

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Neila Mara Gomes

Estudo sobre a quártica plana associada a um complexo
quadrático de retas semiestável com aplicações à teoria
de Moduli

Belo Horizonte - MG
2015

Universidade Federal de Minas Gerais

**Estudo sobre a quártica plana
associada a um complexo quadrático
de retas semiestável com aplicações à
teoria de Moduli**

Neila Mara Gomes

Orientador: Prof. Dan Avritzer

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da
Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos
requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ma-
temática.

Belo Horizonte

Março - 2015

2015, Neila Mara Gomes.
Todos os direitos reservados

	Gomes, Neila Mara.
O48e	Estudo sobre a quártica plana associada a um Complexo quadrático de retas semi estável com aplicações à Teoria de Moduli [recurso eletrônico] / Neila Mara Gomes. Belo Horizonte — 2015. 1 recurso online (104 f. il.): pdf. Orientador: Dan Avritzer . Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 103-104 1. Matemática – Teses. 2. Teoria de módulos - Teses. 3. Curvas algébricas – Teses. 4 . Quádricas – Teses. I. Avritzer, Dan. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título. CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

*"Estudo sobre a Quártica Plana associada a um Complexo Quadrático de retas
com aplicações à Teoria de Moduli"*

NEILA MARA GOMES

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Dan Avritzer (Orientador)
UFMG

Prof. André Gimenez Bueno
UFMG

Prof. André Luis Contiero
UFMG

Prof. Carolina Bhering de Araujo
IMPA

Prof. Cícero Fernandes de Carvalho
UFU

Belo Horizonte, 15 de maio de 2015.

À João Efrém Gomes (*in memoriam*).

Agradecimentos

A Deus, autor de toda Sabedoria, pelas riquezas indescritíveis que me concedeu ao longo desta jornada, recordando-me em todo instante a fidelidade do Seu amor. "Tu sabes tudo..."

Ao meu amado esposo Everthon, pelo amor demonstrado em tantas faces, pelo carinho e cuidado, pelas incontáveis renúncias e por nunca me deixar desistir.

A minha pequena Maria Clara, que trouxe tanto sentido a esta luta e pela força que me deu, mesmo sem compreender isto.

Ao meu orientador, Prof. Dan Avritzer, por todos os ensinamentos e, principalmente, pela amizade e compreensão nos percalces deste caminho.

A minha mãe Ilsa, pela amizade, pela ajuda que nunca mediu esforços e pelo incentivo diário.

Ao meu pai João (sempre presente), que partiu antes que esta jornada chegasse ao fim, mas cuja lembrança do carinho e incentivo nesta profissão me fizeram prosseguir. Dedico tudo isto a você.

Ao meu irmão, minha cunhada e sobrinhos pelos momentos de verdadeira alegria e pela torcida.

Aos eternos amigos do Ministério Universidades Renovadas que me sustentaram com suas orações.

A amiga Dri, pelas partilhas sempre motivantes e pela amizade tão pura e sincera.

Ao amigo Jean, pela crucial ajuda com o Maple.

A tantas outras pessoas que de maneira indireta foram cruciais para que esta etapa se concluísse.

A CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

Meu sincero muito obrigada!

“Hoje conheço em parte; mas então conhecerei totalmente, como eu sou conhecido.”

(I Cor 13, 12b)

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo detalhado sobre uma curva quártica plana em $\mathbb{P}^3$, a qual está associada a um complexo quadrático de retas semi estável. Apresentamos ainda a construção de um espaço de Moduli para essas curvas e alguns resultados referentes aos mesmos.

Palavras-chave: Quártica plana, símbolo de Segre, complexos quadráticos de retas semi estáveis, espaços de Moduli.

Abstract

In this work, we conduct a detailed study of a planar quartic curve in $\mathbb{P}^3$, which is associated with a semi-stable quadratic complex of lines. We also present the construction of a Moduli space for these curves and some results related to them.

Keywords: Planar quartic, Segre symbol, semi-stable quadratic complexes of lines, Moduli spaces.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 Quádricas	14
1.1.1 Feixes de Quádricas	21
1.1.2 Símbolo de Segre	22
1.2 Generalidades sobre o complexo quadrático de retas	23
1.2.1 A Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$	23
1.2.2 O complexo quadrático de retas e a superfície singular associada	25
1.2.3 A variedade de retas do complexo quadrático	31
1.3 Noções de (semi) estabilidade da G.I.T.	32
1.3.1 O Critério de Hilbert-Munford	32
1.3.2 Semi estabilidade de Complexos Quadráticos, Superfícies Singulares e Feixes de Quádricas	37
2 Curvas associadas à feixes de quádricas semiestáveis	48
2.1 Reta genérica $L \subset X$	48
2.2 A curva de gênero 2 associada à um feixe semiestável	51
2.3 Descrição da curva B_L para feixes semiestáveis	55
3 A quártica plana associada a um complexo quadrático de retas semiestável	61
3.1 Generalidades sobre a quártica plana	62
3.2 Descrição geométrica	66
3.2.1 O caso geral	67
3.2.2 Complexo Tetraédrico de Retas	69
3.2.3 Demais casos de Complexos Quadráticos Semi estáveis	77

4	Aplicações à Teoria de Moduli	85
4.1	Espaço de Moduli das quárticas planas associadas à complexos quadráticos	86
4.1.1	Ação sobre S^*	86
4.1.2	Moduli das quárticas planas	89
4.1.3	A equivariância da aplicação $j : B_L \longrightarrow C_L$	90
4.1.4	Estudo do Caso Geral	96
4.1.5	Demais Casos	100
	Bibliografia	104

Introdução

As relações entre os espaços de Moduli de curvas hiperelípticas estáveis de gênero 2, $\overline{\mathcal{H}}_2$, o espaço de Moduli de formas binárias de grau 6, $\overline{\mathcal{M}}_6^b$ e o espaço de Moduli de feixes de quádricas semiestáveis de $\mathbb{P}^5$, $\overline{\mathcal{M}}_5^p$ foram estudadas detalhadamente em [2]. Um dos principais resultados desse trabalho é que podemos associar a um feixe de quádricas de $\mathbb{P}^5$ uma curva estável de gênero aritmético 2. Esta curva é definida da seguinte forma: dado um feixe de quádricas

$$\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G | (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

onde G é a quádrica de Plücker e F é uma quádrica suave de $\mathbb{P}^5$ distinta de G , consideramos o lugar de base $X = F \cap G$.

Como G é quádrica de Plücker X determina um Complexo Quadrático de Retas. Podemos assim considerar a variedade de retas de X como definida em [7]:

$$A = \{L \in Gr(2, 6) | L \in X\}$$

em que $Gr(2, 6)$ denota a grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^5$. Fixada uma reta L em X definimos

$$B_L = \{L' \subset X | L \cap L' \neq \emptyset\}.$$

No caso geral, isto é, no caso em que o complexo quadrático X é suave, a curva B_L é também descrita em [7]. Neste define-se uma aplicação

$$j : A \longrightarrow S$$

em que S é a superfície singular associada ao complexo quadrático X (ver [7] e Definição 1.2.4) definida da seguinte maneira: se $L \in A$, então $L \in G$ e consequentemente L parametriza um feixe de retas de $\mathbb{P}^3$; seja $p_L \in \mathbb{P}^3$ o foco do feixe parametrizado por L . Então

$$j(L) = p_L$$

Esta aplicação, quando restrita à curva B_L determina uma curva quártica

$$C_L := j(B_L) = h_L \cap S$$

contida em um plano de $\mathbb{P}^3$, a saber o plano h_L que contem o feixe de retas de $\mathbb{P}^3$ parametrizado pela reta L . Veremos que a curva C_L está contida na superfície singular S , sendo, na verdade a interseção $h_L \cap S$. Mais ainda: h_L é tangente a S (Lema 3.1.1) e, portanto, C_L é uma curva singular.

Neste trabalho fazemos um estudo detalhado da quártica C_L , considerando a imagem $j(B_L)$ em todos os casos em que B_L é a curva determinada por um feixe de quádras de $\mathbb{P}^3$ semi estável ([2]).

No Capítulo 1 abordamos resultados preliminares necessários ao desenvolvimento do trabalho. Destacamos o estudo dos subespaços lineares de quádras de $\mathbb{P}^5$, o qual descrevemos baseados em [17]. Esse estudo permite compreender as hipóteses feitas no Capítulo 2, onde descrevemos a curva B_L em todos os casos de feixes de quádras semi estáveis, como feito em [2]. Neste capítulo fazemos uma pequena alteração em uma das demonstrações do referido artigo, a qual se refere ao fato de a descrição da curva B_L independer da escolha da reta L (Proposição 2.2.2) desde que a mesma seja feita sob determinadas condições que mencionamos na Seção 2.1.

No Capítulo 3 utilizamos a descrição da curva B_L e com o auxílio do Maple descrevemos geometricamente todas as quárticas $C_L = j(B_L)$ associadas a feixes de quádras semi estáveis (o que corresponde a complexos quadráticos de retas semi estáveis, conforme enfatizamos na Seção 4.1.3). Em todos os casos obtemos quárticas planas cujas singularidades variam com as singularidades de B_L , isto é, dependem das singularidades do complexo quadrático X . O principal resultado desse capítulo é dado no Teorema 3.1.1, onde mostramos que a quártica C_L também independe da escolha da reta L , ou seja, é determinada (a menos de isomorfismo) pelo Símbolo de Segre do complexo X (ver Seção 1.1.2).

No Capítulo 4 apresentamos nossas contribuições principais as quais se referem à aplicação dos resultados obtidos na teoria de Espaços de Moduli. Encontramos um estudo sobre o Moduli de curvas quárticas planas em [11] e [4]. Contudo, neste trabalho, construímos o espaço de Moduli das quárticas que são determinados por um complexo quadrático de retas semi estável, conforme explicitado no Capítulo 3. Essa construção baseia-se, principalmente, na construção do espaço de Moduli $\mathcal{M}_{ss}$ das superfícies singulares associadas a um complexo quadrático dada em [3]. Na verdade, mostramos que o espaço

de Moduli das curvas C_L , que denotaremos por $\mathcal{M}_{C_L}$, coincide com o espaço $\mathcal{M}_{ss}$ (Teorema 4.1.2). Utilizando os isomorfismos

$$\overline{\mathcal{H}_2} \cong Bl_{ss}(\overline{\mathcal{M}_b^6}) \text{ e } \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{P}}} \cong \overline{\mathcal{M}_b^6}$$

onde $Bl_{ss}(\overline{\mathcal{M}_b^6})$ denota o blow up do espaço $\overline{\mathcal{M}_b^6}$ no único ponto semi estável, mostramos que se $\mathcal{P}$ é um feixe semi estável cujo discriminante não consiste de duas raízes triplas, então a aplicação $j : B_L \longrightarrow C_L$ é equivariante. Finalmente, considerando os casos em que a curva B_L é irredutível e o discriminante do feixe possui pelo menos duas raízes simples, associamos à curva C_L uma sêxtica binária (uma construção similar é feita em [13]). Mostramos, então, a existência de uma família unidimensional de curvas C_L em $\mathcal{M}_{C_L}$ aplicadas em um mesmo ponto do espaço de Moduli $\overline{\mathcal{M}_b^6}$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Quádricas

Ao longo desta seção apresentamos alguns resultados relativos à quádricas e feixes de quádricas. Apesar de as definições serem abordadas no caso geral, na prova da maioria dos resultados nos restringiremos às quádricas de $\mathbb{P}^5$ que são os objetos de nosso interesse. As principais referências bibliográficas utilizadas foram [17] e [10].

Definição 1.1.1 ([17]) Seja k um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2, $V \equiv k^{n+1}$ um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ sobre k e $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ o espaço projetivo sobre V . Definiremos uma hipersuperfície quádrlica $Q \subset \mathbb{P}^n$ por uma forma quadrática

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{ij} x_i x_j$$

sobre V unicamente determinada a menos de um múltiplo em k . O posto da quádrlica Q é o posto da matriz $\varphi := (b_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$ associada à φ .

Um r -plano, s digamos, em $\mathbb{P}^n$ é da forma $s = \mathbb{P}(E)$ para um único $(r + 1)$ -plano $E \subset V$. Um r -plano s está contido na quádrlica Q se, e somente se, φ é identicamente nula sobre E .

No que segue estudaremos mais detalhadamente alguns subespaços lineares contidos em quádrlicas suaves de $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.1.2 ([17]) Seja $Q \subset \mathbb{P}^n$ uma quádrlica não-singular de dimensão $n - 1$. Então um gerador g de Q é um subespaço linear contido em Q , cuja dimensão é a parte inteira de $\frac{n-1}{2}$. Denotaremos o conjunto de geradores de Q por $\text{Gen}(Q)$.

Observação 1.1.1 Veremos posteriormente que uma quádrlica singular em $\mathbb{P}^n$

pode conter subespaços lineares de dimensão maior que $\frac{n-1}{2}$; mas assim como em [17] definiremos os geradores de uma quádrlica singular $(n-1)$ -dimensional como os subespaços lineares contidos na quádrlica, cuja dimensão é a parte inteira de $\frac{n-1}{2}$, usando o termo degeneradores para denominar os subespaços lineares de dimensão maior ou igual à $\frac{n}{2}$.

Lema 1.1.1 ([17], Lema 1.3) Seja φ uma forma quadrática não degenerada sobre o espaço vetorial V . Então:

(a) se $\dim(V) = 2r + 1$, existe uma base $e_0, e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r$ de V tal que

$$\varphi \left(\sum_i x_i e_i + \sum_i y_i f_i \right) = x_0^2 + \sum_i x_i y_i$$

isto é, existe uma base de V na qual φ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

onde os blocos são $1 \times 1, 1 \times r, r \times 1$ e $r \times r$.

(b) se $\dim(V) = 2r$, então existe uma base $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r$ de V tal que

$$\varphi \left(\sum_i x_i e_i + \sum_i y_i f_i \right) = \sum_i x_i y_i$$

isto é, existe uma base de V na qual φ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre $\dim(V)$.

Seja φ uma forma quadrática não-degenerada associada à forma bilinear simétrica b . Suponhamos que $\dim(V) > 1$ (o caso igual à 1 é trivial) e que o resultado é verdadeiro para espaços de dimensão menor ou igual à $\dim(V) - 1$. Como k é um corpo algebricamente fechado e $\dim(V) > 1$, existe $e_1 \in V$ tal que $\varphi(e_1) = 0$. Desde que φ é não-degenerada, existe $f'_1 \in V$ tal que $b(e_1, f'_1) = 1$. Defina

$$f_1 = f'_1 - e_1 \frac{\varphi(f'_1)}{2}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\varphi(f_1) &= b(f_1, f_1) = b(f'_1, f'_1) - \varphi(f'_1) \cdot b(e_1, f'_1) + \frac{(\varphi(f'_1))^2}{4} \cdot b(e_1, e_1) = 0 \\ b(e_1, f_1) &= b(e_1, f'_1) - \frac{\varphi(f'_1)}{2} \cdot b(e_1, e_1) = 1\end{aligned}$$

Como $\varphi|_{\{e_1, f_1\}}$ é não degenerada podemos escrever

$$V = \{e_1, f_1\} \oplus \{e_1, f_1\}^\perp$$

(aqui consideramos a ortogonalidade em relação à forma bilinear simétrica b). Assim $\dim(\{e_1, f_1\}^\perp) = \dim(V) - 2$ e pela hipótese de indução segue que existe uma base $e_2, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r$ de $\{e_1, f_1\}^\perp$ satisfazendo as condições do lema para os casos em que $\dim(\{e_1, f_1\}^\perp)$ é par ou ímpar. O resultado segue. ■

Segue do Lema 1.1.1 que uma quádrlica suave de dimensão $n - 1$ não pode conter subespaços lineares de dimensão maior que a parte inteira de $\frac{n-1}{2}$.

De fato:

se E é um s -plano isotrópico para φ , isto é, se $\varphi|_E \equiv 0$, podemos determinar que $e_1, e_2, \dots, e_s$ seja uma base de E . Como $E \subset E^\perp$ temos $\dim(E) \leq \dim(E^\perp)$ e consequentemente devemos ter $\dim(E) \leq \frac{n-1}{2}$.

Proposição 1.1.1 ([17], Teorema 1.2) Uma quádrlica suave Q de dimensão n não contem subespaços lineares de dimensão estritamente maior que $\frac{n}{2}$; além disso:

- 1) Se $n = 2m + 1$ é ímpar, então $\text{Gen}(Q)$ é suave, irredutível e de dimensão $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$; além disso, $\text{Gen}(Q)$ tem coberturas por espaços afins tais que quaisquer dois pontos g e $g' \in \text{Gen}(Q)$ pertencem a um aberto afim comum.
- 2) Se $n = 2m$ é par, então $\text{Gen}(Q) = A \cup B$ com A e B variedades irredutíveis disjuntas de dimensão $\frac{m(m+1)}{2}$; além disso, A e B tem coberturas por espaços afins tais que quaisquer dois pontos $g, g' \in A$ (respectivamente B) pertencem a um aberto afim comum de A (respectivamente B). Finalmente $\dim(g \cap g') \equiv n(2)$ se, e somente se, g e $g' \in \text{Gen}(Q)$ pertencem à mesma componente.

Demonstração: Seja $g \in \text{Gen}(Q)$, onde $g = \mathbb{P}(E)$, E um $\frac{n+2}{2}$ -plano do espaço vetorial $n + 2$ -dimensional V . Temos dois casos a considerar.

- (1) Seja $n = 2m + 1$. Então E tem dimensão $m + 1$. Seja $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ uma base de E . Considerando a base $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}, f_1, f_2, \dots, f_{m+1}, e_0$ de V (obtida como na demonstração do Lema 1.1.1) E pode ser representado matricialmente por

$$E = [I \mid 0]$$

onde os blocos são de ordem $(m+1) \times (m+1)$ e $(m+1) \times (m+2)$, respectivamente. Considere o aberto $U_{12\dots m+1}$ de $\text{Gr}(m+1, n+2)$. Temos que $U \supset E$ e se E' é um $(m+1)$ -plano nesta vizinhança de E podemos representar E' matricialmente por

$$E' = [I|X|Y]$$

onde I e X são quadradas de ordem $m+1$ e Y é de ordem $(m+1) \times 1$. Como vimos anteriormente, as entradas (x_{ij}, y_i) são as coordenadas de um espaço afim.

Por outro lado, pelo Lema 1.1.1 a forma quadrática φ que define a quádrlica Q , na base determinada anteriormente, tem a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo temos que a $g' = \mathbb{P}(E')$ é um gerador de Q se, e somente se,

$$[I|X|Y] \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X^T \\ Y^T \end{bmatrix} = 0$$

ou seja

$$X + X^T + Y^T Y = 0$$

Estas equações podem ser reescritas como

$$x_{ii} = \frac{1}{2} y_i^2$$

$$x_{ij} = y_i y_j - x_{ji}$$

onde $i > j$. Portanto, $\text{Gen}(Q)$ é coberto por abertos afins e tem dimensão

$$(m+1)(m+2) - \left[\frac{(m+1)m}{2} + (m+1) \right] = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

(2) Seja $n = 2m$. Então $\dim(E) = m+1$. Em raciocínio análogo ao anterior podemos determinar uma base de V tal que φ, E e um $(m+1)$ -plano na vizinhança de E sejam dados pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, [I \mid 0] \text{ e } [I \mid X]$$

respectivamente. Assim $g' = \mathbb{P}(E')$ é um gerador de Q se, e somente se,

$$[I \mid X] \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X^T \end{bmatrix} = 0$$

ou seja

$$X + X^T = 0$$

Portanto $\text{Gen}(Q)$ tem corbetura por abertos afins e tem dimensão

$$\frac{(m+1)m}{2}.$$

Resta mostrar que $\text{Gen}(Q)$ é irredutível se $\dim(Q)$ é par e consiste de duas componentes irredutíveis se $\dim(Q)$ é ímpar. Para tanto, observemos que dados dois geradores distintos de Q , eles pertencem a mesma vizinhança afim se, e somente se, existe um terceiro gerador disjunto de ambos.

Seja $\dim(Q) = 2m + 1$ e $g = \mathbb{P}(E)$ e $g' = \mathbb{P}(E')$ geradores distintos de Q . Sejam C e C' espaços lineares complementares a $E \cap E'$ em E e em E' , respectivamente, tais que $E + E' = E \cap E' \oplus C \oplus C'$. Temos que $\varphi|_{C \oplus C'}$ é não-degenerada, pois caso contrário E ou E' estariam contidos em um espaço linear de dimensão estritamente maior que $m + 1$ contido em Q o que não ocorre pois Q é suave. Consequentemente podemos escolher uma base de C e considerar a base dual para C' . O ortogonal $(C + C')^\perp$ também é não-degenerado para φ e $E \cap E' \subset (C \oplus C')^\perp$ é um subespaço maximal. Podemos escolher uma base $e_1, \dots, e_{m+1}, f_1, \dots, f_{m+1}, e_0$ de V tal que $e_1, \dots, e_r$ gera C , $e_{r+1}, \dots, e_{m+1}$ gera $E \cap E'$, $f_1, \dots, f_{m+1}$ gera C' e φ tem a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos F como o espaço linear gerado por

$$f_{r+1}, \dots, f_{m+1}, e_1 + f_2, e_2 - f_1, e_3 + f_4, \dots, e_{2\frac{r}{2}-1} + f_{2\frac{r}{2}}, e_{2\frac{r}{2}} + f_{2\frac{r}{2}-1}$$

e finalmente, se r é ímpar, $e_r - \frac{1}{2}f_r + e_0$. Segue que $g'' = \mathbb{P}(F)$ está contido

em Q , tem dimensão $m + 1$ e não intercepta E nem E' . ■

Passamos agora ao estudo de subespaços lineares de quádricas singulares. Tendo em vista os propósitos deste trabalho, nos deteremos ao estudo de quádricas singulares de $\mathbb{P}^5$, embora daremos algumas definições gerais.

Definição 1.1.3 ([17]) Uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é um cone ao longo de $O \subset X$ se para todo $o \in O$ e todo $x \in X$ a reta ox está contida em X . O é chamado vértice de X .

Lema 1.1.2 ([10]) Uma quádrica $Q \subset \mathbb{P}^n$ de posto k é um cone ao longo de um $(n - k)$ -plano $\Lambda \subset Q \subset \mathbb{P}^n$ sobre uma quádrica suave em $\mathbb{P}^{k-1}$.

Demonstração: Seja Q uma quádrica definida pela forma quadrática φ tal que a matriz da forma bilinear simétrica b associada à φ tem posto k . As equações

$$bx = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}x_j = 0$$

com $i = 1, \dots, k$ definem um espaço linear Λ de dimensão (vetorial) $n - k + 1$, que é o vértice de Q . Seja V_k um espaço linear k -dimensional disjunto de Λ e denotemos por $\tilde{Q}$ a interseção $Q \cap V_k$.

Afirmamos que $\tilde{Q}$ é uma quádrica suave contida em um espaço de dimensão (projetiva) $k - 1$. De fato: seja $y \in \tilde{Q}$. Por definição, o espaço tangente à Q em y passa pelo vértice. Se V_k estivesse contido neste espaço, então V_k interceptaria o vértice, pois um espaço de dimensão (projetiva) $k - 1$ e um espaço de dimensão $n - k$ em um espaço de dimensão $n - 1$ se interceptam. Portanto V_k intercepta o espaço tangente à Q em y em um espaço de dimensão (projetiva) $k - 2$, isto é, o espaço tangente à $\tilde{Q}$ em y tem dimensão $k - 2 = \dim(\tilde{Q})$. Consequentemente y é um ponto suave de $\tilde{Q}$.

A reta $\lambda z + \mu y$ ligando qualquer ponto z do vértice Λ a um ponto y de $\tilde{Q}$ satisfaz a equação

$$\lambda^2 y^T b y + 2\lambda \mu y^T b z + \mu^2 z^T b z = 0$$

para quaisquer valores de λ, μ , e portanto está contida em Q . Logo, Q é um cone com vértice Λ sobre a quádrica suave $\tilde{Q}$. ■

Definição 1.1.4 Uma quádrica Q cujo vértice Λ tem dimensão $n - k$ é denominada um $(n - k)$ -cone. Uma quádrica $\tilde{Q} = Q \cap V_k$, onde V_k é um espaço linear k -dimensional disjunto de Λ , é chamada base de Q .

Como consequência do Lema 1.1.2 temos que os espaços lineares gerados

por um ponto do vértice de um cone Q e por um espaço linear contido em uma base de Q são subespaços lineares de Q .

Observação 1.1.2 Seja Q um k -cone com vértice O e base uma quádrlica Q_0 . Os espaços de dimensão máxima contidos em Q são os $(k + 1 + m_0)$ -espaços ligando o vértice aos subespaços lineares de dimensão máxima m_0 de uma base de Q , onde m_0 é a parte inteira de $\frac{n-k-2}{2}$.

Dado um r -plano $g \subset Q$, consideremos o espaço gerado por g e pelo vértice O , o qual de acordo com [17], vamos denotar por $g * O$. A interseção $g_0 = g * O \cap Q_0$ é um gerador de Q_0 e portanto tem dimensão no máximo igual à $\frac{n-k-2}{2}$. Seja $s = \min(r, \frac{n-k-2}{2})$. Para determinar g devemos escolher g_0 um s -plano de Q_0 e então escolher um r -plano de $g_0 * O$.

Vamos então determinar os subespaços lineares dos 0-cones, 1-cones e 2-cones de $\mathbb{P}^5$

Teorema 1.1.1 Seja Q uma quádrlica singular de $\mathbb{P}^5$.

- (a) Se Q é um 0-cone, então $\text{Gen}(Q)$ consiste de uma única família irredutível tridimensional de 2-planos.
- (b) Se Q é um 1-cone, então $\text{Gen}(Q)$ consiste de duas famílias irredutíveis unidimensionais de 2-planos para cada ponto do vértice O .
- (c) Se Q é um 2-cone, então $\text{Gen}(Q)$ consiste de uma única família irredutível de dimensão 1 de 2-planos.

Demonstração: Primeiramente notemos que se Q é uma quádrlica singular de dimensão 4, cujo vértice O possui dimensão $5 - k$, $3 \leq k \leq 5$, então Q_0 tem dimensão $k - 2$. Como Q_0 é suave, temos pela Proposição 1.1.1 que Q_0 não contém subespaços lineares de dimensão maior que $\frac{k-2}{2}$. Portanto:

- (a) Se $k = 5$, Q_0 é uma quádrlica de $\mathbb{P}^4$ e contém uma única família tridimensional de retas. Os 2-planos de Q são portanto gerados por uma reta de Q_0 e pelo ponto O . Logo, $\text{Gen}(Q)$ consiste de uma única família tridimensional de 2-planos que corresponde naturalmente à família de retas de Q_0 .
- (b) Se $k = 4$, Q_0 é uma quádrlica suave em $\mathbb{P}^3$ e pela Proposição 1.1.1, $\text{Gen}(Q_0) = A_0 \cup B_0$, onde A_0 e B_0 são irredutíveis e unidimensionais. Um 2-plano de Q é gerado por uma reta $g_0 \in A_0$ (ou B_0) e por um ponto do vértice O . Sejam A (respectivamente B) o conjunto de 2-planos g contidos em Q tais que a interseção $g_0 = g * O \cap Q_0$ está contida em A_0 (respectivamente B_0). Considere as aplicações

$$a : A \longrightarrow A_0 \quad \text{e} \quad b : B \longrightarrow B_0$$

que a cada $g \in A$ (respectivamente B) associa o único gerador $g_0 \subset Q_0$

tal que $g = \langle g_0, o \rangle$ para algum $o \in O$. Temos que as fibras $a^{-1}(g_0), g_0 \in A_0$ (respectivamente $b^{-1}(g_0), g_0 \in B_0$) são dadas pela união de A_0 's (respectivamente B_0 's), parametrizada pelo vértice $O \cong \mathbb{P}^1$. O resultado segue.

(c) Se $k = 3$, então o vértice O é um plano e Q_0 é uma cônica de $\mathbb{P}^2$. Os 2-planos de Q são dados por um ponto de Q_0 e uma reta contida em O . Logo temos uma família de planos parametrizada por Q_0 e, portanto, unidimensional.

1.1.1 Feixes de Quádricas

Definição 1.1.5 ([2]) Seja $N = \frac{n(n+3)}{2}$ e considere $\mathbb{P}^N$ como o espaço de quádricas em $\mathbb{P}^n$. Um feixe de quádricas em $\mathbb{P}^n$ é uma reta em $\mathbb{P}^N$. Denotaremos um feixe de quádricas por $\mathcal{P}$.

Segue da definição anterior que o espaço de feixes de quádricas é por definição a Grassmanniana $\text{Gr}(2, N+1)$ de retas de $\mathbb{P}^{N+1}$. Um feixe $\mathcal{P} \in \text{Gr}(2, N+1)$ é usualmente dado como

$$\mathcal{P} = \{ \lambda A + \mu B \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \}$$

onde A e B são matrizes simétricas $(n+1) \times (n+1)$. Para qualquer $(\lambda_0 : \mu_0) \in \mathbb{P}^1$, denotamos por $Q_{(\lambda_0 : \mu_0)}$ ou mais usualmente, de maneira não-homogênea por Q_{λ_0} (com um abuso de notação), a quádrica de $\mathbb{P}^n$ dada pela matriz $\lambda_0 A + \mu_0 B$.

Observação 1.1.3 Em [17] define-se um feixe de formas quadráticas como uma reta projetiva $\mathbb{P}_{\Phi}^1$ no espaço projetivo $\mathbb{P}(S^2 V^*)$ de formas quadráticas sobre um espaço vetorial V . O feixe de quádricas associado é o feixe de hipersuperfícies quádricas com equações $\varphi_{\lambda}, \lambda \in \mathbb{P}_{\Phi}^1$.

Definição 1.1.6 ([17]) O conjunto de geradores de um feixe $\mathcal{P}$ consiste da união de todos os geradores das quádricas $Q_{\lambda_0}, (\lambda_0 : 1) \in \mathbb{P}^1$. Mais precisamente definimos o conjunto de geradores $\text{Gen}(\mathcal{P})$ por

$$\text{Gen}(\mathcal{P}) = \{ ((\lambda : 1), E) \mid \varphi_{\lambda} \equiv 0 \} \subset \mathbb{P}_{\Phi}^1 \times Gr$$

onde Gr é a Grassmanniana $G\left(\left(\frac{n}{2}\right) + 1, n+1\right)$ e φ_{λ} é a forma quadrática que define a quádrica Q_{λ} .

Segue da Definição 1.1.6 que a primeira projeção $\text{Gen}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tem como fibras as subvariedades $\text{Gen}(Q_{\lambda})$.

Definição 1.1.7 ([2]) Um cone Q_{λ} de um feixe de quádricas $\mathcal{P}$ é um cone ordinário se seu vértice é um ponto fora do lugar de base X . Caso contrário, o cone é chamado cone excepcional.

1.1.2 Símbolo de Segre

Definição 1.1.8 ([3]) Seja $\mathcal{P} = \{\lambda A + \mu B \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ um feixe de quádricas. O discriminante do feixe $\mathcal{P}$ é a forma binária em $(\lambda : \mu)$:

$$\Delta = \Delta(\lambda, \mu) := \det(\lambda A + \mu B)$$

Observemos que o discriminante do feixe depende da escolha das matrizes A e B . As raízes do discriminante Δ , todavia, são unicamente determinadas a menos de um isomorfismo de $\mathbb{P}^1$. Em particular, as multiplicidades das raízes de Δ são unicamente determinadas. Mais ainda, Δ não é identicamente nulo se, e somente se, Δ é uma forma binária de grau $n + 1$ se, e somente se, a quádrica genérica do feixe é não-degenerada.

Suponha que Δ não é identicamente nulo e que $(\lambda_0 : \mu_0)$ é uma raiz de Δ . Pode ser que todos os subdeterminantes de $\lambda_0 A + \mu_0 B$ de uma certa ordem se anulem. Suponha que todos os subdeterminantes de $\lambda_0 A + \mu_0 B$ de ordem $n + 1 - d$ se anulem, para algum $d \geq 0$, mas nem todos os subdeterminantes de ordem $n - d$. Isto significa que $Q_{(\lambda_0 : \mu_0)}$ é um d -cone com vértice um subespaço linear de dimensão d e base uma quádrica suave em um subespaço linear de dimensão $n - 1 - d$.

Denote por l_i a multiplicidade mínima da raiz $(\lambda_0 : \mu_0)$ nos subdeterminantes de ordem $n + 1 - i$, $i = 0, 1, \dots, d$. Então $l_i > l_{i+1}$ para todo i e assim $e_i := l_i - l_{i+1} > 0$. Temos:

$$\Delta(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_0} \dots (\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_d} \Delta_1(\lambda, \mu)$$

onde $\Delta_1(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$

Definição 1.1.9 ([3]) Os números e_i são chamados números característicos da raiz (λ_0, μ_0) e os fatores $(\lambda\mu_0 - \lambda_0\mu)^{e_i}$ são chamados os divisores elementares do feixe $\mathcal{P}$. Se $(\lambda_i : \mu_i)$, $i = 1, \dots, r$ são as raízes de Δ e $e_0^j, \dots, e_{d_j}^j$ os números característicos associados à raiz $(\lambda_j : \mu_j)$ e $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$, então $[(e_0^1, \dots, e_{d_1}^1), (e_0^2, \dots, e_{d_2}^2), \dots, (e_0^r, \dots, e_{d_r}^r)]$ é chamado o símbolo de Segre do feixe $\mathcal{P}$. Os parenteses são omitidos se $d_i = 1$.

Sabe-se que dois feixes de quádricas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ em $\mathbb{P}^n$ cujos discriminantes tem raízes $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ e $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$ são projetivamente equivalentes em $\mathbb{P}^n$ se, e somente se, eles possuem o mesmo símbolo de Segre e existe um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ levando $(\lambda_i^1 : \mu_i^1)$ à $(\lambda_i^2 : \mu_i^2)$ para todo i (ver [3]). Isto pode ser usado para definir uma forma normal para os feixes $\mathcal{P}$ cujo discriminante não é identicamente nulo (ver [10]). Denote por $(\lambda - a_1)^{e_1}, (\lambda - a_2)^{e_2}, \dots, (\lambda - a_r)^{e_r}$ os divisores

elementares do feixe $\mathcal{P}$. Então as coordenadas podem ser escolhidas de tal forma que $\mathcal{P} = \lambda A + \mu B$ com $A = \text{diag}(P_1, \dots, P_r)$ e $B = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_r)$ onde:

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_i & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_i & 1 & \cdots & 0 \\ a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Q_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

são matrizes de ordem e_i . Os parênteses no símbolo de Segre estão em correspondência 1 – 1 com os cones do feixe. Se Q_λ é um cone no feixe correspondendo à $(e_0, \dots, e_d)$, dizemos que Q_λ é um cone do tipo $(e_0, \dots, e_d)$. A quádrlica Q_λ é então um d -cone e a correspondente raiz do discriminante Δ é uma raiz de multiplicidade $e := \sum_{i=0}^d e_i$. Por um abuso de notação diremos que Q_λ é um d -cone de multiplicidade e .

Definição 1.1.10 ([3]) A interseção de quaisquer duas quádrlicas de um feixe $\mathcal{P}$ é chamado lugar de base do feixe $\mathcal{P}$, que será denotado por X .

Em geral, neste trabalho assumimos que os feixes de quádrlicas $\mathcal{P}$ são gerados pela quádrlica de Plücker G e uma outra quádrlica $F \subset \mathbb{P}^5$ distinta de G . Neste caso, o lugar de base X é um complexo quadrático de retas.

1.2 Generalidades sobre o complexo quadrático de retas

1.2.1 A Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$

Nesta subseção apresentaremos os principais resultados sobre a Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$, $\text{Gr}(2, 4)$. A referência bibliográfica utilizada é [1].

Definição 1.2.1 ([1]) A Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$, $\text{Gr}(2, 4)$, é o conjunto de planos de $\mathbb{C}^4$ que passam pela origem.

Um plano de $\mathbb{C}^4$ passando pela origem pode ser dado por dois vetores L.I. $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ e $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$. Assim representaremos um plano $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$ gerado pelos vetores a_1 e a_2 pela matriz 2×4 :

$$\Lambda : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Como os vetores a_1 e a_2 são L.I. pelo menos um dos subdeterminantes 2×2 da matriz que representa a plano Λ é não-nulo. Assim a Grassmanniana $\text{Gr}(2, 4)$ pode ser coberta pelos abertos

$$U_{ij} = \{\Lambda \in G(2, 4) \mid a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \neq 0\}$$

com $i < j$, ou seja, os abertos $U_{ij} \subset G(2, 4)$ são formados pelos planos de $\mathbb{C}^4$ cujas matrizes que os representam possuem subdeterminante 2×2 dado pelas colunas i e j diferente de zero.

Teorema 1.2.1 ([1]) Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de $G(2, 4)$ e os pontos $(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \in \mathbb{P}^5$, onde p_{ij} é o determinante da submatriz da matriz que representa um plano $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$, formada pelas colunas i e j , cujas coordenadas satisfazem a seguinte equação

$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

Demonstração: Ver [1]

Definição 1.2.2 As coordenadas $(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$ são chamadas coordenadas de Plücker e a variedade de $\mathbb{P}^5$ dada equação do Teorema 1.2.1 é chamada quádrlica de Plücker.

Observação 1.2.1 Neste trabalho utilizaremos também sistemas de coordenadas em $\mathbb{P}^5$ distintos das coordenadas de Plücker, objetivando facilitar os cálculos no que desejamos provar em cada caso. Basicamente, faremos uso também, segundo a terminologia clássica, das chamadas coordenadas de Klein, que denotaremos por $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6)$. Neste sistema de coordenadas a equação da quádrlica de Plücker é dada por

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2$$

No Capítulo 3 utilizaremos as relações entre estes dois sistemas de coordenadas, as quais estão descritas em [12], para cada Símbolo de Segre. O Teorema 1.2.1 afirma que toda reta de $\mathbb{P}^3$ é parametrizada por um ponto da quádrlica G . Dado um ponto $x \in G$ denotaremos por l_x a reta de $\mathbb{P}^3$ parametrizada por x .

Sabemos da Proposição 1.1.1 que G possui duas famílias tridimensionais de 2planos. Estas duas famílias de planos parametrizam determinadas configurações de retas de $\mathbb{P}^3$.

Uma das famílias, que chamamos família de α -planos, é dada pelos planos

$\alpha(p)$, $p \in \mathbb{P}^3$, o qual parametriza todas as retas de $\mathbb{P}^3$ que passam pelo ponto p . Esta configuração é chamada estrela.



Figura 1.1: Configuração Estrela

A outra família de planos, chamada de família de β -planos é constituída dos planos $\beta(h)$, $h \subset \mathbb{P}^3$, que parametrizam todas as retas de $\mathbb{P}^3$ contidas no hiperplano h . Esta configuração é chamada de plano regrado.

As retas contidas em G são de particular interesse neste trabalho. Elas parametrizam uma outra configuração de retas de $\mathbb{P}^3$:

Proposição 1.2.1 ([1]) Dada uma reta $L \subset G$, L parametriza o conjunto de todas as retas de $\mathbb{P}^3$ contidas em um plano e passando por um ponto. Esta configuração é conhecida como feixe de retas de $\mathbb{P}^3$.

Demonstração: Ver [1]

Assim, dada uma reta L contida na quádrlica G , associaremos à esta reta o feixe de retas de $\mathbb{P}^3$ passando pelo ponto p_L , denominado foco do feixe, e contidas no plano h_L , chamado plano de feixe. Daqui por diante utilizaremos esta notação para nos referir a um feixe de retas.

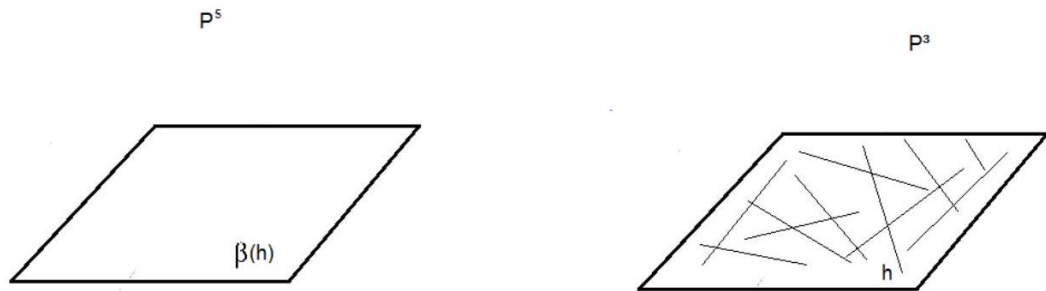


Figura 1.2: Configuração Plano Regrado

1.2.2 O complexo quadrático de retas e a superfície singular associada

Sejam $G \subset \mathbb{P}^5$ uma quádrlica suave que consideraremos como a quádrlica de Plucker, embora nem sempre com coordenadas de Plücker, pois utilizaremos as coordenadas mais adequadas ao contexto trabalhado, e $F \subset \mathbb{P}^5$ uma quádrlica suave distinta de G .

Definição 1.2.3 A interseção completa $X = F \cap G$ parametriza um conjunto de retas de $\mathbb{P}^3$, o qual é classicamente denominado complexo quadrático de retas. Chamaremos a própria variedade X de complexo quadrático de retas ou simplesmente de complexo quadrático definido por F .

Observação 1.2.2 Vimos na Seção 1.1.1 que o lugar de base de um feixe de quádricas é dado pela interseção de quaisquer duas quádricas do feixe. Deste modo, podemos considerar o complexo quadrático de retas X como o lugar de base do feixe de quádricas gerado pelas quádricas F e G , $\mathcal{P} = \{\lambda G + \mu F \mid ((\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1)\}$. Salvo menção contrária, ao nos referirmos ao complexo quadrático X o consideraremos como o lugar de base do feixe $\mathcal{P}$.

Embora G e F sejam quádricas suaves, o complexo X pode conter singularidades. Quando X é suave e em alguns outros casos que veremos mais adiante, X não contém 2-planos. Assim as interseções $\alpha(p) \cap F, p \in \mathbb{P}^3$ e $\beta(h) \cap F, h \subset \mathbb{P}^3$ são cônicas e existem portanto três possibilidades para cada uma delas:

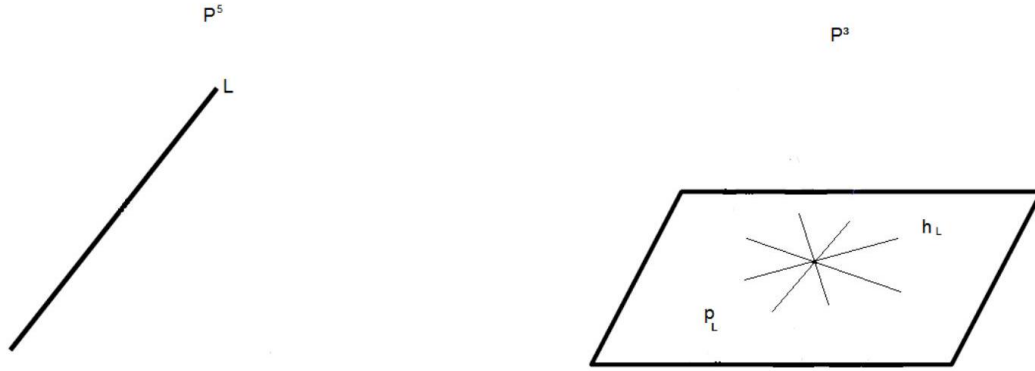


Figura 1.3: Configuração Feixe

- 1) F intercepta $\alpha(p)$ transversalmente. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ passando por p é um cone com vértice p sobre uma cônica não-singular.
- 2) F intercepta $\alpha(p)$ em duas retas, isto é, $\alpha(p)$ é tangente à F em um ponto. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ corresponde à dois feixes de retas com foco sobre o ponto p .
- 3) F intercepta $\alpha(p)$ em uma reta dupla, isto é, $\alpha(p)$ é tangente à F ao longo de uma reta. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ corresponde a um feixe duplo com foco sobre o ponto p .
- 1') F intercepta $\beta(h)$ transversalmente. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ contidas em h são o conjunto de retas tangentes a uma cônica suave contida em h .
- 2') F intercepta $\beta(h)$ em duas retas, isto é, $\beta(h)$ é tangente à F em um ponto. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ corresponde à dois feixes contidas no plano h .

3') F intercepta $\beta(h)$ em uma reta dupla, isto é, $\beta(h)$ é tangente à F ao longo de uma reta. Neste caso, o lugar de retas em $\mathbb{P}^3$ corresponde a um feixe duplo contido no plano h .

De uma maneira geral definimos:

Definição 1.2.4 ([7]) Seja $X = F \cap G$ um complexo quadrático de retas. O conjunto $S = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid rk(\alpha(p) \cap F) \leq 2\}$, ou seja, o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{P}^3$ tais que ocorre o caso 2) ou o caso 3) descrito acima, é uma superfície em $\mathbb{P}^3$, não necessariamente irredutível, chamada superfície singular associada ao complexo X . O conjunto $R = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid rk(\alpha(p) \cap F) \leq 1\}$ é um subconjunto algébrico de dimensão ≤ 1 de S . Analogamente, o conjunto $S^* = \{h \in \mathbb{P}^{3*} \mid rk(\beta(h) \cap F) \leq 2\}$, isto é, o conjunto dos pontos $h \in \mathbb{P}^{3*}$ tais que a condição 2') ou 3') ocorre é chamada superfície singular dual associada à X . O conjunto de pontos $h \in \mathbb{P}^{3*}$ para os quais ocorre a condição 3') é denotado por R^* .

Um resultado que será muito utilizado nos cálculos feitos no Capítulo 3 e também para mostrar que S é uma superfície de grau 4, diz respeito à interseção do complexo quadrático X com o espaço tangente à X em um ponto suave x :

Proposição 1.2.2 ([7]) Seja $X = F \cap G$ um complexo quadrático de retas e $x \in X$ um ponto suave. Então a interseção

$$T_x X \cap X$$

consiste de no máximo 4 retas.

Demonstração: Seja x um ponto suave do complexo quadrático $X = F \cap G$. Seja $T_x X$ o espaço tangente à X em x . Temos que:

$$T_x X \cap X = T_x G \cap G \cap T_x F \cap F$$

Por [8] sabemos que $T_x G \cap G$ (respectivamente $T_x F \cap F$) é um 0-cone com vértice x e base uma quádrlica suave $\tilde{G}$ (respectivamente $\tilde{F}$) de dimensão 2 contida em um 3-plano de $T_x G$ (respectivamente $T_x F$) que não contem x . Agora, como x é um ponto suave de X , a interseção

$$\tilde{G} \cap \tilde{F}$$

consiste de quatro pontos. Logo

$$T_x X \cap X$$

consiste das retas ligando um ponto da interseção $\tilde{G} \cap \tilde{F}$ ao ponto x . O

resultado segue. ■

Proposição 1.2.3 ([7]) S possui grau 4 e é singular ao longo de R .

Demonstração: Seja l_x uma reta genérica do complexo X e suponhamos que l_x não é tangente à S . Para todo ponto $p \in l_x \cap S$, temos:

- $p \in l_x \Rightarrow x \in \alpha(p)$
- $p \in S \Rightarrow \alpha(p) \cap F$ é uma cônica singular.

Portanto, l_x pertence à um ou à ambos os feixes com foco p , isto é, x pertence à uma ou à ambas as retas $\alpha(p) \cap F$.

Reciprocamente, qualquer feixe de retas em X que contenha a reta l_x terá seu foco sobre l_x , e conseqüentemente sobre $l_x \cap S$. Deste modo, supondo que a reta l_x não está contida em dois feixes cofocais do complexo X , os pontos da interseção $l_x \cap S$ correspondem exatamente às retas $L \subset X$ que passam pelo ponto x .

Portanto, assumindo finalmente que $T_x X \cap X$ não contem componentes múltiplas, segue da Proposição 1.2.2 que

$$\deg S = (l_x \cap S) = 4$$
■

Notemos que, como $T_x X \cap X$ consiste de no máximo quatro retas, se uma reta l_x pertence à dois feixes com foco p , ou seja, se x corresponde ao ponto de interseção das retas de $\alpha(p) \cap F$, então a reta l_x intercepta em S em no máximo outros dois pontos. Logo, l_x é tangente à S .

Lema 1.2.1 ([7]) Seja $x \in X$ um ponto suave. A reta $l_x \subset \mathbb{P}^3$ parametrizada pelo ponto x é tangente à superfície singular S se, e somente se, a reta dual $l_x^* \subset \mathbb{P}^{3*}$ é tangente à S^* .

Proposição 1.2.4 ([7]) S e S^* são superfícies duais.

Demonstração: Sejam $p \in S$ um ponto qualquer e $h := T_p(S)$ o plano tangente à S em p . Sejam p^* e h^* o hiperplano e o ponto em $\mathbb{P}^{3*}$ duais à p e h , respectivamente. Considere o feixe $\{l_x\}$ de retas de $\mathbb{P}^3$ passando por p e contidas em h . As retas duais $\{l_x^*\}$ formam um feixe de retas em $\mathbb{P}^{3*}$ passando por h^* e contidas em p^* . Mais ainda: como as retas l_x são, por construção, tangentes à S , então, pelo Lema 1.2.1, temos que as retas l_x^* são tangentes à S^* . Conseqüentemente todo elemento do feixe $\{l_x^* \cdot S^*\}$ é singular, e, portanto, pelo Teorema de Bertini eles são singulares no lugar de base h^* do feixe $\{l_x^*\}$. Logo, $h^* \in S^*$ e $T_{h^*} S^* = p^*$.

■

Para determinar a equação de S e mostrar que, de fato, S é uma superfície, precisamos de alguns conceitos.

Definição 1.2.5 ([7]) Para qualquer $x \in X$, a reta l_x é chamada uma reta singular do complexo X se ela é um elemento de dois feixes cofocais de X . Em outras palavras se $\alpha(p)$ é tangente à F em x para algum $p \in l_x$.

Se uma reta l_x do complexo é singular em um ponto p , então segue da definição da superfície singular S que $p \in S$. Reciprocamente, para $p \in S \setminus R$ existe uma única reta singular em p , a saber, a reta de interseção dos feixes cofocais correspondentes. Se $p \in R$, qualquer reta l_x passando por p será singular em p .

Definição 1.2.6 ([3]) O conjunto $\Sigma = \{x \in X \mid l_x \text{ é uma reta singular do complexo } X\}$ é uma superfície em X , não necessariamente irredutível, chamada superfície singular em $\mathbb{P}^5$ associada ao complexo X .

Lema 1.2.2 ([3]) Seja $x \in \Sigma$.

- i) Se x é um ponto suave de X , a reta l_x é singular em exatamente um ponto $p \in l_x$.
- ii) Se x é um ponto singular de X , a reta l_x é singular em qualquer ponto $p \in l_x$.

Demonstração: i) Sejam $p \neq q$ pontos distintos da reta l_x . Como $\alpha(p) \cap \alpha(q) = x$, o espaço linear gerado por $\alpha(p)$ e $\alpha(q)$ em $\mathbb{P}^5$ é todo o espaço tangente $T_x G$. Sendo x um ponto suave de X , temos $T_x F \neq T_x G$ e, portanto, $\alpha(p)$ e $\alpha(q)$ não podem estar ambos contidos em $T_x F$, isto é, l_x é singular em apenas um ponto.

ii) Se x é um ponto singular de X , então $T_x G \subset T_x F$. Consequentemente, para qualquer ponto $p \in l_x$, temos $\alpha(p) \subset T_x G \subset T_x F$.

■

Como consequencia do Lema 1.2.2 podemos definir uma aplicação

$$\pi : \Sigma \setminus \text{Sing}(X) \longrightarrow S$$

associando a cada $x \in X$ o único ponto $p \in S$ em que a reta l_x é singular.

Lema 1.2.3 ([3]) Para qualquer ponto suave $x \in X$ as seguintes condições são equivalentes:

- i) $x \in \Sigma$
- ii) existe um $y \in G, y \neq x$ tal que $T_x F = T_y G$.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) : Suponha que l_x é singular em $p \in \mathbb{P}^3$, isto é, $\alpha(p) \subset T_x F$. Assim, desde que $\alpha(p) \subset G$, temos que $T_x F \cap G$ contem um

plano. Portanto, $T_x F$ é tangente à G em um ponto $y \neq x$ pois, caso contrário, x seria um ponto singular de X .

ii) $\Rightarrow$ i) : Suponha que $T_x F = T_y G$ para algum $y \neq x$. Portanto, $x \in T_y G$ e a reta $\overline{xy} \subset G$. Consequentemente $l_x \cap l_y = p$ para algum $p \in \mathbb{P}^3$. Se $z \in \alpha(p) \subset G$, então a reta $\overline{zy}$ é uma reta em G passando por y , ou seja, $z \in T_y G$. Portanto, $\alpha(p) \subset T_y G = T_x F$. Logo, l_x é singular em p e $x \in \Sigma$. ■

Teorema 1.2.2 ([7]) Seja H a quádrlica definida pela matriz simétrica $H = FG^{-1}F$. Então

$$\Sigma = F \cap G \cap H$$

Demonstração: Seja $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$ as coordenadas de $\mathbb{P}^5$ e suponha que G e F são dadas por

$$(Qx, x) = 0 \text{ e } (Q'x, x) = 0$$

respectivamente, onde Q e Q' são as matrizes simétricas associadas às quádrlicas G e F . Em termos das coordenadas x^* de $\mathbb{P}^{5*}$ o mapa de Gauss aplicado à G e F é dado por

$$x^* = Qx \text{ e } x^* = Q'x$$

As hipersuperfícies duais G^* e $F^* \subset \mathbb{P}^{5*}$ são então dadas por

$$G^* = ((x^*, Q^{-1}x^*) = 0) \text{ e } F^* = ((x^*, Q'^{-1}x^*) = 0)$$

(ver [7], pág. 188). Seja $x \in F$ e suponha que $T_x F$ seja tangente à G . Então $(x^*, Q^{-1}x^*) = 0$, onde $x^* = Q'x$. Daí temos $(Q'x, Q^{-1}Q'x) = 0$. Mas Q^{-1} e Q' são matrizes simétrica e portanto $(Q'x, Q^{-1}Q'x) = (Q'Q^{-1}Q'x, x)$. O resultado segue. ■

Façamos uma escolha de coordenadas tal que a matriz que define a quádrlica G satisfaça $G = G^{-1}$. Vamos mostrar que a aplicação $\pi : \Sigma \setminus \text{Sing}(X) \rightarrow S$ pode ser usada para calcular a superfície S .

Proposição 1.2.5 ([3]) Para qualquer $x \in \Sigma \setminus \text{Sing}(X)$ o ponto Fx pertence à G e a aplicação $\pi : \Sigma \setminus \text{Sing}(X) \rightarrow S$ é dada por $\pi(x) = l_x \cap l_{Fx}$.

Demonstração: Suponha que $x \in \Sigma$ é um ponto suave de X . Como $G = G^{-1}$, pelo Teorema 1.2.2 o ponto x pertence à Σ se, e somente se,

$$x^T G x = 0, x^T F x = 0 \text{ e } x^T F G F x = 0.$$

A última equação pode ser vista também como $(Fx)^T G(Fx) = 0$, donde segue que Fx pertence à G .

Agora com as coordenadas $Y = (Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 : Y_5 : Y_6)$ de $\mathbb{P}^5$, $(Fx)^T Y$ é a equação de $T_x F$ assim como é a equação de $T_{Fx} G$. Consequentemente $T_x F = T_{Fx} G$. Portanto segue da demonstração do Lema 1.2.2 que o ponto de interseção das retas l_x e l_{Fx} é o ponto em que a reta l_x é singular, ou seja, $\pi(x) = l_x \cap l_{Fx}$.

■

1.2.3 A variedade de retas do complexo quadrático

Nesta subseção estudaremos uma variedade contida na Grassmanniana $G(2, 6)$ de retas de $\mathbb{P}^5$, de fundamental importância para os propósitos deste trabalho.

Definição 1.2.7 Seja $A = \{L \in G(2, 6) \mid L \subset X\}$. A é chamada variedade de retas de X .

Proposição 1.2.6 A é uma variedade suave e um recobrimento duplo da superfície singular S , ramificado nos pontos de R .

Demonstração: Para a demonstração de que A é suave sugerimos [7], página 778.

Por outro lado, considere a aplicação

$$j : A \longrightarrow S$$

que a cada reta $L \subset X$ associa o foco p_L do feixe parametrizado por L . Dado um ponto $p \in S \setminus R$ existem duas retas que parametrizam feixes com focos p , a saber as retas da interseção $\alpha(p) \cap F$. Agora se $p \in R$, existe uma única reta (dupla) parametrizando um feixe com foco no ponto p . Logo, a aplicação j descreve A como um recobrimento duplo da superfície singular S ramificado nos pontos de R .

■

Analogamente podemos considerar a aplicação

$$j' : A \longrightarrow S^*$$

que associa a cada reta $L \subset X$ o plano h_L do feixe parametrizado por L . Como antes podemos mostrar que j' descreve A como um recobrimento duplo de S^* ramificado nos pontos de R^*

Temos portanto as involuções

$$i : A \longrightarrow A$$

que a cada $L \in A$ associa o único outro feixe $i(L)$ cofocal com L , e

$$i' : A \longrightarrow A$$

que a cada $L \in A$ associa o único outro feixe $i'(L)$ coplanar com L .

Teorema 1.2.3 ([7]) A é uma variedade abeliana.

No próximo capítulo descreveremos detalhadamente uma família de curvas contida na variedade A . Lá abordaremos também mais alguns resultados referentes ao complexo quadrático de retas.

1.3 Noções de (semi) estabilidade da G.I.T.

Nesta seção abordaremos as noções de (semi) estabilidade da Teoria Geométrica dos Invariantes (G.I.T) necessárias à compreensão de algumas aplicações que faremos no Capítulo 4. Nosso objetivo é descrever detalhadamente o Critério de Estabilidade de Hilbert-Munford e aplicá-lo para determinar a (Semi) Estabilidade de Complexos Quadráticos, Superfícies Singulares e Feixes de Quádricas.

1.3.1 O Critério de Hilbert-Munford

Definição 1.3.1 ([16], pág.70) Seja G um grupo algébrico agindo sobre uma variedade X . Um bom quociente de X por G é um par (Y, ϕ) onde Y é uma variedade e $\phi : X \rightarrow Y$ é um morfismo afim que satisfaz as seguintes condições:

- (a) ϕ é G -invariante, isto é, $\phi(gx) = \phi(x), \forall g \in G$;
 - (b) ϕ é sobrejetivo;
 - (c) se U é aberto em Y , então $\phi^* : A(U) \rightarrow A(\phi^{-1}(U))$ é um isomorfismo de $A(U)$ em $A(\phi^{-1}(U))^G$;
 - (d) se $W \subset X$ é subconjunto fechado G -invariante, então $\phi(W) \subset Y$ é fechado;
 - (e) dados $x, y \in X$, então $\phi(x) = \phi(y)$ se, e somente se, $\overline{O(x)} \cap \overline{O(y)} \neq \emptyset$.
- (Y, ϕ) é um espaço de órbitas se, além das condições (a) e (b), satisfaz $\phi^{-1}(y)$ consiste de uma única órbita. Um bom quociente que é ainda um espaço de órbitas é chamado quociente geométrico.

Definição 1.3.2 ([16], pág.73) Uma linearização de uma ação de um grupo algébrico G sobre uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma ação linear de G sobre k^{n+1} que induz a ação dada sobre X . Uma ação linear de G sobre X é uma ação de G junto com sua linearização.

Definição 1.3.3 ([16],pág.73) Seja X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^n$. Para qualquer ação linear de um grupo redutível G sobre X , um ponto $x \in X$ é chamado

- **semi estável** se existe um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$;
- **estável** se $\dim(O(x)) = \dim(G)$ e existe um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$ e a ação de G sobre $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ é fechada.

Denotaremos o conjunto dos pontos estáveis (respectivamente semi estáveis) de X por X_0^S (respectivamente X^{SS}).

Teorema 1.3.1 (Teorema Fundamental da G.I.T, [16], pág.74) Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Se G é um grupo redutível que age linearmente sobre X , então:

- (1) existe um bom quociente (Y, ϕ) de X^{SS} por G e Y é uma variedade projetiva.
- (2) existe um aberto Y^S tal que $\phi^{-1}(Y^S) = X_0^S e (Y^S, \phi)$ é um quociente geométrico de X_0^S por G .

Infelizmente, o cálculo de invariantes é extremamente difícil e pode ser feito apenas em alguns poucos casos. Neste sentido apresentamos a seguir um critério para estabilidade que evita o cálculo dos invariantes, o Critério de Hilbert-Mumford.

Vamos supor que X é uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^n$ e que G é um grupo redutível que age linearmente sobre X .

Definição 1.3.4 ([16], pág.103) Um subgrupo à 1-parâmetro (1-PS) de G é um homomorfismo não-trivial (de grupos algébricos) $\lambda : k^* \rightarrow G$.

Será conveniente identificar k^* com um subconjunto de $\mathbb{P}^1$, identificando o ponto $\alpha \in k$ com o ponto $(1 : \alpha) \in \mathbb{P}^1$ e escrevendo ∞ para o ponto $(0 : 1) \in \mathbb{P}^1$. Notemos que um morfismo $\phi : k^* \rightarrow X$ pode ou não se estender aos pontos 0 e ∞ , mas se existe a extensão à algum destes pontos ela é única. Deste modo, se X é uma variedade quasi-projetiva em $\mathbb{P}^n$, então ϕ sempre se estende a um morfismo

$$\bar{\phi} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{X}$$

onde $\bar{X}$ denota o fecho de Zariski de X em $\mathbb{P}^n$. Disto podemos deduzir

- (a) qualquer ponto de $\overline{\phi(k^*)} - \phi(k^*)$ é igual à $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t)$ ou à $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)$;
- (b) ϕ é próprio se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)$ não existe (em X).

Agora seja λ um 1-PS de G . Sabemos que existe uma base $e_0, \dots, e_n$ de

k^{n+1} tal que

$$\lambda(t)e_i = t^{r_i}e_i$$

para alguns inteiros r_i . Se $\hat{x} \in k^{n+1}$ é dado por $\hat{x} = \Sigma \hat{x}_i e_i$, então

$$\lambda(t)\hat{x} = \Sigma t^{r_i} \hat{x}_i e_i$$

Definimos:

$$\mu(x, \lambda) = \max \{-r_i : \hat{x}_i \neq 0\}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mu(x, \lambda) > 0 &\iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x} \text{ não existe} \\ \mu(x, \lambda) \geq 0 &\iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\hat{x} \neq 0 \text{ (se ele existe).} \end{aligned}$$

No que segue mostraremos a relação entre a definição de um ponto (semi) estável x de uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ sob a ação linear de um grupo reductível G (Definição 1.3.3) e o valor de $\mu(x, \lambda)$ onde λ é um 1-PS de G .

Lema 1.3.1 ([16], pág. 101) Seja $x \in X$ e $\hat{x} \in k^{n+1}$ um levantamento de x . Então:

- (a) x é semi estável se, e somente se, $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$;
- (b) x é estável se, e somente se, o morfismo

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{x}} : G &\longrightarrow k^{n+1} \\ \sigma_{\hat{x}}(g) &= g\hat{x} \end{aligned}$$

é próprio.

Demonstração: (a) Seja $x \in X$ um ponto semi estável e considere f um polinômio homogêneo invariante de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$. Temos que $f(\hat{x}) \neq 0$ e como f é invariante, segue que $f(y) \neq 0$ para todo $y \in O(\hat{x})$. Portanto $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$.

Reciprocamente, se $0 \notin \overline{O(\hat{x})}$, então existe um polinômio invariante f , tal que $f(0) = 0$ e $f(\overline{O(\hat{x})}) = 1$ (pois $\{0\}$ e $\overline{O(\hat{x})}$ são subconjuntos fechados invariantes de X disjuntos). Assim, f tem termo constante igual à 0 ; portanto alguma parte homogênea de f de grau ≥ 1 deve ser não-nula em $\hat{x}$. Logo x é um ponto semi estável.

(b) Para qualquer polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$, considere o morfismo

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_f : G &\longrightarrow \mathbb{P}_f^n \\ (\sigma_x)_f(g) &= gx\end{aligned}$$

Afirmação:

$$x \text{ é estável} \Leftrightarrow \sigma_{\widehat{x}} \text{ é próprio}$$

é equivalente à

$$(\sigma_x)_f \text{ é próprio} \Leftrightarrow \sigma_{\widehat{x}} \text{ é próprio.}$$

De fato: se x é estável, existe um polinômio f nas condições anteriores tal que $(\sigma_x)_f$ é um morfismo próprio. Portanto se

$$(\sigma_x)_f \text{ próprio} \Rightarrow \sigma_{\widehat{x}} \text{ próprio}$$

temos

$$x \text{ estável} \Rightarrow \sigma_{\widehat{x}} \text{ próprio.}$$

Por outro lado, se $\sigma_{\widehat{x}}$ é próprio, então $O(\widehat{x})$ é fechada e deste modo, pelo item (a), x é semi estável. Assim, existe um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$ e conseqüentemente, se $(\sigma_x)_f$ é próprio, então x é estável.

Portanto é suficiente mostrar que

$$(\sigma_x)_f \text{ é próprio} \Leftrightarrow \sigma_{\widehat{x}} \text{ é próprio.}$$

Para tanto seja $\alpha = f(\widehat{x}) \neq 0$ e considere

$$Z_\alpha := \{y \in k^{n+1} \mid f(y) = \alpha\}$$

Temos o morfismo

$$\pi : Z_\alpha \rightarrow \mathbb{P}_f^n$$

induzido pela projeção natural $k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ e o morfismo

$$\begin{aligned}(\sigma_{\widehat{x}})_f : G &\rightarrow Z_\alpha \\ (\sigma_{\widehat{x}})_f(g) &= g\widehat{x}\end{aligned}$$

tais que

$$(\sigma_x)_f = \pi \circ (\sigma_{\hat{x}})_f$$

π é um morfismo finito e consequentemente é próprio. Portanto, segue das propriedades de morfismos próprios que

$$\sigma_{\hat{x}} \text{ é próprio} \Leftrightarrow (\sigma_{\hat{x}})_f \text{ é próprio} \Leftrightarrow (\sigma_x)_f \text{ é próprio.}$$

■

Proposição 1.3.1 ([16], pág.104) Seja $G = k^*$ e denotemos por λ_1 e λ_2 os 1-PS de G dados por $\lambda_1(t) = t$, $\lambda_2(t) = t^{-1}$. Então:

- (i) x é semi estável se, e somente se, $\mu(x, \lambda_1) \geq 0$ e $\mu(x, \lambda_2) \geq 0$;
- (ii) x é estável se, e somente se, $\mu(x, \lambda_1) > 0$ e $\mu(x, \lambda_2) > 0$.

Demonstração: Pelo Lema 1.3.1 temos que

$$\begin{aligned} x \text{ é semi estável} &\Leftrightarrow 0 \notin \overline{O(\hat{x})} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t.\hat{x} \neq 0 \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t.\hat{x} \neq 0 &\Leftrightarrow \mu(x, \lambda_1) \geq 0 \text{ e } \mu(x, \lambda_2) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \text{ é estável} &\Leftrightarrow \sigma_{\hat{x}} \text{ é próprio} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t.\hat{x} \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} t.\hat{x} \text{ não existem} \\ &\Leftrightarrow \mu(x, \lambda_1) > 0 \text{ e } \mu(x, \lambda_2) > 0. \end{aligned}$$

■

Em geral, segue do Lema 1.3.1 que um ponto (semi) estável de X para a ação de um grupo G é necessariamente (semi) estável para a ação de k^* induzida por qualquer 1-PS. Consequentemente, pela Proposição 1.3.1

$$\begin{aligned} x \text{ semi estável} &\Rightarrow \mu(x, \lambda) \geq 0 \text{ para todo } \lambda \text{ 1-PS de } G. \\ x \text{ estável} &\Rightarrow \mu(x, \lambda) > 0 \text{ para todo } \lambda \text{ 1-PS de } G. \end{aligned}$$

A seguir damos o Critério de Hilbert-Mumford:

Teorema 1.3.2 ([16], pág. 105) Seja G um grupo reductível agindo linearmente sobre uma variedade projetiva X em $\mathbb{P}^n$. Então

$$\begin{aligned} x \text{ é semi estável} &\Leftrightarrow \mu(x, \lambda) \geq 0 \text{ para todo } \lambda \text{ 1-PS de } G. \\ x \text{ é estável} &\Leftrightarrow \mu(x, \lambda) > 0 \text{ para todo } \lambda \text{ 1-PS de } G. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [16], pág. 106 e seguintes.

Observação 1.3.1 Segue da definição que

$$\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$$

para qualquer $g \in G$. Isto assegura que podemos substituir λ por um conjugado conveniente a fim de efetuar os cálculos. Em particular, para $G = SL_m$, é um fato bem conhecido que todo 1-PS é conjugado de um da forma

$$\lambda(t) = \text{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, \dots, t^{r_{m-1}})$$

com

$$\sum r_i = 0, r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{m-1}$$

e nem todo r_i nulo.

Segue da Observação 1.3.1 que

Proposição 1.3.2 ([16], pág. 108) Considere a ação linear de SL_m sobre uma variedade projetiva X . Um ponto $x \in X$ é estável (semi estável) para esta ação se, e somente se, $\mu(gx, \lambda) > 0$ (≥ 0) para todo $g \in SL_m$ e todo 1-PS λ de SL_m da forma

$$\text{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, \dots, t^{r_{m-1}})$$

1.3.2 Semi estabilidade de Complexos Quadráticos, Superfícies Singulares e Feixes de Quádricas

Nesta subseção determinamos os Complexos Quadráticos de Retas e as Superfícies Singulares semi estáveis com respeito à ação dos convenientes grupos. Fazemos também uma breve exposição sobre o espaço de Moduli de formas binárias de grau 6 .

Complexos Quadráticos de Retas

Seja $G \subset \mathbb{P}^5$ uma quádrlica suave. Considerando o espaço projetivo $\mathbb{P}^{20}$ como o espaço que parametriza as quádrlicas em $\mathbb{P}^5$, um complexo quadrático de retas é dado por uma reta em $\mathbb{P}^{20}$ passando por G . Deste modo, o espaço de complexos quadráticos de retas pode ser considerado como a subvariedade fechada

$$LC = \{L \in \text{Gr}(2, 21) \mid G \in L\}$$

da Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^{20}$.

Definição 1.3.5 Dois complexos quadráticos X_1 e X_2 são isomorfos se existe um automorfismo A de $\mathbb{P}^5$ com $X_2 = A(X_1)$.

Temos que o grupo de automorfismo de $\mathbb{P}^5$ que fixa a quádrlica G é, por

definição, o grupo $PSO(G) \cong PSO(6, k)$. Trabalhamos, na verdade, como o recobrimento finito $SO(G)$. Consequentemente, temos uma ação do grupo redutível $SO(G)$ sobre a variedade projetiva LC e como LC admite um fibrado de retas $SO(G)$ -linearizado, a noção de semiestabilidade está bem definida para complexos quadráticos de retas.

Sejam G e G' as matrizes da quádrlica de Plücker em relação a dois sistemas de coordenadas de $\mathbb{P}^5$. Suponhamos que $\det(G) = \det(G') = 1$ (normalizando as matrizes se necessário) e sejam $SO(G)$ e $SO(G')$ os correspondentes grupos. Denotemos por A a matriz de mudança de coordenadas tal que $A^T G A = G'$ e $A^T = A^{-1}$. Então a aplicação

$$\begin{aligned} SO(G) &\longrightarrow SO(G') \\ g &\longmapsto A^T g A \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Assim, sem perda de generalidade, podemos escolher as coordenadas de $\mathbb{P}^5$ de tal modo que a matriz de G é a matriz identidade I_6 . Na terminologia clássica essas coordenadas são chamadas de coordenadas de Klein. O grupo $SO(G)$, nesse caso, coincide com o grupo ortogonal $SO(6)$.

Proposição 1.3.3 ([3]) Seja S_0 o espaço de quádrlicas em $\mathbb{P}^5$ com traço 0. Existe um isomorfismo canônico

$$\Phi : LC \longrightarrow S_0$$

compatível com as ações de $SO(G)$ e $SO(6)$, onde $SO(6)$ age em S_0 por $(g, M) \mapsto g^T M g$. Em particular, a variedade de complexos quadráticos de retas é isomorfa à $\mathbb{P}^{19}$.

Demonstração: Seja $X = F \cap G$ um complexo quadrático e escolha $\mathbb{P}^5$ com coordenadas de Klein. Então o feixe de quádrlicas associado

$$\mathcal{P} = \{ \lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \}$$

contem exatamente uma quádrlica de traço 0, a saber:

$$F_0 = F - \frac{\text{tr}(F)}{6} G$$

que não depende da escolha de F . Reciprocamente, se F_0 é uma forma quadrática não-nula de traço 0, então F_0 e $G(I_6)$ são L.I. e consequentemente determinam um complexo quadrático de retas. As aplicações

$$\Phi : X \mapsto F_0$$

e

$$\Psi : F_0 \mapsto X$$

são inversas uma da outra e determinam o isomorfismo canônico como afirmado.

Se $g \in SO(G)$ temos

$$\Phi(g(X)) = g^T F g - \frac{\text{tr}(g^T F g)}{6} g^T G g = g^T \left(F - \frac{\text{tr}(F)}{6} G \right) g = g^T \Phi(X) g$$

Por outro lado, se $h \in SO(6)$, temos

$$\Psi(h^T F_0 h) = h^T (\Psi(F_0)) h$$

Logo, o isomorfismo Φ é compatível com as ações de $SO(G)$ e $SO(6)$.

Por fim, como $S_0 \cong \mathbb{P}^{19}$, a variedade de complexos quadráticos LC também o é.

■

Segue diretamente da proposição anterior que

Corolário 1.3.1 Um complexo quadrático é semiestável com respeito à ação de $SO(G)$ se, e somente se, a quádrlica associada de traço 0 em $\mathbb{P}^5$ é semiestável com respeito à ação de $SO(6)$.

Proposição 1.3.4 ([3]) Seja

$$F = \sum_{i,j=1}^6 f_{ij} x_i x_j$$

com $f_{ij} = f_{ji}$ para $i \neq j$ uma quádrlica em $\mathbb{P}^5$. A quádrlica F é não semiestável com respeito à ação de $SO(6)$ se, e somente se, ela é equivalente sob esta ação a uma quádrlica $Q = (q_{ij})$ com

$$q_{ij} = 0 \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq 3 \text{ e } q_{14} = q_{15} = q_{16} = q_{25} = q_{26} = q_{36} = 0$$

Demonstração: Considere $\mathbb{P}^5$ com coordenadas de Plücker. Neste caso temos

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Então as matrizes $\text{diag}(x_1, x_2, x_3, x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1})$, com $x_i \in \mathbb{C}^*$ formam o toro maximal de $SO(6)$. Isto e a forma do grupo de Weyl de $SO(6)$ implicam que todo 1-PS de $SO(6)$ é conjugado a um da forma

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C} &\rightarrow SO(6) \\ t &\mapsto \text{diag}(t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3}, t^{r_4}, t^{r_5}, t^{r_6}) \end{aligned}$$

com inteiros $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0$ e $r_4 = -r_1, r_5 = -r_2, r_6 = -r_3$ agindo sobre o espaço das quádricas de maneira usual. Em particular ele age sobre o monômio $x_i x_j$ de grau 2 por

$$\lambda(t)(x_i x_j) = t^{-r_i - r_j} x_i x_j, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq 6$$

Temos $\mu(F, \lambda) = \max \{r_i + r_j \mid f_{ij} \neq 0\}$ e, pelo critério de Hilbert-Mumford, é suficiente mostrar que para a quádrica $Q = (q_{ij})$ do enunciado existe um λ como anteriormente com $\mu(Q, \lambda) < 0$ se, e somente se, os coeficientes $q_{ij} = 0$ na afirmação da proposição se anulam.

Suponha que exista um 1-PS λ tal que $\mu(Q, \lambda) < 0$. Neste caso, os coeficientes mencionados se anulam, pois caso contrário teríamos $\mu(Q, \lambda) \geq 0$. De fato: como $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0$, temos $r_i + r_j \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$ e consequentemente se $q_{ij} \neq 0$ para algum $1 \leq i, j \leq 3$, deveríamos ter $\mu(Q, \lambda) \geq 0$. Temos também

$$\begin{aligned} q_{14} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_1 + r_4 = 0 \\ q_{15} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_1 + r_5 = r_1 - r_2 \geq 0 \\ q_{16} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_1 + r_6 = r_1 - r_3 \geq 0 \\ q_{25} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_2 + r_5 = 0 \\ q_{26} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_2 + r_6 = r_2 - r_3 \geq 0 \\ q_{36} \neq 0 &\Rightarrow \mu(Q, \lambda) \geq r_3 + r_6 = 0 \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que

$$q_{ij} = 0 \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq 3 \text{ e } q_{14} = q_{15} = q_{16} = q_{25} = q_{26} = q_{36} = 0$$

Então a quádrica Q possui equação

$$Q = 2q_{24}x_2x_4 + 2q_{34}x_3x_4 + 2q_{35}x_3x_5 + \sum_{i,j=4}^6 q_{ij}x_ix_j$$

Tomando $r_1 = 3, r_2 = 2$ e $r_3 = 1$ temos

$$\mu(Q, \lambda) = \max(2r_4, 2r_5, 2r_6, r_4 + r_5, r_4 + r_6, r_5 + r_6, r_2 + r_4, r_3 + r_4, r_3 + r_5) = -1 < 0$$

■

Corolário 1.3.2 ([3]) Um complexo quadrático X é semi estável com respeito à ação de $SO(G)$ se o discriminante $\Delta(X)$ possui pelo menos duas raízes distintas, isto é, se seu Símbolo de Segre consiste de pelo menos 2 parênteses.

Demonstração: Pela Proposição 1.3.3, um complexo quadrático em coordenadas de Klein é semi estável se, e somente se, a quádrlica de traço 0 $\Phi(X)$ é semi estável. Escolhendo coordenadas de Plücker a afirmação permanece verdadeira, pois a matriz de mudança de coordenadas A satisfaz $A^T = A^{-1}$. Então G é dada pela matriz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja F_0 a matriz $\Phi(X)$ transformada em coordenadas de Plücker, isto é, $F_0 = A^T \Phi(X) A$

Pelas Proposições 1.3 .3 e 1.3 .4 X é não semi estável se, e somente se, F_0 é equivalente, sob a ação de $SO(6)$, a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Como as multiplicidades das raízes de $\Delta(X)$ permanecem iguais sob uma mudança de coordenadas, podemos assumir que F_0 é desta forma. Mas então $\Delta(X)(\lambda, \mu) = \lambda^6$. Em particular, Δ possui uma única raiz.

■

Superfícies Singulares

Seja

$$S = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=4} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

uma superfície quártica em $\mathbb{P}^3$. Definimos classes de isomorfismo da superfície S da seguinte maneira

Definição 1.3.6 ([3]) Duas superfícies quárticas S e S' em $\mathbb{P}^3$ são isomorfas se existe $\varphi \in SL(4)$ tal que $\varphi(S) = S'$.

Segue da Definição 1.3.6 que o grupo $SL(4)$ age sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}^{34}$ que parametriza todas as superfícies quárticas de $\mathbb{P}^3$. O fibrado de retas $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \mid S$ é $SL(4)$ -linearizável e, portanto, podemos falar de semi estabilidade de pontos de $\mathbb{P}^{34}$.

Lema 1.3.2 ([3]) Uma superfície quártica em $\mathbb{P}^3$ é semi estável com respeito à ação de $SL(4)$ se, e somente se, ela não é isomorfa a uma quártica

$$S = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=4} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

satisfazendo

$$a_{4000} = a_{3100} = a_{3010} = a_{2200} = a_{2110} = a_{2101} = a_{2020} = a_{2011} = a_{2002} = a_{1300} = \\ a_{1210} = a_{1201} = a_{1120} = a_{1111} = 0.$$

Demonstração: Considere o 1-PS

$$\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow SL(4) \\ t \mapsto \text{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2}, t^{r_3})$$

com inteiros $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3, \sum r_i = 0$ agindo sobre o espaço $\mathbb{P}^{34}$ de quárticas em $\mathbb{P}^3$ de maneira usual. Em particular, a ação sobre o monômio de grau $4x_0^{i_0}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ é dada por

$$\lambda(t) (x_0^{i_0}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}) = t^{-(r_0i_0+r_1i_1+r_2i_2+r_3i_3)} x_0^{i_0}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$$

Definimos

$$\mu(S, \lambda) = \max \{r_0i_0 + r_1i_1 + r_2i_2 + r_3i_3 \mid a_{i_0 i_1 i_2 i_3} \neq 0\}$$

Pelo Critério de Hilbert-Mumford é suficiente mostrar que, para uma dada quártica S , existe um 1-PS tal que $\mu(S, \lambda) < 0$ se, e somente se, os coeficientes da afirmação do lema se anulam.

Argumento análogo ao que utilizamos na demonstração da Proposição 1.3.3 mostra que, se existe um 1-PS λ tal que $\mu(S, \lambda) < 0$, então os coeficientes mencionados se anulam. Por exemplo, se $a_{3001} \neq 0$ teríamos

$$\mu(S, \lambda) \geq 3r_0 + r_3 = (r_0 - r_1) + (r_0 - r_2) \geq 0$$

Reciprocamente, suponhamos que todos os coeficientes afirmados se anulem e assumamos $r_0 = 8, r_1 = -1, r_2 = -3$ e $r_3 = -4$. Então $\mu(S, \lambda) = -1 < 0$ e o resultado segue. ■

Proposição 1.3.5 ([3]) Uma superfície quártica $S \subset \mathbb{P}^3$ é semi estável com respeito à ação de $SL(4)$ se, e somente se, não admite um ponto triplo cujo cone tangente é um cone sobre uma cúbica plana cuspidal (possivelmente degenerada).

Demonstração: Pelo Lema 1.3.2, uma superfície quártica $S \subset \mathbb{P}^3$ é semi estável se, e somente se, é isomorfa a uma quártica S' dada pela equação

$$\begin{aligned} & a_{0004}x_3^4 + a_{0013}x_2x_3^3 + a_{0022}x_2^2x_3^2 + a_{0031}x_2^3x_3 + a_{0103}x_1x_3^3 + a_{0112}x_1x_2x_3^2 + \\ & a_{0121}x_1x_2^2x_3 + a_{0130}x_1x_2^3 + a_{0202}x_1^2x_3^2 + a_{0211}x_1^2x_2x_3 + a_{0220}x_2^2x_3^2 + a_{0301}x_1^3x_3 \\ & + a_{0310}x_1^3x_2 + a_{0400}x_1^4 + a_{1003}x_0x_3^3 + a_{1012}x_0x_2x_3^2 + a_{1021}x_0x_2^2x_3 \\ & + a_{1030}x_0x_2^3 + a_{1102}x_0x_1x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Claramente S' possui um ponto triplo em $e_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ cujo cone tangente $TC(e_0)$ é dado, em coordenadas $y_i = \frac{x_i}{x_0}, i = 1, 2, 3$, pela equação

$$TC(e_0) = a_{1102}y_1y_3^2 + a_{1030}y_2^3 + a_{1021}y_2^2y_3 + a_{1012}y_2y_3^2 + a_{1003}y_3^3$$

Considerado como uma curva plana projetiva, $TC(e_0)$ é uma cúbica com uma cúspide em $(1 : 0 : 0)$ (ou uma degeneração dela). Como S e S' são isomorfas, a quártica S tem o mesmo tipo de singularidade.

Reciprocamente, como todas as cúbicas planas cuspidais irredutíveis são isomorfas, toda superfície quártica $S \subset \mathbb{P}^3$ com uma singularidade desse tipo é isomorfa a uma superfície $S' \subset \mathbb{P}^3$ com um ponto triplo em $(1:0:0:0)$ cujo cone tangente é da forma anterior. Pelo Lema 1.3.2, concluímos que S é não semi estável. O mesmo argumento trabalha as degenerações. ■

Feixes de Quádricas

Como vimos na Definição 1.1.5, um feixe de quádricas em $\mathbb{P}^5$ é uma reta no espaço projetivo $\mathbb{P}^{20}$. Considere o grupo $Sl_6(\mathbb{C})$ e sua ação sobre $\text{Gr}(2, 21)$ dada por

$$\begin{aligned} \circ : Sl_6(\mathbb{C}) \times \text{Gr}(2, 21) &\rightarrow \text{Gr}(2, 21) \\ (T, \mathcal{P}) &\mapsto T \circ \mathcal{P} = \lambda T A T^t + \mu T B T^t \end{aligned}$$

onde A e B são matrizes simétricas com $\mathcal{P} = \{\lambda A + \mu B \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$. Pensando em $\text{Gr}(2, 21)$ mergulhada no espaço projetivo via o mergulho de Plücker temos as noções de (semi)-estabilidade da G.I.T. para feixes de quádricas em $\mathbb{P}^5$. Nosso objetivo é descrever os feixes de quádricas de $\mathbb{P}^5$ (semi)-estáveis.

Seja $V = \mathbb{C}^{21}$ o espaço vetorial das quádricas em $\mathbb{P}^5$ e $\mathbb{P}(V \times V)$ a projetivização do espaço vetorial $V \times V$. Defina

$$S_n = \{(A, B) \in \mathbb{P}(V \times V) \mid A \text{ e } B \text{ são L.I.}\}$$

Lema 1.3.3 O aberto S_n é um $PGL_2(\mathbb{C})$ -espaço (ou $Sl_2(\mathbb{C})$ -espaço) com a ação

$$\begin{aligned} \varphi : PGL_2(\mathbb{C}) \times S_n &\rightarrow S_n \\ \varphi(\alpha, (A, B)) &= (\alpha_{11}A + \alpha_{21}B, \alpha_{12}A + \alpha_{22}B) \end{aligned}$$

Mais ainda: (S_n, π) , onde $\pi : S_n \rightarrow \text{Gr}(2, 21)$ é dada por $\pi(A, B) = \lambda A + \mu B$, é um $PGL_2(\mathbb{C})$ -fibrado principal sobre $\text{Gr}(2, 21)$

Demonstração: [2].

Segue do lema anterior que

$$\text{Gr}(2, 21) \approx S_n / PGL_2$$

Lema 1.3.4 A ação de Sl_6 sobre $\text{Gr}(2, 21)$ se levanta a uma ação sobre S_n e essa ação comuta com a ação de $Sl_2(\mathbb{C})$.

Demonstração: Se $T \in Sl_6(\mathbb{C})$ defina $T \circ (A, B) := (T A T^t, T B T^t)$. Temos: $T \circ \pi(A, B) = T \circ (\lambda A + \mu B) = \lambda T A T^t + \mu T B T^t = \pi(T A T^t, T B T^t) = \pi(T \circ (A, B))$.

Além disso:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, T \circ (A, B)) &= \varphi(\alpha, (T A T^t, T B T^t)) = (\alpha_{11}T A T^t + \alpha_{21}T B T^t, \alpha_{12}T A T^t + \\ &\quad \alpha_{22}T B T^t) = (T(\alpha_{11}A + \alpha_{21}B)T^t, T(\alpha_{12}A + \alpha_{22}B)T^t) = T \circ (\varphi(\alpha, (A, B))) \end{aligned}$$

O resultado segue. ■

Defina

$$W_n = \{ (A, B) \in S_n \mid \text{rk}(\lambda A + \mu B) = 6, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \text{ genérico} \}$$

Lema 1.3.5 W_n é um $PGl_2(\mathbb{C})$ -fibrado sobre um aberto de $\text{Gr}(2, 21)$.

Demonstração: [2].

Teorema 1.3.3 $(A, B) \in W_n$ é estável (respectivamente semi estável) com respeito à ação de $Sl_6(\mathbb{C}) \times Sl_2(\mathbb{C})$ se, e somente se, o feixe $\mathcal{P} = \pi(A, B)$ é estável (respectivamente semi estável) com respeito à ação de $Sl_6(\mathbb{C})$.

Vamos então analisar a (semi)-estabilidade dos pontos de W_n .

Definição 1.3.7 Se $(A, B) \in S_n$ definimos o discriminante de (A, B) por

$$D(A, B) := \det(\lambda A + \mu B)$$

Observe que se $(A, B) \in W_n$ então $D(A, B)$ é uma forma binária de grau 6 . Temos:

Lema 1.3.6 A aplicação discriminante

$$D : W_n \rightarrow \mathbb{P}_6$$

é um morfismo próprio e sobrejetivo, equivariante com respeito à ação de $Sl_6(\mathbb{C}) \times Sl_2(\mathbb{C})$ onde $Sl_6(\mathbb{C})$ age trivialmente sobre $\mathbb{P}_6$.

Teorema 1.3.4 (i) $(A, B) \in W_n$ é semiestável se, e somente se, $D(A, B)$ não admite raízes de multiplicidade maior que 3 .

(ii) $(A, B) \in W_n$ é estável se, e somente se, $D(A, B)$ não admite raízes múltiplas.

O Teorema 1.3.4 é análogo à:

Teorema 1.3.5 (i) Um feixe $\mathcal{P}$ é semiestável se, e somente se, seu discriminante não admite raízes de multiplicidade maior que 3 .

(ii) Um feixe $\mathcal{P}$ é estável se, e somente se, seu discriminante não admite raízes múltiplas.

Formas binárias de grau 6

Dada uma forma binária

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^6 a_i x^i y^{6-i}$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, denotemos por $\mathbb{P}_6$ o espaço que parametriza tais formas. Se

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{C})$$

definimos uma ação de $Sl_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{P}_6$ da seguinte forma:

$$\alpha \circ f(x, y) := f(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y)$$

Como $Sl_2(\mathbb{C})$ é um grupo algébrico redutível ([14], seção 4.5) e a ação α é uma ação linear, podemos aplicar o critério de estabilidade Hilbert-Mumford para mostrar que

Teorema 1.3.6 ([15]) Uma forma binária f de grau 6 é estável (respectivamente semi estável) se, e somente se, f não admite raízes de multiplicidade maior ou igual à 3 (respectivamente maior que 3).

No que segue mostramos que o espaço de Moduli das formas binárias de grau 6 semi estáveis é isomorfo ao espaço projetivo ponderado $\text{Proj}(\mathbb{C}[y_1, y_2, y_3, y_5])$

Denotemos por $(\mathbb{P}_6)^{SS}$ (respectivamente $(\mathbb{P}_6)_0^S$) o conjunto das formas binárias de grau 6 semi estáveis (respectivamente estáveis). Da Teoria Geométrica dos Invariantes sabemos que o quociente categórico de $(\mathbb{P}_6)^{SS}$ por $Sl_2(\mathbb{C})$ é uma variedade projetiva, a qual denotaremos por $\overline{\mathcal{M}}_6^b$ e o morfismo $\phi : (\mathbb{P}_6)^{SS} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_6^b$ aplica $(\mathbb{P}_6)_0^S$ sobre o aberto $\mathcal{M}_6^b$. Na verdade, temos

$$A(\overline{\mathcal{M}}_6^b) \approx A((\mathbb{P}_6)^{SS})^{Sl_2(\mathbb{C})}$$

isto é,

$$\overline{\mathcal{M}}_6^b = \text{Proj} \left(A((\mathbb{P}_6)^{SS})^{Sl_2(\mathbb{C})} \right)$$

Vamos então descrever o anel de invariantes de sêxticas binárias $A(\mathbb{P}_6)^{Sl_2(\mathbb{C})}$. Sejam $(\nu_i : \mu_i) \in \mathbb{P}^1$ as raízes da sêxtica binária

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^6 a_i x^i y^{6-i}$$

Assim f pode ser escrita como

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^6 (\mu_i x - \nu_i y) = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_6 \prod_{i=1}^6 \left(x - \frac{\nu_i}{\mu_i} y \right)$$

Temos $a_0 = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_6$ e $\frac{a_i}{a_0}, i = 1, \dots, 6$ são as funções simétricas elementares das raízes $\frac{\nu_i}{\mu_i}$ (a menos de sinal). Para simplificar a notação denotemos por $(ij) := \mu_i \nu_j - \nu_i \mu_j$ e consideremos as expressões:

$$A := \text{mon\^omio sim\^etrico gerado por } a_0^2(12)^2(34)^2(56)^2$$

$$B := \text{mon\^omio sim\^etrico gerado por } a_0^4(12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2$$

$$C := \text{mon\^omio sim\^etrico gerado por}$$

$$a_0^6(12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2(14)^2(25)^2(36)^2$$

$$D : a_0^{10} \prod_{i < j} (ij)^2$$

De acordo com o teorema fundamental sobre fun\c{c}~oes sim\^etricas, os mon\^omios A, B, C e D podem ser expressos como polin\^omios homog\^eneos de graus 2, 4, 6 e 10, respectivamente, nos coeficientes $a_0, \dots, a_6$. Tais polin\^omios s\~ao invari- antes sob a a\c{c}~ao de $Sl_2(\mathbb{C})$. O invariante D \^e exatamente o discriminante da s\^extica. Os invariantes A, B, C e D geram o anel de invariantes $A(\mathbb{P}_6)^{Sl_2(\mathbb{C})}$. Portanto

$$\text{Proj} \left(A(\mathbb{P}_6)^{Sl_2(\mathbb{C})} \right) \approx \mathbb{P}(2 : 4 : 6 : 10) \approx \mathbb{P}(1 : 2 : 3 : 5)$$

Capítulo 2

Curvas associadas à feixes de quádricas semiestáveis

Neste capítulo fazemos um estudo da Seção 6 do artigo [2], a qual fundamenta parte do nosso trabalho. O objetivo é descrever, para todos os casos de feixes de quádricas $\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ (onde G é a quádrlica de Plücker e F uma quádrlica de $\mathbb{P}^5$ distinta de G) semiestáveis, uma curva de gênero 2 contida na variedade de retas $A = \{L \in \text{Gr}(2, 6) \mid L \subset X\}$ sendo $X = F \cap G$ o lugar de base do feixe $\mathcal{P}$. Essa curva de gênero 2 é descrita em [7] no caso em que X é suave. Destacamos a demonstração do Teorema 2.2.2, onde fazemos uma modificação na demonstração apresentada em [2].

2.1 Reta genérica $L \subset X$

Sejam

$$\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

um feixe de quádricas semiestável (ver Seção 1.1.1) e $X = F \cap G$ o lugar de base do feixe. Para o caso em que X não é suave, ele pode conter planos. A proposição a seguir descreve, em termos do Símbolo de Segre do feixe $\mathcal{P}$, quando X contem planos.

Proposição 2.1.1 Seja $\mathcal{P}$ um feixe semiestável em $\mathbb{P}^5$.

- a) Se $\mathcal{P}$ não contem três cones de multiplicidade 2, seu lugar de base não contem um plano.
- b) Se $\mathcal{P}$ é do tipo $[2, 2, 2]$ (respectivamente $[2, 2, (1, 1)]$, $[2, (1, 1)(1, 1)]$, $[(1, 1), (1, 1), (1, 1)]$), seu lugar de base X contem exatamente 1 (respectiva-

mente 2,4,8) planos.

Demonstração: (a) Primeiramente, se $\mathcal{P}(t)$ é uma família de feixes tais que o lugar de base $X(t)$ contem um plano, para cada $t \neq 0$, então a fibra especial $X(0)$ também contem um plano. Também: usando a teoria das formas normais podemos mostrar que a propriedade do lugar de base conter um plano depende somente do Símbolo de Segre do feixe. Portanto é suficiente mostrar a proposição para algumas famílias de feixes tais que todo feixe semiestável é uma generalização de uma dessas famílias. Deste modo, mostraremos o resultado para o lugar de base de qualquer feixe do tipo $[(11111)1]$ ou $[(111)(111)]$.

(i) $[(11111)1]$: Neste caso o lugar de base X é a interseção de um hiperplano duplo $2P \subset \mathbb{P}^5$ com um 0-cone Q_0 cujo vértice v_0 é um ponto tal que $v_0 \notin P$. Consequentemente X é uma estrutura dupla de uma quádrlica suave em $\mathbb{P}^4$ e, portanto, não contem um plano.

(ii) $[(111)(111)]$: Aqui X é a interseção de 2-cones Q_1 e Q_2 cujos vértices são planos V_1 e V_2 , respectivamente, e cujas diretrizes são cônicas suaves. Segue da forma normal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Mais ainda: $V_i \cap X$ é uma cônica suave $C_i \subset V_i$. Consequentemente Q_1 (respectivamente Q_2) é um cone com vértice V_1 (respectivamente V_2) e diretriz C_2 (respectivamente C_1). Segue que X é a união das cônicas C_1 e C_2 e, portanto, não contem planos.

(b) Suponha que x_1, x_2 e x_3 são singularidades de X pertencentes à cones diferentes Q_1, Q_2 e Q_3 do feixe $\mathcal{P}$. Então x_i está no vértice do cone $Q_i, i = 1, 2, 3$. Como $x_2 \in X \subset Q_1$ a reta $\overline{x_1 x_2}$ está contida em Q_1 e pelo mesmo argumento temos $\overline{x_1 x_2} \subset Q_2$ e consequentemente $\overline{x_1 x_2} \subset Q_1 \cap Q_2$. Analogamente temos $\overline{x_i x_j} \subset X$. Como os vértices são independentes em $\mathbb{P}^5$ segue que $\overline{x_1 x_2 x_3}$ é um plano e está contido em X .

Um 0-cone de multiplicidade 2 produz um ponto singular de X , a saber seu vértice. Um 1-cone de multiplicidade 2 produz dois pontos singulares de X que correspondem a interseção do vértice, neste caso uma reta, com uma segunda quádrlica do feixe. Consequentemente X contem os planos mencionados. É suficiente mostrar que estes são os únicos. Consideremos o caso $[(11)(11)(11)]$ (os demais são análogos). Sejam Q_1, Q_2 e Q_3 os 1-cones do feixe cujos vértices são as retas V_1, V_2 e V_3 (respectivamente) e $P \subset X$ um plano contido em X . Assim $P \subset Q_i, i = 1, 2, 3$. Denotemos por x_i e x'_i os pontos da interseção $V_i \cap X$. Os 1-cones Q_i tem como base quádrlicas suaves bidimensionais (que não contem planos) e portanto $P \cap V_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$. Como $P \subset X$, temos $P \cap V_i \subset X \cap V_i = x_i \cup x'_i$. Logo, P é um dos planos mencionados.

■

Segue imediatamente da Proposição 2.1.1 que

Corolário 2.1.1 Seja $\mathcal{P} = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$, um feixe semiestável em $\mathbb{P}^5$. Para todo plano $P \subset \mathbb{P}^5$ que não passa por três singularidades de X provenientes de três cones diferentes de $\mathcal{P}$, existe um $\lambda \in \mathbb{P}^1$ com $P \subset Q_\lambda$.

Proposição 2.1.2 Seja $\mathcal{P} = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ um feixe semiestável em $\mathcal{P}^5$ com lugar de base X .

a) Suponha que X contem somente um número finito de singularidades. Então existe uma reta L em X evitando os vértices de todos os cones de X e que não está contida em nenhum plano de X .

b) Suponha que X contem uma curva S de singularidades. Toda reta em X intercepta S . Se $\mathcal{P}$ não é do tipo $[(1, 1, 1), (1, 1, 1)]$ então existe uma reta em X evitando os vértices dos 0-cones e 1-cones de X .

Demonstração: (a) Para o caso em que o lugar de base X possui apenas um número finito de singularidades, o feixe $\mathcal{P}$ possui no máximo 0-cones e 1-cones. Para feixes semiestáveis temos 3 casos:

(i) $\mathcal{P}$ contem dois 0-cones, um cone ordinário ou é do tipo [33].

Neste caso, segue da Proposição 2.1.1 que X não contem planos. Sejam Q_1 e Q_2 os 0-cones de $\mathcal{P}$ e $H \subset \mathbb{P}^5$ um hiperplano que não contem as singularidades de X nem os vértices de Q_1 e Q_2 . As interseções $Q_i \cap H := \tilde{Q}_i, i = 1, 2$ são quádricas em $H \cong \mathbb{P}^4$ e $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ é uma superfície de Del Pezzo. O número de retas que ela contem depende do Símbolo de Segre do feixe de quádricas em $\mathbb{P}^4$, cujo lugar de base é $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$. No caso em que o Símbolo de Segre é [11111], $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ contem 16 retas. No pior caso possível (sob as hipóteses anteriores), o feixe tem Símbolo de Segre [(21)11] e o lugar de base contem 4 retas. Se L é qualquer dessas retas, então, por construção, L não passa pelos vértices dos 0-cones nem intercepta os vértices dos 1-cones, já que a interseção seria uma singularidade de X .

(ii) $\mathcal{P}$ é do tipo [222] ou do tipo [22(11)].

Neste caso, pela Proposição 2.1.1, X contem no máximo dois planos. Escolha um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^5$ que não passa pelas singularidades de X nem pelos vértices dos 0-cones. Então $H \cong \mathbb{P}^4$ determina um feixe de quádricas em $\mathbb{P}^4$ do tipo [221] ou [2(11)1]. Neste caso o lugar de base $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ contem 9 e 6 retas, respectivamente. A interseção de um hiperplano (genérico) H com os dois planos contidos em X consiste de no máximo duas retas. Seja L qualquer das retas anteriores que não está contida nos planos de X .

(iii) $\mathcal{P}$ contem pelo menos dois 1-cones e no máximo um 0-cone.

Suponha que toda reta de X passa por uma singularidade de X . Então X

é a união de 0-cones (não necessariamente cones quádricos) com vértice um ponto singular de X e diretriz uma superfície em $\mathbb{P}^4$. X não pode ser um único 0-cone pois, caso contrário, a reta ligando o vértice a qualquer outra singularidade de X seria uma reta de singularidades, o que contradiz a hipótese. Consequentemente X é a união de pelo menos dois 0-cones. Os cones não podem ser cones quádricos pois X é a interseção completa de duas quádricas em $\mathbb{P}^5$. Mas então X teria grau maior do que 4, uma contradição. Logo, existe uma reta L que não passa por nenhuma singularidade de X e não está contida em qualquer plano de X .

(b) Neste caso, o feixe $\mathcal{P}$ contém pelo menos um 2-cone, digamos Q_1 , cujo vértice é um plano V_1 . O lugar de base X é singular ao longo da cônica suave $S_1 = X \cap V_1$. Afirmamos que qualquer reta contida em X intercepta S_1 . De fato: Suponha que exista $L \subset X$ tal que $L \cap V_1 \neq \emptyset$. Então existe um plano $P \subset \mathbb{P}^5$ tal que $L \subset P$ e $P \cap V_1 = \emptyset$. A interseção $Q_1 \cap P$ é uma diretriz do cone Q_1 e consequentemente uma cônica suave em P . Como $L \subset Q_1$ e $L \cap V_1 = \emptyset$, temos $L \subset Q_1 \cap P$, o que é absurdo. Portanto, $L \cap V_1 = \emptyset$ e como $L \subset X$ temos $L \cap S_1 \neq \emptyset$.

Se $\mathcal{P}$ não é do tipo $[(111)(111)]$, então $\mathcal{P}$ contém um 0-cone, digamos Q_2 , com vértice v_2 . Temos que mostrar que X contém uma reta que não contém v_2 e nem os vértices dos cones restantes. Escolha um plano P tal que $v_2 \in P$ e $P \cap V_1 = \emptyset$. Temos que $\tilde{Q}_1 := Q_1 \cap P$ é uma diretriz de Q_1 e, portanto, é uma cônica suave. A interseção $X \cap P = X \cap \tilde{Q}_1$ consiste de 4 pontos contadas as multiplicidades. Além de v_2 existe um outro ponto, digamos p_3 em $X \cap \tilde{Q}_1$. Seja q_1 um ponto em S_1 . A reta $\overline{p_3 q_1}$ está contida em X e não passa por v_2 nem pelos vértices dos outros cones de $\mathcal{P}$, pois os vértices dos cones de $\mathcal{P}$ são independentes em $\mathbb{P}^5$. ■

Definição 2.1.1 Uma reta como na Proposição 2.1.2 é chamada reta genérica do complexo X .

2.2 A curva de gênero 2 associada à um feixe semiestável

Ao longo desta seção X denota o complexo quadrático de retas, visto como o lugar de base de um feixe de quádricas $\mathcal{P}$ gerado pela quádrica de Plücker G .

Definição 2.2.1 ([7], pág. 781) Fixada uma reta genérica $L \subset X$, definimos:

$$B_L = \{L' \subset X \mid L \cap L' \neq \emptyset\}$$

Mais precisamente, definimos B_L como o fecho na variedade de retas A (Definição 1.2.7) do conjunto de retas $L' \in A - \{L\}$ interceptando L . Em [2] temos a seguinte definição de B_L :

Definição 2.2.2 $B_L = \{ \text{planos } P \subset \mathbb{P}^5 \mid L \subset P \subset Q_\lambda \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{P}^1 \}$.

Esta definição é equivalente à Definição 2.2.1. De fato: Se $P \subset \mathbb{P}^5$ é um plano que contem a reta L , então a interseção $X \cap P$ consiste de duas retas, digamos $L \cup L'$. Portanto, o plano P determina a reta L' que intercepta L . Reciprocamente dada uma reta $L' \in A$ tal que $L' \cap L \neq \emptyset_{\text{plano}}$ $\langle L, L' \rangle$ está contido em uma única quádrlica do feixe $\mathcal{P} = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$, pois a reta L é genérica (Proposição 2.1.2). Utilizaremos a definição mais conveniente ao que desejamos mostrar em cada caso.

Vemos que B_L é uma subvariedade analítica da Grassmanniana $\text{Gr}(2, 6)$. Posteriormente mostraremos que se $\mathcal{P}$ é um feixe semiestável, então B_L é uma curva, que poderá ser descrita explicitamente. A fim de analisar B_L definimos a seguinte aplicação holomorfa:

Definição 2.2.3 Seja B_L como na Definição 2.2.2. Definimos

$$\pi : B_L \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

que associa a cada plano $P \in B_L$, $\lambda \in \mathbb{P}^1$ tal que $P \subset Q_\lambda$.

Segue do Corolário 2.1.1 que existe um único λ nas condições da Definição 2.2.3.

Lema 2.2.1 Sejam $Q_{\lambda_1}, \dots, Q_{\lambda_r}$ os cones excepcionais e $Q_{\lambda_{r+1}}, \dots, Q_{\lambda_{r+s}}$ os cones ordinários do feixe $\Phi = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$. A aplicação

$$\pi : B_L \setminus \pi^{-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}) \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

é um recobrimento duplo suave ramificado exatamente nos pontos $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}$.

Demonstração: Vamos mostrar que se Q_λ é suave (respectivamente um cone ordinário), a imagem inversa $\pi^{-1}(\lambda)$ consiste de 2 pontos de B_L (respectivamente 1 ponto de B_L)

Suponha que Q_λ é uma quádrlica suave do feixe e considere a imagem inversa

$$\pi^{-1}(\lambda) = \{P \in B_L \mid P \subset Q_\lambda\}$$

Seja $x \in L$. Sabemos que a interseção $T_x(Q_\lambda) \cap Q_\lambda$ é um cone com vértice x e diretriz uma quádrlica suave $\tilde{Q}_\lambda \subset T_x(Q_\lambda)$ bidimensional. Vimos na Pro-

posição 1.1.1 que uma quádrlica suave de dimensão 2 possui duas famílias de retas. Assim, existem duas retas (uma em cada família) contendo o ponto $L \cap \tilde{Q}_\lambda$. Logo, existem dois planos em Q_λ que contem a reta L , um para cada família.

Por outro lado, suponha que Q_λ é um cone ordinário. Portanto, o lugar singular V de Q_λ consiste de um único ponto v_0 e $v_0 \notin X$. Consequentemente Q_λ é um cone com vértice v_0 e diretriz uma quádrlica suave $\tilde{Q}_\lambda$ tridimensional em um $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$. Neste caso, segue da Proposição 1.1.1, que Q_λ contem uma única família de planos, os quais são gerados por v_0 e pelas retas de $\tilde{Q}_\lambda$ e o único plano de Q_λ que contem a reta L é $\langle v_0, L \rangle$. ■

Segue do Lema 2.2.1 que $B_L \setminus \pi^{-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\})$, onde $Q_{\lambda_i}, i = 1, \dots, r$ são os cones excepcionais do feixe, é conexa ou consiste de duas componentes. Denominaremos os fechos destas componentes componentes ordinárias e as outras componentes, dadas por $\pi^{-1}(\lambda_i), i = 1, \dots, r$, serão chamadas componentes excepcionais.

A seguir demonstraremos o principal resultado desta seção. Antes, porem, enunciamos, sem demonstrar, o Teorema de Fatoração de Stein, crucial para o resultado que desejamos provar.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Fatoração de Stein, [9], pág. 280) Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo projetivo de esquemas noetherianos. Então podemos fatorar f em $f = g \circ f'$, onde $f' : X \longrightarrow Y'$ é um morfismo projetivo com fibras conexas, e $g : Y' \longrightarrow Y$ é um morfismo finito.

Teorema 2.2.2 ([2], Proposição 6.7) Seja $\mathcal{P}$ um feixe semiestável de quádrlicas de $\mathbb{P}^5$. Fixada uma reta genérica $L \in A$ (ver Definição 2.1.1), a curva B_L é unicamente determinada (a menos de isomorfismo) por $\mathcal{P}$, isto é, não depende da escolha da reta L .

Demonstração: Sejam $Q_{\lambda_1}, Q_{\lambda_2}, \dots, Q_{\lambda_r}$ os cones excepcionais do feixe $\mathcal{P} = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$. Se $\lambda \neq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, r$, seja

$$\tilde{B}_L := \{(\lambda, g) \in \mathbb{P}^1 \times \text{Gen}(\mathcal{P}) \mid g \supset L\}$$

Assim, $\tilde{B}_L$ é um conjunto de geradores das quádrlicas Q_λ , as quais são suaves ou são cones ordinários. Consideremos a projeção na primeira coordenada

$$p_1 : \text{Gen}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

Como dissemos anteriormente, as fibras de p_1 são as subvariedades $\text{Gen}(Q_\lambda)$ e para $\lambda \neq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, r$, temos: $p_1^{-1}(\lambda) = A_\lambda \cup B_\lambda$, onde A_λ e B_λ são variedades irredutíveis suaves de dimensão 3, se Q_λ é suave, e $p_1^{-1}(\lambda) = G_\lambda$, onde G é uma variedade irredutível suave de dimensão 3, se Q_λ é um cone ordinário. Agora se $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, r$, segue do Teorema 1.1.1 que $\text{Gen}(Q_\lambda)$ pode consistir de uma única variedade irredutível tridimensional G_λ (se Q_λ é um 0-cone), ou $\text{Gen}(Q_\lambda) = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} A_\lambda \cup B_\lambda$, em que A_λ e B_λ são variedades irredutíveis unidimensionais (se Q_λ é um 1-cone), ou $\text{Gen}(Q_\lambda)$ consiste de uma variedade irredutível unidimensional G'_λ (se Q_λ é um 2-cone).

Deste modo, dado um aberto $V \subset \mathbb{P}^1$, as componentes irredutíveis de $p_1^{-1}(V)$ são $A_\lambda, B_\lambda, G_\lambda$ e $G'_\lambda, \lambda \in V$, as quais correspondem aos ideais primos do anel de funções regulares $\mathcal{O}_{\text{Gen}(\mathcal{P})}(p_1^{-1}(V)) = (p_1 * \mathcal{O}_{\text{Gen}(\mathcal{P})})(V)$, onde $\mathcal{O}_{\text{Gen}(\mathcal{P})}$ é o feixe estrutural de $\text{Gen}(\mathcal{P})$. Seguindo a demonstração do Teorema da Fatoração de Stein (Teorema 2.2.1) e aplicando a mesma à projeção $p_1 : \text{Gen}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ definimos

$$\mathcal{B}' := \text{Spec}(p_1 * (\mathcal{O}_{\text{Gen}(\mathcal{P})}))$$

e obtemos a fatoração $p_1 = q \circ p$, onde $p : \text{Gen}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{B}'$ tem fibras conexas e $q : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ é um morfismo finito. Pela definição, os pontos de $\mathcal{B}'$ correspondem às variedades irredutíveis $A_\lambda, B_\lambda, G_\lambda$ e G'_λ e, portanto, intuitivamente, a aplicação $p : \text{Gen}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{B}'$ "cola" os geradores contidos em uma mesma componente irredutível de $p_1^{-1}(\lambda)$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}' \approx \tilde{B}_L$ qualquer que seja $L \in X = F \cap G$ uma reta genérica.

Fixada uma reta genérica $L \subset X$, para cada $\lambda \in \mathbb{P}^1$, existe um único gerador $g \in \text{Gen}(Q_\lambda)$ tal que $g \supset L$ se Q_λ é um cone ordinário, e dois geradores $g \in A_\lambda, g' \in B_\lambda$, se $Q_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$ é suave, com $g \supset L$ e $g' \supset L$. Portanto a aplicação p dá um isomorfismo entre $\tilde{B}_L$ e $\mathcal{B}'$ em que $q : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$ descreve $\mathcal{B}$ como um recobrimento duplo de $\mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ ramificado nos pontos $\lambda \in \mathbb{P}^1$ tais que Q_λ é um cone ordinário do feixe.

Temos portanto um isomorfismo entre a parte aberta das componentes ordinárias de B_L dadas por $p_2(\tilde{B}_L)$, onde p_2 é a projeção na segunda coordenada, e $\mathcal{B} \setminus q^{-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\})$. Temos ainda que as fibras $\pi^{-1}(\lambda_i), i = 1, \dots, r$, com π a aplicação do Lema 2.2.1, são independentes da escolha da reta L , pois correspondem às raízes múltiplas do discriminante do feixe. Fazendo uma colagem dessas fibras à $p_2(\tilde{B}_L)$, isto é, completando a curva $\mathcal{B}'$, obtemos a curva completa $\mathcal{B}$, e qualquer que seja a maneira de fazer esta colagem, a mesma não

depende da escolha de L . Logo, o isomorfismo $p : \tilde{B}_L \rightarrow \mathcal{B}'$ se estende a um isomorfismo $p : B_L \rightarrow \mathcal{B}$. ■

2.3 Descrição da curva B_L para feixes semi-estáveis

Nesta seção damos uma descrição explícita da curva B_L (ver Definição 2.2.1) associada a um feixe de quádricas de $\mathbb{P}^5$ semiestável, como feito em [2], (Teorema 6.6). Fazemos a descrição a partir do Símbolo de Segre do feixe, já que o Teorema 2.2.2 assegura que B_L não depende da escolha da reta $L \subset A$.

Antes de provar o teorema principal desta seção, faremos uma breve abordagem sobre a fórmula de Riemann-Hurwitz, que utilizaremos na demonstração (como referência citamos [6]).

Sejam X e Y curvas projetivas integrais sobre o corpo dos números complexos, e $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo finito de grau d . Sejam $\alpha : \tilde{X} \rightarrow X$ e $\beta : \tilde{Y} \rightarrow Y$ as respectivas normalizações. Temos então o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{Y} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

onde $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é o morfismo induzido por φ . Denotemos por $p_a(X)$ (respectivamente $p_a(Y)$) o gênero aritmético de X (respectivamente Y) e por $p_g(X)$ (respectivamente $p_g(Y)$) o gênero geométrico de X (respectivamente Y). Se

$$R = \sum_{\tilde{P} \in \tilde{X}} r_{\tilde{P}} \tilde{P}$$

é o divisor de ramificação do morfismo $\tilde{\varphi}$ então a fórmula de Riemann-Hurwitz dá a equação

$$2p_g(X) - 2 = d(2p_g(Y) - 2) + \deg(R) \quad (2.1)$$

Temos que

$$p_a(X) = p_g(X) + \sum_{P \in X} \delta_P$$

$$p_a(Y) = p_g(Y) + \sum_{Q \in Y} \delta_Q$$

Substituindo estas igualdades na equação 2.1, obtemos

$$2p_a(X) - 2 = d(2p_a(Y) - 2) + \deg(R) + 2 \sum_{P \in X} \delta_P - 2d \sum_{Q \in Y} \delta_Q \quad (2.2)$$

A equação 2.2 pode ser considerada uma fórmula de Riemann-Hurwitz para curvas singulares.

Vimos no Lema 2.2.1 que B_L é um recobrimento duplo de $\mathbb{P}^1$. Temos, portanto, uma aplicação de grau $d = 2$. Utilizaremos a equação 2.2 para estudar as singularidades da curva B_L em cada caso.

Teorema 2.3.1 ([2], Teorema 6.6) Sejam $\mathcal{P} = (Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ um feixe semiestável em $\mathbb{P}^5$ com lugar de base X , e L uma reta genérica de X (Definição 2.1.1). Então B_L é uma curva conexa de gênero aritmético 2. Mais precisamente temos:

- (1) $\sigma = [111111]$: A curva B_L é suave.
- (2) $\sigma = [21111]$: A curva B_L é irredutível de gênero 1 com um nó.
- (3) $\sigma = [2211]$: A curva B_L é uma curva racional irredutível com dois nós.
- (4) $\sigma = [222]$: A curva B_L consiste de duas componentes ordinárias isomorfas a $\mathbb{P}^1$ interceptando-se transversalmente em três pontos.
- (5) $\sigma = [(11)1111]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva elíptica suave, e uma componente excepcional interceptando C em um par de pontos conjugados sob π .
- (6) $\sigma = [(11)(11)11]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e duas componentes excepcionais interceptando C em dois pares de pontos conjugados sob π .
- (7) $\sigma = [(11)(11)(11)]$: A curva B_L consiste de duas componentes ordinárias C_1 e C_2 isomorfas a $\mathbb{P}^1$ e três componentes excepcionais interceptando C_1 e C_2 em três pares de pontos, cada par conjugado sob π .
- (8) $\sigma = [2(11)11]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva racional com um nó, e uma componente excepcional interceptando C em um par de pontos conjugado sob π .
- (9) $\sigma = [22(11)]$: A curva B_L consiste de duas componentes ordinárias C_1 e C_2 isomorfas a $\mathbb{P}^1$ interceptando-se em dois pontos e uma componente excepcional

interceptando C_1 e C_2 em um par de pontos conjugados sob π .

(10) $\sigma = [2(11)(11)]$: A curva B_L consiste de duas componentes ordinárias C_1 e C_2 isomorfas à $\mathbb{P}^1$ interceptando-se em um ponto e duas componentes excepcionais cada uma interceptando C_1 e C_2 em um par de pontos conjugado sob π .

(11) $\sigma = [3111]$: A curva B_L é uma curva irredutível de gênero 1 com uma cúspide. (12) $\sigma = [321]$: A curva B_L é uma curva racional irredutível com uma cúspide e um nó.

(13) $\sigma = [3(11)1]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva racional com uma cúspide e uma componente excepcional interceptando C em um par de pontos conjugado sob π .

(14) $\sigma = [33]$: A curva B_L é uma curva racional irredutível com duas cúspides.

(15) $\sigma = [(111)111]$ e (16) $\sigma = [(21)111]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva elíptica suave, e uma componente excepcional tocando C em um ponto de ramificação de π que não é um flex da curva elíptica.

(17) $\sigma = [(111)21]$ e (18) $\sigma = [(21)21]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva racional com um nó, e uma componente excepcional tocando C em um ponto de ramificação de π .

(19) $\sigma = [(111)(11)1]$ e (20) $\sigma = [(21)(11)1]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C isomorfa à $\mathbb{P}^1$ e duas componentes excepcionais, P_1 interceptando C em um par de pontos conjugados sob π , e P_2 tocando C em um ponto de ramificação de π .

(21) $\sigma = [(111)3]$ e (22) $\sigma = [(21)3]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , a qual é uma curva racional com uma cúspide, e uma curva excepcional tocando C em um ponto de ramificação suave de π .

(23) $\sigma = [(111)(111)]$, (24) $\sigma = [(21)(111)]$ e (25) $\sigma = [(21)(21)]$: A curva B_L consiste de uma componente ordinária C , isomorfa à $\mathbb{P}^1$ e duas componentes excepcionais tocando C em dois pontos de ramificação de π .

Demonstração: A prova será feita em alguns casos típicos, os demais são análogos.

(1) $\sigma = [111111]$: Neste caso, o feixe não contém cones excepcionais e contém seis cones ordinários. Assim, segue do Lema 2.2.1 e da equação 2.1 que B_L é uma curva hiperelíptica de gênero geométrico 2 e conseqüentemente suave.

(2) $\sigma = [21111]$: O feixe contém um cone excepcional, digamos Q_{λ_1} , cujo vértice v_1 é um ponto singular de X . Como $L \subset X$ é uma reta genérica, temos

que $v_1 \notin L$. Escolha um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^5$ que contem L e não contem v_1 . Podemos considerar a quádrlica $\tilde{Q}_{\lambda_1} := Q_{\lambda_1} \cap H$ como a diretriz do cone Q_{λ_1} . Assim $\tilde{Q}_{\lambda_1}$ é uma quádrlica suave tridimensional e, pela Proposição 1.1.1, contem uma única família de retas. Portanto, existe um único plano em Q_{λ_1} que contem a reta L , a saber $\langle L, v_1 \rangle$. Consequentemente $\pi^{-1}(\lambda_1)$ consiste de um único ponto e B_L é uma curva irredutível.

Afirmamos que $\pi^{-1}(\lambda_1)$ é um nó da curva B_L .

De fato: Pelo Lema 2.2.1, o recobrimento

$$\pi : B_L \setminus \{\pi^{-1}(\lambda_1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda_1\}$$

é ramificado em quatro pontos, correspondentes aos quatro cones ordinários do feixe. Segue da fórmula de Riemann-Hurwitz (Equação 2.1) que a normalização de B_L é uma curva elíptica. Portanto $p_a(B_L) = 2$ e $p_g(B_L) = 1$ e da Equação 2.2 concluímos que $\pi^{-1}(\lambda_1)$ é um nó da curva B_L .

(4) $\sigma = [222]$: Neste caso, o feixe contem três cones excepcionais, digamos Q_{λ_1} , Q_{λ_2} e Q_{λ_3} . Analogamente ao caso (2), mostramos que $\pi^{-1}(\lambda_i)$ consiste de um único ponto, $i = 1, 2, 3$. Mais ainda: o tipo de singularidade do ponto $\pi^{-1}(\lambda_i)$ é o mesmo para $i = 1, 2, 3$, pois o feixe admite um automorfismo de $\mathbb{P}^1$ permutando os cones Q_{λ_i} . Novamente pela fórmula de Hurwitz vemos que a normalização de B_L não pode ser ramificada em três pontos. Consequentemente ela é não ramificada sobre $\mathbb{P}^1$ e consiste de duas componentes isomorfas à $\mathbb{P}^1$. Os pontos $\pi^{-1}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$ correspondem aos pontos de interseção dessas componentes.

(5) $\sigma = [(11)1111]$: O feixe tem um cone excepcional Q_{λ_1} o qual é um cone com vértice uma reta V_1 , interceptando X em dois pontos singulares p_1 e p_2 , e diretriz uma quádrlica suave bidimensional. Como a reta L é uma reta genérica, temos que $L \cap V_1 = \emptyset$. Escolha um 3-plano $T \subset \mathbb{P}^5$ tal que $L \subset T$ e $T \cap V_1 = \emptyset$. Podemos considerar a quádrlica $\tilde{Q}_{\lambda_1} = Q_{\lambda_1} \cap T$ como diretriz do cone Q_{λ_1} . Pela Proposição 1.1.1, $\tilde{Q}_{\lambda_1}$ contem duas famílias de retas e os planos em Q_{λ_1} são os gerados por uma reta de $\tilde{Q}_{\lambda_1}$ juntamente com um ponto de V_1 . Assim, os planos de Q_{λ_1} que contem a reta L são da forma $\langle p, L \rangle$, $p \in V_1$. Portanto, $\pi^{-1}(\lambda_1) \cong V_1 \cong \mathbb{P}^1$, que é a componente excepcional da curva B_L . Resta mostrar que a componente ordinária de B_L é uma curva elíptica que intercepta a componente excepcional em dois pontos. Para isto seja $\mathcal{P} = \lambda G + \mu F$ com

$$\begin{aligned} F &: a_1(x_1^2 + x_2^2) + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2 + a_6x_6^2 \\ G &: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{aligned}$$

Assim o 1-cone Q_{λ_1} , onde $\lambda_1 = (1 : -a_1) \in \mathbb{P}^1$, tem equação

$$(a_3 - a_1)x_3^2 + (a_4 - a_1)x_4^2 + (a_5 - a_1)x_5^2 + (a_6 - a_1)x_6^2$$

e reta V_1 é dada por:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

A interseção de V_1 com qualquer outra quádrlica do feixe são os pontos

$$p_1 = (1 : i : 0 : 0 : 0 : 0) \text{ e } p_2 = (1 : -i : 0 : 0 : 0 : 0).$$

Para qualquer quádrlica $\lambda G + \mu F$ do feixe $\mathcal{P}$ o plano tangente no ponto p_1 é dado por

$$T_{p_1} : x_1 + ix_2 = 0$$

Como XT_{p_1} , podemos escolher L tal que LT_{p_1} . Consequentemente, existe um 3-plano $P \subset T_{p_1}$ tal que $P \cap L = \emptyset$ e $P \cap V_1 = \emptyset$. Interceptando as quádrlicas F e G com T_{p_1} obtemos dois cones Q_F e Q_G com vértice o ponto p_1 e diretrizes as quádrlicas suaves bidimensionais $\tilde{Q}_F = Q_F \cap P$ e $\tilde{Q}_G = Q_G \cap P$, respectivamente. A interseção

$$E := \tilde{Q}_F \cap \tilde{Q}_G$$

é uma curva elíptica contida em T_{p_1} e parametriza as retas de X que passam por p_1 . Denote por L_1 a segunda reta da interseção $\langle L, p_1 \rangle \cap X$ e suponha que $L_1 \cap E := q$. Para todo $x \in E, x \neq q$, o plano $\langle L, x \rangle$ não está contido no cone Q_{λ_1} , pois $x \notin V_1$, e consequentemente é um plano na componente ordinária de B_L . Tomando o limite $x \rightarrow q$ temos que o plano $\langle L, q \rangle = \langle L, p_1 \rangle$ é o limite dos planos $\langle L, x \rangle$ na componente ordinária. Portanto, a componente ordinária de B_L é uma curva elíptica $C \cong E$ e intercepta a componente excepcional nos pontos $\langle L, p_1 \rangle$ e $\langle L, p_2 \rangle$.

(11) $\sigma = [3111]$: O feixe contém um cone excepcional Q_{λ_1} que, neste caso, é um 0-cone com vértice um ponto singular $v_1 \in X$. A reta L não passa por v_1 e, como no caso (2), $\pi^{-1}(\lambda_1)$ consiste de um único ponto. Como o feixe

contem três cones ordinários, segue da Equação 2.1 que $\pi^{-1}(\lambda_1)$ é um ponto de ramificação da normalização de B_L . Agora se $\pi^{-1}(\lambda_1)$ fosse um ponto de ramificação de $\pi : B_L \rightarrow \mathbb{P}^1$ teríamos $p_a(B_L) = 1$ (Equação 2.2). Mas a degeneração de uma curva suave de gênero 2 tem gênero aritmético 2. Consequentemente $\pi^{-1}(\lambda_1)$ é uma cúspide da curva B_L e $p_g(B_L) = 1$.

(15) $\sigma = [(111)111]$: Neste caso o feixe contem um cone excepcional Q_{λ_1} cujo vértice é um plano V_1 que intercepta X em uma cônica suave S_1 . Pela Proposição 2.1.2, a reta $L \subset X$ intercepta S_1 transversalmente em um ponto e não passa pelos vértices dos cones ordinários do feixe. A componente ordinária C é ramificada sobre λ_1 . Consequentemente a normalização de B_L é um recobrimento duplo de $\mathbb{P}^1$ ramificado em 4 pontos, isto é, a normalização de B_L é uma curva elíptica e $p_g(B_L) = 1$. Os planos contidos em Q_{λ_1} que contem a reta L são parametrizados pela curva S_1 . Portanto, $\pi^{-1}(\lambda_1) \cong \mathbb{P}^1$. Assim a componente excepcional de B_L intercepta C em um ponto, digamos p . Se p fosse uma cúspide de C , teríamos $p_a(C) = 2$ e consequentemente $p_a(B_L) = 3$. Portanto, C é uma curva elíptica suave. Agora: se $\pi^{-1}(\lambda_1)$ interceptasse C transversalmente em p , teríamos $p_a(B_L) = 1$. Logo p é um ponto de tangência de $\pi^{-1}(\lambda_1)$ e C e caso p fosse um flex teríamos $p_a(B_L) = 3$. ■

O Teorema 2.3.1 é fundamental para o desenvolvimento do próximo capítulo. Nele faremos uma descrição da curva $C_L := j(B_L)$ (ver Seção 1.2.3) de maneira semelhante à feita no teorema anterior para cada Símbolo de Segre correspondente, neste caso, a um complexo quadrático de retas semiestável (Seção 1.3). Veremos que as singularidades da curva B_L são, de certo modo, preservadas pela aplicação j e que se B_L é irredutível (resp. redutível), então C_L também será irredutível (resp. redutível).

Capítulo 3

A quártica plana associada a um complexo quadrático de retas semiestável

Seja $X = F \cap G$, onde $G \subset \mathbb{P}^5$ é a quádrlica de Plücker e $F \subset \mathbb{P}^5$ é uma quádrlica distinta de G , o complexo quadrático de retas visto como o lugar de base do feixe de quádrlicas

$$\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

Vimos no capítulo precedente que a cada feixe de quádrlicas de $\mathbb{P}^5$ que é semi estável (Seção 1.1.1) podemos associar uma curva de gênero (aritmético) 2, a saber

$$B_L = \{L' \in A \mid L' \cap L \neq \emptyset\}$$

onde A é a variedade de retas de X e $L \in A$ é uma reta (genérica) fixada. Neste capítulo definimos e descrevemos explicitamente uma curva quártica plana dada pela restrição à curva B_L da aplicação

$$j : A \longrightarrow S$$

onde S denota a superfície singular associada ao complexo X (Seção 1.2.3).

Observemos que, como o discriminante do complexo quadrático X é o discriminante do feixe de quádrlicas do qual X é o lugar de base, segue do Corolário 1.3.2 e do Teorema 1.3.5 que um feixe de quádrlicas semi estável determina uma complexo quadrático de retas também semi estável, embora a recíproca não seja verdadeira. Portanto, no restante deste trabalho, quando nos referimos a

um complexo quadrático de retas semi estável, estamos considerando o lugar de base de um feixe de quádras (gerado pela quádras de Plücker G) que é semi estável.

Neste capítulo faremos, inicialmente, uma abordagem detalhada do exposto em [7], onde encontramos um estudo da quártica para o caso em que o complexo quadrático de retas X é suave, o que corresponde ao caso em que o feixe de quádras associado é estável. Posteriormente, baseados na descrição explícita da curva B_L dada em [2] e apresentada no capítulo anterior, utilizamos o Maple para descrever geometricamente a quártica plana em todos os casos de complexos quadráticos de retas semi estáveis.

Ao longo deste capítulo $X = F \cap G$ denota o complexo quadrático de retas, S a superfície singular associada e A a variedade de retas de X .

3.1 Generalidades sobre a quártica plana

Apresentamos nesta seção, alguns resultados gerais sobre a quártica plana, isto é, que independem do Símbolo de Segre do complexo quadrático ao qual a curva está associada.

Definição 3.1.1 Seja $j : A \rightarrow S$ a aplicação que associa a cada reta $L' \subset X$ o foco $p'_{L'}$ do feixe de retas de $\mathbb{P}^3$ parametrizado por L' . Fixada $L \subset X$, definimos

$$C_L := j(B_L)$$

onde $B_L \subset A$ é a curva da Definição 2.2.1.

Proposição 3.1.1 ([7]) A curva C_L é uma quártica plana, contida na superfície singular S .

Demonstração: Seja $L' \in B_L$ e suponha que $L \cap L' = x$. Assim, desde que $x \in L$, temos $l_x \subset h_L$ (ver Figura 3.1). Por outro lado, o foco $p_{L'}$ do feixe parametrizado por L' pertence à reta l_x , pois pertence à todas as retas do complexo e temos $x \in L'$. Portanto $p_{L'} \in h_L$ e como L' foi tomada arbitrariamente concluímos que $C_L = h_L \cap S$. Logo, como $\deg(S) = 4$, concluímos que C_L é uma quártica plana contida na superfície singular S . ■

Lema 3.1.1 Fixada $L \subset X$, o plano h_L que contem o feixe de retas de $\mathbb{P}^3$ parametrizado por L é um ponto de S^* .

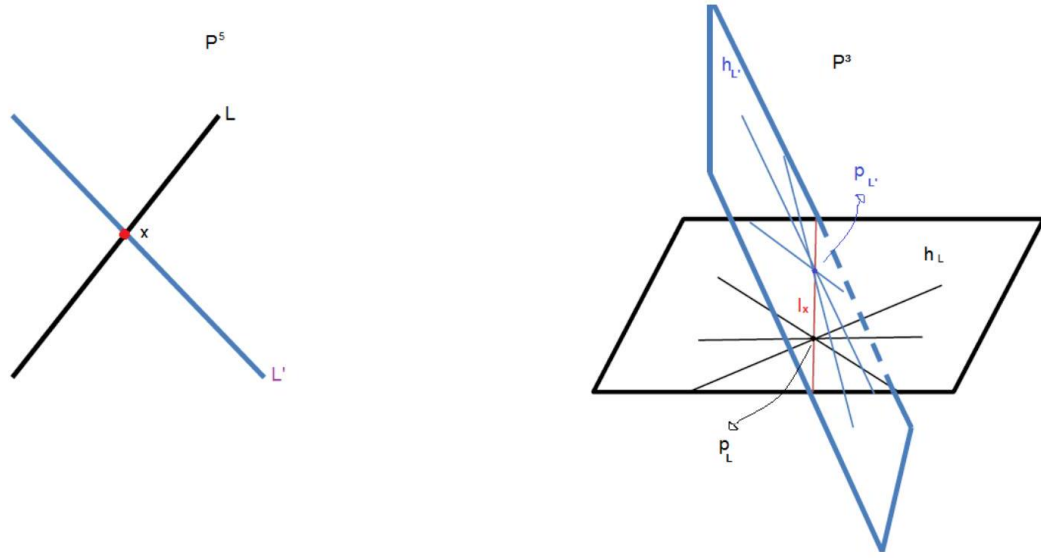


Figura 3.1: Retas de $\mathbb{P}^5$ que parametrizam feixes de $\mathbb{P}^3$.

Demonstração: Seja $\beta(h_L)$ o plano contido na quádrlica de Plücker G que parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$ que estão contidas no plano h_L . Então $L \subset \beta(h_L)$, e como $L \subset X$ segue que $L \subset \beta(h_L) \cap F$. Portanto, a interseção $\beta(h_L) \cap F$ é uma cônica singular e da definição de S^* (Definição 1.2.4) concluímos que $h_L \in S^*$. ■

Do lema anterior e do fato que S e S^* são superfícies duais (Proposição 1.2.4) concluímos que, fixada $L \subset X$, o plano h_L é tangente à superfície singular S . Logo a curva C_L possui no mínimo um nó como singularidade. Podemos determinar explicitamente o ponto de tangência:

Proposição 3.1.2 Se $h \in S^*$ é um hiperplano qualquer e L e L' são os dois feixes contidos em h , então h é tangente à S no foco dos feixes cofocais de X contendo a reta $\overline{p_L, p_{L'}}$.

Demonstração: Se $h \in S^*$, segue da Proposição 1.2.4 que h é tangente à S . Vamos mostrar que o ponto de tangência é o enunciado. Para isto, suponha que a reta que passa pelos focos p_L e $p_{L'}$ seja parametrizada pelo ponto $x \in X$ (assim, para simplificar a notação, denotaremos $\overline{p_L, p_{L'}}$ por l_x). Isto significa que $L \cap L' = x$. Se a reta l_x interceptasse a superfície S em outros dois pontos além de p_L e $p_{L'}$, digamos s e r , a interseção $T_x(X) \cap X$ consistiria das retas L, L' e das retas correspondentes às interseções $\alpha(s) \cap F$ e $\alpha(r) \cap F$, onde $X = F \cap G$. Mas isto não ocorre pois $T_x(X) \cap X$ contem no máximo quatro retas (Proposição 1.2.2). Portanto, $l_x \cap S = p_L + p_{L'} + q$.

Suponha que q' seja o ponto em que h é tangente à S . As retas $\overline{p_L, q'}$ e $\overline{p_{L'}, q'}$ são tangentes à S . Se elas fossem retas não-singulares, então elas

pertenceriam a um feixe de retas tangentes à S e tal feixe seria aquele contido no plano h e passando pelo ponto q' . Mas os únicos feixes contidos em h são os parametrizados por L e L' . Desse modo, as retas $\overline{p_L, q'}$ e $\overline{p_{L'}, q'}$ são singulares no ponto q' . Como o ponto q' não é um ponto de R , existe uma única reta singular em q' e portanto as retas $\overline{p_L, q'}$ e $\overline{p_{L'}, q'}$ coincidem. Logo $\overline{p_L, q'} = \overline{p_{L'}, q'}$, ou seja, $q = q'$. ■

Segue diretamente da proposição anterior que, como o plano h_L contém os feixes L e seu feixe coplanar $i'(L)$, ele é tangente à S no foco dos feixes cofocais contendo a reta $\overline{p_L, p_{i'(L)}}$.

Denotaremos o nó correspondente ao ponto de tangência do plano h_L com a superfície singular S por q . Veremos mais adiante que as outras singularidades da curva C_L são dadas pela singularidades da curva B_L .

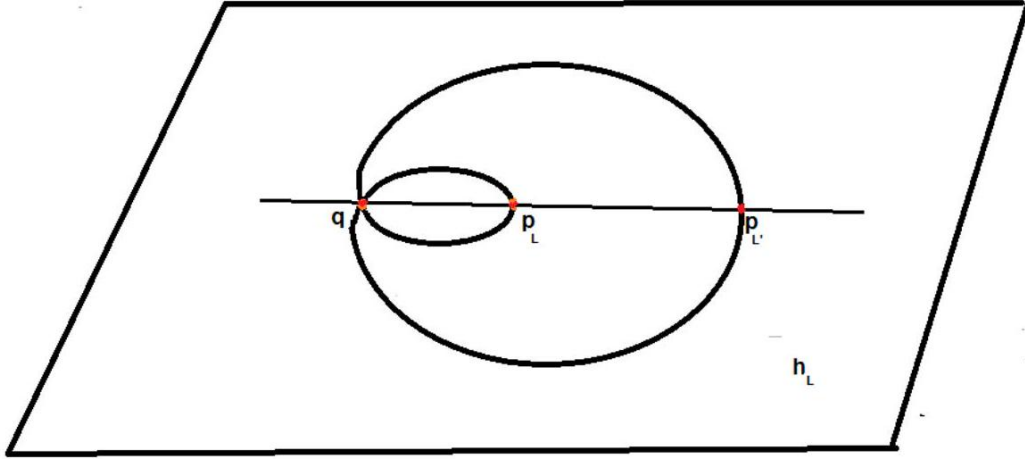


Figura 3.2: A curva C_L no caso geral

Vimos no Teorema 2.2.2 que a curva B_L é unicamente determinada pelo Símbolo de Segre do feixe, isto é, independe da escolha da reta $L \subset X$. No que segue mostraremos que este resultado vale também para as curvas C_L 's.

Lema 3.1.2 A aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$ é genericamente 1 – 1.

Demonstração: Sejam $L', L'' \in B_L$ e suponha que $j(L') = j(L'') = p$. Isto significa que L' e L'' são duas retas que parametrizam feixes cofocais, com foco p . Assim, se $x := L' \cap L''$, temos que l_x é singular em p e consequentemente x pertence à superfície singular Σ . Agora, como $\Sigma = G \cap F \cap H$, a reta L intercepta a superfície Σ em dois pontos: um deles corresponde ao ponto de interseção de L com seu feixe cofocal $i(L)$ e o outro correspondente a interseção de L com seu feixe coplanar $i'(L)$. Desde que, em geral, $L \notin B_L$, a aplicação j

não é injetiva apenas nas retas passando pelo ponto $L \cap i'(L)$. Logo $L \cap i'(L) = x$ e j não é injetiva apenas nas retas contidas em X e passando por x . ■

Teorema 3.1.1 A curva C_L é unicamente determinada (a menos de isomorfismo) pelo símbolo de Segre do feixe, isto é, independe da escolha da reta L .

Demonstração: A prova consiste em, fixadas duas retas distintas $L, M \subset X$, construir um isomorfismo entre as curvas C_L e C_M . Fixada uma reta genérica $L \subset X$ considere a aplicação

$$\pi_L : C_L \rightarrow \mathbb{P}^1$$

dada por $\pi_L := \pi \circ j^{-1}$, onde $\pi : B_L \rightarrow \mathbb{P}^1$ é a aplicação que descreve B_L como um recobrimento de $\mathbb{P}^1$ (Lema 2.2.1). Pelo Lema 3.1.2 a aplicação π_L não está definida apenas no ponto de tangência do plano h_L do feixe com a superfície singular S que denotaremos por q . Considere o gráfico da aplicação $\pi_L, \Gamma_{\pi_L} \subset C_L \times \mathbb{P}^1$, visto como o blow-up da curva C_L no ponto singular q . Como $C_L = j(B_L)$, fora do divisor excepcional podemos identificar Γ_{π_L} com B_L por

$$(p, \lambda) \equiv (L', \lambda)$$

onde $p = j(L'), p \neq q$. Segue da demonstração do Lema 3.1.2 que a imagem inversa $j^{-1}(q)$ consiste de dois pontos, L_1, L_2 digamos.

Analogamente, fixada $M \subset X$, a aplicação $\pi_M : C_M \rightarrow \mathbb{P}^1$ não está definida sobre o ponto singular q' da curva C_M . Sejam $M_1, M_2 \subset B_M$ tais que $j(M_1) = j(M_2) = q'$. Sabemos que as curvas B_L e B_M são isomorfas (Proposição 2.2.2). Construa a aplicação:

$$\eta : C_L \longrightarrow C_M$$

$\eta := \pi_M^{-1} \circ \pi_L$. Por construção segue que η é um isomorfismo fora dos pontos q e q' .

Para definir a aplicação sobre estes pontos considere a aplicação $\pi : B_L \rightarrow \mathbb{P}^1$ que descreve B_L como um recobrimento de $\mathbb{P}^1$ (Lema 2.2.1) e suponhamos que $\pi(L_1) = \lambda_1, \pi(L_2) = \lambda_2, \pi(M_1) = \lambda_3$ e $\pi(M_2) = \lambda_4$ em que, não necessariamente $\lambda_i \neq \lambda_j$. Fixado um outro ponto $\lambda_0 \in \mathbb{P}^1$, considere φ o automorfismo de $\mathbb{P}^1$ tal que $\varphi(\lambda_0) = \varphi(\lambda_0), \varphi(\lambda_1) = \lambda_3$ e $\varphi(\lambda_2) = \lambda_4$. Assim, o isomorfismo entre as curvas B_L e B_M aplica L_i em $M_i, i = 1, 2$ via o automorfismo φ .

Portanto podemos definir

$$\eta(q) = q'$$

ou seja, o isomorfismo η se estende a todos os pontos de C_L e o resultado segue. ■

3.2 Descrição geométrica

O objetivo desta seção é dar uma descrição geométrica da curva $C_L, L \subset X$, em todos os casos em que o complexo quadrático de retas X é semi estável.

Vimos na seção anterior que fixada $L \subset X$, a curva C_L é dada pela interseção do plano h_L (que é o plano que contem o feixe de retas de $\mathbb{P}^3$ parametrizado pela reta L) com a superfície singular S .

Podemos determinar a equação do plano h_L da seguinte maneira: considerando dois pontos quaisquer x e y pertencentes à reta L (dados em coordenadas de Plücker), encontramos as retas l_x e l_y contidas em $\mathbb{P}^3$ que são parametrizadas pelos pontos x e y . O plano $\langle l_x, l_y \rangle$ é o plano que contem as retas l_x e l_y e portanto é o plano h_L que contem o feixe.

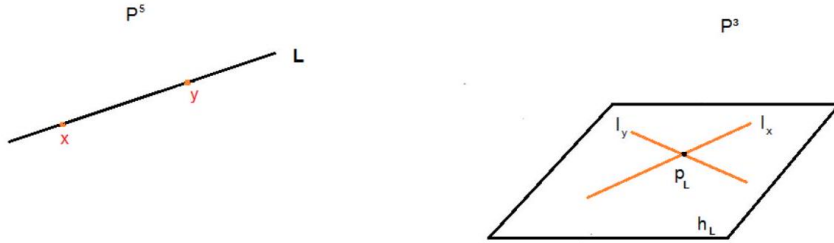


Figura 3.3: Plano h_L determinado pelas retas l_x e l_y

Em [12] temos a equação da superfície singular S descrita em função do Símbolo de Segre do complexo quadrático. Utilizaremos estas equações para determinar a equação da curva C_L .

Para determinar a reta $L \subset X$ a ser fixada, escolhemos um ponto suave $x \in X$ e calculamos a interseção $T_x X \cap X$ que consiste, em geral, de quatro retas (Proposição 1.2.2). Fixamos uma destas retas para efetuar os cálculos. Como a curva B_L é unicamente determinada (a menos de isomorfismo) pelo Símbolo de Segre do feixe (Teorema 2.2.2) a descrição geométrica de C_L também independe da escolha da reta. Os cálculos desta seção são feitos com o auxílio do Maple ®.

Observação 3.2.1 Para facilitar os cálculos, atribuiremos valores à λ_i , onde Q_{λ_i} é um cone ordinário do feixe de quádricas $\mathcal{P} = (Q_{\lambda_i})_{\lambda_i \in \mathbb{P}^1}$. Notemos

que esta escolha de valores não implica perda de generalidade, uma vez que, como já enfatizamos, a descrição da quártica depende unicamente do Símbolo de Segre, o qual não é modificado pelos valores de λ_i . Mais precisamente, basta que tenhamos o número de raízes distintas do discriminante do feixe que corresponda corretamente ao Símbolo de Segre.

3.2.1 O caso geral

Seja $\mathcal{P} = \{\lambda G + \mu F \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ um feixe de quádricas de $\mathbb{P}^5$, onde G é a quádrica de Plücker e $F \subset \mathbb{P}^5$ é uma quádrica distinta de G , e seja $X = F \cap G$ o lugar de base de $\mathcal{P}$. Suponha que o Símbolo de Segre do feixe é $\sigma = [111111]$. Deste modo, $\mathcal{P}$ é um feixe estável e contém seis 0-cones correspondentes às seis raízes distintas do discriminante do feixe. O complexo quadrático de retas $X = F \cap G$, neste caso, é suave. As quádricas F e G possuem equações:

$$\begin{aligned} G : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 &= 0 \\ F : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade (ver Observação 3.2.1), atribuiremos valores aos λ_i 's: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2, \lambda_5 = 4$ e $\lambda_6 = -4$. Daí a equação de F é

$$F : x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_5^2 - 4x_6^2 = 0$$

Seja $x = \left(\frac{\sqrt{6}i}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 : 0 : 0 : 0\right) \in X$ ponto suave. Temos:

$$\begin{aligned} T_x G : i\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 &= 0 \\ T_x F : i\sqrt{6}x_1 - \sqrt{2}x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Um cálculo no Maple [®] mostra que a solução do sistema formado pelas equações de $G, F, T_x G$ e $T_x F$ contém a reta L dada pelas equações paramétricas:

$$L : \left\{ x_1 = i\sqrt{3}x_2, x_3 = \frac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}x_2, x_4 = \frac{2i\sqrt{3}}{3}x_6, x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_6 \right\}.$$

O ponto $y = \left(0 : 0 : 0 : \frac{2i\sqrt{3}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} : 1\right)$ também pertence à reta L . As coordenadas de Plücker de x e y (Seção 1.2) são dadas por:

$$x = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i : \frac{1}{2} : 0 : 0 : -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \right) \text{ e}$$

$$y = \left(0 : 1 : -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} : 1 : 0 \right).$$

Daí temos:

$$l_x : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } l_y : \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

O plano h_L gerado pelas retas l_x e l_y tem equação

$$h_L : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}iy_1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}i - 1}iy_2 + \frac{i\sqrt{3} + 1}{2}y_3 + y_4 = 0$$

A superfície singular S é dada por

$$64 \sum_{i=1}^4 y_i^4 + 160 (y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) + 272 (y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + 160 (y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2) = 0$$

Um cálculo no Maple [®] mostra que, neste caso, a quártica C_L é irredutível e o ponto

$$q_1 = \left(\frac{1173}{3076}\sqrt{2} + \frac{329}{3076}i\sqrt{2} + \frac{119}{3076}\sqrt{2}\sqrt{3} + \frac{1081}{3076}i\sqrt{2}\sqrt{3} : \right.$$

$$\left. \frac{42}{769}\sqrt{2} + \frac{175}{1538}i\sqrt{2} + \frac{138}{769}\sqrt{2}\sqrt{3} + \frac{575}{1538}i\sqrt{2}\sqrt{3} : 1 : y_4 \right)$$

onde $y_4 = \frac{425}{1538}i\sqrt{3} + \frac{102}{769}\sqrt{3} - \frac{1175}{1538} + \frac{282}{769}i$ é um nó, o qual corresponde ao ponto de tangência de h_L e S .

Figura: A curva C_L no caso $\sigma = [111111]$

Este caso foi estudado em [7].

Para determinar o gênero da curva C_L , recordemos que se C é uma curva plana singular irredutível de grau d , então o gênero aritmético de C é dado por

$$p_a(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

e o gênero geométrico de C é por

$$p_g(C) = p_a(C) - \sum_P \delta_P = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_P \delta_P$$

onde $\delta_P = \binom{m_P(C)}{2}$ com $m_P(C)$ a multiplicidade do ponto singular P sobre a curva C .

Logo, como C_L é uma quártica plana com um ponto duplo ordinário, temos

$$p_a(C_L) = 3 \text{ e } p_g(C_L) = 2$$

3.2.2 Complexo Tetraédrico de Retas

Considere o espaço projetivo $\mathbb{P}^5$ com coordenadas de Plücker $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ e sejam G a quádrlica de Plücker e F uma quádrlica distinta de G , ambas em $\mathbb{P}^5$, com respectivas equações dadas por

$$G : p_{01} \cdot p_{23} + p_{02} \cdot p_{31} + p_{03} \cdot p_{23} = 0$$

$$F : (1 + \lambda)p_{01} \cdot p_{23} + \lambda p_{02} \cdot p_{31} + p_{03} \cdot p_{23} = 0.$$

A interseção $X := F \cap G$ é denominada Complexo Tetraédrico de Retas e o símbolo de Segre do feixe de quádrlicas gerado por G e F , o qual é por definição o símbolo de Segre do complexo X , é $[(11)(11)(11)]$. O determinante $\det(\alpha G + \beta F)$ possui três raízes duplas distintas: $(\alpha_0 : \beta_0) = (1 + \lambda : -1)$, $(\alpha_1 : \beta_1) = (\lambda : -1)$ e $(\alpha_2 : \beta_2) = (1 : -1)$. Sabemos que os cones do feixe estão em correspondência biunívoca com as raízes do determinante. Portanto o feixe possui três cones excepcionais:

$$(1 + \lambda)G - F : p_{02} \cdot p_{13} + \lambda p_{03} p_{12} = 0,$$

que é singular ao longo da reta $V_1 := \{p_{02} = p_{03} = p_{12} = p_{13} = 0\}$;

$$\lambda G - F : -p_{01} \cdot p_{23} + (\lambda - 1)p_{03} p_{12} = 0,$$

que é singular ao longo da reta $V_2 := \{p_{01} = p_{03} = p_{12} = p_{23} = 0\}$ e

$$G - F : -\lambda p_{02} \cdot p_{23} + (1 - \lambda)p_{02} p_{13} = 0,$$

singular ao longo da reta $V_3 := \{p_{01} = p_{02} = p_{13} = p_{23} = 0\}$.

Deste modo, X possui seis pontos singulares:

$$\begin{aligned} V_1 \cap X &= \{P_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1), P_2 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)\}, \\ V_2 \cap X &= \{P_3 = (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0), P_4 = (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)\} \text{ e} \\ V_3 \cap X &= \{P_5 = (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0), P_6 = (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)\}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \frac{-1}{2}$, seja $x = (0 : 0 : 0 : 1 : -1 : 1)$ um ponto suave de $X = F \cap G$, onde

$$F = p_{01} \cdot p_{23} + p_{02} \cdot p_{31} + 2p_{03} \cdot p_{23} = 0.$$

Calculando a interseção $T_x X \cap X$, fixamos a reta

$$L = \left\{ p_{01} = \frac{-3}{2}p_{03}, p_{02} = \frac{1}{2}p_{03}, p_{13} = -p_{12} \cdot p_{23} = p_{12} \right\}$$

O ponto $y = (-3 : 1 : 2 : 2 : -2 : 2)$ pertence à reta L . As retas de $\mathbb{P}^3$ parametrizadas por estes pontos são:

$$l_x : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } l_y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, considerando $\mathbb{P}^3$ com coordenadas $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$, o plano $h_L = \langle l_x, l_y \rangle$ tem equação

$$y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

Por [12], temos que a superfície singular S é um tetraedro, dada portanto pela equação:

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

Logo, a curva $C_L = h_L \cap S$ tem equação

$$-y_1 y_2 y_3 (y_2 + y_3) = 0$$

ou seja, C_L é uma quártica redutível que consiste na união das retas:

$$\begin{aligned} l_1 &= \{y_1 = 0, y_4 = -(y_2 + y_3)\}, l_2 = \{y_2 = 0, y_4 = -y_3\} \\ l_3 &= \{y_3 = 0, y_4 = -y_2\} \text{ e } l_4 = \{y_2 = -y_3, y_4 = 0\} \end{aligned}$$

Faremos agora uma breve abordagem sobre uma outra curva associada ao complexo de retas, cujo estudo era o objetivo inicial deste trabalho. Baseados em [7], completamos este estudo no caso do Complexo Tetraédrico de Retas e o descrevemos a seguir.

Seja L a reta que passa por dois dos pontos singulares de X : $P_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e $P_6 = (0 : 0 : 1 : 0 : 0)$. Assim, L pode ser dada pelas equações

$$L = \{p_{01} = p_{02} = p_{12} = p_{13} = 0\}$$

Portanto, a projeção de X com centro em L pode ser descrita por

$$f_L : X \longrightarrow V_3$$

$$(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \mapsto (p_{01} : p_{02} : p_{12} : p_{13})$$

onde $V_3 \simeq \mathbb{P}^3$ é um 3-plano disjunto de L , suponhamos $V_3 = \{p_{03} = p_{23} = 0\}$. Geometricamente, dado um ponto $x \in X, x \notin L$, a aplicação f_L aplica o ponto x no ponto de interseção do plano gerado por x e L com V_3 : $f_L(x) = \langle x, L \rangle \cap V_3$.

Proposição 3.2.1 ([7], página 796) A aplicação f_L é um isomorfismo birracional de X para V_3 .

Demonstração: A aplicação f_L não está definida em L . Considere dois pontos p e q em X tais que $p, q \notin L$. Se um plano V_2 contem p, q e L , então a reta $\overline{pq}$ intercepta L e consequentemente intercepta X em três pontos distintos: p, q e $\overline{pq} \cap L$. Assim, pelo Teorema de Bezout, $\overline{pq} \subset X$. Logo a projeção f_L é injetiva fora do lugar das retas em X interceptando a reta L e f_L é um isomorfismo birracional. ■

Denotaremos o lugar de retas em X interceptando a reta L por $\tilde{B}_L$, para distingui-lo da curva $B_L \subset A \subset G(2, 6)$. Destacamos que faz sentido definir a projeção f_L sobre $\tilde{B}_L$ uma vez que dada uma reta $L' \subset \tilde{B}_L$ a projeção f_L aplica L' em um único ponto de V_3 . Definimos a curva

$$E_L := f_L(\tilde{B}_L)$$

Para descrevê-la detalhadamente, vamos inicialmente analisar a variedade A .

Considerando $V_3 \simeq \mathbb{P}^3 = \{p_{03} = p_{23} = 0\}$, no que segue utilizaremos a seguinte notação para os subconjuntos de V_3 : $E_0 = \{p_{01} = 0\}$, $E_1 = \{p_{02} = 0\}$, $E_2 = \{p_{12} = 0\}$, $E_3 = \{p_{13} = 0\}$ e $e_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$, $e_1 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $e_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$, $e_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$.

Lema 3.2.1 Se $q = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ é um ponto qualquer de $\mathbb{P}^3$, então as equações do plano $\alpha(q)$ em $G \subset \mathbb{P}^5$ são dadas por $y_i p_{jk} + y_j p_{ki} + y_k p_{ij} = 0$,

com $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $i < j < k$

Proposição 3.2.2 Seja $q \in \bigcup_{i=0}^3 E_i$. Temos as seguintes possibilidades:

a) se $q \in E_j, q \neq e_0, e_1, e_2, e_3$ ou $q \in E_i \cap E_j, i \neq j$, então $\alpha(q) \cap F$ é uma cônica de posto 2 (duas retas);

b) se $q = e_0, e_1, e_2, e_3$, então $\alpha(q) \subset F$.

Demonstração: a) Seja $q = (0 : x_1 : x_2 : x_3)$ um ponto arbitrário de E_0 , com $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ ($q \notin E_j, j \neq 0$). Pelo Lema 3.2.1 as equações de $\alpha(q)$ são

$$x_0 p_{12} + x_1 p_{20} + x_2 p_{01} = 0 \implies x_1 p_{02} = x_2 p_{01}$$

$$x_0 p_{13} + x_1 p_{30} + x_3 p_{01} = 0 \implies x_1 p_{03} = x_3 p_{01}$$

$$x_0 p_{23} + x_2 p_{30} + x_3 p_{02} = 0 \implies x_2 p_{03} = x_3 p_{02}$$

$$x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} = 0 \implies x_1 p_{23} = x_2 p_{13} - x_3 p_{12}$$

onde as equações do lado direito são obtidas de $x_0 = 0$. Fazendo $x_1 = 1$ nas equações acima e as devidas substituições obtemos que $\alpha(q) \cap F$ tem equação:

$$(1 + \lambda) p_{01} (-x_2 p_{31} - x_3 p_{12}) + \lambda (x_2 p_{01}) p_{31} + (x_3 p_{01}) p_{12} = 0 \implies$$

$$p_{01} (x_2 p_{13} - \lambda x_3 p_{12}) = 0$$

que são as retas

$$L' = p_{12} (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : -x_3) + p_{13} (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : x_2)$$

$$L'' = p_{01} (1 : x_2 : x_3 : 0 : 0 : 0) + p_{12} \left(0 : 0 : 0 : 1 : \frac{\lambda x_3}{x_2} : (\lambda + 1)x_3 \right).$$

O mesmo raciocínio se aplica nos outros casos e $\alpha(q) \cap F$ são as retas:

- $q \in E_1 :$

$$L' = p_{02} (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : -x_3) + p_{03} (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : x_2)$$

$$L'' = p_{01} (1 : 0 : 0 : -x_2 : -x_3 : 0) + p_{03} \left(0 : \frac{\lambda x_2}{x_3} : 1 : 0 : 0 : (1 - \lambda)x_2 \right)$$

- $q \in E_2 :$

$$L' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : -x_3 : 0) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : x_1 : 0)$$

$$L'' = p_{02}(0 : 1 : 0 : x_1 : 0 : -x_3) + p_{03}\left(\frac{(1-\lambda)x_1}{x_3} : 0 : 1 : 0 : \lambda x_1 : 0\right)$$

- $q \in E_3 :$

$$L' = p_{01}(1 : 0 : 0 : -x_2 : 0 : 0) + p_{02}(0 : 1 : 0 : x_1 : 0 : 0)$$

$$L'' = p_{02}\left(\frac{(\lambda-1)x_1}{x_2} : 1 : 0 : \frac{x_1}{\lambda} : 0 : 0\right) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : x_1 : x_2)$$

Para $q \in E_i \cap E_j, i \neq j$, aplicando o mesmo raciocínio obtemos que as interseções $\alpha(q) \cap F$ são as retas:

- $q \in E_0 \cap E_1 :$

$$L' = p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : x_3 : 0) + p_{23}(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$$

$$L'' = p_{02}(0 : 1 : x_3 : 0 : 0 : 0) + p_{23}(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$$

- $q \in E_0 \cap E_2$

$$L' = p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : -x_3) + p_{13}(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : x_3 : 0 : 0 : 0) + p_{13}(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$$

- $q \in E_0 \cap E_3 :$

$$L' = p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0) + p_{13}(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : x_2)$$

$$L'' = p_{01}(1 : x_2 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)$$

- $q \in E_1 \cap E_2$

$$L' = p_{02}(0 : 1 : 0 : 0 : 0 : -x_3) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : -x_3 : 0) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$$

- $q \in E_1 \cap E_3 :$

$$L' = p_{02}(0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : x_2)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : -x_2 : 0 : 0) + p_{02}(0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)$$

- $q \in E_1 \cap E_2$

$$L' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : x_1 : 0)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{02}(0 : 1 : 0 : x_1 : 0 : 0)$$

b) Consideremos o vértice $e_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$. Dado qualquer ponto $p = (a : b : c : d) \in \mathbb{P}^3$ a reta l que passa por estes pontos $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ é levada pela aplicação de Plücker no ponto $(b : c : d : 0 : 0 : 0)$. Portanto o α -plano $\alpha(e_0) = \{p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\}$ parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$ que passam por e_0 e este plano está contido em X . Considerando os pontos $e_1 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $e_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $e_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$ concluímos de maneira análoga que os respectivos α -planos $\alpha(e_1) = \{p_{02} = p_{03} = p_{23} = 0\}$, $\alpha(e_2) = \{p_{01} = p_{03} = p_{12} = 0\}$ e $\alpha(e_3) = \{p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0\}$ estão contidos em X , demonstrando o resultado. ■

Corolário 3.2.1 $\bigcup_{i=0}^{i=3} E_i = S$

Demonstração: Pela Proposição 3.2.2 temos

$$\bigcup_{i=0}^{i=3} E_i \subset S$$

Como S é uma superfície quártica o resultado segue. ■

Assim sendo, a variedade A é constituída por todas as retas que parametrizam feixes de $\mathbb{P}^3$ com foco sobre $\bigcup_{i=0}^{i=3} E_i$. Temos portanto três possibilidades:

- feixes de retas contidos nos hiperplanos $E_i, i = 0, 1, 2, 3$. Neste caso temos os β -planos $\beta(E_0) = \{p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0\}$, $\beta(E_1) = \{p_{01} = p_{12} = p_{13} = 0\}$, $\beta(E_2) = \{p_{02} = p_{12} = p_{23} = 0\}$ e $\beta(E_3) = \{p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0\}$, todos contidos em X ;
- feixes de retas cujo foco é um dos pontos $e_i, i = 0, 1, 2, 3$. Neste caso temos os α -planos descritos na demonstração do item b) da Proposição 3.2.2;

- feixes com focos sobre os hiperplanos E_i , mas que não estão contidos nesses hiperplanos.

Retornemos ao nosso problema inicial de descrever a curva $E_L = f_L(\tilde{B}_L)$.

Proposição 3.2.3 Se L é a reta fixada anteriormente, então $h_L = E_1$ e $p_L = e_3$

Demonstração: Consideremos os pontos $P_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e $P_6 = (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ pertencentes à reta L . Estes pontos são imagens pelo mergulho de Plücker das retas $l_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $l_{P_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estas retas estão contidas em E_1 e se interceptam em $e_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$. Logo $h_L = E_1$ e $p_L = e_3$. ■

Vamos agora descrever o lugar $\tilde{B}_L$ das retas contidas em X que interceptam a reta $L = \{p_{01} = p_{02} = p_{12} = p_{13} = 0\}$.

Notemos que se uma reta $L' \subset X$ intercepta a reta L , então os feixes parametrizados por L e L' possuem uma reta l em comum. Deste modo os planos E_1 e $h_{L'}$ que contem os feixes parametrizados por L e L' se interceptam na reta l e esta reta contem os focos e_3 e $p_{L'}$ destes feixes. Deste modo, as retas que interceptam L parametrizam feixes cujos focos estão sobre as retas de $\bigcup_{i=0}^3 E_i$ que passam por e_3 e que interceptam o plano E_1 , ou seja, as interseções $E_0 \cap E_1, E_0 \cap E_2$ e $E_1 \cap E_2$, ou feixes que estão contidos no plano E_1 .

Proposição 3.2.4 $\tilde{B}_L$ é formada pelos planos $135 := \{p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0\}$, $145 := \{p_{01} = p_{03} = p_{13} = 0\}$, $236 := \{p_{02} = p_{12} = p_{23} = 0\}$ e $246 := \{p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\}$, pelo α -plano $\alpha(e_3) = 136 = \{p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0\}$ e pelo β -plano $\beta(E_1) = 146 = \{p_{01} = p_{12} = p_{13} = 0\}$.

Demonstração: Na demonstração da Proposição 3.2.2 vimos que se q é um ponto arbitrário de $E_0 \cap E_1$ ou $E_0 \cap E_2$ ou $E_1 \cap E_2$, as retas da interseção $\alpha(q) \cap F$ são

$$L' = p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : x_3 : 0) + p_{23}(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$$

$$L'' = p_{02}(0 : 1 : x_3 : 0 : 0 : 0) + p_{23}(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$$

$$\text{se } q = (0 : x_0 : x_2 : x_3) \in E_0 \cap E_1$$

$$L' = p_{12}(0 : 0 : 0 : 1 : 0 : -x_3) + p_{13}(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : x_3 : 0 : 0 : 0) + p_{13}(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$$

$$\text{se } q = (0 : x_1 : 0 : x_3) \in E_0 \cap E_2$$

$$L' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{03}(0 : 0 : 1 : 0 : x_1 : 0)$$

$$L'' = p_{01}(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) + p_{02}(0 : 1 : 0 : x_1 : 0 : 0)$$

se $q = (x_0 : 0 : 0 : x_3) \in E_1 \cap E_2$. Fazendo o ponto q (isto é, os coeficientes x_i) variar, obtemos os planos $135 := \{p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0\}$, $145 = \{p_{01} = p_{03} = p_{13} = 0\}$, $236 = \{p_{02} = p_{12} = p_{23} = 0\}$ e $246 = \{p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\}$. Que B_L contem o α -plano $\alpha(e_3)$ e o β -plano $\beta(E_1)$ segue da Proposição 3.2.3. ■

Proposição 3.2.5 No caso do complexo tetraédrico de retas, a quártica E_L é a união de 5 retas de V_3 .

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.2.4 queremos determinar a imagem dos planos 135, 145, 236, 246, $\alpha(e_3)$ e $\beta(E_1)$ pela projeção f_L .

Consideremos o plano 135; os outros casos são análogos. Observemos primeiramente que qualquer reta contida no plano 135 intercepta a reta L no ponto P_1 . Assim, dado um ponto $Q \in 135$ existe uma única reta que passa por este ponto e intercepta a reta L , a saber a reta $\overline{P_1Q}$. Portanto, a cada ponto do plano 135 corresponde uma única reta em B_L .

Suponha $Q = (0 : 0 : 0 : a : b : c)$. Temos $f_L(Q) = f_L(\overline{P_1Q}) = (0 : 0 : a : b)$. Fazendo Q variar sobre o plano 135 obtemos que este plano é levado pela projeção f_L na reta $l_1 = \{p_{01} = p_{02} = 0\} \subset V_3$. Pelo mesmo raciocínio obtemos $f_L(145) = l_2 = \{p_{01} = p_{13} = 0\}$, $f_L(236) = l_3 = \{p_{02} = p_{12} = 0\}$ e $f_L(246) = l_4 = \{p_{12} = p_{13} = 0\}$. O α -plano $\alpha(e_3)$ e o β -plano $\beta(E_1)$ contem a reta L e por isso são aplicados por f_L nos pontos $(0 : 0 : 0 : 1)$ e $(0 : 1 : 0 : 0)$, respectivamente.

Por outro lado, a Proposição 3.2.4 afirma também que $L \in B_L$. Como f_L não está definida em L faremos a explosão de X em L e a quinta reta da quártica E_L será exatamente a imagem do divisor excepcional da explosão.

Seja, então, $\widetilde{X}_L \subset X \times V_3$ o fecho do gráfico da projeção f_L e $\pi : \widetilde{X}_L \rightarrow X$ a explosão de X ao longo de L . Denotemos por $F = \pi^{-1}(L)$ o divisor excepcional da explosão. Por [?], página 604, temos que o divisor excepcional é naturalmente indentificado com a projetivização $\mathbb{P}(N_{X/L})$ do fibrado normal de X em L . Assim, a aplicação $\widetilde{f}_L := f_L \circ \pi, \widetilde{f}_L : \widetilde{X}_L \rightarrow V_3$, envia um ponto (x, η) do divisor excepcional F , correspondente ao vetor normal η a L em x , para o ponto de interseção de V_3 com o plano gerado por L e qualquer reta passando por x e representando o vetor η . Esta aplicação está bem definida pois η é definido como um vetor tangente a X em x módulo vetores tangentes à L em x . A imagem $\widetilde{f}_L(F)$ é a imagem do espaço tangente a X em um ponto

de L .

Para a reta L considerada temos $T_x(X) = \{p_{01} = p_{12} = 0\}$, qualquer que seja $x \in L$. Portanto a imagem do divisor excepcional $F = L \times V_3$ da explosão pela aplicação $\tilde{f}_L$ é a reta $l_5 = \{p_{01} = p_{12} = 0\} = T_x(X) \cap V_3$. Logo

$$E_L = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4 \cup l_5.$$

■

Portanto, no caso do Complexo Tetraédrico de Retas, a quártica E_L está contida na superfície singular S . O projeto inicial era mostrar que o mesmo ocorreria nos demais casos de complexos quadráticos semi estáveis, mas concluímos que esta afirmativa é falsa fazendo cálculos análogos em alguns outros casos.

3.2.3 Demais casos de Complexos Quadráticos Semi estáveis

Nesta seção daremos uma descrição da quártica C_L em todos os casos de feixes de quádricas semi estáveis. Em todos os casos a reta L é uma reta genérica, isto é, não passa por nenhuma das singularidades do lugar de base do feixe e não está contida em nenhum de seus planos.

Teorema 3.2.1 Seja $\mathcal{P}$ um feixe de quádricas semiestável. A curva C_L associada ao feixe $\mathcal{P}$ é uma quártica plana que pode ser descrita a partir do Símbolo de Segre do feixe. Mais precisamente temos:

- (1) $\sigma = [21111]$: a curva C_L é irredutível com dois nós.
- (2) $\sigma = [2211]$: a curva C_L é irredutível com três nós.
- (3) $\sigma = [222]$: a curva C_L consiste de duas cônicas suaves que se interceptam em quatro pontos distintos.
- (4) $\sigma = [(11)1111]$: a curva C_L consiste de uma cúbica suave e uma reta que intercepta a cúbica em três pontos distintos.
- (5) $\sigma = [(11)(11)11]$: a curva C_L consiste de uma cônica e duas retas distintas cada uma delas interceptando a cônica em dois pontos distintos.
- (6) $\sigma = [2(11)11]$: a curva C_L consiste de uma cúbica com um ponto duplo e uma reta interceptando a cúbica em três pontos.
- (7) $\sigma = [22(11)]$: a curva C_L consiste de uma cônica suave e duas retas distintas, cada uma delas interceptando a cônica em dois pontos distintos.
- (8) $\sigma = [2(11)(11)]$: a curva C_L consiste de uma cônica suave e duas retas distintas que interceptam a cônica em dois pontos um deles comum às duas

retas.

- (9) $\sigma = [3111]$: a curva C_L é irredutível com uma cúspide e um nó.
- (10) $\sigma = [321]$: a curva C_L é irredutível com uma cúspide e dois nós.
- (11) $\sigma = [3(11)1]$: a curva C_L consiste de uma cúbica com uma cúspide e uma reta interceptando a cúbica em três pontos suaves.
- (12) $\sigma = [33]$: a curva C_L é irredutível com duas cúspides e um nó.
- (13) $\sigma = [(111)111]$: a curva C_L consiste de duas retas duplas.
- (14) $\sigma = [(21)111]$: a curva C_L consiste de uma cúbica e uma reta interceptando a cônica em dois pontos distintos.
- (15) $\sigma = [21(111)]$: a curva C_L consiste de duas retas distintas e uma reta dupla.
- (16) $\sigma = [(21)21]$: a curva C_L consiste de uma cúbica com um nó e uma reta interceptando a cúbica em dois pontos suaves.
- (17) $\sigma = [(21)(11)1]$: a curva C_L consiste de uma cônica suave e duas retas distintas, uma delas tangente à cônica e a outra a interceptando em dois pontos.
- (18) $\sigma = [(111)(11)1]$: a curva C_L consiste de duas retas duplas.
- (19) $\sigma = [3(111)]$: a curva C_L consiste de uma cônica degenerada em duas retas e uma reta dupla.
- (20) $\sigma = [(12)3]$: a curva C_L é irredutível com dois pontos singulares.
- (21) $\sigma = [(21)(111)]$: a curva C_L consiste de duas retas duplas.
- (22) $\sigma = [(21)(21)]$: a curva C_L consiste de uma cônica suave e duas retas distintas tangentes à cônica.

Demonstração: Apesar de possuírmos os cálculos em todos os casos descritos no Teorema, faremos a demonstração nos casos (1), (3) e (4). Os demais são análogos e serão omitidos.

No que segue, fazemos a descrição da quártica C_L à partir de uma escolha conveniente da reta L . Segue do Teorema 3.1.1 que as curvas obtidas à partir de outras escolhas são isomorfas às obtidas nesta demonstração.

(1) $\sigma = [21111]$: Neste caso, o feixe possui 5 raízes distintas e as quádricas G e F são dadas por

$$G : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_5x_6 = 0$$

$$F : \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 + \lambda_4x_4^2 + 2\lambda_5x_5x_6 + x_5^2 = 0$$

Atribuiremos aos λ_i 's os valores: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$ e $\lambda_5 = 0$, donde segue que a equação de F é

$$F : x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_4^2 + x_5^2 = 0$$

O complexo quadrático $X = G \cap F$ possui um único ponto singular $v_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ dado pela interseção do cone excepcional $Q_{\lambda_1} = G - F$ com X . Fixamos o ponto suave $x = (0 : 0 : 1 : i : 2i : 0) \in X$, escolhido arbitrariamente, para determinar a interseção $T_x X \cap X$ que consiste de 4 retas. Este e os outros cálculos usados nesta demonstração foram feitos utilizando o Maple 16. Fixamos uma das quatro retas obtidas. Seja L a reta dada pelas equações paramétricas

$$L = \left\{ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(2x_4 - x_5), x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i(2x_4 - x_5), x_3 = ix_4 - ix_5, x_6 = -x_4 + \frac{1}{2}x_5 \right\}.$$

Os pontos $x = (0 : 0 : 1 : i : 2i : 0)$ e $y = (-\sqrt{2} : -\sqrt{2}i : -2i : 0 : 2 : 1)$ pertencem à reta L e, conseqüentemente, parametrizam as retas l_x e l_y do feixe. Assim, o plano $\langle l_x, l_y \rangle$ é o plano h_L . Afim de determinar a equação desse plano, precisamos encontrar as coordenadas de Plücker dos pontos x e y que estão em coordenadas de Klein. Usando as relações entre as coordenadas de Klein e de Plücker descritas em Jessop, obtemos $x = (0 : 0 : -2i : 0 : 1 : 0)$ e $y = (0 : -2i : 4 : 1 : 2i : -2\sqrt{2})$ que parametrizam as retas $l_x : \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $l_y : \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix}$. Considerando $\mathbb{P}^3$ com coordenadas $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ determinamos, usando a equação geral $Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4 = 0$ de um plano de $\mathbb{P}^3$, que a equação do plano h_L do feixe é dada por

$$h_L = \langle l_x, l_y \rangle = \{y_1 + 2iy_2 = 0\}$$

A equação da superfície singular S é dada por

$$S : 2y_1^4 + 2y_4^4 + 8y_1^2y_2^2 + 8y_3^2y_4^2 + 4y_1^2y_3^2 + 4y_2^2y_4^2 + 5y_1^2y_4^2 = 0$$

Portanto a equação da curva C_L dada pela substituição da equação de h_L na equação de S é

$$C : y_4^4 + 4y_3^2y_4^2 - 8y_2^2y_3^2 - 8y_2^2y_4^2 = 0$$

Usando o Maple[®] mostramos que C_L é uma curva irredutível e seus pontos singulares são os nós (pontos duplos ordinários $q_1 = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $q_2 = (-2i : 1 : 0 : 0)$).

Vamos mostrar agora que o ponto q_1 é a imagem pela aplicação j do nó da

curva B_L e que o ponto q_2 é o ponto de tangência do plano h_L com a superfície singular S . Primeiramente, na demonstração do Teorema 6.6, caso (2), em [2], temos que o nó da curva B_L corresponde à imagem inversa $\pi^{-1}(\lambda_1)$ que é o plano $P := \langle L, v_1 \rangle$. Este plano possui equações paramétricas

$$P = \left\{ x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}i(x_3 + ix_4), x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_3 + ix_4), x_5 = x_4 + ix_3 \right\}$$

e $P \cap X = L \cup L'$, onde L' tem equações paramétricas

$$L' = \{x_1 = \sqrt{2}x_4, x_2 = i\sqrt{2}x_4, x_3 = ix_4, x_5 = 0\}$$

Os pontos $v_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e $y' = (\sqrt{2} : i\sqrt{2} : i : 1 : 0 : 0)$ pertencem à L' . Em coordenadas de Plucker temos $v_1 = (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)$ e $y' = (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : -\sqrt{2}i)$ donde segue que $l_{v_1} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $l_{y'} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto

$$j(\langle L, v_1 \rangle) = j(L') = l_{v_1} \cap l_{y'} = q_1.$$

Por outro lado, cálculos no Maple[®] mostram que o plano tangente à superfície S no ponto q_2 dado pela equação

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(q_2)y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2}(q_2)y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_3}(q_2)y_3 + \frac{\partial F}{\partial y_4}(q_2)y_4 = 0$$

onde $F = 2y_1^4 + 2y_4^4 + 8y_1^2y_2^2 + 8y_3^2y_4^2 + 4y_1^2y_3^2 + 4y_2^2y_4^2 + 5y_1^2y_4^2$, é exatamente o plano h_L

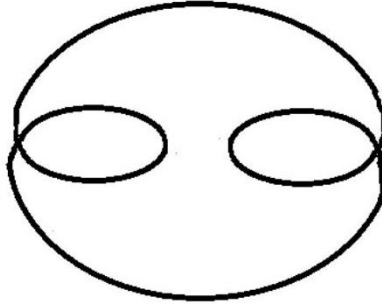


Figura 3.4: Caso $\sigma = [21111]$

(3) $\sigma = [222]$: Neste caso temos:

$$G : x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$$

$$F : 2\lambda_1x_1x_2 + 2\lambda_2x_3x_4 + 2\lambda_3x_5x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

Consideremos $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$ donde segue que a equação de F é:

$$F : 2x_1x_2 - 2x_3x_4 + 4x_5x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0.$$

Escolhemos o ponto suave $x = (1 : 0 : i : 0 : 0 : 0) \in X$ e fixamos a reta

$$L = \left\{ x_1 = 2i\sqrt{2}x_6 - ix_3, x_2 = -i\sqrt{2}x_6, x_4 = \sqrt{2}x_6, x_5 = -4x_6 \right\}$$

contida em X e passando por x . O ponto $y = (2i\sqrt{2} : -i\sqrt{2} : 0 : \sqrt{2} : -4 : 1) \in L$ e em coordenadas de Plücker temos $x = (0 : 0 : 0 : 0 : -i : 1)$ e $y = (-i\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1 : -4 : 0 : 2i\sqrt{2})$. Daí: $l_x : \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $l_y : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Analogamente ao caso anterior determinamos a equação do plano gerado pelas retas l_x e l_y :

$$h_L = \langle l_x, l_y \rangle : y_3 = 2i\sqrt{2}y_1 + iy_2$$

A equação da superfície singular neste caso é:

$$S : 9y_3^2y_4^2 + y_2^2y_4^2 + 4y_2^2y_3^2 - 12y_1y_2y_3y_4 = 0$$

Consequentemente a quártica plana dada pela interseção do plano h_L com a superfície S tem equação

$$C_L : (-4y_1y_2 + 3i\sqrt{2}y_1y_4 - \sqrt{2}y_2^2 + 2iy_2y_4)(4y_1y_2 + 6i\sqrt{2}y_1y_4 + \sqrt{2}y_2^2 + 2iy_2y_4) = 0.$$

Assim C_L consiste das cônicas suaves $(C_L)_1 : -4y_1y_2 + 3i\sqrt{2}y_1y_4 - \sqrt{2}y_2^2 + 2iy_2y_4 = 0$ e $(C_L)_2 : 4y_1y_2 + 6i\sqrt{2}y_1y_4 + \sqrt{2}y_2^2 + 2iy_2y_4 = 0$ as quais se interceptam nos pontos $q_1 := (0 : 0 : 0 : 1), q_2 = (1 : 0 : 2i\sqrt{2} : 0), q_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} : 1 : 0 : 0\right)$ e $q_4 = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{9} : 1 : \frac{i}{9} : -\frac{i\sqrt{2}}{6}\right)$. Estes pontos correspondem aos pontos singulares da curva C_L . Sabemos que a curva B_L neste caso consiste de duas componentes ordinárias isomorfas à $\mathbb{P}^1$ que se interceptam em três pontos. Estes três pontos são levados pela aplicação j nos pontos q_1, q_2 e q_3 . O ponto q_4 é o ponto de tangência do plano h_L com a superfície S .

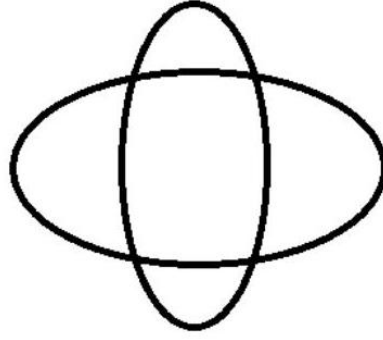


Figura 3.5: Caso $\sigma = [222]$.

(4) $\sigma = [(11)1111]$: Este é um subcaso do caso suave $\sigma = [111111]$ no qual temos $\lambda_5 = \lambda_6$. Deste modo as equações das quádricas G e F são

$$G : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

$$F : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_5 x_6^2 = 0$$

Vamos atribuir os valores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$ e $\lambda_5 = 4$. Daí

$$F : x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 0$$

O feixe possui um cone excepcional $Q_{\lambda_5} = G - 4F$ singular ao longo da reta $V_1 = \{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ que intercepta X nos pontos $v_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : i)$ e $v_2 = (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : -i)$. Analogamente ao caso anterior, considerando o ponto suave $x = (1 : -i : 1 : 0 : i : 0) \in X$, podemos fixar a reta

$$L := \left\{ x_1 = 3ix_2 + 2ix_5, x_3 = -2ix_2 - 3ix_5, x_4 = \sqrt{5}(x_2 + x_5), x_6 = \sqrt{7}(x_2 + x_5) \right\}$$

contida na interseção $T_x X \cap X$. O ponto $y = (3i : 1 : -2i : \sqrt{2} : 0 : \sqrt{7})$ também pertence à reta L e em coordenadas de Plücker temos $x = (1 : \frac{1}{2} : \frac{i}{2} : \frac{i}{2} : \frac{-1}{2} : 0)$ e $y = (2 : -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{\sqrt{7}}{2} : \frac{-\sqrt{7}}{2} : 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} : 1)$. Assim as retas parametrizadas por x e y são

$$l_x : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \text{ e } l_y : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no caso (1), com cálculos no Maple[®], obtemos a equação do plano $h_L = \langle l_x, l_y \rangle$

$$h_L : \frac{-2i}{\sqrt{7}i - 2 - \sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{7}i - 2 - \sqrt{5}}y_2 + y_3 - \frac{-2i + \sqrt{5}i + \sqrt{7}}{\sqrt{7}i - 2 - \sqrt{5}}y_4 = 0.$$

Neste caso a equação da superfície singular S é

$$S : 2y_1^2y_2^2 + 2y_3^2y_4^2 + 5y_1^2y_3^2 + 5y_2^2y_4^2 + 4y_1y_2y_3y_4 = 0$$

Fazendo a interseção de h_L com S obtemos a quártica C_L que neste caso tem equação

$$C_L : (2\sqrt{5}y_4^3 + 4y_1y_4^2 - 10y_1^2y_4 - 24y_2^2y_4 - 12y_1y_2^2 + 10y_1^3 - 4y_4^3 - 2i\sqrt{7}y_4^3 - 2i\sqrt{7}\sqrt{5}y_2^2y_4 + 8iy_2y_4^2 - 5i\sqrt{7}y_1^2y_4 + 20iy_2y_1^2 + 2i\sqrt{5}\sqrt{7}y_2^2y_1 - 9\sqrt{5}y_2^2y_4 - 4\sqrt{5}y_1y_2^2 + 5\sqrt{5}y_1^2y_4 + 8iy_2y_1y_4 + 4i\sqrt{5}y_2y_1y_4 - 3i\sqrt{7}y_2^2y_4 + 4i\sqrt{7}y_2^2y_1 + 4\sqrt{7}y_1y_2y_4)(2y_4 - 2y_1 - \sqrt{5}y_4 + i\sqrt{7}y_4) = 0,$$

ou seja, C_L é uma curva redutível formada pela união de uma cúbica e uma reta. Estas se interceptam em três pontos que são exatamente os pontos singulares da curva $C_L : q_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2} : \frac{59i}{11} - \frac{53\sqrt{5}i}{22} - \frac{29\sqrt{7}}{22} + \frac{6\sqrt{35}}{11} : y_3 : 1\right)$, $q_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2} : 0 : y_3 : 1\right)$ e $q_3 = (0 : 1 : y_3 : 0)$, onde o valor de y_3 é dado pela equação de h_L .

Sabemos por [2] que neste caso a curva B_L consiste de uma componente ordinária C a qual é uma curva elíptica suave e uma componente excepcional dada por $\pi^{-1}(\lambda_5) = V_1 \cong \mathbb{P}^1$ e que estas se interceptam em um par de pontos conjugados sob a aplicação π . Esta interseção corresponde aos planos $\langle L, v_1 \rangle$ e $\langle L, v_2 \rangle$ os quais são levados pela aplicação j nos pontos q_2 e q_3 . O ponto q_1 é o ponto de tangência do plano h_L com a superfície singular S .

■

Corolário 3.2.2 Seja C_L a curva descrita no Teorema 3.2.1. Então, o gênero geométrico de C_L é

- (i) $p_g(C_L) = 1$, se $\sigma = [21111]$ ou $\sigma = [3111]$;
- (ii) $p_g(C_L) = 0$ se $\sigma = [2211]$, $\sigma = [321]$ ou $\sigma = [33]$.

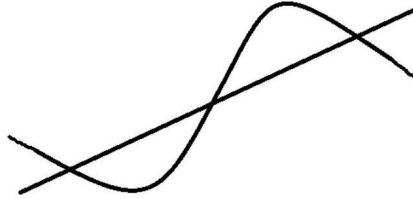


Figura 3.6: Caso $\sigma = [(11)1111]$.

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.2.1 e da Equação 3.1.

■

Concluimos do Teorema 3.2.1, do Corolário 3.2.2 e da Seção 2.2 que se a reta L não passa por nenhum ponto singular do complexo quadrático X , a aplicação j leva as componentes excepcionais da curva B_L em retas e as componentes ordinárias em curvas que possuem o mesmo gênero das componentes. Mais ainda, as singularidades das componentes ordinárias são preservadas. Para os casos em que o lugar singular do complexo X é uma curva (o que significa dizer que o feixe possui um 2-cone) e, portanto, toda reta contida no complexo passa um ponto singular de X , as componentes excepcionais de B_L são levadas em retas duplas pela aplicação j . Assim, desde que C_L é uma quártica, a interseção residual de h_L com S possui grau 2 e é portanto uma cônica.

Capítulo 4

Aplicações à Teoria de Moduli

Neste capítulo utilizaremos os resultados obtidos no capítulo precedente para estudar o espaço de Moduli das curvas quárticas planas associadas à complexos quadráticos de retas semi estáveis e construir algumas aplicações envolvendo tais espaços. Para tanto, faremos, ao longo das seções, a descrição sucinta de alguns espaços de Moduli, a saber os espaços de Moduli de Complexos Quadráticos, Superfícies Singulares e Feixes de Quádricas e ainda o espaço de Moduli de formas binárias de grau 6.

Neste capítulo, assim como nos anteriores, X denota o complexo quadrático de retas visto como o lugar de base de um feixe de quádricas de $\mathbb{P}^5$ gerado pela quádrica de Plücker G e uma segunda quádrica F distinta de G .

Fixada uma reta genérica $L \subset X$ (Proposição 2.1.2), vimos no Capítulo 3 que podemos associar a cada complexo quadrático, dado por um feixe de quádricas semi estável, uma curva quártica plana cuja descrição geométrica depende apenas do Símbolo de Segre do feixe. Inicialmente mostramos que a aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$ é equivariante no que diz respeito às devidas ações de grupo sobre as curvas $B_L \subset A$ e as curvas $C_L := j(B_L)$. Para tanto, construímos um espaço de Moduli para as curvas C_L , baseados na descrição do espaço de Moduli das superfícies singulares associadas a um complexo quadrático feita em [3].

Posteriormente, considerando o caso em que o complexo quadrático de retas X é suave e utilizando o isomorfismo

$$\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{M}_b^6$$

entre os espaços de Moduli de curvas hiperelípticas suaves de gênero 2 e de formas binárias de grau 6 sem raízes duplas, mostramos que existe uma família unidimensional de quárticas planas (no espaço de Moduli das quárticas pla-

nas, que descreveremos na seção a seguir) à qual associamos um único ponto no divisor em $\overline{\mathcal{M}}_b^6$ correspondente às sêxticas binárias com uma raiz dupla. Denotaremos esse divisor por M_{bd}^6 .

Finalmente mostramos que, para os casos em que a curva B_L (consequentemente C_L) é irredutível e o discriminante do feixe possui pelo menos duas raízes simples, dois pontos de ramificação da curva B_L produzem o nó da curva C_L e também neste casos existe uma família unidimensional de quárticas planas que são levadas em um único ponto nos respectivos espaços de Moduli.

4.1 Espaço de Moduli das quárticas planas associadas à complexos quadráticos

Nesta seção construímos o espaço de Moduli das quárticas planas descritas geometricamente no capítulo anterior.

4.1.1 Ação sobre S^*

Sejam $\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ um feixe de quádricas semi estável, onde G é a quádrica de Plücker, e $X = F \cap G$ o complexo quadrático de retas. Considere a superfície singular S associada à X e a superfície dual S^* . Sabemos pela Proposição 1.2.4 que S^* parametriza os planos tangentes à S . Fixada uma reta genérica $L \subset X$, denotemos por h_L o plano de $\mathbb{P}^3$ que contem o feixe de retas parametrizado por L . Segue da Proposição 3.1.2 que h_L é um ponto de S^* .

Por outro lado, seja $h \subset \mathbb{P}^3$ um ponto de $S^* \setminus R^*$. Então, por definição, o plano $\beta(h) \subset G$, que parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$ contidas em h , intercepta a quádrica F em duas retas, digamos $M \cup M'$. Deste modo, $h_M \equiv h$ e desde que $M \subset X$ podemos determinar a quártica C_M .

Logo, dado um complexo quadrático X , a superfície singular dual associada S^* parametriza a família de quárticas planas

$$\{C_L\}_{L \subset X}$$

No Capítulo 3, mostramos que as curvas C_L 's determinadas pelas diferentes escolhas das retas $L \subset X$ são isomorfas, isto é, independem (a menos de isomorfismo) da escolha da reta L (Teorema 3.1.1). Consequentemente, para cada complexo quadrático X a superfície S^* parametriza (a menos de

isomorfismo) uma quártica plana associada à X . Considerando o espaço projetivo $\mathbb{P}^{34}$ que parametriza todas as superfícies quárticas em $\mathbb{P}^3$, podemos fazer uma estratificação deste espaço em termos de singularidades. Como a semi estabilidade de uma superfície quártica depende apenas de suas singularidades podemos dizer que um extrato é semi estável se alguma quártica contida nele é semi estável. Sabemos ainda que as superfícies quárticas que são superfícies singulares (duais) associadas à complexos quadráticos com mesmo Símbolo de Segre σ possuem as mesmas singularidades (ver [3], Seção 6).

Logo, temos um espaço de parâmetros para as quárticas planas associadas à complexos quadráticos de retas semi estáveis, a saber as variedades algébricas localmente fechadas $Z_\sigma \subset \mathbb{P}^{34}$ que parametrizam as superfícies quárticas de $\mathbb{P}^{3*}$ que são superfícies singulares (duais) associadas à um complexo quadrático com Símbolo de Segre σ .

A seguir, determinamos uma ação sobre o espaço de parâmetros.

Proposição 4.1.1 Seja $\text{Aut}(S, \mathbb{P}^3) \subset PGL(4)$ o grupo de automorfismos lineares da superfície singular S . Se $A \in \text{Aut}(S, \mathbb{P}^3) \subset PGL(4)$ e $h \in S^*$, então $A \cdot h \in S^*$.

Demonstração: Suponha que o plano h e a superfície singular S são dados pelas equações

$$h : A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 = 0$$

e

$$S : f(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=4} a_{i_0i_1i_2i_3} X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} = 0$$

respectivamente. Suponha ainda que h é tangente à S no ponto suave $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$. Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}(x_i) = A_i, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3$$

Suponha que $A = (a_{ij})$. Temos

$$\text{A.h: } \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^4 A_i a_{ij} \right) X_j = 0$$

Por outro lado

$$f(A \cdot (X_0, X_1, X_2, X_3)) = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=4} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{j=1}^4 a_{1j} X_{j-1} \right)^{i_0} \left(\sum_{j=1}^4 a_{2j} X_{j-1} \right)^{i_1} \left(\sum_{j=1}^4 a_{3j} X_{j-1} \right)^{i_2} \left(\sum_{j=1}^4 a_{4j} X_{j-1} \right)^{i_4}$$

Um cálculo explícito que omitimos aqui mostra que o plano $A.h$ é tangente à S no ponto $A.x$. Logo $A.h \in S^*$. ■

Corolário 4.1.1 Sejam X, X' complexos quadráticos, S, S' as superfícies singulares associadas e S^*, S'^* suas superfícies duais, respectivamente. Se existe $\varphi \in SL(4)$ tal que $\varphi(S) = S'$, então a ação de φ sobre S induz uma ação sobre S^* e $\varphi(S^*) = S'^*$.

Demonstração: Os cálculos são análogos aos da Proposição 4.1.1. Temos que se $h \in S^*$ é tangente à S no ponto x , então $\varphi(h)$ é tangente à S' no ponto $\varphi(x)$. Portanto, como S^* parametriza os planos tangentes à S , $\varphi(S^*) = S'^*$. ■

Temos, portanto uma ação de $SL(4)$ sobre as variedades S^* e, como S^* parametriza a quártica plana associada a um complexo quadrático, podemos ver a ação de $SL(4)$ sobre as quárticas planas. Podemos então determinar classes de isomorfismo destas curvas.

Definição 4.1.1 Sejam X, X' complexos quadráticos de retas e S^* e S'^* as superfícies singulares duais associadas, respectivamente. Fixadas as retas $L \subset X$ e $L' \subset X'$, as quárticas planas C_L e $C'_{L'}$, associadas à X e X' , respectivamente, são equivalentes se existe $\varphi \in SL(4)$ tal que

$$\varphi(S^*) = S'^*$$

Pela Definição 4.1.1, a classe de equivalência de uma quártica plana C_L associada a um complexo quadrático X , corresponde à classe de isomorfismo da superfície singular dual S^* associada à X . Observe que, se h_L e $h'_{L'}$ são os planos de $\mathbb{P}^3$ que determinam as quárticas C_L e $C'_{L'}$, não necessariamente temos $\varphi(h_L) = h'_{L'}$. Mas, como C_L independe da escolha da reta L , temos uma classe de isomorfismo bem definida.

4.1.2 Moduli das quárticas planas

Nesta subseção descrevemos o espaço de Moduli das quárticas planas associadas à complexos quadráticos de retas que são semi estáveis. Dados dois complexos quadráticos, definimos na subseção anterior que o isomorfismo entre duas quárticas planas a eles associadas é equivalente ao isomorfismo entre as superfícies singulares duais. Portanto, é suficiente descrever o espaço de Moduli destas superfícies. Inicialmente fazemos a descrição do Espaço de Moduli das superfícies singulares S , baseados em [3].

Seja σ o Símbolo de Segre de um complexo quadrático. Consideraremos que σ possui pelo menos três parênteses e não contem nenhum parênteses de altura ≥ 4 , como em [3]. Vimos na seção 1.3 que o espaço $\mathbb{P}^{34}$ parametriza as superfícies quárticas em $\mathbb{P}^3$. Equisingularidade induz uma estratificação de $\mathbb{P}^{34}$ em variedades algébricas localmente fechadas (não necessariamente irredutíveis). Notemos que se $p \in R \subset S$ é um ponto singular da superfície singular associada à X , isto é, se $\alpha(p) \cap F$ consiste de uma reta dupla, digamos M , então $\beta(h_M) \cap F$ contem uma reta dupla. Portanto, $h_M \in R^*$. Assim, as singularidades de S^* são do mesmo tipo que as singularidades de S . Consequentemente a estratificação pode ser considerada em termos de S^* .

Agora a ação de $SL(4)$ sobre $\mathbb{P}^{34}$ preserva singularidades, e assim ela se reduz a uma ação sobre os estratos Z_σ . Chamamos as superfícies contidas em Z_σ de superfícies singulares de tipo σ .

Lema 4.1.1 ([3]) (a) Os estratos Z_σ são subconjuntos localmente fechados do espaço projetivo $\mathbb{P}^{34}$.

(b) Qualquer superfície singular S associada a um complexo quadrático com Símbolo de Segre σ é semi estável com respeito à ação de $SL(4)$.

Demonstração: Ver [3]

Teorema 4.1.1 ([3]) O espaço de Moduli das superfícies singulares de tipo σ

$$\mathcal{M}_{ss} = Z_\sigma / SL(4)$$

existe e é uma variedade quasiprojetiva.

Demonstração: Ver [3].

Vimos na subseção anterior que a ação de $SL(4)$ sobre S se estende a uma ação sobre S^* e que as singularidades de S^* são do mesmo tipo que as singularidades de S . Portanto,

$$S \in Z_\sigma \Rightarrow S^* \in Z_\sigma$$

Mais ainda: pelo Corolário 4.1.1, temos que se S e S' pertencem à mesma órbita da ação de $SL(4)$, então o mesmo ocorre para as superfícies duais S^* e S'^* . Concluimos assim que Teorema 4.1.2 O espaço de Moduli das superfícies singulares duais associadas a um complexo quadrático de retas existe e é uma variedade quasiprojetiva.

Logo, desde que a variedade S^* corresponde à quártica plana determinada pelo complexo X , segue do Teorema 4.1.2 que

Corolário 4.1.2 O espaço de Moduli das quárticas planas associadas a um complexo quadrático de retas semi estável existe.

4.1.3 A equivariância da aplicação $j : B_L \longrightarrow C_L$

Seja $X = F \cap G$ um complexo quadrático de retas e considere o feixe de quádricas $\mathcal{P} = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$, cujo lugar de base é X . Suponha que $\mathcal{P}$ é um feixe semi estável (Seção 1.3.2). Vimos no Capítulo 2 que, fixada uma reta $L \subset X$ existe uma curva de gênero (aritmético) 2 associada à $\mathcal{P}$, a saber a curva $B_L = \{L' \subset X \mid L \cap L' \neq \emptyset\}$. Por [2] existe um isomorfismo

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}}^5 \cong \overline{\mathcal{M}}_b^6$$

entre os espaços de Moduli dos feixes de quádricas de $\mathbb{P}^5$ semi estáveis e das formas binárias de grau 6. Mais ainda: o blow up de $\overline{\mathcal{M}}_b^6$ no único ponto semi estável deste espaço ([2]) é isomorfo ao espaço de Moduli das curvas hiperelípticas estáveis de gênero 2, $\overline{\mathcal{H}}_2$. Assim, a aplicação que determina B_L à partir de um feixe semi estável $\mathcal{P}$ se estende aos espaços de Moduli (fazendo uma redução estável de B_L caso necessário). Portanto, fora do divisor excepcional do blow up, feixes de quádricas semi estáveis isomorfos equivalem à curvas hiperelípticas estáveis isomorfas.

Partindo destes resultados, mostramos nesta subseção que a aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$ também pode ser estendida aos espaços de Moduli, isto é, mostraremos que a aplicação j é equivariante com respeito às devidas ações de grupo.

Proposição 4.1.2 ([7]) Uma reta l_x do complexo quadrático pertence à dois feixes cofocais se, e somente se, l_x pertence à dois feixes coplanares.

Demonstração: [7], página 768.

Segue da Proposição 4.1.2, que podemos definir uma aplicação análoga à

$$\pi : \Sigma \rightarrow S$$

(ver Subseção 1.2.2).

Definição 4.1.2 ([7], pág. 778) Sejam $X = F \cap G$ um complexo quadrático de retas e $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ a superfície dada por $\Sigma = F \cap G \cap H$, onde $H = G^{-1}FG$. Definimos a aplicação

$$\pi' : \Sigma \rightarrow S^*$$

que envia um ponto suave $x \in \Sigma$ para o único plano $h \in S^*$ que contem os dois feixes coplanares contendo a reta l_x .

Lema 4.1.2 ([5]) Existe um isomorfismo

$$\iota : PSO(6) \longrightarrow PSL(4)$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 4.1.3 A aplicação $\pi' : \Sigma \rightarrow S^*$ é equivariante com respeito às ações de $PSO(6)$ e $PSL(4)$, respectivamente.

Demonstração: Sejam X e X' complexos quadráticos isomorfos. Assim, existe $A \in PSO(6)$ tal que $A.X = X'$. Sejam S^* e S'^* as superfícies singulares duais associadas à X e à X' respectivamente. Pelo Lema 4.1.2, o isomorfismo ι é tal que

$$\pi'(X') = \pi'(A \cdot X) = \iota(A) \cdot \pi'(X)$$

Portanto, existe $\iota(A) \in PSL(4)$ tal que $S'^* = \iota(A).S^*$. Logo, S^* e S'^* são isomorfas. ■

Na verdade, a ação de $PSO(6)$ sobre a família de β -planos na quádrlica de Plücker G induz uma ação sobre os hiperplanos $h \subset \mathbb{P}^3$.

Segue do Teorema 4.1.3 que a aplicação π' pode ser vista como uma aplicação entre os espaços de Moduli

$$\pi' : \mathcal{M}_{qc} \rightarrow \mathcal{M}_{C_L}$$

onde $\mathcal{M}_{qc}$ denota o espaço de Moduli de complexos quadráticos e $\mathcal{M}_{C_L}$ denota o espaço de Moduli de quárticas planas.

Antes de demonstrar a equivariância da aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$, precisamos estabelecer uma relação entre os espaços de Moduli $\mathcal{M}_{qc}$ e $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}}^5$. Como ressaltamos anteriormente, se um feixe de quádrlicas gerado pela quádrlica de Plücker G semi estável, então o seu lugar de base X é um complexo quadrático de retas semi estável. Por outro lado, se dois complexos quadráticos X e X'

são isomorfos, então os feixes de quádras $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ dos quais X e X' são lugares de base, respectivamente, também são isomorfos. A partir disto, queremos estabelecer sob que hipóteses a recíproca é verdadeira.

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ feixes semi estáveis de quádras de $\mathbb{P}^5$ e suponha que $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}'$. Denotemos por λ_i as raízes do discriminante do feixe $\mathcal{P}$ e por λ'_i as raízes do discriminante do feixe $\mathcal{P}'$, $i = 1, \dots, s$ em que s é o número de raízes do discriminante do feixe. Como $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}'$, existe $A = (a_{ij}) \in SL(2)$ tal que

$$\lambda'_i = \frac{a_{11}\lambda_i + a_{12}}{a_{21}\lambda_i + a_{22}}, i = 1, \dots, s$$

Lema 4.1.3 Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ feixes de quádras de $\mathbb{P}^5$ semi estáveis e sejam X e X' seus respectivos lugares de base. Suponhamos que $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}'$ e consideremos as superfícies singulares associadas S e S' , respectivamente. Então:

- (a) Se o símbolo de Segre do feixe é da forma $\sigma = [(11)1111]$, $[(11)(11)11]$, $[(111)111]$ ou $[(111)(11)1]$, então $S \equiv S'$
- (b) Para os demais casos existe $A \in SL(4)$ tal que $A(S) = S'$.

Demonstração: (a) Faremos os cálculos para o caso $[(11)1111]$. Sejam λ_i e λ'_i , $i = 1, \dots, 5$ as raízes dos discriminantes dos feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respectivamente. Por [12], as equações das superfícies singulares S e S' são dadas por

$$\begin{aligned} S : & (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) + \\ & (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + \\ & 2[(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5) - (\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)] \\ & y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' : & (\lambda'_1 - \lambda'_2)(\lambda'_3 - \lambda'_5)(\lambda'_4 - \lambda'_5)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) + \\ & + (\lambda'_3 - \lambda'_4)(\lambda'_1 - \lambda'_5)(\lambda'_2 - \lambda'_5)(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + \\ & 2[(\lambda'_1 + \lambda'_2 - 2\lambda'_5)(\lambda'_3 - \lambda'_5)(\lambda'_4 - \lambda'_5) - (\lambda'_3 + \lambda'_4 - 2\lambda'_5)(\lambda'_1 - \lambda'_5)(\lambda'_2 - \lambda'_5)] \\ & y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

Como $\lambda'_i = \frac{a_{11}\lambda_i + a_{12}}{a_{21}\lambda_i + a_{22}}$, $i = 1, \dots, 5$, fazendo as substituições, um cálculo no Maple mostra que

$$\begin{aligned} S' : & \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^3}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2} \\ & [(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) + \\ & + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + \\ & 2[(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5) - (\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)] \\ & y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

Logo, como as equações de S e S' diferem por uma constante não-nula, as superfícies singulares associadas à X e à X' coincidem.

Para os demais subcasos do caso geral $\sigma = [111111]$ descritos no enunciado do lema os cálculos são análogos e mostram que as superfícies singulares associadas também coincidem.

(b) Para os casos em que o discriminante do feixe possui exatamente três raízes, o espaço de Moduli das superfícies singulares associadas $\mathcal{M}_{ss}(\sigma)$ consiste de um único ponto ([3], Tabela 1). Assim, dados dois feixes de quádricas isomorfos, as superfícies singulares associadas diferem por uma ação de $SL(4)$. A seguir, descrevemos esta ação no caso $\sigma = [222]$.

Sejam X e X' os lugares de base dos feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respectivamente. Os complexos X e X' são dados pela interseção da quádrica

$$G : x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$$

com as quádricas

$$F : 2\lambda_1x_1x_2 + 2\lambda_2x_3x_4 + 2\lambda_3x_5x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

e

$$F' : 2\lambda'_1x_1x_2 + 2\lambda'_2x_3x_4 + 2\lambda'_3x_5x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

respectivamente. Por [12] as superfícies singulares S e S' tem equações

$$S : (-\lambda_3 + \lambda_2)^2 y_3^2 y_4^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 y_2^2 y_4^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 y_2^2 y_3^2 - \\ 2(-\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

e

$$S' : (-\lambda'_3 + \lambda'_2)^2 y_3^2 y_4^2 + (\lambda'_1 - \lambda'_3)^2 y_2^2 y_4^2 + (\lambda'_1 - \lambda'_2)^2 y_2^2 y_3^2 - \\ -2(-\lambda'_3 + \lambda'_2)(\lambda'_1 - \lambda'_3)(\lambda'_1 - \lambda'_2) y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

Se existe $A = (a_{ij}) \in SL(2)$ tal que $\lambda'_i = \frac{a_{11}\lambda_i + a_{12}}{a_{21}\lambda_i + a_{22}}, i = 1, 2, 3$, então fazendo as devidas substituições, obtemos

$$S' : \frac{(-\lambda_3 + \lambda_2)^2 (\det(A))^2}{(a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2} y_3^2 y_4^2 + \frac{(-\lambda_3 + \lambda_1)^2 (\det(A))^2}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2} y_2^2 y_4^2 + \\ \frac{(-\lambda_2 + \lambda_1)^2 (\det(A))^2}{(a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2} y_2^2 y_3^2 + \\ \frac{(-\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) (\det(A))^3}{(a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

e como $A \in SL(2)$, temos $\det(A) = 1$.

Agora considere a transformação projetiva $\varphi \in PGL(4)$ dada por

$$y_1 = \frac{x_1}{(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_1 + a_{22})},$$

$$y_i = \frac{x_i}{a_{21}\lambda_{i-1} + a_{22}}, i = 2, 3, 4$$

Temos que

$$\begin{aligned} \varphi(S) : & \frac{(-\lambda_3 + \lambda_2)^2}{(a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2} x_3^2 x_4^2 + \frac{(-\lambda_3 + \lambda_1)^2}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2} x_2^2 x_4^2 + \\ & \frac{(-\lambda_2 + \lambda_1)^2}{(a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2} x_2^2 x_3^2 + \\ & \frac{(-\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_{21}\lambda_3 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^2 (a_{21}\lambda_1 + a_{22})^2} x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi(S) = S'$

Finalmente consideramos $\sigma = [21111]$ o qual abrange (de maneira análoga) os demais casos.

Sejam X e X' os lugares de base dos feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respectivamente. Os complexos X e X' são dados pela interseção da quádrlica

$$G : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_5x_6 = 0$$

com as quádrlicas

$$F : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + 2\lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0$$

e

$$F' : \lambda'_1 x_1^2 + \lambda'_2 x_2^2 + \lambda'_3 x_3^2 + \lambda'_4 x_4^2 + 2\lambda'_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0$$

respectivamente. Por [12] as superfícies singulares S e S' tem equações

$$\begin{aligned} S : & (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^4 + y_4^4) - \\ & (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - (\lambda_1 - \\ & \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + 2[(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - \\ & 2(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5) - 2(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)] y_1^2 y_4^2 + 2[(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5) \\ & (\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)] y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

e

$S' :$

$$\begin{aligned} & (\lambda'_1 - \lambda'_2)(\lambda'_3 - \lambda'_4)(y_1^4 + y_4^4) - (\lambda'_3 - \lambda'_5)(\lambda'_4 - \lambda'_5)(\lambda'_1 - \lambda'_2)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - \\ & (\lambda'_1 - \lambda'_5)(\lambda'_2 - \lambda'_5)(\lambda'_3 - \lambda'_4)(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + 2[(\lambda'_1 + \lambda'_2 - 2\lambda'_5)(\lambda'_3 + \lambda'_4 - 2\lambda'_5) \\ & - 2(\lambda'_1 - \lambda'_5)(\lambda'_2 - \lambda'_5) - 2(\lambda'_3 - \lambda'_5)(\lambda'_4 - \lambda'_5)]y_1^2 y_4^2 + \\ & 2[(\lambda'_1 - \lambda'_5)(\lambda'_2 - \lambda'_5)(\lambda'_3 + \lambda'_4 - 2\lambda'_5) - \\ & (\lambda'_3 - \lambda'_5)(\lambda'_4 - \lambda'_5)(\lambda'_1 + \lambda'_2 - 2\lambda'_5)]y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

Se existe $A = (a_{ij}) \in SL(2)$ tal que $\lambda'_i = \frac{a_{11}\lambda_i + a_{12}}{a_{21}\lambda_i + a_{22}}, i = 1, 2, 3$, então fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} S' : & \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)\det^2(A)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})}(y_1^4 + y_4^4) - \\ & \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)\det^3(A)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2}(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - \\ & \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_4)\det^3(A)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2}(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) + \\ & 2 \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - 2(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5) - 2(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)]\det(A)^2}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})}y_1^2 y_4^2 + \\ & 2 \frac{[(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)]\det^3(A)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2}y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \end{aligned}$$

e como $A \in SL(2)$, temos $\det(A) = 1$

Agora considere a transformação projetiva $\varphi \in PGL(4)$ dada por

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})}, \\ y_2 &= \frac{x_2}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})(a_{21}\lambda_5 + a_{22})}, \\ y_4 &= \frac{x_4}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})(a_{21}\lambda_2 + a_{22})(a_{21}\lambda_3 + a_{22})(a_{21}\lambda_4 + a_{22})}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \varphi(S) : & \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^4} (x_1^4 + x_4^4) - \\ & \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2} (x_1^2 x_2^2 + \\ & \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2} (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + \\ & 2 \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - 2(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5) - 2(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)]}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^4} x_1^2 x_4^2 + \\ & 2 \frac{[(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_5) - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_5)]}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^4 (a_{21}\lambda_5 + a_{22})^2} x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(S) = \frac{1}{(a_{21}\lambda_1 + a_{22})^3 + (a_{21}\lambda_2 + a_{22})^3 + (a_{21}\lambda_3 + a_{22})^3 + (a_{21}\lambda_4 + a_{22})^3} S'$$

■

Teorema 4.1.4 Sejam X e X' complexos quadráticos de retas semi estáveis, vistos como lugares de base dos feixes de quádras $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respectivamente. Fixadas $L \subset X$ e $L' \subset X'$ sejam B_L e $B'_{L'}$ as curvas associadas aos feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, e C_L e $C'_{L'}$ as quárticas planas imagens das curvas B_L e $B'_{L'}$ sob a aplicação j , respectivamente. Se $B_L \cong B'_{L'}$, então $C_L \cong C'_{L'}$, isto é, a aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$ é equivariante.

Demonstração: Sejam B_L e $B'_{L'}$ como na afirmação do teorema e suponhamos que $B_L \cong B'_{L'}$. Como $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{M}_P^5$, segue que $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}'$. Portanto, pelo Lema 4.1.3, temos que $\pi(X) = \pi(X')$. Assim, se S e S' denotam as superfícies singulares associadas aos complexos X e X' respectivamente, então existe $\varphi \in SL(4)$ tal que $\varphi(S) = S'$. Logo, pelo Corolário 4.1.1 e pelo Teorema 4.1.2, temos $C_L \cong C'_{L'}$.

■

4.1.4 Estudo do Caso Geral

Nesta seção estudamos a aplicação $j : B_L \rightarrow C_L$ em termos dos espaços de Moduli destas curvas, no caso em que o complexo quadrático de retas X que determina C_L é suave, o que supomos ao longo de toda a seção. Conforme mostramos na seção anterior, a aplicação j é equivariante e, conseqüentemente, se estende a uma aplicação

$$\tilde{j} : \mathcal{M}_{B_L} \rightarrow \mathcal{M}_{C_L}$$

onde $\mathcal{M}_{B_L}$ denota o espaço de Moduli das curvas B_L associadas à um feixe de quádricas $\mathcal{P}$ do qual X é o lugar de base. Como no caso considerado a curva B_L é uma curva hiperelíptica suave de gênero 2, o espaço $\mathcal{M}_{B_L}$ é, na verdade, o espaço $\mathcal{H}_2$

Segundo [2], existe um isomorfismo

$$\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{M}_b^6$$

onde $\mathcal{M}_b^6$ denota o espaço de Moduli das formas binárias de grau 6 sem raízes repetidas. Baseados neste isomorfismo e na existência da aplicação $\tilde{j}$, associamos à curva C_L uma sêxtica binária e, como C_L é uma quártica plana com um ponto duplo ordinário, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{C_L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_b^6 & & \mathcal{M}_{bd}^6 \end{array}$$

em que $\mathcal{M}_{bd}^6$ denota o Moduli das formas binárias de grau 6 com uma raiz dupla.

Inicialmente, vamos associar à C_L uma sêxtica binária. Seja q o ponto singular da curva C_L e considere o plano h_L que contem a curva C_L . Fixemos uma reta $l \subset h_L$ que não passa pelo ponto q . Seja

$$\pi_q : C_L \rightarrow l \cong \mathbb{P}^1$$

a aplicação que à cada ponto $p \in C_L$, com $p \neq q$, associa o ponto $\overline{pq} \cap l$.

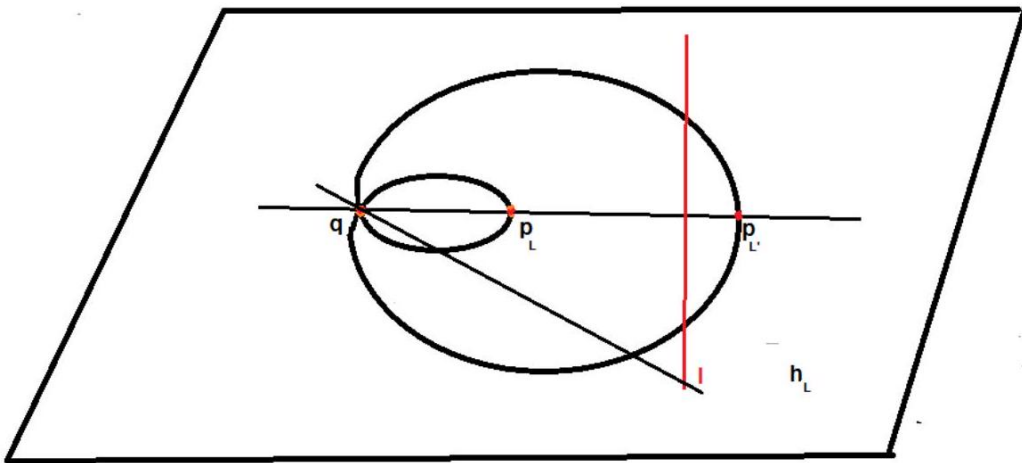


Figura 4.1: $\pi_q : C_L \rightarrow l \cong \mathbb{P}^1$

Na verdade, como $C_L = j(B_L)$ e j é genericamente 1-1, temos $p = j(L')$, para alguma reta $L' \in B_L$. Portanto, podemos escrever

$$\pi_q = \tilde{\pi}_q \circ j^{-1}$$

onde $\tilde{\pi}_q : B_L \rightarrow l \cong \mathbb{P}^1$ é dada por

$$\tilde{\pi}_q(L') = \langle q, j(L') \rangle \cap l$$

Sabemos que a aplicação $\pi : B_L \rightarrow \mathbb{P}^1$ descreve B_L como um recobrimento duplo de $\mathbb{P}^1$ (Proposição 3.2.4). Assim

$$\deg(\tilde{\pi}_q) = \deg(\pi_q) = 2$$

Portanto, aplicando a fórmula de Hurwitz ao mapa $\pi_q : C_L \rightarrow \mathbb{P}^1$ obtemos que o grau do divisor de ramificação R é igual à 6 e que o nó q é um ponto de ramificação com peso 2. Deste modo, podemos associar à curva C_L uma sêxtica binária, à saber, a sêxtica cujas raízes correspondem aos pontos de ramificação da curva C_L . Assim, sejam $\gamma_i \in \mathbb{P}^1, i = 1, \dots, 5$, os pontos de $\mathbb{P}^1$ que correspondem à q e aos outros quatro pontos de C_L que são pontos de ramificação da aplicação π_q , respectivamente. Podemos associar à quártica C_L a seguinte sêxtica binária

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^2 \prod_{i=2}^5 (x - \gamma_i y)$$

Teorema 4.2.1 Seja $X = F \cap G$ um complexo quadrático de retas suave e considere $L \cap X$ uma reta fixada. Então a curva B_L é a normalização da curva C_L e dois pontos de ramificação de B_L colapsam para o nó da curva C_L .

Demonstração: Primeiramente, como B_L é uma curva suave, então B_L é normal. Por outro lado, sabemos que a aplicação j é genericamente 1-1 (Lema 3.1.2). Portanto, $j : B_L \rightarrow C_L$ é uma aplicação birracional. Como B_L é completa, temos que j é uma aplicação finita. Logo B_L é a normalização da curva C_L . Como q tem peso de ramificação 2, segue que dois pontos de ramificação de B_L colapsam no nó da curva C_L . ■

Temos então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{C_L} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}_b^6 & & \mathcal{M}_{bd}^6
\end{array}$$

Os espaços de Moduli que compõem este diagrama possuem as seguintes dimensões:

$$\dim(\mathcal{M}_b^6) = \dim(\mathcal{M}_{B_L}) = \dim(\mathcal{M}_{C_L}) = 3 \text{ e } \dim(\mathcal{M}_{bd}^6) = 2$$

(ver [2]). À partir disto fomos motivados à explicitar uma família unidimensional de quárticas planas sobre o Moduli $\mathcal{M}_{C_L}$ que determinam o mesmo ponto no Moduli $\mathcal{M}_{bd}^6$.

Considere um feixe de quádricas $\mathcal{P}$ cujo lugar de base X é suave. Suponha que a curva B_L associada à $\mathcal{P}$ seja determinada pelos pontos de ramificação $\lambda_i \in \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, 6$, e a quártica C_L associada à X seja determinada pelos pontos $\gamma_i \in \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, 5$, com γ_1 correspondendo ao ponto duplo q . Suponha ainda que os pontos de B_L correspondentes à λ_1, λ_2 sejam os pontos que colapsam no ponto q . Dado $\lambda \in \mathbb{P}^1$, com $\lambda \neq \lambda_i$ para $i = 1, \dots, 6$, seja $\mathcal{P}_\lambda$ o feixe estável de quádricas de $\mathbb{P}^5$ cujo discriminante possui as raízes $\lambda, \lambda_i, i = 2, \dots, 6$. Seja ainda X_λ o lugar de base do feixe $\mathcal{P}_\lambda$. Considere as curvas B_{L_λ} associadas aos feixes $\mathcal{P}_\lambda$. Como $\mathcal{P}_\lambda \not\cong \mathcal{P}_{\lambda'}$ para $\lambda \neq \lambda'$, então $B_{L_\lambda} \not\cong B_{L_{\lambda'}}$.

Escolha $L \subset X_\lambda$ tal que as quádricas Q_λ e Q_{λ_2} do feixe $\mathcal{P}_\lambda$ contenham as retas de B_L nas quais a aplicação j não é injetiva. Considerando a quártica plana C_{L_λ} associada, isto significa que os pontos λ e λ_2 são os pontos de ramificação que colapsam na singularidade de C_{L_λ} . Como $\dim(\mathcal{M}_{B_L}) = \dim(\mathcal{M}_{C_L}) = 3$, então $C_{L_\lambda} \not\cong C_{L_{\lambda'}}$, para $\lambda \neq \lambda'$.

Por outro lado se

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^2 \prod_{i=2}^5 (x - \gamma_i y)$$

é a sêxtica binária associada à curva C_L , então segue da construção feita que a sêxtica associada às curvas $\{C_{L_\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ é $g(x, y)$.

Isso demonstra o seguinte resultado

Teorema 4.2.2 A família unidimensional de quárticas planas em $\mathcal{M}_{C_L}$ aplicadas em um único ponto $g(x, y) \in \mathcal{M}_{bd}^6$ é dada por feixes de quádricas cujos discriminantes possuem uma raiz variando em $\mathbb{P}^1$ e as demais raízes são fixas e iguais.

O Teorema 4.2.2 afirma a existência de uma família a 1-parâmetro de curvas $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$, tal que a família

$$\left\{ \mathcal{C}_\lambda = \tilde{j}(\mathcal{B}_\lambda) \right\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$$

está associada a um único ponto no espaço $\mathcal{M}_{bd}^6$ de sêxticas binárias com uma raiz dupla.

4.1.5 Demais Casos

Lema 4.3.1 Se a curva B_L é irredutível e possui pelo menos dois pontos de ramificação, então o nó q da curva C_L é dado pela imagem de dois destes pontos. Nos demais casos, $j^{-1}(q)$ consiste de dois pontos suaves não-ramificados de B_L .

Faremos a demonstração em alguns casos típicos que são análogos aos demais.

(i) Seja $\sigma = [21111]$ o símbolo de Segre do feixe de quádricas que determina a curva B_L . Neste caso $\tilde{B}_L$ é uma curva elíptica (Teorema 2.3.1) ramificada em 4 pontos e B_L possui um nó, digamos $L_0 \in B_L$. O ponto $q_0 = j(L_0)$ é um nó de C_L (Teorema 3.2.1) e $\sigma^{-1}(L_0)$ não é um ponto de ramificação de $\tilde{B}_L$, pois caso contrário teríamos uma contradição com a fórmula de Riemann-Hurwitz. A reta $\langle q, q_0 \rangle$ intercepta C_L com multiplicidade 2 em q e, conseqüentemente a imagem inversa $j^{-1}(q)$ corresponde à dois pontos de ramificação de B_L . Logo, dois pontos de ramificação de B_L colapsam no nó q de C_L .

O mesmo raciocínio se aplica aos casos $\sigma = [2211]$ e $\sigma = [3111]$.

Para os demais casos em que B_L e, portanto, C_L são irredutíveis (a saber os casos $\sigma = [321]$ e $\sigma = [33]$), $\tilde{B}_L$ é não ramificada sobre $\mathbb{P}^1$ e a imagem inversa $j^{-1}(q)$ corresponde à pontos suaves de B_L .

Nos demais casos em que as curvas B_L e C_L são redutíveis o ponto q corresponde à interseção da imagem da componente ordinária de B_L com a imagem da componente excepcional de B_L (pela aplicação j) e a imagem inversa $j^{-1}(q)$ consiste também de dois pontos suaves de B_L .

■

Devido ao resultado do Lema 4.3.1, para um estudo similar ao que fizemos na seção anterior, consideraremos apenas os casos em que a curva B_L é irredutível e possui pelo menos dois pontos de ramificação. A construção é análoga à da demonstração do Teorema 4.2.2, onde associamos à quártica C_L uma sêxtica binária.

Teorema 4.3.1 Sejam $\mathcal{P}$ um feixe de quádricas semi estável e B_L a curva de gênero 2 determinada por $\mathcal{P}$. Se B_L é irredutível e o discriminante de $\mathcal{P}$ possui pelo menos duas raízes simples, então existe uma família unidimensional de quárticas planas no espaço de Moduli $\mathcal{M}_{C_L}$ a qual determina um único ponto no correspondente Moduli de sêxticas binárias.

Demonstração: Sob as hipóteses do Teorema, são três os casos a considerar:

(i) Caso $\sigma = [21111]$: Sejam $\lambda_i \in \mathbb{P}^1, i = 1, \dots, 5$, as raízes do discriminante de $\mathcal{P}$. Suponha que λ_1 é a raiz dupla. Então a curva B_L possui um nó dado por $\pi^{-1}(\lambda_1)$. A curva C_L possui dois nós dados por: $j(\pi^{-1}(\lambda_1))$ e pelo colapsamento de dois pontos de ramificação, digamos os pontos de B_L correspondentes à λ_2, λ_3 . Assim, podemos associar à quártica C_L , a sêxtica binária:

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^2 (x - \gamma_2 y)^2 (x - \gamma_3 y) (x - \gamma_4 y)$$

em que γ_2 e γ_1 correspondem aos pontos $j(\pi^{-1}(\lambda_2)) = j(\pi^{-1}(\lambda_3)) = q$ e $j(\pi^{-1}(\lambda_1))$, respectivamente.

Dado $\lambda \in \mathbb{P}^1$, com $\lambda \neq \lambda_i$ para $i = 1, \dots, 5$, seja $\mathcal{P}_\lambda$ o feixe semi estável de quádricas de $\mathbb{P}^5$ cujo discriminante possui as raízes λ_1 (raiz dupla), $\lambda, \lambda_i, i = 3, 4, 5$ (raízes simples). Seja ainda X_λ o lugar e base do feixe $\mathcal{P}_\lambda$. Considere as curvas B_{L_λ} associadas aos feixes $\mathcal{P}_\lambda$. Como $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_{\lambda'}$ para $\lambda \neq \lambda'$, então $B_{L_\lambda} B_{L_{\lambda'}}$.

Escolhendo $L_\lambda \subset X_\lambda$ tal que as quádricas Q_λ e Q_{λ_3} do feixe $\mathcal{P}_\lambda$ contêm as retas de B_L nas quais a aplicação j não é injetiva. Considerando a quártica plana C_{L_λ} associada, isto significa que os pontos λ e λ_3 são os pontos de ramificação que colapsam na singularidade de C_{L_λ} . Como $\dim(\mathcal{M}_{B_L}) = \dim(\mathcal{M}_{C_L}) = 2$, então $C_{L_\lambda} \not\cong C_{L_{\lambda'}}$, para $\lambda \neq \lambda'$.

Por fim

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^2 (x - \gamma_2 y)^2 (x - \gamma_3 y) (x - \gamma_4 y)$$

é a sêxtica binária associada às curvas $\{C_{L_\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$.

Assim a família $\{C_{L_\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ determina um único ponto no espaço de Moduli de sêxticas binárias com duas raízes duplas (que é uma curva em $\overline{\mathcal{M}}_b^6$).

(ii) Caso $\sigma = [2211]$: Temos uma construção análoga e a sêxtica é dada por

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^2 (x - \gamma_2 y)^2 (x - \gamma_3 y)^2$$

(iii) Caso $\sigma = [3111]$:

$$g(x, y) = (x - \gamma_1 y)^3 (x - \gamma_2 y)^2 (x - \gamma_3 y)$$

Em ambos os casos $\sigma = [2211]$ e $\sigma = [3111]$ a sêxtica associada possui apenas três raízes distintas. Assim o Moduli por elas determinado consiste de um único ponto.

■

Bibliografia

- [1] AVRITZER, D. *Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações*. 2^a Bienal da SBM, 2004.
- [2] AVRITZER, D.; LANGE, H. Pencils of quadrics, binary forms and hyperelliptic curves. *Communications in Algebra*, v. 28, n. 12, p. 5541-5561, 2000.
- [3] AVRITZER, D.; LANGE, H. Moduli spaces of quadratic complexes and their singular surfaces. *Geom. Dedicata*, v. 127, p. 177-197, 2007.
- [4] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. A Stratification of the Space of Plane Quartic Curves. *Proc. London Math. Soc.*, v. 3, p. 270-298, 1981. (Outubro 1978).
- [5] FULTON, W.; HARRIS, J. *Representation Theory: a First Course*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [6] GARCIA, A.; LAX, R. F. Rational Nodal Curves with no Smooth Weierstrass Points. *American Mathematical Society*, v. 124, p. 407-413, 1996.
- [7] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of Algebraic Geometry*. New York: Wiley, 1978.
- [8] HARRIS, J. *Algebraic Geometry: A First Course*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [9] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. New York: Springer Science & Business Media, 1977.
- [10] HODGE, W. V. D.; PEDOE, D. *Methods of Algebraic Geometry, Volume 2*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [11] HUI, C. *Plane Quartic Curves*. 1979.
- [12] JESSOP, C. M. *A Treatise on the Line Complex*. 2001.

- [13] MIURA, K. Field Theory for Function Fields of Singular Plane Quartic Curves. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 62, p. 193-204, 2000.
- [14] MUKAI, S. *An Introduction to Invariants and Moduli*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [15] MUMFORD, D.; FOGARTY, J.; KIRWAN, F. C. *Geometric Invariant Theory*. Berlin: Springer Science & Business Media, 1994.
- [16] NEWSTEAD, P. E. *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. 1978.
- [17] REID, M. The complete intersection of two or more quadrics. Ph.D. Thesis, Trinity College, Cambridge, 1972.