

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Caio César Mafia Bueno

FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS E MULTIPLICATIVAS ALEATÓRIAS

Belo Horizonte

2023

Caio César Mafia Bueno

FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS E MULTIPLICATIVAS ALEATÓRIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Marco Vinicius Bahi Aymone

Belo Horizonte

2023

2023, Caio César Mafia Bueno.
Todos os direitos reservados

	Bueno, Caio César Mafia.
B928f	Funções multiplicativas e multiplicativas aleatórias [recurso eletrônico] / Caio César Mafia Bueno. – 2023 1 recurso online (83 f. il.) : pdf. Orientador: Marco Vinicius Bahi Aymone. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 81-83. 1. Matemática - Teses. 2. Teoria dos números - Teses. 3. Funções aritméticas – Teses. 4. Riemann, Superfícies de – Teses. I. Aymone, Marco Vinicius Bahi. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título. CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX

FOLHA DE APROVAÇÃO

Funções Multiplicativas e Multiplicativas Aleatórias

CAIO CÉSAR MAFIA BUENO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:



Prof. Marco Vinícius Bahi Aymone
UFMG



Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG



Prof. Ramon Moreira Nunes
UFC



Prof. Ricardo Misturini
UFRGS

Belo Horizonte, 15 de fevereiro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Marco Aymone pela paciência, suporte e confiança.

Agradeço a LÍlian pelo apoio incondicional.

Agradeço a todos os colegas que tive contato e discussões desde a graduação, em especial ao Ian pelo entusiasmo e disposição.

Por fim, agradeço a todos os professores que tive contato do Departamento de Matemática da UFMG.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos problemas de encontrar equivalências entre as somas parciais da Função de Möbius e a hipótese de Riemann, um modelo probabilístico envolvendo funções multiplicativas aleatórias introduzido por Wintner [30], o comportamento oscilatório das somas parciais dessas funções e como elas se relacionam com a hipótese de Riemann.

Palavras-chave: Funções multiplicativas, Hipótese de Riemann, Funções multiplicativas aleatórias.

ABSTRACT

In the present text we discuss problems of finding equivalences between the partial sums of the Möbius Function and the Riemann hypothesis, a probabilistic model involving random multiplicative functions introduced by Wintner [30], the oscillatory behaviour of the partial sums of those functions and how they relate to the Riemann hypothesis.

Keywords: Multiplicative functions, Riemann hypothesis, Random multiplicative functions.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Resumo histórico e estado da arte	10
2	Preliminares	18
2.1	Conceitos e teoremas elementares	18
2.2	Notações	22
3	Estimativas para as somas parciais da Função de Möbius	23
3.1	Equivalência clássica	29
3.2	Estimativas condicionais	37
3.2.1	Estimativa de Edward Titchmarsh	37
3.2.2	Estimativa de Kannan Soundararajan	39
3.3	Uma nota sobre as estimativas incondicionais	53
3.3.1	Regiões livre de zeros da Função Zeta de Riemann	54
4	Resultado principal: o trabalho de Aurel Wintner	56
4.1	O Teorema das Séries de Kolmogorov	56
4.2	Controle de séries de Dirichlet com coeficientes aleatórios em faixas verticais	57
4.2.1	Preliminares	58
4.2.2	Lemas técnicos e auxiliares	59
4.2.3	Conclusão do Teorema 4.4 e discussão do caso geral	67
4.3	Prova do resultado principal	68
4.3.1	Comentários adicionais	71
5	Funções multiplicativas aleatórias e a hipótese de Riemann	74
6	Conclusões e observações	78
	Referências	81

1. INTRODUÇÃO

Na Teoria Analítica dos Números, uma *função aritmética* é simplesmente uma função cujo domínio são os números naturais e o contradomínio os números complexos. Uma classe de função aritmética que surge naturalmente é a das funções multiplicativas. Uma *função multiplicativa* é uma função aritmética $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, com a propriedade adicional que $f(nm) = f(n)f(m)$, sempre que $n, m \in \mathbb{N}$ são primos relativos e $f(1) = 1$.

Um exemplo de função multiplicativa é a função divisor:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1,$$

que conta o número de divisores de um número natural n . Em particular, observamos que funções multiplicativas são completamente determinadas pelos valores que elas assume nas potências de números primos.

Outros exemplos de funções aritméticas são as funções completamente multiplicativas e funções aditivas. Dizemos que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *função completamente multiplicativa* se $f(nm) = f(n)f(m)$, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. Quando temos $f(nm) = f(n) + f(m)$, sempre que $n, m \in \mathbb{N}$ são primos relativos, dizemos que f é uma *função aditiva*. Um exemplo desta última é a função $\omega(n)$, que conta o número de fatores primos distintos de n .

Dizemos que um número natural n é *livre de quadrados* se não existir nenhum número primo p tal que p^2 divida n (ou seja, n é um número da forma $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, para algum inteiro $k > 0$ e $p_i, i = 1, \dots, k$, primos distintos. Em particular, temos $\omega(n) = k$). Uma função multiplicativa clássica e recorrente nesse trabalho é a seguinte:

Definição 1.1 (Função de Möbius). Definimos a função de Möbius como:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{se } n \text{ é livre de quadrados,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para tentar estimar a importância dessa função, começamos com a seguinte definição:

Definição 1.2 (Função Zeta de Riemann). Seja $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Definimos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Inicialmente, a função acima está definida somente no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. Entretanto, iremos mostrar que a função zeta acima possui continuação analítica à esquerda da reta $1 + it$ (de fato possui continuação para todo o plano complexo exceto por uma singularidade em $s = 1$ e, com um abuso de notação, também denotamos essa continuação pela letra grega ζ).

Veremos em seguida que essas duas funções se relacionam de forma bastante intrínseca.

Conjectura 1 (Hipótese de Riemann - HR). Todos os zeros não-triviais da Função Zeta de Riemann estão localizados sobre a linha crítica $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$.

Temos que $\zeta(s) = 0$, para $s \in \{-2, -4, -6, \dots\}$ e esses são os que chamamos zeros triviais. Neste trabalho falaremos com regularidade sobre os zeros não-triviais. Portanto, ao referirmos sobre zeros da Função Zeta de Riemann, não estamos falando sobre os triviais (exceto quando explicitamente mencionados).

Mostraremos neste trabalho (veja Capítulo 3) que a conjectura acima é equivalente às somas parciais da Função de Möbius oscilarem na ordem de, no máximo, $x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$. Ou seja, a HR é verdade se, e somente se, $M_\mu(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$, para qualquer $\epsilon > 0$ fixo, onde a igualdade nos diz que o crescimento das somas parciais é (eventualmente) mais lento que o $\mathcal{O}$ -termo multiplicado por uma constante (definição precisa na Seção 2.2: Notações).

Como veremos, uma parte importante da prova desse fato envolve (falando de forma mais informal) estudar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, onde s é um número complexo com parte real maior que um. Isso levou alguns autores a estudarem o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s}$, onde os coeficientes agora são variáveis aleatórias que assumem valores ± 1 nos inteiros livres de quadrados, com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada. Entretanto, em 1931, P. Lévy [22] questionou esse modelo e fez uma objeção sobre a falta de correlação aritmética desses coeficientes. Por um lado, a Função de Möbius é multiplicativa e seu valor em um número natural n depende da quantidade de primos que dividem esse número. Por outro lado, para qualquer natural n livre de quadrados, as variáveis aleatórias X_n valem ± 1 , sem que haja nenhuma dependência com relação aos primos p tais que $p|n$.

Alguns anos após Lévy ter levantado esse questionamento, A. Wintner [30] introduziu um novo modelo probabilístico com o intuito de tentar extrair informações relevantes sobre o comportamento das somas parciais da Função de Möbius e levando em consideração a observação feita sobre a interdependência aritmética dessas somas.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade, denote $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os números primos e seja $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ uma sequência independente de variáveis aleatórias de Rademacher em

Ω , isto é, $\mathbf{P}(f(p) = 1) = \mathbf{P}(f(p) = -1) = \frac{1}{2}$. Agora estendemos multiplicativamente para todos os números naturais da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f(n) := \mu(n)^2 \prod_{p|n} f(p). \quad (1.1)$$

Chamamos a função acima de *função multiplicativa aleatória de Rademacher* ou somente *função multiplicativa aleatória*. Pela forma como foi definido, o mapa $n \mapsto f(n)$ define uma função multiplicativa, tem suporte nos inteiros livres de quadrados (isto é, se existe um número primo p tal que $p^2|n$, então $f(n) = 0$) e assume valor ± 1 nos naturais que são produtos de primos distintos, assim como a Função de Möbius. Para uma abordagem mais geral desse tipo de definição, em [21] os autores consideram os termos $f(p)$ da sequência tomando valores em $\{-1, 0, 1\}$.

Observação 1.3. É importante observar que apesar das variáveis na sequência $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ serem independentes, os valores tomados pela função definida acima *não* são independentes. Se considerarmos $n = p_1 p_2$, onde $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ são distintos, então temos $f(n) = f(p_1 p_2) = f(p_1) f(p_2)$. Isso mostra que os valores tomados pela função são totalmente determinados pelos valores em cada um de seus fatores primos (distintos). Como consequência, não conseguimos usar algumas ferramentas disponíveis na Teoria da Probabilidade (relacionado a isso, veja a Observação 1.4 sobre a Lei do Logaritmo Iterado).

1.1 Resumo histórico e estado da arte

De agora em diante, $M_f(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$ representa as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher (1.1).

Em 1944, Wintner [30], provou os seguintes resultados:

$$M_f(x) = \mathcal{O}_\epsilon(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

para todo $\epsilon > 0$, quase certamente¹. Wintner também mostrou que

$$M_f(x) \neq \mathcal{O}_\epsilon(x^{\frac{1}{2}-\epsilon}),$$

para todo $\epsilon > 0$, q.c.

Mais tarde em 1961, Erdős [12] indicou que conseguiu provar (em um trabalho não publicado) que $M_f(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{c_1})$, para uma constante $c_1 > 0$, quase certamente. Posteriormente,

¹Dizemos que um evento ocorre quase certamente (q.c.) se ele ocorre com probabilidade um.

em outra de suas coleções de problemas que eram expostas [11], ele reforçou essa afirmação e destacou que também melhorou a cota inferior de Wintner, mostrando que $M_f(x) \neq \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-\frac{1}{2}})$, q.c.

Halász [16] apresentou uma melhora adicional e obteve para constantes positivas c_2, c_3 :

$$M_f(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \exp(c_2(\log \log x \log \log \log x)^{\frac{1}{2}})),$$

quase certamente. A melhora desse resultado com relação ao anterior é a raiz quadrada no termo $\log \log x$. Halász também mostrou que

$$M_f(x) \neq \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3(\log \log x \log \log \log x)^{\frac{1}{2}})),$$

quase certamente.

Anos depois, Basquin [5] e Lau, Tenenbaum e Wu [21] obtiveram, independentemente e em torno do mesmo período, uma melhora significativa:

$$M_f(x) = \mathcal{O}_\epsilon(x^{\frac{1}{2}}(\log \log x)^{2+\epsilon}), \quad (1.2)$$

para todo $\epsilon > 0$, q.c.

No mesmo ano (2013), Harper [18] provou que

$$M_f(x) \neq \mathcal{O}_\epsilon\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log \log x)^{\frac{5}{2}+\epsilon}}\right),$$

para todo $\epsilon > 0$, quase certamente.

Notamos aqui que cada uma dessas melhoras foram provadas com base no modelo proposto por Wintner no ano de 1944. Temos (ao menos) mais um tipo de modelo para estudar problemas envolvendo somas parciais de funções aleatórias. Tal modelo utiliza o que chamamos de *variáveis aleatórias de Steinhaus* e é usado para estudar o comportamento de caracteres de Dirichlet complexos e funções do tipo n^{-it} . Nesse caso, seja novamente $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os números primos, tome uma sequência de variáveis aleatórias independentes $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ equidistribuídas no círculo unitário, isto é, as variáveis tomam valores em $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ e defina para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) := \prod_{p^k || n} f(p)^k, \quad (1.3)$$

onde $p^k || n$ significa que p^k é a maior potência do número primo p que divide n . A função acima é chamada *função multiplicativa aleatória de Steinhaus*.

Recentemente, Harper [17] mostrou para uma função multiplicativa aleatória de Rademacher ou Steinhaus que, quase certamente, existem valores de x arbitrariamente grandes satisfazendo:

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n) \right| \geq \frac{x^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{\frac{1}{4}}}{V(x)}, \quad (1.4)$$

onde $V(x)$ é qualquer função que tende a infinito quando $x \rightarrow \infty$. Como observado pelo autor, esse resultado é mais forte quando $V(x)$ cresce mais lentamente. Em particular se $V(x) \leq (\log \log x)^{\frac{1}{8}}$ obtemos que $M_f(x) \neq \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}})$, quase certamente.

Seguindo uma abordagem diferente das apresentadas até o momento, Aymone, Heap e Zhao [2] mostraram para o caso Steinhaus e usando um modelo com peso ($M_f^*(x) := \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{\sqrt{n}}$), que:

$$M_f^*(x) = \mathcal{O}_\epsilon((\log x)^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

para todo $\epsilon > 0$, q.c. E também, para todo $L > 0$ fixo:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|M_f^*(x)|}{\exp((L + o(1))(\log \log x)^{\frac{1}{2}})} > 0,$$

quase certamente.

Nesse ponto iremos introduzir uma nova notação: dizemos que $f(x) = \Omega_\pm(g(x))$ se valem ambos $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ e $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < 0$. Retornando para o caso Rademacher, em 2022, Aymone, Heap e Zhao [3] também mostraram que:

$$M_f(x) = \Omega_\pm\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)(\log \log x)^2}\right),$$

quase certamente, ao investigar o problema de mudanças de sinais das somas parciais da função multiplicativa aleatória (1.1).

A seguir, apresentamos os resultados obtidos para as somas parciais da Função de Möbius. Primeiramente, foi conjecturado por Stieltjes em 1885 e reforçado por Mertens em 1897 que $|M_\mu(x)| := |\sum_{n \leq x} \mu(n)| < x^{\frac{1}{2}}$. Somente no ano de 1985, Odlyzko e te Riele [26] mostraram que essa desigualdade é falsa, provando que $M_\mu(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{1}{2}})$, mas não apresentaram nenhum valor específico como contra-exemplo.

Nas primeiras décadas do século XX, Littlewood foi o primeiro a mostrar que a hipótese de Riemann implica que $\frac{1}{\zeta(1/2+\epsilon+it)} = \mathcal{O}(t^\epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$ fixo e isso por sua vez implica no que chamaremos de “equivalência clássica”: $M_\mu(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$. O contrário também é verdade, como mostraremos em capítulos seguintes.

Alguns anos depois, em 1924, Landau mostrou que ao assumir a HR, conseguimos melhorar esse resultado quantitativamente e mostrar que $M_\mu(x) = \mathcal{O}_\epsilon(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ é verdade com $\epsilon = \mathcal{O}(\frac{\log \log \log x}{\log \log x})$, ou seja, uma melhora no termo x^ϵ para x elevado a uma potência explícita e que tende a zero.

Posteriormente, Titchmarsh [28] melhorou o resultado mostrando que a HR implica $M_\mu(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \exp(K_1(\log x)(\log \log x)^{-1}))$, para alguma constante $K_1 > 0$. Dito de forma similar, a equivalência clássica é válida com $\epsilon = \mathcal{O}(\frac{1}{\log \log x})$.

Vários anos após Titchmarsh, em 2009, Maier e Montgomery [23] provaram $M_\mu(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \exp(K_2(\log x)^{\frac{39}{61}}))$, onde K_2 é uma constante positiva computável. Publicado no mesmo ano, Soundararajan [27] usou métodos diferentes para mostrar que $M_\mu(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{14}))$.

Gonek conjecturou (em torno de 1990, veja Ng [25]) que o tamanho real das flutuações dessas somas parciais é da ordem $M_\mu(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{1}{2}} (\log \log \log x)^{\frac{5}{4}})$. Portanto os resultados atuais ainda estão um pouco distantes do que é esperado.

Já incondicionalmente (sem assumir a hipótese de Riemann), o melhor resultado conhecido hoje é:

$$M_\mu(x) = \mathcal{O}(x \exp(-B(\log x)^{\frac{3}{5}} (\log \log x)^{-\frac{1}{5}})),$$

para uma constante $B > 0$ e é obtido utilizando a melhor região na qual sabemos que a Função Zeta de Riemann não possui nenhum zero: conhecida como região livre de zeros de Vinogradov-Korobov, em homenagem aos autores que apresentaram métodos permitindo deduzir que $\zeta(\sigma + it) \neq 0$, para $1 - \sigma \leq \frac{C}{(\log t)^{2/3} (\log \log t)^{1/3}}$, para alguma constante $C > 0$ (uma prova pode ser encontrada em Ivić [19], página 309, Teorema 12.7).

Observação 1.4 (Lei do Logaritmo Iterado - LLI). Se $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância positiva finita σ^2 , a *Lei do Logaritmo Iterado* nos diz que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} &= 1, \text{ q.c.}; \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} &= -1, \text{ q.c.}, \end{aligned}$$

onde $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dessa forma, para uma sequência independente de variáveis aleatórias de Rademacher $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (\liminf_{x \rightarrow \infty}) \frac{\sum_{n \leq x} Y_n}{\sqrt{2x \log \log x}} = 1(-1), \text{ q.c.}$$

Por outro lado, pelo Teorema Central do Limite, a distribuição de $\sum_{n \leq x} Y_n$ pode ser aproximada por uma normal com mesma média e variância dessas somas parciais, i.e. $\mathcal{N}(0, x)$. Portanto as

somas parciais tipicamente tem probabilidade pequena de serem maiores que $\sqrt{x}$, para x grande suficiente. Isso indica que a LLI possui implicitamente informações sobre a interação das somas parciais, a medida que vamos variando x .

Pela Observação 1.3 feita anteriormente, não conseguimos utilizar a LLI para as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher (1.1). Entretanto, observamos que os resultados recentes (1.2) e (1.4) começam a se assemelhar de certa forma a LLI. É esperado que haja uma lei similar governando as somas parciais da função multiplicativa aleatória aqui estudada e que nos dê a real ordem de flutuação. Nesse sentido, Harper [17] acredita ser plausível que o expoente $\frac{1}{4}$ de seu resultado (1.4) seja ótimo. Discutiremos mais no Capítulo 6.

Para finalizar o capítulo introdutório e ilustrar o comportamento de algumas somas que discutimos, apresentamos abaixo algumas simulações feitas com o auxílio do MATLAB.

Primeiro, temos as somas parciais da Função de Möbius em comparação as curvas $\pm\sqrt{x}$. Note que é esperado que essas somas parciais no intervalo plotado fiquem entre essas duas curvas, visto que as imagens abaixo são valores de x até 10^8 . Apesar do resultado de Odlyzko e de Riele implicar que em algum momento temos $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| > \sqrt{x}$, o primeiro valor tal que essa desigualdade é satisfeita ainda é desconhecido, mas sabemos que é no mínimo para $x > 10^{14}$.

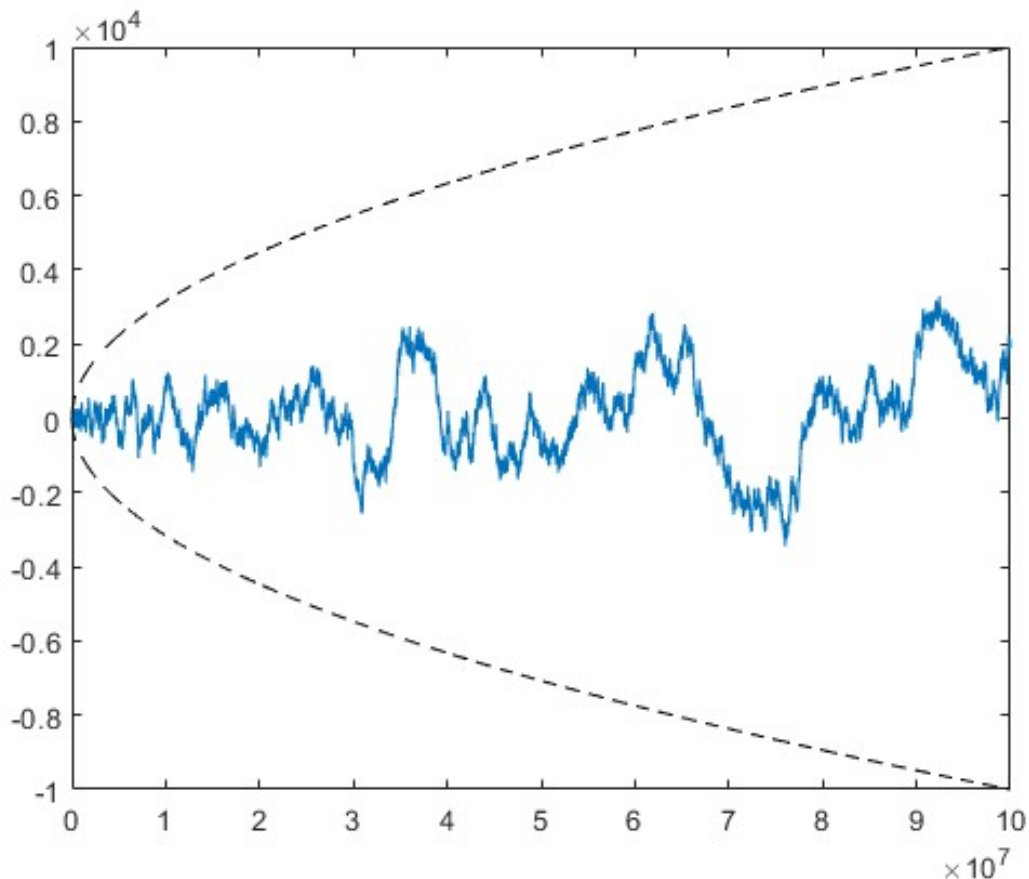


Figura 1.1: Em azul as somas parciais da Função de Möbius e tracejado as curvas $\pm\sqrt{x}$.

A seguir temos as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher e as curvas $\pm(x^{1/2+\epsilon})$. O comportamento errático é natural, entretanto, o resultado de Wintner mostra que, com probabilidade um, eventualmente a curva em azul ficará sempre entre as curvas tracejadas.

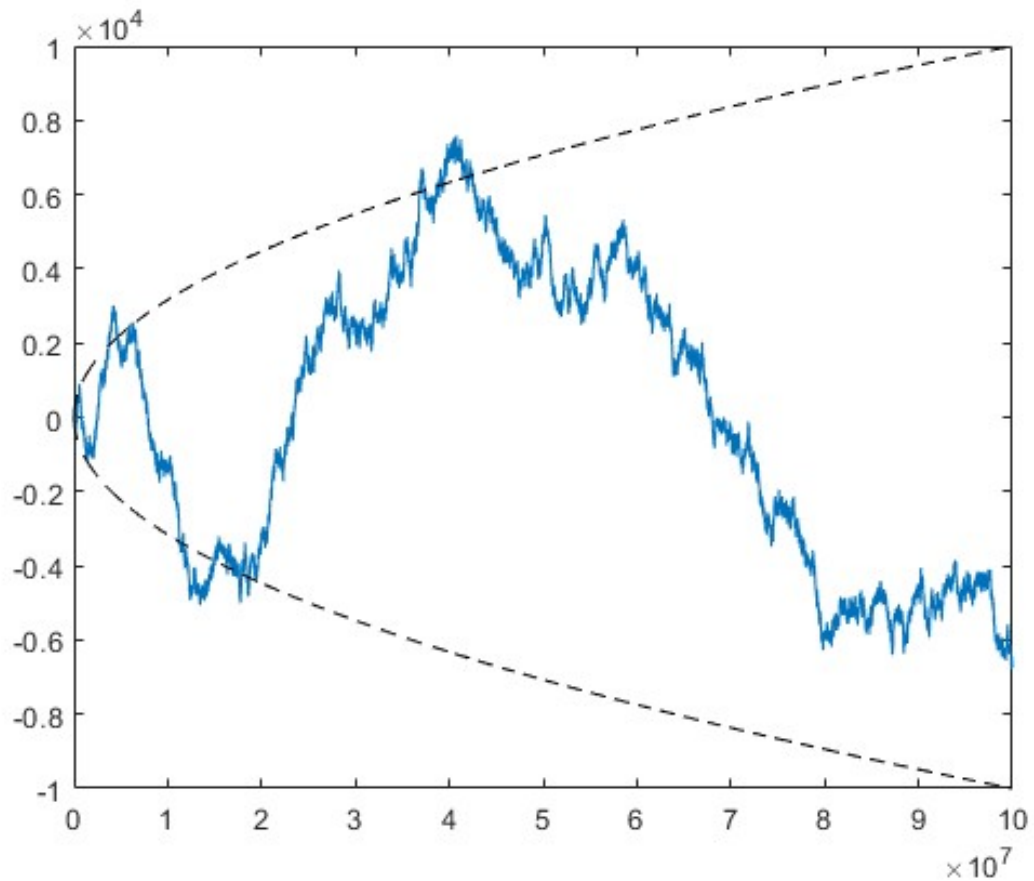


Figura 1.2: Em azul as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher e tracejado as curvas $\pm(x^{1/2+\epsilon})$. O valor considerado como ϵ no MATLAB é 2.2204×10^{-16} .

Com os recursos que possuímos, não é tão interessante observar como essas somas parciais se comparam aos resultados mais recentes, visto por exemplo que os resultados de Basquin e de Lau, Tenenbaum e Wu possuem um termo da ordem de $(\log \log x)^{2+\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$.

O texto está estruturado da seguinte forma:

Capítulo 1: Introdução

Foi o capítulo no qual definimos alguns conceitos que serão recorrentes ao longo do texto, discorreremos sobre o modelo principal de função estudado ao longo desse trabalho e fornecemos uma sequência de resultados históricos relacionados ao tema da dissertação.

Capítulo 2: Preliminares

Apresentamos teoremas e definições básicas da Teoria Analítica dos Números que são essenciais para o entendimento deste trabalho, juntamente com uma subseção de notações.

Capítulo 3: Estimativas para as somas parciais da Função de Möbius

Complementando a introdução, esse capítulo contém uma breve motivação do estudo sobre as estimativas das somas parciais da Função de Möbius, provamos algumas estimativas condicionais (assumindo a HR) e apresentamos uma ideia geral da demonstração das estimativas incondicionais.

Capítulo 4: Resultado principal: o trabalho de Aurel Wintner

Aqui provamos resultados da Teoria da Probabilidade e da Teoria Analítica dos Números, necessários para a prova contida no artigo de A. Wintner [30], que solidificou o estudo de séries aleatórias na Teoria dos Números. Além disso, provamos o resultado obtido pelo próprio Wintner sobre as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher.

Capítulo 5: Funções multiplicativas aleatórias e a hipótese de Riemann

Neste capítulo mostramos que também é possível estabelecer equivalências entre a hipótese de Riemann e as funções multiplicativas aleatórias.

Capítulo 6: Conclusões e observações

Fazemos breves comentários sobre algumas conjecturas e resultados esperados.

2. PRELIMINARES

Neste capítulo introduzimos as ferramentas centrais e enunciamos teoremas fundamentais da Teoria Analítica dos Números, necessários para os resultados apresentados neste trabalho. Ao final incluímos uma subseção de notações.

2.1 Conceitos e teoremas elementares

Em geral denotaremos $s = \sigma + it$ como sendo um número complexo, onde $\sigma \in \mathbb{R}$ é a parte real e $t \in \mathbb{R}$ a parte imaginária. Começamos com o seguinte:

Definição 2.1 (Série de Dirichlet). Seja $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Uma série da forma

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

é chamada série de Dirichlet com coeficientes a_n .

Em particular, quando os coeficientes a_n são uma função multiplicativa $f(n)$ (ou qualquer função real ou complexa definida nos números naturais), dizemos que a série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é a *série de Dirichlet da (ou relacionada a) função f* .

A Função Zeta de Riemann definida no capítulo introdutório como $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, para $\text{Re}(s) > 1$, é uma série de Dirichlet com coeficientes $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Abaixo apresentamos resultados sobre convergência: enquanto uma série de Taylor possui um disco de convergência, séries de Dirichlet convergem em semiplanos.

Teorema 2.2 ([24], Teorema 1.1). Se a série de Dirichlet $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge em um ponto $s_0 = \sigma_0 + it_0$, então $\alpha(s)$ é uniformemente convergente em subconjuntos compactos do semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma_0\}$.

Em particular, note que se $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$, onde f é a função multiplicativa aleatória de Rademacher (1.1), então para cada n natural, as funções forma $\frac{f(n)}{n^s}$ são analíticas e uniformemente limitas. Portanto, em todo subconjunto compacto de $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1\}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é limite uniforme de funções analíticas, logo ela define uma função analítica nesse semiplano (pelo Teorema de Morera).

Corolário 2.3 ([24], Corolário 1.2). Toda série de Dirichlet possui uma *abscissa de convergência* σ_c tal que a série converge em todo o semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma_c\}$. Ademais, se $s_0 \in \mathbb{C}$ é um complexo tal que $\text{Re}(s_0) > \sigma_c$, então existe uma vizinhança de s_0 tal que a série converge uniformemente.

Denotaremos por σ_a a abscissa de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$. Assim, $\sigma_a = \inf\{\sigma : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty\}$ é chamada *abscissa de convergência absoluta* da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$.

O próximo teorema é uma ferramenta útil na teoria das funções multiplicativas. Ele nos permite representar séries de Dirichlet de uma função multiplicativa (completamente multiplicativa) somente pelos seus valores em potências de primos.

Teorema 2.4 (Produtório de Euler). Seja $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. Se f é *multiplicativa* e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} < \infty$, então podemos escrever

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Se f é *completamente multiplicativa* e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} < \infty$, então

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Agora podemos fornecer mais uma razão pela qual o estudo da Função de Möbius nos interessa. Lembrando que μ é uma função multiplicativa, temos pelo teorema anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Por outro lado,

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Então, para $\text{Re}(s) > 1$, temos

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Podemos observar que os zeros da função zeta de Riemann estão diretamente relacionados com os polos da série de Dirichlet da Função de Möbius.

Outra função que é intrinsecamente relacionada à Função Zeta de Riemann é a *função de Von Mangoldt*:

Definição 2.5 (Função de Von Mangoldt). Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^k, \text{ para algum número natural } k \text{ e algum primo } p, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Um exemplo prático da correlação entre a função de Von Mangoldt e a Função Zeta de Riemann, e que aparecerá ao longo desse trabalho, é o seguinte: como $\zeta(s)$ é absolutamente convergente para $\text{Re}(s) > 1$ e temos que $\log(1 - z)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, $\forall |z| < 1$, segue que

$$\log \zeta(s) = \log \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Como temos convergência uniforme em compactos, tomando a derivada termo a termo obtemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} := \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ks}}.$$

Portanto, temos as duas fórmulas válidas para $\text{Re}(s) > 1$:

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s} \quad (2.2)$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \quad (2.3)$$

O quociente $\frac{f'}{f}(s)$ obtido derivando $\log f(s)$ é conhecido como *derivada logaritmica* da função f .

Teorema 2.6 (Fórmula de Perron). Seja $\sigma_0 > \max\{0, \sigma_a\}$ e $x > 0$. Então

$$\sum_{n \leq x^*} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \alpha(s) \frac{x^s}{s} ds + R,$$

onde $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, x^* significa que se x é inteiro, então o último termo é somado com peso $\frac{1}{2}$ e R é um termo tal que

$$R \ll \sum_{\substack{\frac{x}{2} < n < 2x \\ n \neq x}} |a_n| \min \left\{ 1, \frac{x}{T|x - n|} \right\} + \frac{4^{\sigma_0} - x^{\sigma_0}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}.$$

Observação 2.7. Precisamente,

$$R = \frac{1}{\pi} \sum_{\frac{x}{2} < n < x} a_n \text{si} \left(T \log \frac{x}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{x < n < 2x} a_n \text{si} \left(T \log \frac{n}{x} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{4^{\sigma_0} - x^{\sigma_0}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} \right),$$

onde $\text{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$. Entretanto nesse trabalho não precisaremos utilizar essa forma expandida do erro R , vamos apenas estimar seu valor quando for necessário.

Observação 2.8. A Fórmula de Perron é extremamente útil e muito utilizada na Teoria Analítica dos Números. Uma demonstração pode ser encontrada em [24], Teorema 5.1.

Teorema 2.9 (*Somas por Partes, Fórmula da Soma de Abel*).

Versão “discreta”: Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números positivos e defina $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Então temos

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n).$$

Versão “discreta-contínua”: Sejam f uma função contínua e $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sequência de números positivos.

Defina $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. Então temos

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(u) f'(u) du.$$

A seguir vamos definir a função Gama e sua derivada logaritmica, que também possuem um importante papel na Teoria dos Números.

Definição 2.10 (Função Gama). Se $\operatorname{Re}(s) > 0$, então

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

A função acima possui outras formas de ser representada. Em particular, ela pode ser definida utilizando o Teorema de fatoração de Weierstrass e então toma a forma:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{s}{n}}}{1 + \frac{s}{n}},$$

para todo número complexo s diferente de um inteiro não-positivo e onde γ é uma constante. Não entraremos em detalhes nessa discussão, mas ressaltamos o seguinte fato: a igualdade acima nos mostra que $\frac{1}{\Gamma(s)}$ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, portanto a função Γ é analítica e diferente de zero, exceto por polos simples nos inteiros não positivos. Além disso, com essa forma de representação e utilizando outros resultados auxiliares, podemos obter o seguinte:

Teorema 2.11. Seja $\delta > 0$ e $\mathcal{R}_\delta = \{s \in \mathbb{C} : |s| \geq \delta, |\arg s| < \pi - \delta\}$. Então

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

uniformemente para $s \in \mathcal{R}_\delta$.

A função $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ é usualmente chamada de função Digama. Um tratamento mais detalhado desse assunto pode ser encontrado no Apêndice C de [24].

Definição 2.12. Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ aberto e conexo. Dizemos que $X : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função aleatória em D se, para cada $s \in D$ fixo, $\omega \mapsto X(s, \omega)$ é uma variável aleatória em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $s \mapsto X(s, \omega)$ é uma função definida em $\mathbb{C}$.

Ao longo deste trabalho, vamos assumir que as funções aleatórias são quadrado integráveis, isto é, se X é uma função aleatória, então $\mathbf{E}|X(s)|^2 < \infty$, para $s \in D$.

Observação 2.13. Muitos dos resultados apresentados nesse trabalho são expressados em função do tamanho de $|t|$. Usualmente estaremos interessados em valores grandes de $|t|$, mas para manter a validade dos resultados aqui contidos para valores pequenos, normalmente é suficiente substituir $|t|$ por $|t| + 4$.

2.2 Notações

Revisitaremos aqui algumas notações que já foram brevemente apresentadas e introduzimos as demais que serão necessárias posteriormente.

Dependendo onde acharmos mais conveniente ou agradável para o leitor, usaremos dois tipos de notação para o mesmo objeto: a notação de Vinogradov $f(x) \ll g(x)$ e a clássica $\mathcal{O}$ -Grande $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, ambas significam que existe uma constante $C > 0$ e um número x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ temos $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Caso a constante dependa de um outro parâmetro, por exemplo $C = C_\delta$, representaremos como $\ll_\delta$ ou $\mathcal{O}_\delta(\cdot)$.

A notação $f(x) = \Omega(g(x))$ significa que $\limsup \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > 0$. Além disso, usamos Ω_+ , Ω_- para dizer que $\limsup \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ e $\liminf \frac{f(x)}{g(x)} < 0$, respectivamente. Quando ambos Ω_+ e Ω_- são satisfeitos, usamos apenas $\Omega_\pm$.

Se para funções f e g temos o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, então escrevemos $f(x) = o(g(x))$.

Denotamos o conjunto de todos os números primos por $\mathcal{P}$. Exceto quando explicitamente mencionado, sempre que um subíndice for escrito somente como p , queremos dizer que estamos considerando todo primo $p \in \mathcal{P}$ (i.e. $\sum_p := \sum_{p \in \mathcal{P}}$).

Se $E \subset \mathbb{R}$, denotamos a medida de Lebesgue do conjunto E por $meas(E)$.

Se escrevermos $f \asymp g$, então queremos dizer que existem constantes $c, C > 0$ tal que $cg(x) \leq |f(x)| \leq Cg(x)$, para todo x .

3. ESTIMATIVAS PARA AS SOMAS PARCIAIS DA ??

Neste capítulo apresentamos uma prova da equivalência da HR com as somas parciais da Função de Möbius. Demonstrações similares desse resultado podem ser encontradas por exemplo em [19], Capítulo 1 - Seção 9 ou [24], Capítulo 13 - Seção 2.

Primeiramente, uma observação sobre o comportamento da Função Zeta de Riemann.

Observação 3.1 (Uma estimativa da Função Zeta de Riemann). Para $\text{Re}(s) > 1$, podemos escrever

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \sum_{n > x} \frac{1}{n^s}.$$

Escrevemos agora segundo somatório como¹:

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = \int_x^\infty \frac{1}{t^s} d([t]) = \int_x^\infty \frac{dt}{t^s} - \int_x^\infty \frac{1}{t^s} d(\{t\}),$$

onde $[t]$ é a parte inteira de t e $\{t\}$ a parte fracionária de t . Calculando a primeira integral acima e resolvendo a segunda por partes, obtemos

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^s} - \int_x^\infty \frac{1}{t^s} d(\{t\}) = \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Logo,

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Se $x = 1$, podemos representar a Função Zeta de Riemann como

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \quad (3.1)$$

e essa última integral converge absolutamente para $\text{Re}(s) > 0$. Portanto (3.1) é uma extensão analítica (meromorfa) da função zeta, no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$. Além disso, essa extensão nos fornece uma estimativa simples: observe que

$$\left| s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \right| \leq |s| \int_1^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt \ll \frac{|s|}{\sigma},$$

portanto $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathcal{O}\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)$. Em particular, se $\sigma > 0$ é fixo, $\zeta(s) = \mathcal{O}(|t|)$.

¹Essencialmente estamos utilizando a integral de Riemann-Stieltjes e utilizando que $\int_a^b f(x) d(g(x)) = \int_a^b f(x)g'(x) dx$, se g' é contínua em $[a, b]$ e f Riemann integrável.

Uma outra observação que gostaríamos de fazer nesse momento é com respeito aos zeros da Função Zeta de Riemann. Sabemos que seus zeros possuem uma simetria, tanto com relação ao eixo real, quanto com relação à reta crítica $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$. Essas simetrias podem ser observadas olhando para a equação (1.2), que implica $\zeta(s) = \overline{\zeta(\bar{s})}$ para $\operatorname{Re}(s) > 1$ (consequentemente para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, via continuação analítica) e quando temos a equação funcional $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s 2^{-1}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$.

Dessa forma, a prova da hipótese de Riemann seria equivalente a mostrar que $\zeta(s) \neq 0$ para todo o conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1\}$.

Demonstraremos primeiro a equação funcional para a função zeta que, dada sua utilidade, pode ser de independente interesse.

Teorema 3.2 (Equação funcional da Função Zeta de Riemann). Para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s 2^{-1}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Demonstração. Começando com a equação (3.1) da observação anterior, seja $\psi(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$. Temos então,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} dt - \frac{s}{2} \int_1^\infty \frac{1}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $\psi(t) = x - [x] - \frac{1}{2}$ é limitada, pelo mesmo argumento da observação anterior, essa é uma extensão analítica da função zeta para $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$, com um polo simples em $s = 1$ de resíduo 1. Entretanto obtemos mais informações: observe que, se $\operatorname{Re}(s) \in (0, 1)$, temos a igualdade abaixo:

$$- \int_0^1 \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt = - \int_0^1 \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}.$$

Portanto, pela primeira igualdade em (3.2),

$$\zeta(s) = s \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt = s \int_0^\infty \frac{[t] - t}{t^{s+1}} dt,$$

para $\operatorname{Re}(s) \in (0, 1)$. Mais ainda, (3.2) nos dá uma continuação analítica para $\operatorname{Re}(s) > -1$. Para provar isso, primeiro observamos que, se $k \in \mathbb{Z}$, então

$$\int_k^{k+1} \psi(x) dx = \int_k^{k+1} \{x\} dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{2} dx = \int_0^1 x dx - \frac{1}{2} = 0.$$

Assim, definindo $P(x) = \int_1^x \psi(t) dt$, temos que $P(x)$ é limitada e então

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx &= \left(\frac{P(x)}{x^{s+1}} \right) \Big|_a^b + (s+1) \int_a^b \frac{P(x)}{x^{s+2}} dx \\ &\leq \frac{P(b)}{b^{s+1}} - \frac{P(a)}{a^{s+1}} + C(s+1) \int_a^b \frac{1}{x^{s+2}} dx, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Os dois primeiros termos da última desigualdade tendem a zero quando $a \rightarrow \infty$ e $b \rightarrow \infty$. Se $\operatorname{Re}(s) > -1$, a integral converge e quando $a, b \rightarrow \infty$ ela tende a zero. Portanto a integral em (3.2) converge para todo $\operatorname{Re}(s) > -1$.

Agora observe também que, se $\operatorname{Re}(s) \in (-1, 0)$, temos

$$-s \int_0^1 \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{t^{s+1}} dt = -s \int_0^1 \frac{1}{t^s} dt + \frac{s}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}.$$

Portanto, novamente em (3.2):

$$\zeta(s) = -s \int_0^\infty \frac{t - [t] - \frac{1}{2}}{t^{s+1}} dt,$$

para todo $\operatorname{Re}(s) \in (-1, 0)$. Pela expansão em série de Fourier de $f(x) = x - [x]$, temos

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}, \forall x \notin \mathbb{Z}.$$

Substituindo na integral anterior e integrando termo a termo,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\sin(2n\pi t)}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n\pi)^s}{n} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^{s+1}} dx \\ &= s 2^s \pi^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Agora, temos que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^{1-s}} dx = \Gamma(s) \sin(s\pi 2^{-1})$, para $\operatorname{Re}(s) \in (-1, 1)$. Portanto, como a princípio temos $\operatorname{Re}(s) \in (-1, 0)$, então

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) (s\Gamma(-s) \sin(-s\pi 2^{-1})) \\ &= 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) \Gamma(1-s) \sin(s\pi 2^{-1}),\end{aligned}$$

onde usamos que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. Resta somente justificar que a integração termo a termo feita é válida e também a fórmula para $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^{1-s}} dx$. Para a troca entre soma e integral, podemos argumentar de forma usual, considerando soma parcial e integral finita. Isto é, considere

$$\int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{y}{n}$, a soma do lado direito da igualdade anterior é igual a:

$$\sum_{n=1}^N \int_0^{nx} \frac{\sin(2y\pi)}{\pi} \frac{n^{s-1}}{y^{s+1}} dy = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1-s}} \int_0^{nx} \frac{\sin(2y\pi)}{\pi} \frac{1}{y^{s+1}} dy.$$

A integral é limitada, pois

$$\left| \int_0^{nx} \frac{\sin(2y\pi)}{\pi} \frac{1}{y^{s+1}} dy \right| \leq \left| \int_0^\infty \frac{\sin(2y\pi)}{\pi} \frac{1}{y^{s+1}} dy \right| < \infty, \forall \operatorname{Re}(s) \in (-1, 0),$$

onde a prova da convergência absoluta segue utilizando o método de integração por partes. Além disso, também temos nesse mesmo intervalo que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1-s}}$ converge absolutamente. Portanto a série

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt$$

é absolutamente convergente em $\operatorname{Re}(s) \in (-1, 0)$.

Também temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty \int_x^\infty \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt = 0, \forall \operatorname{Re}(s) \in (-1, 0), \quad (3.3)$$

onde o resultado é obtido também integrando por partes. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt &= \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt + \int_0^x \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt \\
 &= \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt,
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue fazendo $N \rightarrow \infty$.

Por fim, por (3.3),

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n\pi} \frac{1}{t^{s+1}} dt.
 \end{aligned}$$

Agora, para justificar a fórmula $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1-s}} dx = \Gamma(s) \sin(s\pi/2)$, vamos calcular a integral de $z^{s-1}e^{-z}$, onde $z = x + iy$ e $s = \sigma + it$, sobre o “quadrado” no primeiro quadrante, com arestas sobre os eixos e o vértice na origem trocado por um quarto de circunferência. Isto é, considerando orientação anti-horária, seja $M > 0$ e ϵ pequeno:

$$\begin{aligned}
 \int_{\square} z^{s-1} e^{-z} dz &= \int_{\epsilon}^M x^{s-1} e^{-x} dx + \int_M^{M+iM} z^{s-1} e^{-z} dz + \int_{M+iM}^0 z^{s-1} e^{-z} dz \\
 &\quad + \int_0^{\epsilon} (iy)^{s-1} e^{-iy} i dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \epsilon^{s-1} e^{i\theta(s-1)} e^{-\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \\
 &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como não há zeros e singularidades na região, temos que a integral acima é igual a zero e além disso vamos tomar sempre $-\pi < \arg z < \pi$, em particular temos $(iy)^{s-1} = y^{s-1} e^{i\frac{\pi}{2}(s-1)}$ sobre o eixo imaginário. Também temos que

$$|z^{s-1}| = |z^{\sigma-1}| |z^{it}| = |z^{\sigma-1}| |\exp(it \log z)| \leq |z^{\sigma-1}| \exp(|t| \arg z).$$

Assim, se $\operatorname{Re}(s) = \sigma \in (0, 1)$, para I_2 e I_3 , temos

$$\begin{aligned} |I_2 + I_3| &\leq e^{-M} e^{|t|\frac{\pi}{4}} \int_0^M (M^2 + y^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} dy + e^{|t|\frac{\pi}{2}} \int_0^M e^{-x} (x^2 + M^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} dx \\ &\leq e^{-M} e^{|t|\frac{\pi}{4}} M^{\sigma-1} M + e^{|t|\frac{\pi}{2}} M^{\sigma-1} M = \frac{e^{|t|\frac{\pi}{4}}}{e^M} M^{\sigma} + e^{|t|\frac{\pi}{2}} M^{\sigma} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Para I_5 , temos

$$|I_5| \leq |\epsilon^s| \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |e^{-\epsilon e^{i\theta}}| d\theta \leq \epsilon^{\sigma} e^{|t| \arg \epsilon} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\epsilon \operatorname{Re}(e^{i\theta})} d\theta \leq \epsilon^{\sigma} e^{|t|\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Portanto, se $M \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.4), então $I_1 + I_4 \rightarrow 0$, isto é

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = i e^{i\frac{\pi}{2}(s-1)} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-iy} dy.$$

Pela definição da Função Gama, e reescrevendo o fator fora da integral no lado direito:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-iy} dy.$$

Agora se repetirmos exatamente o mesmo argumento anterior, aplicado ao quadrado no semiplano inferior de vértices ligando os pontos 0, M , $M - iM$ e $-iM$ e retirando um quarto de circunferência na origem, obtemos

$$e^{i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{iy} dy.$$

Subtraindo esses resultados:

$$\Gamma(s)(e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s}) = \int_0^{\infty} y^{s-1}(e^{iy} - e^{-iy}) dy \implies \Gamma(s) \sin(\pi s/2) = \int_0^{\infty} y^{s-1} \sin(y) dy.$$

□

Outra função importante para a teoria aqui apresentada e que pode ser definida em termos da Função Zeta de Riemann é a seguinte:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (3.5)$$

A função acima é conhecida como *função Xi de Riemann* e foi provada pelo próprio Bernhard Riemann em 1860. Ela satisfaz a equação funcional $\xi(s) = \xi(1-s)$, $\forall s \in \mathbb{C}$ e, em particular, usando

propriedades da Função Gama (princípio da reflexão² e fórmula de duplicação³), podemos deduzir a equação funcional da função Zeta através da função Xi.

Com a representação anterior, observamos que, como $\zeta(s) \neq 0, \forall \operatorname{Re}(s) \geq 1$, então $\xi(s) \neq 0, \forall \operatorname{Re}(s) \geq 1$. Na faixa crítica temos que se $\zeta(s) = 0$, então $\xi(s) = 0$. Já os zeros triviais da função zeta, quando $s = -2, -4, -6, \dots$, são cancelados com os polos da função $\Gamma(\frac{s}{2})$, localizados também nesses pontos. O único polo de $\Gamma(\frac{s}{2})$ que não é cancelado com nenhum zero é quando $s = 0$ e isso mostra que a função zeta tem um polo em $s = 1$. Portanto, podemos concluir que a Função Zeta de Riemann possui continuação analítica para todo o plano complexo, exceto o ponto $s = 1$.

Utilizando o Teorema 2.11, podemos obter o seguinte corolário:

Corolário 3.3. Seja $A > 0$ fixo. Então temos que,

$$|\zeta(s)| \asymp |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} |\zeta(1-s)|,$$

uniformemente para $|\sigma| \leq A$ e t suficientemente grande ($|t| \geq 5$).

3.1 Equivalência clássica

Os próximos dois resultados juntos (Teoremas 3.4 e 3.5) formam o que chamamos na introdução de equivalência clássica entre a hipótese de Riemann e as somas parciais da Função de Möbius.

Com as observações do início deste capítulo em mente, começamos com o seguinte:

Teorema 3.4. Uma condição suficiente para a hipótese de Riemann é $\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$.

Demonstração. Seja $M_{\mu}(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. Tome $\epsilon > 0$ pequeno e $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \frac{1}{2} + \epsilon$. Pelo Teorema 2.9 temos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M_{\mu}(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{M_{\mu}(t)}{t^{s+1}} dt,$$

portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M_{\mu}(x)}{x^s} + s \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{M_{\mu}(t)}{t^{s+1}} dt := A + sB.$$

Observe que, como $\sigma > \frac{1}{2} + \epsilon$, então $\frac{1}{2} + \epsilon - \sigma < 0$.

²Também chamada de Fórmula de Reflexão de Euler, o princípio da reflexão nos diz que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

³A igualdade comumente conhecida como Fórmula de Duplicação de Legendre é, quando $s \in \mathbb{C}$ não é um polo da função Gama, $\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s)$.

Estimativa de $|A|$.

$$|A| \ll_{\epsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{x^{\sigma}} = 0.$$

Estimativa de $|B|$.

$$|B| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{|M_{\mu}(t)|}{t^{\sigma+1}} dt \ll_{\epsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^{\sigma+\frac{1}{2}-\epsilon}} dt \ll_{\epsilon} 1.$$

Portanto, a integral $\int_1^{\infty} \frac{M_{\mu}(t)}{t^{s+1}} dt$ converge absolutamente e isso implica que o limite B existe.

Logo a série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ converge para todo $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ e então define uma função analítica em todo semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$.

Como consequência do Teorema 2.4, vimos que $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$, $\forall \operatorname{Re}(s) > 1$. Dessa forma $\frac{1}{\zeta(s)}$ tem continuação analítica no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ e assim $\zeta(s) \neq 0$ para todo s tal que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$, pois caso contrário $\frac{1}{\zeta(s)}$ teria singularidades e não seria analítica. $\square$

Teorema 3.5. Assuma a hipótese de Riemann. Então $M_{\mu}(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$.

Para provar essa implicação, primeiro vamos apresentar a hipótese de Lindelöf. Considere a seguinte função⁴: seja $\ell(\sigma) = \inf\{\beta : \zeta(\sigma + it) \ll t^{\beta}\}$. Essa função é conhecida como *Função de Lindelöf*.

Como $\zeta(s)$ é limitada para $\sigma > 1$ (converge absolutamente), segue que $\ell(\sigma) = 0$. Pelo corolário 3.3, se $\sigma < 0$, então $\ell(1 - \sigma) = 0$ e portanto $\ell(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$. O problema de encontrar valores para $\ell(\sigma)$, quando $0 < \sigma < 1$, é bem mais difícil. A *hipótese de Lindelöf (HL)* diz que

$$\ell(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \text{se } \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } \sigma \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ou seja, a conjectura afirma que o gráfico de ℓ consiste de fato de somente duas retas.

Uma variação do Teorema de Phragmén-Lindelöf pode ser formulada da seguinte forma:

Teorema 3.6. Seja f uma função analítica tal que $f(s) \ll \exp(\epsilon|t|)$, $\forall \epsilon > 0$, na faixa $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2\}$. Se temos

$$f(\sigma_1 + it) \ll |t|^{k_1} \quad \text{e} \quad f(\sigma_2 + it) \ll |t|^{k_2},$$

então

$$f(\sigma + it) \ll |t|^{\kappa(\sigma)},$$

⁴Usualmente a função aqui definida é denotada por μ . Entretanto assim como alguns autores, com o objetivo de reservar a letra μ somente para a Função de Möbius, denotaremos a função de Lindelöf por ℓ .

uniformemente em $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, onde $\kappa(\sigma)$ é a função linear que toma valores $\kappa(\sigma_1) = k_1$ e $\kappa(\sigma_2) = k_2$.

Usando esse resultado, vamos mostrar que a função ℓ é convexa no intervalo $[0, 1]$. Dizemos que f é uma *função ordem finita* se $f(s) \ll |t|^A$, para algum $A > 0$. A função zeta em particular é tal que $\zeta(\sigma + it) \ll |t|^{1-\sigma+\epsilon}$, para $0 < \sigma \leq 1$, portanto de ordem finita.

A função ℓ e a função zeta satisfazem então a hipótese do teorema anterior: como $\ell(0) = \frac{1}{2}$, $\ell(1) = 0$, $\zeta(0 + it) \ll |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ e $\zeta(1 + it) \ll |t|^\epsilon$, então temos que $\zeta(s) \ll |t|^{\kappa(\sigma)}$, para $\sigma \in [0, 1]$, onde κ é a função linear que toma valores $\frac{1}{2}$ em $\sigma = 0$ e 0 em $\sigma = 1$, isto é,

$$\kappa(\sigma) = \frac{(1 - \sigma)\kappa(0) + (\sigma - 0)\kappa(1)}{1 - 0} = (1 - \sigma)\frac{1}{2}.$$

Portanto, no intervalo $0 \leq \sigma \leq 1$, $\ell(\sigma) \leq \kappa(\sigma)$ e portanto ℓ é uma função convexa. Consequentemente a HL é equivalente a $\ell(\frac{1}{2}) = 0$ ou, de forma similar, $\zeta(\frac{1}{2} + it) \ll |t|^\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

Observação 3.7. A breve discussão sobre a função zeta ser uma função de ordem finita pode ser resumida no seguinte teorema:

Teorema 3.8. Seja $\epsilon > 0$ e $C \geq 1$ fixos. Para $s = \sigma + it$ com $\sigma \geq -C$ e $|t| \geq 1$, temos

$$\zeta(s) \ll_{\epsilon, C} \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \geq 1 + \epsilon, \\ |t|^{(1-\sigma+\epsilon)/2} & \text{se } -\epsilon \leq \sigma \leq 1 + \epsilon, \\ |t|^{1/2-\sigma} & \text{se } -C \leq \sigma \leq -\epsilon. \end{cases}$$

Observe que no teorema anterior, se $\sigma = \frac{1}{2}$, temos que $\zeta(s) \ll |t|^{\frac{1}{4}+\epsilon}$. Melhoras no expoente $\frac{1}{4}$ são chamadas de *estimativas subconvexas*. O melhor resultado até o momento foi obtido por Bourgain [6] em 2017, provando que $\ell(\frac{1}{2}) \leq \frac{13}{84} \approx 0.154$. Ao final dessa seção apresentamos uma tabela com os resultados históricos dessas estimativas.

O próximo passo é mostrar que a hipótese de Riemann implica a hipótese de Lindelöf.

Teorema 3.9. Assuma a hipótese de Riemann. Então para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\log \zeta(s) \ll_{\epsilon} (\log t)^{2-2\sigma+\epsilon},$$

uniformemente para $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$.

Começamos com os seguintes lemas de Análise Complexa:

Lema 3.10 (Borel-Carathéodory). Sejam $h(z)$ uma função analítica em um disco $|z| \leq R$, $M(r) = \max\{|h(z)| : |z| = r\}$ e $A(r) = \max\{\operatorname{Re}(h(z)) : |z| = r\}$. Se $0 < r < R$, então

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|h(0)|.$$

O lema anterior é uma ferramenta útil que nos permite estimar o crescimento do módulo de uma função analítica em um disco menor, usando estimativas do crescimento da sua parte real, em um círculo concêntrico maior.

Lema 3.11 (Teorema dos Três Círculos de Hadamard). Sejam $h(z)$ uma função analítica em $r_1 \leq |z| \leq r_3$, r_2 um número tal que $r_1 < r_2 < r_3$ e $M_i = \max\{|h(z)| : |z| = r_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Então

$$M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a,$$

onde $a = \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \left(\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\right)^{-1}$.

Demonstração do Teorema 3.9. Tome dois círculos concêntricos, centrados em $s = 2 + it$, um de raio $\frac{3}{2} - \delta$ e o outro $\frac{3}{2} - \frac{\delta}{2}$, onde $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Pela observação 3.1, temos no círculo maior que $|\zeta(\sigma + it)| \ll |t|$ e então $\operatorname{Re}(\log \zeta(s)) = \log |\zeta(s)| \ll \log |t|$.

Pelo lema de Borel-Carathéodory,

$$\begin{aligned} |\log \zeta(s)| &\leq \frac{2(\frac{3}{2} - \delta)}{\frac{\delta}{2}} A \log |t| + \frac{3 - \frac{3\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} |\log \zeta(2 + it)| \\ &= \left(\frac{6}{\delta} - 4\right) A \log |t| + \left(\frac{6}{\delta} - 3\right) |\log \zeta(2 + it)| \\ &\ll \frac{\log |t|}{\delta}, \end{aligned}$$

onde A é a constante relacionada ao crescimento da função zeta no maior círculo e usamos que a função zeta converge absolutamente em $2 + it$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, no círculo menor (que passa pelo ponto $\frac{1}{2} + \delta + it$), temos

$$|\log \zeta(s)| \ll \frac{\log |t|}{\delta}. \quad (3.6)$$

Tome agora três círculos concêntricos C_1, C_2 e C_3 , centrados em $s = \sigma_1 + it$ ($1 < \sigma_1 \leq t$) e tal que:

- o círculo C_1 passa pelo ponto $1 + \beta + it$, logo tem raio $r_1 = \sigma_1 - 1 - \beta$;
- C_2 passa pelo ponto $\sigma + it$ ($\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$), tem raio $r_2 = \sigma_1 - \sigma$;
- C_3 passa pelo ponto $\frac{1}{2} + \delta + it$ (lembre que $\delta \in (0, \frac{1}{2})$), com raio $r_3 = \sigma_1 - \frac{1}{2} - \delta$.

Aqui $\frac{1}{2} + \delta < \sigma$ e os valores de σ_1, δ e β serão escolhidos de forma que δ e β são pequenos e σ_1 é grande. De fato, podemos tomar

$$\sigma_1 = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\beta} = \log \log |t|.$$

Pelo Teorema dos Três Círculos de Hadamard aplicado a função $|\log \zeta(s)|$, se $M_i = \max\{|\log \zeta(s)| : |s| \in r_i\}$, $i = 1, 2, 3$ e $a = \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)(\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right))^{-1}$, então

$$M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a.$$

Para estimar o valor de a , primeiro observamos que

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - 1 - \beta} = 1 + \frac{1 + \beta - \sigma}{\sigma_1 - 1 - \beta} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{\log \log |t|} - \sigma}{\log \log |t| - 1 - \frac{1}{\log \log |t|}} := 1 + x_1$$

e também,

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{\sigma_1 - \frac{1}{2} - \delta}{\sigma_1 - 1 - \beta} = 1 + \frac{\frac{1}{2} + \beta - \delta}{\sigma_1 - 1 - \beta} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\log \log |t| - 1 - \frac{1}{\log \log |t|}} := 1 + x_2.$$

Além disso, quando x é pequeno, podemos aproximar $\log(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, se $|x| < 1$ e $\frac{1}{\log(1+x)} = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1)$, se $|x| < 1$.

Estimativa de a .

$$\begin{aligned} a &= \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \left(\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\right)^{-1} = \frac{\log(1+x_1)}{\log(1+x_2)} = (x_1 + \mathcal{O}(x_1^2))(x_2^{-1} + \mathcal{O}(1)) \\ &= x_1 x_2^{-1} + \mathcal{O}(x_1^2) + \mathcal{O}(x_1^2 x_2^{-1}) + \mathcal{O}(x_1) \\ &= 2(1 - \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log \log |t|}\right). \end{aligned}$$

Estimativa de M_1 . Observe que o círculo C_1 está inteiramente contido no semiplano de convergência absoluta da função zeta. Para $\text{Re}(s) > 1$ temos,

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \log(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Assim,

$$|M_1| \leq \left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} = \zeta(1+\beta) \ll \frac{1}{\beta},$$

pois $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ para s próximo de 1^+ .

Estimativa de M_3 .

$$|M_3| \ll \frac{\log |t|}{\delta},$$

por (3.6).

Portanto em M_2 ,

$$|\log \zeta(\sigma + it)| \leq \frac{1}{\beta^{1-a}} \left(\frac{\log |t|}{\delta} \right)^a \leq (\log \log |t|)(\log |t|)^{2(1-\sigma)+\mathcal{O}(\frac{1}{\log \log |t|})}. \quad (3.7)$$

Como $(\log |t|)^{\mathcal{O}(\frac{1}{\log \log |t|})} = \exp(\mathcal{O}(\frac{1}{\log \log |t|}) \log \log |t|) = \exp(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1)$, segue de (3.7) que

$$\log \zeta(s) \ll (\log \log |t|)(\log |t|)^{2(1-\sigma)} \ll_{\epsilon} (\log |t|)^{2(1-\sigma)+\epsilon},$$

com $\sigma \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log |t|}, 1]$. □

Corolário 3.12. A hipótese de Riemann implica a hipótese de Lindelöf.

Demonstração. Fixado $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log t_0}$, tome um $\epsilon_0 > 0$ pequeno suficiente tal que $2(1-\sigma) + \epsilon_0 < 1$. Pelo Teorema 3.9, temos uniformemente para $\text{Re}(s) \geq \sigma > \frac{1}{2}$,

$$\log \zeta(s) \ll (\log |t|)^{2(1-\sigma)+\epsilon_0} \ll_{\epsilon} \epsilon \log |t|,$$

para todo $\epsilon > 0$ e $t > t_0$. Logo,

$$\zeta(s) \ll_{\epsilon} |t|^{\epsilon}; \quad \frac{1}{\zeta(s)} \ll_{\epsilon} |t|^{\epsilon},$$

para todo $\text{Re}(s) \geq \sigma > \frac{1}{2}$ e todo $\epsilon > 0$. □

Demonstração do Teorema 3.5. Pela Fórmula de Perron com $\sigma_0 = 2$,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds + R = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + R,$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$, pois estamos integrando sobre uma região à direita da reta $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) = 1\}$.

Fixado $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, vamos substituir o segmento de reta $2 - iT$ até $2 + iT$ por um caminho conexo por partes, composto por segmentos de retas que ligam esses dois pontos. Seja Δ o retângulo

de vértices $2 - iT$, $2 + iT$, $\sigma_1 - iT$ e $\sigma_1 + iT$, orientado de forma anti-horária. Como $\frac{1}{\zeta(s)}$ é analítica nessa região,

$$\int_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = 0.$$

Assim, seja $\Delta = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$, onde I_1 é a reta vertical que liga $2 - iT$ a $2 + iT$, I_2 é a reta horizontal que liga $2 + iT$ e $\sigma_1 + iT$, I_3 é a reta vertical oposta a I_1 e I_4 a reta horizontal oposta a I_2 . Dessa forma,

$$\left| \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| = \left| \int_{I_1} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \left| \int_{I_2} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| + \left| \int_{I_3} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| + \left| \int_{I_4} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right|.$$

Estimativa da integral sobre I_2 e I_4 .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1+iT}^{2+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll \int_{\sigma_1}^2 \frac{|T|^\epsilon x^\sigma}{|\sigma + iT|} d\sigma \\ &\ll \frac{|T|^\epsilon}{|T|} \int_{\sigma_1}^2 x^\sigma d\sigma \\ &\ll |T|^{\epsilon-1} \frac{x^2}{\log x} \\ &\ll |T|^{\epsilon-1} x^2. \end{aligned}$$

Estimativa da integral sobre I_3 .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll \int_{-T}^T \frac{|t|^\epsilon x^{\sigma_1}}{|\sigma_1 + it|} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} \int_1^T |t|^{\epsilon-1} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} T^\epsilon. \end{aligned}$$

Estimativa de R .

$$R \ll \sum_{\substack{\frac{x}{2} < n < 2x \\ n \neq x}} |\mu(n)| \min \left\{ 1, \frac{x}{T|x-n|} \right\} + \frac{4^2 - x^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^2}.$$

O somatório do segundo termo da soma é convergente, logo esse termo é $\ll \frac{x^2}{T}$. Para o primeiro termo, temos que $|\mu(n)| \leq 1$ e observamos que para um n mais próximo de x tomamos o

mínimo como 1, pois $|x - n| \leq 1$. Para todos os demais valores de n , substituímos o mínimo pelo segundo termo. Assim,

$$\begin{aligned} R &\ll \left(1 + \frac{x}{T} \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k}\right) + \frac{x^2}{T} \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} \\ &\ll \frac{x \log x}{T} + \frac{x^2}{T} \\ &\ll \frac{x^2}{T}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde usamos que $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \mathcal{O}(\log x)$ (uma aplicação do Teorema 2.9).

Tome agora $T = x^2$. Obtemos então,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll x^{2\epsilon} + x^{\sigma_1+2\epsilon} + 1 \ll x^{\sigma_1+2\epsilon}.$$

Como fixamos $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

para todo $\epsilon > 0$. □

3.1.0.1 Estimativas subconvexas obtidas para a função de Lindelöf

Abaixo descrevemos a relação de resultados históricos da função ℓ . Em 1908, Lindelöf mostrou que $\ell(\sigma) \leq \frac{1}{4}$. Lembramos que $\frac{1}{4}$ é o valor considerado de mudança de fase do que chamamos de estimativas convexas para subconvexas.

$\ell(\frac{1}{2}) \leq$	Resultado obtido por	Ano
$\frac{1}{6} \approx 0.1666$	Hardy e Littlewood	1921
$\frac{163}{988} \approx 0.1650$	Walfisz	1924
$\frac{27}{164} \approx 0.1647$	Titchmarsh	1931
$\frac{229}{1392} \approx 0.1646$	Phillips	1933
$\frac{19}{116} \approx 0.1638$	Titchmarsh	1942
$\frac{15}{92} \approx 0.1631$	Min	1949
$\frac{6}{37} \approx 0.1622$	Haneke/Jingrun	1962/5
$\frac{173}{1067} \approx 0.1622$	Kolesnik	1973
$\frac{35}{216} \approx 0.1621$	Kolesnik	1982
$\frac{139}{858} \approx 0.1620$	Kolesnik	1985
$\frac{32}{205} \approx 0.1561$	Huxley	2002
$\frac{53}{342} \approx 0.1550$	Bourgain	2017
$\frac{13}{84} \approx 0.1548$	Bourgain	2017

A referência [19] contém parte desses resultados, discussões sobre os métodos distintos usados por alguns dos autores e a eficiência dessas ferramentas em um escopo mais amplo.

3.2 Estimativas condicionais

Os dois resultados dessa seção serão distribuídos em subseções distintas. Isso ajudará na organização do que está sendo apresentado, visto que o resultado mais recentes usa técnicas modernas e detalhadas, contendo múltiplos lemas e novas definições.

3.2.1 Estimativa de Edward Titchmarsh

O primeiro teorema desta seção é devido a Titchmarsh, onde ele apresenta uma melhora nas somas parciais da Função de Möbius. A demonstração segue a mesma ideia da prova do Teorema 3.5, mas precisamos de um lema adicional.

Para provar a Equivalência clássica apresentada anteriormente, a hipótese de Lindelöf é crucial e, se observarmos o cálculo das integrais na demonstração, podemos notar que as linhas horizontais não geram contribuições efetivas para o resultado final. Nesse sentido, é natural tentar melhorar o controle da função zeta em linhas verticais.

Lema 3.13. Assuma a hipótese de Riemann e seja $s = \sigma + it$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\sigma \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log T}]$, temos

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \exp \left(\frac{C \log T}{\log \log T} \log \left(\frac{e}{(\sigma - \frac{1}{2}) \log \log T} \right) \right).$$

E para todo $\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log T}$, temos

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq T^{\frac{C}{\log \log T}}.$$

Teorema 3.14. Assuma a hipótese de Riemann. Então $\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_A x^{\frac{1}{2} + \frac{A}{\log \log x}}$, para uma constante $A > 0$.

Demonstração. Seja $\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log T}$ e Δ o retângulo de vértices $2 - iT$, $2 + iT$, $\sigma_1 + iT$ e $\sigma_1 - iT$. Assim, se I_1, I_2, I_3 e I_4 é como no Teorema 3.5, iremos aplicar o lema anterior em ambas as estimativas das integrais.

Estimativa da integral sobre I_2 e I_4 .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1 - iT}^{2 + iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll \frac{T^{\frac{C}{\log \log T}}}{T} \int_{\sigma_1}^2 x^\sigma d\sigma \\ &\ll T^{\frac{C}{\log \log T} - 1} x^2. \end{aligned}$$

Estimativa da integral sobre I_3 .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll x^{\sigma_1} \int_{-T}^T \exp \left(\frac{C \log t}{\log \log t} \log \frac{e}{(\sigma_1 - \frac{1}{2}) \log \log t} \right) \frac{1}{t} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} \int_1^T \exp \left(\frac{C \log t}{\log \log t} \log \frac{e \log \log T}{\log \log t} \right) \frac{1}{t} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} T^{\frac{C}{\log \log T}} \int_1^T \frac{1}{t} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} T^{\frac{C}{\log \log T}} \log T, \end{aligned}$$

onde na terceira desigualdade usamos que a exponencial do integrando é crescente em t , no intervalo de integração.

Estimativa de R . O erro R é o mesmo do Teorema 3.5, calculado na equação (3.8).

Juntando as estimativas, tomando $T = x^2$ e substituindo o valor de σ_1 , temos pela Fórmula de Perron:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) &= \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + R \\ &\ll x^{\frac{2C}{\log \log x^2}} + x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log x^2}} x^{\frac{2C}{\log \log x^2}} \log x^2 \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2C+1}{\log \log x}} x^\epsilon \\ &\ll_A x^{\frac{1}{2} + \frac{A}{\log \log x}}, \end{aligned}$$

onde $A = A(C, \epsilon)$. □

3.2.2 Estimativa de Kannan Soundararajan

Esta seção é voltada para a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 3.15. Assuma a hipótese de Riemann. Então para x grande suficiente,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_\epsilon \sqrt{x} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \forall \epsilon > 0.$$

A prova desse teorema será feita em subseções seguintes e ela é composta por duas proposições que iremos enunciar em momento oportuno, juntamente com uma aplicação da Fórmula de Perron. Por agora iremos apresentar resultados preliminares, definições e lemas necessários.

Esse resultado é similar ao obtido por Soundararajan em [27]:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll \sqrt{x} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{14})$$

e a demonstração segue as mesmas ideias. Balazard e de Roton [4] melhoraram o termo de menor contribuição, mostrando que

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll_\epsilon \sqrt{x} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{\frac{5}{2}+\epsilon}), \forall \epsilon > 0.$$

A partir das adaptações feitas nesse trabalho, outros autores apresentaram resultados similares para as somas parciais da Função de Möbius sobre progressões aritméticas.

Mas antes de tudo, começamos com uma função extensivamente estudada na teoria da Função Zeta de Riemann e um comentário histórico.

3.2.2.1 Nota sobre os zeros da Função Zeta de Riemann

Para $T \geq 0$, denotamos por $N(T)$ a função que conta o número de zeros $\rho = \beta + i\gamma$ da função zeta de Riemann, onde $0 < \gamma \leq T$ e $0 < \beta < 1$. Um resultado conhecido é que

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (3.9)$$

onde, se t não é a ordenada de um zero, $\pi S(t) = \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ é o argumento é obtido através da variação contínua sobre os segmentos que ligam os pontos 2 até $2 + it$ e de $2 + it$ até $\frac{1}{2} + it$. Na prova de (3.9), a função $S(t)$ surge naturalmente ao aplicar o princípio do argumento ([10] p. 123, Teorema 3.4) à derivada logaritmica da função Xi de Riemann definida em (3.5) e ela pode ser vista como sendo o erro da função $N(t)$ ou, similarmente, a diferença entre a quantidade real de zeros da função zeta e a média do número de zeros, até a altura t .

Note que, se $0 < h \leq \sqrt{t}$, temos

$$N(t+h) - N(t) = \frac{h}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} + S(t+h) - S(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1+h^2}{t}\right).$$

Além disso, temos incondicionalmente $S(t) \ll \log t$. Vários autores, como por exemplo Littlewood, Goldston-Gonek e mais recente Carneiro-Chandee-Milinovich [8] apresentaram resultados sobre a magnitude dessa função assumindo a HR: o melhor resultado atualmente é $|S(t)| \leq (\frac{1}{4} + o(1)) \frac{\log t}{\log \log t}$. Portanto, o número de zeros da função zeta tal que a ordenada está intervalo $(t, t+h]$ satisfaz

$$\left| N(t+h) - N(t) - \frac{h}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} \right| \leq \left(\frac{1}{4} + o(1) \right) \frac{\log t}{\log \log t}. \quad (3.10)$$

Observe também que a equação (3.9) essencialmente nos diz que o número de zeros da Função Zeta de Riemann até a altura T é assintoticamente igual a $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$, em particular os zeros vão ficando cada vez mais densos a medida que vamos tomando valores maiores na linha crítica. Se considerarmos um intervalo da forma $[T, 2T]$, para T grande, temos que em média o número de zeros nesse intervalo é $\ll \frac{2\pi}{\log T}$. Considerações similares serão usadas nos teoremas desta seção.

Em particular, vamos descrever brevemente um argumento usado por Soundararajan em seu artigo, com base no trabalho de Goldston-Gonek.

Na década de 30, Beurling mostrou que a função analítica

$$H_{\pm}(z) = \left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \right)^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(n)}{(z-n)^2} + \frac{2}{z} \right) \pm \left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \right)^2,$$

satisfaz $H_-(x) \leq \operatorname{sgn}(x) \leq H_+(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $\operatorname{sgn}(x)$ é a função sinal e toma valores 1 para x positivo, -1 para x negativo e 0 se $x = 0$. Ou seja, as funções $H_\pm$ aproximam a função sinal. Além disso, $H_\pm$ tem transformada de Fourier $\hat{H}_\pm$ em $[-1, 1]$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |H_\pm(x) - \operatorname{sgn}(x)| dx = 1$. De fato, a função $H_\pm$ é a melhor aproximação real (com transformada de Fourier e suporte em $[-1, 1]$) da função sinal.

Em 1989, utilizando a aproximação de Beurling acima, Selberg observou que existem funções analíticas $F_\pm$ que aproximam a função característica do intervalo $[-h, h]$, isto é, $F_-(x) \leq \chi_{[-h, h]}(x) \leq F_+(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e tal que $F_\pm$ possui transformada de Fourier com suporte em $[-\Delta, \Delta]$, para um $\Delta > 0$ (ou seja, a transformada $\hat{F}_\pm(x) = 0$ se $|x| \geq \Delta$). As funções encontradas por Selberg são

$$F_\pm(z) = \frac{1}{2}(H_\pm(\Delta(h+z)) + H_\pm(\Delta(h-z))). \quad (3.11)$$

Estaremos interessados nas propriedades já citadas dessas funções e também outras que estarão resumidas no lema a ser enunciado. Ressaltamos que, de fato, essa é a função $F_\pm$ que aparecerá ao longo desta subseção, entretanto não utilizaremos sua forma explícita acima.

3.2.2.2 Frequência dos zeros da Função Zeta de Riemann

A tentativa de relacionar funções que aproximam de forma ótima a função característica de intervalos com zeros da Função Zeta de Riemann tem sido estudada há algum tempo. Esse tipo de problema é conhecido em Análise Harmônica como Problemas Extremais.

Um dos objetivos principais da demonstração a seguir é entender com qual frequência a parte imaginária dos zeros da função zeta de Riemann se acumulam em intervalos pequenos.

Observação 3.16. O próximo teorema não será utilizado diretamente na demonstração do teorema principal desta seção (Teorema 3.15), mas conforme discutido, o método utilizado é de relevância científica e o objeto pode ser de interesse mais amplo. Vamos dar uma cota superior para o tamanho de qualquer conjunto de ordenadas “bem distribuídas” da função zeta, dado que esses pontos se acumulam em um intervalo de tamanho pré-determinado.

Além disso, a título de informação, esse teorema é utilizado na prova de proposições auxiliares que iremos enunciar posteriormente, mas não iremos demonstrar essas proposições.

Teorema 3.17. Assuma a hipótese de Riemann. Tome T grande e sejam $0 \leq h \leq \sqrt{T}$ e $(\log \log T)^2 \leq V \leq \frac{\log T}{\log \log T}$ fixos. Particione o intervalo $[T, 2T]$ com R pontos bem distribuídos, isto é: $T \leq t_1 < t_2 < \dots < t_R \leq 2T$ tal que $t_{j+1} - t_j \geq 1$ e tal que

$$V < \left| N(t_j + h) - N(t_j - h) - \frac{h}{\pi} \log \frac{t_j}{2\pi} \right|.$$

Então o número de pontos satisfaz

$$R \ll T \exp \left(-V \log \frac{V}{\log \log T} + 3V \log \log V \right).$$

Lemas preliminares:

Lema 3.18. Seja $h > 0$ e $\Delta > 0$ fixos. Seja $\chi_{[-h,h]}$ a função característica do intervalo $[-h, h]$.

Então existem funções analíticas pares F_- e F_+ satisfazendo

- (i) Se $u \in \mathbb{R}$, $F_-(u) \leq \chi_{[-h,h]}(u) \leq F_+(u)$.
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F_{\pm}(u) - \chi_{[-h,h]}(u)| du \leq \frac{1}{\Delta}$.
- (iii) $\hat{F}_{\pm}(x) = 0, \forall |x| \geq \Delta$, onde $\hat{F}_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u) e^{-2\pi i x u} du$ é transformada de Fourier de $F_{\pm}$.
Além disso, $\hat{F}_{\pm}(x) = \frac{\sin(2\pi h x)}{x\pi} + \mathcal{O}(\frac{1}{\Delta})$.
- (iv) Se $|z| \geq 2h$, então $|F_{\pm}(z)| \ll \frac{e^{2\pi\Delta|\operatorname{Im}(z)|}}{(\Delta|z|)^2}$.

Lema 3.19. Seja $g(s)$ uma função analítica em $|\operatorname{Im}(s)| \leq \frac{1}{2} + \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$, tomando valores reais para todo s real e satisfazendo $|g(s)| \ll (1 + |s|)^{-1-\delta}$, para algum $\delta > 0$. Então se $\rho = \frac{1}{2} + iy$ são zeros não-triviais da função zeta de Riemann, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} g(\rho) &= g\left(\frac{1}{2i}\right) + g\left(\frac{-1}{2i}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left(\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) - \log \pi \right) du \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(\hat{g}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{g}\left(\frac{-\log n}{2\pi}\right) \right), \end{aligned}$$

onde Λ é a Função de Von Mangoldt.

Observação 3.20. Notamos aqui que as funções $F_{\pm}(s - t)$ do lema 3.18 satisfazem as hipóteses do lema acima. Tanto para F_- quanto para F_+ , vamos mostrar que, sob as hipóteses do Teorema 3.17, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u - t) \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) du = \log \frac{t}{2} \hat{F}_{\pm}(0) + \mathcal{O}(1). \quad (3.12)$$

Para isso, como $h \leq \sqrt{t}$ e pelo Teorema 2.11 temos $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) \ll \log(|u| + 2)$, então pelo item 4 do lema 3.18:

$$\int_{t+2\sqrt{t}}^{\infty} F_{\pm}(u - t) \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) du \ll \int_{t+2\sqrt{t}}^{\infty} \frac{\log(u+2)}{\Delta^2(u-t)^2} du \ll \frac{\log t}{\sqrt{t}} \ll 1,$$

onde Δ é uma constante positiva. Similarmente,

$$\int_{-\infty}^{t-2\sqrt{t}} F_{\pm}(u - t) \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) du \ll \frac{\log t}{\sqrt{t}} \ll 1.$$

Ainda pelo Teorema 2.11 e usando as duas estimativas anteriores,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u-t) \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iu}{2} \right) du &= \int_{t-2\sqrt{t}}^{t+2\sqrt{t}} F_{\pm}(u-t) \left(\log \frac{u}{2} + \mathcal{O}(1) \right) du + \mathcal{O}(1) \\
&\leq \left(\log \frac{t}{2} + \mathcal{O}(1) \right) \int_{t-2\sqrt{t}}^{t+2\sqrt{t}} F_{\pm}(u-t) du + \mathcal{O}(1) \\
&\leq \left(\log \frac{t}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u-t) du + \mathcal{O}(1) \\
&= \hat{F}_{\pm}(0) \log \frac{t}{2} + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Lema 3.21. Seja $F(s) = \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p^s}$ e T grande. Suponha que $s_r = \sigma_r + it_r$ ($r = 1, \dots, R$) sejam pontos tais que $T < t_1 < \dots < t_R \leq 2T$ tal que $t_{r+1} - t_r \geq 1$ e $\sigma_r \geq \alpha$. Para todo k tal que $N^k \leq T$, temos

$$\sum_{r=1}^R |F(s_r)|^{2k} \ll T(\log T)^{2k} \left(\sum_{p \leq N} \frac{|f(p)|^2}{p^{2\alpha}} \right)^k.$$

Demonstração do Teorema 3.17. Seja $\Delta = (1 + \eta) \frac{\log T}{2\pi V}$, onde $\eta = \frac{1}{\log V}$ e $h > 0$. Pelo lema 3.18, existem $F_{\pm}$ que aproximam a função característica do intervalo $[-h, h]$. Aplicando o lema 3.19 para $g(s) = F_{\pm}(s - t)$, onde $T \leq t \leq 2T$, primeiro observamos que:

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u-t) e^{-2\pi i x u} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(y) e^{-2\pi i x (y+t)} dy = \hat{F}_{\pm}(x) e^{-2\pi i x t}.$$

Agora utilizando a fórmula do lema, a igualdade acima e o fato que $\hat{F}_{\pm}(-x) = \hat{F}_{\pm}(x)$ (pelo terceiro item do lema 3.18 ou o fato que transformadas de Fourier de funções pares são pares):

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho} F_{\pm}(\gamma - t) &= F_{\pm} \left(\frac{1}{2i} - t \right) + F_{\pm} \left(\frac{-1}{2i} - t \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(y-t) \left(\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{iy}{2} \right) - \log \pi \right) dy \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(\hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) e^{-it \log n} + \hat{F}_{\pm} \left(\frac{-\log n}{2\pi} \right) e^{it \log n} \right) \right] \\
&= F_{\pm} \left(\frac{1}{2i} - t \right) + F_{\pm} \left(\frac{-1}{2i} - t \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u) \left(\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{i(u+t)}{2} \right) - \log \pi \right) du \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) \right], \tag{3.13}
\end{aligned}$$

onde usamos que $F_{\pm}$ é uma função real quando avaliada em números reais.

Agora observamos que $N(t+h) - N(t-h)$ é igual ao número de zeros da função zeta em $(t-h, t+h)$. Como $F_{\pm}(u)$ aproxima $\chi_{[-h,h]}(u)$, então fixado um t , $F_{\pm}(\gamma-t)$ aproxima $\chi_{[-h,h]}(\gamma-t) =$

$\chi_{[-h+t, h+t]}(\gamma)$, que é a indicadora da parte imaginária de um zero da função zeta estar dentro do intervalo $[-h+t, h+t]$. Assim, o lado esquerdo de (3.13) vale, para F_+ e F_- separadamente:

$$\begin{aligned}\sum_{\rho} F_+(\gamma - t) &\geq \sum_{\rho} \chi_{[-h, h]}(\gamma - t) = N(t+h) - N(t-h) \\ \sum_{\rho} F_-(\gamma - t) &\leq \sum_{\rho} \chi_{[-h, h]}(\gamma - t) = N(t+h) - N(t-h).\end{aligned}$$

Uma segunda observação é que $\hat{F}_+(0) \leq 2h + \frac{1}{\Delta}$ e $\hat{F}_-(0) \geq 2h - \frac{1}{\Delta}$. Uma forma de mostrar essas desigualdades é utilizando a segunda propriedade do lema 3.18 e a definição da transformada de Fourier:

$$\hat{F}_+(0) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_+(u)| du \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_+(u) - \chi_{[-h, h]}(u)| du + \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[-h, h]}(u)| du \leq \frac{1}{\Delta} + 2h.$$

Para a segunda desigualdade, note que $0 \leq \chi_{[-h, h]}(u) - F_-(u)$, assim

$$-\hat{F}_-(0) = \int_{-\infty}^{\infty} -F_-(u) + \chi_{[-h, h]}(u) - \chi_{[-h, h]}(u) du \leq \frac{1}{\Delta} - 2h \implies \hat{F}_-(0) \geq 2h - \frac{1}{\Delta}.$$

Pela equação (3.12) da observação 3.20, a integral em (3.13) é

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(u) \left(\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + \frac{i(u+t)}{2} \right) - \log \pi \right) du = \frac{1}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} \hat{F}_{\pm}(0) + \mathcal{O}(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left| N(t+h) - N(t-h) - \frac{h}{\pi} \log \frac{t}{2\pi} \right| &\leq \frac{\log T}{\Delta 2\pi} + \max_{\pm} \left\{ \left| F_{\pm} \left(\frac{1}{2i} - t \right) \right| + \left| F_{\pm} \left(\frac{-1}{2i} - t \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) \right| \right\} + \mathcal{O}(1).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Agora vamos estimar cada termo separadamente. Começando por $|F_{\pm}(-t \pm \frac{1}{2i})|$, note que $|-t \pm \frac{1}{2i}| = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \geq \sqrt{h^4 + \frac{1}{4}} \geq 2h$, $\forall h \geq 2$, pois por hipótese $h \leq \sqrt{T}$ e $T \leq t$. Assim, pelo último item do lema 3.18,

$$\left| F_{\pm} \left(-t \pm \frac{1}{2i} \right) \right| \ll \frac{\exp(\pi \Delta)}{\Delta(t^2 + \frac{1}{4})} \ll \frac{\exp((1+\eta)\frac{\log T}{2V})}{(1+\eta)\frac{\log T}{2V}(T^2 + \frac{1}{4})} \ll \frac{T^{\frac{1+\eta}{2V}} V \log V}{T^2 \log T (1 + \log V)} \ll \frac{T}{T^2} \ll \frac{1}{T},$$

usando aqui a hipótese $V \leq \log T (\log \log T)^{-1}$. Como $|\eta| = |\frac{1}{\log V}| < 1$, o primeiro termo do lado direito de (3.14) é

$$\frac{\log T}{\Delta 2\pi} = V \frac{1}{1+\eta} = V(1 - \eta + \mathcal{O}(\eta^2)).$$

Uma de nossas hipóteses é que o lado esquerdo de (3.14) é estritamente maior que V . Portanto, precisamos que

$$\max_{\pm} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) \right| \geq 2\eta V. \quad (3.15)$$

Novamente pelo lema 3.18 item 3, temos que se $|x| \geq \Delta$, então $\hat{F}_{\pm}(x) = 0$. Assim o somatório acima pode ser efetivamente calculado até $n \leq \exp(2\pi\Delta) = T^{\frac{1+\eta}{V}}$, pois se $n > \exp(2\pi\Delta) \implies \frac{\log n}{2\pi} > \Delta$.

Na soma em (3.15), se $n = p^k$, para algum primo p e algum inteiro $k \geq 3$, temos que $|\frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}| = |\frac{\log p}{p^{k/2}}| = \mathcal{O}(1)$ e também $|\hat{F}_{\pm}(\frac{\log n}{2\pi})| = \mathcal{O}(1)$. Portanto, a contribuição das potências cúbicas ou superiores de primos é de $\mathcal{O}(1)$ e então estimamos,

$$\max_{\pm} \left| \sum_{n \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) \mathbb{1}_{\{n \in \mathcal{P}\}} + \sum_{n \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right) \mathbb{1}_{\{n=p^2: p \in \mathcal{P}\}} \right| \geq 2\eta V,$$

ou equivalentemente,

$$\max_{\pm} \left| \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{2\pi} \right) + \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{2V}}} \frac{\log p}{p^{1+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{\pi} \right) \right| \geq 2\eta V.$$

Então, temos

$$\max_{\pm} \left| \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{2\pi} \right) \right| \geq \eta V, \text{ ou } \max_{\pm} \left| \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{2V}}} \frac{\log p}{p^{1+it}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{\pi} \right) \right| \geq \eta V.$$

Portanto, tomando R pontos da hipótese $t_1, \dots, t_R$ e um inteiro $k > 0$ qualquer, temos a desigualdade

$$\sum_{j=1}^R (\eta V)^{2k} \leq \sum_{j=1}^R \sum_{\pm} \left(\left| \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}+it_j}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{2\pi} \right) \right|^{2k} + \left| \sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{2V}}} \frac{\log p}{p^{1+it_j}} \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{\pi} \right) \right|^{2k} \right).$$

Supondo $k \leq \frac{V}{1+\eta}$, podemos aplicar o lema 3.21 para as somas acima e obtemos

$$\begin{aligned} R(\eta V)^{2k} &\ll T(\log T)^{2k}! \left[\left(\sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{(\log p)^2}{p} \left| \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{2\pi} \right) \right|^2 \right)^k \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{2V}}} \frac{(\log p)^2}{p^2} \left| \hat{F}_{\pm} \left(\frac{\log p}{\pi} \right) \right|^2 \right)^k \right]. \end{aligned}$$

Pelo item 3 do lema 3.18, ambos $|\hat{F}_\pm(\frac{\log p}{2\pi})|^2$ e $|\hat{F}_\pm(\frac{\log p}{\pi})|^2$ são $\ll \frac{1}{(\log p)^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} R(\eta V)^{2k} &\ll T(\log T)^2 k^k \left[\left(\sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{V}}} \frac{1}{p} \right)^k + \left(\sum_{p \leq T^{\frac{1+\eta}{2V}}} \frac{1}{p^2} \right)^k \right] \\ &\ll T(\log T)^2 (k \log \log T)^k, \end{aligned}$$

pois $k! \leq k^k$ e as somas parciais até x dos recíprocos dos primos é $\ll \log \log x$. Portanto,

$$R \ll T(\log T)^2 \left(\frac{k \log \log T}{(\eta V)^2} \right)^k.$$

O maior inteiro que k pode assumir é $\lfloor \frac{V}{1+\eta} \rfloor$ e como $\eta = \frac{1}{\log V}$, temos

$$\begin{aligned} R &\ll T(\log T)^2 \left(\frac{k \log \log T (\log V)^2}{V^2} \right)^k \\ &\ll T(\log T)^2 \left(\frac{(\log V)^3 \log \log T}{(1 + \log V)V} \right)^V \\ &\ll T \frac{(\log T)^2 (\log V)^{3V} (\log \log T)^V}{(\log V)^V V^V} \\ &\ll T \exp \left(3V \log \log V + V \log \log \log T - V \log V \right) \\ &\ll T \exp \left(-V \log \frac{V}{\log \log T} + 3V \log \log V \right), \end{aligned}$$

onde usamos que $\frac{(\log T)^2}{(\log V)^V} = \mathcal{O}(1)$, pois o menor valor que V assume é $(\log \log T)^2$. $\square$

Para o resultado principal, começamos com uma definição:

Definição 3.22. Seja T grande e $(\log \log T)^2 \leq V \leq \frac{\log T}{\log \log T}$ fixo. Dizemos que um ponto $t \in [T, 2T]$ é V -típico se todas as seguintes propriedades valem:

(i) Seja $x = T^{\frac{1}{V}}$. Então para todo $\sigma \geq \frac{1}{2}$, temos

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \log \left(\frac{x}{n} \right) \frac{1}{\log x} \right| \leq 2V.$$

- (ii) Fixado um $t \in [T, 2T]$, todo subintervalo de $(t-1, t+1)$ de tamanho $\frac{2\pi V}{\log T}$ contém no máximo $3V$ ordenadas de zeros da função zeta de Riemann (i.e., se $\rho = \beta + iy$ são zeros, então $\#\{\gamma : \gamma \in I \subset (t-1, t+1)\} \leq 3V$, para qualquer subintervalo I com comprimento $\frac{2\pi V}{\log T}$).
- (iii) Todo subintervalo de $(t-1, t+1)$ de tamanho $\frac{2\pi V}{\log V \log T}$ contém no máximo V ordenadas de zeros da função zeta de Riemann.

Caso um dos itens acima não seja satisfeito, dizemos que t é um ponto V -atípico.

A proposição abaixo é de certa forma o resultado do Teorema 3.17, traduzido para a nomenclatura de pontos V -atípicos. A demonstração (que não será apresentada) envolve algumas das etapas da demonstração do Teorema e, em particular, faz uso do lema 3.21.

Proposição 3.23. Assuma a hipótese de Riemann. Seja T grande e $t \in [T, 2T]$. Se $V \geq (\frac{1}{2} + o(1)) \frac{\log T}{\log \log T}$, então todo ponto $t \in [T, 2T]$ é V -típico. Além disso, dados $(\log \log T)^2 \leq V \leq \frac{\log T}{\log \log T}$ e R pontos V -atípicos bem distribuídos: $T \leq t_1 \leq \dots \leq t_R \leq 2T$, com $t_{j+1} - t_j \geq 1$, temos

$$R \ll T \exp \left(-V \log \frac{V}{\log \log T} + 4V \log \log V \right).$$

Em vista de resultados do tipo (3.10), a primeira parte da proposição anterior garante a existência de pontos V -típicos.

O resultado seguinte nos dá informações sobre pontos V -típicos que não estejam muito próximos da linha crítica e de pontos bem próximos.

Proposição 3.24. Assuma a hipótese de Riemann. Seja T grande e suponha que $t \in [T, 2T]$ é V -típico para algum $(\log \log T)^2 \leq V \leq \frac{\log T}{\log \log T}$. Se $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{V}{\log T}$, então para $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, temos

$$-V \log \log V \leq \log |\zeta(\sigma + it)|.$$

Para $\frac{1}{2} < \sigma \leq \sigma_0$, temos

$$-V \log \left(\frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) - 8V \log \log V \leq \log |\zeta(\sigma + it)|.$$

Por último, vamos mostrar uma desigualdade cuja demonstração pode ser obtida de forma elementar.

Proposição 3.25. Sejam A, C números positivos tais que $A \geq 4C^4 + 1$. Então

$$AV - V \log V + CV \log \log V \leq e^A A^C,$$

para todo $V > e^C$.

Essa é a *proposição* 23 de [4].

Demonstração do Teorema 3.15. Assim como nos tratamentos anteriores, vamos utilizar a Fórmula de Perron, integrando sobre o segmento de reta $1 + \frac{1}{\log x} - i[x]$ a $1 + \frac{1}{\log x} + i[x]$. Vamos deformar esse contorno da seguinte forma:

- Seja $x_0 = [\exp(\sqrt{\log x})]$. Então um segmento de reta vertical será o que liga os pontos $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} - ix_0$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} + ix_0$ e chamaremos esse segmento que está mais a esquerda de L ;

- Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \leq n \leq [x] - 1$ e seja V_n o menor inteiro do intervalo $[(\log \log n)^2, \frac{\log n}{\log \log n}]$ tal que todo ponto em $[n, n+1]$ é V_n -típico. Então para cada V_n , teremos um segmento ligando os pontos $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + in$ e $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)$. Similarmente para o conjugado, teremos um segmento ligando $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} - i(n+1)$ e $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} - in$;
- Os segmentos de retas horizontais ligarão cada ponta dos múltiplos segmentos verticais. Portanto, para cada n e V_n do item anterior, teremos segmentos conectando os pontos $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)$ e $\frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log x} + i(n+1)$;
- Para os pontos extremos, se $n+1 = [x]$, então o segmento liga $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i[x]$ ao ponto do segmento original de integração $1 + \frac{1}{\log x} + i[x]$ e se $x_0 = n$, temos o segmento que une $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} + ix_0$ e $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + ix_0$. Uma construção similar é feita nos pontos conjugados.

Essa construção mostra que o contorno nesse caso é definitivamente mais complexo que os resultados provados nas subseções anteriores. Antes bastava construir um retângulo para estimar a integral desejada e agora temos vários segmentos verticais e horizontais para serem estimados, formando uma espécie de escada. Entretanto fica claro o poder e amplitude de aplicação da Fórmula de Perron, que é uma ferramenta central no argumento.

Assim, através do contorno descrito anteriormente, a princípio queremos então calcular a seguinte integral

$$\int_{1+\frac{1}{\log x}-i[x]}^{1+\frac{1}{\log x}+i[x]} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds.$$

Estimativa de $|L|$. Se $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log t}$, temos pelo lema 3.13 usado na subseção anterior que:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| &\leq \frac{C \log t}{\log \log t} \log \frac{e}{(\operatorname{Re}(s) - \frac{1}{2}) \log \log t} \\ &= \frac{C \log t}{\log \log t} \log \frac{e \log x}{\log \log t} \\ &\ll \frac{\log t}{\log \log t} (1 + \log \log x - \log \log \log t) \\ &\ll \log t^{\log \log x}, \end{aligned}$$

portanto $|\frac{1}{\zeta(s)}| \ll t^{\log \log x}$, quando $t \rightarrow \infty$. Sobre L temos $|t| \leq x_0$, logo a contribuição dessa integral é

$$\begin{aligned} |L| &= \left| \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} - ix_0}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} + ix_0} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} \frac{t^{\log \log x}}{t} dt \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} x_0^{\log \log x} \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} \log \log x). \end{aligned}$$

Estimativa dos segmentos verticais. Fixado um n no intervalo $[x_0, [x] - 1]$, queremos estimar as integrais sobre os segmentos que ligam pontos do tipo $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + in$ a $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)$.

Essencialmente vamos integrar verticalmente no intervalo $[n, n+1]$, onde todos os pontos são V_n -típicos. Além disso, $n \leq [x] - 1 < x$ implica que $\frac{1}{\log x} \leq \frac{1}{\log n}$ e consequentemente $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} \leq \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log n} = \sigma_0$. Portanto, aplicando a segunda parte da proposição 3.24, temos

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \exp \left(V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 8V_n \log \log V_n \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + in}^{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq x^{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x}} \exp \left(V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 8V_n \log \log V_n \right) \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{t} \right| dt \\ &\ll \frac{x^{\frac{1}{2}}}{n} \exp(V_n) \exp \left(V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 8V_n \log \log V_n \right) \\ &\ll \frac{x^{\frac{1}{2}}}{n} \exp \left(V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 9V_n \log \log V_n \right). \end{aligned}$$

O mesmo vale para os segmentos ligando os pontos conjugados.

Estimativa dos segmentos horizontais. Considere agora os segmentos que ligam os pontos da forma $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)$ e $\frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log x} + i(n+1)$.

Observe que, como $n \leq [x] - 1$, então $n+1 \leq [x] \leq x$ e consequentemente $\frac{1}{\log x} \leq \frac{1}{\log n}$. Assim, dependendo do incremento de V_{n+1} em comparação com a diferença entre $\log x$ e $\log n$, temos que $\frac{V_n}{\log n} \in (\frac{V_n}{\log x}, \frac{V_{n+1}}{\log x})$ ou $\frac{V_n}{\log n} \geq \frac{V_{n+1}}{\log x}$. De todo modo, a parte imaginária dos números complexos a serem integrados será sempre $(n+1)$, logo podemos usar a proposição 3.24 para cotar superiormente $|\frac{1}{\zeta(s)}|$ nesse intervalo, considerando os $\sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log n}$ e $\sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log(n+1)}$.

Dessa forma, para todo $\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log n} = \sigma_0$, temos

$$\frac{\sigma_0 - 1/2}{\sigma - 1/2} \leq \frac{V_n}{\log n} \frac{\log x}{V_n} = \frac{\log x}{\log n}.$$

Então pela proposição,

$$\log \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 8V_n \log \log V_n.$$

Para os $\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log n}$,

$$\log \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq V_n \log \log V_n.$$

Portanto, para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) \in (\frac{1}{2}, 2]$ e $\operatorname{Im}(s) = n+1$, tomando $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log n}$, a proposição nos dá

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \ll \exp \left(V_n \log \left(\frac{\log x}{\log n} \right) + 9V_n \log \log V_n \right) := A.$$

Similarmente, se tomamos agora $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log(n+1)}$, obtemos

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \ll \exp \left(V_{n+1} \log \left(\frac{\log x}{\log(n+1)} \right) + 9V_{n+1} \log \log V_{n+1} \right) := B.$$

Estimando então a integral sobre o segmento horizontal, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x} + i(n+1)}^{\frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log x} + i(n+1)} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{n+1} \int_{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x}}^{\frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log x}} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| x^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{1}{n} (A+B) \int_{\frac{1}{2} + \frac{V_n}{\log x}}^{\frac{1}{2} + \frac{V_{n+1}}{\log x}} x^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{A+B}{n} \frac{x^{\frac{1}{2}} (\exp(V_{n+1}) - \exp(V_n))}{\log x} \\ &\ll \frac{x^{\frac{1}{2}}}{n} (A+B), \end{aligned}$$

onde usamos que $\exp(V_{n+1}) - \exp(V_n) \leq 1$, pois da forma que V_n e V_{n+1} foram escolhidos (segundo item do início da demonstração), $V_n \leq \log n$ e $V_{n+1} \leq \log(n+1)$, logo $\exp(V_{n+1}) - \exp(V_n) \leq 1$.

Estimados os segmentos, lembramos que n são números naturais que percorrem o intervalo $x_0 \leq n \leq [x] - 1$, onde $x_0 = [\exp(\sqrt{\log x})]$. Vamos dividir esse intervalo em blocos diádicos e seja

$[T, 2T]$ um desses blocos. Primeiro, somando as duas estimativas anteriores (para os segmentos horizontais e verticais nesse intervalo) temos que a contribuição dessas partes é

$$\ll \frac{x^{\frac{1}{2}}}{T} \sum_{V=(\log \log T)^2}^{\frac{\log T}{\log \log T}} \exp \left(V \log \left(\frac{\log x}{\log T} \right) + 9V \log \log V \right) \cdot N, \quad (3.16)$$

onde N é a quantidade de números no intervalo diádico os quais devemos considerar na soma, isto é, $N = \#\{n \in [T, 2T] : V_n = V\}$. Podemos dividir assim pois cada V_n -típico/atípico tem essa mesma contribuição, então consideramos todos os N pontos de cada uma dessas formas no intervalo desejado e multiplicamos por esse valor.

Naturalmente nosso objetivo agora é estimar a proporção desses V_n e como eles contribuem nesses blocos. Ou seja, encontrar boas estimativas para N .

Estimando pequenos valores. Para os V tal que $V \leq 2(\log \log T)^2$, temos a seguinte contribuição em (3.16):

$$\begin{aligned} &\ll x^{\frac{1}{2}} \exp \left(2(\log \log T)^2 \log \left(\frac{\log x}{\log T} \right) + 18(\log \log T)^2 \log \log \log T \right) \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log \log x)^2 \log(\log x)^2) \frac{\exp(18(\log \log T)^2 \log \log \log T)}{\exp(2(\log \log T)^3)} \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log \log x)^4), \end{aligned}$$

onde aqui usamos a cota superior trivial $N \leq T$.

Estimando valores grandes. No início da demonstração, tomamos V_n como sendo o menor inteiro em $[(\log \log n)^2, \log n(\log \log n)^{-1}]$ tal que todo ponto de $[n, n+1]$ é V_n -típico, assim algum ponto em $[n, n+1]$ é $(V_n - 1)$ -atípico (pois caso contrário V_n não seria o menor inteiro satisfazendo a condição).

Notamos que, se $t_n \in [n, n+1]$ e $t_m \in [m, m+1]$, supondo sem perda de generalidade que $n < m$, temos que $t_m - t_n \geq m - (n+1) \geq 1$. Assim, podemos tomar pontos $(V_n - 1)$ -atípicos, bem distribuídos (no sentido da proposição 3.23). Tomando então tais pontos e $V_n = V$, pela proposição 3.23, o número N de pontos $(V_n - 1)$ -atípicos é

$$N \ll T \exp \left(-V \log \left(\frac{V}{\log \log T} \right) + \log \left(\frac{V}{\log \log T} \right) + 4V \log \log V \right).$$

Assim, a estimativa desses valores tem contribuição na equação (3.16) de

$$\begin{aligned}
&\ll x^{\frac{1}{2}} \sum_{V=(\log \log T)^2}^{\frac{\log T}{\log \log T}} \exp \left(V \log \left(\frac{\log x}{\log T} \right) - V \log \left(\frac{V}{\log \log T} \right) + \log \left(\frac{V}{\log \log T} \right) + 13V \log \log V \right) \\
&\ll x^{\frac{1}{2}} \sum_{V=(\log \log T)^2}^{\frac{\log T}{\log \log T}} V \exp \left(V \log \left(\frac{\log x \log \log T}{\log T} \right) - V \log V + 13V \log \log V \right) \\
&\ll x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2 \sum_{V=(\log \log T)^2}^{\frac{\log T}{\log \log T}} \exp \left(\frac{\log x \log \log T}{\log T} \left(\log \left(\frac{\log x \log \log T}{\log T} \right) \right)^{13} \right),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos a proposição 3.25, com $A = \frac{\log x \log \log T}{\log T}$ e $C = 13$.

Como $[\exp(\sqrt{\log x})] = x_0 \leq T < x$, temos que $\frac{\log \log T}{\log T} \ll \frac{\log \log x}{(\log x)^{\frac{1}{2}}}$. Assim, a equação (3.16) é

$$\begin{aligned}
&\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log \log x)^4) + x^{\frac{1}{2}} (\log x)^3 \exp \left(\frac{\log x \log \log x}{(\log x)^{\frac{1}{2}}} \left(\log \left(\frac{\log x \log \log x}{(\log x)^{\frac{1}{2}}} \right) \right)^{13} \right) \\
&\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} \log \log x (\log \log x)^{13} + 3 \log \log x) \\
&\ll x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} (\log \log x)^{14} + 3 \log \log x) \\
&\ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}+\epsilon}),
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Por fim, vamos estimar o erro da Fórmula de Perron e usar as estimativas anteriores.

Estimativa do Erro. Aqui estamos aplicando a Fórmula de Perron com $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\log x}$ e $T = [x]$. Note que $x^{\sigma_0} = xe$. Assim, de forma análoga ao cálculo que fizemos para o erro na demonstração do Teorema 3.5 no início desse capítulo, temos

$$\begin{aligned}
\text{Erro}(x) &\ll \sum_{\substack{\frac{x}{2} < n < 2x \\ n \neq x}} |\mu(n)| \min \left\{ 1, \frac{x}{T|x-n|} \right\} + \frac{4^{\sigma_0} - x^{\sigma_0}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma_0}} \\
&\ll \frac{x \log x}{T} + \frac{4^{1+\frac{1}{\log x}} - xe}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{1+\frac{1}{\log x}}} \\
&\ll \frac{x \log x}{[x]} + \frac{4^{1+\frac{1}{\log x}} - xe}{[x]} \\
&\ll \log x.
\end{aligned}$$

Concluindo,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \mu(n) &= \int_{1+\frac{1}{\log x}-i[x]}^{1+\frac{1}{\log x}+i[x]} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + \text{Erro}(x) \\ &\ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}} \log \log x) + x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}+\epsilon}) + \log x \\ &\ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2}} \exp((\log x)^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \forall \epsilon > 0.\end{aligned}$$

□

3.3 Uma nota sobre as estimativas incondicionais

Quando estamos tratando sobre estimativas condicionais das somas parciais da Função de Möbius, estamos assumindo que $\zeta(s) \neq 0$ para $\text{Re}(s) \in (\frac{1}{2}, 1)$, isto é, a hipótese de Riemann. Naturalmente, ao tratar de estimativas incondicionais, procuramos entender como é a distribuição dos zeros da Função Zeta de Riemann na faixa crítica. A região em que a função zeta não se anula é o que chamamos de *região livres de zeros da função zeta de Riemann*.

A função zeta não possui zeros no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 1\}$ e é possível mostrar que $\zeta(s) \neq 0$ para $\text{Re}(s) \geq 1 - g(t)$, onde $g(t)$ é uma função de $\text{Im}(s) = t$, ou seja, estamos interessados em ver o comportamento vertical dessa função. No estudo desse problema, queremos que $g(t)$ seja “maior” possível e a taxa com a qual essa função tende a zero quando $|t| \rightarrow \infty$ seja minimizada, pois é a partir daí que obtemos uma estimativa para $\frac{1}{\zeta(s)}$ e isso é essencial para a aplicação no problema de encontrar melhores estimativas incondicionais, como ficará mais claro ao longo desta seção.

O método que vamos descrever é uma abordagem clássica, possuindo destaque e importância no fato de sua aplicabilidade ser bastante flexível: podemos aplicar o mesmo método para provar o célebre Teorema do Número Primo; dar estimativas para as somas parciais de diversas funções, como por exemplo $\frac{\Lambda(n)}{n^{it}}$ e $\frac{\mu(n)}{n}$; mostrar resultados como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} = 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} = 0$, onde $\varphi(n)$ é a função de Euler, que conta o número de inteiros $1 \leq k \leq n$ tal que k e n são primos relativos. Esses são somente alguns poucos exemplos da vasta possibilidade de aplicações.

Observação 3.26. Até hoje não possuímos nenhum resultado do tipo $g(t) = \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ constante. Se fosse esse o caso, teríamos que a Função Zeta de Riemann não possui zeros em uma região do tipo $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 1 - \epsilon\}$. Todas as regiões livres de zeros que conhecemos tem um decaimento logaritmico, se aproximando da reta $1 + it$ a medida que $|t| \rightarrow \infty$.

3.3.1 Regiões livre de zeros da Função Zeta de Riemann

Em contrapartida ao que foi discutido sobre a utilidade da ferramenta que será apresentado, no caso das somas parciais da Função de Möbius, as limitações do método recaem na dificuldade em melhorar esse tipo de região onde a função zeta não possui zeros.

Em 1899, de la Vallée Poussin [29] mostrou que existe uma constante $c > 0$ tal que $\zeta(s) \neq 0$ na região $\text{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{\log |t|}$. Essa é conhecida como *região livre de zeros clássica*. A partir desse resultado, temos que $\frac{1}{\zeta(s)} \ll \log |t|$, para $\text{Re}(s)$ nessa mesma região (a prova desse fato envolve teoremas clássicos sobre funções analíticas - Desigualdade de Jensen, Lema de Borel-Carathéodory, aproximação de funções do tipo $\frac{f'}{f}$, com f analítica, por somas envolvendo seus zeros e, posteriormente, encontrando estimativas para a função $\frac{\zeta'}{\zeta}$. Veja por exemplo [24], capítulo 6). Com esses resultados preliminares, mostrar que

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll x \exp(-c\sqrt{\log x})$$

é simplesmente uma aplicação da Fórmula de Perron sobre o segmento que liga $1 + \frac{1}{\log x} \pm iT$ e modificando o contorno para integrar sobre segmentos que ligam os pontos $1 + \frac{1}{\log x} - iT$, $1 + \frac{1}{\log x} + iT$, $1 - \frac{c}{\log T} + iT$, $1 - \frac{c}{\log T} - iT$.

Observe que, comparado ao melhor resultado atual apresentado na introdução desse trabalho, o expoente do termo x não foi alterado. Ou seja, qualitativamente a região clássica já nos dá uma boa estimativa para esse problema.

Avanços importantes sobre essas regiões foram concretizados na primeira metade do século passado com Littlewood (1922, não publicado), que melhorou a região para $\text{Re}(s) \geq 1 - \frac{c \log \log |t|}{\log |t|}$ e Chudakov (ver nota 6.3 em [24]) provando em 1936 que a função zeta não tem zeros em $\text{Re}(s) \geq 1 - c(\log |t|)^{-(10/11+\epsilon)}$, $\forall \epsilon > 0$. Em particular, o resultado de Chudakov foi obtido se baseando em um método desenvolvido por Vinogradov em 1935, para estimar somas do tipo

$$\sum_{n=1}^N \exp(2\pi i f(n)),$$

onde f é uma função real. Esse tipo de soma exponencial finita é conhecida como *Soma/Somatório de Weyl*. O livro de Iwaniec-Kowalski ([20], Capítulo 8) aborda esse tópico de forma elegante e detalhada, separada em sete passos sistematizados e exemplos de aplicações do método.

O matemático russo Korobov trabalhou em cima desse tipo de problema e apresentou alguns métodos novos que também permitiram melhoras, tendo posteriormente também colaborado com Vinogradov. Hoje esse tipo de região é chamada *região livre de zeros de Vinogradov-Korobov*.

Recentemente, Kevin Ford [14] provou melhoras explícitas na constante c da melhor região conhecida hoje:

$$\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{(\log |t|)^{2/3} (\log \log |t|)^{1/3}}.$$

4. RESULTADO PRINCIPAL: O TRABALHO DE AUREL WINTNER

Neste capítulo iremos demonstrar o teorema de Wintner, contido em [30], sobre as oscilações das somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher (1.1). Esse (no texto é o Teorema 4.11) é o resultado principal do presente trabalho pois ele define um marco nos estudos das somas parciais de funções multiplicativas aleatórias no âmbito da Teoria Analítica dos Números.

4.1 O Teorema das Séries de Kolmogorov

Iniciamos a primeira seção do Capítulo 4 com o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Teorema da 1-série de Kolmogorov). Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Se $\mathbf{E}X_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}X_n < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge quase certamente.

Para provar o teorema vamos usar os seguintes lemas:

Lema 4.2 (Desigualdade maximal de Kolmogorov). Seja $(X_k)_{k=1}^n$ sequência de variáveis aleatórias independentes tal que $\mathbf{E}X_i = 0$ e $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$, para todo $i \leq n$. Denote $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Então temos

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E}S_n^2}{\epsilon^2},$$

para todo $\epsilon > 0$.

Demonstração. Defina os eventos $A = \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon\}$ e $A_k = \{|S_j| < \epsilon, \forall j < k, |S_k| \geq \epsilon\}$.

Observe que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ e essa união é disjunta, logo $\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$ e temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S_n^2 &\geq \mathbf{E}(S_n^2 \mathbb{1}_A) = \mathbf{E}\left(S_n^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}((S_k + (X_{k+1} + \cdots + X_n))^2 \mathbb{1}_{A_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} + (X_{k+1} + \cdots + X_n)^2 \mathbb{1}_{A_k} + 2S_k(X_{k+1} + \cdots + X_n) \mathbb{1}_{A_k}) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\epsilon^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) = \epsilon^2 \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon) = \mathbf{P}(A) \leq \frac{\mathbf{E}S_n^2}{\epsilon^2}$. □

Lema 4.3. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias. Se para todo $\epsilon > 0$, temos $\mathbf{P}(\max_{n \leq k \leq N} |X_k - X_n| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} 0$, então existe uma v.a. X tal que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$, quase certamente.

Demonstração. Fixe $p \in \mathbb{N}$ e tome $\epsilon = \frac{1}{2^p}$. Por hipótese existe um n_p tal que se $n, N \geq n_p$, então $\mathbf{P}(\max_{n \leq k \leq N} |X_k - X_n| \geq \frac{1}{2^p}) \leq \frac{1}{2^p}$. Supondo sem perda de generalidade que n_p é uma sequência de pontos crescentes, podemos tomar $n = n_p$ e $N = n_{p+1}$. Assim,

$$\mathbf{P}\left(\max_{n_p \leq k \leq n_{p+1}} |X_k - X_{n_p}| \geq \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^p}.$$

Seja $q \in \mathbb{N}$ e defina $A_q = \{\omega : \cup_{p \geq q} \max_{n_p \leq k \leq n_{p+1}} |X_k - X_{n_p}| \geq \frac{1}{2^p}\}$. Então pela desigualdade anterior,

$$\mathbf{P}(A_q) \leq \sum_{p \geq q} \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^q}.$$

Note que A_q é decrescente ($A_q \supseteq A_{q+1}$), então $\mathbf{P}(A_q) = \mathbf{P}(\cap_{q \geq 1} A_q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_q) \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{2}{2^q} = 0$. Ou seja, o conjunto $A = (\cap_{q \geq 1} A_q)^c$ é tal que $\mathbf{P}(A) = 1$. Em outras palavras, o conjunto dos ω tal que $(X_n(\omega))$ é uma sequência de Cauchy tem probabilidade um, logo $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quase certamente. $\square$

Demonstração do Teorema 4.1. Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes, como na hipótese do teorema. Queremos mostrar que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k$ existe quase certamente. Tome a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pelo lema 4.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{n \leq k \leq N} |S_k - S_n| \geq \epsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\max_{n \leq k \leq N} \left| \sum_{i=n+1}^k X_i \right| \geq \epsilon\right) = \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq N-n} \left| \sum_{i=n+1}^{k+n} X_i \right| \geq \epsilon\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq N-n} \left| \sum_{i=1}^k X_{i+n} \right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{N-n} X_{i+n})^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^{N-n} \mathbf{E}(X_{i+n})^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=n+1}^N \mathbf{E}(X_i)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois $\mathbf{E}(X_n)^2 = \text{Var}X_n$. Portanto S_n converge quase certamente, pelo lema 4.3. $\square$

4.2 Controle de séries de Dirichlet com coeficientes aleatórios em faixas verticais

Nesta seção nosso objetivo será entender o crescimento vertical de séries de Dirichlet com coeficientes sendo variáveis aleatórias independentes, isto é, $F(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\sigma+it}}$, quando $t \rightarrow \infty$, onde $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são nossas v.a. e $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Carlson [7] provou nessas linhas que $F(\sigma + it) \ll \sqrt{\log t}$, quando $t \rightarrow \infty$, quase certamente.

O teorema a seguir melhora o resultado obtido por Carlson. Ao longo de toda esta seção, usaremos a letra p para nos referirmos ao momento de uma variável aleatória.

Teorema 4.4 ([1], Teorema 3.1, simplificado). Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e uniformemente limitadas (existe uma constante $C > 0$ tal que $|X_n| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que $\mathbf{E}X_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sejam também $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s}$ e $\sigma_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $\forall \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$,

$$F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{1-\sigma} \log \log t,$$

quase certamente.

Antes de iniciar as preparações para a demonstração do teorema acima, fazemos algumas observações sobre o comportamento de séries aleatórias, dadas as hipóteses do Teorema 4.4.

Observação 4.5. Se $|X_n| \leq C$ e $\mathbf{E}X_n = 0$, então

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \left(\frac{X_n}{n^s} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mathbf{E}X_n^2}{n^{2s}} \right| \leq C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} < \infty,$$

para todo $\sigma > \frac{1}{2}$. Portanto, pelo Teorema 4.1, $F(s)$ converge para todo $\sigma > \frac{1}{2}$, quase certamente e vamos denotar por $\tilde{\Omega}$ o conjunto dos pontos onde há convergência, isto é, $\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : F(s) \text{ converge em } \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}\}$ e $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1$.

Observação 4.6. Note que se $\mathbf{E}(F(s)) = \mathbf{E}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}X_n}{n^s}$ converge para todo $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, então o Teorema 4.4 pode ser aplicado a $F(s) - \mathbf{E}(F(s))$. Em particular usaremos esse fato no Capítulo 5.

A prova do Teorema 4.4 segue a mesma ideia apresentada em [1] e é uma consequência direta do seguinte lema:

Lema 4.7. Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatorias como no Teorema 4.4 e defina $\nu(\epsilon^{-1})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{\mathbf{E}|X_n|>0\}}}{n^{1+\epsilon}}$. Então para cada $\sigma > \frac{1}{2}$, uniformemente para todo $x \in [\sigma, 1]$, temos

$$F(x + it) \ll_x (\log t)^{1-x} \nu(\log \log t)^2,$$

quase certamente.

4.2.1 Preliminares

Relembrando que aqui a letra p será utilizada para representar o momento de uma variável aleatória, começamos então com o seguinte:

Teorema 4.8 (Desigualdade de Marcinkiewicz e Zygmund). Seja $p \geq 1$. Seja também $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ e $\mathbf{E}X_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Então existem A_p e B_p que não dependem das variáveis aleatórias, tais que

$$A_p \left\| \left(\sum_{n=1}^k X_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=1}^k X_n \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{n=1}^k X_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p,$$

onde $\|X\|_p = (\mathbf{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Em particular se $\lambda(p) = \sqrt{p}$, existe uma constante $B > 0$ tal que a desigualdade superior é válida se tomamos $B_p = B\lambda(p)$, para $p \geq 2$. Isto é, $\exists B$ tal que,

$$\mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^k X_n \right|^p \leq B^p p^{\frac{p}{2}} \mathbf{E} \left(\sum_{n=1}^k X_n^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (4.1)$$

Observação 4.9. Para a prova dessa desigualdade, referimos a [9] (Teorema 2, p. 386). Especificamente, ao final da demonstração, os autores comentam que a constante $B_p = \frac{5}{2}\bar{B}_p$, onde $\bar{B}_p$ é a constante da desigualdade de Khintchine (Teorema 1, p. 384). Essa última por sua vez é tal que $\bar{B}_p \leq k^{\frac{1}{2}}$, onde k é o menor inteiro maior ou igual a $\frac{p}{2}$. Portanto, $k^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{p}{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \leq p^{\frac{1}{2}}$ e então temos a equação (4.1).

Agora observe que a função $\nu(\epsilon^{-1})^2$ definida no lema 4.7 converge absolutamente para todo $\epsilon > 0$. Além disso,

$$\nu(\epsilon^{-1})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{\mathbf{E}|X_n|>0\}}}{n^{1+\epsilon}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \zeta(1+\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1), \quad (4.2)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A grosso modo, a demonstração do Teorema 4.4 segue os seguintes passos: primeiro vamos controlar o crescimento do p -ésimo momento da série $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s}|$, para valores de s tais que a parte real está próxima de $\frac{1}{2}$. Para isso usaremos (4.1) acima e o lema de Fatou.

O segundo passo é entender como a série $F(s)$ se comporta quando integramos sobre retângulos com linhas verticais próximas (à direita) dos pontos $\frac{1}{2} + it$ e a direita de $1 + it$. A analiticidade, juntamente com a fórmula integral de Cauchy é essencial.

O terceiro passo é mostrar que o máximo que $|F(s)|$ atinge em retângulos é limitado pelos parâmetros que estamos interessados (a função λ , a função ν e a constante C).

Por fim, aplicamos o Teorema dos Três Círculos de Hadamard em círculos escolhidos de forma que o intermediário pode ser tomado arbitrariamente próximo da reta $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$.

4.2.2 Lemas técnicos e auxiliares

Demonstração do Lema 4.7. Começamos com o seguinte:

Afirmção 1. Existe uma constante $D > 0$ tal que para todo $p \geq 2$, $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s} \right|^p \leq D^p p^{\frac{p}{2}} \nu(\epsilon^{-1})^p,$$

onde $s = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} + it$.

Prova da afirmação 1. Seja $s = \sigma + it = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} + it$ e fixe $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s}$ converge quase certamente (pela observação 4.5), temos pelo Lema de Fatou:

$$\mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s} \right|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^s} \right|^p.$$

Agora observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^s} &= \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma} n^{it}} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \exp(-it \log n) \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} (\cos(-t \log n) + i \sin(-t \log n)) \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \cos(t \log n) + i \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \sin(-t \log n). \end{aligned}$$

Pela convexidade de x^p ($p \geq 2$),

$$\left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^s} \right|^p \leq 2^{p-1} \left(\left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \cos(t \log n) \right|^p + \left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \sin(t \log n) \right|^p \right). \quad (4.3)$$

Como $(\frac{\cos(t \log n)}{n^{\sigma}})^2 \leq \frac{1}{n^{2\sigma}} = \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$, temos por (4.1) e usando que $|X_n| \leq C$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \cos(t \log n) \right|^p &\leq B^p p^{\frac{p}{2}} \mathbf{E} \left(\sum_{n=1}^k \frac{X_n^2}{n^{2\sigma}} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq B^p p^{\frac{p}{2}} C^p \mathbf{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{|X_n|>0\}}}{n^{1+\epsilon}} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq B^p p^{\frac{p}{2}} C^p \nu(\epsilon^{-1})^p. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Similarmente,

$$\mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^k \frac{X_n}{n^{\sigma}} \sin(t \log n) \right|^p \leq B^p p^{\frac{p}{2}} C^p \nu(\epsilon^{-1})^p. \quad (4.5)$$

Assim, pela linearidade da esperança aplicada em (4.3) e juntando os resultados (4.4) e (4.5), temos

$$\mathbf{E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\sigma+it}} \right|^p \leq 2^p B^p p^{\frac{p}{2}} C^p \nu(\epsilon^{-1})^p.$$

concluimos tomando $D = 2BC$. □

Afirmção 2. Seja $\epsilon = \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\log \sqrt{p}}\}$. Então existe uma constante $H_1 > 0$ tal que,

$$\mathbf{P}(\max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} > H_1 \sqrt{p} \nu(\epsilon^{-1})) \leq \frac{1}{2^{p-1}},$$

onde R_1 é o retângulo definido por $R_1 = [\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{4}{3}] \times [-e^{p-2}, e^{p-2}]$.

Prova da afirmação 2. Sejam ϵ como na hipótese, $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \epsilon$, $p \geq 2$ e $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$. Considere o retângulo $R_2 = [\sigma, \sigma+1] \times [-\tau', \tau]$, onde $\tau', \tau \in [e^{p-1}, e^p]$. Assim, $R_1 \subsetneq R_2$ e seja $R_2 = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$, onde I_1 é a reta vertical que passa por $\sigma + 1$; I_3 é a reta vertical oposta que passa por σ ; I_2 é a reta horizontal que passa por $\text{Im}(s) = \tau$; e I_4 a reta horizontal paralela a I_2 , passando por $\text{Im}(s) = -\tau'$.

Como $F(s)$ é analítica para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, temos que $(F(s))^p$ também é analítica nesse semiplano, para todo $p \in \mathbb{N}$. Portanto, pela fórmula integral de Cauchy (supondo orientação anti-horária):

$$F(s)^p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_2} \frac{F(z)^p}{z-s} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^4 \int_{I_i} \frac{F(z)^p}{z-s} dz,$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ e todo $s \in R_1$. Assim,

$$|F(s)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \int_{I_i} \frac{|F(z)|^p}{|z-s|} |dz|.$$

Agora observe que a distância entre R_1 e R_2 é, no mínimo, $\frac{\epsilon}{2}$ e como $s \in R_1$ e $z \in \partial R_2$, segue que

$$\max_{s \in R_1} \{|F(s)|^p\} \leq \frac{1}{\pi \epsilon} \sum_{i=1}^4 \int_{I_i} |F(z)|^p |dz|. \quad (4.6)$$

Pela afirmação 1, sobre I_3 temos

$$\mathbf{E}|F(\sigma + it)|^p \leq (D\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p.$$

Sobre I_1 , usando que as variáveis são uniformemente limitadas, temos

$$|F(\sigma + 1 + it)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_n|}{n^{\frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{2}}} \right)^p \leq C^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{|X_n| > 0\}}}{n^{\frac{3}{2}}} \right)^p = (C\nu(2)^2)^p. \quad (4.7)$$

Seja $H = 2eD \max\{2, \nu(2)^2\}$, lembrando que $D = 2BC$. Defina os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \tilde{\Omega} \cap \left\{ \int_{-e^p}^{e^p} |F(\sigma + it)|^p dt \geq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \right\} \\ S_2 &:= \tilde{\Omega} \cap \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma+1} \int_{-e^p}^{e^p} |F(x + it)|^p dx dt \geq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \right\}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\Omega}$ foi definido na observação 4.5. Pelo Teorema de Fubini,

$$\mathbf{E} \int_{-e^p}^{e^p} |F(\sigma + it)|^p dt = \int_{-e^p}^{e^p} \mathbf{E} |F(\sigma + it)|^p dt \leq 2(eD\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p.$$

Também temos,

$$\mathbf{E} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \int_{-e^p}^{e^p} |F(x + it)|^p dx dt = \int_{\sigma}^{\sigma+1} \int_{-e^p}^{e^p} \mathbf{E} |F(x + it)|^p dt dx \leq 2(eD\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p.$$

Assim, pela Desigualdade de Markov,

$$\mathbf{P}(S_1) \leq \frac{2(eD\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p}{(H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p} = \frac{2(eD)^p}{(2eD \max\{2, \nu(2)^2\})^p} = \frac{1}{2^{p-1} \max\{2, \nu(2)^2\}^p} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Similarmente, $\mathbf{P}(S_2) \leq \frac{1}{2^p}$. Se $S = \tilde{\Omega} \cap (S_1 \cup S_2)^c$, então temos que $\mathbf{P}(S) \geq 1 - \frac{1}{2^{p-1}}$ e para $\omega \in S$, temos

$$\int_{-e^p}^{e^p} |F(\sigma + it)|^p dt < (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \quad (4.8)$$

$$\int_{\sigma}^{\sigma+1} \int_{-e^p}^{e^p} |F(x + it)|^p dx dt < (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p. \quad (4.9)$$

Suponha que para cada $\omega \in S$, podemos escolher $\tau_{\omega}, \tau'_{\omega} \in [e^{p-1}, e^p]$. Como $\tau_{\omega}, \tau'_{\omega} \leq e^p$, na reta vertical I_3 temos por (4.8):

$$\int_{I_3} |F(z)|^p |dz| \leq \int_{-e^p}^{e^p} |F(\sigma + it)|^p dt < (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p.$$

Em I_1 , por (4.7):

$$\int_{I_1} |F(z)|^p |dz| \leq \int_{-e^p}^{e^p} |F(\sigma + 1 + it)|^p dt \leq 2(eC\nu(2)^2)^p \leq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p.$$

De forma similar, por (4.9) temos para $i = 2, 4$ que $\int_{I_i} |F(z)|^p |dz| < (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p$. Como $\epsilon = \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\log \sqrt{p}}\}$, temos que $\epsilon^{-1} = \max\{3, \log \sqrt{p}\}$. Assim,

$$M = \sup_{\substack{p \geq 2 \\ p \in \mathbb{N}}} \{\epsilon^{-\frac{1}{p}}\} < \infty.$$

Seja $H_1 = 4MH$. Pelas estimativas anteriores das integrais sobre o retângulo R_2 e por (4.6), para cada $\omega \in S$,

$$\begin{aligned} \max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} &\leq \left(\frac{1}{\pi\epsilon} \sum_{i=1}^4 \int_{I_i} |F(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{4}{\epsilon} (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 4^{\frac{1}{p}} \epsilon^{-\frac{1}{p}} H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}) \\ &\leq H_1 \sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}(\max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} > H_1 \sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1})) &= \mathbf{P}(\max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} \leq H_1 \sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1})) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2^{p-1}}, \end{aligned}$$

o que implica o resultado da afirmação.

Resta mostrar que de fato existem $\tau_\omega, \tau'_\omega \in [e^{p-1}, e^p]$, tal que $\int_{I_i} |F(z)|^p |dz| \leq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p$, para $i = 2, 4$. Isto é, queremos mostrar que o conjunto

$$\left\{ t \in [e^{p-1}, e^p] : \int_{\sigma}^{\sigma+1} |F(x+it)|^p dx \leq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \right\},$$

é não vazio. Denote o conjunto acima por A e seja $B := \{t \in [e^{p-1}, e^p] : \int_{\sigma}^{\sigma+1} |F(x+it)|^p dx > (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p\}$. Então temos que $\text{meas}(A) + \text{meas}(B) = \text{meas}(A \cup B) = e^p - e^{p-1} > 1$, onde meas é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p \text{meas}(B) &\leq \int_{e^{p-1}}^{e^p} \left(\int_{\sigma}^{\sigma+1} |F(x+it)|^p dx \right) d(m(t)) \\ &\leq \int_{-e^p}^{e^p} \int_{\sigma}^{\sigma+1} |F(x+it)|^p dx dt \\ &\leq (H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (4.9). Como a constante $(H\sqrt{p}\nu(\epsilon^{-1}))^p > 0$, obtemos que $0 \leq 1 - \text{meas}(B) < \text{meas}(A)$. $\square$

Afirmção 3. Seja $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \sqrt{\log t}}$ e considere o retângulo $R_t = [\sigma, \frac{4}{3}] \times [-t, t]$. Então para quase todo $\omega \in \Omega$, existe t_0 tal que $\forall t \geq t_0$, temos

$$\max_{s \in R_t} \{|F(s)|\} \leq H_2 \sqrt{\log t} \nu(\log \sqrt{\log t}),$$

onde $H_2 = H_2(C, \nu)$.

Prova da afirmação 3. Utilizando o resultado da afirmação 2, temos

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{P}(\max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} > H_1 \sqrt{p} \nu(\epsilon^{-1})) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} < \infty,$$

onde $R_1 = [\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{4}{3}] \times [-e^{p-2}, e^{p-2}]$. Então pelo lema de Borel-Cantelli, se $A_p = \{\omega \in \Omega : \max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} > H_1 \sqrt{p} \nu(\epsilon^{-1})\}$, temos

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{p=q}^{\infty} A_p\right) = 0.$$

Como consequência existe um conjunto $\Omega' \subset \Omega$ de medida um, tal que para cada $\omega \in \Omega'$, existe um $p_\omega \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \geq p_\omega$, temos

$$\max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} \leq H_1 \sqrt{p} \nu(\epsilon^{-1}). \quad (4.10)$$

Seja $t_0 = e^{p_0+10}$. Queremos agora mostrar que para todo $t \geq t_0$, temos $R_t \subset R_1$. Para isso, lembramos que na afirmação anterior $\epsilon = \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\log \sqrt{p}}\}$.

Para cada $t \geq t_0$, tome $p = 3 + [\log t]$, onde $[\log t]$ é a parte inteira de $\log t$. Assim,

$$\log t \leq [\log t] + 1 = p - 2 \implies t \leq e^{p-2},$$

portanto as retas horizontais de R_t tem alturas menores (em módulo) ou iguais a R_1 . Também temos

$$\log \sqrt{\log t} \leq \log \sqrt{p-2} \leq \log \sqrt{p}, \forall t \geq t_0.$$

Portanto $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \sqrt{\log t}} \geq \frac{1}{2} + \epsilon$ e concluímos que $R_t \subset R_1$.

Dessa forma, por (4.10) e pela escolha de p ,

$$\max_{s \in R_t} \{|F(s)|\} \leq \max_{s \in R_1} \{|F(s)|\} \leq H_1 \sqrt{p} \nu(\epsilon^{-1}) \leq H_1 \sqrt{3 + [\log t]} \nu(\log \sqrt{3 + [\log t]}).$$

Além disso,

$$3 + [\log t] \leq 3 + \log t \leq e^2 \log t \implies \sqrt{3 + [\log t]} \leq e\sqrt{\log t}.$$

Também obtemos, para alguma constante $K > 0$,

$$\nu(\log \sqrt{3 + [\log t]}) \leq \nu(\log(e\sqrt{\log t})) = \nu(1 + \log \sqrt{\log t}) \leq K\nu(\log \sqrt{\log t}),$$

onde a última desigualdade segue da equação (4.2), pois se $x^{-1} = 1 + \log \sqrt{\log t}$, então $\nu(x^{-1}) \leq \zeta(1+x) = 1 + \log \sqrt{\log t} + \mathcal{O}(1) = \log \sqrt{\log t} + \mathcal{O}(1)$.

Portanto,

$$\max_{s \in R_t} \{|F(s)|\} \leq H_1 e \sqrt{\log t} K \nu(\log \sqrt{\log t}),$$

concluimos a afirmação 3 tomando $H_2 = H_1 e K$. □

Finalmente, juntando as três afirmações anteriores, finalizamos a prova do lema 4.7.

Chamaremos $\beta_t := \log \sqrt{\log t}$. Como na afirmação 3, sejam $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta_t}$ e $\Omega' \subset \Omega$ o conjunto dos ω tal que a afirmação é válida e tal que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. Seja também $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ tal que $\sigma < x$.

Tome três círculo concêntricos C_1, C_2 e C_3 , centrados em $s_0 = \beta_t + it$ e tal que:

- C_1 passa pelo ponto $\sigma + \frac{1}{2} + it = 1 + \frac{1}{\beta_t} + it$, logo tem raio $r_1 = \beta_t - 1 - \frac{1}{\beta_t}$;
- C_2 passa por $x + it$ e tem raio $r_2 = \beta_t - x$;
- C_3 passa por $\sigma + it$, portanto tem raio $r_3 = \beta_t - \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta_t}$.

Pelo Teorema dos Três Círculos de Hadamard aplicado em $|F(s)|$, se M_i é o máximo da função nos círculos $C_i, i = 1, 2, 3$ e $a = \log(\frac{r_2}{r_1})(\log(\frac{r_3}{r_1}))^{-1}$, então

$$M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a.$$

Estimativa de a . Estimamos primeiro $\frac{r_2}{r_1}$ e $\frac{r_3}{r_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} &= \frac{\beta_t - x}{\beta_t - 1 - \frac{1}{\beta_t}} = 1 + \frac{\beta_t(1-x) + 1}{\beta_t^2 - \beta_t - 1} := 1 + x_1; \\ \frac{r_3}{r_1} &= \frac{\beta_t - \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta_t}}{\beta_t - 1 - \frac{1}{\beta_t}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta_t}{\beta_t^2 - \beta_t - 1} := 1 + x_2. \end{aligned}$$

Observe que, para t grande suficiente, temos $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$. Assim, similar à aplicação do Teorema dos Três Círculos de Hadamard no Teorema 3.9, temos

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\log(1+x_1)}{\log(1+x_2)} = (x_1 + \mathcal{O}(x_1^2))(x_2^{-1} + \mathcal{O}(1)) \\
 &= x_1 x_2^{-1} + \mathcal{O}(x_1) + \mathcal{O}(x_1^2 x_2^{-1}) + \mathcal{O}(x_1^2) \\
 &= \frac{2\beta_t(1-x) + 2}{\beta_t} + \mathcal{O}(\beta_t^{-1}) + \mathcal{O}(\beta_t^{-2}) \\
 &= 2(1-x) + \mathcal{O}(\beta_t^{-1}).
 \end{aligned}$$

Estimativa de M_1 . O círculo C_1 está no semiplano de convergência absoluta da $F(s)$. Assim,

$$|M_1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^s} \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{\mathbf{E}|X_n|>0\}}}{n^{1+\frac{1}{\beta_t}}} = C\nu(\beta_t)^2 \ll \nu(\log \sqrt{\log t})^2. \quad (4.11)$$

Estimativa de M_3 . Vamos estimar $|M_3|$ utilizando a afirmação 3, com um retângulo da forma $R_{t+\beta} = [\sigma, \frac{4}{3}] \times [-(t+\beta_t), t+\beta_t]$. Note que C_3 passa pelo ponto $\sigma + it$, portanto está contido nesse retângulo.

Como $\beta_t \ll t$, note que $\log(t+\beta_t) = \log t + \log(1+\frac{\beta_t}{t}) = \log t + \mathcal{O}(\frac{\beta_t}{t}) = \log t + \mathcal{O}(1)$. Logo, $\sqrt{\log(t+\beta_t)} \ll \sqrt{\log t}$. Além disso, com um argumento similar ao feito ao final da demonstração da afirmação 3,

$$\nu(\log \sqrt{\log(t+\beta_t)}) \ll \nu(\log \sqrt{\log t}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 |M_3| &\leq \max_{s \in R_{t+\beta_t}} \{|F(s)|\} \leq H_2 \sqrt{\log(t+\beta_t)} \nu(\log \sqrt{\log(t+\beta_t)}) \\
 &\ll \sqrt{\log t} \nu(\log \sqrt{\log t}).
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Estimativa de M_2 .

$$\begin{aligned}
 M_2 &\ll (\nu(\log \sqrt{\log t})^2)^{1-a} (\sqrt{\log t} \nu(\log \sqrt{\log t}))^a \\
 &\ll (\sqrt{\log t})^{2(1-x)+\mathcal{O}(\beta_t^{-1})} (\nu(\log \sqrt{\log t}))^{2-(2(1-x)+\mathcal{O}(\beta_t^{-1}))}.
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Lembrando que definimos $\beta_t = \log \sqrt{\log t}$, observamos que

$$(\sqrt{\log t})^{\mathcal{O}(\beta_t^{-1})} = \exp(\mathcal{O}(\beta_t^{-1}) \log \sqrt{\log t}) = \exp(\mathcal{O}(\beta_t^{-1}) \beta_t) = \mathcal{O}(1).$$

E também,

$$\nu(\log \sqrt{\log t})^{\mathcal{O}(\beta_t^{-1})} = \exp(\mathcal{O}(\beta_t^{-1}) \log(\nu(\beta_t))) = \exp(\mathcal{O}(\beta_t^{-1}) \mathcal{O}(\log \beta_t)) = \mathcal{O}(1),$$

onde aqui usamos o mesmo argumento feito anteriormente, i.e., $\nu(\beta_t) \leq \zeta(1+\beta_t^{-1}) = \beta_t + \mathcal{O}(1) \implies \nu(\beta_t) = \mathcal{O}(\beta_t)$. Portanto, a equação (4.13) fica

$$M_2 \ll (\log t)^{1-x} \nu(\log \sqrt{\log t})^{2x}.$$

Como tomamos o círculo C_2 passando por $x + it$, temos que $F(x + it) \leq M_2$. Assim,

$$F(x + it) \ll_x (\log t)^{1-x} \nu(\log \sqrt{\log t})^2,$$

quase certamente. □

4.2.3 Conclusão do Teorema 4.4 e discussão do caso geral

Demonstração do Teorema 4.4. O teorema está essencialmente provado. Lembrando que $\nu(\log \sqrt{\log t})^2 \ll \log \log t$,

$$F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{1-\sigma} \log \log t,$$

onde $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$, quase certamente. □

Corolário 4.10. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.4,

$$F(s) \ll t^{\epsilon}, \forall \epsilon > 0, \forall \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2},$$

quase certamente.

Demonstração. Temos $(\log t)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(t^{\epsilon}), \forall \epsilon > 0$. □

A demonstração do teorema poderia ser omitida e somente uma nota ao final do Lema 4.7 ser incluída. Entretanto optamos por manter essa seção também como oportunidade de comentar o caso geral do Teorema 4.4.

Em [1], o correspondente ao Teorema 4.4 é provado não somente para variáveis aleatórias independentes, mas também para uma sequência de variáveis aleatórias que são diferenças de Martingais e sequências de variáveis aleatórias com a propriedade “ ρ^* -mixing” (para as definições precisas veja [1], p.352).

No primeiro caso, obtemos o que apresentamos, isto é, dada as hipóteses do Teorema 4.4,

$$F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{1-\sigma} \log \log t,$$

quase certamente. Para o segundo caso, temos o seguinte resultado

$$F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{2-2\sigma} \log \log t,$$

quase certamente. E no último caso, temos

$$F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{3-3\sigma} \log \log t,$$

quase certamente. Além disso, quando as variáveis aleatórias são tais que $X_n = 0$, sempre que n não é um número primo, então em cada um dos três resultados acima, o termo $\log \log t$ pode ser substituído por $\log \log \log t$. O tipo de variável que até o momento estudamos nesse trabalho só toma valores nos primos, podendo então ser obtido que $F(\sigma + it) \ll_{\sigma} (\log t)^{1-\sigma} \log \log \log t$.

4.3 Prova do resultado principal

Apresentamos agora o resultado contido em [30]. Seguimos a mesma linha de ideias, com algumas adaptações. Como comentado no início do capítulo, o teorema abaixo é o resultado principal da dissertação.

Teorema 4.11. Seja $f(n)$ a função multiplicativa aleatória de Rademacher, como definido em (1.1). Então para todo $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge quase certamente. Além disso, se essa série pode ser escrita como $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 + \frac{f(p)}{p^s})$, então para todo $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, o produtório converge quase certamente.

Demonstração. Seja $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \infty, \forall \sigma > 1.$$

Como f é multiplicativa (pela forma como foi definida) e converge absolutamente, então pelo Teorema 2.4: Produtório de Euler podemos escrever

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}, \forall \text{Re}(s) > 1.$$

Ademais, f tem suporte nos inteiros livres de quadrados, segue então da igualdade anterior que

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right), \forall \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (4.14)$$

Agora, como $|\frac{f(p)}{p^s}| < 1$, temos a seguinte convergência absoluta:

$$\begin{aligned} \left| \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right| &\leq \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m p^{m\sigma}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^{m\sigma}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} < \infty, \forall \sigma > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pelo Teorema da 1-série de Kolmogorov,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^s} < \infty, \forall \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}, \text{ q.c.} \quad (4.16)$$

Portanto se $\operatorname{Re}(s) > 1$, usando a expansão em série do logaritmo:

$$\begin{aligned} \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) &= \exp \left(\log \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_p \log \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right) \\ &= \exp \left(\sum_p \frac{f(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right) < \infty, \forall \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}, \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Um certo cuidado tem que ser tomado quando tratamos de somas e produtos infinitos e as propriedades do logaritmo. No caso anterior a principio temos $\operatorname{Re}(s) > 1$, então o produtório é absolutamente convergente (i.e. $\prod_p (1 + |\frac{f(p)}{p^s}|) < \infty$) e $|\frac{f(p)}{p^s}| < 1$. Isso, juntamente com

a continuidade do logaritmo, é suficiente para que possamos trocar a ordem do limite com o logaritmo, isto é, na segunda igualdade deixamos implícito o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \exp \left(\log \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) &= \exp \left(\log \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \log \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \leq N} \log \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \log \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right) \right).
 \end{aligned}$$

A última igualdade também omite o seguinte cálculo: por (4.15) e (4.16),

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \leq N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p^s} + \sum_{p \leq N} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p^s} + \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{p \leq N} \sum_{m=2}^M \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \\
 &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^s} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}},
 \end{aligned}$$

onde a convergência absoluta nos permite fazer o limite na variável M primeiro.

Ou seja, concluímos pelo resultado acima (4.17) e a igualdade (4.14) que $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ coincide com $\prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} \right)$ para $\operatorname{Re}(s) > 1$ e o produtório por sua vez converge quase certamente para $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$. Portanto define uma continuação analítica da $F(s)$ nesse semiplano.

Dessa forma, resta mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ também converge para todo s tal que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$, quase certamente. Temos que a continuação analítica de $F(s)$ pode ser escrita na forma:

$$F(s) = \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^s} \right) \exp \underbrace{\left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right)}_A.$$

Já verificamos em (4.15) que $|A| = \mathcal{O}(1)$, para $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2} + \delta, \forall \delta > 0$. Além disso o Teorema 4.4 implica que, dado um $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1]$, temos

$$\exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^s} \right) = \mathcal{O}(t^\epsilon), \forall \epsilon > 0, \forall \operatorname{Re}(s) \geq \tilde{\sigma}, \text{ q.c.} \quad (4.18)$$

Note que o Teorema 4.4 garante que a estimativa (4.18) seja uniforme no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \tilde{\sigma} > \frac{1}{2}\}$.

Concluimos então aplicando a Fórmula de Perron. Tomando $\sigma_0 = 2$, temos para $T > 0$:

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R.$$

Seja $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$. Vamos deformar o segmento que liga os pontos $2 - iT$ e $2 + iT$ em um contorno composto pelos segmentos que ligam os pontos $2 + iT$ e $\sigma_1 + iT$; $\sigma_1 + iT$ e $\sigma_1 - iT$; $\sigma_1 - iT$ e $2 - iT$. Assim, nos segmentos horizontais, temos

$$\left| \int_{2+iT}^{\sigma_1+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll \frac{T^\epsilon}{T} \int_{\sigma_1}^2 x^\sigma d\sigma \ll T^{\epsilon-1} x^2.$$

No segmento vertical,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1+iT}^{\sigma_1-iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll x^{\sigma_1} \int_{-T}^T \frac{t^\epsilon}{|\sigma + it|} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} \int_1^T t^{\epsilon-1} dt \\ &\ll x^{\sigma_1} T^\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, estimando o erro R de forma similar ao feito na demonstração do Teorema 3.5:

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll x^{\sigma_1} T^\epsilon + x^2 T^{\epsilon-1} + \frac{x^2}{T}.$$

Tomando $T = x^2$ e $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, obtemos quase certamente

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll_\epsilon x^{\sigma_1 + \epsilon}, \forall \epsilon > 0.$$

Como $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$ é arbitrário, as somas parciais acima são $\ll_\epsilon x^{\frac{1}{2} + \epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, q.c. Pelo Teorema 2.9, concluimos que a série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$, quase certamente. $\square$

4.3.1 Comentários adicionais

O resultado que originalmente apresentamos interesse na introdução desse trabalho foi obtido diretamente, isto é, as somas parciais da função multiplicativa aleatória de Rademacher satisfazem $\sum_{n \leq x} f(n) = \mathcal{O}_\epsilon(x^{\frac{1}{2} + \epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$, quase certamente.

Na demonstração original contida em [30], o autor coloca o resultado sobre as somas parciais como um corolário do fato que a série $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge para todo $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, quase certamente. De fato, se já tivermos a informação sobre a convergência de uma série de Dirichlet, então é possível obter informações sobre suas somas parciais. Resumimos essa ideia na observação abaixo.

Observação 4.12. Se uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ tem abscissa de convergência $0 \leq \sigma_c < \infty$, então $\sigma_c = \inf\{\sigma : \sum_{n \leq x} a_n = \mathcal{O}(x^\sigma)\}$. Esse resultado pode ser visto como uma consequência do lema de Kronecker:

Lema 4.13 (Lema de Kronecker). Sejam $\{b_n\}$ uma sequência crescente de números positivos $b_n \uparrow \infty$ e $\{x_n\}$ uma sequência de números tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Então,

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n b_i x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Em particular, se $x_n = \frac{\tilde{x}_n}{b_n}$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{x}_i}{b_i} \text{ converge} \implies \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Lema 4.14 (Lema de Kronecker para variáveis aleatórias). Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias e $\{b_n\}$ uma sequência crescente de números positivos $b_n \uparrow \infty$. Então,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{b_i} \text{ converge q.c.} \implies \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \text{ q.c., quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, se com outro método mostrássemos diretamente a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ do Teorema 4.11, teríamos o corolário abaixo:

Corolário 4.15 (Corolário do Teorema 4.11). Seja $f(n)$ como no teorema. Então para todo $\epsilon > 0$ fixo,

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \mathcal{O}_{\epsilon}(x^{\frac{1}{2} + \epsilon}), \text{ q.c.}$$

Demonstração. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge, $\forall \text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, q.c., então o resultado segue do lema 4.14 com $X_n = f(n)$ e $b_n = n^s$. $\square$

Entretanto, como na demonstração que apresentamos, seguir esse caminho não é estritamente necessário. Quando temos que uma série de Dirichlet $F(s)$ com abscissa de convergência σ_c , possuindo continuação analítica para um semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma_0\}$ e tal que essa continuação analítica é $\ll_{\epsilon} t^{\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, então $\sigma_c \leq \sigma_0$. Em outras palavras, garantimos que a série $F(s)$ é

convergente no semiplano onde ela é analítica e $F(s) \ll_{\epsilon} t^{\epsilon}, \forall \epsilon > 0$ ¹. Esse é um caso particular de um resultado mais geral conhecido como Teorema de Landau-Schnee.

O método utilizando o lema de Kronecker acima é portanto um modo de estudar as somas parciais de uma função, quando temos informações somente sobre a convergência de sua série de Dirichlet.

¹Note que essencialmente basta mostrar que $F(s) \ll \log t$, quando $t \rightarrow \infty$ e esse é exatamente o propósito do Teorema 4.4, para variáveis de Rademacher.

5. FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS ALEATÓRIAS E A HIPÓTESE DE RIEMANN

Nos dois capítulos anteriores tratamos sobre o impacto que a hipótese de Riemann tem nas oscilações das somas parciais da Função de Möbius e, dado o modelo probabilístico para estudar o comportamento dessas somas parciais mostramos que as somas parciais da função definida nesse modelo são $\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, quase certamente. Ou seja, elas satisfazem o que gostaríamos de provar para a Função de Möbius.

Com essa consideração, é de interesse buscar e apresentar uma correlação entre a HR e a função multiplicativa aleatória. De fato, suponha que $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ seja uma sequência independente de variáveis aleatórias tomando valores ± 1 nos primos mas com probabilidade diferente de $\frac{1}{2}$ cada. De forma análoga a (1.1), para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f(n) := \mu(n)^2 \prod_{p|n} f(p)$. Assumindo que $\mathbf{E}(f(p)) < 0, \forall p \in \mathcal{P}$, provaremos o seguinte:

Teorema 5.1 ([1], Teorema 1.1). Seja $\alpha > 0$ e f_α tal que $\mathbf{E}(f_\alpha(p)) = -\frac{1}{p^\alpha}, \forall p \in \mathcal{P}$. Para cada $\alpha > 0$ fixo, temos que a hipótese de Riemann é verdadeira se, e somente se, $\sum_{n \leq x} f_\alpha(n) = o(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \forall \epsilon > 0$, quase certamente.

Heuristicamente, como para Função de Möbius temos $\mu(p) = -1, \forall p \in \mathcal{P}$, a condição $\mathbf{E}(f(p)) < 0$ nos diz que, para qualquer número primo p , estamos impondo uma tendência maior do valor -1 ser sorteado na sequência de variáveis aleatórias $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$. Assim, de certa forma, os valores assumidos por $f(n), n \in \mathbb{N}$, estariam se aproximando cada vez mais dos valores da Função de Möbius.

Antes da demonstração do Teorema 5.1, vamos apresentar dois lemas adicionais:

Lema 5.2. Seja f uma função multiplicativa aleatória que toma valores ± 1 nos primos e $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. Então,

- (i) Para todo s tal que $\text{Re}(s) > 1$, temos que $\mathbf{E}(F(s))$ é analítica e $\mathbf{E}(F(s)) \neq 0$.
- (ii) Existe uma função multiplicativa aleatória G , definida em todo o conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ e tal que $G(s) = \frac{F(s)}{\mathbf{E}(F(s))}, \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) > 1$.
- (iii) A função G acima pode ser escrita como

$$G(s) = \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p) - \mathbf{E}(f(p))}{p^s} \right) \exp(H(s)),$$

onde $H(s)$ é uma função multiplicativa aleatória definida em $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ e para todo $\sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}$, existe um $C = C(\sigma_0) > 0$ tal que $|H(\sigma + it)| \leq C$, quase certamente.

Demonstração do lema 5.2 (i). Seguindo a mesma ideia da demonstração do Teorema 4.11, obtemos para $\text{Re}(s) > 1$ que

$$F(s) = \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p)}{p^s} \right) \exp \underbrace{\left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} f(p)^m}{m p^{ms}} \right)}_{A_f(s)}, \quad (5.1)$$

onde $A_f(s)$ converge absolutamente no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$, em particular converge quando $\text{Re}(s) > 1$ e $\sum_p \frac{f(p)}{p^s}$ é analítica também no subconjunto $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1\}$.

Lembrando que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $f(n)$ é uma função multiplicativa possuindo suporte nos inteiros livres de quadrados e a sequência de variáveis aleatórias $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ são independentes, segue então que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(f(n))$ é multiplicativa e tem suporte nos livres de quadrados. Logo, $\mathbf{E}(F(s))$ é analítica em $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1\}$ e não se anula nesse semiplano. $\square$

Demonstração do lema 5.2 (ii). Pelas considerações feitas no item anterior e a equação (5.1), temos para $\text{Re}(s) > 1$:

$$\frac{F(s)}{\mathbf{E}(F(s))} = \exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p) - \mathbf{E}(f(p))}{p^s} \right) \exp(A_f(s) - A_{\mathbf{E}f}(s)).$$

Ambas as funções A_f e $A_{\mathbf{E}f}$ são absoluta e uniformemente convergentes em todo o conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$, logo definem uma função analítica nesse semiplano.

Além disso, temos que $\mathbf{E}[f(p) - \mathbf{E}(f(p))] = 0$ e

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Var} \left(\frac{f(p) - \mathbf{E}(f(p))}{p^s} \right) \right| &\leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \left| \frac{\text{Var}(f(p))}{p^{2s}} \right| = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{|\mathbf{E}f(p)^2 - [\mathbf{E}f(p)]^2|}{p^{2\sigma}} \\ &\leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{|1 - [\mathbf{E}f(p)]^2|}{p^{2\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} < \infty, \forall \text{Re}(s) = \sigma > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto pelo Teorema da 1-série de Kolmogorov temos que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p) - \mathbf{E}f(p)}{p^s}$ converge para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$, quase certamente. $\square$

Demonstração do lema 5.2 (iii). Pelo item anterior, $A_f(s)$ e $A_{\mathbf{E}f}(s)$ estão definidas para todo complexo s com parte real maior que $\frac{1}{2}$ e como temos convergência uniforme em compactos, segue que as funções são uniformemente limitadas. Portanto basta tomar $H(s) \equiv A_f(s) - A_{\mathbf{E}f}(s)$. $\square$

Lema 5.3. Sejam $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $f = f_\alpha$ uma função multiplicativa aleatória tal que $\mathbf{E}(f(p)) = -\frac{1}{p^\alpha}$, $\forall p \in \mathcal{P}$ e $F_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s}$, $\forall \text{Re}(s) > 1$, a sua série de Dirichlet. Então $\zeta(s) \neq 0$ para todo número complexo no conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2} + \alpha\}$ se, e somente se, $F_\alpha(s)$ tem continuação analítica no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$.

Ou seja, o lema acima nos diz que a existência dessa continuação analítica para a série de Dirichlet desse tipo de função multiplicativa aleatória é uma condição necessária e suficiente para que a Função Zeta de Riemann não se anule no semiplano à direita da reta $\frac{1}{2} + it$, em particular em toda a faixa crítica $(\frac{1}{2}, 1)$.

Demonstração. Como $(f(p))_{p \in \mathcal{P}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, $f(n) = \mu(n)^2 \prod_{p|n} f(p)$ (como definida em (1.1)) é multiplicativa e com suporte nos inteiros livres de quadrados, segue que

$$\mathbf{E}(f(n)) = \mathbf{E}(f(p_1) \cdots f(p_k)) = \mathbf{E}(f(p_1)) \cdots \mathbf{E}(f(p_k)) = \frac{(-1)^{\omega(n)}}{n^\alpha} = \frac{\mu(n)}{n^\alpha},$$

caso $n = p_1 \cdots p_k$, onde todos os primos são distintos. Se algum $p^2 | n$, então $\mathbf{E}(f(n)) = 0$. Em todo caso temos $\mathbf{E}(f(n)) = \frac{\mu(n)}{n^\alpha}$, pois $\mu(n) = 0$ quando $p^2 | n$.

Assim, se $s \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$\mathbf{E}(F_\alpha(s)) = \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(f_\alpha(n))}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{s+\alpha}} = \frac{1}{\zeta(s+\alpha)}.$$

Pelo lema 5.2, existe uma função G analítica no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ tal que $F_\alpha(s) = G(s) \frac{1}{\zeta(s+\alpha)}$. Além disso, $\frac{1}{G(s)}$ também é uma função analítica no mesmo semiplano.

Portanto, $\frac{1}{\zeta(s+\alpha)}$ é analítica em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ se, e somente se, $F_\alpha(s)$ é analítica nessa região.

Por outro lado, também já vimos que a função zeta possui continuação analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, portanto $\frac{1}{\zeta(s+\alpha)}$ tem continuação analítica em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ se, e somente se, $\zeta(s+\alpha) \neq 0$ para todo s tal que $\operatorname{Re}(s+\alpha) > \frac{1}{2}$ (ou equivalentemente, $\zeta(s) \neq 0$, para todo s tal que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} + \alpha$). $\square$

Demonstração do Teorema 5.1. Suponha que $\sum_{n \leq x} f_\alpha(n) = o(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$, quase certamente. Argumentamos de forma similar a prova do Teorema 3.4: fixe $\epsilon > 0$ pequeno e $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \frac{1}{2} + \epsilon$. Então pelo Teorema 2.9,

$$\sum_{n \leq x} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \frac{\sum_{n \leq x} f_\alpha(n)}{x^s} + s \int_1^x \frac{\sum_{n \leq t} f_\alpha(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f_\alpha(n)}{x^s} + s \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\sum_{n \leq t} f_\alpha(t)}{t^{s+1}} dt := A + sB.$$

Estimativa de $|A|$. Usando a hipótese, temos para o primeiro termo

$$|A| \ll_{\epsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2} + \epsilon}}{x^{\sigma}} = 0,$$

pois $\frac{1}{2} + \epsilon - \sigma < 0$.

Estimativa de $|B|$.

$$|B| \ll_{\epsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{t^{\frac{1}{2} + \epsilon}}{t^{\sigma + 1}} dt \ll_{\epsilon} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^{\sigma + \frac{1}{2} - \epsilon}} dt \ll_{\epsilon} 1,$$

pois como $\sigma > \frac{1}{2} + \epsilon$, então $\sigma + \frac{1}{2} - \epsilon > 1$.

Portanto o limite B existe e a série $F_{\alpha}(s)$ converge para todo $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$, definindo então uma função analítica no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$. Então pelo lema anterior, $\zeta(s) \neq 0$ em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} + \alpha, \alpha > 0\}$ e como $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ é arbitrário, temos o resultado desejado.

Assuma agora que vale a hipótese de Riemann. Pelo corolário 3.12, a HR implica que $\frac{1}{\zeta(s)} \ll_{\epsilon} |t|^{\epsilon}, \forall \epsilon > 0, \forall \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 4.4, fixado $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$, temos que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f(p) - \mathbf{E}(f(p))}{p^{\sigma + it}} \ll (\log t)^{1 - \sigma} \log \log t$, quase certamente. Assim, para a função G obtida aplicando o lema 5.2,

$$\begin{aligned} G(\sigma + it) &= \exp \left(\sum_p \frac{f(p) - \mathbf{E}(f(p))}{p^{\sigma}} \right) \exp(H(s)) \\ &\ll \exp((\log t)^{1 - \sigma} \log \log t) \\ &\ll_{\epsilon} t^{\epsilon}, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, quase certamente.

Pelo demonstração do lema anterior, a continuação analítica de $F_{\alpha}(s)$ para $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ é $\frac{G(s)}{\zeta(s + \alpha)}$ e pelas observações anteriores concluímos que

$$F_{\alpha}(s) = \frac{G(s)}{\zeta(s + \alpha)} \ll t^{\epsilon},$$

para todo $\epsilon > 0$ e para todo s tal que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$, quase certamente.

Pela Fórmula de Perron e argumentando exatamente como ao final da demonstração do Teorema 4.11 (ou de forma equivalente, aplicando o Teorema de Landau-Schnee - ver final da Seção 4.3.1: Comentários adicionais), temos que $\sum_{n \leq x} f_{\alpha}(n) \ll_{\epsilon} x^{\frac{1}{2} + \epsilon}, \forall \epsilon > 0$, quase certamente.

□

6. CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Esta seção será dedicada a algumas considerações finais pontuais sobre assuntos tratados ao longo de todo o texto e algumas conjecturas. O objetivo não é entrar em detalhes sobre a teoria, portanto tentaremos expor ideias de forma mais branda e referenciamos os textos com tratamentos mais completos.

Com relação as somas parciais da Função de Möbius, comentamos que o valor preciso de x tal que a desigualdade $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| < x^{\frac{1}{2}}$ não é satisfeita ainda não é conhecido, mas sabemos que é algum valor acima de 10^{14} . Assim, apesar de evidências numéricas favoráveis a essa conjectura, Ingham mostrou em 1942 que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (\liminf_{x \rightarrow \infty}) \frac{\sum_{n \leq x} \mu(n)}{\sqrt{x}} = +\infty(-\infty),$$

assumindo a hipótese de Riemann e uma conjectura de independência linear dos zeros da Função Zeta de Riemann:

Conjectura 2 (Independência Linear - LI). Assuma que a Função Zeta de Riemann $\zeta(s)$ satisfaz a HR. Então as ordenadas positivas de zeros distintos são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Portanto, com resultado de Ingham, houve dúvidas sobre a veracidade da conjectura $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| < x^{\frac{1}{2}}$. Ainda assim, essa conjectura só foi mostrada falsa mais de 40 anos depois.

Gonek propôs a seguinte conjectura, assumindo a hipótese de Riemann:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (\liminf_{x \rightarrow \infty}) \frac{\sum_{n \leq x} \mu(n)}{\sqrt{x} (\log \log \log x)^{\frac{5}{4}}} = +B(-B),$$

para alguma constante B positiva. Ng [25] e Maier-Montgomery [23] comentam em seus trabalhos que essa conjectura corresponde a uma feita anteriormente por Montgomery,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (\liminf_{x \rightarrow \infty}) \frac{\sum_{n \leq x} \Lambda(n) - x}{\sqrt{x} (\log \log \log x)^2} = +\frac{1}{2\pi} (-\frac{1}{2\pi}).$$

Para dar suporte a essas conjecturas, Ng e Montgomery apresentaram argumentos probabilísticos. No caso da segunda, Montgomery assume não só a HR, mas também a conjectura LI.

Mostramos que a hipótese de Riemann implica a hipótese de Lindelöf. Ressaltamos aqui que não é uma equivalência: a hipótese de Lindelöf *não* implica a hipótese de Riemann. Apesar disso, [20] comentam que há um consenso que a HR deve ser provada antes da HL, pois a HR tem conexão com “estruturas matemáticas mais naturais”.

Tentaremos agora dar uma heurística do comportamento da função $\log |\zeta(s)|$, com o objetivo de entender o motivo que nos leva a estudar o modelo envolvendo a função multiplicativa aleatória de Steinhaus.

Vimos em considerações feitas no capítulo preliminar (capítulo 2), para $\text{Re}(s) > 1$, a função $\log |\zeta(s)|$ é dada por um duplo somatório sobre números primos e absolutamente convergente. Entretanto quando tratamos do comportamento sobre a linha crítica esse fato não continua sendo verdade. Apesar disso, assumindo a HR ainda conseguimos (usando ferramentas bem mais sofisticadas) mostrar que $\log |\zeta(1/2 + it)|$ tem comportamento aproximado por

$$\begin{aligned} \log |\zeta(1/2 + it)| &= \text{Re}(\log \zeta(1/2 + it)) \\ &\approx \text{Re} \left(\sum_{p \leq T} \frac{1}{p^{1/2+it}} \right) + (\text{fator de contribuição dos zeros}), \end{aligned}$$

para $t \in [T, 2T]$. Portanto se T é grande, consideramos como um bom modelo para a função zeta estudar a seguinte soma:

$$\sum_{p \leq T} \text{Re} \left(\frac{f(p)}{p^{1/2}} \right),$$

onde $f(p)$ são variáveis aleatórias de Steinhaus (1.3), isto é, v.a. uniformemente distribuídas no círculo unitário em $\mathbb{C}$. Cada fator da soma finita é uma variável aleatória real, com média zero e variância $\frac{1}{2p}$, então o Teorema Central do Limite sugere que a soma se comporta como uma distribuição Gaussiana de média zero e variância $\frac{1}{2} \log \log T$ (usando que $\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \ll \log \log N$).

Em contrapartida, temos um resultado de Selberg, que provou uma espécie de Teorema Central do Limite para a parte real e imaginária de $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$: seja $V > 0$ número real fixo, então para T grande,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [T, 2T] : \frac{\log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \geq V \right\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_V^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

A interpretação acima é que, para $t \in [T, 2T]$, $\log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ também converge (após uma normalização) para uma função que possui distribuição Gaussiana com média zero e variância $\frac{1}{2} \log \log T$.

Similarmente temos o mesmo para a função $S(t)$ definida no início da Subseção 3.2.2. Em vista desse fato, Soundararajan indica que um melhor resultado para o Teorema 3.17, e.g., $R \ll T \exp(-\frac{CV^2}{\log \log T})$, para alguma constante $C > 0$, uniformemente em V , pode ser obtido. Se retornarmos à prova desse teorema, vemos que ela envolve a igualdade (3.9), portanto fica aparente uma esperada relação entre o comportamento de $S(t)$ e o número de pontos R do teorema.

Além disso, caso tenhamos $R \ll \exp(-\frac{CV^2}{\log \log T})$, para algum $C > 0$, então podemos obter no Teorema 3.15: $\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll \sqrt{x} \exp(K(\log \log x)^3)$, para alguma constante $K > 0$. E observamos que ainda estaríamos longe da conjectura proposta anteriormente por Gonek.

Por fim, uma conjectura hoje sobre $S(t)$ foi feita em 2007 por Farmer, Gonek e Hughes [13], onde propuseram que $S(t) \ll \sqrt{\log T \log \log T}$. Os autores utilizaram teoria de matrizes aleatórias para dar suporte a essa conjectura. Soundararajan acrescenta que o melhor resultado sobre R acima seria consistente com essa conjectura.

Finalizamos falando sobre a função multiplicativa aleatória de Rademacher. Primeiro lembramos que para variáveis aleatórias i.i.d. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, assumindo valores ± 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada, temos que o tamanho típico das flutuações das somas parciais são $\sum_{n \leq x} X_n \asymp \sqrt{x}$, lembrando que $f \asymp g$ significa que existem constantes $c, C > 0$ tal que $cg(x) \leq |f(x)| \leq Cg(x)$, para todo x . A Lei do Logaritmo Iterado (veja Observação 1.4), nos dá esse fator multiplicado por um termo da ordem de $\sqrt{\log \log x}$.

Harper [17] mostra que as flutuações da função multiplicativa aleatória de Rademacher são tipicamente $\sum_{n \leq x} f(n) \asymp \frac{\sqrt{x}}{(\log \log x)^{\frac{1}{4}}}$. Portanto, se observarmos pela ótica da Lei do Logaritmo Iterado, multiplicando esse fator por $\sqrt{\log \log x}$, temos supondo possíveis interações das somas parciais, $\sum_{n \leq x} f(n) \asymp \sqrt{x}(\log \log x)^{\frac{1}{4}}$. Entretanto, como o próprio autor comenta, provar essa estimativa ainda será uma tarefa formidável.

Referências

- [1] M. Aymone e V. Sidoravicius. “Partial sums of biased random multiplicative functions”. Em: *J. Number Theory* 172 (2017), pp. 343–382.
- [2] M. Aymone, W. Heap e J. Zhao. “Partial sums of random multiplicative functions and extreme values of a model for the Riemann zeta function”. Em: *J. Lond. Math. Soc. (2)* 103.4 (2021), pp. 1618–1642.
- [3] M. Aymone, W. Heap e J. Zhao. *Sign changes of the partial sums of a random multiplicative function*. Versão 2. 31 de jan. de 2022. arXiv: arXiv:2103.05413v2.
- [4] M. Balazard e A. de Roton. *Notes de lecture de l'article "Partial sums of the Möbius function" de Kannan Soundararajan*. Versão 1. 20 de out. de 2008. arXiv: arXiv:0810.3587.
- [5] J. Basquin. “Sommes friables de fonctions multiplicatives aléatoires”. Em: *Acta Arith.* 152.3 (2012), pp. 243–266.
- [6] J. Bourgain. “Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function”. Em: *J. Amer. Math. Soc.* 30.1 (2017), pp. 205–224.
- [7] F. Carlson. “Contributions à la théorie des séries de Dirichlet, note III”. Em: *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. Vol. 23A. 19. 1933, pp. 1–8.
- [8] E. Carneiro, V. Chandee e M. B. Milinovich. “A note on the zeros of zeta and L-functions”. Em: *Math. Z.* 281.1-2 (2015), pp. 315–332.
- [9] Y. S. Chow e H. Teicher. *Probability theory*. Third. Springer Texts in Statistics. Independence, interchangeability, martingales. Springer-Verlag, New York, 1997, pp. xxii+488.
- [10] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*. Second. Vol. 11. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978, pp. xiii+317.
- [11] P. Erdős. “Some applications of probability methods to number theory”. Em: *Mathematical statistics and applications, Vol. B (Bad Tatzmannsdorf, 1983)*. Reidel, Dordrecht, 1985, pp. 1–18.
- [12] P. Erdős. “Some unsolved problems”. Em: *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 6 (1961), pp. 221–254.
- [13] D. W. Farmer, S. M. Gonek e C. P. Hughes. “The maximum size of L-functions”. Em: *J. Reine Angew. Math.* 609 (2007), pp. 215–236.
- [14] K. Ford. *Zero-free regions for the Riemann zeta function*. Versão 4. 22 de set. de 2022. arXiv: arXiv:1910.08205v4.

-
- [15] D. A. Goldston e S. M. Gonek. “A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function”. Em: *Bull. Lond. Math. Soc.* 39.3 (2007), pp. 482–486.
 - [16] G. Halász. “On random multiplicative functions”. Em: *Hubert Delange colloquium (Orsay, 1982)*. Vol. 83. Publ. Math. Orsay. Univ. Paris XI, Orsay, 1983, pp. 74–96.
 - [17] A. J. Harper. *Almost sure large fluctuations of random multiplicative functions*. Versão 1. 31 de dez. de 2020. arXiv: [arXiv:2012.15809v1](https://arxiv.org/abs/2012.15809v1).
 - [18] A. J. Harper. “Bounds on the suprema of Gaussian processes, and omega results for the sum of a random multiplicative function”. Em: *Ann. Appl. Probab.* 23.2 (2013), pp. 584–616.
 - [19] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York; MR0792089 (87d:11062)]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003, pp. xxii+517.
 - [20] H. Iwaniec e E. Kowalski. *Analytic number theory*. Vol. 53. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, pp. xii+615.
 - [21] Y.-K. Lau, G. Tenenbaum e J. Wu. “On mean values of random multiplicative functions”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 141.2 (2013), pp. 409–420.
 - [22] P. Lévy. “Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes”. Em: *Studia Mathematica* 3.1 (1931), pp. 119–155.
 - [23] H. Maier e H. L. Montgomery. “The sum of the Möbius function”. Em: *Bull. Lond. Math. Soc.* 41.2 (2009), pp. 213–226.
 - [24] H. L. Montgomery e R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*. Vol. 97. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2007, pp. xviii+552.
 - [25] N. Ng. “The distribution of the summatory function of the Möbius function”. Em: *Proc. London Math. Soc. (3)* 89.2 (2004), pp. 361–389.
 - [26] A. M. Odlyzko e H. J. J. te Riele. “Disproof of the Mertens conjecture”. Em: *J. Reine Angew. Math.* 357 (1985), pp. 138–160.
 - [27] K. Soundararajan. “Partial sums of the Möbius function”. Em: *J. Reine Angew. Math.* 631 (2009), pp. 141–152.
 - [28] E. C. Titchmarsh. “A Consequence of the Riemann Hypothesis”. Em: *J. London Math. Soc.* 2.4 (1927), pp. 247–254.

- [29] C.-J. de la Vallée Poussin. “Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée”. Em: *Colloque sur la Théorie des Nombres, Bruxelles, 1955*. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1956, pp. 9–66.
- [30] A. Wintner. “Random factorizations and Riemann’s hypothesis”. Em: *Duke Math. J.* 11 (1944), pp. 267–275.