

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Cyro Barros Murgulo

Formulação Matemática da Conexão de Ashtekar

Belo Horizonte
2024

Cyro Barros Murgulo

Formulação Matemática da Conexão de Ashtekar

Dissertação defendida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rodney Josué Biezuner

Belo Horizonte
2024

Murgulo, Cyro Barros.

M976f Formulação matemática da conexão de Ashtekar [recurso eletrônico] / Cyro Barros Murgulo - 2024.
1 recurso online (116 f. il., color.): pdf.

Orientador: Rodney Josué Biezuner.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 99-104.

1. Matemática – Teses. 2. Gravidade quântica – Teses.
3. Espaços fibrados (Matemática) – Teses. 4. Conexões (Matemática) – Teses. I. Biezuner, Rodney Josué.
II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Formulação Matemática da Conexão
de Ashtekar*

CYRO BARROS MURGULO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Rodney Josué Biezuner
UFMG



Documento assinado digitalmente
LEANDRO GUSTAVO GOMES
Data: 24/02/2024 10:03:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Leandro Gustavo Gomes
UNIFEI

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
FIS-UFMG

Belo Horizonte, 22 de fevereiro de 2024.

Ao meu amado pai,
que sempre viverá em minhas memórias ♡

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Cyro Murgulo e Eliana Felisbino de Barros, de todo meu coração. Não há palavras capazes de descrever uma vida inteira de apoio. Sem vocês, eu jamais sonharia em me mudar para tão distante de casa, ainda aos 17 anos, para fazer uma graduação e um mestrado. Sempre com muito carinho e dedicação, vocês nunca mediram esforços em me incentivar a continuar meus estudos, independente de quais fossem meus objetivos. Muito obrigado por confiarem em mim.

À minha madrinha de formatura, Helen Milene. Tive a sorte de tê-la como professora de matemática durante meus anos de ensino médio. Sua didática e simpatia sempre me inspiraram. Obrigado pela paciência comigo e por todo o incentivo.

Aos professores que tive na graduação, um agradecimento especial ao Carlos Carballo, Gastão Braga, Pablo Carrasco e Silas Luiz. Da maneira particular de cada um, vocês foram essenciais para expandir meus horizontes e despertar meu interesse em pesquisa matemática. Também não poderia deixar de destacar o professor Nelson Yokomizo, obrigado pela oportunidade em poder acompanhar o grupo de física teórica por todos esses anos. Certamente é um exemplo que tenho como professor e pesquisador.

Agradeço ao Yuri Ximenes, por ter dedicado tanto de seu tempo para contribuir com minha formação matemática durante minhas primeiras IC's.

Meu profundo agradecimento e admiração ao meu orientador, Rodney Biezuner. Por sempre instigar a curiosidade, independente de onde ela possa nos levar. Por ser companheiro e compreensivo nos períodos difíceis. Pelas orientações sempre pertinentes. Foi por acaso que pude tê-lo como meu professor, ainda no início da minha graduação. Desde então, foram várias IC's, inúmeras reuniões, muito aprendizado de física e matemática, além de várias conversas divertidas. Obrigado por toda a dedicação em minha jornada.

Sou grato a todos os meus amigos. É graças a vocês que a vida se torna mais leve.

Em especial, ao meu grande amigo de infância, Israel da Rocha, e ao meu excelentíssimo amigo, Vinícius Silva. Apesar de toda essa distância, não perdemos contato. Sou grato pelos vários momentos de diversão que tivemos jogando. Durante a pandemia, fechados em casa por várias semanas e sob muito estresse, a presença (virtual) de vocês foi, sem dúvidas, muito importante para minha saúde mental. Obrigado pela amizade.

Aos amigos da física que carrego desde o início da graduação: Anna Sickert, Mirela Valentim, Diego Pereira e Gabriel Vilaça. Obrigado pelos vários momentos divertidos e memoráveis. Foi graças a vocês que os vários momentos difíceis que passamos ao longo do curso se tornaram suportáveis. Um agradecimento especial ao Gabriel, pelas enriquecedoras discussões sobre LQG e relatividade, além de sugestões de bibliografias que acabei utilizando para fazer esta dissertação.

Aos amigos da matemática que conheci durante o mestrado: Estêvão Borel, Vinícius Pinheiro, Bryant Rosado, André Mendanha, Julian Gonzalez e Mesek Felipe. Vocês se tornaram verdadeiros amigos. Obrigado por terem sido parte dessa jornada. Pelos vários

momentos de descontração, tornando períodos estressantes em memórias divertidas. Pela disposição em ajudar, tanto em assuntos matemáticos quanto em questões pessoais. Vocês fizeram desse período algo único e inesquecível na minha vida.

Agradeço à minha psicóloga Giselle Cazita. Não só pelo apoio para superar as várias crises de ansiedade que tive ao longo dessa jornada acadêmica, mas também por ter me ajudado a ser uma pessoa melhor.

Por último, deixo claro que simplesmente não há palavras suficientes para agradecer a minha companheira Maria Clara Guimarães dos Santos. Desde antes dessa jornada na faculdade começar, você sempre esteve presente em minha vida. Diariamente, seu apoio, compreensão e carinho sempre me deram forças para continuar. Se pude chegar tão longe, foi graças a você. Muito obrigado.

Resumo

Após Abhay Ashtekar [1986] introduzir um conjunto de novas variáveis que simplificam os vínculos da teoria hamiltoniana da relatividade, a busca por uma teoria de gravitação quântica ganhou novos rumos. Dada a importância que estas novas variáveis possuem para o surgimento da vertente de gravitação quântica em laços, esta dissertação tem como objetivo construir a conexão de Ashtekar de maneira matematicamente clara e consistente utilizando conexões em fibrados associados.

Palavras-chave: Conexão de Ashtekar; conexões em fibrados; fibrados associados.

Abstract

After Abhay Ashtekar [1986] introduced new variables that simplify the constraints of the Hamiltonian theory of relativity, the search for a theory of quantum gravity took new directions. Given the importance of these new variables have for the emergence of the loop quantum gravity, this dissertation aims to construct the Ashtekar connection in a mathematically clear and consistent way using connections in associated bundles.

Keywords: Ashtekar connection, connections on bundles, associated bundles

Sumário

Introdução	11
1 Breve Introdução a Fibrados	13
1.1 Fibrados Vetoriais	14
1.2 Fibrados Principais	18
1.2.1 Ações e Representações	18
1.2.2 Fibrados Principais	20
1.2.3 G-Fibrados	22
1.2.4 Fibrado dos Referenciais	24
1.3 Fibrados Associados	25
1.3.1 Representação Adjunta	25
1.3.2 Fibrados Associados	26
2 Conexões em Fibrados	31
2.1 Conexão de Ehresmann	31
2.1.1 Campos Fundamentais	31
2.1.2 Subfibrados Verticais e Horizontais	35
2.2 Formas de Conexão	37
2.2.1 Formas Vetoriais	38
2.2.2 Formas com valores em Álgebras de Lie	40
2.2.3 Forma de Conexão em Fibrados Principais	43
2.3 Conexão no Fibrado dos Referenciais	44
2.4 Conexão em Fibrados Associados	50
2.4.1 Transporte Paralelo	51
2.4.2 Derivada Covariante no Fibrado Associado	53
3 Formulação ADM	55
3.1 Curvatura Extrínseca	57
3.2 Operador de Weingarten	58
3.3 Equação de Gauss-Codazzi	60
3.4 Equação de Gauss	62
3.5 Decompondo a Equação de Campo	67
4 Conexão de Ashtekar	70
4.1 Produto Vetorial em $T\Sigma$	73
4.2 A Conexão de Ashtekar	77
4.2.1 Curvatura da Conexão de Ashtekar	81
4.2.2 Curvatura Escalar da Conexão de Ashtekar	86
4.3 Estrutura de Spin	91

Bibliografia	99
A Demonstrações dos Capítulo 1 e 2	105

Introdução

As novas variáveis introduzidas por Ashtekar [1986] tiveram um papel muito mais amplo do que apenas simplificar os vínculos obtidos na formulação hamiltoniana da relatividade, elas trouxeram novos ares à busca por uma teoria de gravitação quântica canônica. Considerando a importância que estas novas variáveis têm para essa vertente de pesquisa, é fundamental que se tenha uma definição precisa sobre o que elas são e como elas definem uma nova conexão, chamada conexão de Ashtekar.

Utilizando como base a tese Wöhr [75] e o artigo Fleischhack e Levermann [25], esta dissertação tem como objetivo construir e analisar a conexão de Ashtekar de maneira matematicamente precisa e global, utilizando a linguagem de fibrados, especificamente, conexões em fibrados. Para isso, seguiremos a estruturação lógica detalhada a seguir.

O Capítulo 1 se divide em três seções: as duas primeiras serão dedicadas aos fibrados principais e servem como um meio de estabelecer a notação que será empregada no texto, além de enunciar resultados fundamentais sobre o tema que serão utilizados posteriormente. A Seção 1.3 detalha a construção de fibrados associados e demonstra resultados importantes que serão utilizados no Capítulo 4.

Em sequência, o Capítulo 2 se divide em quatro seções: as duas primeiras discorrem acerca de conexões em fibrados principais. Na Seção 2.1 introduzimos a conexão de Ehresmann utilizando subfibrados verticais e horizontais, enquanto na Seção 2.2 definimos as formas da conexão utilizando formas vetoriais. Em especial, é provado que essas duas noções de conexão são equivalentes (Teorema 2.41).

A Seção 2.3 busca realizar uma análise mais detalhada a respeito de conexões definidas no fibrado dos referenciais. É provado nos Teoremas 2.51 e 2.52 que toda conexão define uma derivada covariante e vice versa.

Por fim, mostramos na Seção 2.4 como uma conexão no fibrado principal induz uma derivada covariante em seu fibrado associado, o que será utilizado no Capítulo 4.

DEFINIÇÃO *Seja $E^\rho = P \times_\rho M$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação ρ e seja ω uma conexão em P . Dada uma seção $\Phi \in \Gamma(M; E^\rho)$, definimos a **derivada covariante** de Φ na direção de um campo $X \in \Gamma(TM)$ como sendo o mapa*

$$\nabla^{E^\rho, \omega} : \Gamma(E^\rho) \rightarrow \Omega^1(M, E^\rho) \quad \text{tal que} \quad (\nabla_X^{E^\rho, \omega} \Phi)(p) = D(\phi, \gamma, p, \omega)$$

em que γ é qualquer curva tal que $\gamma' = X$ em p . Localmente, sendo $\Phi \in \Gamma(U; E^\rho)$ e $s \in \Gamma(U; P)$ duas seções tais que $\Phi = [s, \phi]$ temos a expressão:

$$\nabla_X^{E^\rho, \omega} \Phi = [s, \nabla_X^\omega \phi] \quad \text{com} \quad \nabla_X^{E^\rho, \omega} \phi = \phi_*(X) + (\rho_* \circ \omega_s)(X)\phi.$$

No Capítulo 3 será definido o operador de Weingarten e a curvatura extrínseca, além de

demonstrarmos resultados significativos no contexto de subvariedades Riemannianas. Em especial, destaca-se a equação de Gauss-Codazzi, que é aplicada no chamado formalismo ADM da relatividade, comentado na Seção 3.5.

O início do Capítulo 4 reúne os conceitos trabalhados nos capítulos anteriores para definirmos a conexão de Ashtekar:

DEFINIÇÃO Seja $\widetilde{\text{Wein}} = \mathfrak{J}^{-1} \circ \text{Wein}$. A conexão de Ashtekar com respeito ao parâmetro de Barbero-Immirzi $\beta \in \mathbb{C}$ é definida por

$$A = \omega^{LC} + \beta \widetilde{\text{Wein}} \in \Omega_{\text{hor}}^1 \left(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3) \right)^{\text{ad}}$$

e a derivada covariante ∇^A associada à conexão $A = \omega^{LC} + \beta \widetilde{\text{Wein}}$ é

$$\nabla^A : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma^* \otimes T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla_X^A Y = \nabla_X^{LC} Y + \beta \text{Wein}(X) \lrcorner Y.$$

Posteriormente, calculamos a torção e o tensor curvatura associado à conexão de Ashtekar. Em especial, a subseção 4.2.2 é dedicada para calcular a curvatura escalar dessa conexão. Todas as grandezas obtidas também são expressas em coordenadas para tornar possível a comparação com a literatura física.

Por último, a Seção 4.3 contém uma breve exposição sobre estruturas de spin, que compõem o mecanismo pelo qual é possível relacionar a conexão de Ashtekar em $\text{SO}(3)$ construída no Capítulo 4 com a conexão originalmente definida em $\text{SU}(2)$, amplamente utilizada em gravitação quântica em loops.

Capítulo 1

Breve Introdução a Fibrados

O propósito deste capítulo é estabelecer a notação e facilitar o acesso às definições e aos resultados que serão utilizados ao longo da dissertação. Por isso, daremos demonstrações para alguns resultados mais relevantes. Para uma abordagem mais detalhada sobre o extenso tópico de fibrados, sugerimos consultar as seguintes referências: Husemöller [40], Friedman e Morgan [26], Poor [60], Sontz [67] e Marsh [51].

NOTAÇÃO 1.1 Ao longo da dissertação, iremos nos referir a objetos infinitamente diferenciáveis como objetos **diferenciáveis** ou **suaves**.

DEFINIÇÃO 1.2 Sejam E , M e F três variedades diferenciáveis e $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação sobrejetiva diferenciável. Então, $(E, \pi, M; F)$ é um **fibrado diferenciável** com **fibra típica** F se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que:

- a) existe um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ satisfazendo $\pi = \text{pr}_1 \circ \psi$;
- b) para cada $y \in U$, o mapa $\psi|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \rightarrow F$ é um difeomorfismo.

Intuitivamente, a condição (a) pode ser visualizada pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array} \implies \pi = \text{pr}_1 \circ \psi$$

Seja $(E, \pi, M; F)$ um fibrado diferenciável. Então, diremos que:

- E e M são, respectivamente, o **espaço total** e o **espaço base**;
- π é a **projeção** do fibrado e $E_x := \pi^{-1}(x)$ é a **fibra** sobre $x \in M$;
- os difeomorfismos ψ são as **trivializações locais** ou **cartas** do fibrado.

DEFINIÇÃO 1.3 Sejam $(E', \pi', M'; F')$ e $(E, \pi, M; F)$ dois fibrados diferenciáveis. Então, uma aplicação diferenciável $\Phi : E \rightarrow E'$ é um **morfismo** entre estes fibrados se existir um mapa $\phi : M \rightarrow M'$ diferenciável tal que $\pi' \circ \Phi = \phi \circ \pi$.

A definição pode ser visualizada através do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi' \\ & M & \xrightarrow{\phi} M' \end{array}$$

EXEMPLO 1.4 O espaço produto $E = M \times F$ de duas variedades diferenciáveis munido da projeção canônica $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M$ é o que chamamos de **fibrado trivial**. São eles que justificam o termo trivialização local para as cartas do fibrado: localmente, todo fibrado diferenciável se comporta como uma variedade produto.

NOTAÇÃO 1.5 Um fibrado diferenciável $(E, \pi, M; F)$ poderá ser denotado por (E, π, M) ou E , quando não for preciso explicitar sua fibra típica ou espaço base.

1.1 FIBRADOS VETORIAIS

Nesta seção trabalharemos com o caso particular de fibrados diferenciáveis cuja fibra típica possui estrutura de espaço vetorial.

DEFINIÇÃO 1.6 Sejam E e M duas variedades diferenciáveis e $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação sobrejetiva diferenciável. Então, $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ é um **fibrado vetorial de posto m** se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que:

- a) existe um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ satisfazendo $\pi = \text{pr}_1 \circ \psi$;
- b) para cada $y \in U$, a fibra E_y é um espaço vetorial e o mapa

$$\psi|_{E_y} : E_y \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Fibrados possuem a noção de atlas, assim como variedades:

DEFINIÇÃO 1.7 Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M . Então, uma coleção de trivializações

$$\{\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m\}$$

é um **atlas** $\mathcal{A}_E = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}$ do fibrado E .

O próximo resultado mostra como *mudar coordenadas* em fibrados vetoriais:

PROPOSIÇÃO 1.8 Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial e

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m, \\ \psi_\beta &: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

duas trivializações tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Então, existe uma aplicação diferenciável

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(m; \mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, v) = (x, (g_{\alpha\beta})_x \cdot v)$$

chamada **função transição entre as trivializações** ψ_α e ψ_β .

Demonstração. A situação pode ser melhor visualizada pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} & & \\
 & \swarrow \text{---} & & \searrow \text{---} & \\
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\psi_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\psi_\beta} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \\
 & \searrow \text{---} & \downarrow \pi & \swarrow \text{---} & \\
 & \text{pr}_1 & U_\alpha \cap U_\beta & \text{pr}_1 &
 \end{array}$$

As fibras são preservadas por mudanças de coordenadas:

$$\text{pr}_1 \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) = \text{pr}_1$$

implica que existe um mapa $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(m; \mathbb{R})$ tal que

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(x, v)).$$

Consequentemente, para todo $x \in M$ temos o isomorfismo

$$(g_{\alpha\beta})_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{definido por} \quad (g_{\alpha\beta})_x = \psi_\alpha|_{E_x} \circ (\psi_\beta|_{E_x})^{-1}.$$

Fixado $x \in M$ e sendo $\mathcal{B} = \{e_i\}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^m$, temos que

$$g_{\alpha\beta}(e_i) \in \mathbb{R}^m \implies \sum_k (g_{\alpha\beta})_i^k e_k$$

dá uma representação matricial de $g_{\alpha\beta}$ na base $\mathcal{B}$ e permite reescrever

$$(g_{\alpha\beta})_i^k = (\text{pr}_k \circ L_{g_{\alpha\beta}})(e_i).$$

em que pr_k é a projeção na k -ésima coordenada e $L_{g_{\alpha\beta}}$ denota a ação, via produto de matrizes, à esquerda por $g_{\alpha\beta}$. Portanto, cada entrada $(g_{\alpha\beta})_i^k$ é composta por aplicações diferenciáveis, o que implica no mapa $(g_{\alpha\beta})_x$ ser diferenciável. $\square$

Um conceito que será muito utilizado ao longo da dissertação é o de **seção**:

DEFINIÇÃO 1.9 *Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial e U um aberto de M . Então, uma **seção local** é uma função suave $s : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}|_U$. A seção será global se for definida em todo o espaço base M .*

NOTAÇÃO 1.10 *Denotaremos o conjunto das seções locais $s : U \rightarrow E$ por $\Gamma(U; E)$. Utilizaremos apenas $\Gamma(E)$ quando $U = M$.*

PROPOSIÇÃO 1.11 *O conjunto $\Gamma(E)$ é um módulo sobre o anel de funções $C^\infty(M)$.*

Demonstração. Todo fibrado vetorial admite a seção nula $\sigma_0(x) = 0 \in E_x$ definida globalmente, de maneira que $\Gamma(E) \neq \emptyset$. A estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo é consequência da estrutura vetorial das fibras:

$$(fs_1 + gs_2)(x) = f(x)s_1(x) + g(x)s_2(x).$$

$\square$

DEFINIÇÃO 1.12 Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial. Um **referencial local** em E é uma coleção $\sigma = (\sigma_i)$ de seções locais $\sigma_i \in \Gamma(U; E)$ tal que $\{\sigma_i(x)\}$ é uma base da fibra E_x para todo $x \in M$. O referencial será global quando as seções forem globais.

EXEMPLO 1.13 Seja M uma variedade diferenciável. Uma seção $X \in \Gamma(TM)$ é um campo vetorial sobre M e um referencial $e = (e_i)$ definido em TM é chamado na literatura física de **vielbein**¹. Iremos retomá-los mais detalhadamente no Capítulo 2.

EXEMPLO 1.14 Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial. Sendo (U, ψ) uma carta do fibrado e $\{e_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$, podemos definir a coleção de mapas

$$\tilde{e}_i : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m \quad \text{com} \quad \tilde{e}_i(x) = (x, e_i).$$

Por sua vez, estes mapas induzem uma coleção de funções $\sigma_i : U \rightarrow E$ definidas por

$$\sigma_i(x) = \psi^{-1}(x, e_i) = (\psi^{-1} \circ \tilde{e}_i)(x).$$

Por construção, as funções σ_i são diferenciáveis e

$$\begin{aligned} (\pi \circ \sigma_i)(x) &= (\pi \circ \psi^{-1})(x, e_i) \\ &= \text{pr}_1(x, e_i) \\ &= x \end{aligned}$$

mostra que σ_i são seções locais. A situação pode ser representada pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{R}^m \\ \swarrow \pi & & \searrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \sigma_i \\ \nwarrow \tilde{e}_i \end{array}$$

Nesse caso, dizemos que o **referencial** $\sigma = (\sigma_i)$ é **associado à trivialização** ψ .

PROPOSIÇÃO 1.15 Todo referencial em um fibrado vetorial é associado a uma trivialização.

Demonstração. Consideremos o fibrado vetorial $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$. Seja $\sigma = (\sigma_i)$ um referencial local e $\{e_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Definiremos o mapa

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

pontualmente como sendo $\Psi|_x : \mathbb{R}^m \rightarrow E_x$ tal que

$$\Psi\left(x, \sum_i v^i e_i\right) = \sum_i v^i \sigma_i(x).$$

Como $\{\sigma_i(x)\}$ é uma base de E_x , a restrição $\Psi|_x$ é uma bijeção para cada $x \in U$. Resta mostrar que Ψ é um difeomorfismo. Para cada $y \in U$, pode-se tomar uma vizinhança $V \subset U$ e uma trivialização $\psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$ de maneira a obter o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\Psi|_{V \times \mathbb{R}^m}} & \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\psi} & V \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow \text{pr}_1 & \uparrow \pi \quad \downarrow \sigma_i|_V & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & V & & \end{array}$$

¹do alemão, “vielbein” carrega a ideia de “muitas-pernas”

Para cada seção σ_i , a composição

$$\psi \circ \sigma_i|_V : V \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$$

é diferenciável, de maneira que temos a representação matricial

$$(\sigma_i(x))^j \in \text{GL}(m, \mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad (\psi \circ \sigma_i)(x) = \left(x, \sum_j \sigma_i^j(x) \cdot e_j \right).$$

Assim, as entradas $\sigma_i^j : V \rightarrow \mathbb{R}$ da matriz $(\sigma_i(x))^j$ são diferenciáveis e, conseqüentemente,

$$\psi \circ \Psi|_{V \times \mathbb{R}^m} \left(x, \sum_i v^i e_i \right) = \left(x, \sum_{i,j} v^i \sigma_i^j(x) \cdot e_j \right)$$

mostram que $\Psi|_{V \times \mathbb{R}^m}$ é um difeomorfismo. Logo,

$$\Psi^{-1} : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$$

é uma trivialização do fibrado. □

COROLÁRIO 1.16 *Fibrados vetoriais são triviais se, e somente se, admitem um referencial definido globalmente.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Exemplo 1.14 e da Proposição 1.15. □

O próximo resultado mostra como mudar coordenadas entre seções locais:

PROPOSIÇÃO 1.17 *Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ um fibrado vetorial e $\{(\sigma_\alpha)_i\}$, $\{(\sigma_\beta)_j\}$ duas bases de seções locais associadas às trivializações*

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m, \\ \psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) &\rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e cujas funções transição são $g_{\alpha\beta}$. Então,

$$(\sigma_\beta)_i = \sum_j (g_{\alpha\beta})_i^j (\sigma_\alpha)_j.$$

Demonstração. A demonstração é direta. Pela definição, temos

$$\begin{aligned} (\sigma_\beta)_i &= \psi_\beta^{-1}(x, e_i) \\ &= \psi_\alpha^{-1} \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, e_i) \\ &= \psi_\alpha^{-1}(x, (g_{\alpha\beta})_x \cdot e_i) \\ &= \psi_\alpha^{-1} \left(x, \sum_j (g_{\alpha\beta})_i^j e_j \right) \end{aligned}$$

e como as cartas são lineares nas fibras, segue que

$$\begin{aligned} (\sigma_\beta)_i &= \psi_\alpha^{-1} \left(x, \sum_j (g_{\alpha\beta})_i^j e_j \right) \\ &= \sum_j (g_{\alpha\beta})_i^j \psi_\alpha^{-1}(x, e_j) \\ &= \sum_j (g_{\alpha\beta})_i^j (\sigma_\alpha)_j. \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 1.18 Definimos um **morfismo** entre dois fibrados vetoriais

$$(E, \pi, M; \mathbb{R}^m), (E', \pi', M'; \mathbb{R}^{m'})$$

como sendo um mapa $F : E \rightarrow E'$ contínuo tal que

- a) existe uma função contínua $f : M \rightarrow M'$ satisfazendo $\pi' \circ F = f \circ \pi$,
- b) a restrição $F|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ é linear para todo $x \in M$.

Um **isomorfismo** entre fibrados vetoriais é um morfismo $F : E \rightarrow E'$ entre fibrados vetoriais cuja inversa $F^{-1} : E' \rightarrow E$ também é um morfismo entre fibrados vetoriais.

OBSERVAÇÃO 1.19 Uma bijeção linear entre espaços vetoriais de dimensão finita é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Portanto, no caso de um isomorfismo $F : E \rightarrow E'$ entre fibrados vetoriais, temos que a restrição $F|_{E_x}$ é um isomorfismo entre as fibras.

1.2 FIBRADOS PRINCIPAIS

Nesta seção iremos trabalhar com o caso particular de fibrados diferenciáveis cuja fibra típica possui estrutura de grupo de Lie, generalizando a noção de fibrados vetoriais.

1.2.1 AÇÕES E REPRESENTAÇÕES

Utilizaremos esta subseção para estabelecer a notação sobre algumas definições e resultados básicos sobre grupos e representações que serão utilizados adiante.

DEFINIÇÃO 1.20 Seja P uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma **ação à direita de G em P** é uma aplicação diferenciável $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ tal que:

- a) $p \triangleleft e = p$ para todo $p \in P$,
- b) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 g_2)$.

Dizemos que G é um **grupo de transformação de P** .

Ações à esquerda são definidas de maneira análoga e serão denotadas por $\triangleright$.

OBSERVAÇÃO 1.21 Toda ação à direita $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ induz uma ação à esquerda:

$$\triangleright : G \times P \rightarrow P \quad \text{com} \quad g \triangleright p := p \triangleleft g^{-1}.$$

DEFINIÇÃO 1.22 Uma **representação** de um grupo de Lie G em um espaço vetorial V é um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. A representação é **efetiva** se for injetiva.

O próximo resultado mostra uma correspondência entre ações e representações:

PROPOSIÇÃO 1.23 Seja G um grupo de Lie e P uma variedade diferenciável. Então,

- a) Toda ação $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ induz uma representação $\rho : P \rightarrow \text{Difeo}(P)$;
- b) Toda representação $\rho : P \rightarrow \text{Difeo}(P)$ induz uma ação $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$.

Demonstração. Seja $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ uma ação de G em M . Então, podemos definir

$$\rho : G \rightarrow \text{Difeo}(P) \quad \text{tal que} \quad \rho_g(x) := x \triangleleft g^{-1}.$$

A aplicação ρ é um homomorfismo de grupos, pois

$$\begin{aligned} \rho_{gh}(x) &= x \triangleleft (gh)^{-1} \\ &= x \triangleleft (h^{-1}g^{-1}) \\ &= (x \triangleleft h^{-1}) \triangleleft g^{-1} \\ &= (\rho_g \circ \rho_h)(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, dada uma representação $\rho : G \rightarrow \text{Difeo}(P)$, podemos definir

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow P \quad \text{tal que} \quad x \triangleleft g := \rho_{g^{-1}}(x).$$

Como ρ é um homomorfismo, temos

$$\begin{aligned} e \triangleleft x &= \rho_e(x) & (x \triangleleft h) \triangleleft g &= \rho_{g^{-1}}(\rho_{h^{-1}}(x)) \\ &= \text{id}_P(x) & &= \rho_{(hg)^{-1}}(x) \\ &= x & &= x \triangleleft (hg), \end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação $\triangleright$ é uma ação. □

DEFINIÇÃO 1.24 *Sejam P, P' variedades diferenciáveis, G, H grupos de Lie e*

$$\begin{aligned} \triangleleft_1 : G \times P &\rightarrow P \\ \triangleleft_2 : H \times P' &\rightarrow P' \end{aligned}$$

*duas ações à direita. Um mapa diferenciável $F : P \rightarrow P'$ é **f-equivariante** se existir um homomorfismo de grupos de Lie $f : G \rightarrow H$ tal que*

$$F(p \triangleleft_1 g) = F(p) \triangleleft_2 f(g) \quad \forall p \in P, g \in G.$$

*Dizemos que F é **G-equivariante** se $f = \text{id}_G$.*

Os mapas G-equivariantes serão fundamentais para se definir fibrados principais posteriormente. Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado diferenciável e $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ uma ação à direita. Então, dada uma trivialização local

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G,$$

podemos tomar a variedade produto $U \times G \simeq \pi^{-1}(U)$ e definir uma outra ação à direita

$$\triangleleft_2 : (U \times G) \times G \rightarrow (U \times G) \quad \text{com} \quad (x, h) \triangleleft_2 g = (x, hg). \quad (1.1)$$

Visualmente, isso significa que uma trivialização ψ é um mapa G-equivariante se, e somente se, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\triangleleft} & P \times G \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \times \text{id}_G \\ U \times G & \xleftarrow{\triangleleft_2} & (U \times G) \times G \end{array} \implies \psi(p \triangleleft g) = \psi(p) \triangleleft_2 g.$$

Contudo, observando que $\triangleleft_2 = \triangleleft|_{\pi^{-1}(U)}$, podemos reescrever essa expressão como

$$\psi(p \triangleleft g) = \psi(p) \triangleleft g.$$

DEFINIÇÃO 1.25 Seja G um grupo de Lie e

$$\begin{aligned}\rho_V : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ \rho_W : G &\rightarrow \text{GL}(W)\end{aligned}$$

duas representações. Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ é um **morfismo entre as representações** ρ_V e ρ_W se

$$(f \circ (\rho_V)_g)(v) = ((\rho_W)_g \circ f)(v) \quad \forall v \in V, g \in G.$$

Dizemos que as representações são **equivalentes** quando f for um isomorfismo.

Podemos visualizar a noção de mapas f -equivariante (representado à esquerda) e morfismo entre representações (representado à direita) pelos diagrama comutativos:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\triangleright_1 p} & P \\ \downarrow f & & \downarrow F \\ H & \xrightarrow{\triangleright_2 p} & P' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{(\rho_V)_g} & V \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{(\rho_W)_g} & W \end{array}$$

Por último, definimos a noção de ação transitiva e ação livre:

DEFINIÇÃO 1.26 Seja $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ uma ação à direita. Dado $p \in P$, definimos

a) o conjunto **órbita** de p com respeito a ação $\triangleleft$:

$$\text{Orb}_{\triangleleft}(p) = \{q \in P : \exists g \in G \text{ tal que } p \triangleleft g = q\}.$$

Se $P = \text{Orb}_{\triangleleft}(p)$ para todo $p \in P$, dizemos que a ação é **transitiva**.

b) o conjunto **estabilizador** de p com respeito a ação $\triangleleft$:

$$\text{Stab}_{\triangleleft}(p) = \{g \in G : p \triangleleft g = p\}.$$

Se $\text{Stab}_{\triangleleft}(p) = \{e\}$ para todo $p \in P$, dizemos que a ação é **livre**.

1.2.2 FIBRADOS PRINCIPAIS

DEFINIÇÃO 1.27 Seja G um grupo de Lie. Um **fibrado principal** $(P, \pi, M; G)$ é um fibrado diferenciável munido de uma ação diferenciável $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ tal que

a) a ação $\triangleleft$ é livre, transitiva e preserva fibras;

b) existe um **atlas principal** i.e um atlas cujas cartas são G -equivariantes.

OBSERVAÇÃO 1.28 Em outras palavras, as condições (a) e (b) se traduzem como:

(i) ação ser livre e transitiva: para todo $x \in M$, temos $P_x = \text{Orb}_{\triangleleft}(h)$ para algum $h \in G$;

(ii) dada trivialização ψ tal que $\psi(p) = (x, h)$, temos

$$\psi(p \triangleleft g) = \psi(p) \triangleleft g = (x, h) \triangleleft g = (x, hg)$$

Isso permite concluir que a ação preserva as fibras, uma vez que

$$p \in P_x \implies p \triangleleft g \in P_x.$$

O próximo resultado mostra como *mudar coordenadas* em fibrados principais:

PROPOSIÇÃO 1.29 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e*

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G, \\ \psi_\beta &: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times G\end{aligned}$$

duas trivializações tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Então, existe uma aplicação diferenciável

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, h) = (x, (g_{\alpha\beta})_x h)$$

*chamada **função transição entre as trivializações** ψ_α e ψ_β .*

Demonstração. Decompondo as trivializações ψ_α em $\psi_\alpha = (\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^2)$ com

$$\psi_\alpha^1 : P \rightarrow M \quad \text{tal que} \quad p \in P_x \implies \psi_\alpha^1(p) = x$$

e $\psi_\alpha^2 : P \rightarrow G$ com $\psi_\alpha^2(p) \in G$, definimos

$$g_{\alpha\beta}(x) = \psi_\alpha^2(x) (\psi_\beta^2(x))^{-1} \in G.$$

O mapa $g_{\alpha\beta}$ é diferenciável: como ilustra o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha \cap U_\beta) \times G & \xrightarrow{\psi_\alpha \circ (\psi_\beta)^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ \uparrow \text{i} & & \downarrow \text{pr}_2 \\ (U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\quad g_{\alpha\beta} \quad} & G \end{array}$$

cada $g_{\alpha\beta}$ é uma composição de mapas diferenciáveis. Denotando

$$\psi_\beta(p) = (x, g) \in U_\alpha \cap U_\beta \times G,$$

temos que os mapas $g_{\alpha\beta}$ são as funções transição do fibrado:

$$\begin{aligned}(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, g) &= \psi_\alpha(p) \\ &= (x, \psi_\alpha^2(p)) \\ &= \left(x, \psi_\alpha^2(p) (\psi_\beta^2(p))^{-1} \psi_\beta^2(p) \right) \\ &= (x, (g_{\alpha\beta})_x g).\end{aligned}$$

□

1.2.3 G-FIBRADOS

DEFINIÇÃO 1.30 Seja $(E, \pi, M; F)$ um fibrado diferenciável e $\rho : G \rightarrow \text{Difeo}(F)$ uma representação efetiva de um grupo de Lie G em F . Então, duas cartas

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, \\ \psi_\beta &: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times F\end{aligned}$$

são ditas **G-compatíveis** se, para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, existir um $g \in G$ tal que a função transição do fibrado seja uma aplicação diferenciável

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G \quad \text{com} \quad g_{\alpha\beta}(x) = \rho_g(x).$$

Em outras palavras, duas cartas são G-compatíveis se os elementos $\rho_g(x)$ do grupo $\text{Difeo}(F)$ podem ser vistos como uma ação de G sobre F , dada pelo elemento $g_{\alpha\beta}(x) \in G$.

DEFINIÇÃO 1.31 Um fibrado diferenciável $(E, \pi, M; F)$ é um **G-fibrado** se possuir um atlas $\mathcal{A} = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}$ composto por cartas G-compatíveis tais que $\psi_\alpha|_{E_x} \in G$. Dizemos que G é o **grupo estrutural** do G-fibrado.

Com isso, pode-se definir fibrados principais de outra maneira:

DEFINIÇÃO 1.32 Um **fibrado principal** é um G-fibrado $(P, \pi, M; G)$ cuja fibra típica G induz ação à esquerda dada pelo produto do grupo.

PROPOSIÇÃO 1.33 As Definições 1.27 e 1.32 são equivalentes.

Demonstração. A Definição 1.27 é englobada pela Definição 1.32, como mostra a Proposição 1.29. Agora, vamos partir da Definição 1.32: dada uma carta $\psi_\alpha(p) = (x, h_\alpha)$, podemos definir o mapa (que provaremos ser uma ação à direita)

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow P \quad \text{com} \quad p \triangleleft g := \psi_\alpha^{-1}(x, h_\alpha \cdot g).$$

Primeiro, provaremos que o mapa $\triangleleft$ independe da carta: sejam

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \\ \psi_\beta &: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times F\end{aligned}$$

duas cartas compatíveis tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Por ser um G-fibrado, temos

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, g) = (x, (g_{\alpha\beta})_x \cdot g) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Denotando $h_\alpha = (g_{\alpha\beta})_x \cdot h_\beta$, segue que

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{-1}(x, h_\alpha \cdot g) &= \psi_\alpha^{-1}(x, (g_{\alpha\beta})_x \cdot (h_\beta \cdot g)) \\ &= \psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, h_\beta \cdot g)) \\ &= \psi_\beta^{-1}(x, h_\beta \cdot g).\end{aligned}$$

Agora, verificamos que $\triangleleft$ é de fato uma ação à direita livre e transitiva:

(i) para todo $p \in P$ e $g \in G$ vale $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \cdot g_2)$:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha((p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2) &= (x, (h_\alpha \cdot g_1) \cdot g_2) \\ &= (x, h_\alpha \cdot (g_1 \cdot g_2)) \\ &= \psi_\alpha(p \triangleleft (g_1 \cdot g_2));\end{aligned}$$

(ii) vale $p \triangleleft e = p$ para todo $p \in P$:

$$\psi_\alpha(p \triangleleft e) = (x, h_\alpha \cdot e) = \psi_\alpha(p).$$

(iii) a ação é livre e transitiva, pois a multiplicação à esquerda é livre e transitiva.

□

DEFINIÇÃO 1.34 Definimos um **morfismo** entre dois fibrados principais

$$(P, \pi, M; G) \quad \text{e} \quad (P', \pi', M; G')$$

como sendo uma aplicação $F : P \rightarrow P'$ diferenciável que é f -equivariante. No caso em que $f = \text{id}_G$, dizemos que F é um **isomorfismo entre fibrados principais**.

Um morfismo entre fibrados principais pode ser visualizado pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ \downarrow f & & \downarrow F \\ G' & \longrightarrow & P' \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \pi \\ \nearrow \pi' \end{array} \quad M$$

OBSERVAÇÃO 1.35 Seções locais $s \in \Gamma(U; P)$ de um fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ são chamadas de **gauges locais**. A seção s será um **gauge global** se for definida em M .

O próximo resultado mostra que seções locais induzem trivializações:

PROPOSIÇÃO 1.36 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e $s \in \Gamma(U; P)$ uma seção definida sobre um aberto $U \subset M$. Então, o mapa

$$\psi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U) \quad \text{com} \quad \psi(x, g) = s(x) \triangleleft g$$

é um difeomorfismo G -equivariante e sua inversa será uma trivialização do fibrado.

Demonstração. Veja Hamilton [37, p. 210], Lema 4.2.7. □

Como comenta Hamilton [37, p. 220], há o seguinte paralelo:

- a) na relatividade, a física deve ser independente da escolha de referenciais inerciais;
- b) em teorias de gauge, a física deve ser independente da escolha de gauges locais.

No contexto de teorias de gauge, o grupo de Lie G do fibrado principal é denominado **grupo de simetria** ou **grupo de gauge** da teoria, enquanto que as funções transição entre dois gauges são chamadas **transformações de gauge**.

1.2.4 FIBRADO DOS REFERENCIAIS

Para definirmos o que é um fibrado de referenciais, precisaremos do seguinte lema:

LEMA 1.37 *Seja E um conjunto, M e F duas variedades suaves e $\pi : E \rightarrow M$ um mapa sobrejetivo. Se existir uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ tal que*

- a) $U_\alpha \subset M$ é um aberto;*
- b) $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ é bijeção com $\text{pr}_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{U_\alpha}$;*
- c) as funções transição $(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times F}$ são diferenciáveis;*

então existe uma única estrutura diferenciável no conjunto E que torna $(E, \pi, M; F)$ em um fibrado diferenciável com atlas $\mathcal{A}$.

Demonstração. Veja Hamilton [37, p. 221], Teorema 4.3.3. □

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n , podemos definir o conjunto de todas as possíveis bases do espaço tangente TM_x por:

$$\text{Fr}(M)_x = \{(e_1, \dots, e_n) : \{e_I\} \text{ é base de } TM_x\}$$

Em outras palavras, $\text{Fr}(M)_x$ é o conjunto de todos os referenciais $\mathbf{e}_x = (e_1, \dots, e_n)$ do espaço tangente sobre o ponto $x \in M$. Com eles, definimos

- a união disjunta:

$$\text{Fr}(M) = \bigsqcup_{x \in M} \text{Fr}(M)_x;$$

- a projeção natural:

$$\pi : \text{Fr}(M) \rightarrow M \quad \text{com} \quad \pi\left(\bigsqcup_{x \in M} \text{Fr}(M)_x\right) = x;$$

- a ação à direita $\triangleleft : \text{Fr}(M) \times \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Fr}(M)$ dada pelo produto de matrizes:

$$(x, \mathbf{e}_x) \triangleleft A = \left(x, \sum_I A_J^I e_J\right)$$

que é livre e transitiva, por construção.

TEOREMA 1.38 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Então,*

$$\left(\text{Fr}(M), \pi, M; \text{GL}(n, \mathbb{R})\right)$$

*é um fibrado principal, chamado **fibrado dos referenciais**.*

Demonstração. Basta utilizar o Lema 1.37 para provar que $(\text{Fr}(M), \pi, M; \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ é um fibrado diferenciável, pois o fato de ser um fibrado principal segue da discussão feita antes do teorema. Seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma carta de M e $\{e_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Definimos a seção $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ pontualmente por

$$s_\alpha(x) = \left((D_x \varphi_\alpha)^{-1} e_1, \dots, (D_x \varphi_\alpha)^{-1} e_n\right) \in \text{Fr}(M)_x.$$

e, através dela, podemos definir a aplicação bijetiva

$$\psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \quad \text{com} \quad \psi_\alpha^{-1}(x, A) = s_\alpha(x) \triangleleft A,$$

que satisfaz $\mathrm{pr}_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{U_\alpha}$ por construção. Sendo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, pode-se obter que as funções transição são diferenciáveis:

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, A) &= \psi_\alpha(s_\beta(x) \triangleleft A) \\ &= \psi_\alpha(x, (D_x \varphi_\beta)^{-1} \cdot A) \\ &= (x, (D_x \varphi_\alpha) \cdot (D_x \varphi_\beta)^{-1} \cdot A) \\ &= (x, D_{\varphi_\beta(x)}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \cdot A). \end{aligned}$$

Consequentemente, temos as condições exigidas pelo enunciado do Lema 1.37. Observando que as cartas ψ_α são, por construção, G -equivariantes segue que

$$(\mathrm{Fr}(M), \pi, M; \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$$

é um fibrado principal. □

NOTAÇÃO 1.39 $\mathrm{Fr}(M)_x$ é o conjunto dos referenciais sobre TM_x . Quando M possui uma métrica g , pode-se definir o conjunto $\mathrm{Fr}_g(M)$ dos referenciais ortonormais e, se os referenciais ortonormais são orientados, denota-se o conjunto por $\mathrm{Fr}_g^+(M)$.

1.3 FIBRADOS ASSOCIADOS

Essa seção é dedicada aos fibrados associados, que serão peças fundamentais para a construção da *conexão de Ashtekar*. Por não serem abordados tão frequentemente na literatura de fibrados, optamos por dar um enfoque mais detalhado, com demonstrações mais completas dos resultados enunciados.

1.3.1 REPRESENTAÇÃO ADJUNTA

Antes, algumas definições que serão necessárias para o restante da dissertação:

DEFINIÇÃO 1.40 *Seja G um grupo de Lie. Definimos os mapas*

a) *translação à esquerda :*

$$L_g : G \rightarrow G \quad \text{com} \quad L_g(h) = gh$$

b) *translação à direita:*

$$R_g : G \rightarrow G \quad \text{com} \quad R_g(h) = hg$$

c) *conjugação:*

$$c_g : G \rightarrow G \quad \text{com} \quad c_g(h) = ghg^{-1}$$

PROPOSIÇÃO 1.41 *Seja G um grupo de Lie. Para todos os elementos $g, h \in G$, temos:*

- a) $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$;
 b) $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$.
 c) $c_g = L_g \circ (R_g)^{-1}$ é um automorfismo de G .

Demonstração. Ver A.1. □

OBSERVAÇÃO 1.42 Apesar de c_g ser um automorfismo, a relação

$$L_g(e) = R_g(e) = g$$

mostra que as translações não serão homomorfismos quando $g \neq e$.

Observando que $c_g(e) = e$, o pushforward $(c_g)_* : TG_e \rightarrow TG_{c_g(e)}$ é um mapa

$$(c_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

o que sugere uma maneira de representar o grupo G em sua própria álgebra de Lie $\mathfrak{g}$:

TEOREMA 1.43 Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então,

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \quad \text{definido por} \quad \text{Ad}(g) = (c_g)_*$$

é um homomorfismo entre grupos de Lie, chamado **representação adjunta** de G .

Demonstração. O mapa $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo de grupos, pois:

$$\text{Ad}_{g \cdot h} = (c_{g \cdot h})_* = (c_g)_* \circ (c_h)_* = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h.$$

Para mostrar que é diferenciável, basta mostrar que, para todo $X_e \in \mathfrak{g}$, o mapa

$$\text{Ad}(\cdot)X_e : G \rightarrow \mathfrak{g}$$

é diferenciável, uma vez que podemos utilizar uma base $\{T_i\}$ de $\mathfrak{g}$ para obter uma representação matricial cujas entradas são diferenciáveis. Portanto, sendo

$$c : G \times G \rightarrow G \quad \text{com} \quad c(g, h) = ghg^{-1}$$

temos que $\text{Ad}(\cdot)X_e : G \rightarrow \mathfrak{g}$ é a composição de mapas diferenciáveis

$$g \mapsto ((g, 0), (e, X_e)) \mapsto ((g, e), (0, X_e)) \mapsto (D_{(g,e)}c)(0, X_e).$$

em que usamos o campo diferenciável $g \mapsto 0 \in T_g G$. □

1.3.2 FIBRADOS ASSOCIADOS

Para o próximo resultado, precisamos do seguinte lema técnico:

OBSERVAÇÃO 1.44 Seja P uma variedade e G um grupo de Lie. Uma ação

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow P$$

livre é uma **ação principal** se o mapa $\Psi : P \times G \rightarrow P \times P$ dado por

$$\Psi(p, g) = (p, p \triangleleft g)$$

leva conjuntos fechados em $P \times G$ em conjuntos fechados em $P \times P$.

LEMA 1.45 *Seja P um G -fibrado principal e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação. Então,*

$$(P \times V) \times G \rightarrow P \times V \quad \text{com} \quad (p, v) \tilde{\triangleleft} g := (p \triangleleft g, \rho(g)^{-1}v)$$

é uma ação principal livre e o espaço quociente $(P \times V)/_G$ com respeito à ação $\tilde{\triangleleft}$ tem estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção $\tilde{\pi} : P \times V \rightarrow (P \times V)/_G$ é uma submersão.

Demonstração. Veja Hamilton [37, p. 239], Lema 4.7.1. $\square$

TEOREMA 1.46 *Seja $(P, \pi_P, M; G)$ um fibrado principal e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação de G . Denotando $E = (P \times V)/G$ e definindo a projeção*

$$\pi_E : E \rightarrow M, \quad \pi_E([p, v]) = \pi_P(p),$$

*temos que $(E, \pi_E, M; V)$ é um fibrado diferenciável, chamado de o **fibrado vetorial associado** (ao fibrado principal P e à representação ρ) e será denotado por E^ρ ou $P \times_\rho V$.*

Demonstração. O espaço E^ρ é uma variedade diferenciável pelo Lema 1.45. Portanto, resta construir trivializações Ψ_α que satisfaçam a Definição 1.6. Para isso, seja

$$\psi_\alpha : \pi_P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G \quad \text{com} \quad \psi_\alpha(p) = (\pi_P(p), \psi_\alpha^2(p)).$$

uma carta de P . Através de ψ_α , definimos o mapa

$$\Psi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V \quad \text{com} \quad \Psi_\alpha[p, v] = (\pi_P(p), \rho(\psi_\alpha^2(p))v).$$

Como pode ser visualizado de maneira mais clara pelo diagrama, o mapa Ψ_α é diferenciável pois a projeção $\tilde{\pi}$ é uma submersão:

$$\begin{array}{ccc} \pi_P^{-1}(U_\alpha) \times V & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \pi_E^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow \pi_P \times \text{id} & \downarrow \Psi_\alpha \\ & & U_\alpha \times V \end{array}$$

Como ψ_α é difeomorfismo, o mapa Ψ_α possui inversa diferenciável

$$\Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_\alpha) \quad \text{com} \quad \Psi_\alpha^{-1}(x, v) = [\psi_\alpha^{-1}(x, v), \rho(\psi_\alpha^2(p))^{-1}v].$$

Portanto, Ψ_α é um difeomorfismo e $\pi_E = \text{pr}_1 \circ \Psi_\alpha$. Fixando $x \in U_\alpha$, temos que

$$E_x = (P_x \times V)/_G \implies \left(\Psi_\alpha|_{E_x} \right) [p_x, v] \in \{p_x\} \times V$$

é uma bijeção linear (isomorfismo) entre os espaços V e E_x . $\square$

Fibrados associados possuem a noção de atlas adaptado:

DEFINIÇÃO 1.47 *Seja P um fibrado principal com atlas principal $\mathcal{A}_P = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ induzido por seções locais $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, P)$ e seja E^ρ um fibrado associado à P . Então, um atlas $\mathcal{A}_{E^\rho} = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ cujas cartas $\Psi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V$ satisfazem*

$$\Psi_\alpha^{-1}(x, v) = [s_\alpha(x), v]$$

*é chamado de **atlas adaptado** para E^ρ .*

PROPOSIÇÃO 1.48 *Seja P um fibrado principal cujas funções transição do atlas principal são $\{g_{\alpha\beta}\}$. Então, as funções transição do atlas adaptado de E^p são*

$$\widetilde{(g_{\alpha\beta})} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(V) \quad \text{com} \quad \widetilde{(g_{\alpha\beta})}_x = \rho \circ (g_{\alpha\beta})_x.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_P = \{(\pi_P^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}$ um atlas principal de P induzidos por seções $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; P)$ (Proposição 1.36). Então, segue da demonstração do Teorema 1.46 que

$$\Psi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V \quad \text{com} \quad \Psi_\alpha[p, v] = (\pi_P(p), \rho(\psi_\alpha^2(p))v)$$

são trivializações de E^p . Com elas, temos

$$\begin{aligned} \Psi_\beta^{-1}(x, v) &= [s_\beta(x), v] \\ &= [s_\alpha(x) \triangleleft (g_{\alpha\beta})_x, v] \\ &= [s_\alpha(x), (g_{\alpha\beta})_x \cdot v] \\ &= \Psi_\alpha^{-1}(\pi_P(s_\alpha(x)), \rho \circ (g_{\alpha\beta})_x v) \\ &= \Psi_\alpha^{-1}(x, \rho \circ (g_{\alpha\beta})_x v) \end{aligned}$$

o que permite concluir que as funções transição de E^p são $\widetilde{(g_{\alpha\beta})}_x = \rho \circ (g_{\alpha\beta})_x$. $\square$

Os próximos resultados que iremos enunciar serão fundamentais para construirmos a *conexão de Ashtekar*, no último capítulo.

TEOREMA 1.49 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e*

$$\begin{aligned} \rho_V : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ \rho_W : G &\rightarrow \text{GL}(W) \end{aligned}$$

duas representações equivalentes². Então, os fibrados associados E^{ρ_V} e E^{ρ_W} são isomorfos.

Demonstração. Como as representações ρ_V e ρ_W são equivalentes, existe um isomorfismo

$$\mathfrak{f} : V \rightarrow W \quad \text{com} \quad \mathfrak{f}(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)\mathfrak{f}(v).$$

Com ele, definimos a aplicação $\mathfrak{F} : E^{\rho_V} \rightarrow E^{\rho_W}$ dada por $\mathfrak{F}[p, v] = [p, \mathfrak{f}(v)]$. Temos que

- (i) $\mathfrak{F}$ preserva fibras e é bijeção por construção.
- (ii) $\mathfrak{F}$ é bem definida: para provar que $\mathfrak{F}[p \triangleleft g, \rho_V(g^{-1})v] = \mathfrak{F}[p, v]$, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[p \triangleleft g, \rho_V(g)^{-1}v] &= [p \triangleleft g, \mathfrak{f}(\rho_V(g)^{-1}v)] \\ &= [p \triangleleft g, \rho_W(g)^{-1}\mathfrak{f}(v)] \\ &= [p, \mathfrak{f}(v)] \\ &= \mathfrak{F}[p, v] \end{aligned}$$

pois, pelo Lema 1.45, os elementos de E^{ρ_W} são classes de equivalência tais que

$$\begin{aligned} (p, \mathfrak{f}(v)) &= \left((p \triangleleft g) \triangleleft g^{-1}, \rho_W(g)(\rho_W(g)^{-1}\mathfrak{f}(v)) \right) \\ &\sim (p \triangleleft g, \rho_W(g)^{-1}\mathfrak{f}(v)) \end{aligned}$$

²com respeito à Definição 1.25.

(iii) $\mathfrak{F}$ é diferenciável: tomando duas cartas

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha^V &: \pi_{E^{\rho_V}}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V \\ \Psi_\alpha^W &: \pi_{E^{\rho_W}}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times W\end{aligned}$$

dos fibrados E^{ρ_V} e E^{ρ_W} tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\pi_{E^{\rho_V}}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \pi_{E^{\rho_W}}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \uparrow (\Psi^V)^{-1} & & \downarrow \Psi^W \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times V & \xrightarrow{\Psi_W \circ \mathfrak{F} \circ (\Psi^V)^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times W\end{array}$$

Denotando $p \in P_x$, obtemos que

$$\begin{aligned}(\Psi_\alpha^W \circ \mathfrak{F} \circ (\Psi_\beta^V)^{-1})(\pi_P(p), v) &= \Psi_\alpha^W \left(\mathfrak{F} \left[p, \rho_V(\psi_\beta^2(p))^{-1} v \right] \right) \\ &= \Psi_\alpha^W \left[p, \rho_W(\psi_\beta^2(p))^{-1} \mathfrak{f}(v) \right] \\ &= \left(x, \rho_W(\psi_\alpha^2(p)) \rho_W(\psi_\beta^2(p))^{-1} \mathfrak{f}(v) \right) \\ &= \left(x, \rho_W(\psi_\alpha^2 \circ (\psi_\beta^2)^{-1})(p) \right) \mathfrak{f}(v) \\ &= \left(x, \rho_W \circ (g_{\alpha\beta})_x \mathfrak{f}(v) \right).\end{aligned}$$

Como Ψ_α^W e $(\Psi_\beta^V)^{-1}$, a representação ρ_W e as funções transição $(g_{\alpha\beta})_x$ são todos mapas diferenciáveis, segue que $\mathfrak{F}$ é diferenciável. Analogamente, $\mathfrak{F}^{-1}$ é diferenciável. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.50 *Seja $(\text{Fr}(M), \pi, M; \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ o fibrado dos referenciais de M e seja ρ a representação induzida pela ação $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação usual de matrizes à esquerda. Então,*

$$\mathfrak{B} : \text{Fr}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n \rightarrow TM \quad \text{com} \quad \mathfrak{B}([e_x, v]) = \left(x, \sum_i v^i e_i \right).$$

é um isomorfismo entre fibrados vetoriais.

Demonstração. Por construção, o mapa $\mathfrak{B} : \text{Fr}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ dado por

$$\mathfrak{B}([e_x, v]) = \left(x, \sum_i v^i e_i \right)$$

é bem definido: se $(e', v') \sim (e, v) \in \text{Fr}(M)_x$, existe $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$(e', v') = (e \triangleleft A, A^{-1} \cdot v).$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}|_{\pi^{-1}(x)}(e', v') &= (e \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot v) \\ &= e \cdot v \\ &= \mathfrak{B}|_{\pi^{-1}(x)}(e, v).\end{aligned}$$

Como $\{e_i\}$ é base de TM_x , segue que $\mathfrak{B}_x$ é um isomorfismo. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 1.49 e da Proposição 1.50, temos:

COROLÁRIO 1.51 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana tal que a métrica g possui assinatura (k, l) . Sendo $(\text{Fr}_g^+(M), \pi, M; \text{SO}(k, l))$ o fibrado dos referenciais ortonormais orientados de M e ρ a representação induzida ação $\text{SO}(k, l) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matrizes à esquerda, temos o isomorfismo entre fibrados vetoriais*

$$\text{Fr}_g^+(M) \times_{\rho} \mathbb{R}^n \simeq TM.$$

Um caso particular de fibrado associado E^{ρ} e que será recorrentemente utilizado ocorre quando a representação ρ é a representação Adjunta:

DEFINIÇÃO 1.52 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. O fibrado vetorial associado a P e à representação adjunta Ad é chamado de **fibrado adjunto**, denotado por $E^{\text{ad}} = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$.*

Para o próximo resultado, utilizamos um resultado muito especial que ocorre em dimensão três e é bem discutido em Woit [76, p. 75]:

PROPOSIÇÃO 1.53 *A representação Adjunta*

$$\text{Ad} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{so}(3))$$

é equivalente à representação usual

$$\rho : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^3).$$

Demonstração. Ver Apêndice A.5. □

Como consequência imediata da Proposição 1.53 e do Teorema 1.49, temos:

COROLÁRIO 1.54 *Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana e $\text{Fr}_g^+(\Sigma)$ o fibrado dos referenciais ortonormais orientados sobre Σ . Então,*

$$\text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \simeq \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3).$$

em que ρ e Ad são as representações enunciadas na Proposição 1.53.

Capítulo 2

Conexões em Fibrados

Seguindo as referências Hamilton [37], Tu [71] e Biezuner [13], este capítulo se dedica a definir conexões em fibrados principais. Dado um fibrado principal $(P, \pi, M; G)$, existem duas maneiras distintas de se fazer isso:

- (i) O primeiro método consiste em definir a **conexão de Ehresmann**, utilizando subfibrados verticais $\mathcal{V}P$ e horizontais $\mathcal{H}P$ do fibrado tangente TP ;
- (ii) O segundo método consiste em definir a **forma de conexão**, um tipo muito particular de forma diferencial que toma valor na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

Como será provado no Teorema 2.41, estas noções de conexão são equivalentes, ou seja, toda conexão de Ehresmann induz uma forma de conexão e vice versa. Posteriormente, aprofundaremos a análise para conexões definidas no fibrado dos referenciais de uma variedade Riemanniana (ou semi-Riemanniana), provando haver uma relação biunívoca entre elas e as derivadas covariantes (Teoremas 2.51 e 2.52).

O restante do capítulo dedica-se a mostrar como conexões em um fibrado principal induzem, através da noção de transporte paralelo, uma derivada covariante em seu fibrado associado. Com destaque ao Teorema 2.64, que permite definir uma derivada covariante em fibrados associados (Definição 2.65).

2.1 CONEXÃO DE EHRESMANN

Nesta seção veremos como as noções de *fibrados verticais* e *fibrados horizontais* permitem definir a chamada conexão de Ehresmann. Apesar de não ser estritamente necessário para esse fim, convém começar o capítulo definindo campos invariantes e campos fundamentais, que serão utilizados recorrentemente em todo o capítulo.

2.1.1 CAMPOS FUNDAMENTAIS

DEFINIÇÃO 2.1 *Seja G um grupo de Lie. Então, um campo vetorial $X \in \Gamma(TG)$ é **invariante à esquerda** se $(L_g)_*X = X$ para todo $g \in G$. Explicitamente, temos*

$$D_h(L_g)(X_h) = X_{gh} \quad \forall h, g \in G.$$

Consequentemente, um campo invariante à esquerda é inteiramente determinado por seu valor em um ponto. Isso será útil para definirmos *campos fundamentais*, mais adiante.

PROPOSIÇÃO 2.2 *Seja G um grupo de Lie. Todo vetor $X_e \in TG_e$ possui uma única extensão a um campo $X \in \Gamma(TG)$ invariante à esquerda.*

Demonstração. Ver Biezuner [13, p. 282], Corolário 13.24. $\square$

O teorema a seguir define a notação para as curvas integrais de um campo invariante:

TEOREMA 2.3 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \Gamma(TG)$ a extensão invariante à esquerda do vetor $X_e \in \mathfrak{g}$. Então, a curva integral maximal*

$$\gamma_X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad \gamma_X(0) = e, \quad \gamma_X'(0) = X_e$$

do campo X satisfaz as seguintes propriedades:

- a) γ_X é definida em todo $\mathbb{R}$;
- b) $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie;
- c) $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver Apêndice A.2. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.4 *Na literatura, o homomorfismo $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ do Teorema 2.3 é comumente chamado de **grupo a um parâmetro**.*

Dado um aberto U de G , existe um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ em que podemos definir o **fluxo** do campo $X \in \Gamma(TG)$ como sendo o mapa

$$\phi : U \times I \rightarrow U \quad \text{tal que} \quad \phi(g, t) = (\gamma_X|_U)_g(t)$$

em que $(\gamma_X|_U)_g$ é a curva integral de X que passa por $g \in U$. Denotaremos $\phi(g, t) = \phi_t(g)$.

DEFINIÇÃO 2.5 *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \Gamma(TG)$ a extensão invariante à esquerda do vetor $X_e \in \mathfrak{g}$. Definimos o **mapa exponencial***

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad \text{com} \quad \exp(X_e) = \gamma_X(1)$$

em que $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ é a curva integral maximal de X .

A escolha pelo nome *mapa exponencial* é justificada pela proposição a seguir:

PROPOSIÇÃO 2.6 *O mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ satisfaz as propriedades:*

- (i) *para todo $X_e \in \mathfrak{g}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, vale*

$$\exp((s+t)X_e) = \exp(sX_e)\exp(tX_e).$$

- (ii) *sendo $0 \in \mathfrak{g}$ e $X_e \in \mathfrak{g}$, temos*

$$\exp(-X_e) = (\exp X_e)^{-1} \quad \text{e} \quad \exp(0) = e.$$

Demonstração. Ver Apêndice A.6. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.7 *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \Gamma(TG)$ a extensão invariante à esquerda do vetor $X_e \in \mathfrak{g}$. Então, o fluxo ϕ do campo X é dado por*

$$\phi_t(g) = g \exp(tX_e).$$

Demonstração. É suficiente¹ mostrar que o mapa definido por

$$\tilde{\phi}_t(g) := g \exp(tX_e)$$

é uma curva integral do campo X que passa por $g \in G$. Para isso, temos

$$\tilde{\phi}_0(g) = L_g(\exp 0) = L_g(e) = g$$

e, utilizando que $X \in \Gamma(TG)$ é invariante à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \tilde{\phi}_t(g) &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \tilde{\phi}_{t+s}(g) \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L_g \left(\exp((t+s)X_e) \right) \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L_g \left(\exp(sX) \exp(\tau X_e) \right) \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L_{g \exp(sX)} (\tilde{\phi}_\tau(e)) \\ &= D_e \left(L_{\tilde{\phi}_s(g)} \right) (X_e) \\ &= X_{\tilde{\phi}_s(g)}. \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 2.8 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e seja $\triangleleft$ uma ação à direita de G em uma variedade diferenciável P . Para cada vetor $X_e \in \mathfrak{g}$, definimos o **campo fundamental** $\bar{X} \in \Gamma(TP)$ dado por*

$$\bar{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \triangleleft \exp(tX_e).$$

DEFINIÇÃO 2.9 *Seja $\triangleleft$ uma ação à direita de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável P . Definimos a **aplicação órbita** do ponto $p \in P$ como sendo o mapa:*

$$\phi_p : G \rightarrow P \quad \text{com} \quad \phi_p(g) = p \triangleleft g.$$

OBSERVAÇÃO 2.10 *Em termos da aplicação órbita, o campo fundamental é dado por:*

$$\bar{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \triangleleft \exp(tX_e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_p(\exp(tX_e)) = D_e(\phi_p)(X_e) = (\phi_p)_*(X_e).$$

TEOREMA 2.11 *Seja ϕ_p a aplicação órbita induzida pela ação à direita de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável P . Então, o mapa*

$$\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TP)$$

é um homomorfismo entre álgebras de Lie.

¹Pelo Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferenciais.

Demonstração. Sejam $X, Y \in \Gamma(TG)$ as extensões invariantes à esquerda dos vetores $X_e, Y_e \in \mathfrak{g}$. Temos que o mapa ϕ_* é um homomorfismo entre álgebras de Lie se

$$\phi_*([X, Y]_e) = [\phi_*(X_e), \phi_*(Y_e)].$$

Como $[X, Y]_e = [X_e, Y_e]$, é suficiente provar que

$$\overline{[X_e, Y_e]} = [\overline{X}, \overline{Y}].$$

Pelo Lema A.3, reescrevemos os campos fundamentais como

$$\begin{aligned}\overline{X}_{\phi_p(g)} &= D_g(\phi_p)(X_g) \\ \overline{Y}_{\phi_p(g)} &= D_g(\phi_p)(Y_g)\end{aligned}$$

de maneira que a equação abaixo decorre diretamente do Lema A.4:

$$[\overline{X}, \overline{Y}]_{\phi_p(g)} = D_g(\phi_p)([X, Y]_g).$$

Tomando $g = e$, temos $\phi_p(e) = p$ e

$$[\overline{X}, \overline{Y}]_p = D_e(\phi_p)([X, Y]_e) = \overline{[X, Y]}_p$$

□

PROPOSIÇÃO 2.12 *Seja $\triangleleft$ uma ação à direita de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável P e seja ϕ a aplicação órbita de G em P . Então, se a ação $\triangleleft$ é livre, o mapa*

$$\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TP) \quad \text{com} \quad (\phi_p)_*(X_e) = \overline{X}_p$$

é uma aplicação injetiva.

Demonstração. Ver Hamilton [37, p. 144], Proposição 3.4.3. □

Como consequência imediata do Teorema 2.11 e da Proposição 2.12, temos:

COROLÁRIO 2.13 *O espaço dos campos fundamentais em P é uma sub-álgebra de Lie de dimensão finita do espaço de campos $\Gamma(TP)$.*

O próximo resultado mostra que ações à direita (e, analogamente, à esquerda) preservam campos fundamentais. Para isso, definimos:

DEFINIÇÃO 2.14 *Seja G um grupo de Lie e P uma variedade diferenciável. Dado $g \in G$ e uma ação à direita $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$, definimos a **translação à direita***

$$r_g : P \rightarrow P \quad \text{com} \quad r_g(x) = x \triangleleft g$$

Naturalmente, pode-se definir a **translação à esquerda** l_g de maneira análoga.

PROPOSIÇÃO 2.15 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e seja $\triangleleft$ uma ação à direita de G em uma variedade diferenciável P . Para todo $X_e \in \mathfrak{g}$, temos que*

$$(r_g)_*(\overline{X}) = \overline{\text{Ad}_{g^{-1}} X_e}.$$

Demonstração. Observando que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_p} & P \\ R_g \downarrow & & \downarrow r_g \\ G & \xrightarrow{\phi_p} & P \end{array} \implies \phi_p \circ R_g = r_g \circ \phi_p,$$

podemos utilizar a Proposição 1.41 para obtermos

$$r_g \circ \phi_p \circ L_{g^{-1}} = \phi_p \circ R_g \circ L_{g^{-1}} = \phi_p \circ c_{g^{-1}}.$$

Assim, expressando o campo fundamental $\overline{X}_{p \triangleleft g^{-1}}$ em termos de $L_{g^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{p \triangleleft g^{-1}} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \triangleleft g^{-1}) \triangleleft \exp(tX_e) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_p(g^{-1} \exp(tX_e)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_p \circ L_{g^{-1}}(\exp(tX_e)), \end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} ((r_g)_* \overline{X})_p &= D_{p \triangleleft g^{-1}}(r_g) (\overline{X}_{p \triangleleft g^{-1}}) \\ &= D_{p \triangleleft g^{-1}}(r_g) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_p \circ L_{g^{-1}}(\exp(tX_e)) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (r_g \circ \phi_p \circ L_{g^{-1}})(\exp(tX_e)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_p \circ c_{g^{-1}}(\exp(tX_e)) \\ &= D_e(\phi_p) \circ D_e(c_{g^{-1}}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX_e) \right) \\ &= D_e(\phi_p) \circ \text{Ad}_{g^{-1}}(X_e) \\ &= (\overline{\text{Ad}_{g^{-1}} X_e})_p. \end{aligned}$$

□

2.1.2 SUBFIBRADOS VERTICAIS E HORIZONTAIS

DEFINIÇÃO 2.16 Dizemos que $(E', \pi', M; \mathbb{R}^{m'})$ é um **subfibrado vetorial** de um fibrado vetorial $(E, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ se

- a) $E' \subset E$ é uma subvariedade com $\pi' = \pi|_{E'}$;
- b) para todo $x \in M$, a fibra $E'_x = \mathbb{R}^{m'}$ é um subespaço vetorial da fibra $E_x = \mathbb{R}^m$.

O lema a seguir fornece uma condição suficiente para que uma união disjunta de subespaços vetoriais das fibras de um fibrado vetorial forme um subfibrado vetorial. Este resultado será utilizado na demonstração do Teorema 2.41:

LEMA 2.17 *Seja $(E, \pi, M; \mathbb{R}^n)$ um fibrado vetorial e*

$$F = \bigsqcup_{x \in M} F_x$$

um conjunto tal que $F_x = \mathbb{R}^k$ é um subespaço vetorial da fibra $E_x = \mathbb{R}^n$. Então, F é um subfibrado de E se, para cada $x \in M$, existir

- a) uma vizinhança $U \subset M$ de x ;*
- b) uma coleção de $m \geq k$ seções $s_I \in \Gamma(U; F)$ tal que*

$$F_y = \text{span}\{s_I\} \quad \forall y \in U.$$

Demonstração. Ver Tu [71, p. 175], Teorema 20.4. □

DEFINIÇÃO 2.18 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Definimos o **espaço tangente vertical** à variedade P sobre o ponto $z \in P_x$ como $\mathcal{V}P_z := T(P_x)_z$.*

PROPOSIÇÃO 2.19 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Então,*

$$\mathcal{V}P_z = \ker(D_z\pi) \quad \forall z \in P.$$

Demonstração. Seja $X_z \in \mathcal{V}P_z = T(P_x)_z$. Então, X_z pode ser interpretado como sendo o vetor tangente a uma curva $\gamma \subset P_x$ e, consequentemente,

$$\pi|_{\gamma} = \text{id}_M \implies D_z\pi(X_z) = 0 \implies \mathcal{V}P_z \subset \ker D_z\pi.$$

Por outro lado, como a projeção π do fibrado é uma submersão segue que a diferencial $D\pi$ é sobrejetiva em todo ponto e, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos

$$\begin{aligned} \dim(\ker D_z\pi) &= \dim P - \dim M \\ &= \dim G \\ &= \dim P_x \\ &= \dim T(P_x)_z. \end{aligned}$$

Consequentemente, conclui-se que $\mathcal{V}P_z = \ker D_z\pi$. □

DEFINIÇÃO 2.20 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Um **espaço tangente horizontal** à variedade P sobre o ponto $z \in P_x$ é um subespaço $\mathcal{H}P_z$ tal que*

$$TP_z = \mathcal{V}P_z \oplus \mathcal{H}P_z.$$

OBSERVAÇÃO 2.21 *Como consequência da definição, nota-se que o espaço tangente horizontal não é unicamente definido*

Como consequência da Proposição 2.19, temos:

COROLÁRIO 2.22 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado diferenciável e $z \in P_x$. Então,*

$$D_z \pi : \mathcal{H}P_z \rightarrow TM_x$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

De maneira análoga à construção do fibrado tangente à uma variedade, o conjunto dos espaços verticais e horizontais denotados, respectivamente, por

$$\mathcal{V}P = \bigsqcup_{z \in P} \mathcal{V}P_z \quad \text{e} \quad \mathcal{H}P = \bigsqcup_{z \in P} \mathcal{H}P_z$$

formam dois fibrados vetoriais. Mais especificamente, $\mathcal{V}P$ e $\mathcal{H}P$ são subfibrados vetoriais do fibrado tangente TP , chamados **fibrado vertical** e **fibrado horizontal**.

PROPOSIÇÃO 2.23 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e ϕ a aplicação órbita do grupo G na variedade P . Então, para todo $z \in P$ temos que*

$$(\phi_z)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}P_z$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Demonstração. Dado $z \in P_x$, temos

$$\phi_z(g) = z \triangleleft g \implies \phi_z : G \rightarrow P_x.$$

Consequentemente, obtemos que

$$\overline{X}_p = D_e(\phi_z)(X_e) \in T(P_x)_z = \mathcal{V}P_z.$$

Como $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathcal{V}P_z$ e ϕ_* é injetivo (Proposição 2.12), segue que ϕ_* é um isomorfismo. $\square$

DEFINIÇÃO 2.24 *Seja P uma variedade diferenciável. Uma **distribuição** em P é um subfibrado vetorial de TP .*

Temos o necessário para definirmos a conexão de Ehresmann:

DEFINIÇÃO 2.25 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Uma **conexão de Ehresmann** em P é uma distribuição horizontal $\mathcal{H}P$ que é invariante à direita.*

Em outras palavras, $\mathcal{H}P$ ser invariante à direita significa que

$$(r_g)_*(\mathcal{H}P_z) = \mathcal{H}P_{z \triangleleft g} \quad \forall z \in P, g \in G.$$

2.2 FORMAS DE CONEXÃO

Nesta seção vamos generalizar o conceito de formas diferenciais reais para formas que tomam valores em espaços vetoriais quaisquer. Em especial, veremos que as formas da conexão definidas sobre um fibrado principal são um tipo particular de formas vetoriais que tomam valores na álgebra de Lie do grupo estrutural do fibrado.

2.2.1 FORMAS VETORIAIS

DEFINIÇÃO 2.26 *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma k -forma W -valuada em V é uma aplicação linear alternada*

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \rightarrow W.$$

O espaço vetorial das k -formas W -valuadas é denotado por $\Lambda^k(V; W)$.

O próximo resultado mostra como uma k -forma W -valuada pode ser escrita explicitamente em termos de k -formas reais:

PROPOSIÇÃO 2.27 *Sejam V e W espaços vetoriais tal que $\dim W = m$ e $\{e_I\}$ é uma base de W . Então, ω é uma k -forma W -valuada se, e somente se, existe uma coleção $\{\omega^I\}$ de m k -formas reais em V tais que*

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_I \omega^I(v_1, \dots, v_k) e_I.$$

Demonstração. Para demonstrar a proposição, observamos que o enunciado pode ser traduzido como: toda base $\mathcal{B} = \{e_I\}$ de W induz um isomorfismo

$$\Lambda^k(V^*, W) \simeq_{\mathcal{B}} \underbrace{\Lambda^k(V^*, \mathbb{R}) \times \cdots \times \Lambda^k(V^*, \mathbb{R})}_{m \text{ vezes}}.$$

Seja $\text{pr}_i : W \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na i -ésima coordenada com relação a base $\{e_I\}$. Então,

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \xrightarrow{\omega} & W \\ & \searrow \omega^i & \downarrow \text{pr}_i \\ & & \mathbb{R} \end{array} \implies \omega^i := \text{pr}_i \circ \omega \in \Lambda^k(V^*, \mathbb{R}).$$

□

Um dos principais resultados auxiliares que será usado ao longo dessa seção é

PROPOSIÇÃO 2.28 *Existe um isomorfismo natural $\Lambda^k(V^*, W) \simeq \Lambda^k(V^*; \mathbb{R}) \otimes W$*

Demonstração. Ver Biezuner [13, p. 349], Proposição 18.6. □

Precisamos definir o produto exterior e a derivada exterior para formas com valores em espaços vetoriais arbitrários. Para isso, convém utilizar as permutações ordenadas:

DEFINIÇÃO 2.29 *Uma permutação σ de um conjunto*

$$S = \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$$

é uma (k, l) -permutação ordenada se satisfaz

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \cdots < \sigma(k), \\ \sigma(k+1) &< \cdots < \sigma(k+l). \end{aligned}$$

O conjunto das (k, l) -permutações ordenadas é denotado por $S(k, l)$.

Dado $\alpha \in \Lambda^k(M; \mathbb{R})$ e $\beta \in \Lambda^l(M; \mathbb{R})$, temos que o produto exterior entre α e β é

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k+l)} \text{sgn}(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) \beta(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}).$$

Vamos generalizá-lo para formas vetoriais:

DEFINIÇÃO 2.30 *Sejam V, W e Z espaços vetoriais e $*$: $V \times W \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear. Definimos o produto exterior*

$$\wedge_* : \Lambda^k(M, V) \times \Lambda^l(M, W) \rightarrow \Lambda^{k+l}(M, Z)$$

através da expressão:

$$(\alpha \wedge_* \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sgn}(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) * \beta(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}).$$

OBSERVAÇÃO 2.31 *Sem utilizar permutações ordenadas, tem-se*

$$(\alpha \wedge_* \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) * \beta(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}).$$

As expressões são equivalentes: existem $k!$ maneiras de se ordenar $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ e $l!$ maneiras de ordenar $\{\sigma(k+1), \dots, \sigma(k+l)\}$, totalizando $k!l!$ ordenações possíveis.

PROPOSIÇÃO 2.32 *Sejam $\alpha \in \Lambda^k(M, V)$ e $\beta \in \Lambda^l(M, W)$ formas vetoriais tais que*

$$\alpha = \sum_I \alpha^I \otimes v_I \quad \text{e} \quad \beta = \sum_J \beta^J \otimes w_J \quad (\text{Proposição 2.28})$$

e seja $$: $V \times W \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear. Então,*

$$\alpha \wedge_* \beta = \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes (v_I * w_J) \in \Lambda^{k+l}(M, Z).$$

Demonstração. Fixado $x \in M$, sejam $e_1, \dots, e_{k+l} \in TM_x$. Então,

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge_* \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sgn}(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) * \beta(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sgn}(\sigma) \left(\alpha^I(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)} v_I) \right) * \left(\beta^J(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}) w_J \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sgn}(\sigma) \alpha^I(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) \beta^J(e_{\sigma(k+1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}) (v_I * w_J) \\ &= \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \beta^J)(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k+l)}) (v_I * w_J). \end{aligned}$$

Para provar que $\alpha \wedge_* \beta$ é diferenciável, escrevemos

$$v_I * w_J = \sum_K c_{IJ}^K z_K$$

em que $\{z_K\}$ é uma base de Z . Então, temos

$$\alpha \wedge_* \beta = \sum_K \left(\sum_{I,J} c_{IJ}^K (\alpha^I \wedge \beta^J) \right) z_K,$$

de maneira que o resultado decorre de α^I, β^J serem diferenciáveis. $\square$

DEFINIÇÃO 2.33 *Seja V um espaço vetorial e $\{v_I\}$ uma base de V . Então, a **derivada exterior** de uma forma vetorial $\alpha \in \Lambda^k(M, V)$ é o operador*

$$d : \Lambda^k(M, V) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M, V) \quad \text{definido por} \quad d\alpha = \sum_I d\alpha^I \otimes v_I.$$

A derivada exterior entre formas reais é um produto graduado:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \quad \text{com} \quad \alpha \in \Lambda^k(M; \mathbb{R}).$$

Essa propriedade se mantém para formas vetoriais:

PROPOSIÇÃO 2.34 *Sejam V, W e Z espaços vetoriais,*

$$\begin{aligned} \alpha &\in \Lambda^k(M, V) \\ \beta &\in \Lambda^l(M, W), \end{aligned}$$

duas formas vetoriais e $$: $V \times W \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear. Então,*

$$d(\alpha \wedge_* \beta) = (d\alpha) \wedge_* \beta + (-1)^k \alpha \wedge_* (d\beta).$$

Demonstração. Sejam $\{v_I\}$ e $\{w_J\}$ bases de V e W , respectivamente. Então,

$$\alpha \wedge_* \beta = \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes (v_I * w_J).$$

Consequentemente, segue das propriedades usuais da derivada exterior $\wedge$ que

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge_* \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes (v_I * w_J) \\ &= \sum_{I,J} (d\alpha^I \wedge \beta^J + (-1)^k (\alpha^I \wedge d\beta^J)) \otimes (v_I * w_J) \\ &= \sum_{I,J} (d\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes (v_I * w_J) + (-1)^k \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge d\beta^J) \otimes (v_I * w_J) \\ &= d\alpha \wedge_* \beta + (-1)^k \alpha \wedge_* d\beta. \end{aligned}$$

□

2.2.2 FORMAS COM VALORES EM ÁLGEBRAS DE LIE

Formas vetoriais adquirem aspectos ainda mais interessantes quando o espaço vetorial em que ela toma valor é uma álgebra de Lie. Denotaremos o produto exterior entre duas formas com valores na álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ por $[\wedge]$.

DEFINIÇÃO 2.35 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com base $\{T_I\}$ e sejam*

$$\begin{aligned} \alpha &\in \Lambda^k(M, \mathfrak{g}) \\ \beta &\in \Lambda^l(M, \mathfrak{g}), \end{aligned}$$

formas vetoriais tais que

$$\alpha = \sum_I \alpha^I \otimes T_I \quad \text{e} \quad \beta = \sum_J \beta^J \otimes T_J. \quad (2.1)$$

Então, a Proposição 2.32 se escreve:

$$\alpha [\wedge] \beta = \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes [T_I, T_J].$$

PROPOSIÇÃO 2.36 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então, dado*

$$\alpha \in \Lambda^k(M, \mathfrak{g}) \quad \text{e} \quad \beta \in \Lambda^l(M, \mathfrak{g}),$$

temos que vale

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl+1} \beta \wedge \alpha.$$

Demonstração. Seja $\{T_I\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Então, expressando

$$\alpha = \sum_I \alpha^I \otimes T_I \quad \text{e} \quad \beta = \sum_J \beta^J \otimes T_J$$

pode-se obter que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \beta^J) \otimes [T_I, T_J] \\ &= (-1)^{kl+1} \sum_{I,J} (\beta^J \wedge \alpha^I) \otimes [T_I, T_J] \\ &= (-1)^{kl+1} \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO 2.37 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\alpha \in \Lambda^1(V, \mathfrak{g})$. Então, temos que:*

- a) $(\alpha \wedge \alpha)(w_1, w_2) = 2[\alpha(w_1), \alpha(w_2)];$
- b) $(\alpha \wedge \alpha) \wedge \alpha = 0.$

Demonstração. Seja $\{T_I\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Então, $\alpha = \sum_I \alpha^I \otimes T_I$. Consequentemente,

(i) a propriedade (a) é obtida de maneira direta:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \alpha)(v_1, v_2) &= \sum_{I,J} (\alpha^I \wedge \alpha^J)(v_1, v_2) \otimes [T_I, T_J] \\ &= \sum_{I,J} (\alpha^I(v_1)\alpha^J(v_2) - \alpha^I(v_2)\alpha^J(v_1)) \otimes [T_I, T_J] \\ &= \sum_{I,J} [\alpha^I(v_1) \otimes T_I, \alpha^J(v_2) \otimes T_J] - [\alpha^I(v_2) \otimes T_I, \alpha^J(v_1) \otimes T_J] \\ &= [\alpha(v_1), \alpha(v_2)] - [\alpha(v_2), \alpha(v_1)] \\ &= 2[\alpha(v_1), \alpha(v_2)]. \end{aligned}$$

(ii) recorrendo ao resultado anterior e à identidade de Jacobi, temos:

$$\begin{aligned} [(\alpha \wedge \alpha) \wedge \alpha](v_1, v_2, v_3) &= \sum_{\sigma \in S(2,1)} \text{sgn}(\sigma) [(\alpha \wedge \alpha)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}), \alpha(v_{\sigma(3)})] \\ &= [(\alpha \wedge \alpha)(v_1, v_2), \alpha(v_3)] - [(\alpha \wedge \alpha)(v_1, v_3), \alpha(v_2)] \\ &\quad + [(\alpha \wedge \alpha)(v_2, v_3), \alpha(v_1)] \\ &= 2([[\alpha(v_1), \alpha(v_2)], \alpha(v_3)] - [[\alpha(v_1), \alpha(v_3)], \alpha(v_2)] \\ &\quad + [[\alpha(v_2), \alpha(v_3)], \alpha(v_1)]) \\ &= 2([[\alpha(v_1), \alpha(v_2)], \alpha(v_3)] + [[\alpha(v_3), \alpha(v_1)], \alpha(v_2)] \\ &\quad + [[\alpha(v_2), \alpha(v_3)], \alpha(v_1)]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Um caso de particular interesse ocorre quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Nesse caso, é possível utilizar tanto o produto matricial quanto o colchete de Lie, relacionados pela expressão:

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \quad \text{para } A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Sendo E_J^I a matriz cujas entradas (I, J) são 1 e as demais são zero, temos

$$E_J^I \cdot E_L^K = \delta_J^K E_L^I$$

e, através dessa base $\{E_J^I\}$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, a Proposição 2.28 resulta em

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{I,J} \alpha_I^J \otimes E_J^I, \\ \beta &= \sum_{K,L} \beta_K^L \otimes E_L^K. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos o produto exterior com relação ao produto de matrizes:

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\wedge} \beta &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes (E_J^I \cdot E_L^K) \\ &= \sum_{I,K,L} (\alpha_I^K \wedge \beta_K^L) \otimes E_L^I \end{aligned}$$

e o produto exterior com relação ao colchete de Lie

$$\alpha [\wedge] \beta = \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes [E_J^I, E_L^K].$$

PROPOSIÇÃO 2.38 *Sejam $\alpha \in \Lambda^k(M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ e $\beta \in \Lambda^l(M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$. Então,*

$$\alpha [\wedge] \beta = \alpha \dot{\wedge} \beta - (-1)^{kl} \beta \dot{\wedge} \alpha.$$

Demonstração. A expressão decorre diretamente da definição:

$$\begin{aligned} \alpha [\wedge] \beta &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes [E_J^I, E_L^K] \\ &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes (E_J^I \cdot E_L^K - E_L^K \cdot E_J^I) \\ &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes (\delta_J^K E_L^I - \delta_L^I E_J^K) \\ &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes (\delta_J^K E_L^I) - \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^J \wedge \beta_K^L) \otimes (\delta_L^I E_J^K) \\ &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^K \wedge \beta_K^L) \otimes E_L^I - \sum_{I,J,K,L} (\alpha_L^J \wedge \beta_K^L) \otimes E_J^K \\ &= \sum_{I,J,K,L} (\alpha_I^K \wedge \beta_K^L) \otimes E_L^I - (-1)^{kl} \sum_{I,J,K,L} (\beta_K^L \wedge \alpha_L^J) \otimes E_J^K \\ &= \alpha \dot{\wedge} \beta - (-1)^{kl} \beta \dot{\wedge} \alpha. \end{aligned}$$

□

Como consequência direta da Proposição 2.38, segue que:

COROLÁRIO 2.39 *Dado $\alpha \in \Lambda^k(M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, temos*

$$\alpha [\wedge] \alpha = \begin{cases} 2\alpha \dot{\wedge} \alpha & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

2.2.3 FORMA DE CONEXÃO EM FIBRADOS PRINCIPAIS

DEFINIÇÃO 2.40 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Então, definimos uma **forma de conexão** como sendo uma 1-forma $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ tal que:

- a) para todo $X_e \in \mathfrak{g}$: $\omega(\overline{X}) = X_e$.
- b) para todo $g \in G$: $(r_g)^*\omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$

TEOREMA 2.41 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Então, existe uma bijeção entre as conexões de Ehresmann e as formas de conexão. Mais especificamente:

- a) Seja $\mathcal{H}P$ uma conexão de Ehresmann em P . Então,

$$\omega(\overline{X} + Y) = X_e \quad \text{com} \quad Y \in \Gamma(\mathcal{H}P)$$

define uma forma de conexão em P .

- b) Seja $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ uma forma de conexão em P . Então,

$$(\mathcal{H}P)_z = \ker(\omega_z) \quad \text{com} \quad \omega_z = \omega|_{TP_z}$$

define uma conexão de Ehresmann $\mathcal{H}P$ em P .

Demonstração. Ver A.7. □

DEFINIÇÃO 2.42 Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, a **forma de Maurer-Cartan** é a aplicação $\mu_G \in \Lambda^1(G; \mathfrak{g})$ definida por

$$(\mu_G)_h(v) = D_h(L_{h^{-1}})(v) \quad \forall h \in G, v \in TG_h$$

PROPOSIÇÃO 2.43 Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Temos que a forma de Maurer-Cartan $\mu_G \in \Lambda^1(G; \mathfrak{g})$ é invariante à esquerda e satisfaz

$$(R_g)^* \mu_G = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \mu_G \quad \forall g \in G.$$

Demonstração. Ver A.8. □

PROPOSIÇÃO 2.44 Seja G um grupo de Lie munido de uma ação à direita $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ em uma variedade diferenciável P . Denotando a ação por $\phi(p, g) = p \triangleleft g$, temos que

$$D_{(p,g)}\phi : T(P \times G)_{(p,g)} \rightarrow TP_{p \triangleleft g}$$

é dada pela expressão

$$(D_{(p,g)}\phi)(X_p, Y_p) = D_p(r_g)(X_p) + \overline{\mu_G(Y_p)}_{p \triangleleft g}.$$

Demonstração. Ver A.9. □

DEFINIÇÃO 2.45 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e $\omega \in \Lambda^1(U; \mathfrak{g})$ uma forma de conexão. Dada uma seção local $s \in \Gamma(U; P)$, definimos a **conexão local**

$$\omega_s \in \Lambda^1(U; \mathfrak{g}) \quad \text{com} \quad \omega_s := s^*\omega.$$

A conexão local também é chamada de **campo de gauge**. Sendo

$$s_i : U_i \rightarrow P \quad \text{e} \quad s_j : U_j \rightarrow P$$

duas seções locais tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, segue da ação de G em P ser transitiva nas fibras que existe uma única função diferenciável

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad s_i = s_j \triangleleft g_{ij}.$$

OBSERVAÇÃO 2.46 Como comenta Biezuner [13, p. 411], as funções g_{ij} não são necessariamente as funções transição do fibrado principal P . Nesse contexto, elas são as chamadas **mudanças de gauge**.

O próximo resultado mostra como mudar coordenadas entre duas conexões locais:

PROPOSIÇÃO 2.47 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal com conexão $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ e

$$\begin{aligned} s_i : U_i &\rightarrow P \\ s_j : U_j &\rightarrow P \end{aligned}$$

duas seções locais tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sendo g_{ij} uma mudança de gauge, temos

$$\omega_j = \text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega_i + (g_{ij})^*(\mu_G). \quad (2.2)$$

em que $\omega_j = (s_j)^*\omega$ e $\omega_i = (s_i)^*\omega$ são as conexões locais.

Demonstração. Ver A.10. □

LEMA 2.48 Seja $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$ um grupo de Lie matricial. Então,

$$\text{Ad}_g(X_e) = g^{-1} \cdot X_e \cdot g \quad \forall g \in G, X_e \in \mathfrak{g}.$$

e a forma de Maurer-Cartan é

$$(\mu_G)_g(X_g) = g^{-1} \cdot X_g \quad \forall X_g \in TG_g.$$

Demonstração. Ver Biezuner [13, p. 412], Lema 21.35. □

Utilizando o Lema 2.48, temos:

COROLÁRIO 2.49 Dado um grupo de Lie matricial $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$, a Equação 2.2 presente na Proposição 2.47 se reescreve como:

$$\omega_j = (g_{ij})^{-1} \cdot \omega_i \cdot g_{ij} + (g_{ij})^{-1} \cdot d(g_{ij}).$$

2.3 CONEXÃO NO FIBRADO DOS REFERENCIAIS

Iremos especializar o estudo das formas de conexão definidas em fibrados principais para o caso dos fibrados dos referenciais, assim como analisaremos a relação que existe entre as formas da conexão e as derivadas covariantes.

LEMA 2.50 *Seja $\{(s_i, U_i)\}$ uma coleção de seções locais definidas no fibrado principal $(P, \pi, M; G)$. Se existe uma família $\{\omega_i \in \Lambda^1(U_i; \mathfrak{g})\}$ de conexões locais que satisfaz*

$$\omega_j = \text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega_i + (g_{ij})^*(\mu_G), \quad (2.3)$$

então existe uma única forma da conexão ω definida em P tal que $\omega_{s_i} = \omega_i$ para todo i .

Demonstração. Ver Baum [10, p. 79], Teorema 3.3. $\square$

TEOREMA 2.51 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Existe uma bijeção entre as derivadas covariantes em TM e as formas de conexão em $\Lambda^1(\text{Fr}(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$.*

Demonstração. Seja $\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ uma forma de conexão definida no fibrado dos referenciais em M e seja $\{E_{IJ}\}$ a base da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Então,

$$\omega = \sum_{I,J} \omega_I^J \otimes E_J^I \quad \text{com} \quad \omega_I^J \in \Lambda^1(\text{Fr}(M), \mathbb{R}).$$

Dado um referencial local $e = (e_i) \in \Gamma(U, \text{Fr}(M))$, temos as conexões locais

$$(\omega_e)_I^J = e^*(\omega_I^J).$$

Podemos associar a conexão ω a uma derivada covariante

$$\nabla^\omega : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^* \otimes TM)$$

através da expressão

$$\nabla_X^\omega e_J := \sum_I e_I \otimes (\omega_e)_J^I(X)$$

por extensão linear e pela regra do produto

$$\nabla_X^\omega(f e_j) := X(f) \otimes e_j + f \nabla_X^\omega e_j \quad \forall f \in C^\infty(U).$$

Dado outro referencial local $s \in \Gamma(U, \text{Fr}(M))$, seja $A : U \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ a função transição tal que $s = e \cdot A$. Por ser um grupo de Lie matricial, segue do Corolário 2.49 que

$$\omega_s = A^{-1} \cdot \omega_e \cdot A + A^{-1} \cdot dA \implies A \cdot \omega_s = dA + \omega_e \cdot A$$

Desse modo, sendo

$$\omega_e = \sum_{I,J} (\omega_e)_I^J \otimes E_J^I \quad \text{e} \quad \omega_s = \sum_{I,J} (\omega_s)_I^J \otimes E_J^I,$$

temos que a seguinte relação é satisfeita:

$$\sum_K A_K^L (\omega_s)_J^K = dA_J^L + \sum_I (\omega_e)_I^L A_J^I. \quad (2.4)$$

Com isso, vamos provar que a derivada covariante ∇^ω é bem-definida mostrando que

$$\nabla^\omega(e \cdot A)_J = \nabla^\omega s_J.$$

Utilizando a Expressão 2.4 na quinta linha, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla^\omega(e \cdot A)_J &= \nabla^\omega \left(\sum_I A_J^I e_I \right) \\
&= \sum_I \nabla^\omega(A_J^I e_I) \\
&= \sum_I (dA_J^I \otimes e_I + A_J^I \nabla^\omega e_I) \\
&= \sum_I \left(dA_J^I \otimes e_I + A_J^I \sum_L (\omega_e)_I^L \otimes e_L \right) \\
&= \sum_L \left(dA_J^L + \sum_I A_J^I (\omega_e)_I^L \right) \otimes e_L \\
&= \sum_L \left(\sum_K A_K^L (\omega_s)_J^K \right) \otimes e_L \\
&= \sum_K \left((\omega_s)_J^K \otimes \sum_L A_K^L e_L \right) \\
&= \sum_K (\omega_s)_J^K \otimes s_K \\
&= \nabla^\omega s_J.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dada derivada covariante

$$\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^* \otimes TM)$$

e um referencial local $e \in \Gamma(U, \text{Fr}(M))$, temos que existe $(\omega_e)_J^I \in \Lambda^1(U, \mathbb{R})$ tal que

$$\nabla e_J = \sum_I (\omega_e)_J^I \otimes e_I.$$

Dado outro referencial local $s \in \Gamma(U, \text{Fr}(M))$ tal que $s = e \cdot A$, temos

$$\nabla(e \cdot A)_J = \nabla s_J \implies (\omega_s)_J^I = \sum_{I,J} (A^{-1})_K^I (\omega_e)_L^K A_J^L + (A^{-1} \cdot dA)_J^I.$$

Tomando uma coleção de referenciais locais $\{(U_\alpha, e_\alpha)\}$, podemos definir

$$\omega_\alpha = \sum_{I,J} (\omega_{e_\alpha})_J^I E_I^J$$

de maneira que, pelo Lema 2.50, existe uma única forma de conexão

$$\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \quad \text{tal que} \quad (e_\alpha)^* \omega = \omega_\alpha.$$

□

Para o próximo resultado, convém relembrar a condição necessária para uma matriz fazer parte da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(k, l)$ do grupo ortogonal² $O(k, l)$. Sendo $n = k + l$, temos

$$\mathfrak{o}(k, l) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(n) : A^T = -\eta \cdot A \cdot \eta \right\} \quad \text{com} \quad \eta = \begin{bmatrix} -I_{k \times k} & 0 \\ 0 & I_{l \times l} \end{bmatrix}$$

²Para uma discussão mais detalhada sobre o grupo ortogonal $O(k, l)$, ver Hamilton [37, Seção 6.1], .

Em outros termos, definindo

$$\eta_{IJ} = \epsilon_I \delta_{IJ} \quad \text{com} \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{se } i \geq k+1 \\ -1 & \text{se } i \leq k \end{cases}$$

obtemos que $A \in \mathfrak{o}(k, l)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} A_{JI} &= - \sum_{K,L} \eta_{IK} A_{KL} \eta_{LJ} \\ &= - \sum_{K,L} \underbrace{(\epsilon_I \delta_{IK})}_{\eta_{IK}} A_{KL} \underbrace{(\epsilon_L \delta_{LJ})}_{\eta_{LJ}} \\ &= -\epsilon_I \epsilon_J A_{IJ}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Consequentemente, temos que $O_{IJ} = \epsilon_I E_{JI} - \epsilon_J E_{IJ} \in \mathfrak{o}(k, l)$:

$$\begin{aligned} -\epsilon_I \epsilon_J O_{IJ} &= -\epsilon_I \epsilon_J (\epsilon_I E_{JI} - \epsilon_J E_{IJ}) \\ &= \epsilon_I E_{IJ} - \epsilon_J E_{JI} \\ &= (\epsilon_I E_{JI} - \epsilon_J E_{IJ})^T \\ &= (O_{IJ})^T \end{aligned}$$

em que utilizamos na segunda linha que $(\epsilon_k)^2 = 1$ para qualquer k .

TEOREMA 2.52 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n tal que a métrica g possui assinatura (k, l) . Então, existe uma bijeção entre as derivadas covariantes em TM e as formas de conexão em $\Lambda^1(\text{Fr}_g(M), \mathfrak{o}(k, l))$.*

Demonstração. Seja $\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^* \otimes TM)$ uma derivada covariante métrica definida em TM . Dado um referencial ortonormal $e \in \Gamma(U, \text{Fr}_g(M))$, a obtenção de uma forma de conexão ω associada a ∇ é feita no Teorema 2.51. Portanto, resta apenas mostrar que ω_e toma valores em $\mathfrak{o}(k, l)$. Temos que

$$\begin{aligned} g(\nabla_X e_J, e_K) &= g\left(\sum_I (\omega_e)_{IJ}(X) e_I, e_K\right) \\ &= \epsilon_K (\omega_e)_{KJ}(X). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por ser uma conexão métrica, temos $\nabla g = 0$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X g)(e_J, e_K) \\ &= \underbrace{X(g(e_J, e_K))}_{=0} - g(\nabla_X e_J, e_K) - g(e_J, \nabla_X e_K) \\ &= -g(\nabla_X e_J, e_K) - g(e_J, \nabla_X e_K) \end{aligned}$$

Com isso, podemos obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \epsilon_K (\omega_e)_{KJ} &= g(\nabla e_J, e_K) \\ &= -g(e_J, \nabla e_K) \\ &= -\epsilon_J (\omega_e)_{JK}. \end{aligned}$$

Em particular, segue que $(\omega_e)_{II} = 0$ e, conseqüentemente, obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_e &= \sum_{I,J} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} \\
&= \sum_{I \neq J} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} \\
&= \sum_{I < J} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} + \sum_{J < I} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} \\
&= \sum_{I < J} \underbrace{(\epsilon_J)^2}_{=1} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} + \sum_{J < I} \underbrace{(\epsilon_I)^2}_{=1} (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} \\
&= \sum_{I < J} (\epsilon_J)^2 (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} + \sum_{I < J} (\epsilon_J)^2 (\omega_e)_{JI} E_{JI} \\
&= \sum_{I < J} (\epsilon_J)^2 (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} + \sum_{I < J} \epsilon_J (\epsilon_J (\omega_e)_{JI}) E_{JI} \\
&= \sum_{I < J} (\epsilon_J)^2 (\omega_e)_{IJ} E_{IJ} - \sum_{I < J} \epsilon_J (\epsilon_I (\omega_e)_{IJ}) E_{JI} \\
&= \sum_{I < J} \epsilon_J (\omega_e)_{IJ} (\epsilon_J E_{IJ} - \epsilon_I E_{JI}) \\
&= \sum_{I < J} \epsilon_J (\omega_e)_{IJ} O_{JI}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

em que $O_{JI} = \epsilon_J E_{IJ} - \epsilon_I E_{JI}$ é uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(k, l)$. Por outro lado, seja

$$\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}_g(M), \mathfrak{o}(k, l))$$

uma forma de conexão. Com ela, podemos obter de maneira bem-definida (Teorema 2.51) a derivada covariante definida pela expressão abaixo:

$$\nabla^\omega e_J = \sum_I (\omega_e)_{IJ} \otimes e_I.$$

Resta mostrar que ∇^ω é uma conexão métrica: como $\omega(X) \in \mathfrak{o}(k, l)$, a Equação 2.5 dá

$$(\omega_e)_{JI} = -\epsilon_I \epsilon_J (\omega_e)_{IJ}$$

e, com isso, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
g(\nabla^\omega e_I, e_J) &= \epsilon_I (\omega_e)_{IJ} \\
&= -\epsilon_J (\omega_e)_{JI} \\
&= -g(\nabla^\omega e_J, e_I).
\end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 2.53 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana cuja métrica possui assinatura (k, l) . Então, a **conexão** associada à derivada covariante de Levi-Civita*

$$\nabla^M : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \otimes \Gamma(TM^*)$$

*é chamada de **conexão de Levi-Civita** e será denotada por*

$$\omega^{LC} \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(M), \mathfrak{o}(k, l)).$$

Dado um referencial local $e \in \Gamma(U, \text{Fr}_g^+(M))$, podemos utilizar a Equação 2.6 na Expressão 2.7 para obtermos que

$$(\omega^{\text{LC}})_e := \sum_{I < J} \epsilon_I \epsilon_J g(\nabla^{\text{M}} e_I, e_J) O_{IJ}. \quad (2.8)$$

Agora, vamos especializar a discussão para $\mathfrak{so}(3)$:

DEFINIÇÃO 2.54 *Seja Σ uma variedade Riemanniana. Então, a **conexão** associada à derivada covariante de Levi-Civita*

$$\nabla^{\text{LC}} : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma) \otimes \Gamma(T\Sigma^*)$$

é chamada de **conexão de Levi-Civita** e será denotada por

$$\omega^{\text{LC}} \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3)).$$

De maneira análoga, dado um referencial local $e \in \Gamma(U, \text{Fr}_g^+(\Sigma))$ temos

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{e} & \text{Fr}_g^+(\Sigma) \\ & \searrow & \downarrow \omega^{\text{LC}} \\ & & \mathfrak{so}(3) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \omega_e^{\text{LC}} := e^*(\omega^{\text{LC}}) \in \Lambda^1(U, \mathfrak{so}(3))$$

Seja $\{O_{ij}\}$ a base de $\mathfrak{so}(3)$ dada por $O_{ij} = -(E_{ij} - E_{ji}) \in \mathfrak{so}(3)$:

$$O_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Então, a Expressão 2.8 da conexão (ω_e^{LC}) se escreve como:

$$\omega_e^{\text{LC}} = \sum_{i < j} \langle \nabla^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle O_{ij}.$$

Contudo, para provar o importante Teorema 4.8 que iremos enunciar mais adiante, é conveniente utilizar a base $\{T_i\}_{jk} = -\epsilon_{ijk}$ de $\mathfrak{so}(3)$, dada explicitamente por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As duas bases se relacionam pela expressão

$$O_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} T_k.$$

Desse modo, podemos reescrever a conexão ω_e^{LC} como

$$\begin{aligned} \omega_e^{\text{LC}} &= \sum_{i < j} \langle \nabla^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \left(\sum_k \epsilon_{ijk} T_k \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \langle \nabla^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \right) T_k. \end{aligned}$$

Resumidamente, obtivemos que

$$\omega_e^{\text{LC}} = \sum_k (\Gamma_e)_k T_k \quad \text{com} \quad (\Gamma_e)_k := \frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \langle \nabla^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \in \Lambda^1(U, \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

2.4 CONEXÃO EM FIBRADOS ASSOCIADOS

DEFINIÇÃO 2.55 *Seja P uma variedade diferenciável e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que uma k -forma $\omega \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ é*

a) **horizontal** se

$$\omega_z(X_1, \dots, X_k) = 0 \quad \forall z \in P$$

sempre que $X_i \in \mathcal{V}P_z$ para algum i .

b) **adjunta** se

$$(r_g)^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega \quad \forall g \in G.$$

O espaço das k -formas horizontais adjuntas $\mathfrak{g}$ -valuadas em P é $\Lambda_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$.

PROPOSIÇÃO 2.56 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal e $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ duas formas de conexão em P . Então, temos que*

$$\omega_2 - \omega_1 \in \Lambda_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}}.$$

Demonstração. Por serem formas de conexão, temos que

$$\begin{aligned} (r_g)^* \omega_1 &= \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_1 & \implies & (r_g)^* (\omega_2 - \omega_1) = (r_g)^* \omega_2 - (r_g)^* \omega_1 \\ (r_g)^* \omega_2 &= \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_2 & & = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_2 - \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_1 \\ & & & = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (\omega_2 - \omega_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\overline{X} \in \Gamma(\mathcal{V}P)$ o campo fundamental de um elemento $X_e \in \mathfrak{g}$. Então,

$$(\omega_2 - \omega_1)(\overline{X}) = \omega_2(\overline{X}) - \omega_1(\overline{X}) = X_e - X_e = 0$$

□

TEOREMA 2.57 *Seja $E^{\text{Ad}} = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação Adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$. Então, vale o isomorfismo*

$$\Lambda_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g})^{\text{Ad}} \simeq \Lambda^k(M, E^{\text{Ad}}).$$

Demonstração. Vamos considerar a aplicação

$$\Phi : \Lambda_{\text{hor}}^k(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda^k(M, E^{\text{Ad}})$$

definida por

$$(\Phi \circ \overline{\omega})_x(X_1, \dots, X_k) = [z, \overline{\omega}_z(Y_1, \dots, Y_k)] \in E_x^{\text{Ad}} \quad (2.10)$$

em que $\pi(z) = x \in M$ e $\{X_i\}, \{Y_i\}$ são, respectivamente, campos em TM e TP tais que

$$X_i = \pi_* Y_i.$$

Para mostra que Φ é bem definida é preciso mostrar que Φ independe tanto dos campos $\{Y_i\}$ quanto dos ponto $z \in P_x$ utilizados. Assim, sejam $\{Y_i\}$ e $\{Y'_i\}$ campos tais que

$$\pi_* Y_i = X_i = \pi_* Y'_i.$$

Então, decorre de $\pi_*(Y_i - Y'_i) = 0$ que $Y_i - Y'_i$ é um campo vertical e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_z(Y'_1, \dots, Y'_k) &= \bar{\omega}_z((Y_1 + (Y'_1 - Y_1), \dots, Y_k + (Y'_k - Y_k))) \\ &= \bar{\omega}_z(Y_1, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

Seja $z' \in P_x$ outro ponto sobre a fibra P_x . Pela Observação 1.28, sabe-se que $P_x = \text{Orb}_{\triangleleft}(h)$ para algum $h \in G$. Em particular, $z' = z \triangleleft g^{-1}$ para algum $g \in G$ e, com isso, temos

$$\begin{aligned} [z', \bar{\omega}_{z'}(Y_1, \dots, Y_k)] &= [z \triangleleft g^{-1}, \bar{\omega}_{z \triangleleft g^{-1}}(Y_1, \dots, Y_k)] \\ &= [(z \triangleleft g^{-1}) \triangleleft g, \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (\bar{\omega}_{z \triangleleft g^{-1}})](Y_1, \dots, Y_k) \\ &= [z, \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \bar{\omega}_{z \triangleleft g^{-1}}(Y_1, \dots, Y_k)] \\ &= [z, ((r_g)^* \bar{\omega})_{z \triangleleft g^{-1}}(Y_1, \dots, Y_k)] \\ &= [z, \bar{\omega}_z((r_g)_* Y_1, \dots, (r_g)_* Y_k)] \end{aligned}$$

em que a segunda linha utiliza o fato dos elementos do fibrado associado serem uma classe de equivalência sobre a ação definida no Lema 1.45. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \pi_*((r_g)_* Y_i) &= (\pi \circ r_g)_* Y_i \\ &= \pi_* Y_i. \end{aligned}$$

Agora, seja $\omega \in \Lambda^k(M, E^{\text{Ad}})$. Definindo $\bar{\omega} \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ por

$$[p, \bar{\omega}_z(Y_1, \dots, Y_k)] = \omega_x(\pi_* Y_1, \dots, \pi_* Y_k), \quad (2.11)$$

temos que a aplicação Φ é uma bijeção linear por construção. Dada uma seção $s \in \Gamma(U; P)$,

$$\omega(X_1, \dots, X_k)|_U = [s, \bar{\omega}(s_* X_1, \dots, s_* X_k)] \in \Gamma(U, E^{\text{Ad}})$$

mostra que $\omega \in \Lambda^k(M, E^{\text{Ad}})$. □

2.4.1 TRANSPORTE PARALELO

DEFINIÇÃO 2.58 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal com conexão ω e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Então, a curva $\gamma^H : I \rightarrow P$ é o **levantamento horizontal** da curva γ se*

- a) $\pi \circ \gamma^H = \gamma$;
- b) $(\gamma^H)'(t) \in \mathcal{H}P_{\gamma^H(t)}$ para todo $t \in I$.

TEOREMA 2.59 (Existência e Unicidade) *Seja (P, π, M) um fibrado principal com conexão ω e seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M com $\gamma(a) = p$. Para cada $z \in \pi^{-1}(p)$ existe um único levantamento horizontal γ_z^H tal que $\gamma_z^H(a) = z$.*

Demonstração. Ver Biezuner [13, p. 416], Teorema 21.42. $\square$

DEFINIÇÃO 2.60 Seja $(P, \pi, M; G)$ fibrado principal com conexão ω e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Definimos o **transporte paralelo** em P ao longo da curva γ como sendo a aplicação

$$\Pi_\gamma^\omega : P_{\gamma(0)} \rightarrow P_{\gamma(1)} \quad \text{com} \quad \Pi_\gamma^\omega(z) = \gamma_z^H(1).$$

PROPOSIÇÃO 2.61 Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal com conexão ω . Então, o transporte paralelo Π_γ^ω satisfaz as seguintes propriedades:

- a) é uma aplicação suave que independe da parametrização da curva γ .
- b) se $\gamma_1 * \gamma_2$ é a concatenação de duas curvas γ_1, γ_2 em M , temos

$$\Pi_{\gamma_1 * \gamma_2}^\omega = \Pi_{\gamma_1}^\omega \circ \Pi_{\gamma_2}^\omega.$$

- c) sendo γ^- a curva γ com orientação trocada. Então,

$$\Pi_{\gamma^-}^\omega = \left(\Pi_\gamma^\omega\right)^{-1}$$

- d) é G -equivariante: para todo $g \in G$ vale

$$\Pi_\gamma^\omega \circ r_g = r_g \circ \Pi_\gamma^\omega.$$

Demonstração. Ver Hamilton [37, p. 289], Teorema 5.8.4. $\square$

Isso nos permite definir a noção de transporte paralelo em fibrados associados:

DEFINIÇÃO 2.62 Seja $E^\rho = P \times_\rho V$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação ρ e seja ω uma conexão em P . Definimos o **transporte paralelo** em E^ρ ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ como sendo o mapa

$$\Pi_\gamma^{E^\rho, \omega} : E_{\gamma(0)}^\rho \rightarrow E_{\gamma(1)}^\rho \quad \text{com} \quad \Pi_\gamma^{E^\rho, \omega}([p, v]) = [\Pi_\gamma^\omega(p), v].$$

PROPOSIÇÃO 2.63 O transporte paralelo $\Pi_\gamma^{E^\rho, \omega}$ é um isomorfismo linear bem definido.

Demonstração. Por construção, Π_γ^ω é uma aplicação linear bijetiva, ou seja, um isomorfismo linear. Portanto, basta provar que é bem definido:

$$(p, v) \sim (p', v') \in E_{\gamma(0)} \implies \exists g \in G : (p', v') = (p \triangleleft g, \rho(g)^{-1}v)$$

e, como Π_γ^ω é G -equivariante, temos

$$\begin{aligned} [\Pi_\gamma^\omega(p'), v'] &= [\Pi_\gamma^\omega(p \triangleleft g), \rho(g)^{-1}v] \\ &= [\Pi_\gamma^\omega(p) \triangleleft g, \rho(g)^{-1}v] \\ &= [\Pi_\gamma^\omega(p), v]. \end{aligned}$$

$\square$

2.4.2 DERIVADA COVARIANTE NO FIBRADO ASSOCIADO

Seja $E^\rho = P \times_\rho V$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação ρ e seja ω uma conexão em P . Dada uma seção $\Phi \in \Gamma(M, E^\rho)$ e um vetor $X \in TM_x$ qualquer, podemos é possível escolher uma curva

$$\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M \quad \text{tal que} \quad \gamma(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = X.$$

Com ela, pode-se transportar paralelamente o vetor $\Phi(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$ até a fibra E_p :

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\Pi_{\gamma_t}^{E^\rho, \omega} \right)^{-1} (\Phi \circ \gamma)(t) \in E_x^\rho.$$

em que γ_t denota a restrição da curva γ que começa no tempo 0 e termina no tempo t .

O próximo resultado é peça fundamental para obtermos a expressão da derivada covariante com respeito à conexão de Ashtekar, mais adiante.

TEOREMA 2.64 *Seja $E^\rho = P \times_\rho V$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação ρ e seja ω uma conexão em P . Dada uma seção $\Phi \in \Gamma(M, E^\rho)$, uma seção local $s \in \Gamma(U; P)$ e uma aplicação $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\Phi = [s, \phi]$, temos que*

$$D(\Phi, \gamma, p, \omega) = [s(p), \phi_*(X_p) + (\rho_* \circ \omega_s)(X_p)\phi(p)].$$

Demonstração. Como temos $s \in \Gamma(U; P)$ e as fibras P_x são difeomorfas a G para todo $x \in M$, existe uma única curva $q(t) : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow P_x$ tal que

$$\Pi_{\gamma_t}^\omega(q(t)) = (s \circ \gamma)(t).$$

Assim, denotando $q(t) = s(x) \triangleleft g(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\Pi_{\gamma_t}^{E^\rho, \omega} \right)^{-1} ((\phi \circ \gamma)(t)) &= \left[\left(\Pi_{\gamma_t}^\omega \right)^{-1} (s \circ \gamma)(t), (\phi \circ \gamma)(t) \right] \\ &= \left[\left(\Pi_{\gamma_t}^\omega \right)^{-1} (\Pi_{\gamma_t}^\omega(q(t))), (\phi \circ \gamma)(t) \right] \\ &= [s(x) \triangleleft g(t), (\phi \circ \gamma)(t)] \\ &= [s(x), \rho(g(t))(\phi \circ \gamma)(t)]. \end{aligned}$$

Analisando em $t = 0$, obtemos

$$s(x) = s(\gamma(0)) = \Pi_{\gamma_0}^\omega(q(0)) = s(x) \triangleleft g(0) \implies g(0) = e \in G.$$

Consequentemente, segue que $g'(0) \in TG_e = \mathfrak{g}$. Portanto,

$$\begin{aligned} D(\Phi, \gamma, x, \omega) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [s(x), \rho(g(t))(\phi \circ \gamma)(t)] \\ &= [s(x), \rho_*(g'(0))\phi(\gamma(0)) + \rho(g(0))\phi'(\gamma(0))\gamma'(0)] \\ &= [s(x), \rho_*(g'(0))\phi(x) + (\phi_*)_x X] \end{aligned}$$

Resta explicitar o termo $\rho_*(g'(0))$. Para isso, observamos que o termo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi_{\gamma_t}^\omega(q(t)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s(\gamma(t)) \\ &= (s_*)_x X \\ &= ds(X). \end{aligned}$$

também pode ser calculado de outra maneira:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi_{\gamma_t}^\omega(q(t)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{s(x) \triangleleft g(t)}^H(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_{g(t)} \circ \gamma_{s(x)}^H(t) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_{g(t)} \right) \circ \Pi_{\gamma_0}^\omega(s(x)) + r_{g(0)} \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi_{\gamma_t}^\omega(s(x)) \right) \\ &= s(x) \triangleleft g'(0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi_{\gamma_t}^\omega(s(x)) \\ &= q'(0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi_{\gamma_t}^\omega(s(x)). \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões e utilizando que $\Pi_{\gamma_t}^\omega(s(x)) \in \ker(\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} (s^*\omega)(X) &= \omega(ds(X)) \\ &= \omega(q'(0)). \end{aligned}$$

Como $g(0) \in \mathfrak{g}$, podemos definir seu campo fundamental $\overline{g'(0)}$ de maneira que

$$q'(0) = \overline{g'(0)}_{s(x)} \implies \omega(q'(0)) = g'(0).$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \rho_*(g'(0)) &= \rho_*(q'(0)) \\ &= \rho_*((s^*\omega)(X)) \\ &= \rho_*(\omega_s(X)). \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 2.65 Seja $E^\rho = P \times_\rho V$ o fibrado associado ao fibrado principal $(P, \pi, M; G)$ e à representação ρ e seja ω uma conexão em P . Dada uma seção $\Phi \in \Gamma(M; E^\rho)$, definimos a **derivada covariante** de Φ na direção de $X \in \Gamma(TM)$ como sendo o mapa

$$\nabla^{E^\rho, \omega} : \Gamma(E^\rho) \rightarrow \Lambda^1(M, E^\rho) \quad \text{tal que} \quad (\nabla_X^{E^\rho, \omega} \Phi)(p) = D(\phi, \gamma, p, \omega)$$

em que γ é qualquer curva tal que $\gamma' = X$ em p . Localmente, sendo $\Phi \in \Gamma(U; E^\rho)$ e $s \in \Gamma(U; P)$ duas seções tais que $\Phi = [s, \phi]$ temos a expressão:

$$\nabla_X^{E^\rho, \omega} \Phi = [s, \nabla_X^\omega \phi] \quad \text{com} \quad \nabla_X^\omega \phi = \phi_*(X) + (\rho_* \circ \omega_s)(X)\phi.$$

Capítulo 3

Formulação ADM

O **Formalismo ADM**¹, também chamado Formulação 3 + 1 da relatividade, é uma etapa natural no processo de construção de uma teoria de gravitação quântica, baseada em uma formulação hamiltoniana para a relatividade geral.

Partindo da hipótese que o espaçotempo M admite uma folheação de hipersuperfícies espaciais, o método busca descrever a evolução da geometria (métrica e grandezas associadas à curvatura) do espaçotempo em termos da geometria das fatias espaciais e da curvatura extrínseca associada a elas. Dentre os resultados dessa descrição, obtém-se que a equação de campo de Einstein pode ser vista como uma coleção de vínculos entre o tensor momento-energia e a curvatura extrínseca.

No decorrer desse capítulo foram utilizadas as referências Baez e Muniain [8],ourgoulhon [35] e Wöhr [75]. Outras referências auxiliares que complementam o tema são Hawking e Ellis [38], Thorne, Wheeler e Misner [70] e Bojowald [15].

De acordo com o objetivo desta dissertação, iremos enunciar e demonstrar todos os resultados de maneira global, isto é, sem utilizar coordenadas. Contudo, também iremos enunciar os resultados mais relevantes em coordenadas para possibilitar a comparação com a literatura física. Essa abordagem é comum em textos de geometria Riemanniana, mas não é tão comum em geometria Lorentziana.

Neste capítulo estaremos considerando que M é um espaçotempo de dimensão 4 globalmente hiperbólico. Tal condição causal não é só para restringir a análise a espaçotempos fisicamente plausíveis, mas também para tornar possível utilizar o seguinte resultado:

TEOREMA 3.1 (Geroch) *Todo espaçotempo M globalmente hiperbólico admite uma hipersuperfície de Cauchy diferenciável S e um difeomorfismo² $\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S$.*

DEFINIÇÃO 3.2 *Uma coleção $\{\Sigma_t\} \subset M$ de hipersuperfícies é uma **folheação** de M se existir um mapa $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que cada Σ_t seja uma superfície de nível de Ψ :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t = \{p \in M : \Psi(p) = t\}.$$

Como consequência direta do Teorema 3.1, temos:

COROLÁRIO 3.3 *Todo espaçotempo globalmente hiperbólico admite uma folheação de hipersuperfícies de Cauchy.*

¹A sigla ADM se deve aos autores Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner [2].

²O Teorema 3.1, inicialmente enunciado por Geroch [2003], garantia a existência de um homeomorfismo. Trabalhos mais recentes obtiveram o difeomorfismo (ver Bernal e Sánchez [11]).

Denotando por $t \in \mathbb{R}$ o parâmetro temporal³ em $M \simeq \mathbb{R} \times S$, podemos utilizar o difeomorfismo ϕ para induzir uma coordenada temporal em M dada por

$$\tau := \phi^*(t).$$

Como $\text{grad}(\tau)$ é um campo ortogonal à superfície Σ , segue dela ser uma hipersuperfície de Cauchy que $\text{grad}(\tau)$ é um campo temporal que permite definir um campo normal e unitário, convencionado a estar apontando para o futuro, dado por

$$n := \frac{\text{grad}(\tau)}{\sqrt{-\langle \text{grad}(\tau), \text{grad}(\tau) \rangle}}.$$

Assim, para todo $x \in M$ podemos decompor o espaço tangente TM_x na soma direta:

$$TM_x = T\Sigma_x \oplus (T\Sigma)_x^\perp.$$

Consequentemente, todo vetor $v \in TM_x$ pode ser partido em componentes⁴ tangenciais e normais à superfície Σ :

$$v = \underbrace{-\langle v, n \rangle}_{\text{normal}} n + \underbrace{(v + \langle v, n \rangle n)}_{\text{tangente}}.$$

Essa decomposição motiva a definição dos operadores projeção:

a) **Operador projeção tangente:**

$$\tan : \Gamma(TM)|_\Sigma \longrightarrow \Gamma(T\Sigma) \quad \text{com} \quad \tan(Z) = Z + \langle Z, n \rangle n.$$

b) **Operador projeção normal:**

$$\text{nor} : \Gamma(TM)|_\Sigma \longrightarrow \Gamma(T\Sigma)^\perp \quad \text{com} \quad \text{nor}(Z) = -\langle Z, n \rangle n.$$

Seja ∇^M a derivada covariante associada à conexão de Levi-Civita em M . Então, dado dois campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(TM)|_\Sigma$, podemos decompor o campo $\nabla_X^M Y$ em

$$\nabla_X^M Y = \text{nor}(\nabla_X^M Y) + \tan(\nabla_X^M Y).$$

Ao longo desse capítulo, para expressar os resultados em coordenadas estaremos considerando uma carta (U, φ) do espaçotempo (M, η) tal que

$$\forall p \in M, \quad \varphi(p) = (\tau, x^1, x^2, x^3) \quad \text{com} \quad \varphi(p)|_\Sigma = (x^1, x^2, x^3)$$

e um referencial $e = (e_i) \in \text{Fr}_\eta^+(M)$ tal que $e_0 = \partial_\tau$ e $\{e_i\}_{i=1}^3 \in \text{Fr}_g^+(\Sigma)$.

³Apesar de ser chamado parâmetro temporal, t é apenas um parâmetro evolutivo sem sentido físico.

⁴O sinal negativo é necessário, pois n é um vetor temporal

3.1 CURVATURA EXTRÍNSECA

Começaremos analisando a decomposição de $\nabla_X^M Y$ quando $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$.

LEMA 3.4 *Seja Σ uma hipersuperfície de Cauchy em M . Então, a aplicação*

$$\nabla^\Sigma : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla_X^\Sigma Y = \tan(\nabla_X^M Y)$$

define uma derivada covariante em Σ .

Demonstração. Ver A.11. □

PROPOSIÇÃO 3.5 *A derivada covariante ∇^Σ é a derivada covariante de Levi-Civita em Σ .*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$. Temos que

(i) ∇^Σ é métrica: segue da metricidade de ∇^M que

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X^M Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^M Z \rangle \\ &= \langle \text{nor}(\nabla_X^M Y) + \tan(\nabla_X^M Y), Z \rangle + \langle Y, \text{nor}(\nabla_X^M Z) + \tan(\nabla_X^M Z) \rangle \\ &= \underbrace{\langle \text{nor}(\nabla_X^M Y), Z \rangle}_{=0} + \langle \tan(\nabla_X^M Y), Z \rangle + \underbrace{\langle Y, \text{nor}(\nabla_X^M Z) \rangle}_{=0} + \langle Y, \tan(\nabla_X^M Z) \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\Sigma Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^\Sigma Z \rangle. \end{aligned}$$

(ii) ∇^Σ é livre de torção: segue de ∇^M ser livre de torção que

$$\begin{aligned} \nabla_X^\Sigma Y - \nabla_Y^\Sigma X &= \tan(\nabla_X^M Y) - \tan(\nabla_Y^M X) \\ &= \tan(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X) \\ &= \tan([X, Y]) \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 3.6 *Definimos o operador **segunda forma fundamental***

$$K : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma)^\perp \quad \text{com} \quad K(X, Y) = \text{nor}(\nabla_X^M Y).$$

*O tensor $\kappa(X, Y) = -\langle K(X, Y), n \rangle$ é denominado **curvatura extrínseca**.*

PROPOSIÇÃO 3.7 *A curvatura extrínseca é um tensor simétrico.*

Demonstração. A demonstração é direta:

$$\begin{aligned} \kappa(X, Y) - \kappa(Y, X) &= -\langle \text{nor}(\nabla_X^M Y), n \rangle + \langle \text{nor}(\nabla_Y^M X), n \rangle \\ &= -\langle \text{nor}(\nabla_X^M Y) - \text{nor}(\nabla_Y^M X), n \rangle \\ &= -\langle \text{nor}(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X), n \rangle \\ &= -\langle \underbrace{\text{nor}([X, Y])}_{=0}, n \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, como $K(X, Y) = \kappa(X, Y)n$ segue que $K(X, Y) = K(Y, X)$. $\square$

Com os resultados anteriores, obtemos:

COROLÁRIO 3.8 (Equação de Gauss) *Sejam $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$. Então,*

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X^\Sigma Y + K(X, Y).$$

OBSERVAÇÃO 3.9 *A nomenclatura curvatura extrínseca se deve ao seu significado geométrico. Considere uma geodésica γ em Σ . Então, por definição*

$$\nabla_{\gamma'}^\Sigma \gamma' = 0.$$

Por outro lado, como Σ é subvariedade de M , temos

$$\nabla_{\gamma'}^M \gamma' = \nabla_{\gamma'}^\Sigma \gamma' + K(\gamma', \gamma') = \kappa(\gamma', \gamma')n.$$

Consequentemente, $\kappa(\gamma', \gamma')$ mede a aceleração causada pela curvatura de γ em M .

3.2 OPERADOR DE WEINGARTEN

Seja $X \in \Gamma(T\Sigma)$. Analisaremos como ∇_X^M atua em campos normais a Σ .

PROPOSIÇÃO 3.10 *Seja W a aplicação:*

$$W : \Gamma(T\Sigma)^\perp \times \Gamma(T\Sigma) \longrightarrow \Gamma(T\Sigma) \quad \text{com} \quad W_E(X) = \tan(\nabla_X^M E)$$

em que $E \in \Gamma(T\Sigma)^\perp, X \in \Gamma(T\Sigma)$. Então, vale

- a) $W_{fE}(X) = fW_E(X)$;
- b) $\langle W_E(X), Y \rangle = -\langle K(X, Y), E \rangle$.

Demonstração. Seja $X \in \Gamma(T\Sigma)$, $E \in \Gamma(T\Sigma)^\perp$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \overbrace{W_{fE}(X)}^{\text{tangencial}} + \overbrace{\text{nor}(\nabla_X^M(fE))}^{\text{normal}} &= \nabla_X^M(fE) \\ &= X(f)E + f\nabla_X^M E \\ &= X(f)E + f(\tan(\nabla_X^M E) + \text{nor}(\nabla_X^M E)) \\ &= \underbrace{fW_E(X)}_{\text{tangencial}} + \underbrace{X(f)E + \text{nor}(\nabla_X^M E)}_{\text{normal}}. \end{aligned}$$

Comparando as componentes tangenciais, obtemos $W_{fE}(X) = fW_E(X)$. Para a propriedade (b), aplicamos ∇_X^M em $\langle Y, E \rangle = 0$ para obter

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_X^M Y, E \rangle + \langle Y, \nabla_X^M E \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\Sigma Y + K(X, Y), E \rangle + \langle Y, W_E(X) + \text{nor}(\nabla_X^M E) \rangle \\ &= \underbrace{\langle \nabla_X^\Sigma Y, E \rangle}_{=0} + \langle K(X, Y), E \rangle + \langle Y, W_E(X) \rangle + \underbrace{\langle Y, \text{nor}(\nabla_X^M E) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\langle W_E(X), Y \rangle = -\langle K(X, Y), E \rangle$. $\square$

A aplicação $W_E(X)$ é chamada o **operador de Weingarten com respeito a E** .

DEFINIÇÃO 3.11 Definimos o **operador de Weingarten** Wein como

$$\text{Wein} : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma) \quad \text{com} \quad \text{Wein}(X) = \tan(\nabla_X^M n). \quad (3.1)$$

O próximo resultado é fundamental para relacionar os resultados que iremos obter globalmente com os resultados enunciados na literatura física:

PROPOSIÇÃO 3.12 Temos $\langle \text{Wein}(X), Y \rangle = \kappa(X, Y)$. Em coordenadas, $\text{Wein}_{ij} = \kappa_{ij}$.

Demonstração. Como $\langle W_E(X), Y \rangle = -\langle K(X, Y), E \rangle$, tomando $E = n$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle \text{Wein}(X), Y \rangle &= -\langle \kappa(X, Y)n, n \rangle \\ &= \kappa(X, Y). \end{aligned}$$

Em coordenadas, temos

$$\kappa_{ij} = \langle \text{Wein}(e_i), e_j \rangle = \left\langle \sum_k \text{Wein}_i^k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \text{Wein}_i^k g_{kj} = \text{Wein}_{ij}.$$

□

PROPOSIÇÃO 3.13 O operador Wein é autoadjunto. Ou seja, vale

$$\langle \text{Wein}(X), Y \rangle = \langle X, \text{Wein}(Y) \rangle.$$

Demonstração. O resultado é consequência da simetria da curvatura extrínseca:

$$\langle \text{Wein}(X), Y \rangle = -\langle K(X, Y), n \rangle = -\langle K(Y, X), n \rangle = \langle \text{Wein}(Y), X \rangle.$$

□

PROPOSIÇÃO 3.14 Sejam $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$. Vale

$$(\mathcal{L}_n g)(X, Y) = 2 \langle \text{Wein}(X), Y \rangle_g \quad (3.2)$$

em que $\mathcal{L}_n$ é a derivada de Lie com respeito à n . Em coordenadas, $(\mathcal{L}_n g)_{ij} = 2\kappa_{ij}$.

Demonstração. A demonstração é direta. Partindo da expressão⁵

$$(\mathcal{L}_n g)(X, Y) = n(g(X, Y)) - g([n, X], Y) - g(X, [n, Y]),$$

basta utilizar que ∇^M é livre de torção para se obter:

$$\begin{aligned} \bullet \quad g([n, X], Y) &= g(\nabla_n^M X - \nabla_X^M n, Y) & \bullet \quad g(X, [n, Y]) &= g(X, \nabla_n^M Y - \nabla_Y^M n) \\ &= g(\nabla_n^M X, Y) - g(\text{Wein}(X), Y) & &= g(X, \nabla_n^M Y) - g(X, \text{Wein}(Y)). \end{aligned}$$

Então, utilizando que Wein é auto-adjunto pode concluir que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n g)(X, Y) &= n(g(X, Y)) - g(\nabla_n^M X, Y) + g(\text{Wein}(X), Y) + g(X, \text{Wein}(Y)) - g(X, \nabla_n^M Y) \\ &= \underbrace{(\nabla_n^M g)(X, Y)}_{=0} + g(\text{Wein}(X), Y) + g(X, \text{Wein}(Y)) \\ &= 2g(\text{Wein}(X), Y) \end{aligned}$$

⁵Para uma revisão sistemática sobre derivadas de Lie, ver Lee [49, Capítulo 12]

A expressão em coordenadas é consequência direta da Proposição 3.12 e é comumente escrita na literatura física da seguinte maneira⁶:

$$\mathcal{L}_n g_{ij} = 2\kappa_{ij}.$$

□

OBSERVAÇÃO 3.15 Como comenta Baez e Muniain [8, p. 284], é padrão na literatura física escrever, por exemplo, $\nabla_\mu X^i$ ao invés de $(\nabla_\mu X)^i$ e $\mathcal{L}_X g_{ij}$ ao invés de $(\mathcal{L}_X g)_{ij}$.

3.3 EQUAÇÃO DE GAUSS-CODAZZI

Essa seção é dedicada à obtenção da equação de Gauss-Codazzi, que relaciona a curvatura da variedade ambiente com a curvatura de uma subvariedade Riemanniana.

TEOREMA 3.16 (Equação de Gauss-Codazzi) Sejam $X, Y, Z, V \in \Gamma(T\Sigma)$. Então,

$$R^M(X, Y, Z, V) = R^\Sigma(X, Y, Z, V) + \kappa(Y, Z)\kappa(X, V) - \kappa(X, Z)\kappa(Y, V). \quad (3.3)$$

Em coordenadas, $(R^M)_{ijkl} = (R^\Sigma)_{ijkl} + \kappa_{jk}\kappa_{il} - \kappa_{ik}\kappa_{jl}$.

Demonstração. Para demonstrar a Equação de Gauss-Codazzi, utilizamos a expressão do endomorfismo curvatura com respeito à conexão ∇^M :

$$R^M(X, Y)Z = \nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \nabla_Y^M \nabla_X^M Z - \nabla_{[X, Y]}^M Z. \quad (3.4)$$

Calculando o primeiro termo que aparece na Expressão 3.4, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^M(\nabla_Y^M Z) &= \nabla_X^M(\nabla_Y^\Sigma Z + K(Y, Z)) \\ &= \nabla_X^M(\nabla_Y^\Sigma Z) + \nabla_X^M(\kappa(Y, Z)n) \\ &= \nabla_X^\Sigma \nabla_Y^\Sigma Z + K(X, \nabla_Y^\Sigma Z) + X(\kappa(Y, Z))n + \kappa(Y, Z) \text{Wein}(X) \end{aligned}$$

e, portanto, segue que os dois primeiros termos à direita são

$$\begin{aligned} \bullet \nabla_X^M(\nabla_Y^M Z) &= \nabla_X^\Sigma \nabla_Y^\Sigma Z + \left(\kappa(X, \nabla_Y^\Sigma Z) + X(\kappa(Y, Z)) \right) n + \kappa(Y, Z) \text{Wein}(X) \\ \bullet \nabla_Y^M(\nabla_X^M Z) &= \nabla_Y^\Sigma \nabla_X^\Sigma Z + \left(\kappa(Y, \nabla_X^\Sigma Z) + Y(\kappa(X, Z)) \right) n + \kappa(X, Z) \text{Wein}(Y) \end{aligned}$$

Quanto ao terceiro termo presente na Expressão 3.4, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, Y]}^M Z &= \nabla_{[X, Y]}^\Sigma Z + K([X, Y], Z) \\ &= \nabla_{[X, Y]}^\Sigma Z + K(\nabla_X^\Sigma Y - \nabla_Y^\Sigma X, Z) \\ &= \nabla_{[X, Y]}^\Sigma Z + K(\nabla_X^\Sigma Y, Z) - K(\nabla_Y^\Sigma X, Z) \\ &= \nabla_{[X, Y]}^\Sigma Z + \left(\kappa(\nabla_X^\Sigma Y, Z) - \kappa(\nabla_Y^\Sigma X, Z) \right) n. \end{aligned}$$

⁶Por exemplo, ver Thiemann [69, p. 42]

Juntando os termos calculados, concluímos que

$$\begin{aligned}
R^M(X, Y)Z &= \nabla_X^\Sigma \nabla_Y^\Sigma Z + \left(\kappa(X, \nabla_Y^\Sigma Z) + X(\kappa(Y, Z)) \right) n + \kappa(Y, Z) \text{Wein}(X) \\
&\quad - \nabla_Y^\Sigma \nabla_X^\Sigma Z + \left(-\kappa(Y, \nabla_X^\Sigma Z) - Y(\kappa(X, Z)) \right) n - \kappa(X, Z) \text{Wein}(Y) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]}^\Sigma Z + \left(-\kappa(\nabla_X^\Sigma Y, Z) + \kappa(\nabla_Y^\Sigma X, Z) \right) n \\
&= R^\Sigma(X, Y)Z + \kappa(Y, Z) \text{Wein}(X) - \kappa(X, Z) \text{Wein}(Y) \\
&\quad + \left((\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) \right) n.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Observando que $V \in \Gamma(T\Sigma)$ implica em

$$\left\langle \left((\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) \right) n, V \right\rangle = 0,$$

podemos utilizar a Expressão 3.5 na equação do tensor curvatura:

$$R^M(X, Y, Z, V) = \left\langle R^M(X, Y)Z, V \right\rangle$$

para obter a expressão do enunciado:

$$\begin{aligned}
R^M(X, Y, Z, V) &= \left\langle R^\Sigma(X, Y)Z + \kappa(Y, Z) \text{Wein}(X) - \kappa(X, Z) \text{Wein}(Y), V \right\rangle \\
&= R^\Sigma(X, Y, Z, V) + \kappa(Y, Z) \langle \text{Wein}(X), V \rangle - \kappa(X, Z) \langle \text{Wein}(Y), V \rangle \\
&= R^\Sigma(X, Y, Z, V) + \kappa(Y, Z) \kappa(X, V) - \kappa(X, Z) \kappa(Y, V).
\end{aligned}$$

Seja $e \in \Gamma(U; \text{Fr}_g^+(\Sigma))$ um referencial em Σ . Então, temos

$$R^M(e_i, e_j, e_k, e_l) = R^\Sigma(e_i, e_j, e_k, e_l) + \kappa_{jk} \kappa_{il} - \kappa_{ik} \kappa_{jl}.$$

□

Complementarmente, observa-se que ao longo da demonstração anterior nós também obtivemos a Equação de Codazzi:

COROLÁRIO 3.17 (Equação de Codazzi) *Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$. Então,*

$$\text{nor} \left(R^M(X, Y)Z \right) = \left((\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) \right) n. \tag{3.6}$$

Em coordenadas, $n^\sigma R_{ijk\sigma} = \nabla_j \kappa_{ik} - \nabla_i \kappa_{jk}$.

Demonstração. A demonstração parte da Expressão 3.5. Observando que

$$\begin{aligned}
\left\langle R^M(X, Y)Z, n \right\rangle &= \left\langle \left((\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) \right) n, n \right\rangle \\
&= (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) - (\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z)
\end{aligned}$$

e utilizando $\left\langle R^M(X, Y)Z, n \right\rangle = R^M(X, Y, Z, n)$, concluímos que

$$R^M(X, Y, Z, n) = (\nabla_Y^\Sigma k)(X, Z) - (\nabla_X^\Sigma k)(Y, Z).$$

Em coordenadas, denotando o vetor normal à Σ por $n = \sum_\sigma n^\sigma e_\sigma$, obtemos

$$n^\sigma R^M(e_i, e_j, e_k, e_\sigma) = (\nabla_j^\Sigma \kappa)(e_i, e_k) - (\nabla_i^\Sigma \kappa)(e_j, e_k).$$

□

OBSERVAÇÃO 3.18 No caso especial que $n = e_0$, tem-se

$$(R^M)_{ijk0} = (\nabla_j^\Sigma \kappa)(e_i, e_k) - (\nabla_i^\Sigma \kappa)(e_j, e_k),$$

recuperando a expressão obtida em Baez e Muniain [8, p. 422] ao utilizar

$$(R^M)_{ijk0} = -(R^M)_{ijk}^0.$$

A equação de Codazzi também pode ser reescrita como:

$$\text{nor} \left(R^M(X, Y)Z \right) = \left\langle (\nabla_X^\Sigma \text{Wein})Y - (\nabla_Y^\Sigma \text{Wein})(X), Z \right\rangle.$$

Utilizando que $\langle \text{Wein}(X), Y \rangle = \kappa(X, Y)$, temos

$$\begin{aligned} \text{nor} \left(R^M(X, Y)Z \right) &= (\nabla_X^\Sigma \kappa)(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma \kappa)(X, Z) \\ &= X(\kappa(Y, Z)) - \kappa(Y, \nabla_X^\Sigma Z) - \kappa(\nabla_X^\Sigma Y, Z) \\ &\quad - Y(\kappa(X, Z)) + \kappa(X, \nabla_Y^\Sigma Z) + \kappa(\nabla_Y^\Sigma X, Z) \\ &= X(\langle \text{Wein}(Y), Z \rangle) - \langle \text{Wein}(Y), \nabla_X^\Sigma Z \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_X^\Sigma Y), Z \rangle \\ &\quad - Y(\langle \text{Wein}(X), Z \rangle) + \langle \text{Wein}(X), \nabla_Y^\Sigma Z \rangle + \langle \text{Wein}(\nabla_Y^\Sigma X), Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\Sigma (\text{Wein}(Y)), Z \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_X^\Sigma Y), Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Y^\Sigma (\text{Wein}(X)), Z \rangle + \langle \text{Wein}(\nabla_Y^\Sigma X), Z \rangle \\ &= \langle (\nabla_X^\Sigma \text{Wein})Y - (\nabla_Y^\Sigma \text{Wein})(X), Z \rangle. \end{aligned}$$

3.4 EQUAÇÃO DE GAUSS

DEFINIÇÃO 3.19 Seja $X \in \Gamma(TM)$. O **divergente** de X é

$$\text{div } X = \sum_i \langle \nabla_i^M X, e_i \rangle - \langle \nabla_n^M X, n \rangle$$

PROPOSIÇÃO 3.20 O divergente satisfaz a regra do produto:

$$\text{div}(fX) = X(f) + f \text{div}(X).$$

Demonstração. Aplicando fX na expressão do divergente, temos

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= \sum_i \langle \nabla_i^M (fX), e_i \rangle - \langle \nabla_n^M (fX), n \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f)X + f\nabla_i^M X, e_i \rangle - \langle n(f)X + f\nabla_n^M X, n \rangle \\ &= \sum_i e_i(f) \langle X, e_i \rangle - n(f) \langle X, n \rangle + f \left(\sum_i \langle \nabla_i^M X, e_i \rangle - \langle \nabla_n^M X, n \rangle \right) \\ &= \left\langle X, \sum_i e_i(f)e_i - n(f)n \right\rangle + f \text{div}(X) \\ &= \langle X, \text{grad}(f) \rangle + f \text{div}(X). \end{aligned}$$

O resultado segue de $\langle X, \text{grad}(f) \rangle = df(X) = X(f)$. □

Antes do próximo teorema, algumas propriedades que serão utilizadas:

LEMA 3.21 *Seja $f \in C^\infty(\Sigma)$ e $X \in \Gamma(TM)$. Então,*

- a) $\langle \nabla_n^M n, n \rangle = 0$;
- b) $\text{tr}(\text{Wein}) = \text{div}(n)$;
- c) $\text{div}(\text{tr}(\text{Wein})n) = n(\text{tr}(\text{Wein})) + \text{tr}(\text{Wein})^2$

Demonstração. Sejam $f \in C^\infty(\Sigma)$ e $X \in \Gamma(TM)$. Então,

- i) aplicando ∇_n^M em $\langle n, n \rangle = -1$, temos

$$0 = \langle \nabla_n^M n, n \rangle + \langle n, \nabla_n^M n \rangle = 2 \langle \nabla_n^M n, n \rangle.$$

- ii) como $\langle \nabla_n^M n, n \rangle = 0$, segue da definição de divergente que

$$\begin{aligned} \text{div}(n) &= \sum_i \langle \nabla_i^M n, e_i \rangle - \underbrace{\langle \nabla_n^M n, n \rangle}_{=0} \\ &= \sum_i \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \\ &= \text{tr}(\text{Wein}). \end{aligned}$$

- iii) Utilizando $f = \text{tr}(\text{Wein})$ e $X = n$ na expressão $\text{div}(fX)$, temos

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{tr}(\text{Wein})n) &= n(\text{tr}(\text{Wein})) + \text{tr}(\text{Wein}) \text{div}(n) \\ &= n(\text{tr}(\text{Wein})) + \text{tr}(\text{Wein})^2. \end{aligned}$$

□

Agora estamos em condições de provar o principal resultado deste capítulo:

TEOREMA 3.22 (Equação de Gauss) *A curvatura escalar $\mathcal{R}^M$ de M é expressa por*

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein}^2) - \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2 \text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right) \quad (3.7)$$

Em coordenadas, denotando $v^a = n^c \nabla_c^M n^a - n^a \nabla_c^M n^c$, obtemos

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{R}^\Sigma + \kappa_{ab} \kappa^{ba} - (\kappa_a^a)^2 - 2 \nabla_a v^a. \quad (3.8)$$

Demonstração. Abrindo a expressão da curvatura escalar, temos três componentes:

$$\mathcal{R}^M = \underbrace{\sum_{i,j} \langle R^M(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle}_{(a)} - \underbrace{\sum_i \langle R^M(e_i, n) n, e_i \rangle - \sum_j \langle R^M(n, e_j) e_j, n \rangle}_{(b)} + \underbrace{\langle R^M(n, n) n, n \rangle}_{(c)}.$$

De imediato, segue das simetrias do tensor curvatura que:

- (i) o termo (c) é identicamente nulo: $\langle R^M(n, n) n, n \rangle = 0$;

(ii) o termo (b) é dado por

$$-\sum_i \langle R^M(e_i, n)n, e_i \rangle - \sum_j \langle R^M(n, e_j)e_j, n \rangle = -2 \sum_i \langle R^M(e_i, n)n, e_i \rangle.$$

Quanto ao termo (a), basta utilizarmos a equação de Gauss-Codazzi:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle R^M(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle &= \sum_{i,j} R^\Sigma(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ &\quad + \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(e_j), e_j \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle - \langle \text{Wein}(e_i), e_j \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Das componentes da expressão acima, a primeira linha é imediata:

$$\sum_{i,j} R^\Sigma(e_i, e_j, e_j, e_i) = \mathcal{R}^\Sigma.$$

Analisando as componentes da segunda linha, temos

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle &= \sum_j \langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \sum_i \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \\ &= \text{tr}(\text{Wein})^2 \\ \bullet \sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle &= \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \\ &= \sum_j \left\langle \text{Wein}(e_j), \sum_i \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= \sum_j \langle \text{Wein}(e_j), \text{Wein}(e_j) \rangle \\ &= \sum_j \langle \text{Wein}^2(e_j), e_j \rangle \\ &= \text{tr} \text{Wein}^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, concluímos que o termo (a) é

$$\sum_{i,j} \langle R^M(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = \mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein})^2 - \text{tr} \text{Wein}^2.$$

Como resultado, obtivemos a expressão:

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{R}^\Sigma - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2 \sum_i \langle R^M(e_i, n)n, e_i \rangle. \quad (3.9)$$

Podemos explicitar ainda mais o último termo da Expressão 3.9 acima. Temos

$$\begin{aligned} \sum_i \langle R^M(e_i, n)n, e_i \rangle &= \sum_i \langle \nabla_i^M \nabla_n^M n - \nabla_n^M \nabla_i^M n - \nabla_{[e_i, n]}^M n, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_i^M \nabla_n^M n, e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_n^M \nabla_i^M n, e_i \rangle \\ &\quad - \sum_i \langle \nabla_{(\nabla_i^M n - \nabla_n^M e_i)}^M n, e_i \rangle \\ &= \underbrace{\sum_i \langle \nabla_i^M \nabla_n^M n, e_i \rangle}_{(A)} - \underbrace{\sum_i \langle \nabla_n^M \nabla_i^M n, e_i \rangle}_{(B)} \\ &\quad - \underbrace{\sum_i \langle \nabla_{\nabla_i^M n}^M n, e_i \rangle}_{(C)} + \underbrace{\sum_i \langle \nabla_{\nabla_n^M e_i}^M n, e_i \rangle}_{(D)}. \end{aligned}$$

Iremos analisar cada um destes quatro termos:

(i) Termo (A): como $\langle \nabla_n^M n, n \rangle = 0$, segue da metricidade de ∇^M que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \nabla_i^M \nabla_n^M n, e_i \rangle &= \operatorname{div}(\nabla_n^M n) + \langle \nabla_n^M (\nabla_n^M n), n \rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla_n^M n) - \langle \nabla_n^M n, \nabla_n^M n \rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla_n^M n) - \|\nabla_n^M n\|^2. \end{aligned}$$

(ii) Termo (B): pela metricidade de ∇^M e pelo Lema 3.21, temos

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \nabla_n^M \nabla_i^M n, e_i \rangle &= \sum_i n(\langle \nabla_i^M n, e_i \rangle) - \sum_i \langle \nabla_i^M n, \nabla_n^M e_i \rangle \\ &= n\left(\sum_i \langle \nabla_i^M n, e_i \rangle\right) - \sum_i \langle \nabla_i^M n, \nabla_n^M e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{tr}(\operatorname{Wein})n) - \operatorname{tr}(\operatorname{Wein})^2 - \sum_i \langle \nabla_i^M n, \nabla_n^M e_i \rangle. \end{aligned}$$

(iii) Termo (C): segue da definição do operador Wein:

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \nabla_{\nabla_i^M n}^M n, e_i \rangle &= \sum_i \langle \nabla_{\operatorname{Wein}(e_i)}^M n, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \operatorname{Wein}(\operatorname{Wein}(e_i)), e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \operatorname{Wein}^2(e_i), e_i \rangle \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{Wein}^2). \end{aligned}$$

O termo (D) não é tão imediato. Para analisá-lo, observe que

$$\begin{aligned} \nabla_n^M e_i &= \sum_j \langle \nabla_n^M e_i, e_j \rangle e_j - \langle \nabla_n^M e_i, n \rangle n \\ &= - \sum_j \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle e_j + \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle n, \end{aligned}$$

pois, pela metricidade de ∇^M , temos

$$\begin{aligned} \bullet \langle \nabla_n^M e_i, e_j \rangle &= - \langle e_i, \nabla_n^M e_j \rangle + \underbrace{n(\langle e_i, e_j \rangle)}_{=0} = - \langle e_i, \nabla_n^M e_j \rangle \\ \bullet \langle \nabla_n^M e_i, n \rangle &= - \langle e_i, \nabla_n^M n \rangle + \underbrace{n(\langle e_i, n \rangle)}_{=0} = - \langle e_i, \nabla_n^M n \rangle. \end{aligned}$$

Com esta observação, prosseguimos abrindo o termo (D):

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \nabla_{\nabla_n^M e_i}^M n, e_i \rangle &= \sum_i \left\langle \nabla_{-\sum_j \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle e_j + \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle n}^M n, e_i \right\rangle \\ &= \sum_i \left\langle - \sum_j \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle \nabla_j^M n + \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle \nabla_n^M n, e_i \right\rangle \\ &= \underbrace{- \sum_j \left\langle \nabla_j^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle e_i \right\rangle}_{(D_1)} + \underbrace{\left\langle \nabla_n^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle e_i \right\rangle}_{(D_2)}. \end{aligned}$$

Analisando os termos (D_1) e (D_2) , temos:

(i) Termo (D_1) : como $\nabla_j^M n = \text{Wein}(e_j) \in \Gamma(T\Sigma)$, temos $\langle \nabla_j^M n, n \rangle = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_j \left\langle \nabla_j^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle e_i \right\rangle &= \sum_j \left\langle \nabla_j^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M e_j, e_i \rangle e_i - \langle \nabla_n^M e_j, n \rangle n \right\rangle \\ &= \sum_j \langle \nabla_j^M n, \nabla_n^M e_j \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Termo (D_2) : como $\langle \nabla_n^M n, n \rangle = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_n^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle e_i \right\rangle &= \left\langle \nabla_n^M n, \sum_i \langle \nabla_n^M n, e_i \rangle e_i - \langle \nabla_n^M n, n \rangle n \right\rangle \\ &= \langle \nabla_n^M n, \nabla_n^M n \rangle \\ &= \|\nabla_n^M n\|^2. \end{aligned}$$

Desse modo, o termo (D) é simplesmente

$$\sum_i \langle \nabla_{\nabla_n^M e_i}^M n, e_i \rangle = - \sum_j \langle \nabla_j^M n, \nabla_n^M e_j \rangle + \|\nabla_n^M n\|^2.$$

Juntando as componentes que obtivemos até então, concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle R^M(e_i, n)n, e_i \rangle &= \underbrace{\text{div}(\nabla_n^M n)}_{(A)} - \underbrace{\|\nabla_n^M n\|^2}_{(B)} \\ &\quad - \underbrace{\left(\text{div}(\text{tr}(\text{Wein})n) - \text{tr}(\text{Wein})^2 - \sum_i \langle \nabla_i^M n, \nabla_n^M e_i \rangle \right)}_{(C)} \\ &\quad - \underbrace{\text{tr}(\text{Wein}^2)}_{(D)} - \underbrace{\sum_j \langle \nabla_j^M n, \nabla_n^M e_j \rangle + \|\nabla_n^M n\|^2}_{(D)} \\ &= \text{tr}(\text{Wein})^2 - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right). \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura $\mathcal{R}^M$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^M &= \mathcal{R}^\Sigma - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2 \left(\text{tr}(\text{Wein})^2 - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{div}(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n) \right) \\ &= \mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein}^2) - \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2 \text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right). \end{aligned}$$

Para expressar em coordenadas, utilizamos que $\text{Wein}_{ij} = \kappa_{ij}$ (Proposição 3.12). Assim,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Wein}^2) &= \text{Wein}_{ab} \text{Wein}^{ba} = \kappa_{ab} \kappa^{ba}, \\ \text{tr}(\text{Wein})^2 &= (\text{Wein}_a^a)^2 = (\kappa_a^a)^2. \end{aligned}$$

Para o termo envolvendo divergente, utilizamos o Lema 3.21:

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right) &= \text{div}(\nabla_n^M n) - \text{div}(\text{tr}(\text{Wein})n) \\ &= \text{div}(\nabla_n^M n) - n(\text{div}(n)) - \text{div}(n)^2 \end{aligned}$$

Analisando termo a termo e lembrando da Observação 3.15, temos

$$\begin{aligned} n(\operatorname{div}(n)) &= n^a \nabla_a^M (\nabla_c^M n^c) \\ \operatorname{div}(n)^2 &= (\nabla_a^M n^a)(\nabla_c^M n^c) \\ \operatorname{div}(\nabla_n^M n) &= \nabla_a^M (\nabla_n^M n)^a = \nabla_a^M \nabla_n^M n^a. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\nabla_n^M n - \operatorname{tr}(\operatorname{Wein})n \right) &= \nabla_a^M \nabla_n^M n^a - (\nabla_a^M n^a)(\nabla_c^M n^c) - n^a \nabla_a^M (\nabla_c^M n^c) \\ &= \nabla_a^M (n^c \nabla_c^M n^a - n^a \nabla_c^M n^c). \end{aligned}$$

Denotando por $v^a = n^c \nabla_c^M n^a - n^a \nabla_c^M n^c$, recuperamos a expressão

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{R}^\Sigma + \kappa_{ab} k^{ba} - (\kappa_a^a)^2 - 2\nabla_a v^a$$

da maneira que ela é enunciada em Bojowald [15, p. 49] e Thiemann [69, p. 44]. $\square$

3.5 DECOMPONDO A EQUAÇÃO DE CAMPO

A decomposição $3 + 1$ do espaçotempo permite reescrever a equação de campo de Einstein através de vínculos entre a curvatura extrínseca e o tensor momento-energia.

Relembrando, sendo $X, Y \in \Gamma(TM)$ a **Equação de Campo de Einstein**⁷ é

$$\operatorname{Ric}^M(X, Y) - \frac{1}{2}g(X, Y)\mathcal{R}^M = 8\pi T(X, Y), \quad (3.10)$$

em que T é o tensor momento-energia. Em coordenadas,

$$G_{\mu\nu} := (R^M)_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}^M = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

onde utilizamos o chamado **tensor de Einstein** $G_{\mu\nu}$.

Como discute Hawking e Ellis [38, Seção 4.3] e Thorne, Wheeler e Misner [70, Seção 5.3], as componentes do tensor momento-energia podem ser interpretadas da seguinte forma:

- a) Componente temporal T_{00} : é a densidade de massa-energia, denotada por E .
- b) Componente espaço-temporal T_{0j} : é a densidade de momento, denotada por p_j .
- c) Componente espacial T_{ij} : é a componente associada ao *estresse*. Geometricamente, ela pode ser interpretada como sendo a j -ésima componente do fluxo do momento p_i ao atravessar uma região (de área unitária) orientada perpendicular a e_j .

PROPOSIÇÃO 3.23 *Das 10 equações independentes presentes em*

$$8\pi T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu},$$

quatro são vínculos entre a curvatura extrínseca e a parte espaço-temporal do tensor momento-energia, expressos por:

$$16\pi E = \mathcal{R}^M - \operatorname{tr}(\operatorname{Wein}^2) + \operatorname{tr}(\operatorname{Wein})^2 \quad (\text{vínculo Hamiltoniano}) \quad (3.12)$$

$$8\pi p_j = \nabla_i^\Sigma \kappa_j^i - \nabla_j^\Sigma \kappa_i^i \quad (\text{vínculo do momento}) \quad (3.13)$$

⁷Como $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, a equação de campo possui apenas 10 equações independentes.

Demonstração. A Equação 3.9 pode ser expressa em termos do tensor de Ricci:

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{R}^\Sigma - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2\text{Ric}^M(n, n).$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\Sigma - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{tr}(\text{Wein})^2 &= 2\text{Ric}^M(n, n) + \mathcal{R}^M \\ &= 16\pi T(n, n). \end{aligned}$$

Utilizando $n = \partial_0$, o primeiro vínculo é imediato:

$$\mathcal{R}^M - \text{tr}(\text{Wein}^2) + \text{tr}(\text{Wein})^2 = 16\pi E$$

Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$. Utilizando a simetria do tensor curvatura

$$\langle R^M(X, Y)Z, n \rangle = -\langle R^M(X, Y)n, Z \rangle$$

e a Expressão 3.5, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}^M(Y, n) &= \sum_i \langle R^M(e_i, Y)n, e_i \rangle \\ &= \sum_i \left((\nabla_i^\Sigma \kappa)(Y, e_i) - (\nabla_Y^\Sigma \kappa)(e_i, e_i) \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação de campo é

$$\text{Ric}^M(Y, n) - \underbrace{\frac{1}{2} \langle Y, n \rangle}_{=0} \mathcal{R}^M = 8\pi T(Y, n),$$

de maneira que obtemos o vínculo:

$$\sum_i \left((\nabla_i^\Sigma \kappa)(e_j, e_i) - (\nabla_j^\Sigma \kappa)(e_i, e_i) \right) = 8\pi p_j.$$

□

PROPOSIÇÃO 3.24 *A Lagrangiana de Einstein-Hilbert é*

$$\mathcal{L}_{EH} = \int_\Sigma d\text{vol}_g \left(\mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein}^2) - \text{tr}(\text{Wein})^2 - 2\text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right) \right). \quad (3.14)$$

Em coordenadas, denotando $v^a = n^c \nabla_c^M n^a - n^a \nabla_c^M n^c$, temos:

$$\mathcal{L}_{EH} = \int_\Sigma d\text{vol}_g \left(\mathcal{R}^\Sigma + \kappa_{ab} \kappa^{ba} - (\kappa_a^a)^2 - 2\nabla_a v^a \right). \quad (3.15)$$

OBSERVAÇÃO 3.25 *Negligenciando os termos de fronteira, temos*

$$\mathcal{L}_{EH} = \int_\Sigma d\text{vol}_g \left(\mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein}^2) - \text{tr}(\text{Wein})^2 \right) \quad (3.16)$$

cuja expressão em coordenadas é

$$\mathcal{L}_{EH} = \int_\Sigma d\text{vol}_g \left(\mathcal{R}^\Sigma + \kappa_{ab} \kappa^{ba} - (\kappa_a^a)^2 \right).$$

O artigo Regge e Teitelboim [61] faz uma excelente discussão sobre o tratamento matemático do termo de fronteira, destacando sua importância para uma formulação consistente da teoria Hamiltoniana.

OBSERVAÇÃO 3.26 Apesar de $\text{tr}(\text{Wein}) = \text{div}(n)$, o termo $\text{tr}(\text{Wein})$ não foi negligenciado junto com os demais termos envolvendo o divergente. Isso se deve ao Lema 3.21:

$$\text{tr}(\text{Wein})^2 = \text{div} \left(\text{tr}(\text{Wein})n \right) - n(\text{tr}(\text{Wein}))$$

evidencia que esse termo não é do tipo $\text{div}(\cdot)$ e, conseqüentemente, não pode ser considerado como sendo um termo de fronteira.

A Lagrangiana de Einstein-Hilbert expressa em termos da curvatura extrínseca é o primeiro passo para a Formulação hamiltoniana da Relatividade Geral. Temos

- a) Componente cinética: $\text{tr}(\text{Wein})^2 = (\kappa_a^a)^2$;
- b) Componente interpretada como um potencial: $\mathcal{R}^\Sigma + \text{tr}(\text{Wein}^2) = \mathcal{R}^\Sigma + \kappa_{ab}\kappa^{ba}$.

Isso sugere interpretar a curvatura extrínseca como sendo a velocidade da métrica $g|_\Sigma$, além de fornecer um candidato para ser o *momento canônico* da formulação hamiltoniana:

Queremos escrever essa ação de forma canônica, ou seja, gostaríamos de aplicar a transformação de Legendre na densidade Lagrangiana que aparece em 3.16 para a densidade Hamiltoniana correspondente [...]. Para analisar ainda mais o sistema, é necessário aplicar o algoritmo de Dirac para sistemas Hamiltonianos com vínculos. (Thiemann [69, p. 46])

Para uma discussão mais detalhada a respeito do formalismo ADM e sobre formulação hamiltoniana da relatividade, sugerimos consultar as seguintes referências: Dirac [22], Thiemann [69], Giesel [33], Dias [21] e Danieli e Molinari [20].

Capítulo 4

Conexão de Ashtekar

Historicamente, Abhay Ashtekar [1986] introduziu um conjunto de novas variáveis que permitiam reescrever os vínculos obtidos na teoria hamiltoniana da relatividade geral de maneira muito mais simples¹. Até então, um grande obstáculo ao programa de quantização consistia no fato dos vínculos da teoria hamiltoniana serem não-polinomiais.

A formulação canônica da relatividade geral em variáveis complexas de Ashtekar [3] reformula a gravidade como uma teoria de gauge semelhante à teoria de Yang-Mills, o que mostrou um novo caminho para se construir uma teoria quântica da gravidade. Embora essa reformulação da gravidade [...] tenha a vantagem de obter restrições algebricamente simples, condições de realidade complicadas devem ser impostas às variáveis canônicas para se recuperar a relatividade geral [...] (Bojowald e Das [16]).

Visando resolver os problemas envolvendo a imposição de condições de realidade² que uma teoria de gravitação complexificada tem de lidar, Fernando Barbero [1995] introduziu variáveis de Ashtekar reais, evitando o aparecimento de campos complexos.

Posteriormente, S. Holst [39] generalizou a ação de Einstein-Hilbert-Palatini de maneira a recuperar o formalismo hamiltoniano obtido por Barbero sem que as equações de movimento da ação original se alterassem. Essa generalização se deve à adição de um termo topológico, o que é bem discutido em Mercuri [53].

Como resultado deste processo histórico³, novos trabalhos desenvolveram a chamada gravitação quântica em laços. Dentre os trabalhos pioneiros no tema, destacam-se Rovelli e Smolin [63], Ashtekar, Rovelli e Smolin [6] e Gambini [28]:

A representação em loops é um desenvolvimento da reformulação de Ashtekar da relatividade geral e é motivada pela descoberta de um conjunto de soluções da equação de Wheeler-DeWitt relacionadas a laços. [...] Definimos a representação em laços como a quantização de uma álgebra de Poisson adequada de observáveis clássicos não-locais (Rovelli e Smolin [63]).

Para outras referências complementares sobre o tópico, sugerimos Ashtekar e Tate [7], Immirzi [42], Alexandrov e Livine [1], Ashtekar e Lewandowski [5] e Vyas e Joshi [73].

¹Apesar dos trabalhos de Ashtekar terem sido no contexto da formulação hamiltoniana, Ted Jacobson e Lee Smolin [44] obtiveram a conexão de Ashtekar através do formalismo lagrangiano.

²Condições de realidade são vínculos impostos em teorias complexificadas visando passar grandezas com graus de liberdade complexos para reais

³Uma ordenação histórica detalhada é feita em Thiemann [69, p. 118, Capítulo 4].

Seguindo o artigo Fleischhack e Levermann [25] e a tese Wöhr [75], utilizaremos todo o arcabouço matemático desenvolvido anteriormente para construir a conexão de Ashtekar. Como no Capítulo 3, vamos considerar que M é um espaçotempo globalmente hiperbólico de dimensão quatro e $\Sigma \subset M$ é uma superfície de Cauchy⁴.

NOTAÇÃO 4.1 Para não sobrecarregar a notação em algumas expressões, definiremos que:

- $E^\rho = \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3$ em que ρ é a representação usual determinada por $\rho_A(x) = A \cdot x$;
- $E^{\text{ad}} = \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3)$.

Um resultado fundamental para o restante do capítulo consiste no espaço das conexões definidas no fibrado dos referenciais $\text{Fr}_g^+(\Sigma)$ de uma variedade Riemanniana (Σ, g) ser isomorfo ao espaço das formas com valores no fibrado tangente $T\Sigma$:

TEOREMA 4.2 *Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana. Então, existe um isomorfismo*

$$\mathcal{C}(\text{Fr}_g^+(\Sigma)) \simeq \Lambda^1(\Sigma, T\Sigma)$$

em que $\mathcal{C}(\text{Fr}_g^+(\Sigma))$ é o espaço afim das conexões definidas em $\text{Fr}_g^+(\Sigma)$.

Demonstração. Pela Proposição 1.53, as representações

$$\text{Ad} : \text{SO}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3) \quad \text{e} \quad \rho : \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

são equivalentes. Portanto, pelo Teorema 1.49 existe um isomorfismo

$$\mathfrak{F} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3.$$

Pela Proposição 1.50, também temos um isomorfismo

$$\mathfrak{B} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3 \longrightarrow T\Sigma,$$

de maneira que a composição

$$\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3) \longrightarrow T\Sigma$$

é um isomorfismo. Por outro lado, como o Teorema 2.57 garante que há um isomorfismo

$$\Phi : \Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}} \longrightarrow \Lambda^1(\Sigma, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3)),$$

temos um isomorfismo $\mathfrak{J}$ dado por $\mathfrak{J}(\bar{\omega}) = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F} \circ \Phi)(\bar{\omega})$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}} & \xrightarrow{\Phi} & \Lambda^1(\Sigma, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3)) \\ & \searrow \mathfrak{J} & \downarrow \mathfrak{F} \\ & & \Lambda^1(\Sigma, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3) \\ & & \downarrow \mathfrak{B} \\ & & \Lambda^1(\Sigma, T\Sigma) \end{array}$$

A conclusão do teorema é uma consequência direta de $\mathcal{C}(\text{Fr}_g^+(\Sigma))$ ser um espaço afim sobre $\Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}}$ (Proposição 2.56). $\square$

⁴O Teorema 3.1 garante a existência dessa superfície.

Como consequência direta do resultado acima, temos:

COROLÁRIO 4.3 *Seja ω^{LC} a conexão de Levi-Civita definida em uma variedade Riemanniana (Σ, g) . Então, o espaço $\mathcal{C}(\text{Fr}_g^+(\Sigma))$ é dado explicitamente por*

$$\mathcal{C}(\text{Fr}_g^+(\Sigma)) \simeq \left\{ \omega^{LC} + \mathfrak{J}^{-1}(S) : S \in \Lambda^1(\Sigma, T\Sigma) \right\}. \quad (4.1)$$

Para discorrer um pouco mais sobre o isomorfismo $\mathfrak{J}$, vamos estabelecer que:

- $z \in \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x$ é um ponto na fibra sobre $x \in \Sigma$.
- $\widetilde{X} \in T(\text{Fr}_g^+(\Sigma)_x)_z$ é o levantamento de um vetor $X \in T\Sigma_x$;
- $\omega \in \Lambda^1(\Sigma, \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3))$ e $\bar{\omega} \in \Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}}$ tais que

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}} &\simeq \Lambda^1(M, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3)) \\ \bar{\omega} &\longleftrightarrow \omega \end{aligned}$$

via isomorfismo Φ do Teorema 2.57.

- $e \in \Gamma(U; \text{Fr}_g^+(\Sigma))$ é um referencial local em $U \subset \Sigma$ e $\{u_i\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$;
- $S \in \Lambda^1(U; T\Sigma)$ é uma forma vetorial definida localmente em U ;
- $\pi : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ é a projeção do fibrado.

Primeiro, temos que o isomorfismo é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_x(\bar{\omega})(X) &= (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F} \circ \Phi)(\bar{\omega}_x(X)) \\ &= (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F})[z, \bar{\omega}_z(\widetilde{X})] \\ &= \mathfrak{B}[z, \mathfrak{f}(\bar{\omega}_z(\widetilde{X}))] \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que na segunda linha utilizamos a Equação 2.10, presente no Teorema 2.57 que define o isomorfismo Φ . Utilizando o difeomorfismo

$$\mathbf{i}_z : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3) \quad \text{com} \quad \mathbf{i}_z(T) = [z, T]$$

e definindo $\mathcal{S} := \mathfrak{J}^{-1}(S) \in \Lambda_{\text{hor}}^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))^{\text{ad}}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_z((\mathfrak{J}^{-1} \circ S)(\widetilde{X})) &= [z, \mathfrak{J}^{-1}(S)(\widetilde{X})] \\ &= (\Phi \circ \mathfrak{J}^{-1}(S))(\pi_* \widetilde{X}) \\ &= (\mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{B}^{-1} \circ S)_z(X) \end{aligned}$$

em que utilizamos a Equação 2.11 na segunda linha. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}_z^{-1}(S))(\widetilde{X}) &= \mathbf{i}_z^{-1}((\mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{B}^{-1} \circ S_{\pi(z)})(X)) \\ &= (\mathbf{i}_z^{-1} \circ \mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{B}^{-1}) \left(\sum_i \langle S_{\pi(z)}(X), e_i \rangle_g e_i \right) \\ &= \sum_i \langle S_{\pi(z)}(X), e_i \rangle_g (\mathbf{i}_z^{-1} \circ \mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{B}^{-1}(e_i)) \\ &= \sum_i \langle S_{\pi(z)}(X), e_i \rangle_g T_i. \end{aligned}$$

O resultado obtido pode ser resumido na equação

$$(\mathcal{S}_z)_i(\tilde{X}) = \left\langle S_{\pi(z)}(X), e_i \right\rangle_g. \quad (4.3)$$

Portanto, o pullback $\mathcal{S}_e = e^*(\mathcal{S})$ é expresso por

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_e)_x(X) &= e^*(\mathcal{S})_x(X) \\ &= \mathcal{S}_{e(x)}((D_x e)X) \\ &= \sum_i \left\langle S_{\pi(e(x))}(D_{e(x)}\pi((D_x e)(X))), e_i \right\rangle_g T_i \\ &= \sum_i \langle S_x(X), e_i \rangle_g T_i \\ &= \sum_i (S_i)_x(X) T_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que aplicamos a Equação 4.3 na segunda linha, assim como a regra da cadeia

$$\pi \circ e = \text{id}|_U \implies (D_{\pi(e(x))}\pi \circ D_x e)(X) = X.$$

4.1 PRODUTO VETORIAL EM $T\Sigma$

Esta seção é dedicada a transferir o produto vetorial definido em $\mathbb{R}^3$ para o fibrado tangente $T\Sigma$. Para isso, utilizaremos o isomorfismo

$$\mathfrak{B} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \rightarrow T\Sigma \quad \text{com} \quad \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}}[e, v] = \left(x, \sum_i v^i e_i\right)$$

garantido pela Proposição 1.50. Então,

- como $\{e_i\}$ é uma base orientada de $T\Sigma_x$, podemos utilizar $\mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}}[e, u_i] = e_i$ para definirmos uma base $\{u_i\}$ orientada de $\mathbb{R}^3$;
- como (Σ, g) é uma variedade Riemanniana, o produto interno g em Σ pode ser utilizado para induzir um produto interno em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^3} := g(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Logo, a fibra $\mathbb{R}^3 \simeq T\Sigma_x$ munida do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ é um espaço euclidiano orientado que pode ser equipado com o **produto vetorial** $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$u_i \times u_j = \sum_k \epsilon_{ijk} u_k$$

e que faz de $(\mathbb{R}^3, \times)$ uma álgebra de Lie. Desse modo, cada fibra E_x^{ρ} admite o produto

$$\left(\text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\rho} \mathbb{R}^3\right) \times \left(\text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\rho} \mathbb{R}^3\right) \rightarrow \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad [e, u_i] \cdot [e, u_j] = [e, u_i \times u_j]$$

que serve como base para a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.4 Para cada $T\Sigma_x$ definimos o produto $\lambda_x : T\Sigma_x \times T\Sigma_x \rightarrow T\Sigma_x$ por

$$e_i \lambda_x e_j = \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}} \left(\mathfrak{B}^{-1}|_{T\Sigma_x}(X) \times \mathfrak{B}^{-1}|_{T\Sigma_x}(Y) \right).$$

Seja $\mathfrak{f} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ o isomorfismo entre álgebras de Lie usado para construir o isomorfismo $\mathfrak{F}$ do Teorema 4.49. Então,

$$\mathfrak{f}([T_1, T_2]_{\mathfrak{so}(3)}) = \mathfrak{f}(T_1) \times \mathfrak{f}(T_2) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathfrak{so}(3).$$

Desse modo, a ação do isomorfismo $\mathfrak{F}|_{E_x^{\text{ad}}}[e, T] = [e, \mathfrak{f}(T)]$ é

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}|_{E_x^{\text{ad}}}[e, [T_1, T_2]_{\mathfrak{so}(3)}] &= [e, \mathfrak{f}([T_1, T_2]_{\mathfrak{so}(3)})] \\ &= [e, \mathfrak{f}(T_1) \times \mathfrak{f}(T_2)] \\ &= [e, \mathfrak{f}(T_1)] \cdot [e, \mathfrak{f}(T_2)] \\ &= \mathfrak{F}|_{E_x^{\text{ad}}}[e, T_1] \cdot \mathfrak{F}|_{E_x^{\text{ad}}}[e, T_2]. \end{aligned}$$

Isso permite reescrever o produto λ_x como

$$e_i \lambda_x e_j = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F})|_{E_x^{\text{ad}}} \left(\left[(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F})^{-1}|_{T\Sigma_x}(X), (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F})^{-1}|_{T\Sigma_x}(Y) \right]_{\mathfrak{so}(3)} \right),$$

o que pode ser visualizado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3) & \xrightarrow{\mathfrak{F}|_{E_x^{\text{ad}}}} & \text{Fr}_g^+(\Sigma)_x \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \\ & \searrow (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{F})|_{E_x^{\text{ad}}} & \downarrow \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}} \\ & & T\Sigma_x \end{array}$$

Com isso, obtemos as seguintes identificações:

$$[e, [T_1, T_2]_{\mathfrak{so}(3)}] \longleftrightarrow [e, u_i \times u_j] \longleftrightarrow e_i \lambda_x e_j. \quad (4.5)$$

Podemos obter ainda uma outra expressão ao observar que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}}[e, u_i \times u_j] &= \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}} \left[e, \sum_k \epsilon_{ijk} u_k \right] \\ &= \sum_k \epsilon_{ijk} \mathfrak{B}|_{E_x^{\rho}}[e, u_k] \\ &= \sum_k \epsilon_{ijk} e_k. \end{aligned}$$

Através ela, o produto λ_x é expresso por

$$X \lambda_x Y = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} X^i Y^j e_k.$$

O próximo resultado garante que o produto λ_x é bem definido.

PROPOSIÇÃO 4.5 *O produto λ_x não depende do referencial.*

Demonstração. Sejam $e = (e_i)$ e $e' = (e'_i)$ duas bases ortonormais de $T\Sigma_x$. Consequentemente, dado dois vetores $X, Y \in T\Sigma_x$ temos

$$\begin{aligned} X &= \sum_i X^i e_i = \sum_i (X')^i e'_i, \\ Y &= \sum_i Y^i e_i = \sum_i (Y')^i e'_i. \end{aligned}$$

e, observando que existe uma transformação $A \in \text{SO}(3)$ entre os referenciais e e e' tal que

$$e'_i = \sum_j A_i^j e_j,$$

obtemos a relação entre as coordenadas de X e Y :

$$\begin{aligned} X &= \sum_i (X')^i e'_i = \sum_i (X')^i A_i^j e_j \implies X^k = \sum_i (X')^i A_i^k, \\ Y &= \sum_i (Y')^i e'_i = \sum_i (Y')^i A_i^j e_j \implies Y^l = \sum_i (Y')^i A_i^l. \end{aligned}$$

Com elas, o produto se escreve como

$$\begin{aligned} X \lrcorner_x Y &= \sum_{k,l,n} X^k Y^l \epsilon_{kln} e_n \\ &= \sum_{k,l,n} \sum_{i,j,m} A_i^k A_j^l A_n^m \epsilon_{kln} (X')^i (Y')^j e'_m \\ &= \sum_{i,j,m} (X')^i (Y')^j \epsilon_{ijm} e'_m, \end{aligned}$$

em que utilizamos que $\det(A) = 1$ e a propriedade do símbolo Levi-Civita:

$$\sum_{k,l,m} A_i^k A_j^l A_n^m \epsilon_{kln} = \det(A) \epsilon_{ijm} = \epsilon_{ijm}.$$

□

DEFINIÇÃO 4.6 Definimos o **produto vetorial**

$$\lrcorner : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma)$$

através do produto $\lrcorner_x$ ponto a ponto:

$$(Y \lrcorner Z)_x = Y_x \lrcorner_x Z_x \quad \forall x \in \Sigma.$$

Sejam $e \in \Gamma(U, \text{Fr}_g^+(\Sigma))$ um referencial local e $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$ dois campos. Então,

$$\begin{aligned} X|_U &= \sum_i X^i e_i \quad \text{com} \quad X^i = g(X^i, e_i), \\ Y|_U &= \sum_i Y^i e_i \quad \text{com} \quad Y^i = g(Y^i, e_i). \end{aligned}$$

Pelo isomorfismo $\mathfrak{B} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3 \rightarrow T\Sigma$, deverão existir $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}[e, \overline{X}] &= X|_U \quad \text{com} \quad \overline{X} = \sum_i X^i u_i, \\ \mathfrak{B}[e, \overline{Y}] &= Y|_U \quad \text{com} \quad \overline{Y} = \sum_i Y^i u_i. \end{aligned}$$

e, pelo isomorfismo $\mathfrak{F} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3$, deverão existir $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[e, \widetilde{X}] &= [e, \overline{X}] \quad \text{com} \quad \widetilde{X} = \mathfrak{f}^{-1}(\overline{X}), \\ \mathfrak{F}[e, \widetilde{Y}] &= [e, \overline{Y}] \quad \text{com} \quad \widetilde{Y} = \mathfrak{f}^{-1}(\overline{Y}). \end{aligned}$$

Com isso, obtemos as seguintes identificações:

- $\Gamma(U, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{so}(3)) \longleftrightarrow \Gamma(U, \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3) \longleftrightarrow \Gamma(U, T\Sigma)$
- $[e, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_{\mathfrak{so}(3)}] \longleftrightarrow [e, \overline{X} \times \overline{Y}] \longleftrightarrow X \wedge Y.$

O próximo resultado prova algumas propriedades importantes do produto vetorial $\wedge$.

PROPOSIÇÃO 4.7 *O produto vetorial $\wedge$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) *anticomutatividade:* $X \wedge Y = -Y \wedge X$
- b) *identidade de Jacobi:* $X \wedge (Y \wedge Z) + Z \wedge (X \wedge Y) + Y \wedge (Z \wedge X) = 0$
- c) $X \wedge (Y \wedge Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z$
- d) $\langle X \wedge Y, Z \rangle = \langle X, Y \wedge Z \rangle$

para quaisquer campos $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$.

Demonstração. As propriedades (a) e (b) seguem diretamente da identificação

$$[e, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_{\mathfrak{so}(3)}] \longleftrightarrow [e, \overline{X} \times \overline{Y}] \longleftrightarrow X \wedge Y.$$

Mais detalhadamente, (c) segue da propriedade

$$\overline{X} \times (\overline{Y} \times \overline{Z}) = \langle \overline{X}, \overline{Z} \rangle_{\mathbb{R}^3} \overline{Y} - \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_{\mathbb{R}^3} \overline{Z}$$

pois, utilizando a identificação obtida anteriormente, temos

$$X \wedge (Y \wedge Z) \longleftrightarrow [e, \overline{X} \times (\overline{Y} \times \overline{Z})] = [e, \langle \overline{X}, \overline{Z} \rangle_{\mathbb{R}^3} \overline{Y} - \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_{\mathbb{R}^3} \overline{Z}].$$

Para provarmos (d), temos

$$\begin{aligned} \langle e_i \wedge e_j, e_k \rangle &= \sum_l \epsilon_{ijl} \langle e_l, e_k \rangle_g \\ &= \sum_k \epsilon_{ijl} \langle u_l, u_k \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle u_i \times u_j, u_k \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle u_i, u_j \times u_k \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle e_i, e_j \wedge e_k \rangle. \end{aligned}$$

□

4.2 A CONEXÃO DE ASHTEKAR

O próximo resultado é a última peça que resta:

TEOREMA 4.8 *Seja $S \in \Lambda^1(\Sigma, T\Sigma)$ tal que $\mathcal{S} = \mathfrak{J}^{-1}(S)$. Então, a derivada covariante com respeito à conexão $A = \omega^{LC} + \mathcal{S}$ é dada por*

$$\nabla^A : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma^* \otimes T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla_X^A Y = \nabla_X^{LC} Y + S(X) \lrcorner Y.$$

Demonstração. Denotando $\Phi = [e, u_l] \in \Gamma(U; \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3)$, segue da Definição 2.65 que a derivada covariante $\nabla_X^{E^\rho, A}$ em $\text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3$ com respeito à conexão $A = \omega^{LC} + \mathcal{S}$ é

$$\begin{aligned} \nabla_X^{E^\rho, A} \Phi &= \nabla_X^A [e, u_l] \\ &= [e, \rho_*(A_e(X))u_l] \\ &= [e, \rho_*(\omega_e^{LC}(X) + \mathcal{S}_e(X))u_l]. \end{aligned}$$

Precisamos explicitar os termos $\rho_*(\omega_e^{LC}(X))$ e $\rho_*(\mathcal{S}_e(X)u_l)$.

(i) $\rho_*(\omega_e^{LC}(X))u_l$: como vimos na Equação 2.9, expressamos ω_e^{LC} por

$$\omega_e^{LC} = \sum_k (\Gamma_e)^k T_k \quad \text{com} \quad (\Gamma_e)^k := \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \langle \nabla^{LC} s_i, s_j \rangle \in \Lambda^1(U, \mathbb{R}),$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \rho_*(\omega_e^{LC}(X))u_l &= \rho_* \left(\sum_k (\Gamma_e)_k(X) T_k \right) u_l \\ &= \sum_k (\Gamma_e)_k(X) \rho_*(T_k)u_l. \end{aligned}$$

O termo $\rho_*(T_k)u_l$ é bem definido, pois $\rho_* : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^3)$. Se expressarmos

$$\rho_*(T_k) = \sum_{m,n} \{T_k\}_{mn} E_{mn} \quad \text{e} \quad u_l = \sum_n \delta_{ln} u_n,$$

podemos obter a expressão

$$\begin{aligned} \rho_*(T_k)u_l &= \sum_{m,n} (\{T_k\}_{mn} E_{mn}) \cdot (\delta_{ln} u_n) \\ &= \sum_m \{T_k\}_{ml} u_m \\ &= - \sum_m \epsilon_{kml} u_m \\ &= \sum_m \epsilon_{klm} u_m \end{aligned}$$

em que utilizamos $\sum_l E_{ml} u_l = u_m$ e $\{T_k\}_{mn} = -\epsilon_{kmn}$. Logo,

$$\rho_*(\omega_e^{LC}(X))u_l = \sum_{k,m} (\Gamma_e)_k(X) \epsilon_{klm} u_m.$$

Utilizando a propriedade dos símbolos de Levi-Civita

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \implies \sum_k \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k,m} (\Gamma_e)_k(X) \epsilon_{klm} &= \frac{1}{2} \sum_{m,i,j} \sum_k \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,i,j} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_m (\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle - \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_m, e_l \rangle). \end{aligned}$$

o que leva à expressão

$$\left[e, \rho_*(e^* \omega^{\text{LC}}(X)) u_l \right] = \left[e, \sum_m \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle u_m \right].$$

pois, pela metricidade da conexão ∇^{LC} , temos

$$-\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_m, e_l \rangle = \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle - \underbrace{\nabla_X^{\text{LC}} (\langle e_l, e_m \rangle)}_{=0}.$$

(ii) $\rho_*(\mathcal{S}_e(X)u_l)$: segue da Equação 4.4 que

$$\begin{aligned} \rho_*(\mathcal{S}_e(X))u_l &= \rho_* \left(\sum_k S_k(X) T_k \right) u_l \\ &= \sum_k S_k(X) \rho_*(T_k) u_l \\ &= \sum_{k,m} S_k(X) \epsilon_{klm} u_m \end{aligned}$$

e, portanto, obtemos a expressão

$$\left[e, \rho_*(\mathcal{S}_e(X))u_l \right] = \left[e, \sum_{k,m} \epsilon_{klm} \langle S(X), e_k \rangle u_m \right].$$

Por outro lado, o isomorfismo $\mathfrak{B} : \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \rightarrow T\Sigma$ induz a derivada covariante

$$\nabla^A : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma^* \otimes T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla^A X = \left(\mathfrak{B} \circ \nabla^{E^{\rho}, A} \circ \mathfrak{B}^{-1} \right) X.$$

Com isso e observando que

$$\begin{aligned} \bullet \quad S(X) \lrcorner e_l &= \left(\sum_k \langle S(X), e_k \rangle e_k \right) \lrcorner e_l \\ &= \sum_{k,m} \langle S(X), e_k \rangle (\epsilon_{klm} e_m) \\ &= \mathfrak{B} \left(\sum_{k,m} \epsilon_{klm} \langle S(X), e_k \rangle [e, u_m] \right) \\ &= \mathfrak{B} [e, \rho_*(\mathcal{S}_e(X))u_l] \\ \bullet \quad \nabla_X^{\text{LC}} e_l &= \sum_m \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle e_m \\ &= \mathfrak{B} \left(\sum_m \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle [e, u_m] \right) \\ &= \mathfrak{B} [e, \rho_*(e^* \omega^{\text{LC}}(X))u_l] \end{aligned}$$

temos, consequentemente, que a expressão da derivada covariante é:

$$\begin{aligned}
 \nabla_X^{\text{LC}} e_l + S(X) \lrcorner e_l &= \mathfrak{B} \left[e, \sum_{k,m} \left(\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_l, e_m \rangle + \epsilon_{klm} \langle S(X), e_k \rangle \right) u_m \right] \\
 &= \mathfrak{B} \left[e, \rho_* \left(\omega_e^{\text{LC}}(X) + \mathcal{S}_e(X) \right) u_l \right] \\
 &= \mathfrak{B} \left(\nabla_X^{E\rho, A} [e, u_l] \right) \\
 &= \mathfrak{B} \left(\nabla_X^{E\rho, A} \left(\mathfrak{B}^{-1}(e_l) \right) \right) \\
 &= \nabla^A e_l.
 \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 4.9 *Seja $\widetilde{\text{Wein}} = \mathfrak{J}^{-1} \circ \text{Wein}$. A conexão de Ashtekar com respeito ao parâmetro de Barbero-Immirzi ⁵ $\beta \in \mathbb{C}$ é definida por*

$$A = \omega^{\text{LC}} + \beta \widetilde{\text{Wein}} \in \Lambda_{\text{hor}}^1 \left(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3) \right)^{\text{ad}}$$

e a derivada covariante ∇^A associada a ela é

$$\nabla^A : \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma^* \otimes T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla_X^A Y = \nabla_X^{\text{LC}} Y + \beta \text{Wein}(X) \lrcorner Y.$$

PROPOSIÇÃO 4.10 *Em coordenadas, a conexão de Ashtekar é dada por*

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta \kappa_a^i \tag{4.6}$$

Demonstração. Para isso, basta observamos que

$$\begin{aligned}
 (A_e)^i_a &= (\omega_e^{\text{LC}})^i_a + \beta (\widetilde{\text{Wein}}_e)^i_a \\
 &= \underbrace{(\omega_e^{\text{LC}})^i(\partial_a)}_{(a)} + \beta \underbrace{(\widetilde{\text{Wein}}_e)^i(\partial_a)}_{(b)}.
 \end{aligned}$$

O termo (a) decorre da Equação 2.9:

$$\omega_e^{\text{LC}} = \sum_k (\Gamma_e)^k T_k \implies (\omega_e^{\text{LC}})^i(\partial_a) = (\Gamma_e)^i(\partial_a).$$

Para o termo (b), utilizamos a Expressão 4.4:

$$(\widetilde{\text{Wein}}_e)(\partial_a) = \sum_k \langle \text{Wein}(\partial_a), e_k \rangle T_k \implies (\widetilde{\text{Wein}}_e)^i(\partial_a) = \langle \text{Wein}(\partial_a), e_i \rangle,$$

de maneira que o resultado segue da Proposição 3.12:

$$(\widetilde{\text{Wein}}_e)^i(\partial_a) = \langle \text{Wein}(\partial_a), e_i \rangle = \kappa_a^i.$$

□

A Expressão 4.6 coordenadas é a maneira como usualmente a conexão de Ashtekar é definida na literatura física, como é possível ver em Thiemann [69, p. 128] e Barbero G. [9, Equação 4]. Antes do próximo resultado, um lema:

⁵o parâmetro β também leva o nome de Giorgio Immirzi devido aos seus trabalhos sobre o tópico.

LEMA 4.11 A conexão ∇^{LC} satisfaz a regra do produto com relação a $\wedge$:

$$\nabla_X^{LC}(Y \wedge Z) = \nabla_X^{LC}Y \wedge Z + Y \wedge \nabla_X^{LC}Z. \quad (4.7)$$

Demonstração. Ver A.12. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.12 A derivada covariante de Ashtekar ∇^A satisfaz a regra do produto com relação ao produto vetorial $\wedge$:

$$\nabla_X^A(Y \wedge Z) = \nabla_X^A Y \wedge Z + Y \wedge \nabla_X^A Z$$

Demonstração. Utilizando a Identidade de Jacobi e o Lema 4.11, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_X^A Y \wedge Z + Y \wedge \nabla_X^A Z &= (\nabla_X^{LC} Y + \beta \text{Wein}(X) \wedge Y) \wedge Z \\ &\quad + Y \wedge (\nabla_X^{LC} Z + \beta \text{Wein}(X) \wedge Z) \\ &= \nabla_X^{LC} Y \wedge Z + Y \wedge \nabla_X^{LC} Z \\ &\quad + \beta ((\text{Wein}(X) \wedge Y) \wedge Z + Y \wedge (\text{Wein}(X) \wedge Z)) \\ &= \nabla_X^{LC}(Y \wedge Z) \\ &\quad + \beta (-Z \wedge (\text{Wein}(X) \wedge Y) - Y \wedge (Z \wedge \text{Wein}(X))) \\ &= \nabla_X^{LC}(Y \wedge Z) + \beta (\text{Wein}(X) \wedge (Y \wedge Z)) \\ &= \nabla_X^A(Y \wedge Z). \end{aligned}$$

$\square$

Os próximos dois resultados provam que a conexão de Ashtekar resulta em uma derivada covariante com torção não-nula e que é compatível com a métrica.

PROPOSIÇÃO 4.13 A derivada covariante de Ashtekar ∇^A é métrica:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X^A Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Y^A Z \rangle$$

Demonstração. Segue diretamente da metricidade de ∇^{LC} :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^A Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^A Z \rangle &= \langle \nabla_X^{LC} Y + \beta \text{Wein}(X) \wedge Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^{LC} Z + \beta \text{Wein}(X) \wedge Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X^{LC} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^{LC} Z \rangle \\ &\quad + \beta (\langle \text{Wein}(X) \wedge Y, Z \rangle + \langle Y, \text{Wein}(X) \wedge Z \rangle) \\ &= X \langle Y, Z \rangle, \end{aligned}$$

uma vez que $\langle Y, \text{Wein}(X) \wedge Z \rangle = \langle Y \wedge \text{Wein}(X), Z \rangle = -\langle \text{Wein}(X) \wedge Y, Z \rangle$. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.14 A torção associada à conexão de Ashtekar é

$$T^A(X, Y) = \beta (\text{Wein}(X) \wedge Y + X \wedge \text{Wein}(Y)). \quad (4.8)$$

Em coordenadas, temos

$$(T^A)_{ab}^i = \beta \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} (\kappa_a^j e_b^k - \kappa_b^j e_a^k).$$

Demonstração. O resultado segue de maneira direta: como ∇^{LC} é livre de torção,

$$\begin{aligned} T^A(X, Y) &= (\nabla_X^{\text{LC}} Y + \beta \text{Wein}(X) \wedge Y) - (\nabla_Y^{\text{LC}} X + \beta \text{Wein}(Y) \wedge X) - [X, Y] \\ &= (\nabla_X^{\text{LC}} Y - \nabla_Y^{\text{LC}} X - [X, Y]) + \beta (\text{Wein}(X) \wedge Y - \text{Wein}(Y) \wedge X) \\ &= \underbrace{T^{\text{LC}}(X, Y)}_{=0} + \beta (\text{Wein}(X) \wedge Y + X \wedge \text{Wein}(Y)). \end{aligned}$$

Para se obter a expressão em coordenadas, utilizaremos que

$$(X \wedge Y)^i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} X^j Y^k.$$

Aplicando a expressão acima e lembrando que $\text{Wein}_j^i = \kappa_j^i$ pela Proposição 3.12, temos

$$\begin{aligned} \bullet \langle \text{Wein}(e_a) \wedge e_b, e_i \rangle &= (\text{Wein}_a \wedge e_b)^i & \text{e} & \bullet \langle \text{Wein}(e_b) \wedge e_a, e_i \rangle = (\text{Wein}_b \wedge e_a)^i \\ &= \sum_{j,k} \kappa_a^j e_b^k & & = \sum_{j,k} \kappa_b^j e_a^k \end{aligned}$$

de modo que obtêm-se a mesma expressão para a torção T^A em coordenadas que aparece em Charles e Livine [19, Equação 10] e Montesinos [55, Equação 12]. $\square$

4.2.1 CURVATURA DA CONEXÃO DE ASHTEKAR

Nesta subseção iremos calcular a curvatura associada à conexão de Ashtekar.

PROPOSIÇÃO 4.15 *A curvatura associada a conexão de Ashtekar é*

$$\begin{aligned} R^A(X, Y)Z &= R^{\text{LC}}(X, Y)Z \\ &\quad + \beta \left((\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein})Y - (\nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein})X \right) \wedge Z \\ &\quad + \beta^2 \left(\text{Wein}(X) \wedge \text{Wein}(Y) \right) \wedge Z \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos computar cada termo da curvatura separadamente. Temos

$$\begin{aligned} \bullet \nabla_X^A \nabla_Y^A Z &= \nabla_X^A (\nabla_Y^{\text{LC}} Z + \beta \text{Wein}(Y) \wedge Z) \\ &= \nabla_X^{\text{LC}} (\nabla_Y^{\text{LC}} Z + \beta \text{Wein}(Y) \wedge Z) + \beta \text{Wein}(X) \wedge (\nabla_Y^{\text{LC}} Z + \beta \text{Wein}(Y) \wedge Z) \\ &= \nabla_X^{\text{LC}} \nabla_Y^{\text{LC}} Z \\ &\quad + \beta \left(\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z + \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z + \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z \right) \\ &\quad + \beta^2 \left(\text{Wein}(X) \wedge (\text{Wein}(Y) \wedge Z) \right) \\ \bullet \nabla_Y^A \nabla_X^A Z &= \nabla_Y^{\text{LC}} \nabla_X^{\text{LC}} Z \\ &\quad + \beta \left(\nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(X) \wedge Z + \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z + \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z \right) \\ &\quad + \beta^2 \left(\text{Wein}(Y) \wedge (\text{Wein}(X) \wedge Z) \right). \end{aligned}$$

Também computamos o termo

$$\nabla_{[X,Y]}^A Z = \nabla_{[X,Y]}^{\text{LC}} Z + \beta (\text{Wein}([X, Y]) \wedge Z).$$

Resumindo as expressões obtidas, obtemos:

$$\begin{aligned}
R^A(X, Y)Z = & \nabla_X^{\text{LC}} \nabla_Y^{\text{LC}} Z \\
& + \beta (\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z + \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z + \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z) \\
& + \beta^2 \left(\text{Wein}(X) \wedge (\text{Wein}(Y) \wedge Z) \right) \\
& - \nabla_Y^{\text{LC}} \nabla_X^{\text{LC}} Z \\
& - \beta (\nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(X) \wedge Z + \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z + \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z) \\
& - \beta^2 \left(\text{Wein}(Y) \wedge (\text{Wein}(X) \wedge Z) \right) \\
& - \nabla_{[X, Y]}^{\text{LC}} Z - \beta (\text{Wein}([X, Y]) \wedge Z).
\end{aligned}$$

Vamos analisar cada uma das componentes da expressão anterior:

(i) Parte sem o coeficiente β : é imediato, pois

$$\nabla_X^{\text{LC}} \nabla_Y^{\text{LC}} Z - \nabla_Y^{\text{LC}} \nabla_X^{\text{LC}} Z - \nabla_{[X, Y]}^{\text{LC}} Z = R^{\text{LC}}(X, Y)Z.$$

(ii) Parte com o coeficiente β : como

$$\begin{aligned}
\text{Wein}([X, Y]) \wedge Z &= \text{Wein}(\nabla_X^{\text{LC}} Y - \nabla_Y^{\text{LC}} X) \wedge Z \\
&= \text{Wein}(\nabla_X^{\text{LC}} Y) \wedge Z - \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} X) \wedge Z,
\end{aligned}$$

e observando que

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z + \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z + \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z \right. \\
& \quad \left. - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(X) \wedge Z - \text{Wein}(X) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z - \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z \right) \\
&= \nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(X) \wedge Z,
\end{aligned}$$

podemos reescrever o termo com coeficiente β como:

$$\begin{aligned}
& \left(\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) - \text{Wein}(\nabla_X^{\text{LC}} Y) - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(X) + \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} X) \right) \wedge Z \\
&= \left((\nabla_X^{\text{LC}} \text{Wein})(Y) - (\nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein})(X) \right) \wedge Z.
\end{aligned}$$

(iii) Parte com coeficiente β^2 : usando a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}
& \text{Wein}(X) \wedge (\text{Wein}(Y) \wedge Z) - \text{Wein}(Y) \wedge (\text{Wein}(X) \wedge Z) \\
&= \text{Wein}(X) \wedge (\text{Wein}(Y) \wedge Z) + \text{Wein}(Y) \wedge (Z \wedge \text{Wein}(X)) \\
&= -Z \wedge (\text{Wein}(X) \wedge \text{Wein}(Y)) \\
&= (\text{Wein}(X) \wedge \text{Wein}(Y)) \wedge Z.
\end{aligned}$$

□

Em coordenadas, a curvatura associada à conexão de Ashtekar é

$$(R^A)^i_{ab} = (R^{LC})^i_{ab} + 2\beta \nabla_{[a}^{LC} \kappa_{b]}^j + \beta^2 \epsilon_{jkl} \kappa_a^k \kappa_b^l. \quad (4.9)$$

Para calcularmos essa expressão, vamos nos basear em Bojowald [15, p. 94]. Utilizando a expressão em coordenadas do tensor curvatura

$$\begin{aligned} F_{abi}^j &:= 2\left(\partial_{[a}\omega_{b]i}^j + \omega_{[a|i}^k\omega_{b]k}^j\right) \\ &= \partial_a\omega_{bi}^j - \partial_b\omega_{ai}^j + \omega_{ai}^k\omega_{bk}^j - \omega_{bi}^k\omega_{ak}^j, \end{aligned}$$

temos de provar que vale:

$$F_{ab}^l = 2\partial_{[a}\Gamma_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \quad \text{com} \quad F_{ab}^l := \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^l F_{ab}^{ij}.$$

OBSERVAÇÃO 4.16 No caso da conexão de Levi-Civita, recuperamos a conhecida equação

$$R_{abI}^J = \partial_a\Gamma_{bI}^J - \partial_b\Gamma_{aI}^J + \Gamma_{aI}^k\Gamma_{bk}^J - \Gamma_{bI}^k\Gamma_{ak}^J.$$

Utilizando a expressão do tensor curvatura na definição de F_{ab}^l , temos

$$F_{ab}^l := \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^l F_{ab}^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^l \left(2\left(\partial_{[a}\omega_{b]}^{ij} + \omega_{[a}^{ik}\omega_{b]k}^j\right) \right) = \underbrace{\epsilon_{ij}^l \partial_{[a}\omega_{b]}^{ij}}_{(a)} + \underbrace{\epsilon_{ij}^l \omega_{[a}^{ik}\omega_{b]k}^j}_{(b)}.$$

O termo (a) segue de $2\Gamma_a^k = \epsilon_{ij}^k \omega_a^{ij}$ (motivado pela Equação 2.9):

$$\epsilon_{ij}^l \partial_{[a}\omega_{b]}^{ij} = \partial_{[a} \epsilon_{ij}^k \omega_{b]}^{ij} = 2\partial_{[a}\Gamma_{b]}^k.$$

Para o termo (b), temos de mostrar que

$$\epsilon_{ij}^l \omega_{[a}^{ik}\omega_{b]}^{kj} = \epsilon_{ij}^l \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n = -\epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n.$$

Para provarmos a primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^l \left(\epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \right) &= \epsilon_{ij}^l \left(\epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{pq}^m \epsilon_{rs}^n \omega_{[a}^{pq} \omega_{b]}^{rs} \right) \right) \\ &= \epsilon_{ij}^l \left(\frac{1}{4} \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \epsilon_{pq}^m \epsilon_{rs}^n \omega_{[a}^{pq} \omega_{b]}^{rs} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando as seguintes relações dos símbolos de Levi-Civita:

$$\epsilon_{km}^i \epsilon_{pq}^m = \delta_i^p \delta_k^q - \delta_i^q \delta_k^p \quad \text{e} \quad \epsilon_n^{kj} \epsilon_{rs}^n = \delta_k^r \delta_j^s - \delta_k^s \delta_j^r,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \epsilon_{pq}^m \epsilon_{rs}^n &= (\delta_i^p \delta_k^q - \delta_i^q \delta_k^p) (\delta_k^r \delta_j^s - \delta_k^s \delta_j^r) \\ &= \delta_i^p \delta_k^q \delta_k^r \delta_j^s - \delta_i^p \delta_k^q \delta_k^s \delta_j^r - \delta_i^q \delta_k^p \delta_k^r \delta_j^s + \delta_i^q \delta_k^p \delta_k^s \delta_j^r. \end{aligned}$$

Com isso, podemos expressar a Equação 4.10 como

$$\begin{aligned} \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \epsilon_{pq}^m \epsilon_{rs}^n \omega_{[a}^{pq} \omega_{b]}^{rs} &= \left(\delta_i^p \delta_k^q \delta_k^r \delta_j^s - \delta_i^p \delta_k^q \delta_k^s \delta_j^r - \delta_i^q \delta_k^p \delta_k^r \delta_j^s + \delta_i^q \delta_k^p \delta_k^s \delta_j^r \right) \omega_{[a}^{pq} \omega_{b]}^{rs} \\ &= \omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{kj} - \omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{jk} - \omega_{[a}^{ki} \omega_{b]}^{kj} + \omega_{[a}^{ki} \omega_{b]}^{jk} \\ &= 2\omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{kj} - 2\omega_{[a}^{ki} \omega_{b]}^{kj} \\ &= 4\omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{kj}. \end{aligned}$$

Portanto, obtivemos a primeira igualdade:

$$\epsilon_{ij}^l \omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{kj} = \epsilon_{ij}^l \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n.$$

Para a segunda igualdade, usando que

$$\epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} = -\epsilon_{mk}^i \epsilon_n^{kj} = -(\delta_n^{ij} \delta_m^j - \delta_n^j \delta_m^i)$$

podemos obter

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^l \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} &= -\epsilon_{ij}^l (\delta_n^{ij} \delta_m^j - \delta_n^j \delta_m^i) \\ &= -\underbrace{\epsilon_{ij}^l \delta_n^{ij} \delta_m^j}_{=0} + \epsilon_{ij}^l \delta_n^i \delta_m^j \\ &= \epsilon_{nm}^l. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos a relação

$$\epsilon_{ij}^l \epsilon_{km}^i \epsilon_n^{kj} \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n = \epsilon_{nm}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n = -\epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n.$$

que prova a segunda igualdade

$$\omega_{[a}^{ik} \omega_{b]}^{kj} \epsilon_{ij}^l = -\epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n.$$

Portanto, provamos que vale a expressão

$$F_{ab}^l = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \quad (4.11)$$

Substituindo $\Gamma_b^l \mapsto A_b^l = \Gamma_b^l + \beta \kappa_b^l$ diretamente na Expressão 4.11, temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}^A\}_{ab}^k &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \\ &= 2\partial_{[a} (\Gamma_{b]}^k + \beta \kappa_{b]}^k) - \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l (\Gamma_a^m \Gamma_b^n - \Gamma_b^m \Gamma_a^n) \\ &= 2\partial_{[a} (\Gamma_{b]}^k + \beta \kappa_{b]}^k) - \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l \left((\Gamma_a^m + \beta \kappa_a^m) (\Gamma_b^n + \beta \kappa_b^n) - (\Gamma_b^m + \beta \kappa_b^m) (\Gamma_a^n + \beta \kappa_a^n) \right) \\ &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k - (\Gamma_a^m \Gamma_b^n - \Gamma_b^m \Gamma_a^n) \\ &\quad + \beta \left(2\partial_{[a} \kappa_{b]}^k - \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l (\Gamma_a^m \kappa_b^n + \Gamma_b^m \kappa_a^n - \Gamma_b^m \kappa_a^n - \Gamma_a^m \kappa_b^n) \right) \\ &\quad + \beta^2 (\kappa_a^m \kappa_b^n - \kappa_b^m \kappa_a^n) \\ &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \\ &\quad + \beta \left(2\partial_{[a} \kappa_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l (\Gamma_{[a}^m \kappa_{b]}^n) - \epsilon_{mn}^l (\Gamma_{[b}^n \kappa_{a]}^m) \right) \\ &\quad - \beta^2 \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l (\kappa_a^m \kappa_b^n - \kappa_a^n \kappa_b^m). \end{aligned}$$

Analisando o termo com β^2 , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l (\kappa_a^m \kappa_b^n - \kappa_a^n \kappa_b^m) &= \frac{1}{2} (\epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n - \epsilon_{mn}^l \kappa_a^n \kappa_b^m) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n - \epsilon_{nm}^l \kappa_a^m \kappa_b^n) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n + \epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n) \\ &= \epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n \end{aligned}$$

e, analisando o termo com β , temos

$$\begin{aligned}\epsilon_{mn}^l \left(\Gamma_{[a}^m \kappa_{b]}^n \right) + \epsilon_{mn}^l \left(\Gamma_{[b}^n \kappa_{a]}^m \right) &= \epsilon_{nm}^l \left(\Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m \right) - \epsilon_{mn}^l \left(\Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m \right) \\ &= \epsilon_{nm}^l \left(\Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m \right) + \epsilon_{nm}^l \left(\Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m \right) \\ &= 2\epsilon_{nm}^l \Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m.\end{aligned}$$

Utilizando que

$$\partial_{[a} \kappa_{b]}^k - \epsilon_{nm}^l \Gamma_{[a}^n \kappa_{b]}^m = \nabla_{[a}^A \kappa_{b]}^k,$$

podemos enfim obter a Expressão 4.9:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{F}^A\}_{ab}^k &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \\ &\quad + \beta \left(2\partial_{[a} \kappa_{b]}^k - \epsilon_{mn}^l \left(\Gamma_{[a}^m \kappa_{b]}^n \right) - \epsilon_{mn}^l \left(\Gamma_{[b}^n \kappa_{a]}^m \right) \right) \\ &\quad - \beta^2 \frac{1}{2} \epsilon_{mn}^l \left(\kappa_a^m \kappa_b^n - \kappa_a^n \kappa_b^m \right) \\ &= F_{ab}^k + 2\beta \nabla_{[a}^A \kappa_{b]}^k - \beta^2 \epsilon_{mn}^l \kappa_a^m \kappa_b^n\end{aligned}$$

que pode ser encontrada em Thiemann [69, Equação 4.2.32] e Rovelli e Vidotto [65, Equação 3.84]. Com a Proposição 4.15, calculamos a curvatura de Ricci associada:

PROPOSIÇÃO 4.17 *A curvatura de Ricci associada à conexão de Ashtekar é:*

$$\begin{aligned}\text{Ric}^A(Y, Z) &= \text{Ric}^{LC}(Y, Z) \\ &\quad + \beta \sum_i \left(\langle \text{Wein}([Y, e_i]) \wedge Z, e_i \rangle \right. \\ &\quad \left. \langle (\nabla_{e_i}^{LC} \text{Wein}(Y) - \nabla_Y^{LC} \text{Wein}(e_i)) \wedge Z, e_i \rangle \right) \\ &\quad + \beta^2 \sum_i \left(\langle Z, \text{Wein}(Y) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle Z, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(Y), e_i \rangle \right).\end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando a expressão obtida na Proposição 4.15, temos

$$\begin{aligned}R^A(e_i, Y)Z &= R^{LC}(e_i, Y)Z \\ &\quad + \beta \left((\nabla_{e_i}^{LC} \text{Wein})Y - (\nabla_Y^{LC} \text{Wein})e_i \right) \wedge Z \\ &\quad + \beta^2 \left(\text{Wein}(e_i) \wedge \text{Wein}(Y) \right) \wedge Z.\end{aligned}$$

Consequentemente, a curvatura de Ricci é:

$$\begin{aligned}\text{Ric}^A(Y, Z) &= \sum_i \langle R^{LC}(e_i, Y)Z, e_i \rangle \\ &\quad + \beta \sum_i \langle ((\nabla_{e_i}^{LC} \text{Wein})Y - (\nabla_Y^{LC} \text{Wein})(e_i)) \wedge Z, e_i \rangle \\ &\quad + \beta^2 \sum_i \langle (\text{Wein}(e_i) \wedge \text{Wein}(Y)) \wedge Z, e_i \rangle.\end{aligned}$$

Como de costume, vamos analisar a expressão anterior termo a termo. Temos:

(i) Parte sem coeficiente o β : é imediato, pois

$$\sum_i \langle R^{\text{LC}}(e_i, Y)Z, e_i \rangle = \text{Ric}^{\text{LC}}(Y, Z).$$

(ii) Parte com coeficiente o β : obtêm-se abrindo a derivada covariante de Wein,

$$\begin{aligned} & \sum_i \langle (\nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein})Y - (\nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein})(e_i) \rangle \lrcorner Z, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) - \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i) + \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i), Z \lrcorner e_i \rangle \\ &= \sum_i \left(\langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) - \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y), Z \lrcorner e_i \rangle \right) \\ & \quad + \sum_i \left(\langle (\nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i)) \lrcorner Z, e_i \rangle \right) \\ &= \sum_i \left(\langle \text{Wein}([Y, e_i]) \lrcorner Z, e_i \rangle \right) \\ & \quad + \sum_i \left(\langle (\nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i)) \lrcorner Z, e_i \rangle \right). \end{aligned}$$

(iii) Parte com o coeficiente β^2 : pela propriedade (c) da Proposição 4.7, temos

$$\begin{aligned} & \langle (\text{Wein}(e_i) \lrcorner \text{Wein}(Y)) \lrcorner Z, e_i \rangle \\ &= - \langle Z \lrcorner (\text{Wein}(e_i) \lrcorner \text{Wein}(Y)), e_i \rangle \\ &= - \langle \langle Z, \text{Wein}(e_i) \rangle \text{Wein}(Y) - \langle Z, \text{Wein}(Y) \rangle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \\ &= \langle Z, \text{Wein}(Y) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle - \langle Z, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(Y), e_i \rangle. \end{aligned}$$

□

4.2.2 CURVATURA ESCALAR DA CONEXÃO DE ASHTEKAR

O leitor que consultar Wöhr [75] irá notar que a expressão para a curvatura de Ricci é ligeiramente diferente. Em Wöhr [75, p. 141], é apresentada a expressão:

$$\begin{aligned} \text{Ric}^A(Y, Z) &= \text{Ric}^{\text{LC}}(Y, Z) \\ & \quad - \beta \sum_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \lrcorner \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \right. \\ & \quad \quad + \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \lrcorner Z, e_i \rangle \\ & \quad \quad + \langle \text{Wein}(e_i) \lrcorner Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle \\ & \quad \quad - \langle \text{Wein}(e_i) \lrcorner \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \\ & \quad \quad \left. - \langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \lrcorner Z, e_i \rangle \right) \\ & \quad + \beta^2 \sum_i \left(\langle Z, \text{Wein}(Y) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \right. \\ & \quad \quad \left. - \langle Z, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(Y), e_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Essa expressão não é a mesma que obtivemos na Proposição 4.17, de modo que surge o questionamento se elas são ou não equivalentes. Na tentativa de partir da expressão que obtivemos na Proposição 4.17 para a obtida em Wöhr [75], temos de re-analisar a parte com o coeficiente β , separando-o em componentes:

$$\sum_i \left(\underbrace{\langle \text{Wein}([Y, e_i]) \wedge Z, e_i \rangle}_{(A)} + \underbrace{\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle}_{(B)} - \underbrace{\langle \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle}_{(C)} \right).$$

Analisando cada um dos termos separadamente, temos:

(i) O termo (A) está na forma final:

$$\langle \text{Wein}([Y, e_i]) \wedge Z, e_i \rangle = \langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \wedge Z, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \wedge Z, e_i \rangle.$$

(ii) Para o termo (B), utilizamos a regra do produto:

$$\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} (\text{Wein}(Y) \wedge Z), e_i \rangle - \langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle.$$

(iii) Analogamente, o termo (C) se escreve como

$$\langle \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle = \langle \nabla_Y^{\text{LC}} (\text{Wein}(e_i) \wedge Z), e_i \rangle - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle.$$

Portanto, o termo com coeficiente β é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(\langle (\text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) - \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y)) \wedge Z, e_i \rangle \right. \\ & \quad \left. + \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \right) \\ & + \sum_i \left(\underbrace{\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} (\text{Wein}(Y) \wedge Z), e_i \rangle}_{(D)} - \underbrace{\langle \nabla_Y^{\text{LC}} (\text{Wein}(e_i) \wedge Z), e_i \rangle}_{(E)} \right), \end{aligned}$$

em que a primeira componente está exatamente como aparece em [75]. Portanto, resta analisar melhor as componentes (D) e (E) que apareceram. Temos:

(iv) pela metricidade da conexão, o termo (D) é

$$\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} (\text{Wein}(Y) \wedge Z), e_i \rangle = e_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle \right) - \langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_i \rangle.$$

(v) e, analogamente, o termo (E) é

$$\langle \nabla_Y^{\text{LC}} (\text{Wein}(e_i) \wedge Z), e_i \rangle = Y \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right) - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle.$$

Portanto, o termo com o coeficiente β é:

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(\langle (\text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) - \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y)) \wedge Z, e_i \rangle \right. \\ & \quad \left. + \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \right) \\ & \sum_i \left(e_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle \right) - Y \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right) \right. \\ & \quad \left. + \langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle - \langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_i \rangle \right), \end{aligned}$$

que não é equivalente a expressão obtida em [75]: comparando-as, temos

(expressão obtida em Wöhr [75]): $ \begin{aligned} & - \sum_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \right. \\ & \quad + \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \wedge Z, e_i \rangle \\ & \quad + \langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle \\ & \quad - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \\ & \quad \left. - \langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right) \end{aligned} $	(expressão que obtivemos): $ \begin{aligned} & - \sum_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \right. \\ & \quad + \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \wedge Z, e_i \rangle \\ & \quad - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle \\ & \quad - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle \\ & \quad - \langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \wedge Z, e_i \rangle \\ & \quad - e_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle \right) \\ & \quad + Y \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right) \\ & \quad \left. + \langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_i \rangle \right). \end{aligned} $
--	---

Essa discrepância entre as expressões não seria um problema se ambas resultassem na mesma expressão para a curvatura escalar presente na ação de Einstein-Hilbert. Porém, mostraremos que essa diferença será significativa ao calcular a curvatura escalar

Utilizando a expressão obtida em Wöhr [75], temos que a componente com o coeficiente β não contribui para a curvatura escalar, pois

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle + \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i \rangle \right) \\
 & + \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j) \wedge e_j, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i) \wedge e_j, e_i \rangle \right) \\
 & - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle \\
 & = \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle \\
 & \quad + \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j) \wedge e_j, e_i \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(\nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i) \wedge e_j, e_i \rangle \\
 & \quad + \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_i, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_j \rangle \\
 & = \underbrace{\sum_{j,i} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle}_{=0} \\
 & \quad + \underbrace{\sum_{j,i} \langle \text{Wein}(\nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i) \wedge e_i, e_j \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(\nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i) \wedge e_j, e_i \rangle}_{=0} \\
 & \quad + \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_i, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_j \rangle \\
 & = \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_i, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_j \rangle
 \end{aligned}$$

será zero ao tomar um referencial $\{e_i\}$ geodésico, o que sempre pode ser feito localmente.

Por outro lado, ao tentar calcular a curvatura escalar utilizando a expressão que obtivemos, vemos que a componente com coeficiente β não é zero. Para isso, vamos dividir a expressão em várias componentes, temos

$$\begin{aligned}
& - \sum_i \left(\underbrace{\langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle}_{(G)} + \underbrace{\langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \wedge Z, e_i \rangle}_{(I)} \right. \\
& \quad - \underbrace{\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle}_{(G)} - \underbrace{\langle \text{Wein}(e_i) \wedge \nabla_Y^{\text{LC}} Z, e_i \rangle}_{(H)} \\
& \quad - \underbrace{\langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \wedge Z, e_i \rangle}_{(I)} - \underbrace{e_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle \right)}_{(F)} \\
& \quad \left. + \underbrace{Y \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right)}_{(F)} + \underbrace{\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_i \rangle}_{(H)} \right). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Vamos analisar a contribuição de cada uma das componentes para a curvatura escalar:

(i) Componente (F):

$$\begin{aligned}
& \sum_i \left(Y \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, e_i \rangle \right) - e_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge Z, e_i \rangle \right) \right) \\
& \longrightarrow \sum_{i,j} \left(e_j \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, e_i \rangle \right) - e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_j, e_i \rangle \right) \right) \\
& = \sum_{i,j} e_j \left(\langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, e_i \rangle \right) - \sum_{i,j} e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_j, e_i \rangle \right) \\
& = \sum_{j,i} e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_i, e_j \rangle \right) + \sum_{i,j} e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_i, e_j \rangle \right) \\
& = 2 \sum_{i,j} e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_i, e_j \rangle \right).
\end{aligned}$$

(ii) Componente (G):

$$\begin{aligned}
& \sum_i \left(\langle \text{Wein}(Y) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} Z, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge Z, \nabla_Y^{\text{LC}} e_i \rangle \right) \\
& \longrightarrow \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(e_j) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i \rangle \right) \\
& = \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j) \wedge \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i \rangle \\
& = - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_i, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j \rangle - \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_i) \wedge e_j, \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i \rangle \\
& = -2 \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j) \wedge e_i, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j \rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Componente (I):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} Y) \lrcorner Z, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_Y^{\text{LC}} e_i) \lrcorner Z, e_i \rangle \right) \\
& \longrightarrow \sum_{i,j} \left(\langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j) \lrcorner e_j, e_i \rangle - \langle \text{Wein}(\nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i) \lrcorner e_j, e_i \rangle \right) \\
& = \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(\nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j - \nabla_{e_j}^{\text{LC}} e_i), e_j \lrcorner e_i \rangle \\
& = \sum_{i,j} \left\langle \text{Wein}(\underbrace{[e_j, e_i]}_{=0}), e_j \lrcorner e_i \right\rangle
\end{aligned}$$

(iv) A componente (H) será nula ao tomar um referencial geodésico.

Portanto, unindo a contribuição dos termos (F), (G), (H) e (I) obtemos:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i,j} \left(e_i \left(\langle \text{Wein}(e_j) \lrcorner e_i, e_j \rangle \right) - \langle \text{Wein}(e_j) \lrcorner e_i, \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_j \rangle \right) \\
& = 2 \sum_{i,j} \left(\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} (\text{Wein}(e_j) \lrcorner e_i), e_j \rangle \right) \\
& = 2 \sum_{i,j} \left(\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(e_j) \lrcorner e_i, e_j \rangle + \underbrace{\langle \text{Wein}(e_j) \lrcorner \nabla_{e_i}^{\text{LC}} e_i, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
& = 2 \sum_{i,j} \langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(e_j), e_i \lrcorner e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Em geral, não há razão aparente para que esse termo seja nulo.

OBSERVAÇÃO 4.18 *Visando apenas o cálculo da curvatura escalar, a expressão que obtemos difere da obtida em Wöhr [75] devido a um sinal negativo no termo (E).*

PROPOSIÇÃO 4.19 *A curvatura escalar associada à conexão de Ashtekar é:*

$$\mathcal{R}^A = \mathcal{R}^{\text{LC}} - 2\beta \sum_{i,j} \langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(e_j), e_i \lrcorner e_j \rangle + \beta^2 \left(\text{tr}(\text{Wein})^2 - \text{tr}(\text{Wein}^2) \right).$$

Demonstração. A componente envolvendo o coeficiente β foi obtida na discussão anterior à proposição. Para as demais componentes, utilizaremos a expressão

$$\begin{aligned}
\text{Ric}^A(Y, Z) &= \text{Ric}^{\text{LC}}(Y, Z) \\
&+ \beta \sum_i \left(\langle \text{Wein}([Y, e_i]) \lrcorner Z, e_i \rangle \right. \\
&\quad \left. \langle (\nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(Y) - \nabla_Y^{\text{LC}} \text{Wein}(e_i)) \lrcorner Z, e_i \rangle \right) \\
&+ \beta^2 \sum_i \left(\langle Z, \text{Wein}(Y) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle Z, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(Y), e_i \rangle \right).
\end{aligned}$$

obtida na Proposição 4.17. Temos que:

(i) o termo sem o coeficiente β é imediato:

$$\sum_j \text{Ric}^{\text{LC}}(e_j, e_j) = \mathcal{R}^{\text{LC}}.$$

(ii) o termo com o coeficiente β^2 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \left(\langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle - \langle e_j, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle}_{(A)} - \underbrace{\sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle}_{(B)} \end{aligned}$$

Analisando as componentes (A) e (B) separadamente, obtemos

(iii) termo (A):

$$\sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle = \sum_j \langle e_j, \text{Wein}(e_j) \rangle \sum_i \langle \text{Wein}(e_i), e_i \rangle = \text{tr}(\text{Wein})^2$$

(iv) termo (B):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle e_j, \text{Wein}(e_i) \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle &= \sum_{i,j} \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle \\ &= \sum_j \left\langle \text{Wein}(e_j), \sum_i \langle \text{Wein}(e_j), e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= \sum_j \langle \text{Wein}(e_j), \text{Wein}(e_j) \rangle \\ &= \sum_j \langle \text{Wein}^2(e_j), e_j \rangle \\ &= \text{tr}(\text{Wein}^2). \end{aligned}$$

□

Escrevendo a Lagrangiana de Einstein-Hilbert apresentada na Proposição 3.24 em termos da curvatura $\mathcal{R}^A$ associada à conexão de Ashtekar, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} &= \int_{\Sigma} d \text{vol}_g \left(\mathcal{R}^A + (1 + \beta^2) \left(\text{tr}(\text{Wein}^2) - \text{tr}(\text{Wein})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\beta \sum_{i,j} \left\langle \nabla_{e_i}^{\text{LC}} \text{Wein}(e_j), e_i \lrcorner e_j \right\rangle - 2 \text{div} \left(\nabla_n^M n - \text{tr}(\text{Wein})n \right) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 ESTRUTURA DE SPIN

Nesta seção mostraremos como a conexão de Ashtekar definida utilizando o grupo de Lie $\text{SO}(3)$ se relaciona com a originalmente definida em $\text{SU}(2)$ e amplamente utilizada na teoria de gravitação quântica em laços⁶. Essa relação entre as duas formulações se

⁶Para mais detalhes, ver Rovelli e Vidotto [65, Capítulo 7]

dá por meio das chamadas estruturas de spins, que carregam esse nome por terem sido desenvolvidas no contexto de espinores. Para uma discussão mais detalhada sobre esse tópico, recomendamos consultar as referências: Hamilton [37, Capítulo 6], Friedrich [27, pp. 1-63] e Fatibene e Francaviglia [23].

DEFINIÇÃO 4.20 *Seja (M, g) um espaçotempo. Dizemos que um par $(\text{Spin}(M), \Lambda)$ é uma **estrutura de spin** em M se*

- a) $(\text{Spin}(M), \tilde{\pi}, M, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ é um fibrado principal, chamado **fibrado de spin**;
- b) $\Lambda : \text{Spin}(M) \rightarrow \text{Fr}_g^+(M)$ é um recobrimento duplo tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}(M) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \text{Spin}(M) \\
 \downarrow \Lambda \times \lambda & & \searrow \tilde{\pi} \\
 \text{Fr}_g^+(M) \times \text{SO}^+(1, 3) & \xrightarrow{\Delta} & \text{Fr}_g^+(M) \\
 & & \nearrow \pi \\
 & & M
 \end{array}$$

e $\lambda : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$ denota o recobrimento universal do grupo de Lorentz.

O próximo resultado mostra que uma conexão $\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(M), \mathfrak{so}(1, 3))$ pode ser levantada para uma conexão $\tilde{\omega}$ em $\text{Spin}(M)$, através do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 T\text{Spin}(M) & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\
 \downarrow \Lambda_* & \searrow \Lambda^*\omega & \downarrow \lambda_* \\
 T\text{Fr}_g^+(M) & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{so}(1, 3)
 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO 4.21 *Em especial, utilizaremos que λ_* é invertível por ser um isomorfismo entre álgebras de Lie.*

TEOREMA 4.22 *Seja M um espaçotempo com estrutura de spin $(\text{Spin}(M), \Lambda)$ e*

$$\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(M), \mathfrak{so}(1, 3))$$

uma forma de conexão. Então,

$$\tilde{\omega} \in \Lambda^1(\text{Spin}(M), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \quad \text{tal que} \quad \tilde{\omega} := \lambda_*^{-1} \circ \Lambda^* \circ \omega$$

*é uma forma de conexão em $\text{Spin}(M)$. No caso particular em que ω é a conexão de Levi-Civita, chamaremos a conexão $\tilde{\omega}$ de **conexão de spin**.*

Demonstração. Temos de provar que $\tilde{\omega}$ satisfaz as propriedades de uma conexão:

- a) $\tilde{\omega}(\overline{X}) = X_e$ para todo $X_e \in \mathfrak{so}(1, 3)$;
- b) $(r_A)^*(\tilde{\omega}) = \text{Ad}(A^{-1}) \circ \omega$ para todo $A \in \text{SO}^+(1, 3)$.

Para isso, vamos definir as ações adjuntas

- $\text{Ad} : \text{SO}^+(1, 3) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{so}(1, 3));$
- $\widetilde{\text{Ad}} : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})).$

e denotar os mapas conjugação

- $C_A : \text{SO}^+(1, 3) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3) \quad \text{com} \quad C_A(B) = ABA^{-1};$
- $\tilde{C}_g : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{com} \quad \tilde{C}_g(h) = ghg^{-1}.$

Sendo $e \in \text{SO}^+(1, 3)$ e $\tilde{e} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ as identidades nos respectivos grupos, temos que

- $\text{Ad}(A) = D_e(C_A) : T(\text{SO}^+(1, 3))_e \simeq \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3);$
- $\widetilde{\text{Ad}}(g) = D(\tilde{C}_g)_{\tilde{e}} : T(\text{SL}(2, \mathbb{C}))_{\tilde{e}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$

Com isso, para $g, h \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vale

$$\begin{aligned} \lambda \circ \tilde{C}_g(h) &= \lambda(ghg^{-1}) \\ &= \lambda(g)\lambda(h)\lambda(g^{-1}) \\ &= C_{\lambda(g)}(\lambda(h)). \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, podemos obter que, para todo $g \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, vale

$$\begin{aligned} \lambda_* \circ \widetilde{\text{Ad}}(g) &= D_{\tilde{e}}\lambda \circ D(\tilde{C}_g)_{\tilde{e}} \\ &= D_{\tilde{e}}(\lambda \circ \tilde{C}_g) \\ &= D_{\tilde{e}}(C_{\lambda(g)} \circ \lambda) \\ &= D_e(C_{\lambda(g)}) \circ D_{\tilde{e}}\lambda \\ &= \text{Ad}(\lambda(g)) \circ \lambda_*. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tomando $x \in M$, dois pontos $z \in \text{Fr}_g^+(M)_x$ e $\tilde{z} \in \text{Spin}(M)_x$ e denotando as ações à direita nos fibrado $\text{Fr}_g^+(M)$ e $\text{Spin}(M)$, respectivamente, por r e $\tilde{r}$, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(M)_x \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{r}_h} & \text{Spin}(M)_x \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ \Lambda \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ \text{Fr}_g^+(M)_x \simeq \text{SO}^+(1, 3) & \xrightarrow{r_{\lambda(h)}} & \text{Fr}_g^+(M)_x \simeq \text{SO}^+(1, 3) \end{array} \quad \implies \quad \Lambda \circ \tilde{r}_h = r_{\lambda(h)} \circ \Lambda.$$

Por sua vez, essa relação induz o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{D_{\tilde{e}}(\tilde{r}_{\tilde{z}})} & T\text{Spin}(M)_{\tilde{z}} & \xrightarrow{D_{\tilde{z}}(\tilde{r}_h)} & T\text{Spin}(M)_{\tilde{z} \triangleleft h} \\ \lambda_* \downarrow & & D_{\tilde{z}}\Lambda \downarrow & & \downarrow D_{\tilde{z} \triangleleft h}\Lambda \\ \mathfrak{so}(1, 3) & \xrightarrow{D_e(r_{\Lambda(\tilde{z})})} & T\text{Fr}_g^+(M)_{\Lambda(\tilde{z})} & \xrightarrow{D_{\Lambda(\tilde{z})}(r_{\lambda(h)})} & T\text{Fr}_g^+(M)_{\Lambda(\tilde{z} \triangleleft h)} \end{array}$$

De maneira que temos as relações

$$D_{\bar{z}}\Lambda \circ D_{\bar{e}}(\tilde{r}_{\bar{z}}) = D_e(r_{\Lambda(\bar{z})}) \circ \lambda_* \quad (4.15)$$

$$D_{r_h(p)}\Lambda \circ D_p(\tilde{r}_h) = D_{\Lambda(p)}(r_{\lambda(h)}) \circ D_p\Lambda. \quad (4.16)$$

Agora, seja $h \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e $\bar{X}^h \in \Gamma(T \text{Spin}(M))$ o campo fundamental dado por

$$(\bar{X}^h)_p = D_{\bar{z}}(\tilde{r}_p)(h)$$

Então, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\bar{z}}(\bar{X}^h) &= (\lambda_*^{-1} \circ \Lambda^*(\omega))(\bar{X}_{\bar{z}}^h) \\ &= (\lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(\bar{z})} \circ D_{\bar{z}}\Lambda)(D(\tilde{r}_{\bar{z}})(h)) \\ &= (\lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(\bar{z})})(D(r_{\Lambda(\bar{z})}) \circ \lambda_* h) \\ &= (\lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(\bar{z})})(\bar{X}_{\Lambda(\bar{z})}^{\lambda_* h}) \\ &= \lambda_*^{-1}(\lambda_* h) \\ &= h \end{aligned}$$

em que utilizamos a expressão 4.15 na passagem da segunda para terceira linha. E

$$\begin{aligned} ((\tilde{r}_h)^*(\tilde{\omega}))_p &= \tilde{\omega}_{\tilde{r}_h(p)} \circ D_p(\tilde{r}_h) \\ &= \lambda_*^{-1} \circ \Lambda^*(\omega)_{r_h(p)} \circ D_p(\tilde{r}_h) \\ &= \lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(p \triangleleft h)} \circ D_{r_h(p)}\Lambda \circ D_p(\tilde{r}_h) \\ &= \lambda_*^{-1} \circ \omega_{\Lambda(p) \triangleleft \lambda(h)} \circ D_{\Lambda(p)}(r_{\lambda(h)}) \circ D_p\Lambda \\ &= \lambda_*^{-1} \circ (\tilde{r}_{\lambda(h)})^*(\omega)_{\Lambda(p)} \circ D_p\Lambda \\ &= \lambda_*^{-1} \circ \text{Ad}(\lambda(h^{-1})) \circ \omega_{\Lambda(p)} \circ D_p\Lambda \\ &= \widetilde{\text{Ad}}(h^{-1}) \circ \lambda_*^{-1} \circ \Lambda^* \circ \omega_p \\ &= \widetilde{\text{Ad}}(h^{-1}) \circ \tilde{\omega}_p \end{aligned}$$

em que utilizamos a expressão 4.16 na passagem da terceira para a quarta linha e a expressão 4.14 para se obter a penúltima linha. $\square$

No artigo Bichteler [12], o autor mostra que um espaçotempo de dimensão quatro possui estrutura de spin se, e somente se, a segunda classe característica de Stiefel-Whitney é zero. Outro artigo Geroch [31] mostrou que um espaçotempo de dimensão quatro não-compacto⁷ possui estrutura de spin se, e somente se, é paralelizável. A necessidade do espaçotempo ser paralelizável para se construir uma estrutura de spin é um empecilho considerável. Felizmente, é provado em Kirby [45, p. 35] que toda variedade orientável tridimensional admite estrutura de spin, o que nos sugere levar a estrutura de spin para a superfície de Cauchy Σ (a mesma na qual definimos a conexão de Ashtekar).

DEFINIÇÃO 4.23 *Seja (Σ, q) uma variedade Riemanniana. Então, um par $(\text{Spin}(\Sigma), \Lambda)$ é uma **estrutura de spin** em Σ se*

⁷Como o próprio autor comenta, a condição de ser não-compacto é fisicamente esperada, uma vez que espaçotempo compactos possuem curvas temporais fechadas.

- a) $(\text{Spin}(\Sigma), \tilde{\pi}, \Sigma, \text{SU}(2))$ é um fibrado principal, chamado **fibrado de spin**;
- b) $\Lambda : \text{Spin}(\Sigma) \rightarrow \text{Fr}_q^+(\Sigma)$ é um recobrimento duplo tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}(\Sigma) \times \text{SU}(2) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \text{Spin}(\Sigma) \\
 \Lambda \times \lambda \downarrow & & \searrow \tilde{\pi} \\
 \text{Fr}_q^+(\Sigma) \times \text{SO}(3) & \xrightarrow{\Delta} & \text{Fr}_q^+(\Sigma) \\
 & & \nearrow \pi \\
 & & \Sigma
 \end{array}$$

e $\lambda : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ denota o recobrimento universal de $\text{SO}(3)$.

De maneira análoga ao Teorema 4.22, temos:

TEOREMA 4.24 *Seja Σ uma superfície de Cauchy de um espaçotempo M munida de uma estrutura de spin $(\text{Spin}(\Sigma), \Lambda)$. Então, se*

$$\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))$$

é a conexão de Levi-Civita em Σ , temos que

$$\tilde{\omega} \in \Lambda^1(\text{Spin}(\Sigma), \mathfrak{su}(2)) \quad \text{tal que} \quad \tilde{\omega} := \lambda_*^{-1} \circ \Lambda^* \circ \omega$$

*é uma forma de conexão em $\text{Spin}(\Sigma)$, chamada **conexão de spin**.*

Um importante resultado sobre o tema é:

TEOREMA 4.25 *Temos o seguinte isomorfismo entre fibrados*

$$T\Sigma \simeq \text{Spin}(\Sigma) \times_{\rho \circ \lambda} \mathbb{R}^3.$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.51, temos o isomorfismo

$$\text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3 \simeq T\Sigma.$$

Portanto, basta provarmos que existe um isomorfismo

$$\Phi : \text{Spin}(\Sigma) \times_{\rho \circ \lambda} \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3$$

tal que seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}(\Sigma) \times_{\rho \circ \lambda} \mathbb{R}^3 & & \\
 \uparrow \text{dashed} & \searrow \Phi & \\
 T\Sigma & \xrightarrow{\simeq} & \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_{\rho} \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

Definindo o mapa $\Phi[p, x] = [\Lambda(p), x]$, vemos que essa aplicação Φ é bem definida:

$$\begin{aligned}\Phi[p \tilde{\lhd} g, (\rho \circ \lambda)(g^{-1})x] &= [\Lambda(p \tilde{\lhd} g), (\rho \circ \lambda)(g^{-1})x] \\ &= [\Lambda(p) \lhd \lambda(g), \rho(\lambda(g)^{-1})x] \\ &= [\Lambda(p), x] \\ &= \Phi[p, x],\end{aligned}$$

uma vez que $[p \tilde{\lhd} g, (\rho \circ \lambda)(g^{-1})x] \sim [p, x]$ pelo Lema 1.45. A sobrejetividade do mapa Φ é resultado de Λ ser sobrejetivo. Para mostrar injetividade, é preciso provar que

$$\Phi[p_1, x] = \Phi[p_2, y] \implies [p_1, x] = [p_2, y].$$

Supor que são iguais implica que $\Phi[p_1, x]$ e $\Phi[p_2, y]$ estão na mesma classe de equivalência sobre a ação do fibrado associado definida no Lema 1.45. Por isso, podemos sem perda de generalidade considerar que $x = y$. Desse modo, segue que

$$\Lambda(p_1) = \Lambda(p_2).$$

Portanto, se $p_1 = p_2$ é imediato que $[p_1, x] = [p_2, x]$. Se $p_1 \neq p_2$, então

$$\tilde{\pi}(p_1) = \pi \circ \Lambda(p_1) = \pi \circ \Lambda(p_2) = \pi(p_2)$$

mostra que p_1 e p_2 estão na mesma fibra. Isso significa que existe um elemento $g \in \text{SU}(2)$ tal que $p_1 = p_2 \lhd g$. Consequentemente,

$$\Lambda(p_1) = \Lambda(p_2 \lhd g) = \Lambda(p_2) \lhd \lambda(g) = \Lambda(p_1) \lhd \lambda(g)$$

implica que $\lambda(g) = e \in \text{SO}(3)$ e, com isso, podemos concluir que

$$\begin{aligned}[p_1, x] &= [p_2 \lhd g, x] \\ &= [p_2, (\rho \circ \lambda)(g)x] \\ &= [p_2, \rho(\lambda(g))x] \\ &= [p_2, x].\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 1.18, conclui-se que Φ é um isomorfismo entre fibrados vetoriais. $\square$

Com isso, estamos em condições de provar o teorema que relaciona as descrições da conexão de Ashtekar em termos de $\text{SO}(3)$ e $\text{SU}(2)$:

TEOREMA 4.26 *Seja Σ uma superfície de Cauchy de um espaçotempo (M, g) . Dada conexão $\omega \in \Lambda^1(\text{Fr}_g^+(\Sigma), \mathfrak{so}(3))$ e a respectiva conexão $\tilde{\omega} \in \Lambda^1(\text{Spin}(\Sigma), \mathfrak{su}(2))$ no fibrado de spin, ambas as conexões induzem a mesma derivada covariante em $T\Sigma \subset TM$.*

Demonstração. Dado um fibrado principal P com um fibrado associado E^ρ , vimos que a expressão para a derivada covariante em E^ρ é dada pela Definição 2.65:

$$\nabla_X^{E^\rho, \omega} \Psi = [s, \nabla_X^\omega \phi] \quad \text{com} \quad \nabla_X^{E^\rho, \omega} \phi = \phi_*(X) + (\rho_* \circ \omega_s)(X)\phi.$$

em que $\Psi \in \Gamma(U; E^\rho)$ e $e \in \Gamma(U; P)$ são duas seções tais que $\Psi = [e, \phi]$. Assim, como

$$\begin{aligned}
 \lambda_*(\tilde{e}^* \circ \tilde{\omega}) &= \lambda_*(\tilde{\omega}(\tilde{e}_*)) \\
 &= (\lambda_* \circ \tilde{\omega})(\tilde{e}_*) \\
 &= (\Lambda^* \circ \omega)(\tilde{e}_*) \\
 &= (\tilde{e}^* \circ \Lambda^*)(\omega) \\
 &= (\Lambda \circ \tilde{e})^*(\omega) \\
 &= e^*(\omega),
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

podemos obter, denotando $E^\rho = \text{Fr}_g^+(\Sigma) \times_\rho \mathbb{R}^3$ e $E^{\rho \circ \lambda} = \text{Spin}(\Sigma) \times_{\rho \circ \lambda} \mathbb{R}^3$, que

$$\begin{aligned}
 \Phi \left(\nabla_X^{\tilde{E}^{\rho \circ \lambda}} [\tilde{e}, u_i] \right) &= \Phi \left([\tilde{e}, (\rho_* \circ \lambda_*)(\tilde{\omega}_{\tilde{e}}(X))u_i] \right) \\
 &= [\Lambda(\tilde{e}), \rho_*(\omega_e(X))u_i] \\
 &= [e, \rho_*(\omega_e(X))u_i] \\
 &= \nabla_X^{E^\rho} [e, u_i] \\
 &= \nabla_X^{E^\rho} \left(\Phi([\tilde{e}, u_i]) \right)
 \end{aligned}$$

em que utilizamos a Expressão 4.17 na primeira linha. Logo,

$$\nabla_X^{\tilde{E}^{\rho \circ \lambda}} [\tilde{e}, u_i] = \left(\Phi^{-1} \circ \nabla_X^{E^\rho} \circ \Phi \right) [\tilde{e}, u_i]$$

□

Bibliografia

- [1] Alexandrov, Sergei e Livine, Etera R. “SU(2) loop quantum gravity seen from co-variant theory”. Em: *Phys. Rev. D* 67 (2003), p. 044009. DOI: [10.1103/PhysRevD.67.044009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.044009). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.044009>.
- [2] Arnowitt, R., Deser, S. e Misner, C. W. “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity”. Em: *Phys. Rev.* 116 (1959), pp. 1322–1330. DOI: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.116.1322>.
- [3] Ashtekar, Abhay. “New Hamiltonian formulation of general relativity”. Em: *Phys. Rev. D* 36 (1987), pp. 1587–1602. DOI: [10.1103/PhysRevD.36.1587](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.36.1587). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.1587>.
- [4] Ashtekar, Abhay. “New Variables for Classical and Quantum Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), pp. 2244–2247. DOI: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.2244>.
- [5] Ashtekar, Abhay e Lewandowski, Jerzy. “Background independent quantum gravity: a status report”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 21.15 (2004), R53. DOI: [10.1088/0264-9381/21/15/R01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/15/R01).
- [6] Ashtekar, Abhay, Rovelli, Carlo e Smolin, Lee. “Gravitons and loops”. Em: *Phys. Rev. D* 44 (1991), pp. 1740–1755. DOI: [10.1103/PhysRevD.44.1740](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.1740). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.1740>.
- [7] Ashtekar, Abhay e Tate, Ranjeet S. *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. World Scientific, 1991. DOI: https://doi.org/10.1142/9789814439428_0001. URL: https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9789814439428_0001.
- [8] Baez, John C e Muniain, Javier P. *Gauge fields, Knots and Gravity*. Vol. 4. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [9] Barbero G., J. Fernando. “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times”. Em: *Physical Review D* 51.10 (1995), pp. 5507–5510. ISSN: 0556-2821. DOI: [10.1103/physrevd.51.5507](https://doi.org/10.1103/physrevd.51.5507). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.51.5507>.
- [10] Baum, Helga. *Eichfeldtheorie*. Springer, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-38539-1>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-38539-1>.
- [11] Bernal, Antonio N. e Sánchez, Miguel. “On Smooth Cauchy Hypersurfaces and Geroch’s Splitting Theorem”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 243.3 (2003), pp. 461–470. ISSN: 0010-3616. DOI: [10.1007/s00220-003-0982-6](https://doi.org/10.1007/s00220-003-0982-6). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-003-0982-6>.

- [12] Bichteler, Klaus. “Global Existence of Spin Structures for Gravitational Fields”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 9.6 (2003), pp. 813–815. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1664647](https://doi.org/10.1063/1.1664647). URL: <https://doi.org/10.1063/1.1664647>.
- [13] Biezuner, Rodney Josué. “Conexões em Fibrados”. Em: (2023).
- [14] Bleeker, D. *Gauge Theory and Variational Principles*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2005. ISBN: 9780486445465.
- [15] Bojowald, M. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781139494137.
- [16] Bojowald, Martin e Das, Rupam. “Canonical gravity with fermions”. Em: *Phys. Rev. D* 78 (2008), p. 064009. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.064009](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.064009). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.064009>.
- [17] Carroll, S.M. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 9781108488396.
- [18] Cartan, E. e Finikov, S.P. *Riemannian Geometry in an Orthogonal Frame*. G Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series. World Scientific, 2001. ISBN: 9789810247478. DOI: <https://doi.org/10.1142/4808>.
- [19] Charles, Christoph e Livine, Etera R. “Ashtekar-Barbero holonomy on the hyperboloid: Immirzi parameter as a cutoff for quantum gravity”. Em: *Phys. Rev. D* 92 (2015), p. 124031. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.124031](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.124031). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.124031>.
- [20] Danieli, Alessandro e Molinari, Luca Guido. “ADM Formalism: a Hamiltonian Approach to General Relativity”. Em: (2020).
- [21] Dias, Rafael Guolo. “Formulações Alternativas da Relatividade Geral: da Geometrodinâmica à Estrutura de Gauge de Ashtekar-Barbero”. Em: (2011).
- [22] Dirac, P.A.M. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, monograph series. Dover Publications, 2001. ISBN: 9780486417134.
- [23] Fatibene, L. e Francaviglia, M. “Spin Structure on Manifolds and Ashtekar Variables”. Em: *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 02 (2005), pp. 147–157. DOI: [10.1142/S0219887805000533](https://doi.org/10.1142/S0219887805000533). URL: <https://doi.org/10.1142/S0219887805000533>.
- [24] Fecko, Marián. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge university press, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511755590>. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/differential-geometry-and-lie-groups-for-physicists/848DF84177C9CE57F76EF827B14395CC>.
- [25] Fleischhack, Christian e Levermann, Philipp. “Ashtekar Variables: Structures in Bundles”. Em: *Vietnam Journal of Mathematics* 44 (2016), pp. 203–214. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10013-016-0184-0>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10013-016-0184-0>.
- [26] Friedman, R. e Morgan, J. *Gauge Theory and the Topology of Four-Manifolds*. IAS/Park City mathematics series. American Mathematical Society, 1998. ISBN: 9780821805916.

- [27] Friedrich, Thomas. “Dirac-operatoren in der Riemannschen Geometrie”. Em: *Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden* (1997), pp. 22–25. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-80302-3>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-322-80302-3>.
- [28] Gambini, R. “Loop space representation of quantum general relativity and the group of loops”. Em: *Physics Letters B* 255.2 (1991), pp. 180–188. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90233-G](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90233-G).
- [29] Gelfand, I.M., Fomin, S.V. e Silverman, R.A. *Calculus of Variations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2000. ISBN: 9780486414485.
- [30] Geroch, Robert. “Domain of Dependence”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 11.2 (2003), pp. 437–449. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1665157](https://doi.org/10.1063/1.1665157). URL: <https://doi.org/10.1063/1.1665157>.
- [31] Geroch, Robert. “Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. I”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 9.11 (2003), pp. 1739–1744. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1664507](https://doi.org/10.1063/1.1664507). URL: <https://doi.org/10.1063/1.1664507>.
- [32] Geroch, Robert. “Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. II”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 11.1 (2003), pp. 343–348. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1665067](https://doi.org/10.1063/1.1665067). URL: <https://doi.org/10.1063/1.1665067>.
- [33] Giesel, Kristina. “Introduction To Dirac Observables”. Em: *International Journal of Modern Physics A* 23.08 (2008), pp. 1190–1199. DOI: [10.1142/S0217751X08040056](https://doi.org/10.1142/S0217751X08040056). URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X08040056>.
- [34] Giulini, Domenico. “Ashtekar variables in classical general relativity”. Em: *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 81–112. ISBN: 9783540486657. DOI: [10.1007/3-540-58339-4_16](https://doi.org/10.1007/3-540-58339-4_16). URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-58339-4_16.
- [35]ourgoulhon, É. *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-24525-1>.
- [36] Hall, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. New York, NY: Springer New York, 2013, pp. 333–366. ISBN: 978-1-4614-7116-5. DOI: [10.1007/978-1-4614-7116-5_16](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5_16). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5_16.
- [37] Hamilton, Mark JD. *Mathematical Gauge Theory*. Springer, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68439-0>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-68439-0>.
- [38] Hawking, Stephen W e Ellis, George FR. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge university press, 1973.
- [39] Holst, Sören. “Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action”. Em: *Phys. Rev. D* 53 (1996), pp. 5966–5969. DOI: [10.1103/PhysRevD.53.5966](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.5966). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.5966>.
- [40] Husemöller, Dale. *Fibre Bundles*. Vol. 5. Springer, 1966. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2261-1>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-2261-1>.

- [41] Immirzi, G. “Quantum gravity and Regge calculus”. Em: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 57.1 (1997), pp. 65–72. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0920-5632\(97\)00354-X](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(97)00354-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092056329700354X>.
- [42] Immirzi, Giorgio. “Real and complex connections for canonical gravity”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 14.10 (1997), p. L177. DOI: [10.1088/0264-9381/14/10/002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/10/002). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/14/10/002>.
- [43] Jacobson, T. “Fermions in canonical gravity”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 5.10 (1988), p. L143. DOI: [10.1088/0264-9381/5/10/003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/5/10/003). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/5/10/003>.
- [44] Jacobson, T e Smolin, L. “Covariant action for Ashtekar’s form of canonical gravity”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 5.4 (1988), p. 583. DOI: [10.1088/0264-9381/5/4/006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/5/4/006). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/5/4/006>.
- [45] Kirby, R.C. *The Topology of 4-Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540461715.
- [46] Kobayashi, Shoshichi. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 1., 1963.
- [47] Komar, Arthur. “General-Relativistic Observables via Hamilton-Jacobi Functionals”. Em: *Phys. Rev. D* 4 (1971), pp. 923–927. DOI: [10.1103/PhysRevD.4.923](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.4.923). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.923>.
- [48] Lee, John. *Introduction to Topological Manifolds*. Vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4419-7940-7>.
- [49] Lee, John M. *Smooth Manifolds*. New York, NY: Springer New York, 2012, pp. 1–31. DOI: [10.1007/978-1-4419-9982-5_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5_1). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5_1.
- [50] Madsen, I.H. e Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 9780521589567.
- [51] Marsh, Adam. *Gauge Theories and Fiber Bundles: Definitions, Pictures, and Results*. 2022. arXiv: [1607.03089](https://arxiv.org/abs/1607.03089) [math.DG].
- [52] Martins, Yuri Ximenes e Biezuner, Rodney Josué. “Topological and geometric obstructions on Einstein–Hilbert–Palatini theories”. Em: *Journal of Geometry and Physics* 142 (2019), pp. 229–239. ISSN: 0393-0440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.04.012>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S039304401930083X>.
- [53] Mercuri, Simone. *A possible topological interpretation of the Barbero-Immirzi parameter*. 2009. arXiv: [0903.2270](https://arxiv.org/abs/0903.2270) [gr-qc].
- [54] Mercuri, Simone. “Fermions in the Ashtekar-Barbero connection formalism for arbitrary values of the Immirzi parameter”. Em: *Phys. Rev. D* 73 (2006), p. 084016. DOI: [10.1103/PhysRevD.73.084016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.084016). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.084016>.
- [55] Montesinos, Merced. “Connection with torsion from Ashtekar–Barbero connection”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 40.8 (1999), pp. 4084–4088. DOI: [10.1063/1.532945](https://doi.org/10.1063/1.532945). URL: <https://doi.org/10.1063/1.532945>.

- [56] Montesinos, Merced e Vergara, José David. “Gauge Invariance of Complex General Relativity”. Em: *General Relativity and Gravitation* 33.5 (2001), pp. 921–929. ISSN: 1572-9532. DOI: [10.1023/a:1010268110661](https://doi.org/10.1023/a:1010268110661). URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1010268110661>.
- [57] Morita, S. *Geometry of Differential Forms*. Iwanami series in modern mathematics. American Mathematical Society, 2001. ISBN: 9780821810453.
- [58] O’Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. ISSN. Elsevier Science, 1983. ISBN: 9780080570570.
- [59] O’Neill, Barrett. *Elementary Differential Geometry, Revised*. 2006.
- [60] Poor, Walter A. *Differential Geometric Structures*. Courier Corporation, 2007.
- [61] Regge, Tullio e Teitelboim, Claudio. “Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity”. Em: *Annals of Physics* 88.1 (1974), pp. 286–318. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(74\)90404-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90404-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491674904047>.
- [62] Rovelli, C. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521837330. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511755804>. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/quantum-gravity/9EEB701AAB938F06DCF151AAACE1A445D>.
- [63] Rovelli, Carlo e Smolin, Lee. “Knot Theory and Quantum Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), pp. 1155–1158. DOI: [10.1103/PhysRevLett.61.1155](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1155). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.1155>.
- [64] Rovelli, Carlo e Thiemann, Thomas. “Immirzi parameter in quantum general relativity”. Em: *Phys. Rev. D* 57 (1998), pp. 1009–1014. DOI: [10.1103/PhysRevD.57.1009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.1009). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.1009>.
- [65] Rovelli, Carlo e Vidotto, Francesca. *Covariant Loop Quantum Gravity: an Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781107706910>. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/covariant-loop-quantum-gravity/2DF4474CBF7845C261FA78904270F226>.
- [66] Shoshany, Barak. *At the Corner of Space and Time*. 2020. arXiv: [1912.02922](https://arxiv.org/abs/1912.02922) [gr-qc].
- [67] Sontz, Stephen Bruce. *Principal Bundles: The Classical Case*. Springer, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14765-9>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-14765-9>.
- [68] Spivak, Michael. “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”. Em: *Inc., Berkeley* 2 (1979).
- [69] Thiemann, T. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511755682>.
- [70] Thorne, Kip S, Wheeler, John Archibald e Misner, Charles W. *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.

- [71] Tu, L.W. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 9783319550848. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55084-8>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-55084-8>.
- [72] Tu, Loring W. “Manifolds”. Em: *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7400-6>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4419-7400-6>.
- [73] Vyas, Rakshit P. e Joshi, Mihir J. “The Barbero–Immirzi Parameter: An Enigmatic Parameter of Loop Quantum Gravity”. Em: *Physics* 4.4 (2022), pp. 1094–1116. ISSN: 2624-8174. DOI: [10.3390/physics4040072](https://doi.org/10.3390/physics4040072). URL: <http://dx.doi.org/10.3390/physics4040072>.
- [74] Wise, Derek K. “MacDowell–Mansouri gravity and Cartan geometry”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 27.15 (2010), p. 155010. DOI: [10.1088/0264-9381/27/15/155010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/15/155010). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/15/155010>.
- [75] Wöhr, Andreas J. “Global Formalism of Loop Quantum Gravity”. Tese de dout. Universität Tübingen, 2014.
- [76] Woit, Peter. *Quantum Theory, Groups and Representations*. Springer, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-64612-1>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-64612-1>.

Apêndice A

Demonstrações dos Capítulos 1 e 2

PROPOSIÇÃO A.1 *Seja G um grupo de Lie. Para todos os elementos $g, h \in G$, temos:*

- a) $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$;
- b) $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$.
- c) $c_g = L_g \circ (R_g)^{-1}$ é um automorfismo de G .

Demonstração. As propriedades saem de maneira direta:

- (i) para a primeira propriedade, temos

$$\begin{aligned} L_g(L_{g^{-1}}(h)) &= g \cdot (g^{-1} \cdot h) = h \implies L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}, \\ R_g(R_{g^{-1}}(h)) &= (h \cdot g^{-1}) \cdot g = h \implies R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}. \end{aligned}$$

- (ii) Prova-se que as translações comutam diretamente por

$$L_g(R_h(x)) = L_g(x \cdot h) = g \cdot x \cdot h = R_h(g \cdot x) = R_h(L_g(x)).$$

- (iii) Decorre de (ii) que $c_g = L_g \circ R_g^{-1}$. Para vermos que é automorfismo de G , temos

$$c_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) \cdot g^{-1} = (g \cdot h \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot x \cdot g^{-1}) = c_g(h) \cdot c_g(x).$$

□

TEOREMA A.2 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \Gamma(TG)$ a extensão invariante à esquerda do vetor $X_e \in \mathfrak{g}$. Então, a curva integral maximal*

$$\gamma_X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{tal que} \quad \gamma_X(0) = e$$

do campo X satisfaz as seguintes propriedades:

- a) γ_X é definido em todo $\mathbb{R}$;
- b) $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie;
- c) $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Denotaremos o domínio $I \subset \mathbb{R}$ da curva integral maximal de X por

$$\phi_X : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow G$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi_X(0) &= e, \\ \phi'_X(t) &= X_{\phi_X(t)}.\end{aligned}$$

Primeiro, provaremos (a) e (b). Para isso, definimos as curvas

$$\begin{aligned}\beta_1 : (t_{\min}, t_{\max}) &\rightarrow G & \text{com } \beta_1(t) &= L_g \phi_X(t) \\ \beta_2 : (t_{\min} - s, t_{\max} - s) &\rightarrow G & \text{com } \beta_2(t) &= \phi_X(t + s)\end{aligned}$$

e provarmos que ambas são curvas integrais de X que partem do mesmo ponto. Temos

$$\beta_1(0) = g \cdot \phi_X(0) = g = \phi_X(s) = \beta_2(0)$$

e, pelo campo ser invariante à esquerda,

$$\dot{\beta}_1(0) = ((D_e L_g) \phi_X(0)) \dot{\phi}_X(0) = X_{L_g e} = X_g = X_{\phi_X(s)} = \dot{\phi}_X(s) = \dot{\beta}_2(0).$$

Portanto, segue do Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais que

$$\phi_X(s + t) = \beta_2(t) = \beta_1(t) = g \cdot \phi_X(t) = \phi_X(s) \cdot \phi_X(t).$$

Ou seja, que $\phi_X(s + t) = \phi_X(s) \cdot \phi_X(t)$.

Para mostrar que $(t_{\min}, t_{\max}) = \mathbb{R}$, vamos supor $t_{\max} < \infty$ e considerar a curva

$$\beta : \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}\right) \rightarrow G \quad \text{com} \quad \beta(t) = \phi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \phi_X\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)$$

em que $\alpha = \min\{|t_{\max}|, |t_{\min}|\} < \infty$. Então,

$$\beta(0) = \phi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \phi_X\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi_X(0) = e \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(0) = \dot{\phi}_X(0) = X_e$$

mostra que β é uma curva integral de X . Porém, isso seria um absurdo, uma vez que

$$|t_{\max}| < \frac{3\alpha}{2}.$$

Logo, $t_{\max} = +\infty$ e, de maneira análoga, concluí-se que $t_{\min} = -\infty$.

Para provarmos (c), seja a curva

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{com} \quad \gamma(t) = \phi_X(st).$$

De imediato vemos que γ é uma curva integral do campo sX , pois

$$\gamma(0) = \phi_X(0) = e \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(0) = \dot{\phi}_X(0)s = sX_e.$$

Segue do Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais que $\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$. $\square$

LEMA A.3 *Seja X a extensão invariante à esquerda de um vetor $X_e \in \mathfrak{g}$. Então,*

$$\overline{X}_{\phi_p(g)} = (D_g \phi_p) X_g \quad \forall g \in G.$$

Demonstração. Pelo campo ser invariante à esquerda, temos

$$\begin{aligned} (D_g \phi_p) X_g &= (D_g \phi_p)(D_e L_g) X_e \\ &= (D_g \phi_p)(D_e L_g) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t(e) \\ &= (D_g \phi_p)(D_e L_g) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX_e) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_p(L_g(\exp(tX_e))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_p(g \cdot \exp(tX_e)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \triangleleft (g \cdot \exp(tX_e)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p \triangleleft g) \triangleleft \exp(tX_e) \\ &= \overline{X}_{p \triangleleft g} \\ &= \overline{X}_{\phi_p(g)}. \end{aligned}$$

□

LEMA A.4 *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis M e N . Supondo que existam campos $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $X', Y' \in \Gamma(TN)$ que satisfazem as relações*

$$\begin{aligned} X'_{F(p)} &= (D_p F) X_p, \\ Y'_{F(p)} &= (D_p F) Y_p \end{aligned}$$

o mesmo será válido para o colchete de Lie:

$$[X', Y']_{F(p)} = (D_p F)[X, Y]_p.$$

Demonstração. A demonstração é direta: sendo $f \in C^\infty(N)$, temos

$$\begin{aligned} [X', Y']_{F(p)}(f) &= X'_{F(p)}(Y'f) - Y'_{F(p)}(X'f) \\ &= ((D_p F) X_p)(Y'f) - ((D_p F) Y_p)(X'f) \\ &= X_p((Y'f)(F)) - Y_p((X'f)(F)) \\ &= (X_p(Y'f) - Y_p(X'f))(F) \\ &= ([X, Y]_p(f))(F) \\ &= (D_p F)[X, Y]_p(f) \end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO A.5 *A representação Adjunta*

$$\text{Ad} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{so}(3))$$

é equivalente à representação usual

$$\rho : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^3).$$

Demonstração. Dado $A \in \text{SO}(3)$, temos as ações induzidas

$$\rho_A(x) = A \cdot x \quad \text{e} \quad \text{Ad}_A(T) = A \cdot T \cdot A^{-1}$$

Sendo $\{e_i\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a base de $\mathfrak{so}(3)$, definimos o mapa $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ por

$$\mathfrak{f} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, $\mathfrak{f}(e_i) = T_i$. Portanto, o mapa $\mathfrak{f}$ é uma bijeção linear por construção e por isso para mostrar a equivalência entre as representações, basta provar que

$$\rho_A(\mathfrak{f}(e_i)) = \text{Ad}_A(\mathfrak{f}(e_i)) \quad \forall i.$$

Sendo $A \in \text{SO}(3)$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

temos as condições $\det(A) = 1$ e $A^{-1} = A^T$ implicam em:

$$\begin{bmatrix} -a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & -a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & -a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ -a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Vamos mostrar que $\mathfrak{f}(\rho_A(e_1)) = \text{Ad}_A(\mathfrak{f}(e_1))$: temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\rho_A(e_1)) &= \mathfrak{f}(A \cdot e_1) \\ &= \mathfrak{f} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathfrak{f} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

enquanto, por outro lado, também temos

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}_A(\mathfrak{f}(e_1)) &= A \cdot \mathfrak{f}(e_1) \cdot A^T \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ -a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23} & 0 & a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33} \\ -a_{13}a_{32} + a_{12}a_{33} & -a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \mathfrak{f} \left(\begin{bmatrix} -a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ -a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23} \end{bmatrix} \right) \\
 &= \mathfrak{f} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Em que utilizamos a relação A.1 na passagem para a última linha. De modo análogo, provamos que $\mathfrak{f}(\rho_A(e_i)) = \text{Ad}_A(\mathfrak{f}(e_i))$ para $i = 2$ e $i = 3$. $\square$

PROPOSIÇÃO A.6 *O mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ satisfaz as propriedades:*

(i) *para todo $X_e \in \mathfrak{g}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, vale*

$$\exp((s+t)X_e) = \exp(sX_e) \cdot \exp(tX_e).$$

(ii) *sendo $0 \in \mathfrak{g}$ e $X_e \in \mathfrak{g}$, temos*

$$\begin{aligned}
 \exp(0) &= e, \\
 \exp(-X_e) &= (\exp X_e)^{-1}
 \end{aligned}$$

Demonstração. As propriedades saem diretamente do Teorema 2.3:

(i) Para todo $X_e \in \mathfrak{g}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 \exp((s+t)X_e) &= \phi_{(s+t)X_e}(1) \\
 &= \phi_{X_e}(s+t) \\
 &= \phi_{X_e}(s) \cdot \phi_{X_e}(t) \\
 &= \phi_{sX_e}(1) \cdot \phi_{tX_e}(1) \\
 &= \exp(sX_e) \cdot \exp(tX_e).
 \end{aligned}$$

(ii) Tomando $s = 0$ e $t = 1$ em $\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$, temos

$$\begin{aligned}
 \exp(0) &= \exp(X_e - X_e) \\
 &= \phi_{X_e - X_e}(1) \\
 &= \phi_{X_e}(0) \\
 &= e
 \end{aligned}$$

(iii) Utilizando (i) e (ii), obtemos que $\exp(-X_e) = (\exp X_e)^{-1}$:

$$\begin{aligned} e &= \exp(X_e - X_e) \\ &= \exp(X_e) \cdot \exp(-X_e). \end{aligned}$$

□

TEOREMA A.7 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal. Então, existe uma bijeção entre as conexões de Ehresmann e as conexão-formas. Mais especificamente:*

a) *Seja $\mathcal{H}P$ uma conexão de Ehresmann em P . Então,*

$$\omega(\overline{X} + Y) = X_e \quad \text{com} \quad Y \in \Gamma(\mathcal{H}P)$$

define uma conexão-forma em P .

b) *Seja $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ uma conexão-forma em P . Então,*

$$(\mathcal{H}P)_z = \ker(\omega_z) \quad \text{com} \quad \omega_z = \omega|_{TP_z}$$

define uma conexão de Ehresmann $\mathcal{H}P$ em P .

Demonstração. Seja $\mathcal{H}P$ uma conexão de Ehresmann em P . Então,

$$TP = \mathcal{H}P \oplus \mathcal{V}P$$

implica que todo $Z \in \Gamma(TP)$ pode ser decomposto como

$$Z = \overline{X} + Y$$

para algum $X_e \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \Gamma(\mathcal{H}P)$. Assim, definindo $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ por

$$\omega(\overline{X} + Y) = X_e \quad \text{com} \quad Y \in \Gamma(\mathcal{H}P),$$

segue de imediato que $\omega(\overline{X}) = X_e$ e, usando a Proposição 2.15, temos

$$\begin{aligned} ((r_g)^*\omega)_z(\overline{X}_z + Y_z) &= \omega_{r_g(p)}((r_g)_*\overline{X}_z + (r_g)_*Y_z) \\ &= \omega_{r_g(p)}(\overline{\text{Ad}_{g^{-1}} X_e}) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} X_e \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_z(\overline{X}_z + Y_z)). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ uma conexão-forma em P . Precisamos mostrar que

$$\mathcal{H}P_z = \ker(\omega_z) \quad \text{com} \quad \omega_z = \omega|_{TP_z}$$

é uma distribuição horizontal invariante à direita. Para mostrar que $\mathcal{H}P_z$ é um espaço tangente horizontal, utilizamos que a condição

$$\omega_z(\overline{X}) = X_e \quad \forall X_e \in \mathfrak{g}$$

garante que $\omega_z : TP_z \rightarrow \mathfrak{g}$ é sobrejetiva. Assim, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos:

$$\begin{aligned}\dim \ker \omega_z &= \dim TP_z - \dim \mathfrak{g} \\ &= \dim TP_z - \dim \mathcal{V}P_z.\end{aligned}$$

Portanto, podemos decompor o espaço tangente à variedade P como:

$$TP_z = \mathcal{V}P_z \oplus \mathcal{H}P_z.$$

Para mostrar a invariância à direita, seja $Y_z \in \mathcal{H}P_z$. Então,

$$\begin{aligned}\omega_{r_g(z)}((r_g)_*Y_z) &= ((r_g)^*\omega)_z(Y_z) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_z(Y_z)) \\ &= 0\end{aligned}$$

resulta em $(r_g)_*Y_z \in \mathcal{H}P_{r_g(z)}$. Para mostrarmos que é uma distribuição, vamos denotar $\dim \mathfrak{g} = l$ e considerar $\{T_I\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Então,

$$\omega = \sum_{I=1}^l \omega^I \otimes T_I \quad \text{com} \quad \omega^I \in \Lambda^1(P; \mathbb{R})$$

e, consequentemente, obtemos que

$$\mathcal{H}P_z = \bigcap_{I=1}^l \ker \omega_z^I.$$

Tomando uma carta em uma vizinhança U de $z \in P$, temos

$$\omega^I = \sum \omega_J^I dx^J \quad \text{com} \quad \omega_J^I \in C^\infty(U).$$

Sendo $\{b^I\}$ as coordenadas na fibra, os vetores $X_q \in TP_q$ se escrevem

$$X_q = \sum b^J \frac{\partial}{\partial x^J} \Big|_q$$

Assim, em coordenadas, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}P_q &= \bigcap_{I=1}^l \ker \omega_q^I \\ &= \left\{ X_q \in TP_q : \omega_q^I(X_q) = 0 \quad \forall I = 1, \dots, l \right\} \\ &= \left\{ (b^1, \dots, b^m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{J=1}^m \omega_J^I(q) b^J = 0 \quad \forall I = 1, \dots, l \right\}\end{aligned}$$

Como $\omega_z : TP_z \rightarrow \mathfrak{g}$ é sobrejetivo, necessariamente $\{\omega^I\}$ deve ser uma coleção linear independente em $z \in P$ e portanto podemos tomar

$$F^I(q, b) = \sum_{J=1}^m \omega_J^I(q) b^J \quad \forall I = 1, \dots, l$$

cuja matriz jacobiana $[\partial F^I / \partial b^J] = [\omega_J^I] \in M(l \times m, \mathbb{R})$ tem posto igual a l em z . Isso significa que existe uma submatriz $l \times l$ não-singular e, pelo Teorema da Função Implícita, segue que $b^1, \dots, b^l$ são funções diferenciáveis de $b^{l+1}, \dots, b^m$. Sendo

$$X_I = \sum_{J=1}^l b^J \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{I\text{-ésima coordenada}} \partial_{x^j} + \partial_{x^{l+I}}$$

uma coleção de $m - l$ campos vetoriais, temos que

$$\text{span}\{X_I\} = \mathcal{H}P_q \quad \forall q \in U_q.$$

Logo, $\mathcal{H}P$ é uma distribuição em TP devido ao Teorema 2.17. $\square$

PROPOSIÇÃO A.8 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Temos que a forma de Maurer-Cartan $\mu_G \in \Lambda^1(G; \mathfrak{g})$ é invariante à esquerda e satisfaz*

$$(R_g)^* \mu_G = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \mu_G \quad \forall g \in G.$$

Demonstração. Seja $g, h \in G$ e $g \in T_h G$. Utilizando a Proposição 1.41, obtemos

$$\begin{aligned} ((R_g)^* \mu_G)_h(v) &= (\mu_G)_{R_g(h)}(D_h(R_g))(v) \\ &= (D_{R_g(h)} L_{g^{-1} \cdot h^{-1}})(D_h(R_g))(v) \\ &= (D_h(L_{g^{-1} \cdot h^{-1}} \circ R_g))(v) \\ &= (D_h(c_{g^{-1}} \circ L_{h^{-1}}))(v) \\ &= (D_e(c_{g^{-1}}))(D_h(L_{h^{-1}}))(v) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}}((\mu_G)_h(v)). \end{aligned}$$

Para mostrar invariância à esquerda, temos

$$\begin{aligned} (L_g)^* \mu_G)_h(v) &= (\mu_G)_{L_g(h)}(D_h(L_g))(v) \\ &= (D_{L_g(h)}(L_{h^{-1} \circ g^{-1}}))(D_h(L_g))(v) \\ &= (D_h(L_{h^{-1} \circ g^{-1}} \circ L_g))(v) \\ &= (D_h(L_{h^{-1}}))(v) \\ &= (\mu_G)_h(v). \end{aligned}$$

$\square$

PROPOSIÇÃO A.9 *Seja P uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie e*

$$\phi : P \times G \rightarrow P \quad \text{com} \quad \phi(p, g) = p \triangleleft g$$

uma ação à direita diferenciável de G em P . Então, a diferencial

$$D_{(p,g)}\phi : T(P \times G)_{(p,g)} \rightarrow TP_{p \triangleleft g}$$

é dada por

$$(D_{(p,g)}\phi)(X_p, Y_p) = (D_p(r_g))(X_p) + \overline{\mu_G(Y_p)}_{p \triangleleft g}.$$

Demonstração. Primeiro, utilizamos que

$$T(P \times G)_{(p,g)} \simeq TP_p \oplus TG_g.$$

Com isso, sejam $\alpha : I \rightarrow M$ e $\beta : I \rightarrow G$ duas curvas diferenciáveis tais que

$$\begin{aligned} \alpha(0) = p \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = X_p \in TP_p \\ \beta(0) = g \quad \text{e} \quad \beta'(0) = Y_p \in TG_g. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (D_{(p,g)}\phi)(X_p, Y_p) &= (D_{(p,g)}\phi)(X_p, 0) + (D_{(p,g)}\phi)(0, Y_p) \\ &= (D_{(p,g)}\phi)(\alpha'(0), 0) + (D_{(p,g)}\phi)(0, \beta'(0)) \\ &= (D_p(r_g))(X_p) + (D_g(\phi_p))(Y_p). \end{aligned}$$

Sendo μ_G a forma de Maurer-Cartan, segue da Proposição 1.41 e do Lema A.3 que

$$\begin{aligned} (D_g(\phi_p))(Y_p) &= (D_g(\phi_g))(\mu_G(Y_p)) \\ &= \overline{\mu_G(Y_p)}. \end{aligned}$$

□

PROPOSIÇÃO A.10 *Seja $(P, \pi, M; G)$ um fibrado principal com conexão $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ e*

$$\begin{aligned} s_i : U_i &\rightarrow P \\ s_j : U_j &\rightarrow P \end{aligned}$$

duas seções locais tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sendo g_{ij} uma mudança de gauge, temos

$$\omega_j = \text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega_i + (g_{ij})^*(\mu_G).$$

em que $\omega_j = (s_j)^\omega$ e $\omega_i = (s_i)^*\omega$ são as conexões locais.*

Demonstração. Seja $x \in U_i \cap U_j$ e $Z \in TM_x$. Denotando $\phi(p, g) = p \triangleleft g$ e definindo

$$\begin{aligned} X &= (D_x(s_j))(Z) \in TP_{s_j(x)} \\ Y &= (D_x(g_{ij}))(Z) \in TG_{g_{ij}(x)}, \end{aligned}$$

segue da Proposição 2.44 que

$$\begin{aligned} (D_x(s_j))(Z) &= (D_x(\phi(s_i, g_{ij}))(Z) \\ &= (D_{s_i(x)}(r_{g_{ij}(x)}))(X) + \overline{\mu_G(Y)}_{s_i(x) \triangleleft g_{ij}(x)} \\ &= (D_{s_i(x)}(r_{g_{ij}(x)}))(X) + \overline{\mu_G((D_x(g_{ij}))(Z))}_{s_j(x)} \\ &= (D_{s_i(x)}(r_{g_{ij}(x)}))(X) + \overline{(g_{ij})^*\mu_G(Z)}_{s_j(x)} \end{aligned}$$

Com isso, podemos obter

$$\begin{aligned} \omega_j(Z) &= ((s_j)^*\omega)(Z) \\ &= \omega \circ (D_x(s_j))(Z) \\ &= \omega \circ (D_{s_i(x)}(r_{g_{ij}(x)}))(X) + \omega \circ \overline{(g_{ij})^*\mu_G(Z)}_{s_j(x)} \\ &= ((r_{g_{ij}})^*\omega)(X) + (g_{ij})^*\mu_G(Z) \\ &= (\text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega_i + (g_{ij})^*\mu_G)(Z) \end{aligned}$$

em que utilizamos:

$$\begin{aligned}
 ((r_{g_{ij}})^*\omega)(X) &= (\text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega)(X) \\
 &= (\text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} \circ \omega) \circ (D_x(s_j))(Z) \\
 &= \text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} (\omega \circ (D_x(s_j)))(Z) \\
 &= \text{Ad}_{(g_{ij})^{-1}} ((s_j)^*\omega)(Z).
 \end{aligned}$$

□

LEMA A.11 *Seja Σ uma hipersuperfície de Cauchy em M . Então, a aplicação*

$$\nabla^\Sigma : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \rightarrow \Gamma(T\Sigma) \quad \text{com} \quad \nabla_X^\Sigma Y = \tan(\nabla_X^M Y)$$

define uma derivada covariante em Σ .

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$. Temos que

i) ∇^Σ é $C^\infty(\Sigma)$ -linear na primeira variável:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{fX+Z}^\Sigma Y &= \tan(\nabla_{fX+Z}^M Y) \\
 &= \nabla_{fX+Z}^M Y + \langle \nabla_{fX+Z}^M Y, n \rangle n \\
 &= f \nabla_X^M Y + \nabla_Z^M Y + \langle f \nabla_X^M Y + \nabla_Z^M Y, n \rangle n \\
 &= f \nabla_X^M Y + f \langle \nabla_X^M Y, n \rangle n + \nabla_Z^M Y + \langle \nabla_Z^M Y, n \rangle n \\
 &= f \tan(\nabla_X^M Y) + \tan(\nabla_Z^M Y) \\
 &= f \nabla_X^\Sigma Y + \nabla_Z^\Sigma Y.
 \end{aligned}$$

ii) ∇^Σ satisfaz a regra do produto:

$$\begin{aligned}
 \nabla_X^\Sigma(fY) &= \tan(\nabla_X^M(fY)) \\
 &= \nabla_X^M(fY) + \langle \nabla_X^M(fY), n \rangle n \\
 &= X(f)Y + f \nabla_X^M Y + \underbrace{\langle X(f)Y, n \rangle}_{=0} n + \langle f \nabla_X^M Y, n \rangle n \\
 &= X(f)Y + f(\nabla_X^M Y + \langle \nabla_X^M Y, n \rangle n) \\
 &= X(f)Y + f \tan(\nabla_X^M Y) \\
 &= X(f)Y + \nabla_X^\Sigma Y.
 \end{aligned}$$

□

LEMA A.12 ∇^{LC} satisfaz a regra do produto com relação a $\lrcorner$:

$$\nabla_X^{LC}(Y \lrcorner Z) = \nabla_X^{LC} Y \lrcorner Z + Y \lrcorner \nabla_X^{LC} Z. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. A maneira mais direta de provarmos é calculando ambos os lados da Equação em 4.7 e verificarmos que eles coincidem. Para isso, seja $\{u_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$,

$e \in \text{Fr}_g^+(\Sigma)$ um referencial e $X, Y, Z \in T\Sigma$ campos arbitrários. Denotando $e_i := e(u_i)$, os campos serão descritos localmente por $Y = Y^j e_j$ e $Z = Z^k e_k$. Temos:

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\text{LC}} Y \wedge Z &= (X(Y^j) e_j + Y^j \nabla_X^{\text{LC}} e_j) \wedge (Z^k e_k) = X(Y^j) Z^k (e_j \wedge e_k) + Y^j Z^k (\nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k), \\ Y \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z &= (Y^j e_j) \wedge (X(Z^k) e_k + Z^k \nabla_X^{\text{LC}} e_k) = X(Z^k) Y^j (e_j \wedge e_k) + Y^j Z^k (e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k).\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que o lado direito da Equação 4.7 é

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\text{LC}} Y \wedge Z + Y \wedge \nabla_X^{\text{LC}} Z &= (X(Y^j) Z^k + X(Z^k) Y^j) (e_j \wedge e_k) \\ &\quad + Y^j Z^k (\nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k + e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k) \\ &= X(Y^j Z^k) (e_j \wedge e_k) + Y^j Z^k (\nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k + e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k).\end{aligned}$$

Enquanto o lado esquerdo da Equação 4.7 é

$$\nabla_X^{\text{LC}} (Y \wedge Z) = \nabla^{\text{LC}} (Y^j Z^k e_j \wedge e_k) = X(Y^j Z^k) (e_j \wedge e_k) + Y^j Z^k (\nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_k)).$$

Consequentemente, a regra do produto será satisfeita se, e somente se,

$$\nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_k) = \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k + e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k.$$

A expressão acima afirma a igualdade entre dois vetores. Portanto, para prová-la basta demonstrarmos que ela é válida para cada componente. Em outras palavras, basta verificarmos que a seguinte igualdade é válida para quaisquer índices i, j, k :

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k, e_i \rangle + \langle e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k, e_i \rangle = \langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_k), e_i \rangle. \quad (\text{A.3})$$

Vamos analisar a Equação A.3 em cada uma das possíveis situações. Temos:

i) Caso $k = i$: temos

$$\underbrace{\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_i, e_i \rangle}_{=0} + \langle e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_i \rangle = \langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_i), e_i \rangle.$$

Pela metricidade de ∇^{LC} , obtemos:

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_i), e_i \rangle = X(\underbrace{\langle e_j \wedge e_i, e_i \rangle}_{=0}) - \langle e_j \wedge e_i, \nabla_X^{\text{LC}} e_i \rangle = \langle e_i, e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_i \rangle.$$

ii) Caso $k = j$: temos

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_j, e_i \rangle + \langle e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle = \underbrace{\langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_j), e_i \rangle}_{=0}.$$

Por uma simples manipulação, obtemos:

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_j, e_i \rangle + \langle e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_j, e_i \rangle = \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_j, e_i \rangle - \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_j, e_i \rangle = 0.$$

iii) Caso $j = i$: temos

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i \wedge e_k, e_i \rangle + \underbrace{\langle e_i \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k, e_i \rangle}_{=0} = \langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_i \wedge e_k), e_i \rangle.$$

Pela metricidade de ∇^{LC} , temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X^{\text{LC}}(e_i \wedge e_k), e_i \rangle &= X \left(\underbrace{\langle e_i \wedge e_k, e_i \rangle}_{=0} \right) - \langle e_i \wedge e_k, \nabla_X^{\text{LC}} e_i \rangle \\ &= - \langle e_i, e_k \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_i \rangle \\ &= \langle e_i, \nabla_X^{\text{LC}} e_i \wedge e_k \rangle.\end{aligned}$$

iv) Caso que j, k e i são distintos dois a dois: para essa etapa precisaremos do seguinte resultado, decorrência imediata da metricidade de ∇^{LC} :

$$\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_i \rangle = \nabla_X^{\text{LC}} \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, \nabla_X^{\text{LC}} e_i \rangle = - \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_i \rangle \implies \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_i \rangle = 0 \quad \forall i.$$

Com esse resultado, veremos que todos os termos da Equação 4.7 serão identicamente nulos. Em detalhes, convencionando $e_i \wedge e_j = e_k$, temos:

$$\begin{aligned}\langle e_j \wedge \nabla_X^{\text{LC}} e_k, e_i \rangle &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_k, e_i \wedge e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_k, e_i \wedge e_j \rangle, \\ \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j \wedge e_k, e_i \rangle &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j, e_k \wedge e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j, (e_i \wedge e_j) \wedge e_i \rangle \\ &= \left\langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j, \langle e_i, e_i \rangle e_j - \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle e_i}_{=0} \right\rangle \\ &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_j, e_j \rangle, \\ \langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge e_k), e_i \rangle &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} (e_j \wedge (e_i \wedge e_j)), e_i \rangle \\ &= \left\langle \nabla_X^{\text{LC}} (\langle e_j, e_j \rangle e_i - \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle e_i}_{=0}), e_i \right\rangle \\ &= \langle \nabla_X^{\text{LC}} e_i, e_i \rangle.\end{aligned}$$

□