikz}, \quad (2.4)$$

sendo $A(r)$ o envelope complexo do feixe. Substituindo (2.4) em (2.3), e expandindo o operador laplaciano, teremos

$$\left(\nabla_T^2 A(r) + i2k \frac{\partial A(r)}{\partial z} + \frac{\partial^2 A(r)}{\partial z^2} - k^2 A(r) \right) e^{ikz} + k^2 A(r) e^{ikz} = 0, \quad (2.5)$$

onde $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é a parte transversal do laplaciano. Pela aproximação paraxial, o termo $\partial^2 A(r)/\partial z^2$ é desprezível, o que, após simplificações, nos deixa com:

$$\nabla_T^2 A(r) + i2k \frac{\partial A(r)}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

que é chamada equação paraxial de Helmholtz. Uma das possíveis soluções para a equação (2.6) é o feixe gaussiano. O envelope complexo de tal feixe é dado por:

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right), \quad (2.7)$$

onde $q(z) = z + iz_0$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ e A_1 é uma constante. A amplitude complexa de um feixe gaussiano será dada por:

$$U(r) = A(r) \exp(-ikz). \quad (2.8)$$

Um feixe gaussiano tem esse nome devido à distribuição transversal de sua amplitude, que se comporta de acordo com a distribuição gaussiana.

Outra solução possível para a equação paraxial de Helmholtz, entretanto, se dá resolvendo (2.6) em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) onde ρ é a coordenada radial, ϕ a azimutal e z a longitudinal. As soluções nestas coordenadas são chamadas de modos laguerre-gaussianos (LG), e sua amplitude complexa é modulado por polinômios de Laguerre:

$$U_{\ell,m}(\rho, \phi, z) = A_{\ell,m} \frac{W_0}{W(z)} \left(\frac{\rho}{W(z)} \right)^\ell L_m^\ell \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp\left(\frac{-\rho^2}{W^2(z)} \right) \times \exp\left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - i\ell\phi + ig_{\ell,m}(z) \right], \quad (2.9)$$

onde z_0 é o comprimento de Rayleigh, $W(z) = W_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}$ é a largura do feixe, $R(z) = z[1 + (z_0/z)^2]$ é o raio de curvatura da frente de onda e $g_{\ell,m} = (\ell + 2m + 1) \arctan(z/z_0)$ é a fase de Gouy. Os termos ℓ (inteiro) e m (inteiro positivo) são, respectivamente, os índices azimutal e radial do feixe, e L_m^ℓ são polinômios de Laguerre. O feixe gaussiano é o modo fundamental de Laguerre-Gauss (para $\ell = m = 0$).

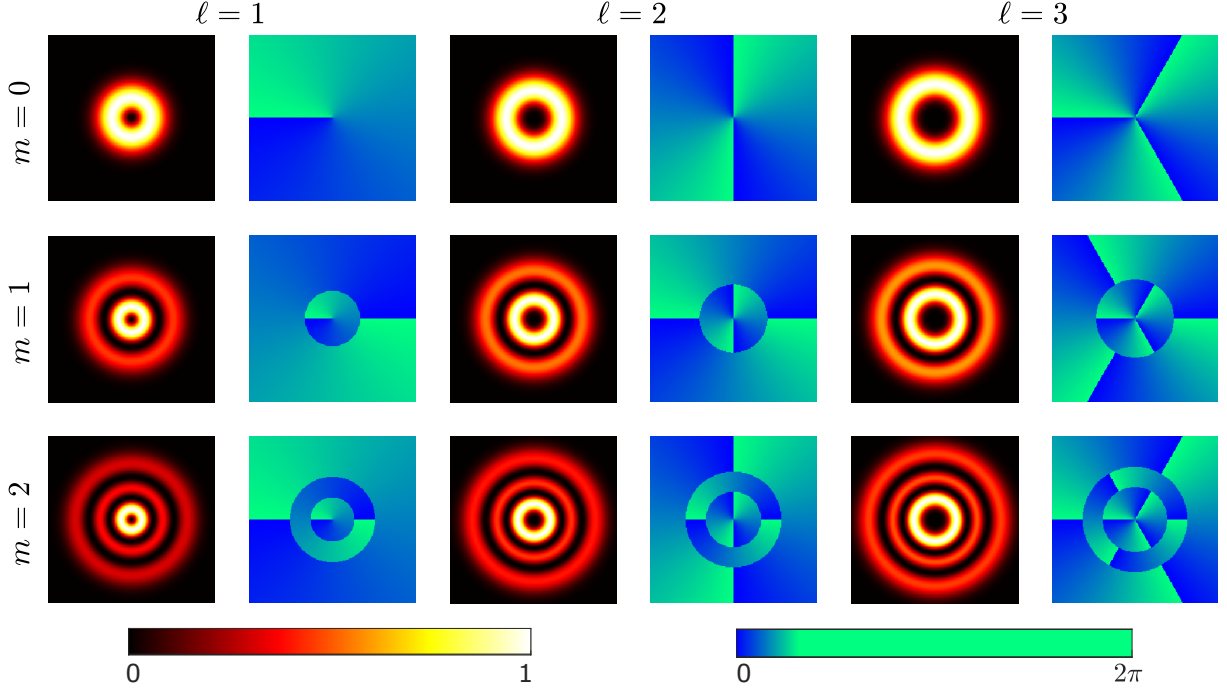


Figura 4 – Perfis de intensidade e fase para alguns modos LG com índice azimutal $\ell = 1, 2$ e 3 e índice radial $m = 0, 1$ e 2 .

Os modos laguerre-gaussianos são os modos transversais mais simples para analisarmos o momento angular orbital da luz. A figura 4 mostra os perfis transversais de intensidade e os perfis de fase para modos LG com índice azimutal $\ell = 1, 2$ e 3 e índice radial $m = 0, 1$ e 2 . No estudo de Allen *et al.* [18], foi percebido que frentes de ondas destes modos, que apresentam um perfil transversal helicoidal ($\exp(-i\ell\phi)$), conferem à luz um momento angular. Ambas as ondas com este perfil e também o OAM já eram conhecidos: As ondas com perfis helicoidais, conhecidas como vórtices ópticos, vinham sendo geradas e estudadas desde a década de 1970 [16]. Porém, estes estudos tinham como foco as singularidades de fase, que dão origem à intensidade nula no centro do perfil espacial. Já o OAM era menos estudado, sendo mais comumente encontrado em pesquisas sobre transições eletrônicas de altas ordens, que, por si só, já eram um evento raro. O grande feito de [18] foi verificar que uma onda luminosa cujo perfil espacial depende do ângulo azimutal ϕ apenas através de um fator de fase $\exp(-i\ell\phi)$, carregará uma momento angular orbital de $\ell\hbar$ por fóton. O parâmetro ℓ , conhecido como carga topológica, determina o número de hélices entrelaçadas que compõe as frentes de onda de feixes LG, conforme mostrado nos exemplos da figura 5.

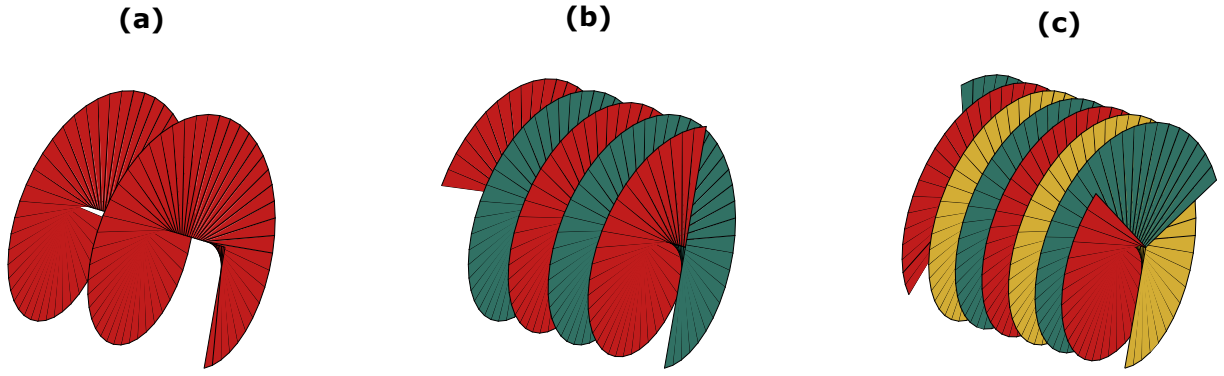


Figura 5 – Frentes de ondas helicoidais. O número de hélices entrelaçadas é definido pelo valor de ℓ : (a) $\ell = 1$, (b) $\ell = 2$ e (c) $\ell = 3$.

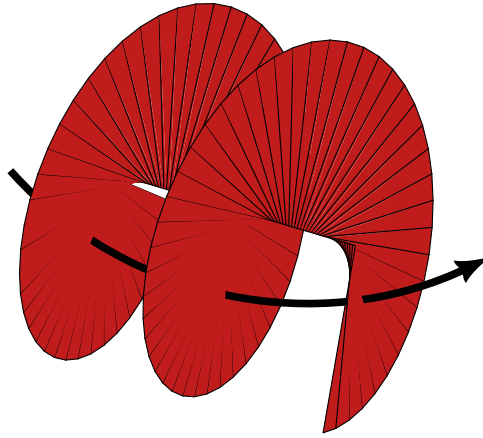


Figura 6 – Um vetor de Poynting não paralelo ao eixo de propagação origina o momento angular orbital da luz.

Nessas frentes helicoidais, o vetor de Poynting não é mais paralelo ao eixo de propagação, possuindo um ângulo azimutal ϕ , como demonstra a figura 6. Dessa forma, observe que o vetor, que representa a direção do fluxo de densidade de energia da onda, circula o eixo de propagação. Essa trajetória forma então uma espiral, e é a origem do OAM. De forma mais geral, o OAM surge sempre que as frentes de onda não são planos perpendiculares ao eixo de propagação.

2.1.2 Geração de Feixes com Momento Angular Orbital

Quanto à geração de feixes com perfil helicoidal, focaremos em duas formas específicas: holografia e difração.

Métodos Holográficos

Com a popularização de moduladores espaciais de luz (SLMs), a utilização de hologramas se tornou fácil e prática para diversas aplicações [10, 11, 15, 20–25]. Na geração de feixes com OAM, simples hologramas com o perfil de fase azimutal, como os da figura

4, permitem a conversão de um feixe gaussiano em um modo LG. Outra possibilidade se dá com a utilização de grades de difração em formato de garfo, sintetizados primeiramente por [26]. Estas grades surgem da combinação de máscaras com perfil de fase azimuthal com uma grade linear de difração, como esquematiza a figura 7, considerando $\ell = 1$. Observe que a grade resultante possui 1 deslocamento no centro do holograma, o que dá origem ao modo LG. Em suma, ao se incidir um feixe gaussiano num holograma de garfo com um número k de deslocamentos, o feixe resultante na primeira ordem de difração terá carga topológica $\ell = k$. Para gerar um valor de ℓ negativo, basta-se inverter o holograma. A figura 8 mostra alguns hologramas para gerar feixes com modos LG com $\ell = \pm 1$ (primeira coluna), $\ell = \pm 2$ (segunda coluna) e $\ell = \pm 3$ (terceira coluna).

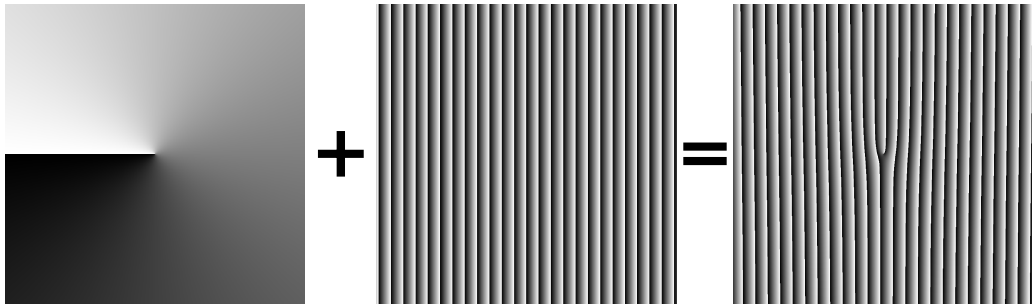


Figura 7 – A combinação de uma máscara com perfil de fase azimuthal com uma grade linear de difração resulta numa grade em forma de garfo. Neste caso, a máscara irá gerar um modo LG com $\ell = 1$.

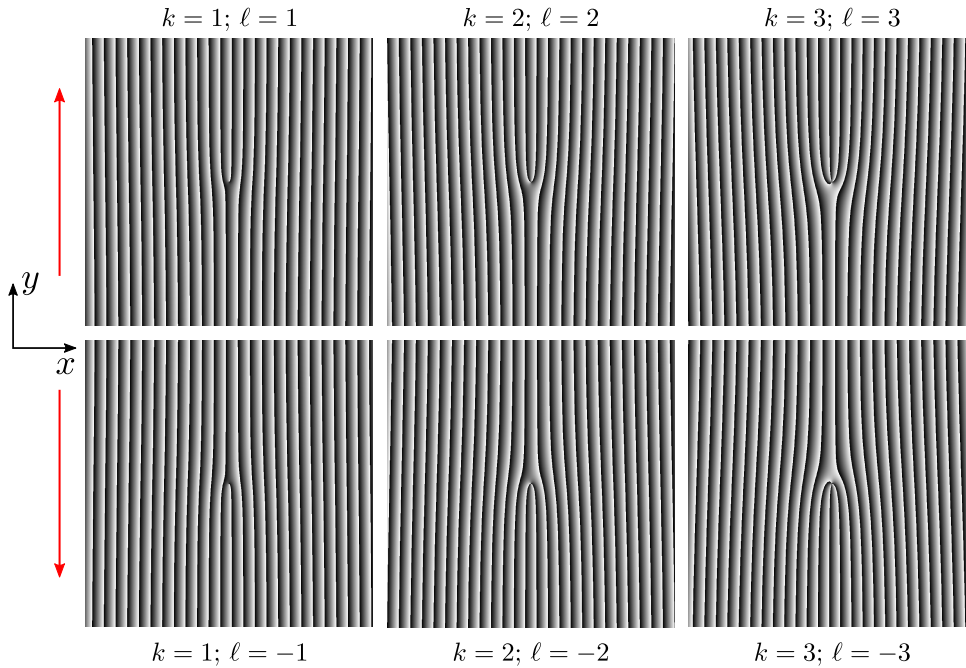


Figura 8 – Hologramas em formato de garfo, com $k = 1, 2$ e 3 . As máscaras com garfo orientado para cima (para baixo) no plano xy conferem ao feixe um valor positivo (negativo) de ℓ .

Difração Angular

Assim como há o princípio da incerteza para posição e momento linear, há um princípio da incerteza para posição angular e OAM. Um fóton, ao passar por uma fenda angular, sofre uma restrição em sua posição angular, como ilustrado na figura 9(a). Portanto, há uma redução na incerteza desta variável e, conseqüentemente, um aumento na incerteza do OAM [20]. O fóton transmitido pela fenda angular, emergirá em um estado de superposição de diversos valores de OAM, modulados pela transformada de Fourier da função que descreve a fenda. Este fenômeno, ilustrado na figura 9(b) para diferentes aberturas angulares, é conhecido como difração angular e se dá por uma relação de Fourier entre ϕ e ℓ [21]. No próximo capítulo, discutiremos este tópico com mais detalhes.

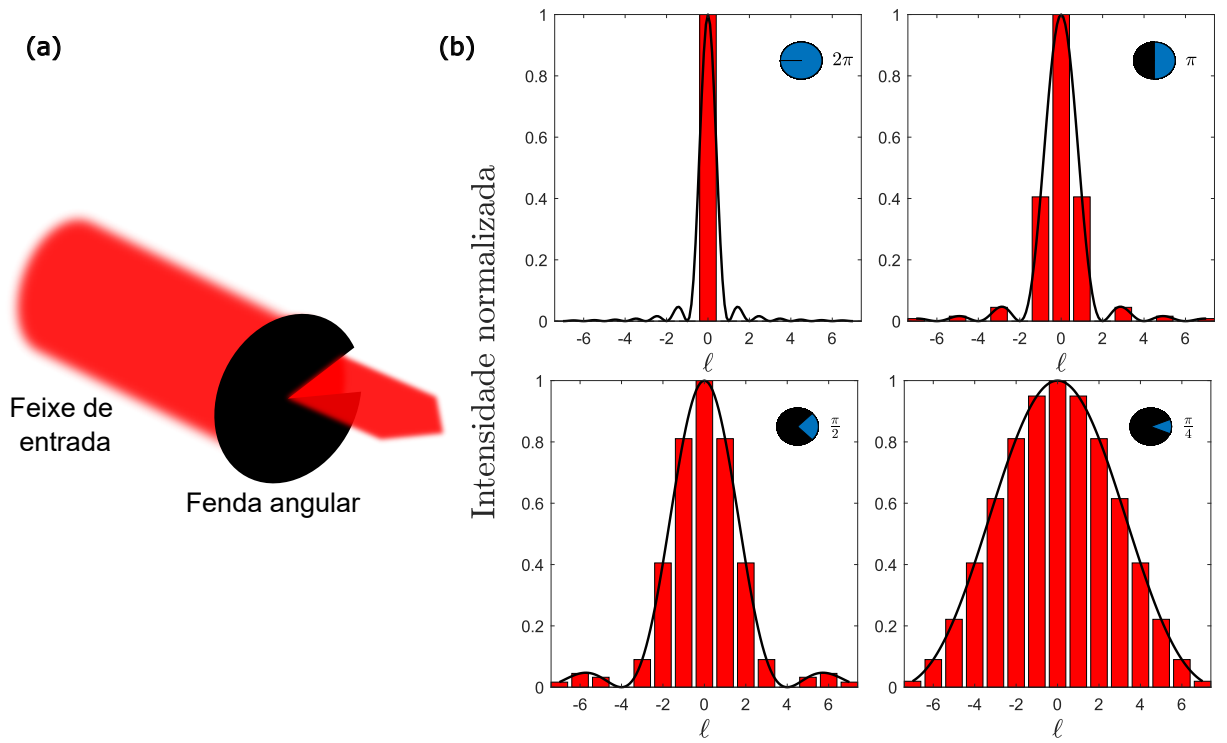


Figura 9 – (a) Uma fenda angular gera uma restrição na distribuição angular de um feixe de luz. (b) Efeitos de difração angular para aberturas de diferentes ângulos conforme mostrado nas inserções. Os gráficos mostram a distribuição normalizada de modos LG. A curva preta é a função que modula esta distribuição e será discutida no próximo capítulo.

2.2 Medição de OAM

Existem diversas maneiras de se determinar a carga topológica ℓ de um feixe de luz. Nesta seção, vamos descrever, sucintamente, duas delas: a primeira e mais simples envolve os mesmos hologramas de garfo que são utilizados para gerar feixes com OAM, o que permite medir apenas um valor de ℓ por vez. A segunda, e mais complexa, é a

medição por reformatação de imagem, que trás a vantagem de medir vários valores de ℓ simultaneamente.

2.2.1 Medição por Hologramas de Garfo

Como vimos na seção anterior, ao se incidir uma onda plana em uma grade de difração em formato de garfo com k deslocamentos, temos que a onda resultante terá a carga topológica $\ell = k$. O processo, porém, pode ser reversível [27]: ao se incidir uma onda com carga topológica ℓ sobre uma grade de difração com $k = \ell$ deslocamentos, centrados no eixo do feixe e orientada para baixo, o resultado na primeira ordem de difração será uma onda no modo gaussiano fundamental, como mostra a parte superior da figura 10. Se acoplarmos esta onda resultante em uma fibra óptica de modo único, e direcionarmos o feixe a um detector, teremos então uma maneira de medir o OAM do feixe incidente como $\ell = k$, como mostrado na parte inferior da figura 10. Apesar de simples, quando o feixe incidente for uma superposição de vários valores de ℓ , o método se torna pouco eficiente, pois será necessário mudar o holograma a cada tentativa de detectar um valor específico.

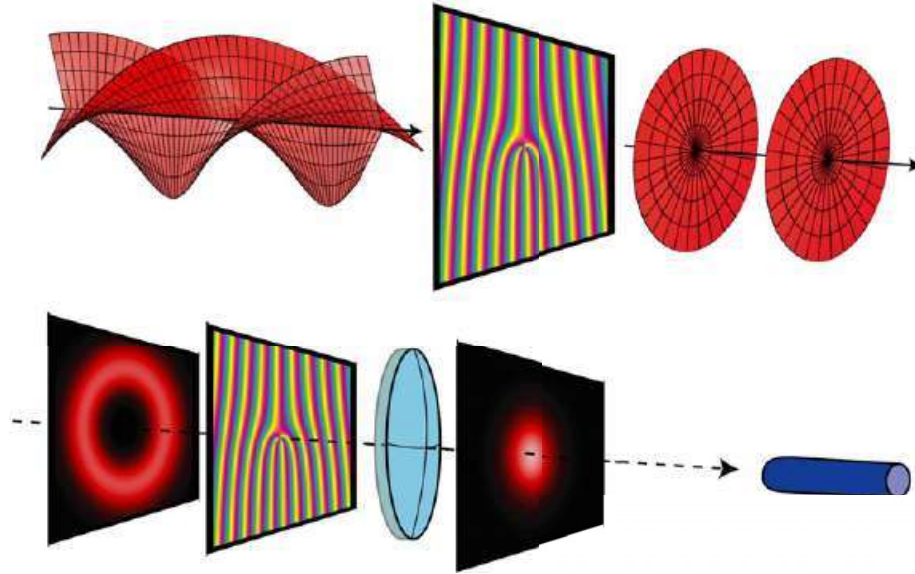


Figura 10 – Acima: um holograma de garfo com $k = 3$ deslocamentos, orientado negativamente, converte um feixe LG com $\ell = 3$ em um feixe gaussiano ($\ell = 0$). Abaixo: uma ilustração do processo experimental para detecção do feixe convertido. Fonte: Retirado de [27].

2.2.2 Medição por Reformatação de Imagem

Um método eficiente para a medição do OAM deve permitir a detecção de vários valores de ℓ simultaneamente. A melhor proposta para tal é o método elaborado em [22] e aprimorado em [23, 24]. Pode-se pensar que este método funciona tal qual uma gotícula de

água ao separar a luz solar nas cores do arco-íris: a ideia básica é separar o feixe incidente em vários feixes com diferentes ângulos de propagação dependentes de ℓ , permitindo a sua discriminação pela posição transversal. Vamos entender como este método funciona.

Em primeiro lugar, realiza-se sobre o feixe incidente uma transformação de coordenadas cartesianas para log-polar. O objetivo desta transformação óptica é mapear um feixe helicoidal, cujo perfil de fase é azimutal, em ondas planas com uma inclinação dependente de ℓ . A transformação $(x, y) \mapsto (u, v)$, dada por

$$u = -a \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b} \right), \quad (2.10)$$

$$v = a \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.11)$$

onde a e b são constantes de escala, pode ser realizada através de elementos ópticos com os perfis de fase

$$\phi_1(x, y) = \frac{2\pi a}{\lambda f} \left[y \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - x \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b} \right) + x \right], \quad (2.12)$$

$$\phi_2(u, v) = -\frac{2\pi ab}{\lambda f} \exp \left\{ -\frac{u}{a} \right\} \cos \left(\frac{v}{a} \right), \quad (2.13)$$

onde λ é o comprimento de onda do feixe e f a distância focal de uma lente que realizará uma transformação de Fourier. Nas equações acima, ϕ_1 realiza de fato a transformação de coordenadas e ϕ_2 corrige aberrações de fase geradas no plano de Fourier do primeiro elemento, e estão mostradas nas figuras 11(a) e 11(b), respectivamente. A figura 11(c) ilustra uma montagem experimental para implementação do método. O SLM1 prepara o feixe de entrada com um ou mais valores de ℓ . Este feixe é direcionado ao SLM2 onde está codificada a máscara correspondente à função ϕ_1 . Após este elemento, o feixe, que possuía perfil de fase helicoidal, passa a possuir um perfil transversal.¹ Em sequência, uma lente (L1) realiza a transformada de Fourier do feixe e em seu plano focal está posicionado o SLM3 com a função ϕ_2 . Por fim, o feixe é focado em um plano de detecção (pela lente L2), onde sua intensidade pode ser registrada em uma câmera. O mais importante é que o feixe terá um gradiente de fase transversal variando em 2π para valores adjacentes de ℓ , o que significa que é possível distinguir sua carga topológica. A posição transversal do feixe, será dada por

$$t_\ell = \frac{\lambda f}{d} \ell, \quad (2.14)$$

onde d é o comprimento do feixe transformado. O resultado da transformação, como um todo, é esquematizado na figura 12(a), com os resultados teóricos e experimentais apresentados.

Neste método, há um *overlap* não desprezível entre os feixes transformados no plano focal, gerando um perda de eficiência na discriminação dos modos de OAM, como

¹ Por essa razão, o elemento ϕ_1 é chamado em [24] de *unwrapper* (desembrulhador), uma vez que sua função é transformar uma distribuição circular de intensidade em uma distribuição retangular.

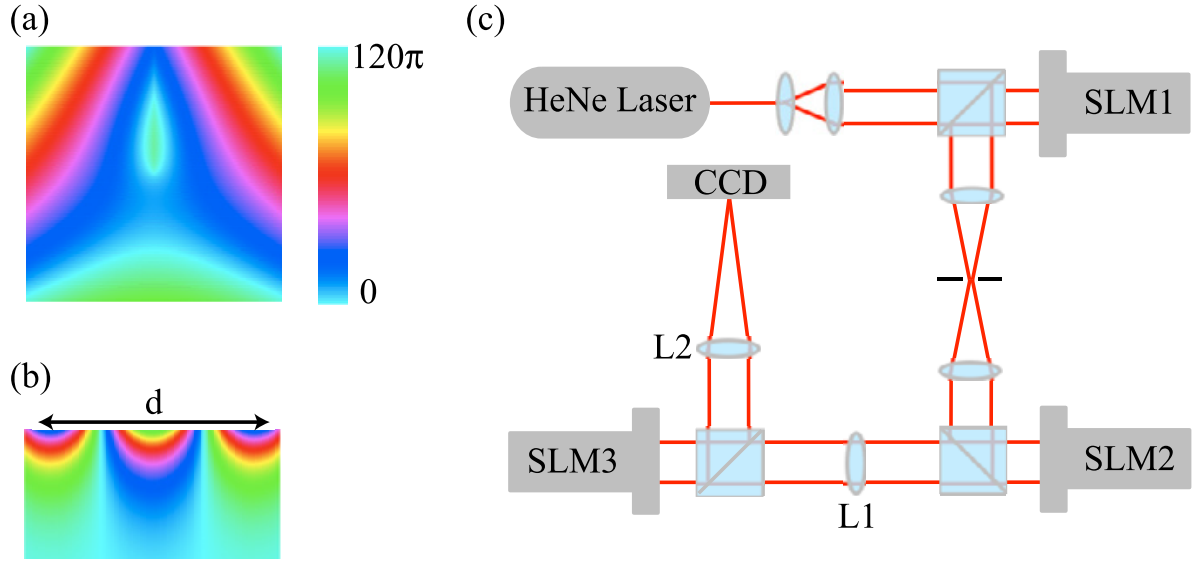


Figura 11 – Perfis de fase do elemento “desembrilhador”, ϕ_1 (a) e corretor ϕ_2 (b). (c) *Setup* experimental para implementação do método: SLM, modulador espacial de luz; L1 e L2, lentes esféricas; CCD, câmera. Fonte: Retirada de [27].

pode ser visto em 12(b). Para resolver este problema, fora proposto em [23, 24], que se gerassem cópias coerentes deste feixe através de elementos de fan-out, que são dispositivos que dividem um feixe em vários feixes idênticos. A função destas cópias é ampliar o feixe (permitindo focá-lo em pontos mais estreitos) mantendo-se os ângulos de refração originais, de forma que eles estejam mais distinguíveis no plano focal. Quanto maior o número de cópias, maior será a distinguibilidade entre as regiões com cargas topológicas adjacentes. O cálculo do campo após a focalização, considerando o número de cópias, é apresentado em [23]. A figura 12(c) mostra o resultado de aplicação do método para distinguir 7 modos OAM, de $\ell = -3$ a $\ell = 3$. No feixe marcado em azul, onde $\ell = -2$, podemos ver como o overlap com modos adjacentes foi reduzido. Assim, observa-se uma separação “quase-perfeita” na figura (c), aumentando a eficiência das medições.

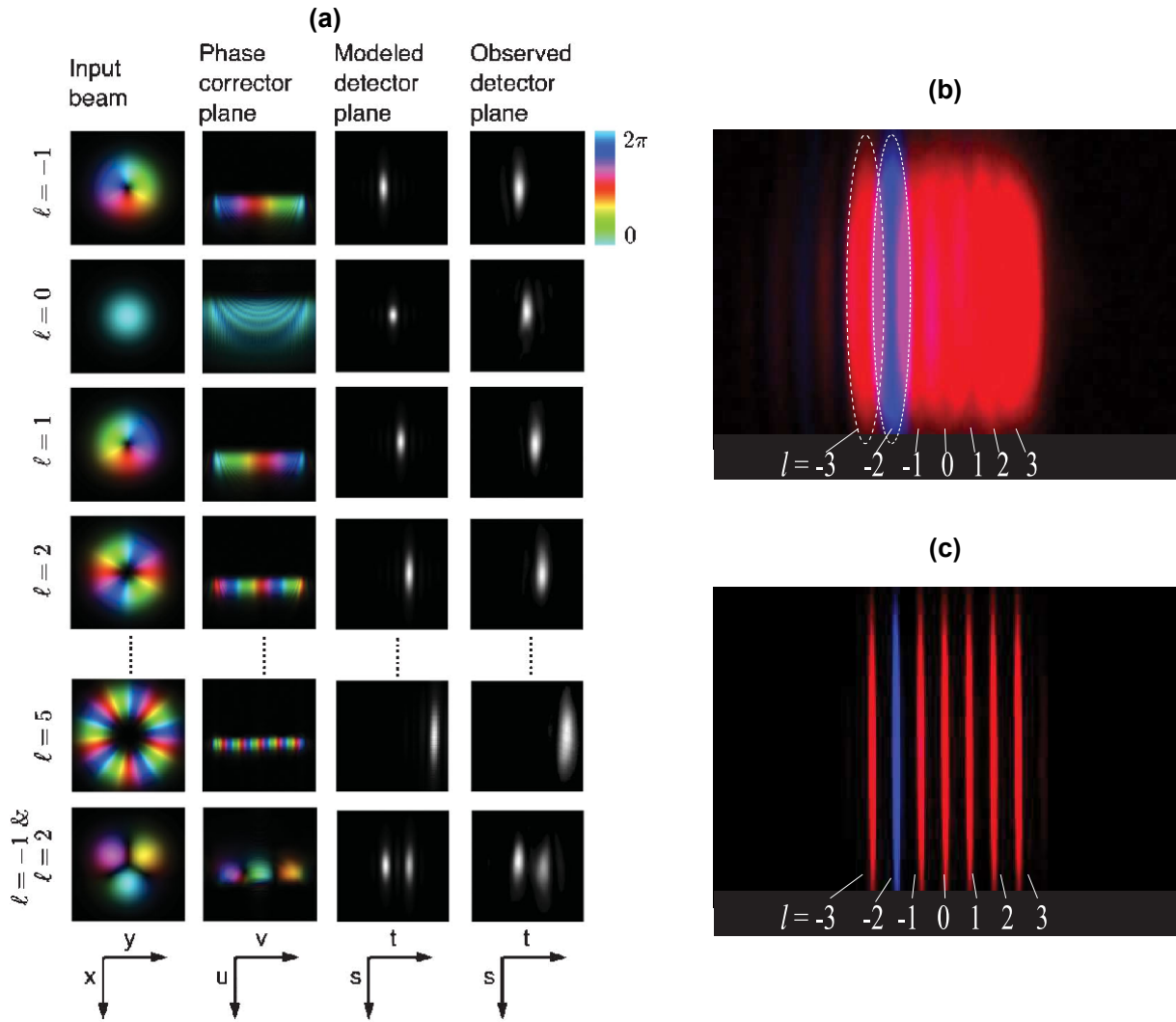


Figura 12 – (a) Transformação de um feixe com perfil de fase helicoidal para um perfil transversal linear e posições transversais do feixe transformado. Posições transversais de distintos modos de OAM antes (b) e depois (c) da utilização de cópias dos feixes. Fonte: Adaptada de [22, 24].

3 Qudits Codificados em Posição Angular e Momento Angular Orbital Fotônico

Neste capítulo, vamos mostrar como o perfil espacial de um fóton em coordenadas cilíndricas pode ser discretizado para se gerar um qudit codificado em posição angular. Em seguida, discutiremos possíveis métodos de preparação de estados puros deste sistema. Finalmente, representaremos estes estados puros na base conjugada de OAM, que será importante para a compreensão do processo de medição no método pticográfico, descrito no próximo capítulo.

3.1 Geração de Qudits Angulares

3.1.1 Discretização da Posição Angular de um Fóton

Consideremos uma fonte monocromática de fótons individuais que emite fótons com polarização espacialmente homogênea e que se propagam em uma direção que definimos como eixo z . Podemos descrever o estado destes fótons a partir da amplitude de probabilidade espacial no plano transversal, $\Psi(\mathbf{r}_\perp)$, onde $\mathbf{r}_\perp$ representa as coordenadas de posição neste plano.¹ No caso de um estado puro, teremos então

$$|\Psi\rangle = \int d\mathbf{r}_\perp \Psi(\mathbf{r}_\perp) |\mathbf{r}_\perp\rangle, \quad (3.1)$$

onde $|\mathbf{r}_\perp\rangle$ representa o estado de um fóton na posição $\mathbf{r}_\perp$ e $\int d\mathbf{r}_\perp |\Psi(\mathbf{r}_\perp)|^2 = 1$. Consideremos ainda que esta amplitude de probabilidades, em coordenadas cilíndricas, seja separável nas coordenadas radial e azimutal, isto é

$$\Psi(\mathbf{r}_\perp) = \Psi(\rho, \phi) = f(\rho)g(\phi). \quad (3.2)$$

Direcionamos os fótons dessa fonte à uma abertura cuja função transmissão é dada por

$$T(\phi) = \sum_{n=0}^{D-1} c_n \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right), \quad (3.3)$$

onde $\Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right)$ é uma função retângulo de largura α centrada em $n\beta$, e $\{c_n\}$ são coeficientes complexos que satisfazem $|c_n| \in [0, 1]$. Essa abertura consiste em um arranjo de D fendas angulares, de largura α e período β , rotuladas pelo índice n , as quais são simetricamente distribuídas (i.e., $\beta = 2\pi/D$) no plano transversal e moduladas por uma amplitude

¹ Esta função nos permite obter a probabilidade de encontrar um fóton entre as posições $\mathbf{r}_\perp$ e $\mathbf{r}_\perp + d\mathbf{r}_\perp$ no plano transversal como $|\Psi(\mathbf{r}_\perp)|^2 d\mathbf{r}_\perp$.

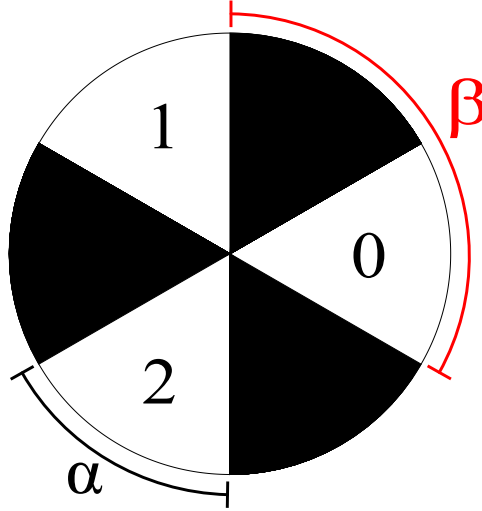


Figura 13 – Arranjo de $D = 3$ fendas angulares, com abertura $\alpha = \pi/3$ e período $\beta = 2\pi/3$.

complexa. A figura 13 ilustra um exemplo para $D = 3$ desta abertura, supondo $c_n = 1 \forall n$. A amplitude de probabilidade dos fótons que atravessam essa abertura será proporcional a $T(\phi)\Psi(\rho, \phi)$. Como a amplitude de entrada, (3.2), é separável em ρ e ϕ , e a abertura depende apenas da coordenada azimutal, podemos integrar a amplitude de saída em ρ , obtendo

$$\psi(\phi) = NT(\phi)g(\phi), \quad (3.4)$$

onde N é uma constante de normalização que absorve a integração em ρ . Dada esta amplitude de saída, podemos reescrever o estado de puro de um fóton, após a transmissão pela abertura (3.3) como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \psi(\phi) |\phi\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi N \sum_{n=0}^{D-1} c_n \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) g(\phi) |\phi\rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $|\phi\rangle$ representa o estado de um fóton na posição angular ϕ .

Supondo que a função $g(\phi)$ não varie consideravelmente dentro do intervalo de cada abertura, podemos tratá-la como constante dentro de cada fenda,² o que nos permite retirá-la da integral, nos deixando com:

$$|\psi\rangle = N \sum_{n=0}^{D-1} c_n g(n\beta) \int_{-\pi}^{\pi} \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) d\phi |\phi\rangle. \quad (3.6)$$

Definindo

$$C_n \equiv Nc_n g(n\beta), \quad (3.7)$$

² Isto pode ser realizado controlando a largura α das fendas ou o perfil espacial dos fótons gerados pela fonte.

e

$$|n\rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) |\phi\rangle, \quad (3.8)$$

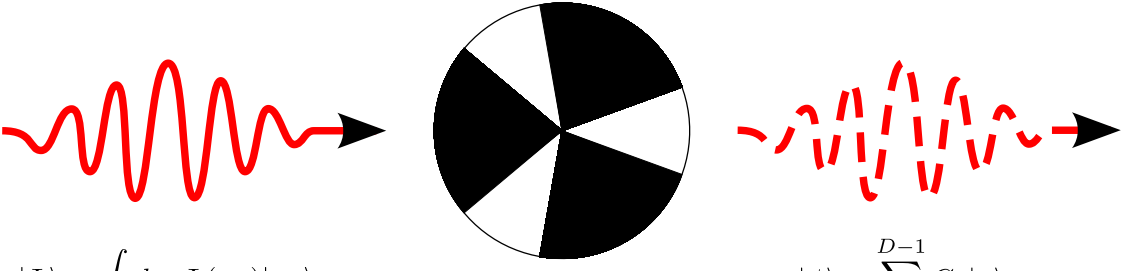
podemos reescrever o estado da equação (3.6) como:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} C_n |n\rangle. \quad (3.9)$$

O vetor $|n\rangle$, que chamaremos de estado de fenda, representa o estado de um fóton transmitido pela n -ésima fenda do arranjo de fendas angulares. A equação (3.9) nos mostra que, o estado de um fóton, inicialmente definido em variáveis contínuas [equação (3.1)], após a transmissão pela abertura $T(\phi)$ [equação (3.3)], pode ser escrito como uma soma discreta de D estados de posição angular, definidos pelas fendas, como esquematizado no quadro abaixo.

Discretização da Posição Angular de um Fóton

O estado de um fóton, definido em variáveis contínuas, é discretizado após passar por um arranjo de fendas angulares, estando agora em uma superposição de estados de caminho $|n\rangle$.



$$|\Psi\rangle = \int d\mathbf{r}_\perp \Psi(\mathbf{r}_\perp) |\mathbf{r}_\perp\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{D-1} C_n |n\rangle$$

3.1.2 O Qudit Angular

Vamos mostrar que o estado de (3.9) representa um qudit. Para isto é necessário mostrar que os estados de fenda, definidos em (3.8), são ortonormais. O produto interno entre dois estados distintos é dado por:

$$\begin{aligned} \langle n'|n\rangle &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) \Pi\left(\frac{\phi' - n'\beta}{\alpha}\right) \langle\phi'|\phi\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) \Pi\left(\frac{\phi - n'\beta}{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde utilizamos que $\langle\phi'|\phi\rangle = \delta(\phi - \phi')$. Realizando a troca de variáveis

$$\phi'' = \frac{\phi - n\beta}{\alpha},$$

podemos reescrever (3.10) como:

$$\langle n'|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi'' \Pi(\phi'') \Pi\left(\phi'' - \frac{(n' - n)\beta}{\alpha}\right).$$

A equação acima representa a convolução de duas funções retângulo, o que resulta em uma função triângulo:

$$\langle n'|n \rangle = \Lambda \left(\frac{(n' - n)\beta}{\alpha} \right).$$

Por definição

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Como $\beta > \alpha$, teremos então:

$$\langle n'|n \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } n' = n \\ 0, & \text{se } n' \neq n, \end{cases}$$

mostrando que os estados $\{|n\rangle\}$ formam uma base ortonormal, gerando um espaço D -dimensional. Portanto, o estado de um fóton transmitido por um arranjo de fendas angulares, dado pela equação (3.9), representa um qudit, que chamaremos de qudit angular, tendo a base dos estados de fenda como base computacional.

3.1.3 Preparação de Estados de Qudits Angulares

O estado de qudit angular dado pela equação (3.9) é caracterizado pelos coeficientes complexos C_n dados pela equação (3.7). Estes coeficientes, por sua vez, dependem do perfil espacial dos fótons incidentes nas posições $\phi = n\beta$ da abertura $[g(n\beta)]$, e das amplitudes complexas c_n que modulam cada fenda da função transmissão $T(\phi)$ [equação (3.3)]. Portanto, manipulando ambos elementos, podemos controlar a preparação destes qudits. No entanto, a manipulação do perfil espacial dos fótons na fonte é uma tarefa, em geral, mais complexa. Por este motivo, descreveremos a preparação dos estados apenas pela manipulação da função transmissão, considerando que o perfil de entrada $g(\phi)$ seja uma onda plana.

De forma simples, a manipulação dos coeficientes c_n pode ser implementada combinando uma máscara que modula a magnitude da amplitude de transmissão, $|c_n|$, com outra que module a fase desta amplitude, $\arg(c_n)$. A figura 14 mostra um exemplo para um arranjo de $D = 3$ fendas. Na prática, é possível realizar esta manipulação utilizando um SLM que module o perfil de fase do campo incidente. Para isto, se gera uma máscara de fase que é dada pelo produto de uma abertura binária com D fendas angulares e uma grade de difração específica aplicada em cada fenda. Este método foi demonstrado para o caso de qudits espaciais codificados em posição linear, por meio de fendas lineares, em [28], e acreditamos que seja possível estendê-lo para o caso de qudits angulares.

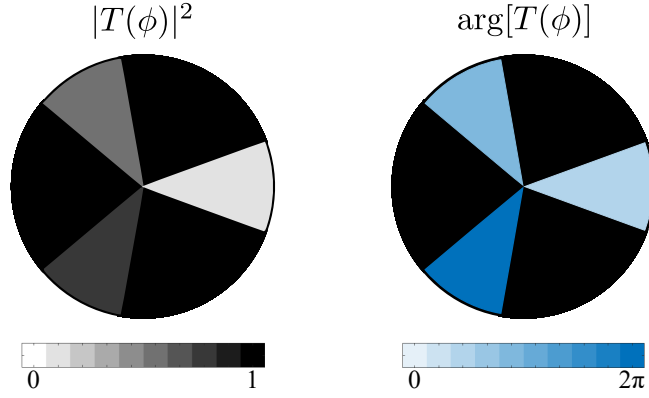


Figura 14 – Máscaras de 3 fendas angulares que implementam a função $T(\phi)$ da equação (3.3). A máscara da esquerda modula a magnitude dos coeficientes c_n e a da direita as suas fases.

3.2 Estado de Qudit Angular na Base de OAM

Conforme mencionado no capítulo anterior, a posição angular e o momento angular orbital da luz são variáveis conjugadas, ou seja, existe uma relação de Fourier entre elas. Devido à natureza periódica de ϕ , a sua variável conjugada ℓ é discreta [21, 25]. Para estados de um fóton, isto leva à definição das bases conjugadas $\{|\phi\rangle\}$ e $\{|\ell\rangle\}$, cujos vetores se relacionam da seguinte forma:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\phi} |\ell\rangle, \quad (3.11)$$

$$|\ell\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{i\ell\phi} |\phi\rangle. \quad (3.12)$$

Usando estas relações, podemos escrever o estado de fenda angular na base OAM substituindo (3.11) em (3.8):

$$|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\phi} |\ell\rangle. \quad (3.13)$$

Rearranjando a equação acima, e resolvendo a integral, teremos:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \Pi\left(\frac{\phi - n\beta}{\alpha}\right) e^{-i\ell\phi} |\ell\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{n\beta-\alpha/2}^{n\beta+\alpha/2} d\phi e^{-i\ell\phi} |\ell\rangle \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\ell n\beta} \sin(\ell\alpha/2)}{\ell\alpha/2} |\ell\rangle \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell n\beta} \text{sinc}(\ell\alpha/2) |\ell\rangle, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ é a transformada de Fourier de uma função retângulo.

Com isto, podemos escrever o estado do qudit angular em termos da base de OAM, substituindo (3.14) em (3.9):

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d_{\ell} |\ell\rangle, \quad (3.15)$$

onde

$$d_{\ell} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\ell\alpha/2) \sum_{n=0}^{D-1} C_n e^{-i\ell n\beta}. \quad (3.16)$$

Um aspecto importante do resultado acima é que o qudit angular, definido em um espaço finito D -dimensional gerado pela discretização de ϕ , continua a existir em um espaço discreto infinito-dimensional gerado pelo OAM. Porém, como veremos no próximo capítulo, as medições na base de OAM se restringem a subespaços D -dimensionais deste grau de liberdade.

Exemplos de Qudits Angulares

Vamos exemplificar os estados de qudits angulares considerando suas representações nas bases de fenda $|n\rangle$ [equação (3.9)] e de OAM [equação (3.15)]. Geramos estados D -dimensionais através de um vetor normalizado de D números complexos que representam os coeficientes C_n do estado na base de caminho. A partir dele, podemos gerar o estado correspondente na base de OAM determinando os coeficientes d_{ℓ} utilizando a equação (3.16); vamos considerar uma abertura de D fendas angulares com período $\beta = 2\pi/D$ e largura $\alpha = \pi/10$. Com estes dados vamos calcular e plotar as distribuições normalizadas de $|C_n|^2/C_{\max}$, onde $C_{\max} = \max_n\{|C_n|^2\}$, e $|d_{\ell}|^2/d_{\max}$, onde $d_{\max} = \max_{\ell}\{|d_{\ell}|^2\}/\text{sinc}^2(\ell_{\max}\alpha/2)$, e $\ell_{\max}$ é o valor de ℓ com maior amplitude de probabilidade.

Primeiramente, considerando $D = 5$, geramos três estados: o primeiro, $|\psi\rangle_a$, é um estado aleatório. Os outros dois, $|\psi\rangle_b$ e $|\psi\rangle_c$, são estados uniformes (i.e., $|C_n| = 1/\sqrt{5} \forall n$) mas com distribuições de fases diferentes: $|\psi\rangle_b$ tem uma distribuição de fase aleatória e $|\psi\rangle_c$ fases pré definidas. A figura 15 traz os resultados para estes estados, com a primeira linha mostrando as distribuições na base de caminho e a segunda linha na base de OAM. Similarmente, geramos também três estados para $D = 12$, como mostra a figura 16, com a diferença de que $|\psi\rangle_a$ manteve a distribuição de fases aleatórias mas teve os coeficientes $|C_n|$ ordenados de forma crescente. Os estados $|\psi\rangle_b$ e $|\psi\rangle_c$ seguem a mesma lógica do caso anterior.

Como vimos neste capítulo, a discretização da posição angular por um arranjo de fendas leva a um estado fotônico de superposição de caminhos, o que gera efeitos de interferência. No caso de fendas lineares, a interferência entre dois ou mais caminhos leva à um padrão de franjas de iluminação num plano distante [2]. Já no caso de fendas angulares, a interferência atua sobre a distribuição de valores de OAM, e, assim como no caso linear, o padrão de interferência é modulado por uma função sinc². A origem deste efeito pode ser

observada pela forma dos coeficientes d_ℓ na equação (3.16): a magnitude de $|d_\ell|^2$ surge do termo de interferência gerado pelo somatório e é modulada por $\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)$. Na segunda linha das figuras 15 e 16, as curvas pretas representam o pico principal deste envelope que modula a distribuição de probabilidades para o OAM.³ A forma do envelope $\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)$ é devida à difração angular de um fóton em uma fenda dada por uma função retângulo em coordenadas cilíndricas. No próximo capítulo estudaremos o resultado deste efeito na eficiência da medição na base $|\ell\rangle$.

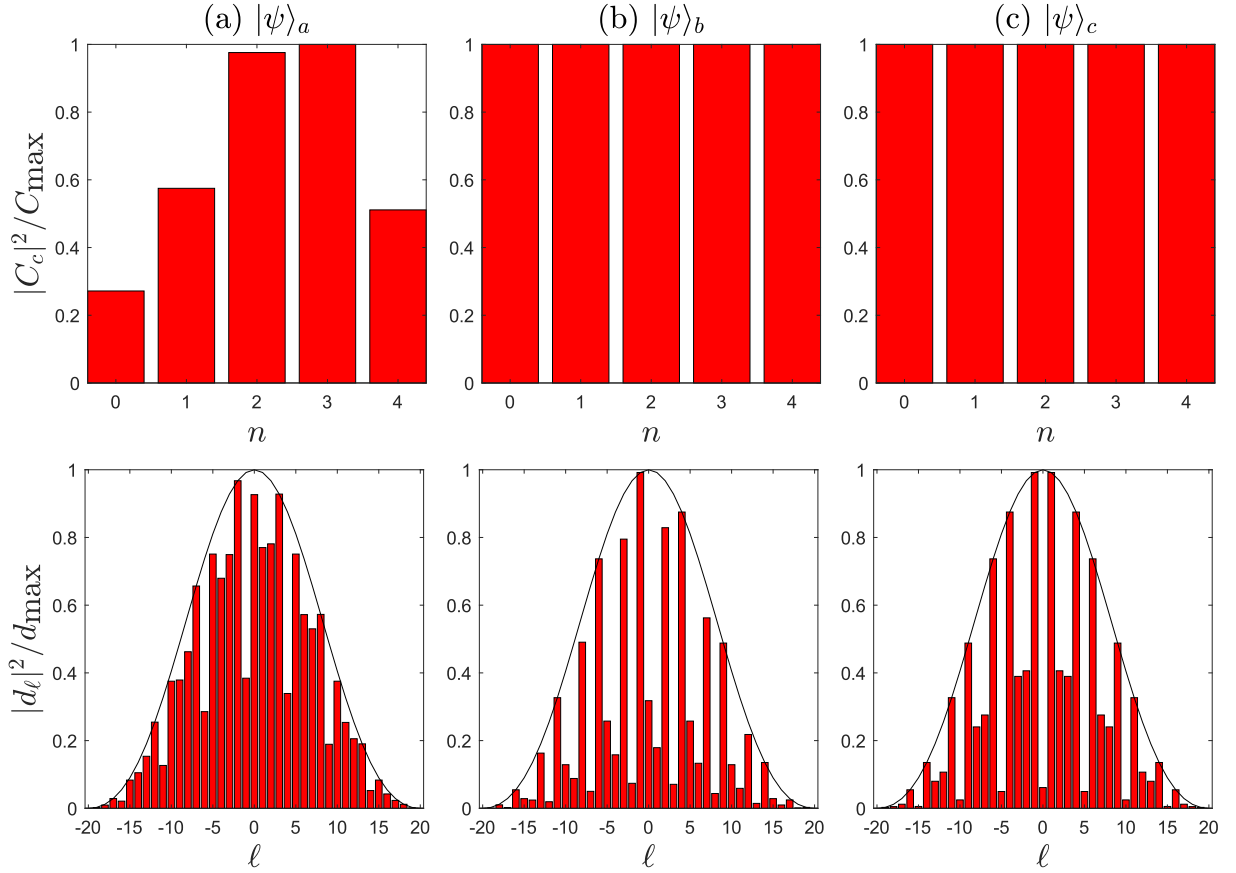


Figura 15 – Estados de qudits angulares pentadimensionais. A primeira linha mostra as distribuições correspondentes na base de caminho e, a segunda, na base de OAM, onde a curva preta é dada por $\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)$. Os estados $|\psi\rangle_{a,b,c}$ estão descritos no texto.

³ Os picos secundários da função sinc^2 foram omitidos pois não são utilizados na reconstrução pticográfica, como será visto no próximo capítulo.

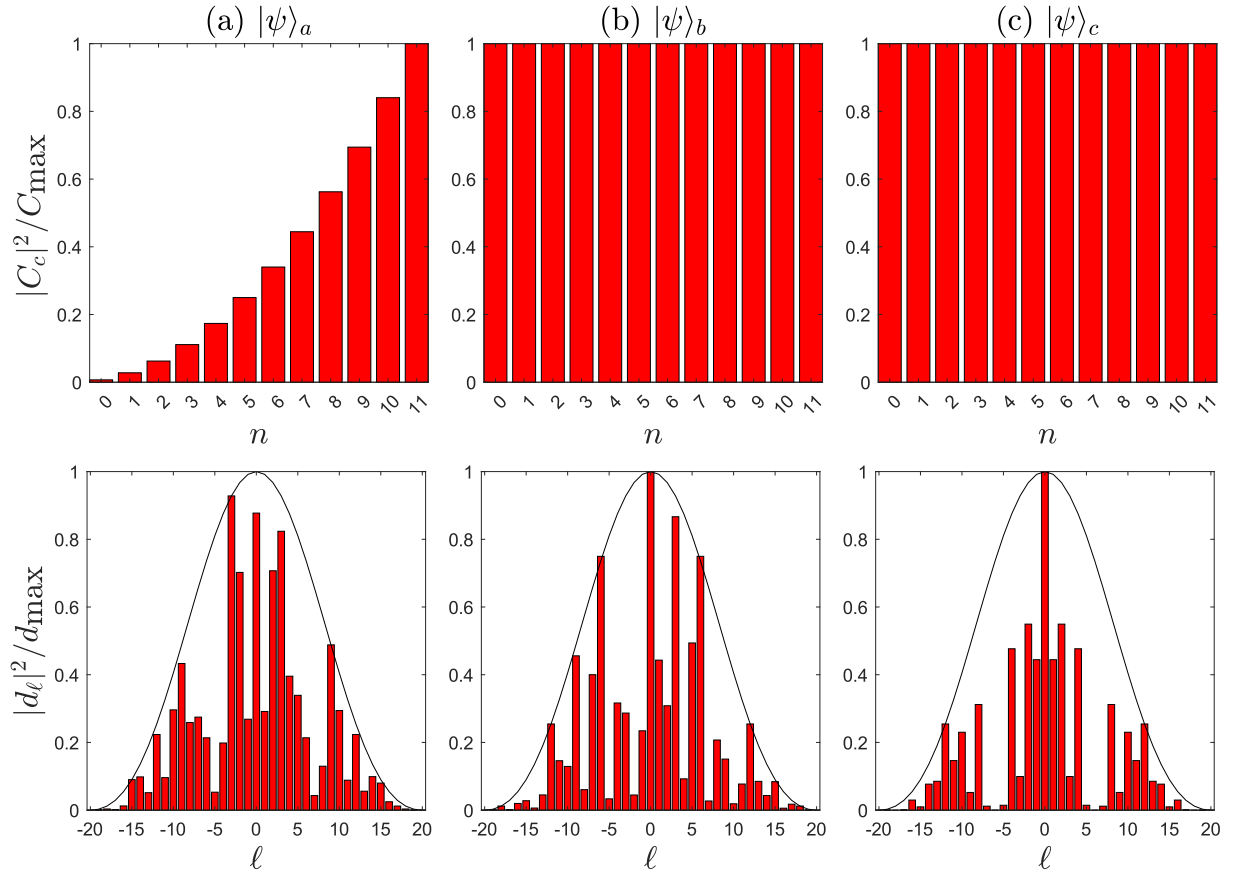


Figura 16 – Estados de qudits angulares dodecadimensionais. A primeira linha mostra as distribuições correspondentes na base de caminho e, a segunda, na base de OAM, onde a curva preta é dada por $\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)$. Os estados $|\psi\rangle_{a,b,c}$ estão descritos no texto.

4 Pticografia de Qudits Angulares

As medições do método pticográfico para reconstrução de estado quânticos puros envolvem a projeção do estado desconhecido em subespaços com algum grau de interseção entre si, seguida da medição projetiva na base gerada pela transformada de Fourier da base computacional, como resumido no diagrama abaixo. Neste capítulo vamos discutir como executar estas etapas para os qudits angulares, mostrando que a implementação dos projetores será dada por filtros espaciais de caminho e a medição projetiva final será na base de OAM. Por fim, demonstraremos a aplicação do método para estados de dimensão $D = 5$ e $D = 12$.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Projeção}} \hat{P}_j |\psi\rangle \xrightarrow{\text{Medição}} |\langle n | \mathcal{F}_D^\dagger \hat{P}_j |\psi\rangle|^2$$

4.1 Implementação dos Projetores Pticográficos

Como vimos na seção 1.2.2, o primeiro passo para a reconstrução pticográfica é a projeção do estado quântico desconhecido de um qudit, $|\psi\rangle$, em subespaços r -dimensionais com algum grau de interseção entre si. Para isto, um possível conjunto de J projetores de *rank* $r = \lceil D/2 \rceil$ e diagonais na base computacional foi definido na equação (1.5), reproduzida aqui:

$$\hat{P}_j = \sum_{k=0}^{\lceil D/2 \rceil - 1} |k \oplus s_j\rangle \langle k \oplus s_j|. \quad (4.1)$$

Esses projetores atuam como filtros binários que selecionam $\lceil D/2 \rceil$ componentes do estado e bloqueiam as demais. No caso dos qudits angulares, cuja base computacional é dada pelos modos de caminho, projetores dessa forma serão implementados simplesmente por filtros espaciais binários que bloquearão $D - \lceil D/2 \rceil$ modos. Por exemplo, para $D = 6$, a figura 17 ilustra o conjunto destes filtros espaciais, considerando duas famílias de projetores, sendo

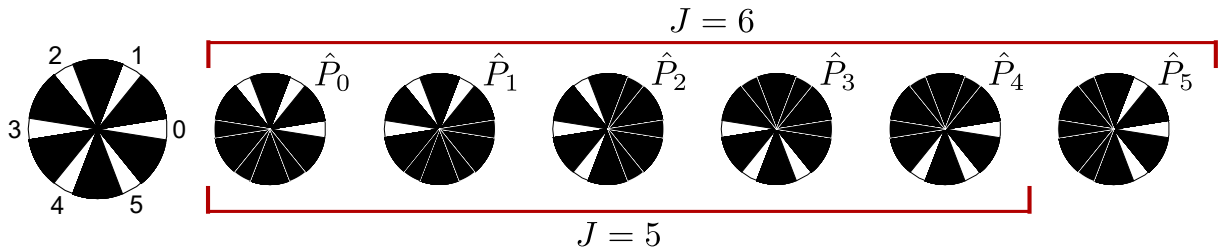


Figura 17 – Duas famílias de projetores pticográficos para um qudit angular hexadimensional, com $J = 6$ e $J = 5$ projetores de *rank* $r = 3$. A implementação dos projetores se dá pelo uso de filtros espaciais, que bloqueiam caminhos e permitem a passagem da luz por apenas r fendas.

uma com $J = 6$ e outra com $J = 5$ projetores de *rank* $r = 3$ e componentes do vetor salto, $\vec{s}_J$, dadas por $s_j = j \lfloor \frac{D}{J} \rfloor$.

4.2 Medição na Base de Fourier dos Estados de Fenda Angular

Após cada projeção do estado desconhecido $|\psi\rangle$ em um subespaço $\lceil D/2 \rceil$ -dimensional, por meio da qual obtemos $|\psi_j\rangle = \hat{P}_j |\psi\rangle$, a reconstrução pticográfica prossegue com a medição em uma única base gerada pela QFT da base computacional. Nesta seção vamos determinar a transformada da base de fendas angulares, primeiramente descrita em termos dos modos de caminho e, depois, em termos dos modos OAM, por meio do qual realizaremos as medições e obteremos nossos conjuntos de dados pticográficos.

4.2.1 QFT dos Estados de Fenda Angular

A QFT é uma operação unitária e, na base computacional, é descrita matematicamente pelo operador, que atua em um espaço D -dimensional, dado por

$$\hat{\mathcal{F}}_D = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{j=0}^{D-1} \sum_{k=0}^{D-1} e^{2\pi i j k / D} |k\rangle \langle j|. \quad (4.2)$$

A QFT dos estados de fenda $|n\rangle$ [equação (3.8)], será então

$$\hat{\mathcal{F}}_D |n\rangle \equiv |\mu_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{D-1} e^{i n k \beta} |k\rangle, \quad (4.3)$$

onde $\beta = 2\pi/D$ é o período do arranjo de fendas angulares. Como os estados de fenda $\{|n\rangle\}$ formam uma base ortonormal para o espaço do qudit angular, o conjunto $\{|\mu_n\rangle\}$ também formará uma base ortonormal (conjugada) para este espaço, a qual vamos nos referir como base de Fourier. Podemos ver que a transformada de um estado de fenda $|n\rangle$ atua criando uma superposição uniforme destes estados com uma fase relativa entre eles.

4.2.2 Representação da Base de Fourier na Base de OAM

Visando implementar a medição projetiva dos estados $|\psi_j\rangle$ na base $\{|\mu_n\rangle\}$ e assim obter o conjunto de dados pticográficos [veja equação (1.8)], vamos reescrever o estado (4.3) na representação de OAM. Dessa forma, mostraremos que esta etapa pode ser executada através de uma medição projetiva em uma base formada por um conjunto de D estados $|\ell\rangle$. Substituindo (3.14) em (4.3), ficamos com:

$$|\mu_n\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi D}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\ell\alpha}{2}\right) \left[\sum_{k=0}^{D-1} e^{i k \beta (n-\ell)} \right] |\ell\rangle \quad (4.4)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi D}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\ell\alpha/2) \frac{\sin(D\beta(n-\ell)/2)}{\sin(\beta(n-\ell)/2)} e^{i(D-1)\beta(n-\ell)/2} |\ell\rangle. \quad (4.5)$$

A passagem de (4.4) a (4.5) é demonstrada no apêndice A. A expressão do estado na forma da equação (4.5) mostra mais explicitamente o efeito de interferência que ocorre na distribuição dos modos de OAM, conforme discutido no capítulo anterior.

O ponto mais interessante de escrever a base $\{|\mu_n\rangle\}$ na representação de OAM, é que a QFT de cada fenda gera valores de ℓ específicos, distintos das demais fendas, resultado da ortogonalidade dos estados. Isto é demonstrado matematicamente no apêndice A fazendo o cálculo de $\langle\mu_m|\mu_n\rangle$ a partir de (4.4). Aqui, é mais instrutivo considerar exemplos específicos para ilustrar este ponto. Usando a equação (4.5), consideremos a seguinte função,

$$A_\ell \equiv \frac{|\langle\ell|\mu_n\rangle|^2}{|\langle 0|\mu_0\rangle|^2} = \frac{1}{D^2} \text{sinc}^2(\ell\alpha/2) \frac{\sin^2(D\beta(n-\ell)/2)}{\sin^2(\beta(n-\ell)/2)}, \quad (4.6)$$

que representa a distribuição de probabilidades associadas a cada modo ℓ do estado $|\mu_n\rangle$, normalizada pelo seu valor máximo. Considerando $D = 5$ fendas angulares com abertura $\alpha = \pi/20$, as figuras 18(a)-18(e) apresentam esta distribuição para $\{|\mu_n\rangle\}_{n=0}^4$; as inserções de cada *plot* destaca a fenda angular sobre a qual a QFT foi aplicada e as linhas vermelhas representam a função $\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)$. Para cada estado $|\mu_n\rangle$ medido na base $\{|\ell\rangle\}$, podemos observar que

$$A_\ell \neq 0 \iff \ell = n \pm xD, \quad (4.7)$$

onde x é um número natural. Portanto, existe uma correspondência unívoca entre um valor de ℓ e um estado $|\mu_n\rangle$. Já a figura 18(f) mostra a sobreposição dos gráficos anteriores, as inserções destacam as fendas sobre as quais se aplicou a QFT.

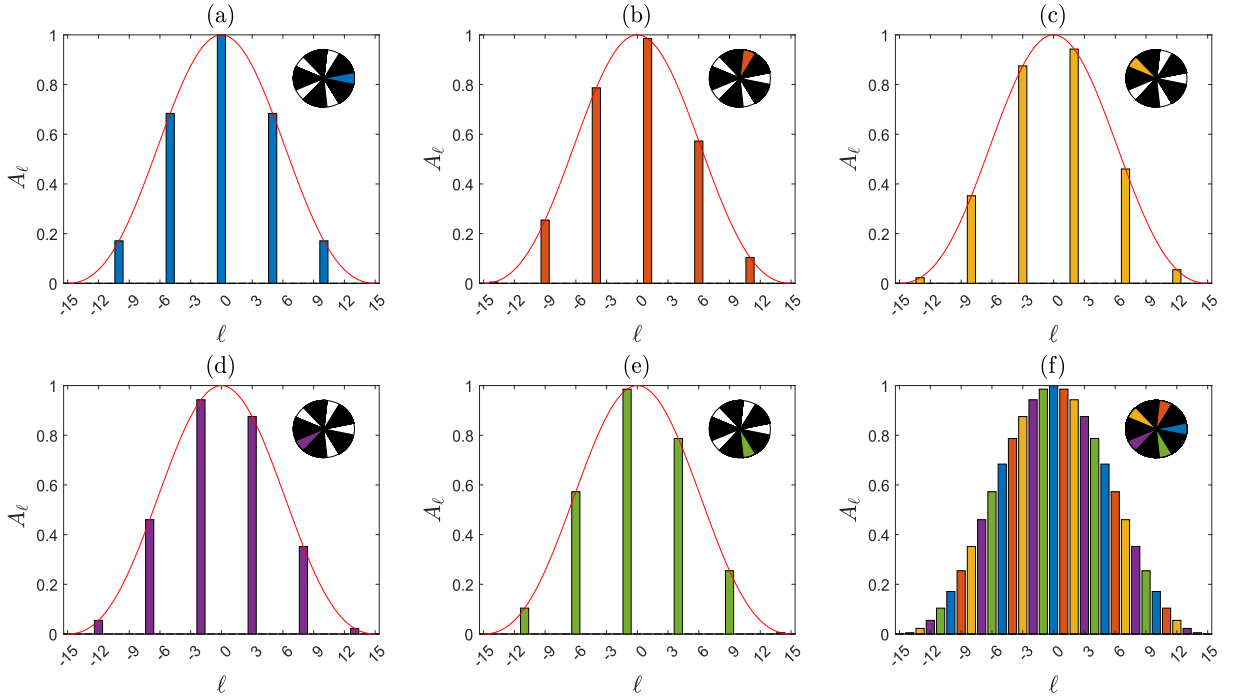


Figura 18 – Distribuição normalizada de probabilidades para valores de ℓ associados ao estado (a) $|\mu_0\rangle$, (b) $|\mu_1\rangle$, (c) $|\mu_2\rangle$, (d) $|\mu_3\rangle$ e (e) $|\mu_4\rangle$ de um arranjo de $D = 5$ fendas. A imagem (f) mostra a sobreposição dos gráficos anteriores. As inserções destacam as fendas sobre as quais se aplicou a QFT.

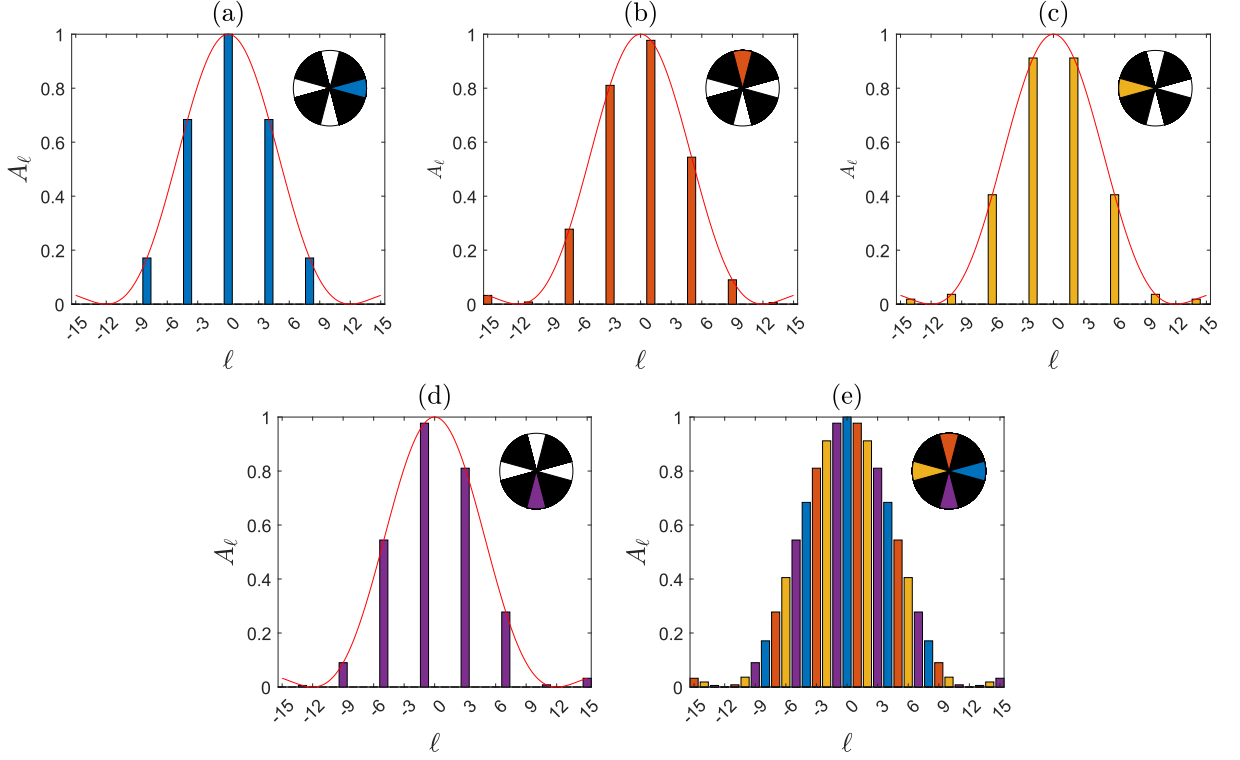


Figura 19 – Distribuição normalizada de probabilidades para valores de ℓ associados ao estado (a) $|\mu_0\rangle$, (b) $|\mu_1\rangle$, (c) $|\mu_2\rangle$ e (d) $|\mu_3\rangle$ de um arranjo de $D = 4$ fendas. A imagem (e) mostra a sobreposição dos gráficos anteriores. As inserções destacam as fendas sobre as quais se aplicou a QFT.

e permite que se verifique que não há *overlaps* entre as probabilidades. A figura 19 mostra o mesmo para um estado tetradimensional.

4.2.3 Medição na Base de Fourier Através da Medição na Base de OAM

Como mostramos na subseção anterior, na base de Fourier dos estados de fenda, as distribuições de probabilidades para se encontrar valores de OAM não só são distintas mas também são exclusivas. Com isso, vimos que

$$|\ell\rangle \rightarrow |\mu_n\rangle, \quad (4.8)$$

ou seja, cada valor de ℓ de um qudit D -dimensional está associado a apenas um estado da base de Fourier. Dessa forma, para medir nessa base, é suficiente escolher D valores de ℓ a serem medidos, que corresponderão aos D estados $|\mu_n\rangle$. Ao fazermos isto, estamos selecionando uma base de medição em um subespaço D -dimensional contido no espaço infinito-dimensional da base dos modos de OAM.

Para ilustrar de forma concreta este processo, vamos voltar aos exemplos de $D = 5$ e $D = 4$ discutidos acima. Para $D = 5$, a figura 18(a) a 18(e) mostram os possíveis valores de ℓ que poderiam ser associados aos estados $|\mu_n\rangle$. Uma escolha trivial seriam os valores de $\ell = 0$ até $\ell = 4$, onde medir o valor $\ell = 0$ corresponde a pós-selecionar o estado $|\mu_0\rangle$.

Já o valor $\ell = 1$, ao estado $|\mu_1\rangle$, $\ell = 2$ a $|\mu_2\rangle$, e assim por diante. Porém, devido a uma questão de eficiência, que discutiremos abaixo, o mais adequado é uma escolha de valores em torno do ponto central: neste caso, os valores $\ell = -2, -1, 0, 1, 2$ que correspondem aos estados $|\mu_3\rangle, |\mu_4\rangle, |\mu_0\rangle, |\mu_1\rangle$ e $|\mu_2\rangle$, respectivamente. De forma similar, para $D = 4$, figura 19, poderíamos escolher os valores $\ell = -1, 0, 1, 2$, que correspondem aos estados $|\mu_3\rangle, |\mu_0\rangle, |\mu_1\rangle$ e $|\mu_2\rangle$, ou $\ell = -2, -1, 0, 1$, que correspondem a $|\mu_2\rangle, |\mu_3\rangle, |\mu_0\rangle$ e $|\mu_1\rangle$. Neste caso, com um número par de fendas, os valores de $\ell = \pm 2$ correspondem ao mesmo estado $|\mu_2\rangle$, ficando a critério do usuário a escolha de um deles. O quadro abaixo generaliza os valores a serem medidos para qualquer D :

Seleção de Valores de ℓ

Seja $\vec{n} = (0, 1, \dots, D-1)$ o vetor com os valores de n e j_n o índice das posições de cada elemento. A seleção dos valores de ℓ depende da paridade de D .

- **D ímpar:**

Os valores selecionados serão $-\lfloor D/2 \rfloor \leq \ell \leq \lfloor D/2 \rfloor$, que corresponderão, respectivamente, aos valores de n com a posição permutada no vetor $\vec{n}$ por $j_n \rightarrow j_n \oplus \lfloor D/2 \rfloor$, onde $\oplus$ representa adição módulo D .

Exemplo: $D = 5 \Rightarrow \ell = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \vec{n} \rightarrow \vec{n}' = (3, 4, 0, 1, 2)$.

- **D par:**

Os valores selecionados serão $-\lfloor D/2 \rfloor \leq \ell \leq \lfloor D/2 \rfloor - 1$, que corresponderão, respectivamente, aos valores de n com a posição permutada no vetor $\vec{n}$ por $j_n \rightarrow j_n \oplus \lfloor D/2 \rfloor$, onde $\oplus$ representa adição módulo D .

Exemplo: $D = 4 \Rightarrow \ell = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \vec{n} \rightarrow \vec{n}' = (2, 3, 0, 1)$.

Compensação da Medição na Base de Fourier Devido à Difração Angular

Ao implementarmos experimentalmente a medição na base de Fourier sobre os estados de qudit angular após as projeções, $|\psi_j\rangle$, obtemos uma contagem de fótons $C \propto |\langle \ell | \psi_j \rangle|^2$. As contagens, porém, referentes aos modos de OAM com $\ell \neq 0$, serão reduzidas pelo efeito de difração angular (típico formato de sino da função sinc^2). Com isso, se faz necessário realizar a seguinte compensação no pós-processamento:

$$C_{\text{comp}} \propto \frac{|\langle \ell | \psi_j \rangle|^2}{\text{sinc}^2(\ell\alpha/2)}. \quad (4.9)$$

Como podemos observar, a compensação depende da aberura α das fendas. A figura 20 esquematiza como esta compensação se torna cada vez menor à medida que α diminui, o que é representado pela distância entre as linhas tracejadas que diminui progressivamente de 20(a) até 20(c). As inserções mostram a largura das fendas de um arranjo para $D = 4$.

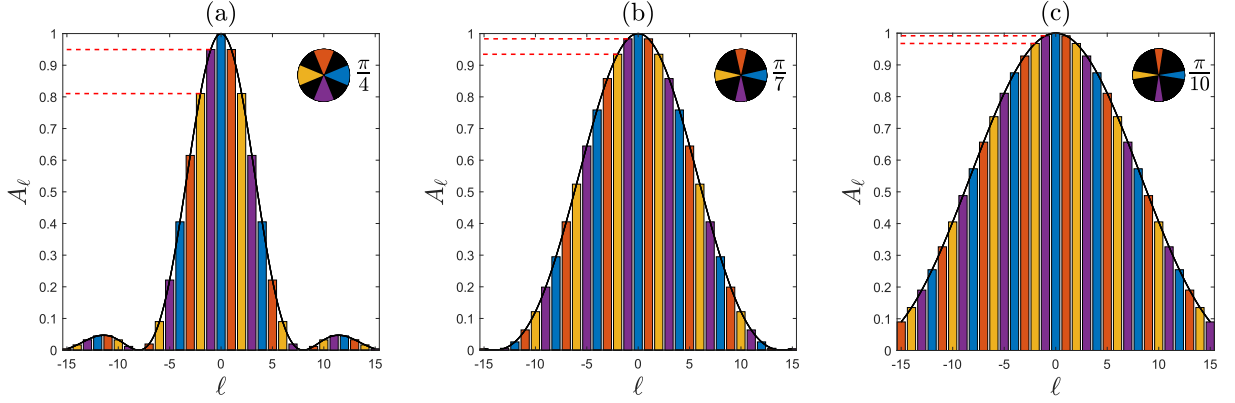


Figura 20 – Diferentes distribuições de ℓ para $D = 4$ fendas. Quanto menor a abertura α das fendas, menor a compensação necessária, o que é representado pela distância entre as linhas tracejadas.

4.3 Simulação do Método Pticográfico para Qudits Angulares

Para ilustrar o método pticográfico para qudits angulares, vamos aplicá-lo à reconstrução dos estados $|\psi\rangle_a$, $|\psi\rangle_b$ e $|\psi\rangle_c$ em $D = 5$ e $D = 12$, mostrados no capítulo anterior (figuras 15 e 16, respectivamente). Primeiramente, para $D = 5$, consideramos um conjunto de 5 projetores da forma (4.1), com $s_j = 1 \forall j$. Os filtros espaciais binários que implementam estes projetores estão ilustrados no topo da figura 21. A primeira coluna desta figura reproduz os gráficos de 15, mostrando a distribuição normalizada de contagens nas bases $\{|n\rangle\}$ (primeira linha) e $\{|\ell\rangle\}$ (segunda linha) para cada estado de entrada. As demais colunas mostram as mesmas distribuições para os estados após a projeção pticográfica, $|\psi_j\rangle_{a,b,c}$. Podemos ver que a aplicação de cada filtro binário bloqueia completamente a transmissão de algumas fendas, alterando os estados de saída. Isto se reflete na interferência que define a distribuição dos modos de OAM. Nos gráficos das distribuições de momento, as contagens marcadas em azul correspondem aos valores de ℓ selecionados para a coleta dos dados pticográficos. Os valores destas contagens específicas, compensados de acordo com a equação (4.9), juntamente com a informação dos projetores, foram fornecidos ao algoritmo PIE descrito no quadro correspondente da seção 1.2.2. Para rodar o algoritmo, utilizamos o parâmetro $\eta = 1,5$ e um número fixo de 10 iterações PIE. Além de calcular a distância do traço $\mathcal{D}$ [equação (1.9)], para averiguar a convergência do algoritmo, calculamos também a fidelidade $\mathcal{F}$ entre o estado a ser reconstruído ($|\psi\rangle_{a,b,c}$) e a estimativa normalizada $|\phi_{\text{PIE}}\rangle$ fornecida a cada iteração, que é definida como:

$$\mathcal{F} = |\langle \phi_{\text{PIE}} | \psi \rangle|^2. \quad (4.10)$$

Os resultados encontram-se na figura 22. Observamos que as reconstruções foram bem sucedidas. Em geral, 5 iterações foram necessárias para a convergência do algoritmo, com a fidelidade atingindo seu valor máximo $\mathcal{F} = 1$.

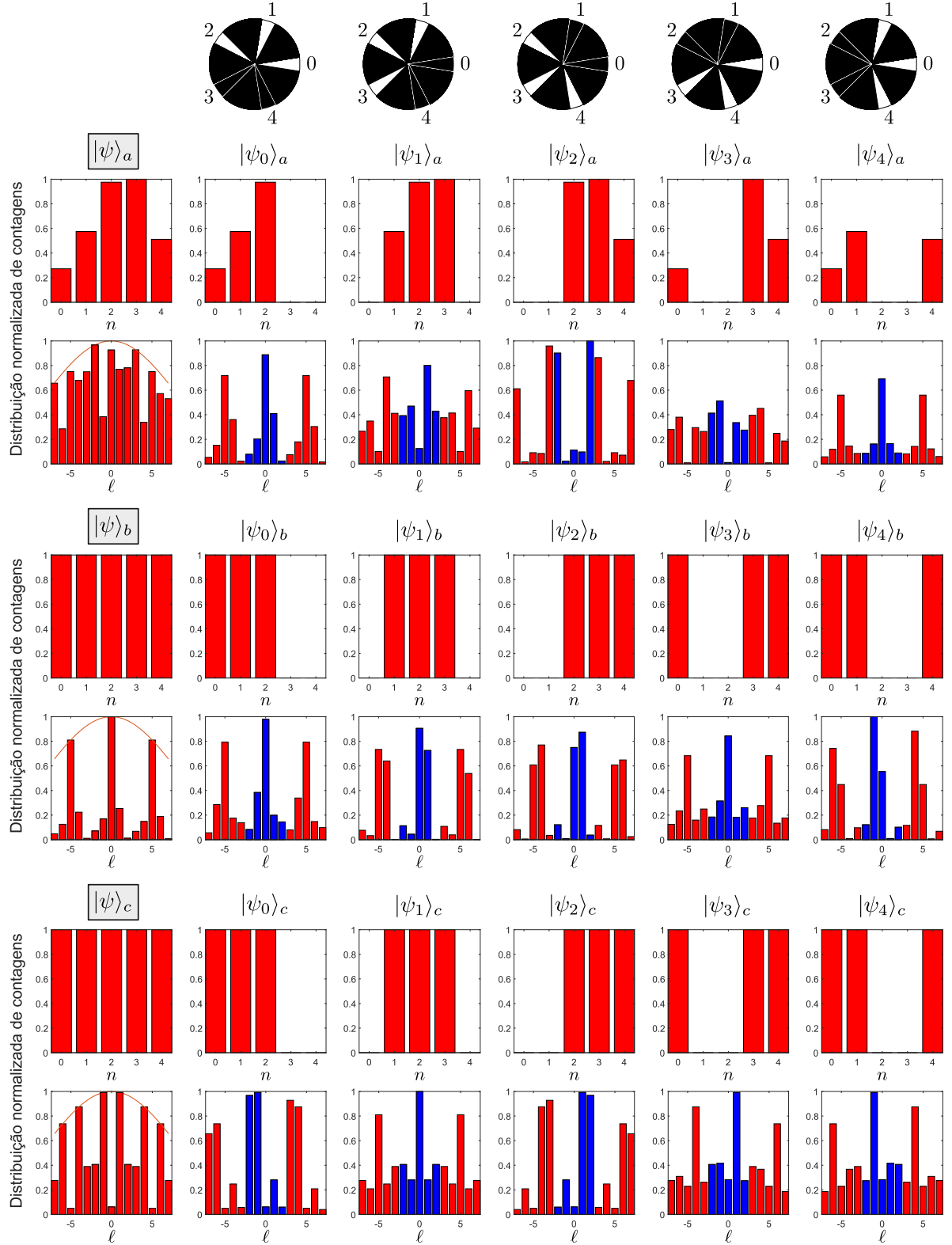


Figura 21 – Simulações para reconstrução pticográfica dos estados de qudits angulares pentadimensionais $|\psi\rangle_{a,b,c}$ (veja seção 3.2). As inserções mostram os filtros espaciais que implementam os projetores $\{\hat{P}_j\}$. A primeira coluna mostra as distribuições nas bases $\{|n\rangle\}$ e $\{|\ell\rangle\}$ para cada estado; as demais colunas mostram essas mesmas distribuições para o estado após a projeção ($|\psi_j\rangle_{a,b,c}$).

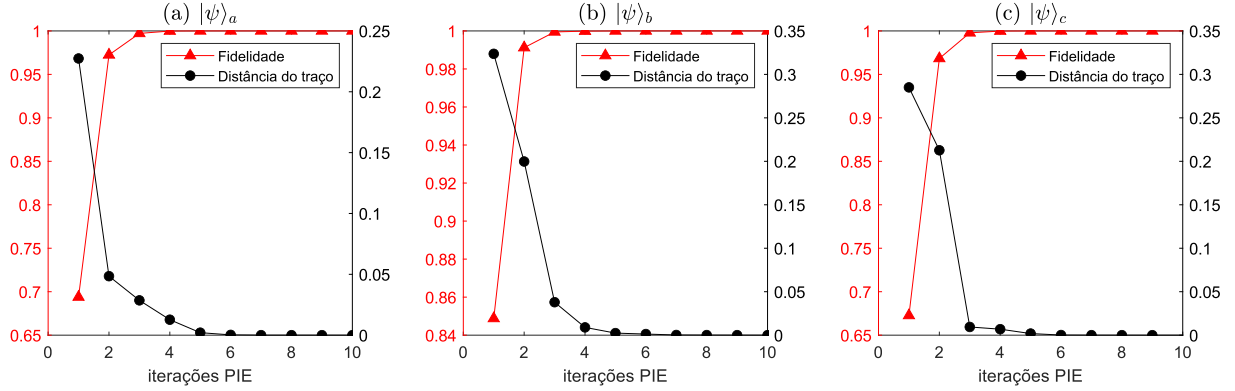


Figura 22 – Gráficos de fidelidade e distância do traço para a reconstrução de três estados pentadimensionais em função das iterações do algoritmo PIE.

Para os estados $|\psi\rangle_{a,b,c}$ com $D = 12$, fizemos o mesmo processo descrito acima. A figura 23 mostra os resultados, sendo que na primeira linha foram utilizados $J = 12$ projetores, também da forma (4.1), com $s_j = 1 \forall j$. Já na segunda linha, utilizamos $J = 5$ projetores da mesma forma, porém com $s_j = 2j$. Com o menor número de projetores, teremos um menor conjunto de dados pticográficos, o que exige um número maior de iterações PIE para alcançar a convergência e a fidelidade almejada. As reconstruções foram, novamente, bem sucedida.

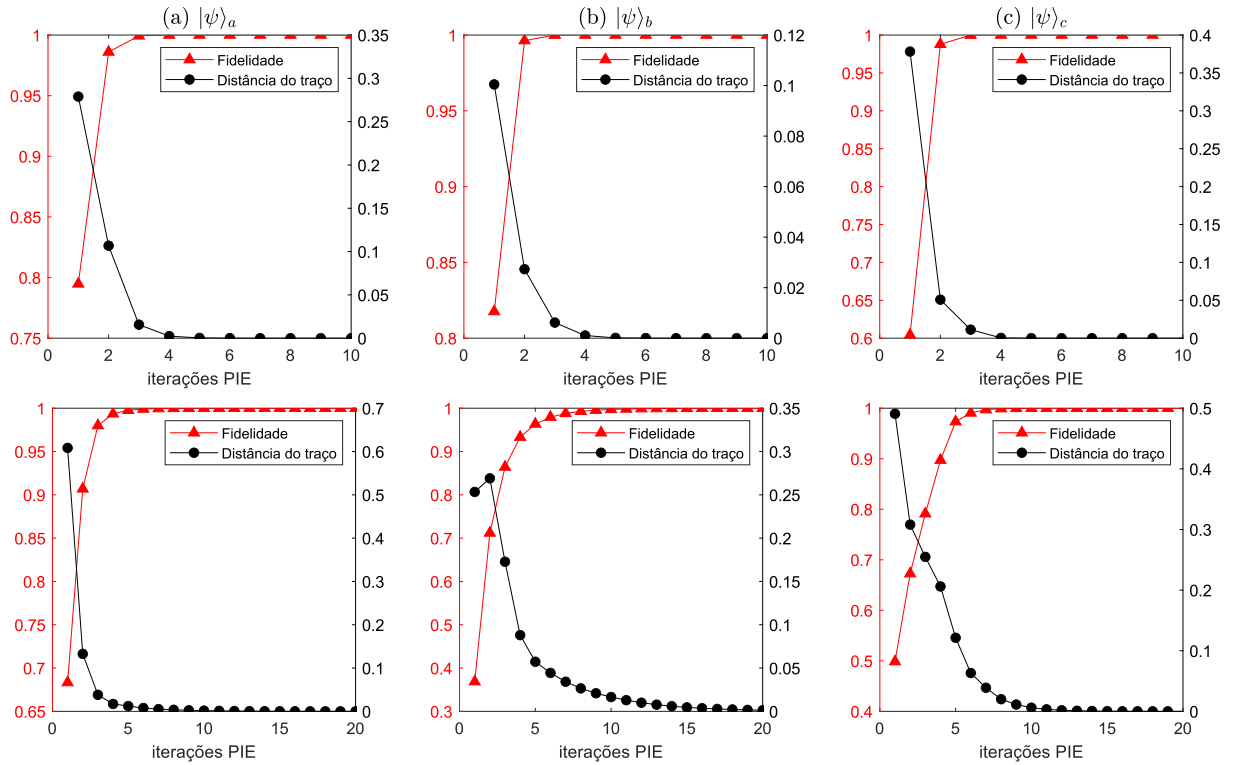


Figura 23 – Gráficos de fidelidade e distância do traço para a reconstrução de três estados dodecadimensionais em função das iterações do algoritmo PIE. Na linha de cima (baixo) foram utilizados $J = 12$ ($J = 5$) projetores pticográficos.

5 Conclusões

Neste trabalho propusemos a aplicação do método de reconstrução pticográfica de estados quânticos puros a estados de qudits codificados em posição angular e momento angular orbital de fótons. Revisamos a metodologia para caracterização de estados desconhecidos por meio da pticografia quântica e estudamos o OAM fotônico, incluindo modos Laguerre-Gaussianos e formas de medi-los. A partir disto, estudamos como se gerar um *qudit angular* através de um arranjo de D fendas angulares. Descrevemos matematicamente este qudit por meio dos estados de fendas $|n\rangle$, tanto na base de posição como na base de OAM.

Com nosso qudit angular bem definido, demonstramos a implementação sobre eles dos projetores pticográficos de rank r , $\{\hat{P}_j\}_{j=0}^{J-1}$, que, para nosso caso, serão simples filtros espaciais binários, permitindo a passagem de luz através de apenas r fendas. Em seguida, definimos o que chamamos de base de Fourier, $\{|\mu_n\rangle\}_{n=0}^{D-1}$, que fora gerada pela QFT dos estados de fenda. Esta base tem a peculiaridade de apresentar valores distintos de ℓ para a QFT de cada fenda, de forma a permitir uma correspondência direta entre um valor de ℓ medido e um estado $|\mu_n\rangle$. Portanto, a medição para a coleta dos dados pticográficos será realizada pela medição do OAM, ou seja, pós selecionaremos o fóton medido na base $|\ell\rangle$, o que, por sua vez, é equivalente a projetar o estado $\hat{P}_j |\psi\rangle$ na base de Fourier. Mostramos também que, embora na base de OAM o qudit angular esteja descrito em um espaço infinito-dimensional, é suficiente escolhermos D valores de ℓ a serem medidos para a caracterização do estado, voltando a um espaço D -dimensional. Por uma questão de eficiência na medição, entretanto, existem valores melhores a serem selecionados, que são aqueles em torno do valor central $\ell = 0$.

Por fim, simulamos a aplicação do método pticográfico para reconstruir estados de qudits angulares. Mostramos o efeito que os projetores $\hat{P}_j$ exercem sobre a distribuição de OAM, e, com os valores medidos de $|\langle \ell | \hat{P}_j | \psi \rangle|^2$ e a informação dos projetores, alimentamos o algoritmo PIE, que conseguiu convergir em poucas iterações. Em todos os casos a fidelidade atingiu o valor máximo $\mathcal{F} = 1$. Encontramos resultados excelentes, como era esperado, provando que a reconstrução pticográfica de estados quânticos puros pode ser aplicada para qudits angulares.

Ao longo do trabalho, mostramos maneiras viáveis de se realizar as etapas necessárias para a pticografia de qudits angulares:

- **Preparação de estados:** A preparação dos qudits poderia ser realizada por meio de um SLM de fase em um método análogo a [28], que foi desenvolvido para qudits lineares. Em nosso caso, a máscara aplicada ao SLM seria dada pela combinação de

um arranjo de D fendas angulares e grades de difração específicas para cada fenda, que modulariam a amplitude e fase de cada uma delas, gerando uma superposição coerente destes modos.

- **Aplicação dos projetores pticográficos:** Os projetores poderiam ser implementados através de simples filtros espaciais binários físicos com $D - \lceil D/2 \rceil$ fendas bloqueadas que seriam rotacionados para cada aplicação do projetor $\hat{P}_j$. Poderíamos também implementar estes filtros espaciais de forma dinâmica através de um SLM que module a amplitude da onda incidente. Em ambos os casos projetaríamos a imagem do estado preparado no plano do filtro espacial.
- **Medição na base de Fourier:** A medição do OAM fotônico pode ser realizada por meio de diversos métodos, a critério do usuário. Neste trabalho descrevemos duas alternativas. A primeira, mais simples, consiste num holograma de garfo [27], que poderia ser implementada na mesma máscara dos projetores $\hat{P}_j$ ou realizada separadamente. Porém, permite a medição de apenas um valor de ℓ por vez. A segunda alternativa é o método de reformatação de imagem [22], que, apesar de mais complexo, permite a detecção de vários valores de ℓ simultâneos.

Assim, demonstramos a viabilidade experimental da reconstrução pticográfica de qudits codificados em posição angular e OAM de fótons. Esperamos ver, em breve, a aplicação em laboratório deste recente método de caracterização de estados quânticos puros.

Referências

- [1] Fernandes, M. F. e L. Neves: *Ptychography of pure quantum states*. Scientific Reports, 9(16066), 2019. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-52415-y>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 14 e 16.
- [2] Solís-Prosser, M. A.: *Estudo de la medición de qubits y qudits espaciales codificados en fotones individuales y aplicaciones*, 2011. <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/5807>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 34.
- [3] Barnett, S.: *Quantum Information*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2009, ISBN 9780198527626. <https://books.google.com.br/books?id=A2k4HH2tFR8C>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 16.
- [4] Bennett, C. H., G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters: *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Lett., 70:1895–1899, 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>. Citado na página 12.
- [5] Cozzolino, D., B. Da Lio, D. Bacco e L. K. Oxenløwe: *High-Dimensional Quantum Communication: Benefits, Progress, and Future Challenges*. Advanced Quantum Technologies, 2:1900038, 2019. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qute.201900038>. Citado na página 12.
- [6] Erhard, M., R. Fickler, M. Krenn e A. Zeilinger: *Twisted Photons: New Quantum Perspectives in High Dimensions*. Light: Science & Applications, 7:17146, 2017. <https://rdcu.be/dHUGm>. Citado na página 12.
- [7] Altepeter, J. B., D. F.V. James e P. G. Kwiat: *4 Qubit Quantum State Tomography*, páginas 113–145. Springer Berlin Heidelberg, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-540-44481-7_4. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- [8] Paris, M. e J. Rehacek: *Quantum State Estimation*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2004, ISBN 9783540223290. <https://books.google.com.br/books?id=Grr25VFtGgUC>. Citado na página 13.
- [9] Flammia, S. T., A. Silberfarb e C. M. Caves: *Minimal Informationally Complete Measurements for Pure States*. Foundations of Physics, 35:1985–2006, 2005. <https://doi.org/10.1007/s10701-005-8658-z>. Citado na página 13.
- [10] Stefano, Q. P., L. Rebón, S. Ledesma e C. Iemmi: *Determination of any pure spatial qudits from a minimum number of measurements by phase-stepping interferometry*.

- Phys. Rev. A, 96:062328, 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.062328>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 16, 18 e 22.
- [11] Goyeneche, D., G. Cañas, S. Etcheverry, E. S. Gómez, G. B. Xavier, G. Lima e A. Delgado: *Five Measurement Bases Determine Pure Quantum States on Any Dimension*. Phys. Rev. Lett., 115:090401, 2015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.090401>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 16, 18 e 22.
- [12] Carmeli, C., T. Heinosaari, M. Kech, J. Schultz e A. Toigo: *Stable pure state quantum tomography from five orthonormal bases*. Europhysics Letters, 115:30001, 2016. <https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/115/30001>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 16 e 18.
- [13] Faulkner, H. M. L. e J. M. Rodenburg: *Movable Aperture Lensless Transmission Microscopy: A Novel Phase Retrieval Algorithm*. Phys. Rev. Lett., 93:023903, 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.023903>. Citado na página 14.
- [14] Goyeneche, D. M. e A. C. de la Torre: *State determination: An iterative algorithm*. Phys. Rev. A, 77:042116, 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.042116>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- [15] Fernandes, M. F. e L. Neves M. A. Solís-Prosser: *Ptychographic reconstruction of pure quantum states*. Optics Letters, 45:6002, 2020. <https://doi.org/10.1364/OL.401832>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- [16] Torres, J. P. e L. Torner: *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*. Wiley-VCH, 2011, ISBN 3527409076. https://doi.org/10.1007/978-3-540-44481-7_4. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- [17] Padgett, M., J. Courtial e L. Allen: *Light's Orbital Angular Momentum*. Physics Today, 57:35–40, 2004. <https://doi.org/10.1063/1.1768672>. Citado na página 19.
- [18] Allen, L., M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman: *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*. Phys. Rev. A, 45:8185–8189, 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.8185>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- [19] Saleh, B.E.A. e M.C. Teich: *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2019, ISBN 9781118770092. <https://books.google.com.br/books?id=rcqKDwAAQBAJ>. Citado na página 19.

- [20] Franke-Arnold, S., S. M. Barnett, E. Yao, J. Leach, J. Courtial e M. Padgett: *Uncertainty principle for angular position and angular momentum*. New Journal of Physics, 6:103, 2004. <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/6/1/103>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- [21] Jack, B., M. J. Padgett e S. Franke-Arnold: *Angular diffraction*. New Journal of Physics, 10:103013, 2008. <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/10/103013>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 33.
- [22] Berkhout, G. C. G., M. P. J. Lavery, J. Courtial, M.W. Beijersbergen e M. J. Padgett: *Efficient Sorting of Orbital Angular Momentum States of Light*. Phys. Rev. Lett., 105:153601, 2010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.153601>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 25, 28 e 46.
- [23] O’Sullivan, M. N., M. Mirhosseini, M. Malik e R. W. Boyd: *Near-perfect sorting of orbital angular momentum and angular position states of light*. Optics Express, 20(22):24444–24449, 2012. <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-20-22-24444>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 27.
- [24] Mirhosseini, M., M. Malik, Z. Shi e R. W. Boyd: *Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light*. Nature Communications, 4:2781, 2013. <https://rdcu.be/dHUv3>. Citado 5 vezes nas páginas 22, 25, 26, 27 e 28.
- [25] Yao, E., S. Franke-Arnold, J. Courtial, S. Barnett e M. Padgett: *Fourier relationship between angular position and optical orbital angular momentum*. Opt. Express, 14:9071–9076, 2006. <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-14-20-9071>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 33.
- [26] Bazhenov, V. Iu., M. V. Vasnetsov e M. S. Soskin: *Laser beams with wave front screw dislocations*. Pisma v Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki, 52:1037–1039, outubro 1990. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990PZETF..52.1037B>. Citado na página 23.
- [27] Yao, Alison M. e Miles J. Padgett: *Orbital angular momentum: origins, behavior and applications*. Adv. Opt. Photon., 3(2):161–204, 2011. <https://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?URI=aop-3-2-161>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 46.
- [28] Solís-Prosser, M. A., A. Arias, J. J. M. Varga, L. Rebón, S. Ledesma, C. Iemmi e L. Neves: *Preparing arbitrary pure states of spatial qudits with a single phase-only spatial light modulator*. Opt. Lett., 38:4762–4765, 2013. <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-38-22-4762>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 45.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstrações Úteis

A.1 Somatório de Exponenciais do Estado da Base de Fourier

O somatório de exponenciais complexas em (4.4) pode ser reescrito como uma razão de senos multiplicados por uma única exponencial. Esse cálculo parte da soma de termos de uma série geométrica:

$$S_D = \sum_{k=0}^D r^k = \frac{1 - r^D}{1 - r}.$$

Reescrevendo a parte em colchetes de (4.4), podemos desenvolver a soma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{D-1} e^{ik\beta(n-\ell)} &= \sum_{k=0}^{D-1} e^{i\beta(n-\ell)k} \\ &= \frac{1 - e^{Di\beta(n-\ell)}}{1 - e^{i\beta(n-\ell)}} \\ &= \frac{e^{iD\beta(n-\ell)/2} \left[\frac{1}{e^{iD\beta(n-\ell)/2}} - \frac{e^{iD\beta(n-\ell)}}{e^{iD\beta(n-\ell)/2}} \right]}{e^{i\beta(n-\ell)/2} \left[\frac{1}{e^{i\beta(n-\ell)/2}} - \frac{e^{i\beta(n-\ell)}}{e^{i\beta(n-\ell)/2}} \right]} \\ &= e^{i(D-1)\beta(n-\ell)/2} \left[\frac{e^{-iD\beta(n-\ell)/2} - e^{iD\beta(n-\ell)/2}}{e^{-i\beta(n-\ell)/2} - e^{i\beta(n-\ell)/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando a fórmula de Euler para a parte entre colchetes em (A.1), teremos:

$$\begin{aligned} [\dots] &= \frac{\cos(D\beta(n-\ell)/2) + i \sin(D\beta(n-\ell)/2) - \cos(D\beta(n-\ell)/2) - i \sin(D\beta(n-\ell)/2)}{\cos(\beta(n-\ell)/2) + i \sin(\beta(n-\ell)/2) - \cos(\beta(n-\ell)/2) - i \sin(\beta(n-\ell)/2)} \\ &= \frac{-2i \sin(D\beta(n-\ell)/2)}{-2i \sin(\beta(n-\ell)/2)} \\ &= \frac{\sin(D\beta(n-\ell)/2)}{\sin(\beta(n-\ell)/2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando (A.1) e (A.2) em (4.4), teremos, por fim:

$$|\mu_n\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi D}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\ell\alpha/2) \frac{\sin(D\beta(n-\ell)/2)}{\sin(\beta(n-\ell)/2)} e^{i(D-1)\beta(n-\ell)/2} |\ell\rangle.$$

A.2 Ortogonalidade dos Estados da Base de Fourier

Para provar a ortogonalidade dos estados $|\mu_n\rangle$, definidos na equação (4.4), tomaremos o produto escalar:

$$\begin{aligned}\langle\mu_{n'}|\mu_n\rangle &\propto \sum_{\ell} \text{sinc}^2\left(\frac{\ell\alpha}{2}\right) e^{ik'\beta(n-\ell)} e^{-ik\beta(n'-\ell)} \\ &= \sum_{\ell} \text{sinc}^2\left(\frac{\ell\alpha}{2}\right) \sum_{k,k'} e^{i\beta kn-k'n'} e^{-i\beta(k-k')\ell} \\ &= \sum_{k,k'} e^{i\beta(kn-k'n')} \sum_{\ell} \text{sinc}^2\left(\frac{\ell\alpha}{2}\right) e^{-i\beta(k-k')\ell}\end{aligned}$$

O termo em destaque é a transformada discreta de Fourier da função sinc, o que resulta em uma função triângulo:

$$\langle\mu_{n'}|\mu_n\rangle = \sum_{k,k'} e^{i\beta(kn-k'n')} \Lambda\left(\frac{\beta(k-k')}{\alpha}\right).$$

Pela definição da função triângulo, se $k \neq k'$, pelo fato de $\beta = 2\pi/D > \alpha$ por construção, teremos $\Lambda(\arg) = 0$. O problema então será para $k = k'$. Definindo $\omega = e^{2\pi i/D}$, ficamos com

$$\begin{aligned}\langle\mu_{n'}|\mu_n\rangle &\propto \sum_{k=k'=0}^{D-1} \omega^{k(n-n')} \Lambda(0) \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} \omega^{k(n-n')} \\ &= D\delta_{n,n'},\end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos a relação de ortogonalidade para a D -ésima raiz da unidade, ω ($\omega^D = 1$). Dessa forma, $\langle\mu_{n'}|\mu_n\rangle = 0$ para $n \neq n'$, q.e.d..