

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
ESTRUTURAS**

Thaianne Simonetti de Oliveira

**ABORDAGENS ESTÁVEIS DO MEFG/X NA SIMULAÇÃO
DE TRINCAS COM MODELO DE ZONA COESIVA EM
MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS**

Belo Horizonte/MG

2024

Thaianne Simonetti de Oliveira

**ABORDAGENS ESTÁVEIS DO MEEG/X NA SIMULAÇÃO
DE TRINCAS COM MODELO DE ZONA COESIVA EM
MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutora em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros

Coorientador: Prof. Dr. Samuel Silva
Penna

Belo Horizonte/MG
2024

O48a

Oliveira, Thaianne Simonetti de.

Abordagens estáveis do MEFG/X na simulação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis [recurso eletrônico] / Thaianne Simonetti de Oliveira. – 2024.

1 recurso online (210 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Coorientador: Samuel Silva Penna.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 189-210.

Bibliografia: f. 178-188.

1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Método dos elementos finitos – Teses. 3. Mecânica da fratura – Teses. 4. Algoritmos – Simulação por computador – Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Penna, Samuel Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 106 DA ALUNA THAIANNE SIMONETTI DE OLIVEIRA

Às **8:00** horas do dia **17** do mês de **dezembro** de **2024**, reuniu-se na sala 4409, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **08 de novembro de 2024**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada **"Abordagens Estáveis do MEFG/X na Simulação de Trincas com Modelo de Zona Coesiva em Meios Parcialmente Frágeis"**, cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a Sessão, o Presidente da Comissão, Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros, após dar conhecimento aos presentes do teor das Normas Regulamentares, passou a palavra a aluna para apresentação de seu trabalho. Finalizada a apresentação, seguiu-se para a fase de arguição pelos examinadores, com as respectivas respostas da aluna. Logo após a fase de arguição, a Comissão se reuniu, sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final, a saber:

- (x) Aprovada
() Reprovada

O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora e pela aluna.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG (Orientador)
Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG (Coorientador)
Prof. Dr. Leandro Lopes da Silva - DEES - UFMG
Prof. Dr. Deane de Mesquita Roehl - PUC - Rio
Prof. Dr. Francisco Evangelista Junior - UNB
Prof. Dr. Nathan Shauer - UNICAMP

A aprovação da aluna na Defesa da Tese de Doutorado não significa que a mesma tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do DIPLOMA de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Para ciência da aluna:

1. Atesto que as alterações solicitadas pela Comissão Examinadora serão cumpridas no prazo determinado pela banca de **ATÉ 60 dias** corridos.
2. Atesto estar ciente que a versão corrigida da dissertação deverá ser entregue ao Repositório Institucional da UFMG, conforme orientações disponíveis em: <https://repositorio.ufmg.br/custom/instructions.jsp>

Ciente:

Thaianne Simonetti de Oliveira

Aluna

Belo Horizonte, 17 de dezembro de 2024.

Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação. Após a Homologação da Defesa pelo Colegiado do Programa, este documento será assinado pela Coordenação e disponibilizado ao aluno.



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Professor(a)**, em 17/12/2024, às 13:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 17/12/2024, às 13:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nathan Shauer, Usuário Externo**, em 17/12/2024, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 17/12/2024, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Evangelista Junior, Usuário Externo**, em 17/12/2024, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Deane de Mesquita Roehl, Usuária Externa**, em 17/12/2024, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thaianne Simonetti de Oliveira, Usuário Externo**, em 19/12/2024, às 12:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3831905** e o código CRC **2D5B0378**.

Referência: Processo nº 23072.270756/2024-51

SEI nº 3831905

*Ao Israel e aos meus familiares, especialmente às minhas avós Maria e Geni, e à minha mãe,
Ana, que me ensinaram tanto o valor do estudo quanto do sentimento.*

AGRADECIMENTOS

“Eu carrego em meu mundo que floresce os mundos que falharam.”. Esta frase do poeta Rabindranath Tagore me acompanhou constantemente nos anos depois da qualificação. Se o processo do mestrado teve seus desafios, mas seguiu dentro de um ritmo relativamente esperado, o doutorado me exigiu muito mais, com obstáculos, dúvidas, becos sem saída e dificuldades. Agora que finalizo esta longa jornada, não poderia deixar de reconhecer que os eventuais sucessos aqui encontrados foram construídos em cima de inúmeros fracassos. E, embora não tenha sido um aprendizado fácil, começo este texto reconhecendo minha gratidão por estes fracassos que trouxeram, quando fui suficientemente atenta para perceber, também o perfume das flores.

Meu mundo não teria florescido de forma alguma, no entanto, sem as pessoas que estiveram ao meu lado, e me nutriram com algo mais valioso que o Sol ou que os nutrientes que a terra pode dar. Venho aqui tentar fazer justiça ao amor, carinho e dedicação de vocês. Primeiramente, então, a Deus, por ser meu porto seguro, por ter concedido a resiliência que eu não julgava ter, por ter me proporcionado, mesmo nas maiores tempestades, também grandes alegrias, e por me ajudar a lembrar sempre, no turbilhão do caos da vida moderna, daquilo que para mim é mais importante.

Ao Israel, meu agora marido, que acompanhou este processo como poucos, que seguiu acreditando mesmo nas vezes em que eu duvidei, e que viu os dias bons e ruins. Gostaria que minhas palavras estivessem à altura de você, mas sei que é impossível. Obrigada por sua fé, seu amor e seu apoio. Lamento não ter escrito um livro de fantasia, mas, apesar de provavelmente não tão divertida, esta tese também é sua - assim como meu coração.

Qualquer engenheiro sabe que a fundação é fundamental para o sucesso de uma edificação. Aos meus pais, portanto, base da minha educação e da minha formação pessoal, por estarem sempre ao meu lado, por compreenderem mesmo quando não faziam ideia do que eu estava dizendo ao desabafar sobre os problemas da tese, e por terem me dado metade de *“todo amor que eu tenho”*. À minha irmã, uma das minhas pessoas preferidas no mundo, e um verdadeiro presente, de Deus e dos nossos pais. Agradeço pelas conversas e momentos que passamos juntas, que sempre me animam, divertem e me fazem acreditar mais em mim. Às minhas avós, Geni e Maria, que, mesmo não tendo tido a oportunidade de estudar, sempre incentivaram a nós, netas, a permanecer na escola e construir uma carreira, e mostraram, por outro lado, que a vida tem muitas outras dimensões além desta. À minha família, inclusive aos reforços recentemente adquiridos (Fred, sogros, cunhados,

sobrinha e demais acréscimos das famílias Buzatti/Queiroz) de modo geral, por ser meu amparo e minha alegria.

Aos meus amigos, de longa data ou não. Mudar de cidade só deixou mais nítido o quanto eu amo vocês. Sou grata por todas as conversas (bestas ou não), todos os jogos de tabuleiro, todas as reuniões de clube do livro, todos os memes, todas as lágrimas (sim, até isso) e todas as risadas destes últimos anos. Em especial, à Karlinha e à Lorena, que suportaram essa cilada junto comigo com trocas maravilhosas, seja sobre assuntos relativos à pesquisa, seja sobre indicações de comédias românticas e/ou filmes de Natal.

Na passagem por esta vida, fico sempre admirada com o fato de que algumas pessoas podem ter um impacto enorme na nossa existência e nunca saberem disso. Acho que é o caso de vocês, a quem tentarei fazer justiça agora: aos professores do MAC da UFJF, que me orientaram nos primeiros passos da docência no ensino superior. Com vocês, expandi meus horizontes em relação ao que uma universidade pode ser/ofertar à comunidade, e muito aprendi sobre o exercício da profissão. Obrigada pelos aprendizados e pela amizade no tempo que passei aí. Mais especialmente ainda, aos meus alunos desta instituição, que me devolveram o propósito da carreira acadêmica, e me deram a motivação que estava a ser perdida para concluir o doutorado. Vocês me lembraram de porque me submeti a este processo para início de conversa.

Aos meus alunos e ex-alunos em geral, por me inspirarem a ser uma professora e uma pessoa melhores todos os dias. É uma honra fazer ou ter feito parte das histórias de vocês. Torço muito por vocês em suas escolhas e caminhos.

Aos mestres de toda a minha vida, em especial aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas, por todos os ensinamentos passados no intuito de contribuir para nosso crescimento e nosso sucesso. Particularmente, aos professores Felício - meu orientador de longuíssima data - e Samuel - que embarcou nessa jornada quando ela parecia uma canoa furada e nos ajudou a voltar à superfície. Além de ser grata pelas críticas de cinema, agradeço também pela paciência na orientação, pela cordialidade, e por serem profissionais exemplares.

Mais particularmente ao professor Felício, que foi bem além da sua obrigação no papel de orientador, me ajudando das formas que estiveram a seu alcance com toda a ética da profissão. Meus amigos não erraram quando apontaram seu nome como opção de bom orientador quando ainda ia fazer meu TIM III. Mas você não é só bom: é excelente. Diria até que é o melhor. Muito obrigada por não desistir de nós.

Aos funcionários do DEES, colegas do INSANE, colegas e ex-colegas de trabalho, aos

revisores de periódicos e congressos e a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação. Aos pesquisadores que vieram antes de mim e que tornaram esta tese possível.

Às pessoas que me ajudaram a manter a sanidade neste período, especialmente ao Tiago, meu psicólogo. Aos escritores, por me proporcionarem o refúgio da literatura nas horas difíceis. Aliás, aos cineastas, atores, atrizes, músicos, idealizadores de jogos e outros profissionais envolvidos com a criação artística, por fazerem destes meus mundos que florescem entre meus mundos que falharam um lugar mais bonito.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*Minha mãe achava estudo a coisa mais fina do mundo. Não é.
A coisa mais fina do mundo é o sentimento.
Aquele dia de noite, o pai fazendo serão, ela falou comigo:
“Coitado, até essa hora no serviço pesado”.
Arrumou pão e café, deixou tacho no fogo com água quente.
Não me falou em amor. Essa palavra de luxo.*

Adélia Prado

RESUMO

OLIVEIRA, T. S. **Abordagens Estáveis do MEFG/X na Simulação de Trincas com Modelo de Zona Coesiva em Meios Parcialmente Frágeis**. 2024. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 210 p., 2024.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), aqui entendido como uma abordagem equivalente ao Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX), tem se consolidado na solução numérica de problemas da Mecânica da Fratura. Entre as vantagens relacionadas à sua aplicação neste contexto, podem ser citadas a relativa independência da malha na descrição da trinca e a capacidade de melhorar a representação do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca a partir da incorporação de um enriquecimento extrínseco. Apesar de seu relativo sucesso nesta seara, as limitações do MEFG/X motivaram o surgimento de uma nova estratégia: o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFG-E), resultante de uma simples modificação no enriquecimento empregado no MEFG/X. Esta abordagem, por suas potencialidades e relativa simplicidade, tem sido tema de recentes discussões na literatura. Esta tese investiga a simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva no contexto do MEFG/X e do MEFG-E. São propostas diferentes estratégias de enriquecimento, que consideram esta simulação a partir apenas de funções degrau ou de uma combinação entre estas funções e um enriquecimento de natureza trigonométrica. Os desempenhos destas estratégias são avaliados em termos de acurácia e de condicionamento. Até onde vai o conhecimento da autora, esta é a primeira aplicação do MEFG-E à propagação de trincas com consideração de coesão na existência de enriquecimento trigonométrico. Propõe-se também uma formulação de modelo contínuo-descontínuo, baseada numa simplificação de outros modelos existentes na literatura. Também é, até onde se sabe, o primeiro trabalho a investigar o MEFG-E neste tipo de modelo. As simulações numéricas foram conduzidas a partir da plataforma computacional INSANE (*INteractive Structural Analysis ENvironment*), que já possui um arcabouço para análises utilizando o MEFG/X e o MEFG-E. Os resultados indicam que as estratégias de enriquecimento propostas são em geral acuradas, bem condicionadas e robustas em problemas que representam o material dos elementos como um material linear elástico. Por outro lado, foram constatadas limitações no modelo contínuo-descontínuo.

Palavras-chave: MEFG/X; MEFG-E; mecânica computacional; mecânica da fratura; INSANE.

ABSTRACT

OLIVEIRA, T. S. **Stable versions of G/XFEM applied to the cohesive crack models in quasi-brittle materials**. 2024. Thesis (Doctorate) - Postgraduate Program in Structural Engineering, Federal University of Minas Gerais, Minas Gerais, 210 p., 2024.

The Generalized Finite Element Method (GFEM), here understood as equivalent to the eXtended Finite Element Method (XFEM), has been intensively developed in the last few decades, being useful in many problems, such as fracture mechanics problems. Features as the relative mesh independence and the description's improvement on the representation of stress-field in regions close to the crack's tip may be recorded as some of the reasons behind G/XFEM good performance in aforementioned problems. Despite this, G/XFEM shortcomings yielded to the development of the Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). SGFEM is constructed by a simple modification of the enrichment used in G/XFEM. Regarding its potential, SGFEM has been theme of recent literature discussions. This thesis studies the simulation of cohesive crack propagation by G/XFEM and SGFEM. Different enrichment strategies are considered. Some of them carry out the simulation employing only Heaviside functions, while others consider a combination of Heaviside and trigonometric enrichment functions. The performances of the distinct enrichment strategies are compared in terms of accuracy and conditioning. To the best of the author's knowledge, a systematic study of SGFEMs application to simulate cohesive crack propagation problems with the presence of trigonometric enrichment functions has not been performed yet. A formulation of a continuous-discontinuous (C-D) model, based on a simplification of other models, is also developed. As long as it is known, this is also the first work to apply SGFEM to such a model. Numerical simulations are performed in INSANE (*INteractive Structural Analysis ENvironment*). In this software, it is possible to find a framework to perform simulations with G/XFEM and SGFEM. Results indicate that the different enrichment strategies are generally accurate, well-conditioned and robust, when the element's bulk is considered a linear elastic isotropic material. However, shortcomings concerning C-D model here implemented are found.

Keywords: G/XFEM; SGFEM; computational mechanics; fracture mechanics; INSANE.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de ocorrências relativamente comuns de trincas em edificações (THOMAZ, 1989): a) Fissura resultante de abaulamento e da dilatação plana da laje de cobertura; b) Fissuras de torção em viga de concreto armado; c) Fissura de recalque vertical.	30
Figura 3.1 – Representação esquemática de um corpo no domínio Ω cortado por uma trinca Γ_c . Adaptado de Wang e Waisman (2018).	53
Figura 3.2 – Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s) (PENNA, 2011). . .	57
Figura 3.3 – Comportamento das funções que compõem a lei coesiva adotada para o modelo descontínuo a) Natureza exponencial da relação $t_n \times \kappa$ b) Natureza linear da relação $t_s \times \llbracket u \rrbracket_s$	63
Figura 3.4 – Comportamento das funções que compõem a lei coesiva adotada para o modelo contínuo-descontínuo. a) Natureza exponencial da relação $t_n \times \kappa$ b) Natureza linear da relação $t_s \times \llbracket u \rrbracket_s$	65
Figura 3.5 – Regiões de avaliação da propagação da trinca nos casos em que se emprega para sua representação: a) Uma combinação entre funções de Heaviside (degrau) e funções trigonométricas; b) Apenas funções de Heaviside.	67
Figura 3.6 – Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da integral de interação, considerando uma trinca representada em vermelho. Adaptado de Fonseca (2019).	69
Figura 3.7 – Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração A para o cálculo da integral de interação. Os elementos selecionados são destacados em azul. (FONSECA, 2019). . .	70
Figura 3.8 – Regiões de avaliação da direção assumida pela trinca nos casos em que se emprega para sua representação: a) Uma combinação entre funções de Heaviside (degrau) e funções trigonométricas; b) Apenas funções de Heaviside.	72
Figura 3.9 – Sistema local da trinca, com indicação dos quadrantes.	73
Figura 3.10–Equivalência Energética: modelo contínuo (C), modelo contínuo-descontínuo (C-D). Adaptado de Comi, Mariani e Perego (2007).	74
Figura 3.11–Sistema local da trinca - funções de Heaviside - eq. (3.69).	78
Figura 3.12–Exemplo das funções enriquecedoras utilizadas para simular a trinca com modelo de zona coesiva. Os nós circulares são enriquecidos pelas funções degrau, enquanto os quadrados representam os nós enriquecidos pelas funções trigonométricas.	81

Figura 3.13–Elemento finito quadrilateral Q4 qualquer que ilustra a estratégia de integração numérica. Um exemplo de triangulação, a incidência nodal, e os pontos de integração (x) sobre a trinca são mostrados na figura. O segmento de reta em vermelho representa a trinca com modelo de zona coesiva, e os nós marcados por um quadrado da mesma cor são enriquecidos por funções de Heaviside. Desenho fora de escala.	89
Figura 3.14–Ponderação das variáveis constitutivas para os novos pontos de integração (CAMPOS, 2020).	91
Figura 4.1 – Viga sob flexão em 3 pontos utilizada nos experimentos numéricos desta seção (PENNA, 2011).	94
Figura 4.2 – Malha empregada no experimento 1, com elementos finitos de dimensões $60 \times 15 \text{ mm}$. Adaptado de Oliveira, Barros e Campos (2020).	96
Figura 4.3 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a malha da Fig. 4.2, usando diferentes funções de Heaviside como enriquecimento.	96
Figura 4.4 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, para a malha da Fig. 4.2. Diferentes funções de Heaviside são empregadas.	97
Figura 4.5 – Malha adotada no experimento 2. Adaptado de Oliveira, Barros e Campos (2020).	98
Figura 4.6 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a malha da Fig. 4.5, usando diferentes funções de Heaviside como enriquecimento.	98
Figura 4.7 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, para a malha da Fig. 4.5. Diferentes funções de Heaviside são empregadas.	99
Figura 4.8 – Chapa tracionada investigada nos experimentos desta seção (OLIVEIRA et al., 2019).	100
Figura 4.9 – Malhas empregadas nos experimentos desta seção, bem como esquema de enriquecimento utilizado. Adaptado de Oliveira (2018).	101
Figura 4.10–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ pelo número de graus de liberdade (NGL) para as três malhas da Fig. 4.9.	102
Figura 4.11–Parâmetro δ no detalhe da região da trinca.	104
Figura 4.12–Robustez das estratégias de enriquecimento consideradas.	104
Figura 5.1 – a) Geometria e carregamento da chapa com entalhes assimétricos. Dimensões em mm . b) Malha (elementos com dimensões de $2,5 \times 3,0 \text{ mm}$) e condições de contorno.	107
Figura 5.2 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.1.	108
Figura 5.3 – Trajetórias de trinca obtidas por a) EE-II-B do MEFG-E b) Modelo numérico de Sancho et al. (2006) c) Ensaio de Shi et al. (2005). Os experimentos numéricos aqui realizados se basearam na configuração dos entalhes do modelo de Sancho et al. (2006).	111

Figura 5.4 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento investigadas nesta seção no passo 500.	112
Figura 5.5 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-III-A do MEFG-E no passo 81.	112
Figura 5.6 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para: a) EE-II-B do MEFG-E; b) EE-III do MEFG/X e c) EE-III-A do MEFG-E no passo 80.	114
Figura 5.7 – a) Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 5.1. b) Detalhe dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s ao fim da análise.	115
Figura 5.8 – a) Trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias de enriquecimento EE-I e EE-II do MEFG/X empregando integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento. b) Trajetórias de equilíbrio eliminando o último ponto da estratégia EE-I do MEFG/X utilizando IC.	116
Figura 5.9 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as estratégias de enriquecimento EE-I e EE-II do MEFG/X empregando integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.	117
Figura 5.10–Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-I do MEFG/X com IC nos passos: a) 18; b) 19.	117
Figura 5.11–Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-II do MEFG/X com IC nos passos: a) 17; b) 18.	118
Figura 5.12–Trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias de enriquecimento EE-II-A do MEFG-E empregando integração com subdivisão em células triangulares e integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.	119
Figura 5.13–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as estratégias de enriquecimento EE-II-A do MEFG-E empregando integração com subdivisão em células triangulares e integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.	119
Figura 5.14–Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-II-A do MEFG-E com IC nos passos: a) 222; b) 223; c) 224	120
Figura 5.15–a) Geometria, carregamento e condições de contorno do painel em L. Dimensões em <i>mm</i> . b) Malha empregada.	121
Figura 5.16–a) Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.15. b) Detalhe das trajetórias de equilíbrio próximo à carga de pico. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	122

Figura 5.17–Trajetórias de trinca obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento empregadas para a solução do problema da Fig. 5.15 no passo 100: a) EE-I MEFG/X; b) EE-I- H_{mod} MEFG-E; c) EE-II MEFG/X; d) EE-II-A MEFG-E; e) EE-II-B MEFG-E.	123
Figura 5.18–Trajetórias de trinca obtidas para a estratégia EE-II do MEFG/X em diferentes contextos: a) Com uma malha mais grosseira e um incremento de trinca de 4 <i>mm</i> ; b) Com a malha da Fig. 5.15 e um incremento de trinca de 10 <i>mm</i>	124
Figura 5.19–Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II do MEFG/X em diferentes contextos. EE-II MEFG/X - 10 <i>mm</i> e EE-II MEFG/X - M0 denotam, respectivamente, as análises empregando a EE-II do MEFG/X na malha da Fig. 5.15 e com incremento de trinca igual a 10 <i>mm</i> , e a simulação que utiliza esta estratégia em uma malha menos refinada (Fig. 5.18a). Os saltos da trajetória de equilíbrio da EE-II MEFG/X - M0 estão relacionados à introdução da trinca em uma malha mais grosseira. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	125
Figura 5.20–Comparação entre os estados de tensão na direção <i>y</i> das estratégias EE-II-A do MEFG-E e EE-II do MEFG/X com incrementos de 6,0 <i>mm</i> e 10 <i>mm</i> , respectivamente. O círculo representa uma estimativa do domínio que seria empregado para cômputo da integral de interação.	126
Figura 5.21–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 5.15.	127
Figura 5.22–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.15. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.	128
Figura 5.23–Geometria, carregamento e condições de contorno do espécime de cisalhamento em quatro pontos. Dimensões em <i>mm</i> . $P = 130\,000,0\,N$	129
Figura 5.24–Malhas adotadas para os experimentos numéricos conduzidos nesta seção: a) M1; b) M2.	130
Figura 5.25–Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M1 da Fig. 5.24.	131
Figura 5.26–Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M2 da Fig. 5.24.	131
Figura 5.27–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha M1 da Fig. 5.24a).	133

Figura 5.28–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha M2 da Fig. 5.24b).	134
Figura 5.29–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M1 da Fig. 5.24.	135
Figura 5.30–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M2 da Fig. 5.24.	135
Figura 5.31–Trajetória da trinca produzida pela EE-I- H_{mod} do MEFG-E com a malha M1 da Fig. 5.24.	136
Figura 6.1 – Geometria da viga sujeita à flexão em três pontos. $d = 80 \text{ mm}$, $a = 20 \text{ mm}$ e $P = 1 \text{ N}$. Adaptado de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012).	139
Figura 6.2 – Malha (ASSIS, 2023) adotada para os experimentos numéricos realizados nesta seção. $h \approx 1 \text{ mm}$ na região refinada, e $h \approx 10 \text{ mm}$ fora dela.	140
Figura 6.3 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.2.	141
Figura 6.4 – Detalhe da trajetória de trinca obtida pela estratégia EE-II-A do MEFG-E antes de seu retorno. Configuração similar é obtida, em passos anteriores, para as estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E.	143
Figura 6.5 – Trajetória de trinca obtida pela estratégia EE-II-B do MEFG-E no passo 100.	143
Figura 6.6 – Trajetória de equilíbrio obtida para a estratégia MEF com 220 passos.	144
Figura 6.7 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.2.	146
Figura 6.8 – a) Geometria, carregamento e condições de contorno do painel em L. Dimensões em mm . b) Malha empregada.	148
Figura 6.9 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.8. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	149
Figura 6.10–Configuração final de dano, no passo 100, para a estratégia EE-II do MEFG/X.	149
Figura 6.11–Detalhe da trinca no passo 27 para a estratégia EE-I do MEFG/X. O elemento adjacente ao último segmento de trinca foi destacado em verde.	150
Figura 6.12–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.8. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.	151

Figura 6.13–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.8.	153
Figura 6.14–Trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégia EE-II-B do MEFGE empregando diferentes modelos de material. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	154
Figura 6.15–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II-B usando a malha da Fig. 6.8, com diferentes modelos de material. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.	154
Figura 6.16–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para a estratégia EE-II-B do MEFGE empregando diferentes modelos de material.	156
Figura 6.17–Geometria, carregamento e condições de contorno do espécime de cisalhamento em quatro pontos. Dimensões em <i>mm</i> . $P = 130.000,0\text{ N}$	157
Figura 6.18–Ensaio de tração empregado no procedimento usado para determinação dos parâmetros da lei de evolução de dano exponencial da tabela 6.10.	157
Figura 6.19–Malha adotada para os experimentos numéricos conduzidos nesta seção. O tamanho médio dos elementos finitos na região refinada é igual a 10 <i>mm</i> . Nas demais regiões da malha, é de 50 <i>mm</i>	158
Figura 6.20–Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.19.	159
Figura 6.21–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.19.	159
Figura 6.22–Configuração do dano para a estratégia EE-I do MEFGE/X nos passos: a) 28 e b) 29. Comportamento similar foi observado para a estratégia EE-I- H_{mod} do MEFGE-E.	160
Figura 6.23–Configuração final da estratégia EE-II do MEFGE/X.	162
Figura 6.24–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.19.	163
Figura 6.25–Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II-B do MEFGE com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init}	164
Figura 6.26–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II-B do MEFGE com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init}	165
Figura 6.27–Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II do MEFGE/X para a malha da Fig. 6.19 considerando diferentes modelos de material.	167

Figura 6.28–Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II do MEFG/X para a malha da Fig. 6.19, considerando diferentes modelos para o material dos elementos.	167
Figura 6.29–Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para estratégia EE-II do MEFG/X com diferentes modelos de material.	169
Figura A.1–Núcleo Numérico do INSANE (PINHEIRO, 2019).	190
Figura A.2–Classe <i>DiscontinuityByGfem</i> , com alguns de seus métodos e atributos. .	192
Figura A.3–Fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas (SILVA, 2016).	194
Figura A.4–Pacote <i>gfemmodel</i>	196
Figura A.5–Pacote <i>gfemelement</i>	197
Figura A.6–Pacote <i>problemdriver</i>	197
Figura A.7–Classes de interesse para representação das leis coesivas estudadas neste trabalho no âmbito do pacote <i>constitutivemodel</i>	203
Figura A.8–Classe <i>DiscontinuityByGfem</i> após o término desta tese, com alguns dos principais métodos e atributos implementados.	203
Figura B.1–Comportamento gráfico de $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ (a) e de $\mathcal{H}_{mod}^j(\mathbf{x})$ (c e d).	205
Figura B.2–Comportamento gráfico de $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ no âmbito do MEFG-E (c).	205
Figura B.3–Comportamento gráfico de $\mathcal{H}_{h_j}^{\frac{(x-x_j)}{h_j}}$ no âmbito do MEFG-E (c).	206
Figura B.4–Comportamento gráfico de $\mathcal{H}_{h_j}^{\frac{(y-y_j)}{h_j}}$ no âmbito do MEFG-E (c).	206
Figura B.5–Comportamento gráfico de $r \sin \theta$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	207
Figura B.6–Comportamento gráfico de $r \cos \theta$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	208
Figura B.7–Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	208
Figura B.8–Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	209
Figura B.9–Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	209
Figura B.10–Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).	210

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ das estratégias EE-II para as três malhas da Fig. 4.9.	102
Tabela 5.1 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.1.	109
Tabela 5.2 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.1.	110
Tabela 5.3 – Número de condicionamento escalonado $C(\hat{\mathbf{K}})$ das abordagens EE-I e EE-II do MEFG/X na proximidade dos passos críticos.	118
Tabela 5.4 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.15. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	122
Tabela 5.5 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.15.	125
Tabela 5.6 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da malha M2 da Fig. 5.24.	132
Tabela 5.7 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da malha M2 da Fig. 5.24. . . .	133
Tabela 6.1 – Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.	140
Tabela 6.2 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.1. Os valores referentes à faixa experimental foram extraídos de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012).	141
Tabela 6.3 – Parâmetro d_r calculado para as diferentes estratégias empregadas para solução do problema da Fig. 6.1. $d_r^{Ref} = 297,79$	145
Tabela 6.4 – Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.1. A estratégia MEF, para construção do gráfico da Fig. 6.6, foi analisada, excepcionalmente, até o passo 220.	145
Tabela 6.5 – Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.	148
Tabela 6.6 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	151

Tabela 6.7 – Parâmetro d_r calculado para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8. $d_r^{Ref} = 0,0583$	152
Tabela 6.8 – Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8.	152
Tabela 6.9 – Cargas de pico obtidas para a estratégia EE-II-B do MEFG-E considerando diferentes modelos de material. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).	156
Tabela 6.10–Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.	157
Tabela 6.11–Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17.	161
Tabela 6.12–Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17. $d_r^{Ref} = 0,3161$	162
Tabela 6.13–Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17.	162
Tabela 6.14–Cargas de pico e valores do parâmetro d_r para a estratégia EE-II-B do MEFG-E com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init} . O parâmetro d_r foi computado a partir dos quatro primeiros pontos da seção 6.3.1, ou seja, até um CMSD de 0,068 <i>mm</i>	165
Tabela 6.15–Cargas de pico e valores do parâmetro d_r para a estratégia EE-II do MEFG/X com diferentes modelos de material. $d_r^{Ref} = 0,2357$	168

LISTA DE SÍMBOLOS

A organização da lista de símbolos é conforme a ordem em que os símbolos aparecem.

Capítulo 3 - Fundamentação Teórica

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$	Domínio
$\partial\Omega^u$	Contorno de Dirichlet
$\partial\Omega^\sigma$	Contorno de Neumann
Γ_c	Contorno da trinca
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos
$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$	Salto no campo de deslocamentos
$\mathbf{u}^+$	Campo de deslocamentos na face Γ_c^+ da trinca
$\mathbf{u}^-$	Campo de deslocamentos na face Γ_c^- da trinca
Γ_{LT}	Parcela de Γ_c livre de tensões
Γ_{ZPF}	Parcela de Γ_c correspondente à Zona de Processo de Fratura (ZPF)
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal a $\partial\Omega^\sigma$
$\bar{\mathbf{t}}$	Carregamento prescrito em $\partial\Omega^\sigma$
$\mathbf{D}$	Tensor de Hooke (rigidez)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
$\mathbf{m}$	Vetor unitário normal ao contorno da trinca Γ_c
$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$	Forças coesivas que atuam na ZPF
$\tilde{\mathbf{u}}$	Solução aproximada para o campo de deslocamentos
$\mathcal{H}^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω
$\tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega)$	Discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega)$
$\delta\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos virtual
ω	Parâmetro de dano
E	Módulo de elasticidade ou de Young
E^0	Módulo de elasticidade do material íntegro
E^ω	Módulo de elasticidade do material degradado
σ_{ij}	Componente ij do tensor de tensões
ε_{kl}	Componente kl do tensor de deformações
D^s_{ijkl}	Componente $ijkl$ do tensor de rigidez secante
f	Função de carregamento
G	Módulo de elasticidade transversal

K	Módulo volumétrico
D^e_{ijkl}	Componente $ijkl$ do tensor de rigidez elástico
$\tilde{\varepsilon}$	Equivalente escalar de deformações
$\tilde{\sigma}$	Equivalente escalar de tensões
κ	Variável histórica
f_t	Resistência à tração
f_c	Resistência à compressão
I_1^ε	Primeiro invariante do tensor de deformação
J_2^ε	Segundo invariante do tensor de deformação desviadora
k_r	Parâmetro de material que relaciona f_c e f_t
ν	Coefficiente de Poisson
$[D^s_{ns}]$	Tensor de rigidez secante local em sua forma matricial
$[T^\varepsilon]$	Matriz de transformação de deformação
$[T^\sigma]$	Matriz de transformação de tensão
α, β, κ_0	Parâmetros da lei de evolução de dano exponencial
$\tilde{E}$	Módulo de elasticidade equivalente
f_e, κ_0	Parâmetros da lei de evolução de dano polinomial
$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$	Função peso não local
$r = \ \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\ $	Distância entre um ponto $\boldsymbol{\xi}$ e um ponto $\mathbf{x}$
$\alpha_0(r)$	Função de Gauss
l	Comprimento interno de distribuição
k	Parâmetro que dita o formato da curva $\alpha_0(r)$
$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x})$	Equivalente escalar de deformações regularizado
$\llbracket u \rrbracket_n$	Abertura de trinca na direção normal
t_n	Componente normal das tensões coesivas transmitidas através da trinca
G_f	Energia de fratura
t_s	Componente tangencial das tensões coesivas que atuam na superfície da descontinuidade
d_{init}	Rigidez inicial da trinca ao cisalhamento
$\llbracket u \rrbracket_s$	Deslocamento tangencial entre as faces da trinca
$\mathbf{T}$	Matriz de rigidez tangente que contém a contribuição da coesão
$\mathbf{S}$	Matriz de rigidez secante que contém a contribuição da coesão
t_o	Tensão verificada na lei de dano no momento da transição num modelo C-D
γ	Expoente que define o decaimento da função exponencial que determina t_n no modelo C-D
h	Tamanho característico do elemento finito
A_e	Área do elemento finito
K_I	Fator de intensidade de tensão para o modo I
K_{II}	Fator de intensidade de tensão para o modo II

ω_{cr}	Dano crítico
G_C	Energia total dissipada por unidade de comprimento e por unidade de espessura ao longo da banda de dano
$\tilde{\varepsilon}_{cr}$	Deformação equivalente associada ao dano crítico ω_{cr}
G_{coh}	Energia dissipada pela lei coesiva
G_{ω_1}	Energia dissipada pela lei de dano até $\tilde{\varepsilon}_{cr}$
G_{ω_2}	Energia elástica recuperada pelo material em razão do descarregamento ocorrido pela introdução da descontinuidade
l_{evr}	Comprimento do elemento volumétrico representativo
g_f	Energia específica de fratura
G_ω	$G_{\omega_1} - G_{\omega_2}$
$S_{MEFG/X}$	Espaço de aproximação do MEFG/X
S_{MEF}	Espaço de aproximação do MEF
S_{ENR}	Espaço varrido pelas funções de enriquecimento
$N_j(\mathbf{x})$	Funções de forma lagrangianas do MEF
$\mathcal{I}$	Conjunto de todos os nós do domínio
$\tilde{\mathbf{u}}_j$	Vetor de coeficientes nodais
ϕ_j	Nuvem de elementos que compartilha o nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$
S_{MEFG-E}	Espaço de aproximação do MEFG-E
S_{ENR}^D	Espaços formados a partir das funções descontínuas de Heaviside
S_{ENR}^T	Espaços formados a partir da(s) função(ões) trigonométrica(s)
$\mathcal{H}(x, y)$	Funções de Heaviside
$\mathbf{u}^h$	Aproximação discreta para o campo de deslocamentos
$\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$	Vetores de parâmetros nodais
$\mathcal{I}_D$	Conjunto de nós enriquecidos pelas funções degrau
$\llbracket \mathbf{u}^h \rrbracket$	Aproximação discreta para o salto no campo de deslocamentos
(r, θ)	Coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesianas $\mathbf{x}$ considerando o sistema local da trinca
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação
$\mathcal{I}_T$	Conjunto de nós enriquecidos pela(s) função(ões) trigonométrica(s)
$\mathcal{H}_L^j(x, y)$	Funções de Heaviside lineares
$I_{\phi_j}(L_j)(\mathbf{x})$	Interpolante de elementos finitos
L_j	Função de enriquecimento
$\mathcal{H}_{mod}^j(x, y)$	Funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização
α	Parâmetro de estabilização
$\hat{\mathbf{B}}$	Matriz de derivadas espaciais
$\hat{\mathbf{N}}$	Matriz de funções de forma
$\llbracket \hat{\mathbf{N}} \rrbracket$	Matriz construída para representar o salto no campo de deslocamentos na trinca

$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez de um elemento
(ξ, η)	Coordenadas paramétricas
J	Determinante do Jacobiano
(r, s, t)	Coordenadas de área

Capítulo 4 - Análise do Comportamento das Funções Enriquecedoras Propostas

β_r	Fator de retenção ao cisalhamento
l_c	Tamanho do incremento de trinca
$C(\hat{\mathbf{K}})$	Número de condicionamento escalonado
δ_{ij}	Delta de Kronecker

Capítulo 5 - Simulação da Propagação de Trincas com Modelo de Zona Coesiva em Meio Linear Elástico

d_r	Parâmetro que mede o afastamento da trajetória de equilíbrio de um modelo numérico em relação à faixa experimental
P_i^{Lab}	Carga observada na curva experimental
P_i^{Pn}	Carga registrada para as diferentes soluções numéricas para uma dada coordenada da abscissa da trajetória de equilíbrio
d_r^{Ref}	Afastamento de referência obtido com base nos limites superior e inferior da faixa experimental
$P_i^{Lab, sup}$	Valores de P_i^{Lab} medidos no limite superior
$P_i^{Lab, inf}$	Valores de P_i^{Lab} medidos no limite inferior

Apêndice A - O Sistema INSANE

$\mathbf{Q}$	Tensor acústico
--------------	-----------------

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

C-D	Modelo Contínuo-Descontínuo
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
ECDM	<i>Extendend Cohesive Damage Model</i>
EE-I	Estratégia de Enriquecimento que não emprega enriquecimento trigonométrico
EE-II	Estratégia de Enriquecimento que emprega uma combinação das funções de Heaviside com uma função de enriquecimento trigonométrica
EE-III	Estratégia de Enriquecimento que emprega uma combinação das funções de Heaviside com seis funções de enriquecimento trigonométricas
EFGM	<i>Element Free Galerkin Method</i>
EVR	Elemento Volumétrico Representativo
IC	Integração Convencional
<i>iXFEM</i>	<i>Improved XFEM</i>
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
LPCA	Análise de Componente Local Principal
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFX	Método dos Elementos Finitos Estendidos
MEFG/X	Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos
MEFG/X-C	Método dos Elementos Finitos Generalizados Corrigido
MEFG-E	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MSM	Métodos sem Malha
NGL	Número de Graus de Liberdade
PG	Ponto de Gauss
POO	Programação Orientada a Objetos
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
PU	Partição da Unidade
PUM	Método da Partição da Unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno
SFEM	<i>Smoothed Finite Element Method</i>
S ² XFEM	<i>Smoothed Stable Extended Finite Element Method</i>
SSGFEM	<i>Strongly Stable Generalized Finite Element Method</i>
UML	<i>Unified Modeling Language</i>
ZPF	Zona de Processo de Fratura

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Motivações	29
1.2	A Tese	35
1.3	Justificativa	37
1.4	Objetivos	39
1.5	Metodologia e Organização do Texto	39
2	ESTADO DA ARTE	41
2.1	Métodos Baseados em Malhas de Elementos Finitos com En- riquecimento Extrínseco	41
2.1.1	MEFG/X	42
2.1.2	MEFG-E	44
2.2	Aplicações do MEFG/X em problemas da mecânica da fratura com modelos coesivos	48
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	52
3.1	Formulação do Problema de Valor de Contorno	52
3.2	Formulação do Modelo Distribuído	54
3.2.1	Modelo de Dano Isotrópico	55
3.2.2	Modelo de Dano Ortotrópico	57
3.2.3	Leis de Evolução de Dano	59
3.2.3.1	Função de Evolução do Dano com Variação Exponencial	59
3.2.3.2	Função de Evolução do Dano com Variação Serpentina	59
3.2.4	Modelo Não Local	60
3.3	Formulação do Modelo Coesivo	62
3.3.1	Lei Coesiva	62
3.3.1.1	Modelo Descontínuo	62
3.3.1.2	Modelo Contínuo-Descontínuo	64
3.3.2	Critérios de Propagação e de Direção	66
3.3.2.1	Modelo Descontínuo	66
3.3.2.2	Modelo Contínuo-Descontínuo	70
3.3.3	Transição no Modelo Contínuo-Descontínuo	73
3.4	MEFG/X e MEFG-E	76
3.4.1	Funções de Enriquecimento	78
3.4.1.1	MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento I (EE-I)	78
3.4.1.2	MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento II (EE-II)	79
3.4.1.3	MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento III (EE-III)	81
3.4.1.4	MEFG-E - Estratégia de Enriquecimento I (EE-I)	83
3.4.1.5	MEFG-E - Estratégia de Enriquecimento II (EE-II)	85
3.4.1.6	MEFG-E - Estratégia de Enriquecimento III (EE-III)	86
3.5	Forma Discreta das Equações do Problema	87
3.5.1	Estratégia de Integração Numérica	89

4	ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS PROPOSTAS	93
4.1	Verificação das Funções de Heaviside	93
4.1.1	Experimento 1	95
4.1.2	Experimento 2	97
4.2	Avaliação de robustez e condicionamento dos enriquecimentos trigonométricos	100
4.2.1	Estudo de crescimento dos números de condicionamento . . .	100
4.2.2	Estudo de robustez	103
4.3	Conclusões parciais	105
5	SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS COM MODELO DE ZONA COESIVA EM MEIO LINEAR ELÁSTICO	106
5.1	Ensaio de Tração com Entalhes Assimétricos de Shi et al. (2005)	106
5.2	Painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004)	120
5.3	Cisalhamento em 4 Pontos de Arrea e Ingraffea (1982)	128
5.4	Conclusões parciais	136
6	SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS COM MODELO DE ZONA COESIVA ASSOCIADO A MODELOS DE DANO	138
6.1	Flexão em 3 Pontos de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012)	139
6.2	Painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004)	147
6.2.1	Comparação entre estratégias de enriquecimento	148
6.2.2	Comparação entre os modelos de material	153
6.3	Cisalhamento em 4 Pontos de Arrea e Ingraffea (1982)	156
6.3.1	Comparação entre estratégias de enriquecimento	158
6.3.2	Resistência inicial ao cisalhamento	164
6.3.3	Comparação entre os modelos de material	166
6.4	Conclusões parciais	168
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	172
7.1	Síntese das Principais Contribuições	172
7.1.1	Investigação sobre robustez e condicionamento das funções de enriquecimento propostas	172
7.1.2	Aplicação do MEEG-E a um modelo descontínuo com enriquecimento trigonométrico	173
7.1.3	O papel da estratégia de integração numérica na estabilidade/robustez do MEEG/X	173
7.1.4	Efeitos da inclusão do enriquecimento trigonométrico na simulação de propagação de trincas com modelo de zona coesiva	174
7.1.5	Proposição do modelo C-D com o acoplamento energético realizado a partir da energia de fratura	174
7.1.6	Avaliação da simplificação proposta para o acoplamento energético do modelo C-D	175
7.1.7	Resistência inicial ao cisalhamento no modelo C-D	175
7.2	Propostas de Trabalhos Futuros	175

	REFERÊNCIAS	178
	APÊNDICE A – O SISTEMA INSANE	189
A.1	Visão Geral	189
A.2	Nucleação e propagação de trincas e o núcleo numérico do INSANE	190
A.2.1	Modificações realizadas	195
A.2.1.1	Reorganização da estrutura explorando a POO	195
A.2.1.2	Cômputo da matriz de salto $[\hat{N}]$	197
A.2.1.3	Modificação e Acréscimo de Critérios de Direção e Propagação . .	198
A.2.1.4	Inclusão do Enriquecimento Trigonométrico	200
A.2.1.5	Tratamento do Modelo Contínuo-Descontínuo	202
	APÊNDICE B – GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE ENRI- QUECIMENTO	204
B.1	Funções de Heaviside	204
B.2	Funções Trigonométricas	206

1 Introdução

1.1 Motivações

Entre as várias patologias que podem atingir uma edificação, é de especial interesse para a engenharia a formação de falhas localizadas, como o surgimento de trincas ou fissuras no concreto, de bandas de cisalhamento nos solos ou de discordâncias ou planos de escorregamento em metais. Há três aspectos fundamentais (THOMAZ, 1989) que baseiam o interesse pelo surgimento de trincas (Fig. 1.1) em particular: o efeito psicológico que a fissuração de uma edificação exerce sobre seus usuários, o comprometimento do desempenho da estrutura em serviço - em termos de, por exemplo, durabilidade ou estanqueidade à água - e, principalmente, o alerta que o surgimento de tais defeitos representa em relação a um possível estado de perigo. É de fundamental importância, portanto, o conhecimento acerca da análise da resistência residual da estrutura após a ocorrência da localização de deformações, de forma a prevenir o que poderia se tornar eventualmente um colapso catastrófico. É interessante que se conheça também, neste cenário, outros aspectos relacionados ao comportamento da edificação em termos de serviço, a fim de viabilizar a proposição de soluções para que esta continue desempenhando os fins para os quais foi projetada.

A mecânica da fratura estuda o comportamento das estruturas levando em consideração a presença dessas falhas ou fissuras. Karihaloo (1995) defende um consenso entre os pesquisadores e profissionais da Engenharia para a incorporação dos conceitos da mecânica da fratura na concepção e projeto de estruturas de concreto. Tal consideração atuaria não apenas no sentido de prevenção do colapso estrutural, como também conduziria a benefícios econômicos significativos, à conquista de margens uniformes de segurança sobre tamanhos variados, ao aperfeiçoamento da confiança estrutural e à possibilidade de introdução de novos formatos às peças, além de permitir a utilização de novos concretos. Para que esse horizonte possa ser alcançado, bem como se possa fazer a devida manutenção e eventuais reparações em estruturas já existentes, fazem-se necessárias a compreensão e modelagem do processo de formação e propagação de fissuras em materiais parcialmente frágeis.

A simulação de fenômenos como este, no entanto, que exigem constante remalhamento, encontra algumas limitações quando realizada sob a perspectiva do consolidado Método dos Elementos Finitos (MEF). O acréscimo do custo computacional ocorrido neste tipo de problema quando se emprega esta importante ferramenta para a resolução de problemas de valor de contorno (PVC) motivou o desenvolvimento de novas abordagens. Entre

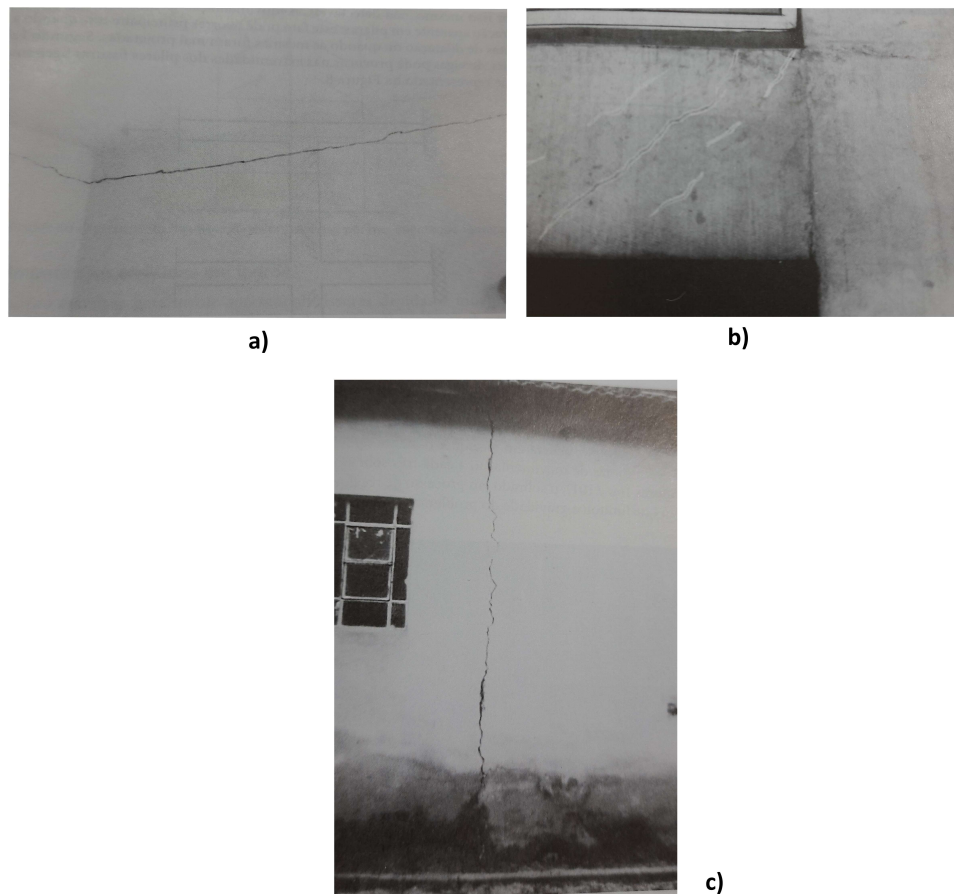


Figura 1.1 – Exemplos de ocorrências relativamente comuns de trincas em edificações (THOMAZ, 1989): a) Fissura resultante de abaulamento e da dilatação plana da laje de cobertura; b) Fissuras de torção em viga de concreto armado; c) Fissura de recalque vertical.

estas abordagens, podem ser destacadas estratégias que foram formuladas tendo como objetivo contornar parte das dificuldades oriundas da dependência em relação à malha verificada pelo MEF, como os Métodos sem Malha (MSM) (NGUYEN et al., 2008), desenvolvidos intensamente na década de 90. Em particular, é de relevância considerável para a simulação de problemas envolvendo a propagação de trincas a formulação de um método híbrido, combinando o conceito de enriquecimento extrínseco de métodos sem malha como o Método da Partição da Unidade (PUM, em inglês) (BABUŠKA; MELENK, 1995; MELENK, 1995) e o Método das Nuvens *hp* (DUARTE; ODEN, 1996a) com as vantagens associadas ao uso da malha de elementos finitos: o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (ODEN; DUARTE, 1997), aqui entendido, assim como por Belytschko, Gracie e Ventura (2009), como uma abordagem equivalente ao Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFX) (BELYTSCHKO; BLACK, 1999), e, por isso, identificado neste texto pelo acrônimo MEFG/X.

O MEFG/X é obtido a partir da ampliação do espaço de aproximação através do produto

de funções de enriquecimento, introduzidas a fim de simular uma característica intrínseca ao problema estudado, pela partição da unidade (PU), construída a partir das funções lagrangianas do MEF. Tal arquitetura do MEFG/X possibilita uma relativa independência da malha, sem necessariamente perder algumas vantagens da formulação convencional do MEF, como a propriedade do delta de Kronecker, ou a relativa simplicidade da integração numérica quando contraposta a dos procedimentos utilizados nos MSM (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000). Por tais características, o MEFG/X tem sido aplicado nas últimas décadas com significativo sucesso na solução de problemas não-suaves, nos quais se incluem aplicações da mecânica da fratura. Trabalhos revisionais como os de Babuška, Banerjee e Osborn (2003a), Babuška, Banerjee e Osborn (2003b), Belytschko, Gracie e Ventura (2009) e de Fries e Belytschko (2010) apresentam esta evolução com mais detalhes.

Apesar de seu bom desempenho em problemas que escapam à uma eficiente simulação por parte do MEF, o MEFG/X apresenta também algumas limitações. Uma preocupação recorrente na literatura diz respeito ao mau condicionamento do sistema de equações associado ao método. De acordo com Gupta et al. (2015), tal questão é bem conhecida desde os primeiros trabalhos com o MEFG/X, e pode se apresentar como um desafio, principalmente na solução de problemas tridimensionais, em termos do acúmulo de erros de arredondamento ou de problemas na convergência quando utilizadas, respectivamente, estratégias de solução diretas ou iterativas. Outra limitação bem conhecida e frequentemente discutida diz respeito ao desempenho do MEFG/X na existência de elementos de mistura (*blending elements*, em inglês) (CHESSA; WANG; BELYTSCHKO, 2003). A qualidade do MEFG/X está relacionada, em geral, à uma escolha criteriosa das funções de enriquecimento, de forma a bem aproximar o comportamento do problema em estudo (GUPTA et al., 2013). Tais funções, muitas vezes, como em problemas da mecânica da fratura, são requeridas apenas em parcelas do domínio. Isso acarreta o surgimento de elementos que possuem apenas parte dos nós enriquecidos - os elementos de mistura. Nestes elementos a função de enriquecimento não é plenamente reproduzida. Além disso, podem surgir termos parasitas à aproximação (FRIES; BELYTSCHKO, 2010). Embora o efeito destes termos não possa ser facilmente previsto (FRIES, 2008), em geral, o erro verificado nos elementos de mistura é maior que aquele avaliado nos demais elementos, podendo impactar a convergência da aproximação.

Deve-se observar que a modelagem de problemas da mecânica da fratura sob a perspectiva do MEFG/X em geral emprega duas classes de funções: funções descontínuas, como as funções de Heaviside, com o objetivo de representar o salto do campo de deslocamentos; e funções trigonométricas, de forma a melhorar a simulação do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca. Estas funções em geral são aplicadas apenas em parcelas do domínio, provocando a ocorrência de elementos de mistura. O uso em particular das

funções de Heaviside, por sua vez, esteve frequentemente associado à verificação de mau condicionamento. Tal situação se dá quando a razão entre as áreas (ou volumes) resultantes da divisão do elemento atravessado pela trinca é muito pequena. Esta limitação foi observada em numerosos trabalhos envolvendo o MEFG/X, entre os quais se incluem Dolbow, Moës e Belytschko (2000), Sukumar e Prévost (2003) e Wu e Li (2015b). Na simulação de propagação de trincas, nem sempre é possível conhecer o caminho seguido pela descontinuidade *a priori*, o que pode tornar configurações desfavoráveis de malha inevitáveis. Tornou-se, portanto, de significativo interesse dos estudiosos do MEFG/X a superação das limitações citadas de forma a garantir a acurácia e estabilidade do método em variados problemas de engenharia.

Com a proposta de aprimorar o MEFG/X, contornando suas principais limitações, especialmente a questão do mau condicionamento, foi concebido o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFG-E) por Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012). Nestes trabalhos, o MEFG-E foi formalmente validado para problemas unidimensionais. O método foi posteriormente estendido para problemas bi e tridimensionais da mecânica da fratura por Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), respectivamente. O MEFG-E é construído a partir de uma simples modificação do enriquecimento característico do MEFG/X, que consiste na sua subtração pelo seu interpolante de elementos finitos. Tal modificação torna o espaço das funções de enriquecimento ortogonal ao espaço das funções lagrangianas do MEF em problemas 1-D (BABUŠKA; BANERJEE, 2012) e quase ortogonal nas demais dimensões (GUPTA et al., 2013).

Babuška e Banerjee (2012) provam matematicamente no caso unidimensional, enquanto Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) mostram empiricamente para os casos bi e tridimensionais, respectivamente, em problemas da mecânica da fratura, que, de fato, as matrizes associadas ao MEFG-E conduzem a números de condicionamento com ordens de magnitude significativamente inferiores aos valores obtidos pelas matrizes associadas ao MEFG/X. O MEFG-E, pela característica inerente à construção de seu enriquecimento modificado, que provoca a nulidade deste tipo de função nos nós de um elemento finito, consegue ainda lidar com a questão dos elementos de mistura de forma relativamente natural, ao contrário do que ocorre com grande parte das estratégias derivadas de e com o próprio MEFG/X.

Adaptando Zhang, Babuška e Banerjee (2016), uma formulação do MEFG/X pode ser considerada como estável (MEFG-E) quando (i) conduz a taxas de convergências ótimas em termos da norma energia do erro, isto é, $O(h^p)$, (ii) é estável no que concerne ao número de condicionamento escalonado, que cresce com a mesma ordem verificada para o MEF, $O(h^{-2})$, (iii) é robusta, ou seja, o condicionamento não se deteriora à medida

que a descontinuidade se aproxima de nós ou das arestas dos elementos; h representa o tamanho característico do elemento finito (CUI et al., 2022), e p se refere ao espaço polinomial construído pelas funções de aproximação. Desde sua proposição, o MEFG-E como definido em Babuška e Banerjee (2012), ou seja, considerando apenas a modificação operada pela subtração do interpolante das funções de enriquecimento, foi aplicado a uma ampla gama de problemas, como problemas de mecânica da fratura - sendo a principal estratégia nos trabalhos de Gupta et al. (2013), Gupta et al. (2015), Wu e Li (2015b), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), Oliveira et al. (2019), Cui et al. (2022), ou associado com a estratégia global-local, como ocorre em Novelli et al. (2020), Fonseca et al. (2020) e em Paiva (2023) - escoamento de fluidos (SAUERLAND; FRIES, 2013), problemas de interfaces, como em Zhang, Banerjee e Babuška (2018), Zhang e Babuška (2020) e Jiang, Nian e Zhang (2022), trincas interfaciais em bi-materiais (LI; CUI; ZHANG, 2022) e problemas dinâmicos (SILVA et al., 2022). Alguns destes trabalhos foram capazes de verificar os requisitos exigidos por Zhang, Babuška e Banerjee (2016), enquanto outros não o foram.

De fato, a despeito do sucesso das aplicações do MEFG-E em variados problemas nos últimos anos, obter uma formulação propriamente estável nos moldes propostos por Zhang, Babuška e Banerjee (2016) nem sempre se mostrou tarefa simples. O uso das funções de Heaviside, no contexto da mecânica da fratura, em particular, pode ser um desafio. No já citado trabalho de Gupta et al. (2013), a mera aplicação da estratégia de subtração do interpolante destas funções mostrou-se insuficiente para garantir a acurácia do método, ainda que os resultados indicassem um sistema bem condicionado. A fim de obter taxas de convergência ótimas em termos da norma energia do erro, os autores propuseram associar o MEFG-E ao uso de funções de Heaviside lineares. Além disso, uma seleção especial dos nós enriquecidos quando a trinca era coincidente com as arestas dos elementos fez-se necessária. Em trabalhos posteriores, como Zhang, Babuška e Banerjee (2016) e Oliveira et al. (2019), constatou-se que o uso direto de funções de Heaviside lineares carecia de robustez. A fim de contornar esta limitação Zhang, Babuška e Banerjee (2016) propuseram uma modificação destas funções associada ao uso de um procedimento de ortogonalização local. O emprego de um interpolante descontínuo combinado com funções de Heaviside deslocadas dos valores nodais (em inglês, *shifted Heaviside*) e com um algoritmo de adequação nodal (em inglês, *node snapping*) foi proposto nos trabalhos de Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020) e Bento, Proença e Duarte (2022). Os MEFG-Es desenvolvidos nestas publicações atenderam aos requisitos de acurácia, bom condicionamento e robustez, ou seja, verificaram as exigências de estabilidade apresentadas por Zhang, Babuška e Banerjee (2016). A limitação destas proposições diz respeito ao fato de que o algoritmo de ajuste nodal, empregado frequentemente em situações de mais de um enriquecimento por nó ou em problemas que empregam uma

aproximação de ordem superior leva a alterações na malha nas vizinhanças da trinca. Deve-se destacar, porém, uma importante contribuição constante no início do trabalho de Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020), também demonstrada anteriormente em Ndeffo et al. (2017): para problemas de mecânica da fratura que usam uma aproximação de elementos finitos de primeira ordem, o uso de funções de Heaviside com deslocamento nodal segundo a ótica do MEFG/X e associado a um adequado pré-condicionamento da matriz de rigidez decorrente da aproximação se mostra uma solução robusta, dispensando o uso de interpolantes.

Além das contribuições citadas, Bento, Proença e Duarte (2022) e outros trabalhos - entre os quais se destacam Cui e Zhang (2020) e Cui et al. (2022) - buscaram atender aos requisitos de estabilidade empregando funções de Heaviside lineares em conjunto com modificações da partição da unidade. Cui e Zhang (2020) e Cui et al. (2022) propuseram ainda o uso de uma análise de componente local principal (em inglês, LPCA), a fim de evitar dependências lineares em nós onde coexistia mais de uma função de enriquecimento. Este procedimento tem potencialidade, mas sua implementação pode demandar certo custo computacional, especialmente em problemas tridimensionais. Anteriormente, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) já haviam sugerido a possibilidade de construção do espaço de aproximação relativo ao enriquecimento do MEFG-E utilizando como PU uma função do tipo “*flat-top*”, a fim de evitar instabilidade no condicionamento do sistema de equações, além de permitir aproximações de grau superior sob a lógica do enriquecimento estável. Outras publicações, como Sato, Neto e Proença (2018) e Paiva (2023), empregaram a PU *flat-top* com o MEFG-E. Finalmente, o trabalho de Wu e Li (2015b) propôs uma modificação distinta das funções de Heaviside, visando um meio-termo entre acurácia e condicionamento a partir de um parâmetro de estabilização (α). Os autores demonstram que, para valores pequenos de α , o MEFG-E proposto é bem-sucedido em simular propagação de trincas com modelo de zona coesiva sem travamento e com estabilidade no que concerne ao condicionamento.

Tendo tudo isso em vista, deve-se apontar que, apesar dos resultados promissores obtidos com os primeiros trabalhos sobre o MEFG-E, principalmente em termos de acurácia da solução, a busca por uma versão estável do MEFG/X conforme definição de Zhang, Babuška e Banerjee (2016), ou seja, um método que conduza a taxas ótimas de convergência, cujo condicionamento não seja pior em relação ao verificado para o MEF de forma independente da configuração da malha de elementos finitos, tem sido tema de estudos da literatura nos últimos anos. É evidente também que o MEFG-E tem se destacado na solução de problemas que envolvem descontinuidades, como os problemas de mecânica da fratura. Isso fica claro tanto em termos das inúmeras publicações já citadas que discutiram aplicações à mecânica da fratura linear, como em trabalhos que se centram no estudo da mecânica da

fratura não-linear, com a consideração da coesão. Entre estes, podem ser referenciados os trabalhos de Wu e Li (2015a), Wu e Li (2015b), e Oliveira, Barros e Campos (2020), que discutiram a aplicação do MEFG-E a problemas com modelos coesivos empregando apenas as funções de Heaviside, e o trabalho de Oliveira, Barros e Penna (2022), onde alguns conceitos básicos da utilização do MEFG-E em problemas desta natureza empregando uma combinação entre funções de Heaviside e funções trigonométricas foram preliminarmente discutidos.

Quando se pensa na modelagem da propagação de fratura em meios parcialmente frágeis, além da abordagem discreta, com a introdução da descontinuidade no problema - aqui estudada a partir de métodos baseados no enriquecimento extrínseco da PU (MEFG/X e MEFG-E) - existe também a abordagem contínua. Esta se caracteriza pelo uso de modelos distribuídos, que utilizam estratégias para reproduzir o comportamento da trinca sem a criação direta da descontinuidade, com a inserção de zonas de degradação, por exemplo. É de conhecimento geral que os modelos contínuos são bem-sucedidos em simular os estágios iniciais da formação da zona de processo de fratura (ZPF). Sua abordagem convencional, no entanto, está suscetível a uma dependência patológica da malha, com indução numérica da localização de deformações. Nesse sentido, formulações não locais - como o modelo regularizado de formulação não local - são capazes de contornar esta limitação e representar adequadamente o processo de danificação e sua localização independentemente da malha. Mesmo com este procedimento, entretanto, a abordagem contínua é, em geral, menos bem-sucedida na representação do estágio final da fratura, com a formação da trinca macroscópica, podendo exibir travamento, falta de objetividade e possíveis instabilidades (ROTH; LÉGER; SOULAÏMANI, 2015).

A abordagem discreta, por outro lado, é incapaz de bem descrever a fase do dano difuso e o fenômeno da nucleação da fissura, mas representa bem a trinca macroscópica. Consequentemente, a combinação das duas técnicas em um modelo contínuo-descontínuo se mostra interessante, uma vez que reúne as potencialidades das duas abordagens. De fato, vários trabalhos, entre os quais podem ser citados Simone, Wells e Sluys (2003), Comi, Mariani e Perego (2007), Roth, Léger e Soulaïmani (2015), Wang e Waisman (2016), Evangelista e Moreira (2020) e Paiva (2023), trataram de modelos combinados no contexto do MEFG/X. No contexto do MEFG-E, no entanto, as aplicações a este tipo de problema ainda se mostram incipientes. Até onde vai o conhecimento da autora, apenas o trabalho de Paiva (2023) tratou desta transição, sem consideração de coesão.

1.2 A Tese

Considerando todo o exposto, e salientando as capacidades demonstradas e aqui parcialmente recordadas tanto pelo MEFG/X quanto pelo MEFG-E em problemas da mecâ-

nica da fratura, bem como as possibilidades antevistas em termos de aprimoramento do MEFG/X com o MEFG-E, esta estratégia foi empregada na simulação de nucleação e propagação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis. Até onde vai o conhecimento da autora, o MEFG-E só foi aplicado a este tipo de problema em Wu e Li (2015a) e Wu e Li (2015b), trabalhos no quais são utilizadas como enriquecimento apenas funções de Heaviside modificadas, já que os trabalhos de Oliveira, Barros e Campos (2020) e Oliveira, Barros e Penna (2022) fizeram parte do processo desta tese. O uso da estratégia estável neste tipo de simulação para outros tipos de enriquecimento, como uma das funções trigonométricas apresentadas por Moës e Belytschko (2002) e parte da base de funções desenvolvida por Wang e Waisman (2018), foi pela primeira vez realizado. Era interessante que a introdução do enriquecimento trigonométrico neste tipo de problema e no contexto da estratégia estável fosse estudada, a fim de garantir ao MEFG-E maior flexibilidade em relação à malha, visto que as funções de Heaviside estão condicionadas ao tamanho do elemento finito, uma vez que necessariamente o atravessam por inteiro. Desejava-se descobrir se o ganho de acurácia, em relação ao MEFG/X, frequentemente reportado na literatura em diversos tipos de problema para o MEFG-E, seria verificado também para a simulação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis. As abordagens propostas são contrapostas à simulação que emprega apenas funções de Heaviside e à formulação convencional do MEFG/X no que concerne à acurácia da representação das trajetórias de equilíbrio, à robustez e ao condicionamento, em diversas malhas e experimentos.

Finalmente, após a conclusão dos testes com um modelo coesivo convencional, propõe-se também pela primeira vez, para o MEFG-E, a utilização de um modelo que considera a transição entre modelos de dano e o modelo de fratura discreta levando em conta a coesão. A fim de evitar localização, os modelos de dano são considerados a partir de uma formulação não local (JIRÁSEK, 2004). Uma simplificação do tratamento dado por Comi, Mariani e Perego (2007) a respeito da consistência energética entre os dois modelos, adaptando Wang e Waisman (2016), é assumida. Simulações que contrapõem experimentos realizados tanto com Heaviside quanto com a combinação destas funções com enriquecimentos trigonométricos, experimentos executados sob ótica do MEFG-E e do MEFG/X, e diferentes formas de considerar o acoplamento entre o modelo contínuo e o modelo discreto são apresentados.

Tais investigações foram realizadas no âmbito do sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) (FONSECA; PITANGUEIRA, 2007). O INSANE é um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia (DEES) da Universidade Federal de Minas

Gerais (UFMG) e disponível em <https://www.insane.dees.ufmg.br>. Neste contexto, esta tese se constitui como uma continuidade de inúmeros outros trabalhos desenvolvidos no âmbito deste software. Destacam-se, de forma especial, as contribuições de Alves (2012), Silva (2016), Oliveira (2018), Campos (2020) e Souza (2016), responsáveis, respectivamente, pela criação de um ambiente que permitisse a realização de análises sob perspectiva do MEFG/X, pela construção de um sistema para nucleação e propagação de trincas com modelo de zona coesiva segundo o mesmo método e com base no trabalho de Wells e Sluys (2001), pela generalização, em termos de código, da estratégia de enriquecimento estável, pela implementação da estratégia de integração numérica usada nos experimentos aqui apresentados e pela implementação da formulação não local dos modelos de dano empregados na construção do modelo que associa fratura discreta a modelos contínuos. Maiores detalhes sobre o INSANE, bem como a respeito das implementações realizadas, podem ser encontrados no Apêndice A.

1.3 Justificativa

A seção 1.1 trouxe, em seus parágrafos iniciais, uma breve contextualização acerca da relevância do estudo e da modelagem do processo de formação e propagação de fissuras para aplicações de engenharia. As vantagens relacionadas à incorporação de conceitos de mecânica da fratura aos projetos e a necessidade de avaliação e tratamento de patologias de ocorrência não de todo incomuns (Fig. 1.1) apontam para a importância da investigação deste processo. Sem dúvidas, trata-se de um estudo fundamental tanto para garantir a segurança estrutural quanto para potencializar a durabilidade das edificações e permitir que elas continuem desempenhando, no horizonte idealizado, os fins para os quais foram projetadas. A análise do processo de formação e propagação de trincas é de suma relevância em estruturas constituídas por materiais parcialmente frágeis, em razão da resposta destes materiais à localização de deformações. Este é o caso das estruturas de concreto.

Nesse contexto, há que se pensar nos métodos e soluções disponíveis e computacionalmente viáveis para a realização da modelagem do processo de formação e propagação de trincas em questão. Entre estes, a seção 1.1 destacou um panorama sobre as potencialidades e limitações do MEFG/X e do MEFG-E. Nela, é possível perceber as vantagens que estes métodos apresentam quando aplicados a problemas da mecânica da fratura. Por esta razão, tenciona-se estudar seus efeitos na simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis. Neste tipo de problema, são perceptíveis os proveitos obtidos com a expansão da aproximação da PU a partir do uso de estratégias de enriquecimento extrínseco, que lidam com a incorporação de funções que representam comportamentos que não podem ser modelados exatamente a partir das funções polinomiais do MEF.

Tendo isso em vista, e considerando os resultados positivos que têm sido obtidos recentemente com versões estáveis do MEFG/X, que utilizam a modificação das funções enriquecedoras a partir da subtração destas do interpolante de elementos finitos (BABUŠKA; BANERJEE, 2012), bem como seu potencial de contornar duas importantes limitações inerentes ao MEFG/X - as questões envolvendo instabilidade no condicionamento do sistema de equações associado ao método e a piora de desempenho deste na presença de elementos de mistura - é válido julgar que abordagens estáveis - considerando ainda a busca pelo atendimento aos requisitos de acurácia, robustez e bom condicionamento (ZHANG; BABUŠKA; BANERJEE, 2016) - merecem maiores investigações em problemas envolvendo a propagação de trincas com modelo de zona coesiva. Até a redação desta tese, não existia uma análise sobre o emprego deste método neste contexto com a combinação entre enriquecimento de Heaviside e enriquecimentos trigonométricos. Como exposto anteriormente, é pertinente que este estudo seja conduzido, uma vez que a combinação entre estas funções pode representar um ganho de flexibilidade em relação à malha na simulação de problemas desta natureza - justamente o que buscam os métodos oriundos do MEFG/X. Além disso, os trabalhos que empregaram o MEFG-E em diversos contextos mostraram, em geral, um ganho de acurácia em relação ao MEFG/X.

Pensando de forma mais abrangente na modelagem de propagação de trincas em meios parcialmente frágeis, os benefícios trazidos pelos modelos contínuos-descontínuos, que combinam a abordagem contínua com a abordagem discreta, são inegáveis. Neste campo, ainda são incipientes os desenvolvimentos com o MEFG-E, principalmente em problemas em que há consideração da coesão. Em razão das potencialidades deste método em termos de acurácia e de estabilidade numérica (bom condicionamento), seu emprego neste contexto pode se configurar como de grande interesse para a literatura. Além disso, deve-se destacar que muitos trabalhos que discutem a consistência energética entre os modelos contínuos e discretos são baseados na resolução da energia total de fratura (G_c) com base em integrais de lei de dano (COMI; MARIANI; PEREGO, 2007) - o que pode limitar a escolha do modelo, visto que nem todas as integrais são definidas - ou em soluções numéricas (ROTH; LÉGER; SOULAÏMANI, 2015), que empregam diversas equações distintas para a realização do acoplamento. Pretende-se aqui avaliar uma simplificação do tratamento deste problema, adaptada das formulações de Wang e Waisman (2016), atrelando a transição entre os modelos a um parâmetro que pode ser obtido experimentalmente, a energia de fratura G_f .

Diante de todo o exposto, é válido julgar que a pesquisa proposta é relevante e que as estratégias adotadas são originais.

1.4 Objetivos

O enfoque desta tese é formular e desenvolver uma estratégia de enriquecimento que combine funções de Heaviside com funções de natureza trigonométrica segundo perspectiva do MEFG-E para simular a propagação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis, considerando problemas bidimensionais. Esta é, na visão da autora, a principal contribuição de seu trabalho. Objetiva-se que a(s) estratégia(s) assim desenvolvida(s) atenda(m) aos requisitos de acurácia, estabilidade e robustez (ZHANG; BABUŠKA; BANERJEE, 2016).

Especificamente, pretende-se contrapor o desempenho das estratégias propostas ao comportamento do MEFG/X tradicional na mesma classe de problemas. Além disso, tenciona-se avaliar o ganho real de flexibilidade em relação à malha trazido pela incorporação de funções trigonométricas neste tipo de simulação. Por fim, almeja-se investigar a atuação do MEFG-E em um modelo contínuo-descontínuo, que permita a transição, no contexto de simulação de propagação de trincas em meios parcialmente frágeis, entre modelos de dano de formulação não local e trincas discretas modeladas pelo método em questão com consideração de coesão - contribuição também inédita. Espera-se que o MEFG-E demonstre acurácia, estabilidade e robustez compatíveis com seu desempenho em outros tipos de problemas publicados pela literatura.

1.5 Metodologia e Organização do Texto

A pesquisa aqui apresentada, de natureza teórico-computacional, se iniciou a partir de uma revisão da literatura, que permitiu a definição do escopo do tema, bem como o levantamento de possíveis lacunas - como a inexistência de trabalhos conhecidos que empregassem o MEFG-E na simulação de trincas com modelo de zona coesiva e com enriquecimento trigonométrico - que norteariam a sequência do trabalho a ser realizado. Esta revisão é apresentada na sequência deste capítulo introdutório, no capítulo 2.

Uma vez definido o tema, era preciso avaliar a viabilidade da realização da pesquisa. Por isso, previamente à apresentação do projeto de tese, buscou-se construir a fundamentação teórica acerca das equações que norteariam a integração da trinca com modelo de zona coesiva com outras funções de enriquecimento que não as de Heaviside. Estas formulações, além de equacionamentos relativos ao MEFG/X e ao MEFG-E, o problema de valor de contorno e as funções de enriquecimento empregadas são apresentados no capítulo 3.

Feito isso, procedeu-se à implementação da flexibilização do cômputo das funções de salto no contexto do sistema computacional empregado no trabalho, o INSANE, de forma a permitir o uso de outras funções de Heaviside neste tipo de simulação. Tal implementação

foi verificada, e os experimentos numéricos dela resultantes são apresentados no capítulo 4.

Antes de se prosseguir para a implementação do modelo numérico almejado, julgou-se relevante verificar se a discussão acerca de estabilidade e robustez do condicionamento das abordagens que empregavam MEFG/X e MEFG-E era de fato relevante, ou seja, se com as funções de enriquecimentos propostas havia de fato deterioração no condicionamento. Para tal, propôs-se um experimento numérico simples, sem valor em termos de representação física, mas que permitiu avaliar o crescimento do número de condicionamento das matrizes de rigidez associadas ao problema com o refinamento h . Além disso, fez-se um estudo de robustez das funções consideradas alterando a posição da trinca em relação à malha. Tais resultados também são apresentados no capítulo 4.

De posse das conclusões tiradas com os experimentos preliminares, o modelo coesivo que considera o meio linear elástico foi enfim implementado e testado, para diferentes combinações de enriquecimento do MEFG/X e do MEFG-E, em alguns experimentos numéricos. Os resultados obtidos para as abordagens que empregavam o enriquecimento trigonométrico foram comparados àqueles das abordagens que empregavam enriquecimentos de Heaviside - mais simples, mas teoricamente mais dependentes em relação à malha. Toda essa discussão foi conduzida no capítulo 5.

Almejando uma contribuição mais ampla, decidiu-se dar um passo além e combinar o modelo coesivo proposto com modelos distribuídos de dano que empregassem formulações não locais baseadas em regularização. As funções de enriquecimento empregadas nestes experimentos foram selecionadas com base nos resultados do capítulo 5. Foi preciso também nesta etapa pesquisar uma fundamentação teórica sólida que provesse a matemática que representasse devidamente o comportamento físico na transição dos modelos contínuo e discreto. Estas formulações foram também incluídas no capítulo 3. Os resultados destes experimentos, por sua vez, são apresentados no capítulo 6.

Em todo o processo, a revisão da literatura foi, de certo modo, uma etapa contínua, já que diferentes obstáculos se apresentaram e foi preciso recorrer ao conhecimento científico já estabelecido para fundamentar possíveis soluções. Finalizados os experimentos, foram identificadas as lacunas que ainda persistem como sugestão de trabalhos futuros, além de determinadas as limitações do modelo e tiradas as conclusões possíveis sobre os resultados. Estas considerações finais foram reunidas no capítulo 7.

Por fim, o apêndice A oferece um panorama dos segmentos pertinentes a este trabalho dentro do sistema INSANE, bem como das implementações realizadas ao longo de todo o processo de execução da tese. Além disso, o apêndice B traz, para o leitor interessado, o comportamento gráfico das funções de enriquecimento dispostas no capítulo 3.

2 Estado da Arte

Com a finalidade de contextualizar o tema proposto para esta tese, bem como sua relevância, inserindo-o no âmbito dos trabalhos e das discussões recentes da literatura, é disposta neste capítulo uma breve revisão bibliográfica. Na seção 2.1 são apresentados, do ponto de vista de desenvolvimento histórico-científico, os métodos que serão investigados durante a elaboração da tese: o MEFG/X (seção 2.1.1) e o MEFG-E (seção 2.1.2). Tendo em vista que o objetivo desta tese é aplicar estas abordagens a problemas envolvendo a propagação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis, a seção 2.2 discute ainda algumas dessas aplicações do MEFG/X e seus derivados a este tipo de problema.

2.1 Métodos Baseados em Malhas de Elementos Finitos com Enriquecimento Extrínseco

Fries e Belytschko (2010) afirmam que existem duas abordagens fundamentalmente distintas para representar a aproximação de soluções não suaves. A primeira estratégia se baseia no uso de espaços polinomiais para a simulação deste tipo de comportamento, e geralmente se apoia na geração de malhas que precisam se conformar às descontinuidades. Estas malhas demandam ainda refinamento nas proximidades de singularidades e altos gradientes e, a fim de representar a evolução do fenômeno em estudo, o remalhamento também seria necessário. Um exemplo clássico deste tipo de abordagem é o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A segunda estratégia, por sua vez, se apoia no enriquecimento do espaço de aproximação polinomial, estendendo-o de tal forma que os comportamentos não-suaves possam ser modelados independentemente da configuração da malha. Quando este enriquecimento é realizado a partir da *substituição*, total ou parcial, das funções de forma do espaço de aproximação polinomial por funções de forma especiais capazes de representar o comportamento não suave, a abordagem é classificada como de enriquecimento intrínseco (FRIES; BELYTSCHKO, 2010). Este tipo de abordagem não altera o número de funções de forma, de graus de liberdade ou de incógnitas. Por outro lado, quando o enriquecimento é realizado pela *adição* de tais funções especiais ao espaço de aproximação polinomial, tem-se um método de enriquecimento extrínseco.

Os métodos tratados nesta seção - o MEFG/X e suas versões “estáveis”, MEFG-E - se enquadram nesta última categoria, mais especificamente, de métodos que utilizam a estratégia de enriquecimento extrínseco baseados em malhas de elementos finitos.

2.1.1 MEFG/X

Duarte, Babuška e Oden (2000) consideram que o MEFG/X foi proposto de forma independente por Babuška, Caloz e Osborn (1994), Melenk e Babuška (1996), Babuška e Melenk (1997), sob denominações de Método dos Elementos Finitos Especiais, Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade e Método dos Elementos Finitos Generalizados, respectivamente; e por Duarte e Oden (1996b), como formulação do método das nuvens, e Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998), como formulação híbrida do MEF. As primeiras ocorrências da denominação “Método dos Elementos Estendidos”, por sua vez, ocorreram em Moës, Dolbow e Belytschko (1999) e Belytschko e Black (1999). De acordo com Belytschko, Gracie e Ventura (2009), as diferenças entre as denominações MEFG (proposta pela escola do Texas, Oden e Duarte (1997)) e MEFX (empregada na escola de Northwestern) se deram em função de que, nos primeiros trabalhos do MEFG, o enriquecimento era realizado de forma global, em todo o domínio, enquanto nas primeiras publicações do MEFX tais funções seriam aplicadas apenas localmente. No entanto, já no trabalho de Duarte, Babuška e Oden (2000) pode ser encontrada uma aplicação do MEFG com enriquecimento local, de tal forma que, como apresentado no capítulo 1, as abordagens podem ser consideradas equivalentes (BELYTSCHKO; GRACIE; VENTURA, 2009).

Desde sua proposição, o MEFG/X ganhou popularidade e tem sido aplicado com sucesso a inúmeros problemas de engenharia - sobretudo àqueles que escapam a uma eficiente simulação do MEF - como a simulação da propagação de trincas, localização e dano, problemas envolvendo discordâncias, interfaces, interação fluido-estrutura, entre outros. Os artigos revisionais de Belytschko, Gracie e Ventura (2009) e Fries e Belytschko (2010) podem ser citados como referências para exemplificar estas várias aplicações.

Além de destacar os variados ramos em que a utilização do MEFG/X se consolidou com relativo sucesso, convém salientar também o desenvolvimento histórico-científico das tentativas de contornar suas limitações. Esta seção se centrará, em especial, nas limitações já abordadas no capítulo 1. As discussões relativas ao MEFG-E, no entanto, enquanto abordagem proposta com este objetivo, em razão de sua importância nesta tese, serão melhor desenvolvidas na seção 2.1.2.

Como mencionado no capítulo 1, a questão do mau condicionamento do MEFG/X é conhecida desde as primeiras publicações envolvendo o método. Por conseguinte, uma série de trabalhos mostrou preocupação em superar esta limitação. De fato, em Strouboulis, Babuška e Copps (2000), por exemplo, já se propõe uma metodologia para lidar com a dependência linear introduzida por algumas classes de enriquecimento utilizadas no âmbito do MEFG/X, a partir de uma modificação da estratégia de solução. Esta modificação é empregada também em Duarte, Babuška e Oden (2000), após a realização

de um procedimento de transformação diagonal sobre o sistema de equações. A utilização de robustas técnicas de pré-condicionamento também pode ser verificada em Béchet et al. (2005) e Menk e Bordas (2011), com o objetivo de melhorar o condicionamento em problemas contendo trincas ou interfaces de materiais. Loehnert (2014), por sua vez, propõe o emprego da decomposição em autovalores da matriz de rigidez de um elemento, aliado à ortogonalização de seus autovetores, como caminho para alcançar a estabilidade com o MEFG/X. Todas estas abordagens, assim como outras dispostas em Gupta et al. (2015), lidaram com a questão do mau condicionamento no contexto do MEFG/X, segundo estes autores, com sucesso limitado.

Outras estratégias, por outro lado, se fundamentaram na remoção da dependência linear a partir da ortogonalização da base de funções de enriquecimento utilizada (SILLEM; SIMONE; SLUYS, 2015; AGATHOS; BORDAS; CHATZI, 2019). É válido ainda mencionar o trabalho de Tian (2013), responsável pela construção de um método derivado do MEFG/X e denominado *Improved XFEM* (*iXFEM*) - MEFG/X Aprimorado, em tradução livre. Esta estratégia consiste no desenvolvimento de um MEFG/X sem graus de liberdade adicionais oriundos do uso de funções de enriquecimento, a partir de uma aproximação globalmente interpoladora gerada por meio de um método dos mínimos quadrados local. Tal abordagem foi aplicada a problemas da mecânica da fratura bidimensionais em Tian e Wen (2015) e tridimensionais em Tian, Wen e Wang (2019). Nesta classe de problemas, houve uma combinação entre o enriquecimento extrínseco característico da formulação convencional do MEFG/X e representado, nestes trabalhos, pelas funções de Heaviside, e a estratégia de enriquecimento intrínseco desenvolvida pelos autores mediante a incorporação de funções singulares na base de funções dos mínimos quadrados, de forma similar ao realizado com a finalidade de construir partições da unidade para o Método de Galerkin Livre Enriquecido (EFGM, em inglês) por Fleming et al. (1997) e para o MEFX intrínseco por Fries e Belytschko (2006). Os experimentos numéricos apresentados naquelas publicações demonstram que o MEFG/X Aprimorado conduz a aproximações de boa qualidade, sem penalizar significativamente o condicionamento do sistema, embora esta abordagem ainda demande tratamento na região dos elementos de mistura.

Assim como a questão do mau condicionamento, a limitação relativa aos elementos de mistura no contexto do MEFG/X motivou o desenvolvimento de estratégias a fim de minimizar ou contornar este problema. A utilização de bases de funções adicionais hierárquicas, que requer o emprego de graus de liberdade extras, foi proposta por exemplo em Chessa, Wang e Belytschko (2003). Estes autores lidam ainda com o uso de elementos de mistura com um campo de deformações assumido, com o objetivo de eliminar os termos indesejados que surgiriam na região de mistura analiticamente. A supressão dos elementos de mistura a partir do acoplamento da região enriquecida com a região na qual existe a

aproximação convencional do MEF, por sua vez, pode ser encontrada nos trabalhos de Laborde et al. (2005), Gracie, Wang e Belytschko (2008) e Chahine, Laborde e Renard (2011). Nestes, a continuidade entre as regiões foi garantida, respectivamente, ponto a ponto nos nós, via um método de Galerkin descontínuo e através de multiplicadores de Lagrange. Outra estratégia utilizada com alguma frequência para lidar com esta questão é o Corrected XFEM (C-XFEM) ou MEFG/X Corrigido (MEFG/X-C) (FRIES, 2008), no qual funções rampa, variando linearmente de 1 a 0, são empregadas nos elementos de mistura. O valor 1 é assumido nos nós enriquecidos, enquanto o valor 0 é utilizado nos nós desprovidos de enriquecimento. Outras abordagens utilizadas no trato dos elementos de mistura encontram-se listadas nos trabalhos de Fries e Belytschko (2010), Lins (2015) e Saxby e Hazel (2019). Entretanto, nem sempre a implementação destas abordagens é simples e direta nos códigos existentes para o MEFG/X ou a convergência ótima é garantida com sua utilização (ARAGÓN; DUARTE; GEUBELLE, 2010).

2.1.2 MEFG-E

Desde sua proposição nos trabalhos de Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012), bem como sua extensão para problemas bi e tridimensionais da mecânica da fratura em Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), em razão de suas potencialidades, o MEFG-E tem sido uma presença constante nas publicações recentes relativas a métodos baseados em malhas de elementos finitos com enriquecimento extrínseco. De fato, além de prometer manter as principais qualidades do MEFG/X, que consolidaram a utilização desta abordagem em uma gama de problemas de engenharia (seção 2.1.1), a estratégia estável permitiria contornar duas importantes limitações deste método: o mau condicionamento e o efeito prejudicial da presença de elementos de mistura. As abordagens desenvolvidas com esse objetivo nos trabalhos listados na seção 2.1.1, ao contrário do MEFG-E, em geral se propunham a lidar com apenas uma das limitações. Além disso, a modificação proposta pelo MEFG-E para cômputo do enriquecimento é relativamente simples, permitindo sua fácil implementação a partir da extensão de arcabouços computacionais existentes para o MEFG/X.

Como visto, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) definem como uma abordagem estável do MEFG/X - ou como um MEFG-E - um método que continue a prover as taxas ótimas de convergência obtidas pelo MEFG/X e cujo condicionamento, em termos de taxa de crescimento, não é pior que o verificado para o MEF, independentemente da configuração da malha de elementos finitos. Apesar das provas matemáticas sólidas fornecidas por Babuška e Banerjee (2012) relativas à formulação clássica do MEFG-E para o caso unidimensional, atender a estas condições com esta abordagem em outras dimensões nem sempre se mostrou trivial. De fato, Gupta et al. (2013) conseguem obter em seu trabalho, para determinadas configurações da malha, bons resultados para o condicionamento com

o MEFG-E, mas precisaram modificar as funções de Heaviside, acrescentando termos lineares, a fim de garantir as taxas ótimas de convergência. No trabalho de Gupta et al. (2015), por sua vez, uma nova alteração na estratégia de enriquecimento é demandada, mediante o acréscimo de funções enriquecedoras polinomiais, segundo a perspectiva do MEFG/X, a fim de bem representar uma descontinuidade em problemas tridimensionais. Além disso, os autores admitem, a partir de seus experimentos, que o MEFG-E, em sua forma tradicional, nem sempre seria capaz de prover as mesmas taxas de crescimento para o número de condicionamento que as verificadas para o MEF, e que o condicionamento tanto do MEFG/X quanto do MEFG-E dependeriam da intensidade da “quase dependência linear” existente entre a base de funções de enriquecimento. Uma percepção anterior desse fato pode ter sido sugerida em Zhang, Banerjee e Babuška (2014), que propunham a utilização de uma partição da unidade diferente das funções lagrangianas do MEF, do tipo “*flat-top*” (GRIEBEL; SCHWEITZER, 2002), para a construção do espaço associado ao enriquecimento estável, a fim de evitar possíveis dependências lineares entre as funções de enriquecimento e a PU. Esta abordagem, em razão das taxas superiores de convergência obtidas pelos autores, foi por eles denominada MEFG-E de alta ordem. Zhang, Babuška e Banerjee (2016) mostram a partir de um problema de Poisson bidimensional que, de fato, as funções de Heaviside propostas por Gupta et al. (2013) não são robustas no que concerne à posição da trinca em relação à malha, podendo conduzir a valores elevados do número de condicionamento. Estes autores propõem modificações nestas funções e nas funções de enriquecimento singulares utilizadas nas proximidades da ponta da trinca, além de procedimentos de ortogonalização local, com o objetivo de atender aos critérios de caracterização de uma abordagem estável do MEFG/X. Na sequência deste trabalho, Zhang, Banerjee e Babuška (2018) estabelecem mais uma exigência a fim de definir um SSGFEM (*Strongly Stable Generalized Finite Element Method*, em inglês) - MEFG/X Intensamente Estável, em tradução livre: a necessidade de que o número de condicionamento da submatriz de rigidez relativa aos termos extras acrescentados pelo enriquecimento seja limitado. Os autores demonstram a partir de seus experimentos que, utilizando um procedimento local de ortogonalização, é possível atender a todos os requisitos para classificar um método como estável ou intensamente estável em um problema de interface.

Além destes, outros trabalhos recentes investigaram o desempenho do MEFG-E em problemas variados. Sauerland e Fries (2013), por exemplo, aplicam o MEFG-E para representar a interface e simular a interação fluido-estrutura, enquanto Li (2014) contrapõe as performances do MEFG/X e do MEFG-E, em um problema uni e em outro bidimensional, no contexto de uso do enriquecimento polinomial. Em Lins et al. (2015), por sua vez, o MEFG-E é utilizado na construção de um estimador de erro *a posteriori*. Gupta (2014), Fillmore, Gupta e Duarte (2018), Fonseca (2019), Fonseca et al. (2020), Novelli et al.

(2020) e Paiva (2023) estudam alguns efeitos da lógica do enriquecimento estável quando empregada junto à estratégia global-local. Em particular, destaca-se o trabalho de Novelli et al. (2020), que empregou o MEFG-E sobre o enriquecimento global-local na utilização de uma nova metodologia para simular a propagação de trincas, considerando a não-linearidade do material apenas no problema global. Por outro lado, Paiva (2023), além de empregar o MEFG-E no contexto da estratégia global-local, utiliza o método também para a construção de um modelo contínuo-descontínuo, sem a presença de enriquecimento trigonométrico ou consideração de coesão. Além disso, o autor estuda os efeitos da alteração da PU para construção do espaço de enriquecimento do MEFG-E, usando a PU *flat-top*. Empregando também a PU *flat-top* para a construção do espaço de enriquecimento do MEFG-E, Sato (2017), Sato, Neto e Proença (2018) e Ramos e Proença (2018) aplicam o assim construído MEFG-E de Alta Ordem a problemas bidimensionais, usando diferentes estratégias de enriquecimento. Estes autores constatarem em seus experimentos numéricos que os números de condicionamento obtidos por esta abordagem, assim como sua taxa de crescimento, são da mesma ordem que aqueles do MEF, além de sugerirem que o emprego do MEFG-E de Alta ordem produziu ganhos favoráveis de acurácia quando contrapostos à solução do MEFG/X. Silva et al. (2022) aplicaram, por sua vez, esta abordagem a um problema de vibração livre.

Ainda na linha de propor a utilização de uma PU distinta para a construção do espaço de enriquecimento do MEFG-E de forma a evitar dependências lineares entre esta e as funções enriquecedoras, Zhang e Babuška (2020), Cui e Zhang (2020), e Cui et al. (2022) sugerem a utilização de uma partição da unidade baseada no uso de polinômios de Hermite para o estabelecimento de seus MEFG-Es, aplicados, respectivamente, a um problema de interface de segunda ordem e a problemas de mecânica da fratura. Estes trabalhos sugerem ainda a utilização de uma análise de componente local principal (em inglês, LPCA) para tratar nós onde coexista mais de um tipo de função enriquecedora. Wu e Li (2015a) e Wu e Li (2015b) utilizam o MEFG-E na simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva, a partir de uma modificação das funções de Heaviside padrão, que consiste na alteração da formulação do cômputo do enriquecimento estável através da inserção de um parâmetro de estabilização. Estes autores conseguem, a partir desta estratégia, bons resultados neste tipo de problema, em que a trinca com modelo de zona coesiva propaga-se em meio de comportamento linear elástico, tanto em termos de condicionamento quanto em termos de acurácia, quando os resultados são comparados aos obtidos pelo MEFG/X. O MEFG-E também foi aplicado para simular a propagação de trincas com modelo de zona coesiva a partir de diferentes funções de Heaviside em Oliveira, Barros e Campos (2020) e com a utilização de enriquecimento trigonométrico em Oliveira, Barros e Penna (2022), como parte do desenvolvimento desta tese. A fim de contornar a falta de robustez, no que concerne à configuração da malha de

elementos finitos, verificada para as funções de Heaviside lineares propostas por Gupta et al. (2013), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019) propõem a utilização de um interpolante descontínuo, que seria uma generalização do interpolante de elementos finitos empregado no cálculo do enriquecimento estável (BABUŠKA; BANERJEE, 2012), no âmbito de MEFG-E, além de estudarem a influência de se utilizarem as funções p hierárquicas no contexto do MEFG/X para problemas da mecânica da fratura. Este interpolante é também discutido nos trabalhos de Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020) e Bento, Proença e Duarte (2022), em que se objetiva garantir uma convergência de ordem superior para problemas de Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Os trabalhos diferem quanto à escolha das PUs para construção do espaço de enriquecimento, e apresentam a limitação já citada no capítulo 1 da demanda por modificação da malha (algoritmo *node-snapping*) para garantir a estabilidade numérica em termos de condicionamento. Agathos, Chatzi e Bordas (2019), por outro lado, investigam uma combinação de técnicas, entre as quais incluem o uso do enriquecimento estável, a fim de melhorar as propriedades de convergência e condicionamento de métodos baseados numa partição da unidade de elementos finitos enriquecidos. Jansari et al. (2019) propõem uma combinação entre o MEFG-E e o *Smoothed Finite Element Method* (SFEM) - Método dos Elementos Finitos Suave. Desta combinação, surge uma nova abordagem, intitulada pelos autores *Smoothed Stable Extended Finite Element Method* (S²XFEM) - MEFG-E suave. Saxby e Hazel (2019) e Zhu, Zhang e Liu (2020) aplicam o MEFG-E a problemas de interface, enquanto Oliveira et al. (2019) investigam o enriquecimento de Heaviside linear proposto por Gupta et al. (2013) em problemas bidimensionais da mecânica da fratura. Estes autores verificam, empiricamente, que de fato há certa falta de robustez, relativamente à malha de elementos finitos, e instabilidade no uso desta função de enriquecimento em problemas da elasticidade, de forma similar ao verificado para problemas de Poisson por Zhang, Babuška e Banerjee (2016). Oliveira et al. (2019), no entanto, constata também em seus experimentos numéricos que, apesar destas limitações, essa estratégia de enriquecimento se mostra significativamente acurada, principalmente no problema com trinca em modo misto e material elástico linear, quando comparada ao MEFG/X. O MEFG-E segue ainda sendo aplicado a problemas com descontinuidades (fortes ou fracas), como aqueles que lidam com interfaces de diversas naturezas. Além dos já citados trabalhos de Li, Cui e Zhang (2022) e Jiang, Nian e Zhang (2022), que lidam, respectivamente, com o tratamento de trincas interfaciais em bi-materiais e com a combinação com uma técnica de redes neurais para solução de um problema de interface, podem ser mencionadas, mais recentemente, as contribuições de Gong, Li e Zhang (2024), Gong e Zhang (2024a) e Gong e Zhang (2024b) que discutem, no contexto do MEFG-E aplicado a esse tipo de problema, as funções de enriquecimento empregadas, a diagonalização da matriz de massas e uma técnica de solução adequada ao método.

Deste modo, fica claro que o MEF_G-E tem sido objeto de estudos, sob perspectivas variadas, durante os últimos anos. Embora várias discussões acerca de seu desempenho já tenham sido iniciadas, investigações mais profundas, em searas distintas, ainda se fazem necessárias.

2.2 Aplicações do MEF_G/X em problemas da mecânica da fratura com modelos coesivos

Vários dos trabalhos citados na seção 2.1 se referem a aplicações do MEF_G/X e seus derivados em problemas da mecânica da fratura. De fato, o MEF_G/X se consolidou de tal forma na simulação de problemas desta natureza que foi incluído, a fim de realizar este tipo de análise, nos últimos anos, em softwares comerciais como ANSYS e Abaqus. Pretende-se aqui apresentar um breve histórico do desenvolvimento deste método no âmbito específico da simulação envolvendo modelos com zona coesiva, primeiramente introduzidos por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) para materiais elastoplásticos e depois aplicados por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) a materiais parcialmente frágeis.

As complexidades matemáticas inerentes à Zona de Processo de Fratura (ZPF), região em que acontece o processo de degradação não linear que precede a formação da fissura, de grande importância para modelos coesivos, faz com que este tipo de simulação seja realizada frequentemente no contexto de métodos numéricos, como o MEF. As limitações deste, no entanto, produziram, de acordo com Wang e Waisman (2018), o desenvolvimento de novas formulações de elementos finitos que viabilizassem a solução deste tipo de problema. Alguns exemplos desses desenvolvimentos que podem ser citados, segundo estes autores, são a formulação de elementos finitos singulares do tipo quarter-point (HENSHELL; SHAW, 1975), a abordagem da descontinuidade embutida (SIMO; OLIVER; ARMERO, 1993), o *Numerical Manifold Method* (WU; CAI, 2014), os métodos de Galerkin descontínuos (ABEDI; HABER; CLARKE, 2017) e o próprio MEF_G/X, que ganhou destaque principalmente por minimizar a necessidade de conformação da malha à descontinuidade, reduzindo o custo computacional, uma vez que o remalhamento a fim de representar a propagação de uma trinca deixou de ser demandado.

As primeiras ocorrências do uso de leis coesivas com o MEF_G/X, por sua vez, se deram nos trabalhos de Wells e Sluys (2001) e Moës e Belytschko (2002). Na primeira publicação, foram empregadas como enriquecimento para representar a descontinuidade apenas funções de Heaviside. A direção de propagação da trinca, naquele caso, foi obtida a partir da direção perpendicular à principal de uma medida não-local do campo de tensões. Em Moës e Belytschko (2002), por sua vez, são introduzidas como enriquecimento funções trigonométricas que representam o comportamento assintótico nas proximidades de trincas com modelo de zona coesiva. Neste caso, o critério de propagação assumido se baseava no critério da máxima tensão circunferencial (ERDOGAN; SIH, 1963). Desde então,

uma série de trabalhos sobre modelos com zona coesiva foi desenvolvida no âmbito do MEFG/X. Citam-se aqui apenas algumas contribuições representativas, visto que o tema ainda é continuamente discutido na literatura: em Meschke e Dumstorff (2007) e Dumstorff e Meschke (2007), por exemplo, encontram-se estudos comparativos acerca de diferentes critérios de propagação da trinca. Ferté, Massin e Moës (2016) aplicam os modelos coesivos a problemas tridimensionais, enquanto Zhang, Wang e Yu (2013) fornecem aplicações em larga escala de problemas desta natureza na engenharia de estruturas. Wang e Waisman (2018) propõem um novo método de comprimento de arco que possa bem representar a trajetória de equilíbrio em problemas com propagação de trincas com modelo de zona coesiva via MEFG/X. Os autores discutem ainda a influência da expansão da base de funções de enriquecimento utilizada para representar o comportamento assintótico nas proximidades da trinca, incluindo funções singulares durante a propagação instável. Pode-se destacar ainda os trabalhos de Wu e Li (2015a) e Wu e Li (2015b), relativos à proposição de uma nova função de Heaviside para simular a propagação de trincas com modelo de zona coesiva, e de Oliveira, Barros e Campos (2020) e Oliveira, Barros e Penna (2022), já mencionados na seção 2.1.2.

Visando reunir as potencialidades dos modelos contínuo e de fratura discreta, já abordadas no capítulo 1, o MEFG/X e seus derivados também foram empregados como ferramentas importantes para a elaboração de modelos contínuos-descontínuos. A ideia de se realizar a transição entre o dano difuso e a trinca discreta é muitas vezes atribuída ao trabalho pioneiro de Planas, Elices e Guinea (1993), no qual uma formulação integral não local é empregada como ponte entre os campos descontínuo e contínuo. Outra contribuição de destaque para a discussão dos conceitos iniciais relativos a este processo vem com Mazars e Pijaudier-Cabot (1996), que propuseram que a transição entre o modelo de dano e o modelo de fratura discreta se desse a partir de uma “trinca equivalente”, baseada justamente na equivalência em relação à energia dissipada nos dois modelos. Em termos de MEFG/X e derivados, pode-se mencionar como precursor o trabalho de Jirásek e Zimmermann (2001), que combinava um modelo de fissuração distribuída a um modelo de trinca embutida (em inglês, *embedded crack model*), no qual a energia transferida para o modelo coesivo consistia na diferença entre a energia de fratura do elemento e a energia dissipada pelo modelo de fissuração distribuída. Simone, Wells e Sluys (2003), por sua vez, propuseram um modelo baseado no MEFG/X que operasse a passagem entre um modelo de dano e o modelo de fratura discreta apenas quando os valores de dano se aproximassem da unidade, evitando, assim, considerações sobre a conservação da energia (WANG; WAISMAN, 2016). Procedimento similar é adotado em De Borst et al. (2004), Moës et al. (2011), Evangelista e Moreira (2020) e em Paiva (2023). Neste trabalho, no entanto, além do MEFG/X, utiliza-se o MEFG-E associado a diferentes funções enriquecedoras (Heaviside ou de natureza polinomial) ou usando a

estratégia global-local. Tais procedimentos, no entanto, ocorrem sem o emprego de funções trigonométricas e, tendo em vista a premissa adotada, sem consideração de coesão. Comi, Mariani e Perego (2007) apresentam, pela primeira vez, a transição entre um modelo de dano isotrópico não local e um modelo coesivo do MEFG/X. A transição entre os modelos é deflagrada quando o dano atinge certo valor crítico, baseado no tamanho característico do elemento finito e no número de elementos necessários para resolver a banda de localização (ROTH; LÉGER; SOULAÏMANI, 2015). Para o cômputo deste parâmetro, os autores partem da propagação de uma onda de tensões harmônica numa barra uniformemente deformada e de comprimento infinito. A energia atribuída ao modelo coesivo é entendida como a energia ainda não dissipada pelo modelo não local na banda de dano. Roth, Léger e Soulaïmani (2015), por sua vez, sugerem o uso de uma solução numérica para promover a devida equivalência energética entre um modelo de dano e a simulação da trinca na ZPF via MEFG/X. O procedimento dos autores difere mais singularmente na proposição da lei coesiva que, apesar de assim como em Comi, Mariani e Perego (2007), ter natureza exponencial, inicia-se de uma abertura de trinca não nula quando o modelo atinge o dano crítico. Com isso, Roth, Léger e Soulaïmani (2015) apresentam mais equações que condicionam a transição, garantindo as equivalências de tensões e de energias dissipadas antes e após o dano crítico entre os dois modelos. Wang e Waisman (2016) também acoplam um modelo não local de dano a um modelo coesivo baseado no MEFG/X, empregando um arcabouço “termodinamicamente equivalente”, em que a energia dissipada é calculada numericamente, e atribuída de forma fraca. Para tal, os autores trabalham com um parâmetro baseado na energia de fratura multiplicado por outro fator de obtenção heurística. Cabe destacar que tanto os trabalhos de Comi, Mariani e Perego (2007) e Wang e Waisman (2016) quanto esta tese empregam modelos de dano não locais baseados em formulação integral. Um modelo contínuo-descontínuo que simule o dano não local a partir de uma formulação baseada em gradientes avançados com consideração de coesão já foi desenvolvido (CUVILLIEZ et al., 2012), mas não se conhece nenhuma aplicação desta natureza no âmbito do MEFG/X. Por fim, pode-se mencionar ainda o trabalho de Li e Chen (2017), que suprime os graus de liberdade associados ao enriquecimento de Heaviside do MEFG/X do vetor de deslocamentos, criando o modelo de dano coesivo estendido (em inglês, *extendend cohesive damage model, ECDM*).

Diante do exposto, pode-se observar que, a despeito de suas potencialidades, o MEFG-E foi ainda pouco aplicado para simular a propagação de trincas com modelo de zona coesiva. No entendimento da autora, o método nunca foi empregado nesse contexto com a utilização de enriquecimento trigonométrico. Nota-se ainda que sua utilização em modelos contínuo-descontínuos em particular foi bastante incipiente. Desconhece-se inclusive qualquer aplicação do MEFG-E em modelos desta natureza que considere equivalência energética a partir de um valor de dano crítico, e/ou em presença do enriquecimento

trigonométrico.

3 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, as formulações pertinentes à tese são apresentadas. Inicia-se na seção 3.1 com as equações que definem o problema de valor de contorno (PVC) tratado neste trabalho. A seção 3.2, por sua vez, discute a formulação dos modelos distribuídos de dano aqui empregados, apresentando as equações de um modelo de dano isotrópico e de um modelo de dano ortotrópico, além das leis de evolução de dano e da formulação não local baseada em regularização adotadas. Na seção 3.3 faz-se uma explanação sobre os modelos coesivos empregados para representar a trinca propriamente dita, considerando as equações utilizadas para definição das tensões coesivas, os critérios de propagação e de definição de direção assumida pela trinca e a transição energética em termos da energia de fratura de modo I proposta para o modelo acoplado (contínuo-descontínuo). Por sua vez, a seção 3.4 traz as equações de aproximação construídas a partir de diversas funções de enriquecimento para o MEFG/X e para o MEFG-E. Por fim, a seção 3.5 apresenta a forma discreta das equações do problema formuladas na seção 3.2, além de discutir alguns aspectos da estratégia de integração numérica empregada nas simulações realizadas neste trabalho.

3.1 Formulação do Problema de Valor de Contorno

Seja o domínio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ em $\mathbb{R}^2$, cujo contorno é dividido em $\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^\sigma$ com $\partial\Omega^u \cap \partial\Omega^\sigma = \emptyset$ (Fig. 3.1). Os índices u e σ indicam, respectivamente, as regiões onde são aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann. Considere-se ainda uma trinca com contorno $\Gamma_c \subset \mathbb{R}^1$, com propagação gradual no domínio $\bar{\Omega}$ de tal forma que $\Gamma_c(t) \subseteq \Gamma_c(t + \Delta t)$, onde t é um pseudo-tempo. O contorno $\Gamma_c \subset \mathbb{R}^1$. O campo de deslocamentos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é descontínuo ao longo do contorno da trinca Γ_c , o que leva a um salto no campo de deslocamentos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, definido a partir da diferença entre os deslocamentos $\mathbf{u}^+$ em Γ_c^+ e $\mathbf{u}^-$ em Γ_c^- :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (3.1)$$

Restringindo a atenção a problemas quase estáticos sem forças de corpo, sob regime de pequenas deformações, e considerando que o contorno Γ_c pode ser dividido em duas parcelas, uma, Γ_{LT} , livre de tensões de superfície, e outra, Γ_{ZPF} , correspondente à zona de processo de fratura (ZPF), pode-se descrever o problema da mecânica da fratura da Fig. 3.1 a partir das seguintes equações:

Encontre $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{X}}(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega) \forall \delta \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ZPF}}} \delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\mathcal{X}}(\Omega)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω , construído com as funções de forma do método de aproximação utilizado e que atende às condições de contorno de Dirichlet (eq. (3.2)). $\tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ tal que $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em $\partial\Omega^u$, $\delta \mathbf{u}$ denota um campo de deslocamentos virtual, e $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\delta \mathbf{u}$ são descontínuos em Γ_c .

3.2 Formulação do Modelo Distribuído

O processo de surgimento ou “nucleação” de avanço de microfissuras e microvazios até a falha do material pode ser entendido como dano. A mecânica do dano contínuo estuda o comportamento macroscópico de um material, tratando-o como homogêneo. Para tal, define-se um “*Elemento Volumétrico Representativo*” (EVR), cuja magnitude deve permitir que o meio deteriorado possa ser assim considerado. Fisicamente, pode-se entender o dano como as deformações plásticas ou permanentes originadas a partir de uma deterioração das propriedades físicas do material. Diversos modelos constitutivos foram desenvolvidos a fim de descrever o dano a partir do estudo empírico deste processo (PENNA, 2011). Enquanto os modelos micromecânicos buscaram operar com variáveis que representassem a média dos defeitos microscópicos do material - o que incorreu em certa complexidade na identificação experimental das leis de evolução de dano -, os modelos fenomenológicos se centraram em variáveis de determinação mais simples que a densidade de microfissuras existente no material, representando o comportamento macroscópico do material.

Os modelos fenomenológicos procuram representar a degradação progressiva do módulo de elasticidade de um material em regime de pequenas deformações quando este é submetido a um estado de tensões/deformações superior a seu limite de resistência. Assim sendo, pode-se definir o parâmetro de dano ω como

$$\omega = 1 - \frac{E^{\omega}}{E^0} \quad (3.8)$$

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material íntegro e E^{ω} é o módulo de elasticidade do material degradado.

De acordo com De Borst e Gutiérrez (1999), a estrutura padrão de modelos constitutivos baseados na mecânica do dano se centra na seguinte relação tensão-deformação:

$$\sigma_{ij} = D^s_{ijkl}(q_m, \omega_{mn}, \Omega_{mnop}, \dots) \varepsilon_{kl}, \quad (3.9)$$

onde σ_{ij} é a componente ij do tensor de tensões, ε_{kl} é a componente kl do tensor de deformações, e D^s_{ijkl} é a componente $ijkl$ do tensor de rigidez secante que pode ser dependente de variáveis internas escalares (ω), vetoriais (q_m) ou tensoriais ($\omega_{mn}, \Omega_{mnop}$). O que diferencia a eq. (3.9) da elasticidade não-linear clássica é a dependência histórica introduzida por meio de uma função carga-descarga f que desaparece com o carregamento e é negativa em caso contrário (DE BORST; GUTIÉRREZ, 1999).

Para que possa ocorrer o crescimento do dano, o valor de f deve permanecer zero por um período infinitesimal, ou seja, $\dot{f} = 0$. A fim de que a teoria se complete, é preciso especificar as equações de evolução de dano adequadas (dependentes do material). Tais equações serão apresentadas na seção 3.2.3.

3.2.1 Modelo de Dano Isotrópico

Para o caso da evolução de dano isotrópico, Ladevèze (1983) *apud* De Borst e Gutiérrez (1999) propõe uma simplificação à eq. (3.9):

$$\sigma_{ij} = [(1 - \omega_1)G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) + (1 - \omega_2)K\delta_{ij}\delta_{kl}] \varepsilon_{kl}, \quad (3.10)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e K é o módulo volumétrico, degradados, respectivamente, pelas variáveis de dano escalar ω_1 e ω_2 . Outra simplificação consiste em assumir que G e K se degradam da mesma forma, o que resulta em

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega)D^e_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.11)$$

onde ω é a medida de dano que varia de zero (material íntegro) a 1,0 (máxima degradação) e D^e_{ijkl} representa a componente $ijkl$ do tensor de rigidez elástico de quarta ordem. A relação expressa pela eq. (3.11) é complementada pela definição de uma função de carregamento:

$$f = f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \kappa), \quad (3.12)$$

na qual $\tilde{\varepsilon}$ e $\tilde{\sigma}$ são, respectivamente, equivalentes escalares de deformações e tensões, e κ é uma variável histórica. A função de carregamento f e a taxa da variável histórica $\dot{\kappa}$ devem satisfazer às condições de Kuhn-Tucker para o carregamento e descarregamento e às condições de complementariedade e consistência, dadas por:

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad \text{com} \quad \kappa = \kappa_0, \quad (3.13)$$

em regime elástico, com κ_0 sendo o valor inicial de κ ,

$$f = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad (3.14)$$

em regime de carregamento de dano,

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad (3.15)$$

em processo de descarregamento, e

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad \text{com} \quad \kappa = \kappa_{max}, \quad (3.16)$$

em processo de recarregamento, com κ_{max} sendo o maior valor de κ já atingido na análise. As condições de complementariedade e consistência por sua vez são expressas como:

$$f \dot{\kappa} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{f} \dot{\kappa} = 0 \quad (3.17)$$

Diversas medidas de deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ foram propostas em diferentes trabalhos, entre os quais podem ser citados Mazars (1984) *apud* Lemaitre (1992), Simo e Ju (1987), Lemaitre (1992) *apud* De Borst e Gutiérrez (1999) e Ju (1990). Para o modelo de dano isotrópico empregado nos experimentos desta tese, no entanto, considerou-se a definição proposta por De Vree, Brekelmans e Van Gils (1995):

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k_r - 1}{2k_r(1 - \nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k_r} \sqrt{\frac{(k_r - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1^{\varepsilon^2} + \frac{12k_r}{(1 + \nu)^2} J_2^\varepsilon} \quad (3.18)$$

onde $k_r = f_c/f_t$ é um parâmetro de material que relaciona a diferença entre seus comportamentos à tração e à compressão (com f_t e f_c representando as resistências à tração e compressão, respectivamente), $I_1^\varepsilon = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é o primeiro invariante do tensor de deformação e $J_2^\varepsilon = (3\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}))/6$ é o segundo invariante do tensor de deformação desviadora. A

medida de $\tilde{\varepsilon}$ proposta por De Vree, Brekelmans e Van Gils (1995) foi adotada nesta tese no caso do modelo de dano isotrópico tanto por incorporar solicitações de tração e compressão quanto pela disponibilidade no software empregado para realização das simulações.

3.2.2 Modelo de Dano Ortotrópico

O modelo de dano ortotrópico empregado nas simulações realizadas nesta tese se centra nas formulações desenvolvidas por De Borst e Gutiérrez (1999), cuja proposta considera dano apenas na direção principal de tração. Observa-se que as notações empregadas para as variáveis no trabalho de referência, assim como na seção 3.2.1, foram preservadas. Assim sendo, a relação de rigidez secante é expressa por

$$\{\sigma_{ns}\} = [D^s_{ns}]\{\varepsilon_{ns}\}, \quad (3.19)$$

onde $\{\sigma_{ns}\} = [\sigma_{nn}, \sigma_{ss}, \sigma_{ns}]^T$ e $\{\varepsilon_{ns}\} = [\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{ss}, \varepsilon_{ns}]^T$. $[D^s_{ns}]$ é o tensor de rigidez secante local em sua forma matricial, definido como:

$$[D^s_{ns}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\omega_1)E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{(1-\omega_1)\nu E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ \frac{(1-\omega_1)\nu E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega_2)G \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que ω_1 e $1-\omega_2$ representam, respectivamente, a variável de dano na direção de tração e compressão e a degradação da rigidez ao cisalhamento. A expressão $1-\omega_2$ pode ser entendida como o fator de retenção ao cisalhamento.

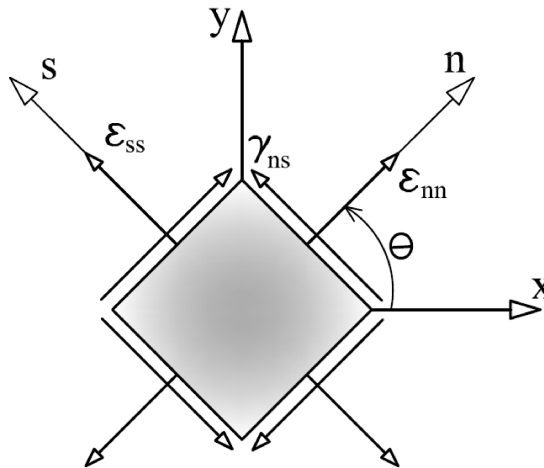


Figura 3.2 – Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s) (PENNA, 2011).

Rotacionando o sistema de coordenadas globais de um ângulo θ partindo do eixo X até um eixo n (Fig. 3.2), as componentes $\{\sigma_{ns}\}$ e $\{\varepsilon_{ns}\}$ no sistema local podem ser relacionadas às suas correspondentes no sistema global a partir das matrizes de transformação de deformações $[T^\varepsilon]$ e de tensões $[T^\sigma]$. Desta feita, tem-se:

$$\{\sigma_{ns}\} = [T^\sigma(\theta)]\{\sigma_{xy}\} \quad (3.21)$$

e

$$\{\varepsilon_{ns}\} = [T^\varepsilon(\theta)]\{\varepsilon_{xy}\}. \quad (3.22)$$

Substituindo as eqs. (3.21) e (3.22) na eq. (3.19), define-se a relação tensão deformação secante relativa ao sistema global de coordenadas como

$$\{\sigma_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)]^{-1}[D^s_{ns}][T^\varepsilon(\theta)]\{\varepsilon_{xy}\}. \quad (3.23)$$

Esta equação pode ser aplicada tanto ao modelo de dano com direção fixa quanto ao modelo de dano com direção rotativa. Para o primeiro caso, que é aquele considerado neste trabalho, a relação tangente tensão-deformação é obtida a partir da derivada da eq. (3.23):

$$\{\dot{\sigma}_{xy}\} = [T^\sigma(\theta_0)]^{-1}([D^s_{ns}] - [\Delta D^s_{ns}])[T^\varepsilon(\theta_0)]\{\dot{\varepsilon}_{xy}\}. \quad (3.24)$$

com θ_0 sendo o ângulo fixo da direção de dano e $[\Delta D^s_{ns}]$ definido por

$$[\Delta D^s_{ns}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ \nu d_{11} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde

$$d_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nn}} \frac{E(\varepsilon_{nn} + \nu \varepsilon_{ss})}{(1 - (1 - \omega_1)\nu^2)^2} \quad (3.26)$$

e

$$d_{31} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nn}} G_{\gamma_{ns}}, \quad (3.27)$$

com $\partial \kappa / \partial \varepsilon_{nn} = 1$ sob carregamento e 0 em caso contrário.

Deve-se destacar que, no modelo descrito nesta seção, a medida de deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ empregada no software utilizado neste trabalho é a deformação principal avaliada no ponto de integração em estudo.

3.2.3 Leis de Evolução de Dano

Embora as formas mais comuns sejam funções exponenciais, as equações que descrevem a evolução de dano podem ter diferentes expressões de variação, empregando também, por exemplo, formas lineares e polinomiais para representar o processo de degradação. Neste trabalho, são utilizadas duas funções de evolução de dano distintas - uma de natureza exponencial, outra de base polinomial - cujas equações são apresentadas nas seções a seguir.

3.2.3.1 Função de Evolução do Dano com Variação Exponencial

A forma exponencial mais tradicional, aqui também empregada, é expressa por

$$\omega(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}]; \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}] + \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [\alpha \beta e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}], \quad (3.29)$$

onde $\tilde{\varepsilon}$ é a medida de deformação equivalente, κ_0 é o valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia, α é o valor máximo de dano admissível para o material e β é a intensidade de evolução do dano.

3.2.3.2 Função de Evolução do Dano com Variação Serpentina

Baseando-se nos limites de tensão e deformação para tração e compressão, Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986) propuseram uma relação tensão-deformação a partir de uma forma serpentina (em inglês, *serpentine curve*):

$$\sigma_i = f_i \frac{k \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\right)^k} \quad \text{onde} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_i}{\varepsilon_i E_0}\right)}, \quad \text{sendo } i = t, c \quad (3.30)$$

σ_i representa a tensão de tração ou compressão (conforme o índice i), f_i é o limite de resistência à tração ou à compressão, ε_i é a deformação tendo em vista o limite elástico na tração ou compressão, e E_0 é o módulo de elasticidade no domínio elástico.

Partindo da eq. (3.30), pode-se obter a seguinte relação para o dano:

$$\omega(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{\tilde{E}\tilde{\varepsilon}} \frac{\frac{f_e k \tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}}{k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k}; \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{f_e k^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^{k-1}}{\tilde{E} \kappa_0^2 \left[k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k \right]}, \quad (3.32)$$

onde f_e é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e $\tilde{E}$ é o módulo de elasticidade equivalente, entendido como um parâmetro de material análogo ao módulo tangente inicial, mas compatível com a medida de deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ considerada pelo modelo constitutivo.

As eqs. (3.31) e (3.32) representam uma evolução contínua do dano, em que κ_0 marca o limite elástico (não necessariamente linear) (PENNA, 2011), onde

$$\kappa_0 > \frac{f_e}{\tilde{E}} \quad \text{pois} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{\kappa_0 \tilde{E}}\right)} \quad (3.33)$$

3.2.4 Modelo Não Local

A fim de evitar a sensibilidade à discretização adotada na representação do *softening* de materiais parcialmente frágeis pela teoria contínua padrão, pode-se fazer uso de formulações não locais. Segundo Patzák e Jirásek (2004), estas são as formulações que incorporam em suas equações um comprimento característico do material, evitando a localização de deformações em um volume arbitrariamente pequeno. A incorporação deste comprimento característico pode se dar a partir de uma regularização espacial baseada no uso de funções peso, pela inclusão de variáveis internas ou de gradientes de deformação ou pela introdução de um campo cinemático adicional independente do campo de deslocamentos (PATZÁK; JIRÁSEK, 2004). Neste trabalho será empregado o modelo regularizado de formulação não local. Esta formulação considera que os resultados numéricos obtidos em um ponto para variáveis internas selecionadas são influenciados pela sua vizinhança. Dito de outro modo, os resultados obtidos são a média ponderada dos valores dentro de um domínio pré-estabelecido (ASSIS, 2023).

As equações apresentadas a seguir se baseiam no trabalho de Patzák e Jirásek (2004). Seja $f(x)$ um campo local em um determinado domínio V . O campo não local correspondente pode ser definido como:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (3.34)$$

onde $\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ é a função peso não local. Em um corpo infinito, a função peso depende apenas da distância $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ entre um ponto “fonte”, $\boldsymbol{\xi}$, e um ponto “alvo”, $\mathbf{x}$. Na existência de um contorno limitando um corpo, nas regiões próximas ao limite do domínio, a função peso é definida de forma que um operador não local não altere um campo uniforme, ou seja, tal que

$$\int_V \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1, \quad (3.35)$$

o que pode ser conseguido redimensionando a função peso de modo que

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)}{\int_V \alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}\|) d\boldsymbol{\zeta}}, \quad (3.36)$$

onde $\alpha_0(r)$ é uma função não-negativa monotonicamente decrescente para $r \geq 0$. Para as simulações realizadas neste trabalho, $\alpha_0(r)$ é uma função de Gauss, dada por:

$$\alpha_0(r) = \exp\left(-k \frac{r^2}{l^2}\right), \quad (3.37)$$

onde l é o chamado comprimento interno da distribuição, cuja escolha, nos experimentos aqui considerados, está associada aos valores factíveis para o comprimento característico do material, e k é o parâmetro que dita o formato da curva, tornando os pontos mais distantes do domínio mais ou menos influentes (ASSIS, 2023).

Assim como no trabalho de Patzák e Jirásek (2004), a variável local escolhida para o processo de regularização é a deformação equivalente. Desta forma:

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (3.38)$$

A variável histórica interna κ (eq. (3.12)) passa a representar o maior valor previamente alcançado pela deformação equivalente não local. Para um ponto $\mathbf{x}$, esta é obtida a partir da regularização das deformações equivalentes locais calculadas para cada ponto de integração contido numa região circular centrada em $\mathbf{x}$ e de raio l .

3.3 Formulação do Modelo Coesivo

3.3.1 Lei Coesiva

3.3.1.1 Modelo Descontínuo

Como apresentado no capítulo 1, esta tese opera, resumidamente, com dois modelos distintos. O primeiro deles, que considera o material dos elementos finitos representado por um material de comportamento linear, elástico e isotrópico será doravante denominado modelo descontínuo. Neste modelo, a não linearidade física é introduzida a partir da consideração de um modelo de zona coesiva para representação da trinca. Esta, por sua vez, é simulada a partir das estratégias de enriquecimento extrínseco do MEFG/X ou do MEFG-E. A segunda proposta, que adota modelos distribuídos de dano de formulação não local para representar o material associado aos elementos finitos e considera a transição desta abordagem contínua para um modelo de fratura discreta será identificado como modelo contínuo-descontínuo. Assim como no modelo descontínuo, a simulação da fratura discreta (ou seja, da parte descontínua do modelo) se dá a partir de uma estratégia de enriquecimento extrínseco, segundo perspectiva do MEFG/X ou do MEFG-E. Em todos os casos, a coesão é levada em consideração. A formulação da parte contínua (distribuída) deste modelo foi descrita na seção anterior (3.2). As equações da lei coesiva para o modelo contínuo-descontínuo serão tratadas na seção 3.3.1.2.

A lei coesiva adotada para os experimentos realizados nesta tese com o modelo descontínuo se baseia numa simplificação da formulação apresentada por Wells e Sluys (2001), implementada no INSANE nos trabalhos de Wolff (2010) e Silva (2016). Seja a função de carregamento f , dada por:

$$f(\llbracket u \rrbracket_n, \kappa) = \llbracket u \rrbracket_n - \kappa \quad (3.39)$$

onde κ é um parâmetro histórico, equivalente ao maior valor da abertura de trinca na direção normal $\llbracket u \rrbracket_n$ já atingido. O carregamento (abertura) na descontinuidade ocorre, portanto, quando $f \geq 0$, enquanto o descarregamento é expresso por $f < 0$.

A componente normal t_n das tensões coesivas transmitidas através da trinca é definida como

$$t_n = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad (3.40)$$

onde f_t é a resistência à tração do material e G_f é a energia de fratura (seguindo a notação de Wells e Sluys (2001)). A componente tangencial t_s das tensões coesivas que atuam na superfície da descontinuidade é determinada por sua vez por¹

$$t_s = d_{\text{init}} \llbracket u \rrbracket_s \quad (3.41)$$

onde d_{init} é a rigidez inicial da trinca ao cisalhamento (quando $\kappa = 0$) e $\llbracket u \rrbracket_s$ é o deslocamento tangencial (escorregamento) existente entre as faces da trinca. A Fig. 3.3 exibe gráficos que ilustram os comportamentos das funções t_n e t_s com relação a κ e $\llbracket u \rrbracket_s$, respectivamente.

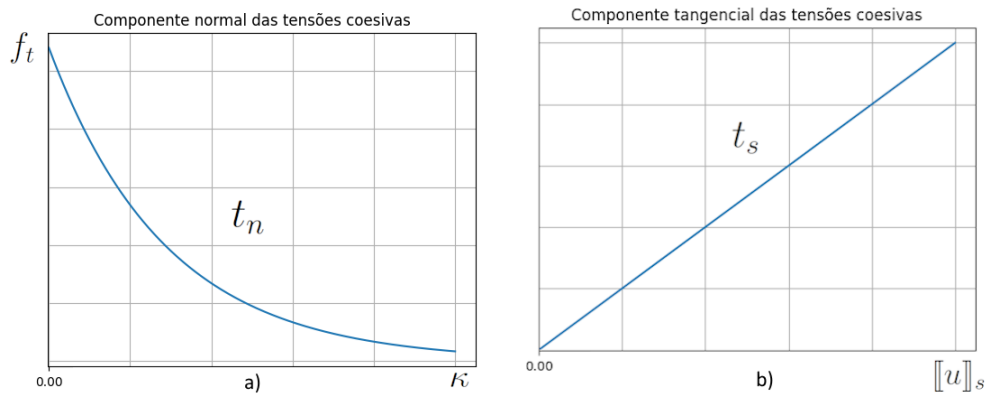


Figura 3.3 – Comportamento das funções que compõem a lei coesiva adotada para o modelo descontínuo a) Natureza exponencial da relação $t_n \times \kappa$ b) Natureza linear da relação $t_s \times \llbracket u \rrbracket_s$

As relações anteriores entre as tensões coesivas e os deslocamentos na trinca podem ser derivadas em relação ao tempo a fim de produzir uma matriz tangente consistentemente linearizada:

$$\begin{Bmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{\text{init}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

onde a $\mathbf{T}$ é a matriz de rigidez tangente considerada para a integração das tensões coesivas $\mathbf{t}$ na ZPF quando da abertura da trinca, ou seja, quando $f \geq 0$. Para o comportamento

¹ É nesta definição de t_s que reside a simplificação adotada neste trabalho. Originalmente, Wells e Sluys (2001) propõem que $t_s = d_{\text{init}} \exp(h_s \kappa) \llbracket u \rrbracket_s$, com $h_s = \ln(d_{\kappa=1.0}/d_{\text{init}})$, e $d_{\kappa=1.0}$ representando a rigidez ao cisalhamento quando $\kappa = 1.0$. Posteriormente, estes autores sugerem que uma simplificação com vantagens significativas do ponto de vista computacional seria fazer a rigidez inicial ao cisalhamento constante, como na eq. (3.41). Isso torna a matriz $\mathbf{T}$ da eq. (3.42) simétrica, e desacopla as contribuições normal e tangencial.

no descarregamento, o modelo numérico empregado considera a seguinte matriz secante $\mathbf{S}$:

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_t}{\kappa} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{\text{init}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n \\ \llbracket u \rrbracket_s \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Ainda que a lei coesiva aqui discutida seja mais adequada a problemas em que o modo I é dominante, ela pode ser empregada em experimentos em modo misto. O parâmetro d_{init} foi proposto a fim de expressar o impacto da componente tangencial das tensões coesivas (WELLS; SLUYS, 2001).

3.3.1.2 Modelo Contínuo-Descontínuo

A lei coesiva considerada para o modelo contínuo-descontínuo também se baseia em uma formulação exponencial, adaptada, de certa forma, da proposta de Wells e Sluys (2001) apresentada na seção anterior. As modificações propostas neste trabalho visam a garantir a consistência energética entre a atuação da lei de dano e o modelo de fratura discreta. Considere-se, portanto, a mesma função de carregamento representada pela eq. (3.39). A componente normal das tensões coesivas t_n transmitidas através da trinca para o modelo contínuo-descontínuo é definida como

$$t_n = t_o e^{-\gamma \kappa} \quad (3.44)$$

onde t_o é a tensão verificada na lei de dano no momento da transição e γ é o expoente que define o decaimento da função exponencial, de forma a garantir a consistência energética entre os modelos contínuo e de fratura discreta. Maiores detalhes sobre a determinação de t_o e sobre a obtenção de γ serão apresentados na seção 3.3.3.

A componente tangencial das tensões coesivas t_s que atuam na superfície da descontinuidade, para fins de investigação, é mantida como na eq. (3.41), ou seja, a consistência energética é trabalhada apenas na direção normal. Deve-se observar que, a priori, as energias de fratura de modos I e II deveriam ambas ser conservadas durante a transição entre um modelo contínuo e um modelo de fratura discreta. De acordo com Roth, Léger e Soulaïmani (2015), no entanto, enquanto a energia de fratura em modo I pode ser entendida a partir de um parâmetro bem definido, não há consenso acerca da energia de

fratura em modo II. Os autores mencionam que os trabalhos de Reinhardt e Xu (2000) e Bažant e Pfeiffer (1986) buscam determinar a energia de fratura de modo II como um parâmetro de material real, e encontram valores de 20 a 25 vezes maiores que a energia de modo I. Tais resultados se dão em razão da consideração não apenas da energia usada na criação de microfissuras inclinadas na ZPF mas também da energia necessária para romper a resistência oriunda do intertravamento dos agregados. Por outro lado, Carpinteri et al. (1993) concluíram que a energia de fratura de modo II não parece ser um parâmetro real de material, e que modelos coesivos que consideram a dissipação apenas em modo I são capazes de reproduzir resultados experimentais com boa aproximação. Com base nisso, a fim de simplificar a conservação de energia durante a transição, Roth, Léger e Soulaïmani (2015) optam por considerar apenas a componente de modo I t_n em seu modelo, procedimento adotado em outros trabalhos da área, como Comi, Mariani e Perego (2007) e Wang e Waisman (2016). Nesta tese, isso também será assumido na maioria dos experimentos a partir da consideração de que $d_{\text{init}} = 0,0 \text{ N/mm}^3$.

Tendo sido adaptadas da proposta de Wells e Sluys (2001), as formulações adotadas para as componentes normal e tangencial das tensões coesivas para o modelo contínuo-descontínuo têm a mesma natureza das funções ilustradas na Fig. 3.3. Isso pode ser constatado na Fig. 3.4, que exibe ainda o comportamento da exponencial que rege a componente t_n com diferentes valores do expoente γ . Quanto maior o valor assumido por esta variável, mais acentuado é o decaimento verificado por t_n (assim como acontece com a eq. (3.40) à medida que cresce a razão f_t/G_f). Nota-se ainda que o ponto do qual parte a função t_n no modelo contínuo-descontínuo passa a ser t_o , não mais f_t (Fig. 3.3).

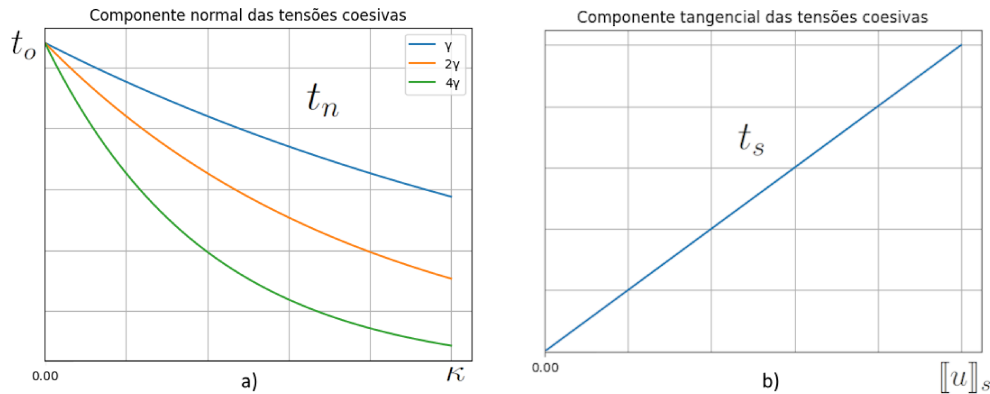


Figura 3.4 – Comportamento das funções que compõem a lei coesiva adotada para o modelo contínuo-descontínuo. a) Natureza exponencial da relação $t_n \times \kappa$ b) Natureza linear da relação $t_s \times [[u]]_s$

As relações entre as tensões coesivas e os deslocamentos na trinca podem ser derivadas em relação ao tempo a fim de produzir uma matriz tangente consistentemente linearizada:

$$\begin{pmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -t_o \gamma e^{-\gamma \kappa} & 0 \\ 0 & d_{\text{init}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

onde a $\mathbf{T}$ é a matriz de rigidez tangente considerada para a integração das tensões coesivas $\mathbf{t}$ na ZPF quando da abertura da trinca, ou seja, quando $f \geq 0$. Para o comportamento no descarregamento, o modelo numérico empregado considera a seguinte matriz secante $\mathbf{S}$:

$$\begin{pmatrix} t_n \\ t_s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{t_o}{\kappa} e^{-\gamma \kappa} & 0 \\ 0 & d_{\text{init}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} \llbracket u \rrbracket_n \\ \llbracket u \rrbracket_s \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

3.3.2 Critérios de Propagação e de Direção

3.3.2.1 Modelo Descontínuo

Para o modelo descontínuo, o material dos elementos finitos é simulado como um material isotrópico linear elástico. Desta feita, os critérios de propagação e direção assumida pela trinca foram escolhidos de forma a levar este comportamento em consideração.

A propagação da trinca é avaliada a partir da verificação das tensões principais (WELLS; SLUYS, 2001) calculadas em todos os pontos de Gauss pertencentes ao semicírculo à frente da trinca e perpendicular ao último segmento desta no fim de cada passo de incremento de carga. O raio desta região é considerado igual a $1,5h$, em que h é o tamanho característico do elemento finito, entendido aqui como $h = \sqrt{A_e}$, A_e representando a área do elemento finito que contém a ponta da trinca. Esta região pode ser vista na Fig. 3.5a. É relevante observar que nas simulações que empregam exclusivamente as funções de Heaviside (e suas variantes), excepcionalmente, a região de avaliação passa a ser considerada apenas o elemento finito de aresta adjacente à aresta do elemento que contém o último segmento de trinca, mantendo a implementação proposta pelo trabalho de Silva (2016) (Fig. 3.5b). Se a tensão principal máxima em quaisquer dos pontos de integração das regiões em questão exceder a resistência à tração do material f_t , um novo segmento de trinca - de comprimento prescrito, no caso da combinação das funções de Heaviside com enriquecimentos trigonométricos - é introduzido.

Para avaliação da nucleação das discontinuidades, uma verificação similar é conduzida na região interna a cada um dos elementos finitos íntegros da malha. O primeiro segmento

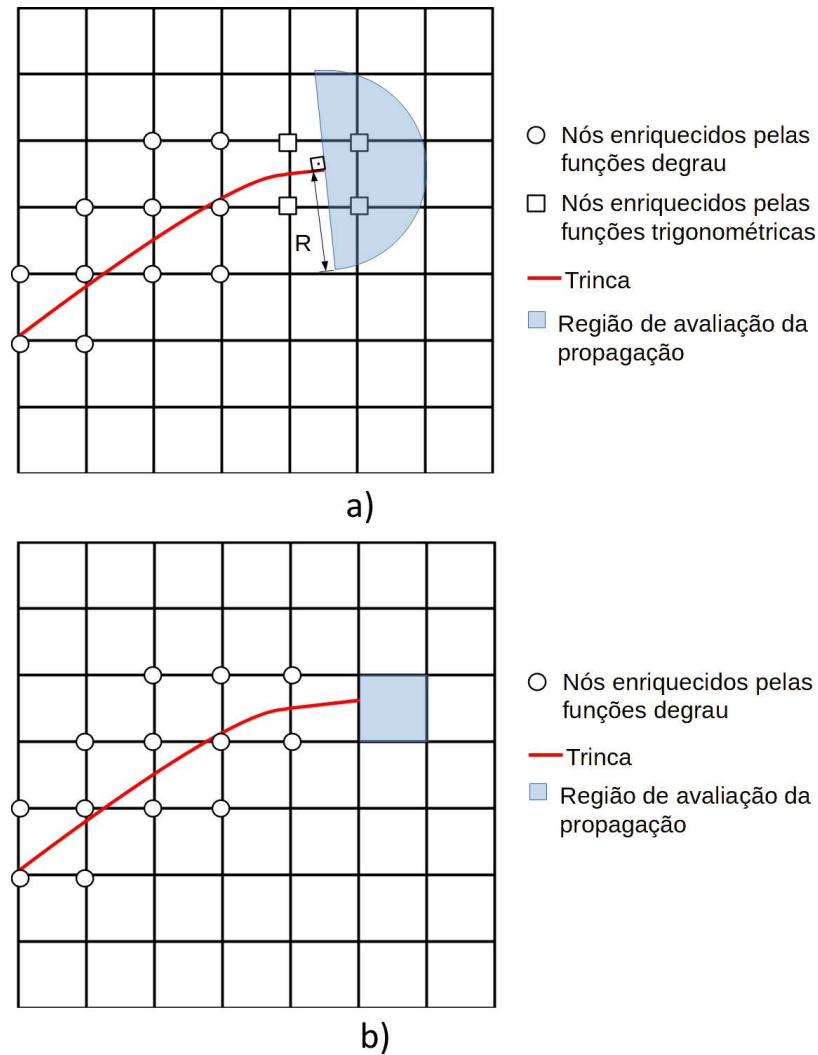


Figura 3.5 – Regiões de avaliação da propagação da trinca nos casos em que se emprega para sua representação: a) Uma combinação entre funções de Heaviside (degrau) e funções trigonométricas; b) Apenas funções de Heaviside.

de trinca corta o elemento no qual foi nucleada por inteiro (MALEKAN et al., 2017), e passa, obrigatoriamente, pelo centroide do elemento em questão (SILVA, 2016). Convém observar, portanto, que a primeira inserção da fissura é influenciada por h , ou seja, pelo tamanho do elemento finito. Tal influência, no entanto, não se verifica na propagação da trinca em si nos modelos que empregam o enriquecimento trigonométrico, uma vez que o comprimento assumido pela trinca na propagação é prescrito pelo usuário do sistema computacional.

Para determinação da direção tomada pela descontinuidade, é assumido o critério da máxima tensão circunferencial (ERDOGAN; SIH, 1963). Este é um critério bem estabelecido na literatura em problemas com meio linear elástico, que define a direção de propagação como a direção normal à máxima tensão circunferencial. O ângulo θ assumido pela trinca é calculado por

$$\theta = 2 \arctg \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (3.47)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II, respectivamente. O sinal da raiz quadrada é determinado com o sinal oposto ao de K_{II} . Os fatores de intensidade de tensão são computados a partir do método energético da integral de interação, proposto originalmente por Yau, Wang e Corten (1980). Para maiores detalhes acerca das etapas da formulação, bem como de sua implementação no INSANE, recomenda-se a leitura de Fonseca (2019), que viabilizou este método no software em questão seguindo a abordagem de Moës, Dolbow e Belytschko (1999). Para fins de transparência, apresenta-se um resumo das principais formulações.

O procedimento sugerido por Moës, Dolbow e Belytschko (1999) se baseia no estabelecimento de dois estados independentes de equilíbrio (identificados, posteriormente, pelos índices 1 e 2). O estado 1 corresponde ao estado corrente do modelo, obtido após seu processamento. O estado 2, por sua vez, se constituiria enquanto um estado de equilíbrio auxiliar, escolhido a partir de soluções assintóticas para os modos I e II de abertura. As expressões finais para K_I e K_{II} são obtidas a partir de uma escolha adequada para o estado auxiliar 2. A expressão de K_I é encontrada considerando o estado 2 como um estado de modo I puro:

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I_{Modo I}^{(1,2)} \quad (3.48)$$

De forma análoga, definindo o estado 2 como um estado de modo II puro, pode-se expressar K_{II} como

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I_{Modo II}^{(1,2)} \quad (3.49)$$

Nas eqs. (3.48) e (3.49), define-se E^* como

$$E^* = \begin{cases} E, & \text{para Estado Plano de Tensão} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{para Estado Plano de Deformação} \end{cases}, \quad (3.50)$$

e $I^{(1,2)}$, já transformada para uma integral de área, como

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA, \quad (3.51)$$

onde:

- x_1 corresponde ao eixo das abscissas, paralelo à face da trinca, do sistema de coordenadas cartesiano adotado (Fig. 3.6).

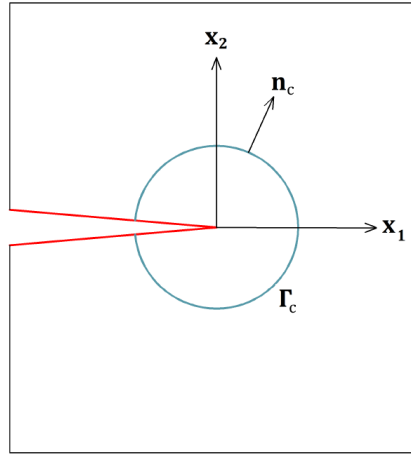


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da integral de interação, considerando uma trinca representada em vermelho. Adaptado de Fonseca (2019).

- $W^{(1,2)}$ refere-se à energia de deformação de interação, expressa como:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (3.52)$$

- $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ e $u_i^{(1)}$ indicam os campos de tensões, deformações, e deslocamentos, respectivamente, do estado 1. Este estado resulta da análise do modelo estudado com a presença da trinca.
- $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ e $u_i^{(2)}$ indicam os campos de tensões, deformações e deslocamentos, respectivamente, do estado 2. Expressões possíveis para estes campos em função do modo de abertura da trinca, omitidas aqui por concisão, podem ser encontradas em Anderson (2005) e estão reunidas na tabela 3.1 de Fonseca (2019).

- q , neste contexto, é uma função de ponderação, necessária para a transformação da integral de linha em integral de área. No software empregado, q assume valor unitário para os nós da malha localizados no interior de um círculo de raio r_d (Fig. 3.7) empregado para definir o domínio A . Nos nós externos ao contorno formado por este círculo, q assume valor nulo. Uma função suficientemente suave é obtida empregando interpolação dos valores nodais de q a partir das funções de forma dos elementos que compõem A .

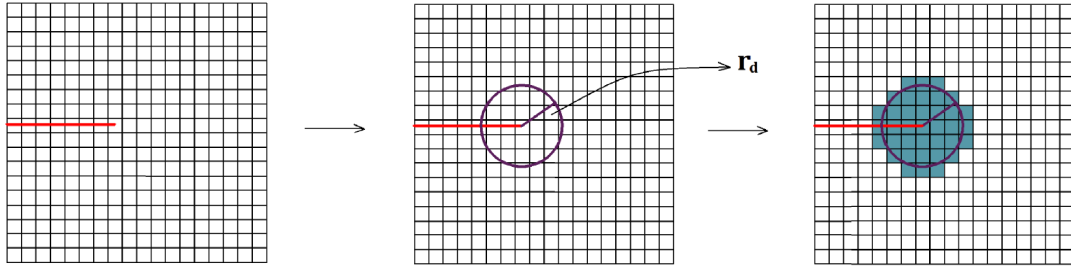


Figura 3.7 – Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração A para o cálculo da integral de interação. Os elementos selecionados são destacados em azul. (FONSECA, 2019).

Como mostrado na Fig. 3.7, o domínio de integração A é definido por um conjunto de elementos finitos situados na região ao redor da ponta da trinca. Seguiu-se, nas simulações realizadas, a recomendação de Moës, Dolbow e Belytschko (1999), que sugerem que este conjunto seja formado pelos elementos que possuem pelo menos um dos nós no interior de um círculo de raio r_d com centro na ponta da trinca. Também em conformidade com Moës, Dolbow e Belytschko (1999), neste trabalho, $r_d = 2h$. De posse destes procedimentos, a determinação dos fatores de intensidade de tensão torna-se possível, assim como o cômputo da direção assumida pela trinca a partir da eq. (3.47).

3.3.2.2 Modelo Contínuo-Descontínuo

No modelo contínuo-descontínuo, o material dos elementos finitos é simulado a partir de uma formulação não local de modelos de dano (seção 3.2.1). Os critérios de propagação e de determinação da direção assumida para a trinca devem, portanto, ser coerentes com esta representação.

Nesse sentido, a propagação da trinca é avaliada a partir da verificação dos valores de dano calculados em todos os pontos de Gauss pertencentes também a um semi-círculo de raio igual a $1,5h$, na região à frente da trinca e perpendicular ao último segmento, no fim de cada passo de incremento de carga (Fig. 3.5a). Também neste modelo, para eventuais simulações realizadas apenas com as funções de Heaviside, a região de verificação passa a ser o elemento finito de aresta adjacente à aresta do elemento que contém

o último segmento de trinca (Fig. 3.5b). Se o dano nos pontos de Gauss pertencentes à região de análise exceder, em quaisquer deles, o valor de dano crítico ω_{cr} , um novo segmento de trinca - de comprimento prescrito, no caso da combinação das funções de Heaviside com enriquecimentos trigonométricos - é introduzido. Nesta tese, para os experimentos numéricos considerados com este modelo, o valor do dano crítico é assumido heurísticamente como 0,5 ($\omega_{cr} = 0,5$). Esta foi uma escolha de ordem prática, considerando que, no processo de fratura, cada um dos modelos responderia por 50% do processo em questão. Isso se deu porque, neste trabalho, se optou por não entrar no escopo da discussão sobre a determinação do dano crítico que, como mostram outras investigações da literatura, não é trivial. Comi, Mariani e Perego (2007), por exemplo, obtêm uma formulação que relaciona o dano crítico ao tamanho da malha e a uma estimativa da banda de fissuração no comportamento não local do material. Para tal, os autores partem da propagação de uma onda de tensões harmônica numa barra uniformemente deformada e de comprimento infinito. Roth, Léger e Soulaïmani (2015), no entanto, apontam que não houve uma investigação extensiva para validar esta metodologia. Estes autores, por sua vez, realizam em seu trabalho um estudo numérico de possíveis valores de dano crítico. Em geral, para os experimentos conduzidos por eles, valores intermediários de dano crítico fornecem as melhores respostas para o modelo, embora os autores indiquem precisamente a faixa de 0,6 a 0,7. Wang e Waisman (2016) seguem caminho similar, comparando a influência percentual da energia dissipada pelo modelo distribuído em relação à energia total dissipada em diferentes experimentos numéricos e para diversos valores de dano crítico. Os autores sugerem que o valor escolhido para este parâmetro deve equivaler a uma dissipação energética de 15% da energia total apenas pelo modelo distribuído. Em seu trabalho, isso equivale a um ω_{cr} próximo de 0,8. Evangelista e Moreira (2020) apresentam como uma das dificuldades dos modelos contínuo-descontínuos a determinação do valor de dano crítico que indique a transição para o modelo de fratura discreta.

A avaliação da nucleação das descontinuidades é feita da maneira descrita na seção anterior, considerando, em vez da avaliação das tensões principais e sua comparação com a resistência à tração do material íntegro, os valores de dano em cada ponto de integração. Se o dano excede, em quaisquer dos pontos de Gauss, o valor do dano crítico, o sistema computacional introduz a trinca no elemento que acusou a danificação, atravessando-o por inteiro e mantendo a obrigatoriedade da implementação de Silva (2016) de passar pelo centroide do elemento.

Para determinação da direção assumida pela trinca, adaptou-se o critério implementado por Silva (2016), oriundo, por sua vez, do trabalho de Wells e Sluys (2001). A direção é definida como sendo a direção normal à máxima deformação principal não local, calculada a partir de uma região semicircular localizada à frente da trinca, centrada na ponta desta,

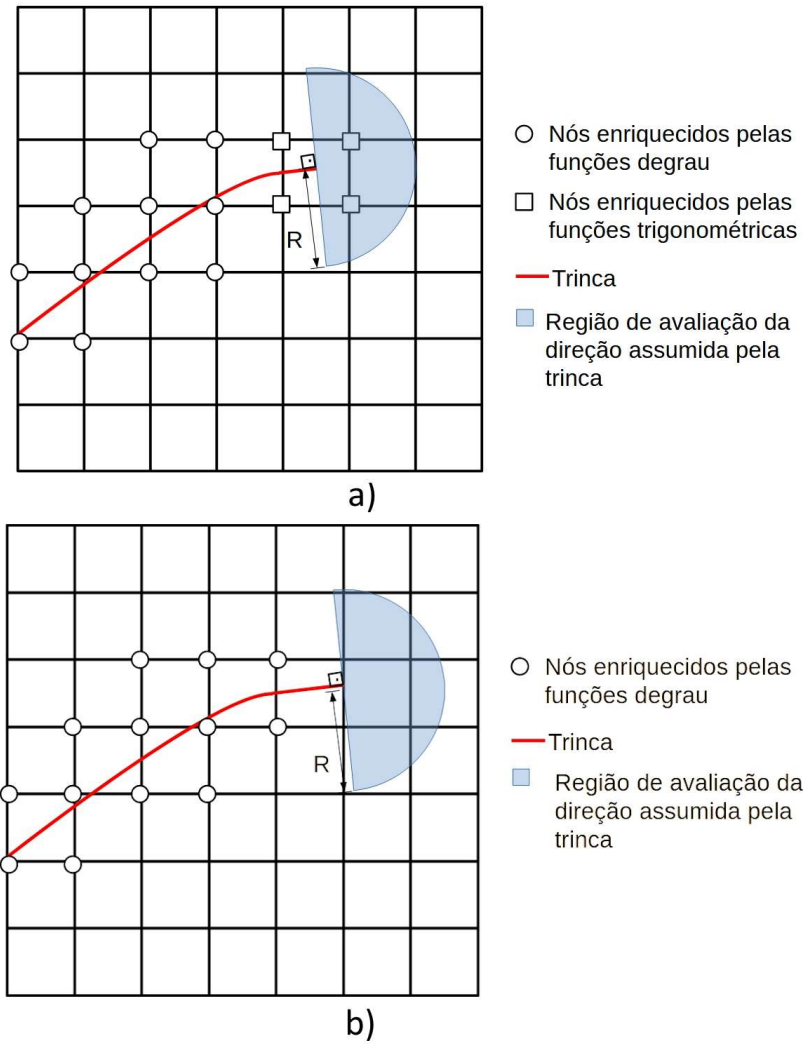


Figura 3.8 – Regiões de avaliação da direção assumida pela trinca nos casos em que se emprega para sua representação: a) Uma combinação entre funções de Heaviside (degrau) e funções trigonométricas; b) Apenas funções de Heaviside.

e de raio igual a $1,5h$ (Fig. 3.8). O tensor de deformações não local é calculado como a média ponderada das deformações nos pontos de integração do elemento, a partir da função peso Gaussiana definida por

$$w = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}l^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad (3.53)$$

onde w é o valor da função de peso Gaussiana em um ponto de Gauss, l determina quão rapidamente a função peso diminui longe do ponto em análise, e r é a distância de um ponto de Gauss ao ponto em análise, que é, nesta tese, a ponta da trinca. Neste trabalho, l é assumido como sendo igual ao valor do raio da região circular, isto é, $l = 1,5h$.

A direção assumida pela trinca é limitada ao primeiro e quarto quadrantes considerando o sistema local com origem na ponta da descontinuidade em questão (Fig. 3.9), de forma

a evitar um comportamento que não se verifica fisicamente. Fora isso, diferentemente de Silva (2016) e de outros trabalhos da área, não há qualquer limitação mais restritiva vinculada a um ângulo específico.

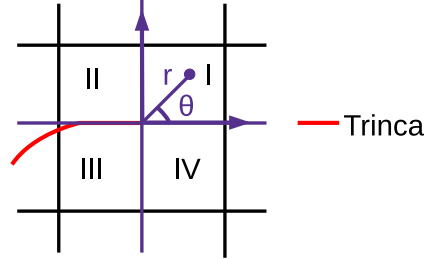


Figura 3.9 – Sistema local da trinca, com indicação dos quadrantes.

3.3.3 Transição no Modelo Contínuo-Descontínuo

As formulações descritas a seguir se baseiam nos trabalhos de Comi, Mariani e Perego (2007), Roth, Léger e Soulaïmani (2015) e Wang e Waisman (2016). A estratégia aqui apresentada se estrutura particularmente em uma adaptação da proposta de Comi, Mariani e Perego (2007), que considera que a energia residual que seria dissipada através da banda de dano em um modelo contínuo com malha devidamente refinada deve ser igual à energia dissipada na superfície de trinca introduzida nesse estágio na banda de dano em um modelo contínuo-descontínuo (por unidade de comprimento de trinca). Assim, para Comi, Mariani e Perego (2007), em um modelo contínuo unidimensional, a energia total dissipada por unidade de comprimento e por unidade de espessura ao longo da banda G_C pode ser expressa como

$$G_C = \int_0^\infty \lambda_{cr}(\tilde{\varepsilon}) \sigma(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}, \quad (3.54)$$

sendo $\lambda_{cr} = l_e$ a largura da banda de danificação. Destaca-se que foi mantida, na eq. (3.54), a notação e a definição de G_C empregadas no trabalho de Comi, Mariani e Perego (2007).

Para um modelo contínuo-descontínuo, portanto, pode-se escrever:

$$G_C = \underbrace{\int_0^{\tilde{\varepsilon}_{cr}} l_e \sigma(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}_{G_{\omega_1}} - \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \omega_{cr}) E^0 \tilde{\varepsilon}_{cr}^2 l_e}_{G_{\omega_2}} + G_{coh}, \quad (3.55)$$

onde a segunda parcela do lado direito da eq. (3.55), G_{ω_2} , representa a energia elástica recuperada pelo material em razão do descarregamento ocorrido pela introdução da descontinuidade, G_{coh} é a energia dissipada pela lei coesiva que descreve a parte descontínua do modelo e $\tilde{\varepsilon}_{cr}$ é a deformação equivalente associada ao dano crítico ω_{cr} . A construção

da consistência energética baseada na definição de G_C pela integral expressa na eq. (3.54) exige que a integral exista e seja definida para $\tilde{\varepsilon} = 0$ e $\tilde{\varepsilon} \rightarrow \infty$. Isso nem sempre ocorre com as diversas expressões de variação das leis de evolução de dano. Particularmente, para as leis de evolução de dano empregadas neste trabalho, exponencial (eq. (3.28)) e serpentina (eq. (3.31)), não seria possível manter esta transição tal como proposto por Comi, Mariani e Perego (2007). Para a lei exponencial, a integral da eq. (3.54) tem solução analítica, como se apresenta a seguir, mas tende ao infinito quando $\tilde{\varepsilon} \rightarrow \infty$. Para a lei serpentina, não foi encontrada uma expressão analítica para a integral, de forma que o cálculo de G_C tampouco pôde ser efetuado.

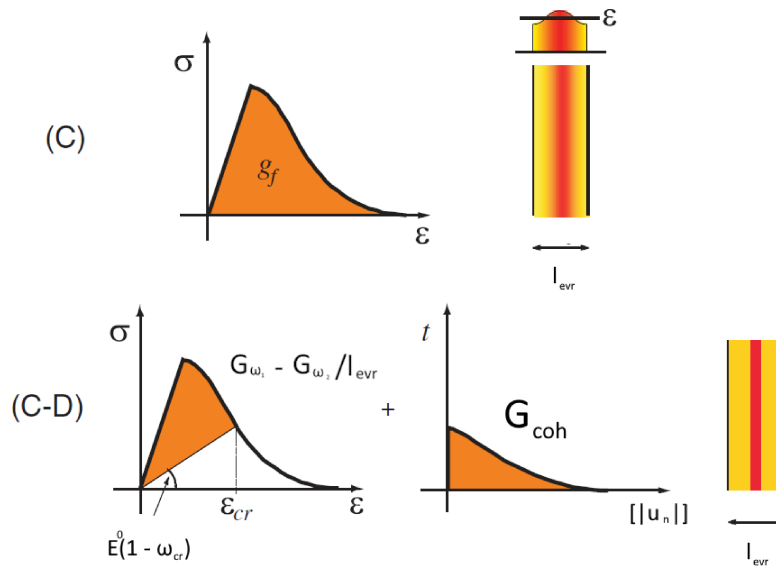


Figura 3.10 – Equivalência Energética: modelo contínuo (C), modelo contínuo-descontínuo (C-D). Adaptado de Comi, Mariani e Perego (2007).

A fim de contornar este problema e permitir que a estrutura seja aproveitada por diferentes expressões de variação de leis de dano, propô-se uma simplificação do modelo, considerando não o valor exato da igualdade matemática, mas que a energia total fosse balizada por um parâmetro de apelo físico, e, preferencialmente, de obtenção experimental. Assim, considerando a formulação não local, a expressão de equivalência energética proposta neste trabalho pode ser escrita como

$$G_{dis} = \underbrace{\int_0^{\tilde{\varepsilon}_{cr}} l_{evr} \sigma(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2} (1 - \omega_{cr}) E^0 \tilde{\varepsilon}_{cr}^2 l_{evr}}_{G_{\omega}} + G_{coh}, \quad (3.56)$$

onde l_{evr} é o comprimento do elemento volumétrico representativo, ou seja, o comprimento característico do material, e $G_{dis} = G_f$ é a energia de fratura, parâmetro obtido

experimentalmente. A equivalência proposta pela eq. (3.56) tem similitude com outras propostas da literatura. De fato, Roth, Léger e Soulaïmani (2015) e Wang e Waisman (2016), guardadas as devidas particularidades dos procedimentos de equivalência adotados e das leis coesivas empregadas, também expressaram a energia total a ser distribuída entre as parcelas contínua e descontínua em termos de um parâmetro G_{dis} associado à energia de fratura. No caso do trabalho de Roth, Léger e Soulaïmani (2015), a lei coesiva não parte, no entanto, de uma abertura de trinca nula, mas de um u_{cr} que demanda outras equações de restrição, exigindo uma solução numérica. Para Wang e Waisman (2016), por sua vez, $G_{dis} = \beta l_c g_f$, com l_c sendo o raio do domínio não local, g_f sendo a energia específica de fratura, obtida como a área sob a curva tensão-deformação, e β sendo um parâmetro “experimental” que varia entre 1,0 e 1,8 e que demanda calibração conforme o experimento realizado (WANG; WAISMAN, 2016).

Para definir os parâmetros da lei coesiva descrita pela eq. (3.44), além de se utilizar a definição de G_{coh} partindo da eq. (3.56), é preciso que se faça o acoplamento entre as tensões no modelo contínuo e no modelo discreto, isto é, é preciso que a lei coesiva parta da tensão equivalente verificada pela lei de dano (quando $\llbracket u \rrbracket_n = 0$). Assim:

$$t_0 = E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr}) \quad (3.57)$$

Desta forma, a lei coesiva expressa pela eq. (3.44) passa a ser escrita como

$$t_n = E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr}) e^{-\gamma \kappa}, \quad (3.58)$$

Considerando que G_{coh} pode ser definida como (Fig. 3.10):

$$G_{coh} = \int_0^\infty t(\llbracket u \rrbracket_n) d\llbracket u \rrbracket_n = \int_0^\infty E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr}) e^{-\gamma \kappa} d\llbracket u \rrbracket_n \quad (3.59)$$

e que κ é o maior valor assumido por $\llbracket u \rrbracket_n$, a integral da eq. (3.59) resulta em

$$G_{coh} = \left[\frac{-E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr}) e^{-\gamma \llbracket u \rrbracket_n}}{\gamma} \right]_0^\infty = \frac{E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr})}{\gamma} \quad (3.60)$$

Substituindo este resultado na eq. (3.56), pode se encontrar uma expressão para o expoente γ :

$$\gamma = \frac{E^0 \bar{\varepsilon}_{cr} (1 - \omega_{cr})}{G_f - G_\omega} \quad (3.61)$$

com $G_\omega = G_{\omega_1} - G_{\omega_2}$. Com as eqs. (3.57) e (3.61), a lei coesiva do modelo contínuo-descontínuo está definida. Para obtenção de G_ω , faz-se necessário realizar o cálculo da integral apresentada na eq. (3.56). O sistema INSANE, empregado neste trabalho, possui implementadas diversas leis de variação de evolução de dano, de expressões distintas. No caso daquelas cuja integral poderia ser encontrada usando procedimentos analíticos, a implementação de G_ω nas respectivas classes do código que representam estas leis foi feita a partir da expressão encontrada por tais meios. Em particular, para a lei de dano exponencial (eq. (3.28)):

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_{cr}} l_{evr} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} = \frac{E^0 \kappa_0^2}{2} + \int_{\kappa_0}^{\bar{\varepsilon}_{cr}} l_{evr} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} \quad (3.62)$$

com $\sigma(\bar{\varepsilon})$ representando as tensões efetivas, ou seja, $\sigma(\bar{\varepsilon}) = E^0(1 - \omega)\bar{\varepsilon}$. Substituindo essa parcela na integral da eq. (3.62), bem como a expressão de ω da eq. (3.28), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_0}^{\bar{\varepsilon}_{cr}} l_{evr} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} &= E^0 l_{evr} \int_{\kappa_0}^{\bar{\varepsilon}_{cr}} \kappa_0 [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\bar{\varepsilon} - \kappa_0)}] d\bar{\varepsilon} \\ &= E_0 l_{evr} \kappa_0 \left[(1 - \alpha) \bar{\varepsilon} - \frac{\alpha e^{-\beta(\bar{\varepsilon} - \kappa_0)}}{\beta} \right]_{\kappa_0}^{\bar{\varepsilon}_{cr}} \\ &= E_0 l_{evr} \kappa_0 \left[(1 - \alpha)(\bar{\varepsilon}_{cr} - \kappa_0) + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(\bar{\varepsilon}_{cr} - \kappa_0)}) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Para as leis de variação de dano para as quais não foi possível encontrar uma expressão analítica para a integral da eq. (3.56), como é o caso da lei de evolução serpentina aqui descrita (eq. (3.31)), recorreu-se a estratégias de integração numérica que empregam as regras de Newton-Cotes, como a regra do ponto médio, com $n = 500$.

Cabe observar que, a partir do momento em que a trinca é iniciada/propagada em um determinado elemento da malha, ao fazer a transição entre os modelos contínuo e descontínuo, opera-se uma troca de material nos pontos de integração do elemento em questão, de forma a cessar a dissipação energética, naquele elemento, por parte da modelo não local de dano. Isso equivale dizer que o dano neste elemento é “congelado”, e o material dos pontos de integração passa a ser descrito como um material linear elástico, com o módulo de elasticidade degradado do momento da transição, ou seja, $E = E^0(1 - \omega_{cr})$. Procedimento similar é realizado no trabalho de Wang e Waisman (2016).

3.4 MEFG/X e MEFG-E

Um espaço de aproximação $S_{MEFG/X}$ construído pelo MEFG/X pode ser obtido ampliando o espaço de aproximação S_{MEF} determinado pelo MEF a partir do uso de funções de

forma que são capazes de representar o comportamento local de soluções do problema e que varrem o espaço de funções enriquecidas S_{ENR} . Define-se o espaço $S_{\text{MEFG}/X}$, portanto, como

$$S_{\text{MEFG}/X} := S_{\text{MEF}} + S_{\text{ENR}} \quad (3.64)$$

com

$$S_{\text{MEF}} = \sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j \quad (3.65)$$

onde $N_j(\mathbf{x})$ são as funções de forma lagrangianas do MEF (neste trabalho, funções T3 lineares ou funções Q4 bi-lineares), $\mathcal{I}$ representa o conjunto de todos os nós do domínio, e $\tilde{\mathbf{u}}_j = \{u_j, v_j\}^T$ são vetores de coeficientes nodais. As funções $N_j(\mathbf{x})$, $j \in \mathcal{I}$ com suporte ϕ_j , ϕ_j sendo a nuvem de elementos que compartilha o nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$, formam uma Partição da Unidade (PU), isto é

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (3.66)$$

A mesma lógica pode ser aplicada para definição do espaço de aproximação do MEFG-E, $S_{\text{MEFG-E}}$, ou seja,

$$S_{\text{MEFG-E}} := S_{\text{MEF}} + S_{\text{ENR}} \quad (3.67)$$

com a devida particularização de S_{ENR} .

Para as simulações numéricas realizadas nesta tese, o espaço construído a partir das funções de enriquecimento, S_{ENR} , pode ser dividido, basicamente, em duas parcelas:

$$S_{\text{ENR}} = S_{\text{ENR}}^D + S_{\text{ENR}}^T, \quad (3.68)$$

onde S_{ENR}^D e S_{ENR}^T são os espaços formados a partir das funções descontínuas de Heaviside e da(s) função(ões) trigonométrica(s), respectivamente. Na seção 3.4.1 são detalhadas as funções de enriquecimento empregadas na construção destes espaços tanto para a versão convencional do MEFG/X quanto para as propostas do MEFG-E. O comportamento gráfico de cada uma das funções dispostas nesta seção é apresentado no apêndice B para o leitor interessado.

3.4.1 Funções de Enriquecimento

Para apresentar as funções de enriquecimento escolhidas a fim de simular a propagação de trincas com modelo de zona coesiva a partir das diferentes estratégias adotadas, faz-se necessário apresentar a definição das funções de Heaviside, também conhecidas como funções degrau, $\mathcal{H}(x, y)$:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \bar{y} \leq 0 \\ 0, & \text{if } \bar{y} > 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

em relação à uma coordenada local $\bar{y}$ normal ao segmento de trinca (Fig. 3.11).

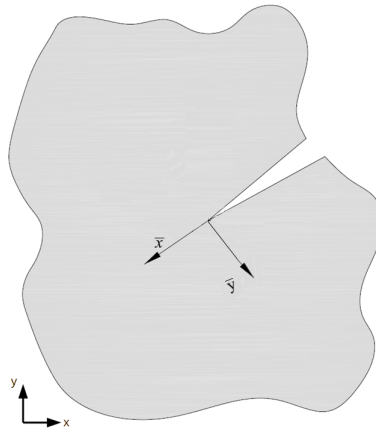


Figura 3.11 – Sistema local da trinca - funções de Heaviside - eq. (3.69).

3.4.1.1 MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento I (EE-I)

A primeira das estratégias de enriquecimento estudada nos experimentos numéricos desta tese considera que a trinca é simulada apenas a partir de funções de Heaviside, sob perspectiva do MEFG/X. Para tal, emprega-se a versão nodalmente deslocada (em inglês, *shifted Heaviside*) (ZI; BELYTSCHKO, 2003; BARROS; PROENÇA; BARCELLOS, 2004) das funções de Heaviside tradicionais (eq. (3.69)), resultando na seguinte equação de aproximação para o campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_1}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) [\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}=S_{\text{ENR}}^D} \quad (3.70)$$

onde $\mathbf{a}_j$ representa um vetor de parâmetros nodais e $\mathcal{I}_D$ é o conjunto de nós enriquecidos pelas funções de Heaviside, associado aos elementos completamente atravessados pela trinca.

Considerando a eq. (3.1), bem como as eqs. (3.69) e (3.70), a continuidade de $N_j(\mathbf{x})$ dentro de um elemento finito, e o fato de $\mathcal{H}(\mathbf{x}_j)$ ser uma constante, pode-se concluir que:

$$[\![\mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_1}^h]\!](\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) [\![\mathcal{H}(\mathbf{x})]\!] \mathbf{a}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.71)$$

onde $[\![\mathcal{H}(\mathbf{x})]\!] = 1$, é a diferença entre o enriquecimento de Heaviside nodalmente deslocado avaliado na posição $\mathbf{x}$ em Γ_c^+ e em Γ_c^- . Em outras palavras, este termo representa o salto verificado nesta função de enriquecimento em razão da descontinuidade introduzida pela trinca.

3.4.1.2 MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento II (EE-II)

A segunda estratégia de enriquecimento empregada para a versão convencional do MEFG/X incorpora, além das funções de Heaviside nodalmente deslocadas, uma função trigonométrica que enriquece os nós do elemento que contém a ponta da trinca com o objetivo de melhor representar o comportamento da solução nessa região. Esta função pode ser definida como:

$$F_j(r, \theta) = \mathbf{R} \left(r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta_j}{2} \right) \quad (3.72)$$

onde (r, θ) são as coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesianas $\mathbf{x}$ considerando o sistema local da trinca (Fig. 3.9), (r_j, θ_j) , são as coordenadas polares do nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$, e $\mathbf{R}$ representa a matriz de rotação. A eq. (3.72) pode ser entendida como a versão nodalmente deslocada do enriquecimento $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, proposto por Moës e Belytschko (2002), em coordenadas globais. A incorporação desta função enriquecedora, além de objetivar

a melhoria da representação do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca, visa também prover ao modelo do MEFG/X uma maior flexibilidade em relação à malha. Isto porque quando se emprega apenas o enriquecimento de Heaviside, os segmentos de trinca incorporados à análise obrigatoriamente atravessam os elementos finitos por inteiro. Com a inclusão da função trigonométrica, a trinca pode parar no interior dos elementos, o que se espera que permita que se dispense a preocupação que ocorre com um nível de refinamento mais alto na região da trinca quando este tipo de função não está presente. Cabe observar que Moës e Belytschko (2002) propõem, além do enriquecimento $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, outras funções trigonométricas alternativas com o mesmo objetivo. $F_j(r, \theta)$ representada pela eq. (3.72) foi a escolhida por uma questão de ordem prática, uma vez que fazia parte da base de funções trigonométricas estudada neste trabalho (ver seção 3.4.1.3), facilitando a implementação.

Como mencionado previamente, os elementos já completamente atravessados pela trinca continuam a ser simulados pelas funções de Heaviside nodalmente deslocadas na EE-II do MEFG/X, o que resulta na seguinte equação de aproximação para o campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_2}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) [\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) F_j(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{a}_j$ e $\mathbf{b}_j$ são vetores de parâmetros nodais, $\mathcal{I}_D$, como na eq. (3.70), é o conjunto de nós enriquecidos pelas funções de Heaviside, associado aos elementos completamente atravessados pela trinca, e $\mathcal{I}_T$ representa o conjunto de nós enriquecidos pela função trigonométrica (eq. (3.73)) no elemento que contém a ponta da trinca.

Seguindo as considerações apresentadas na seção 3.4.1.1, pode-se concluir que:

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_2}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \llbracket F_j(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.74)$$

onde $\llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket$ e $\llbracket F_j(\mathbf{x}) \rrbracket$, representam, respectivamente, a diferença entre os enriquecimentos $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ e $F_j(\mathbf{x})$ avaliados na posição $\mathbf{x}$ em Γ_c^+ e em Γ_c^- . Em outras palavras, denotam o salto verificado na função de enriquecimento em razão da descontinuidade introduzida pela trinca. Não é difícil perceber que $\llbracket F_j(\mathbf{x}) \rrbracket = \mathbf{R} \left(2r^{\frac{3}{2}} \right)$, uma vez que $\sin \theta/2 = 1$ em Γ_c^+ e $\sin \theta/2 = -1$ em Γ_c^- , e lembrando que os valores nodais são constantes.

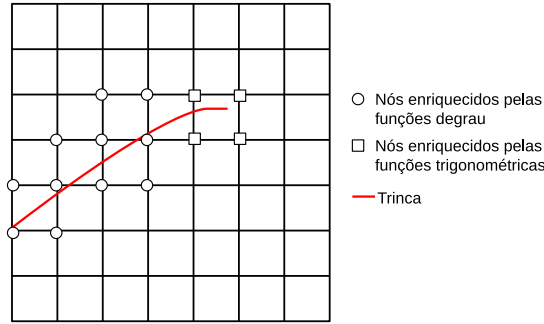


Figura 3.12 – Exemplo das funções enriquecedoras utilizadas para simular a trinca com modelo de zona coesiva. Os nós circulares são enriquecidos pelas funções degrau, enquanto os quadrados representam os nós enriquecidos pelas funções trigonométricas.

A Fig. 3.12 ilustra um exemplo das estratégias de enriquecimento que combinam as funções degrau com funções trigonométricas.

3.4.1.3 MEFG/X - Estratégia de Enriquecimento III (EE-III)

A terceira estratégia de enriquecimento empregada com o MEFG/X é uma variação da EE-II (seção 3.4.1.2). A diferença entre ambas está na escolha da função trigonométrica para representação do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca. Em vez de se empregar apenas uma função, como na eq. (3.72), passa-se a utilizar parte da base de funções proposta enquanto enriquecimento por Wang e Waisman (2018), cuja expressão pode ser escrita como:

$$\mathbf{f}_j(r, \theta) = \left\{ \begin{array}{c} r \sin \theta - r_j \sin \theta_j \\ r \cos \theta - r_j \cos \theta_j \\ r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta_j}{2} \\ r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta_j}{2} \\ r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \theta_j \sin \frac{\theta_j}{2} \\ r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \theta_j \cos \frac{\theta_j}{2} \end{array} \right\} \quad (3.75)$$

onde (r, θ) são as coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesianas $\mathbf{x}$ considerando o sistema local da trinca (Fig. 3.9) e (r_j, θ_j) , são as coordenadas polares do nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$. A função de enriquecimento propriamente dita é obtida rotacionando os elementos de $\mathbf{f}_j(r, \theta)$ para coordenadas globais, ou seja,

$$\{F_j^l(r, \theta)\} = \mathbf{R}\{f_j^l(r, \theta)\} \quad (3.76)$$

onde $\mathbf{R}$ representa a matriz de rotação.

Desta forma, as equações de aproximação para o campo de deslocamentos, e do salto no campo de deslocamentos passam a ser escritas como, respectivamente,

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_3}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) [\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 F_j^l(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j^l \right]}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.77)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG}/X_3}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 \llbracket F_j^l(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j^l \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.78)$$

Não é difícil perceber que o único elemento descontínuo da função $\{F_j^l(r, \theta)\}$ é o elemento $\{F_j^3(r, \theta)\} = \mathbf{R} \left(r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta_j}{2} \right)$, cujo salto foi definido na seção 3.4.1.2. Isso implica que o salto para as outras funções que compõem esta base será nulo. Dito de outro modo, as demais funções atuam apenas na aproximação do campo de deslocamentos, não tendo influência direta na integração das tensões coesivas.

É importante observar que, sendo a trinca modelada por uma sequência de segmentos de reta, com a introdução dos enriquecimentos trigonométricos expressos pelas eqs. (3.72) e (3.76), a descontinuidade estará sujeita a curvas no interior de um mesmo elemento durante a propagação, o que pode ocasionar o surgimento de quinas no elemento em questão. Para garantir a coerência e a correção do modelo, estes casos foram tratados a partir da implementação do procedimento proposto por Belytschko e Black (1999). Tal procedimento consiste no alinhamento de cada segmento a partir de uma sequência de mapeamentos que os rotacionam de forma a alinhá-los com o sistema local da trinca na ponta vigente.

3.4.1.4 MEFG-E - Estratégia de Enriquecimento I (EE-I)

De forma análoga ao que foi feito para o MEFG/X, a primeira estratégia de enriquecimento proposta para o MEFG-E considera que a trinca é simulada apenas a partir de funções de Heaviside. Nesse sentido, e considerando os achados de Gupta et al. (2013), que indicam que a mera aplicação da estratégia de subtração do interpolante de elementos finitos proposta por Babuška e Banerjee (2011) que caracteriza o MEFG-E mostrou-se insuficiente para garantir a acurácia, duas variações das funções de Heaviside são consideradas. A primeira delas, tratada apenas no capítulo 4, foi proposta por Gupta et al. (2013):

$$\mathcal{H}_L^j(x, y) - I_{\phi_j}(\mathcal{H}_L^j(x, y))(\mathbf{x}) = \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{H} \frac{(x - x_j)}{h_j}, \mathcal{H} \frac{(y - y_j)}{h_j} \right\} - I_{\phi_j}(\mathcal{H}_L^j(x, y))(\mathbf{x}) \quad (3.79)$$

onde $\mathcal{H}$ é definida pela eq. (3.69) e h_j é um fator de escala dado pela maior distância entre o nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$ e os demais nós da nuvem ϕ_j . $I_{\phi_j}(\mathcal{H}_L^j(x, y))(\mathbf{x})$ é o interpolante de elementos finitos, definido como (GUPTA et al., 2013):

$$I_{\phi_j}(L_j)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}_k) \quad (3.80)$$

onde L_j é uma função de enriquecimento, o vetor $\mathbf{x}_k$ expressa as coordenadas do nó k do elemento e , N_k são as funções lagrangianas do MEF para o nó k , e n_e é o número de nós do elemento finito. As funções expressas pela eq. (3.79) foram denominadas funções de Heaviside Lineares, e a estratégia a elas associada será identificada por EE-I-H_L do MEFG-E.

As equações de aproximação para o campo de deslocamentos, e do salto no campo de deslocamentos passam a ser escritas para a estratégia EE-I-H_L do MEFG-E como, respectivamente,

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{1HL}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) \left[\mathcal{H}_L^j(x, y) - I_{\phi_j}(\mathcal{H}_L^j(x, y))(\mathbf{x}) \right] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} \quad (3.81)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{1HL}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}_L^j(x, y) \rrbracket \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.82)$$

Cabe observar que, em razão da continuidade de $I_{\phi_j}(L_j)(\mathbf{x})$ no interior de um elemento finito, o termo $I_{\phi_j}(\mathcal{H}_L^j(x, y))$ acaba desaparecendo no cômputo do salto no campo de deslocamentos. Além disso,

$$\llbracket \mathcal{H}_L^j(x, y) \rrbracket = \left\{ 1, \frac{(x - x_j)}{h_j}, \frac{(y - y_j)}{h_j} \right\} \quad (3.83)$$

A segunda função de Heaviside estudada no contexto do MEFG-E foi proposta por Wu e Li (2015b) e pode ser expressa como:

$$\mathcal{H}_{mod}^j(x, y) = \mathcal{H}(x, y) - [\alpha I_{\phi_j}(\mathcal{H}(x, y))(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)\mathcal{H}(x_j, y_j)] \quad (3.84)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é um parâmetro de estabilização. As funções definidas pela eq. (3.84) podem ser entendidas como funções de Heaviside modificadas, e a aproximação a elas associada será identificada como a estratégia EE-I- H_{mod} . A proposta de Wu e Li (2015b) foi idealizada pensando em prover, para as funções de Heaviside no contexto do MEFG-E, um meio-termo entre bom condicionamento e acurácia a partir justamente do uso de α . Isso porque tanto a tentativa de aplicar o interpolante diretamente sobre as funções de Heaviside (GUPTA et al., 2013) quanto a tentativa inicial de obter funções de Heaviside Lineares robustas (ZHANG; BABUŠKA; BANERJEE, 2016) falharam em termos de acurácia e condicionamento, respectivamente. A principal desvantagem associada ao uso da eq. (3.84) é que a determinação do valor do parâmetro α se dá de forma heurística. Esta questão será abordada no capítulo 4.

As equações de aproximação para o campo de deslocamentos, e do salto no campo de deslocamentos passam a ser escritas para a estratégia EE-I- H_{mod} do MEFG-E como, respectivamente,

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{1H_{mod}}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) \mathcal{H}_{mod}^j(x, y) \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} \quad (3.85)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{1H_{mod}}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}_{mod}^j(x, y) \rrbracket \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.86)$$

com $\llbracket \mathcal{H}_{mod}^j(x, y) \rrbracket = \llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket = 1$.

3.4.1.5 MEFG-E - Estratégia de Enriquecimento II (EE-II)

As estratégias de enriquecimento II (EE-II) e III (EE-III) no contexto do MEFG-E aqui propostas podem ser entendidas, de certa forma, como as versões “estáveis” das estratégias de enriquecimento discutidas nas seções 3.4.1.2 e 3.4.1.3 para o MEFG/X, respectivamente. Nesse contexto, as versões estáveis dos enriquecimentos trigonométricos serão combinadas a duas classes de enriquecimento de Heaviside. Por motivos que serão melhor explanados no capítulo 4, as funções de Heaviside Lineares (eq. (3.79)) não foram incluídas nestas estratégias.

O enriquecimento trigonométrico empregado no elemento que contém a ponta da trinca para a EE-II pode ser definido como

$$F_{E_j}(\mathbf{x}) = F_j(r, \theta) - I_{\phi_j}(F_j(r, \theta))(\mathbf{x}) \quad (3.87)$$

onde $I_{\phi_j}(F_j(r, \theta))(\mathbf{x})$ é o interpolante de elementos finitos da eq. (3.80) e $F_j(r, \theta)$ é definido pela eq. (3.72). O subíndice E objetiva destacar que $F_{E_j}(\mathbf{x})$ é a versão do MEFG-E de $F_j(r, \theta)$.

O enriquecimento expresso pela eq. (3.87) é combinado às funções de Heaviside modificadas da eq. (3.84) resultando, para a primeira das estratégias (EE-II-A), nas seguintes equações de aproximação para o campo de deslocamentos, e do salto no campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{2A}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \mathcal{H}_{mod}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) F_{E_j}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.88)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{2A}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}_{mod}^j(x, y) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \llbracket F_{E_j}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.89)$$

Cabe observar que, em razão da continuidade do interpolante de elementos finitos, o salto $\llbracket F_{E_j}(\mathbf{x}) \rrbracket$ é igual ao salto verificado para $\llbracket F_j(\mathbf{x}) \rrbracket$ definido na seção 3.4.1.2.

Considerando o exposto no capítulo 1 em relação ao trabalho de Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020), também demonstrado anteriormente em Ndeffo et al. (2017), acerca de que, para problemas de mecânica da fratura com aproximação de elementos finitos de primeira ordem, o uso de funções de Heaviside com deslocamento nodal segundo a ótica do MEF_G/X e associado ao emprego de um adequado pré-condicionamento da matriz de rigidez decorrente da aproximação se mostra uma solução robusta, dispensando o uso de interpolantes, a aproximação do campo de deslocamentos para a estratégia EE-II-B foi proposta como

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{2B}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) [\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) F_{E_j}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.90)$$

resultando no seguinte salto para o campo de deslocamentos:

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{2B}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \llbracket F_{E_j}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.91)$$

3.4.1.6 MEF_G-E - Estratégia de Enriquecimento III (EE-III)

A diferença entre as estratégias de enriquecimento EE-II e EE-III do MEF_G-E consiste apenas na escolha das funções trigonométricas para as distintas combinações com as funções de Heaviside na construção da aproximação do campo de deslocamentos. Aplicase, portanto, o interpolante sobre as funções $\{F_j^l(r, \theta)\}$ definidas pela eq. (3.76), isto é,

$$\{F_{E_j}^l(r, \theta)\}(\mathbf{x}) = \{F_j^l(r, \theta)\} - I_{\phi_j}(\{F_j^l(r, \theta)\})(\mathbf{x}) \quad (3.92)$$

com a mesma simbologia da eq. (3.87).

Desta forma, as equações de aproximação para o campo de deslocamentos, e do salto no campo de deslocamentos quando o enriquecimento trigonométrico é combinado com as funções de Heaviside modificadas (eq. (3.84), EE-III-A) passam a ser escritas como, respectivamente,

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{3A}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) \mathcal{H}_{\text{mod}}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 F_{E_j}^l(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j^l \right]}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.93)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{3A}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}_{\text{mod}}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 \llbracket F_{E_j}^l(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j^l \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.94)$$

Ao salto em $\llbracket F_{E_j}^l(\mathbf{x}) \rrbracket$ se aplica o mesmo raciocínio da seção 3.4.1.5, isto é, sua equivalência com o salto da função empregada na versão convencional do MEFG/X.

Por sua vez, para a combinação do enriquecimento trigonométrico da eq. (3.76) com as funções de Heaviside nodalmente deslocadas (EE-III-B) pode-se escrever:

$$\mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{3B}}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}} N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j}_{S_{\text{MEF}}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} N_j(\mathbf{x}) [\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)] \mathbf{a}_j}_{S_{\text{ENR}}^D} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 F_{E_j}^l(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j^l \right]}_{S_{\text{ENR}}^T} \quad (3.95)$$

$$\llbracket \mathbf{u}_{\text{MEFG-E}_{3B}}^h \rrbracket(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{I}_H} N_j(\mathbf{x}) \llbracket \mathcal{H}(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{a}_j + \sum_{j \in \mathcal{I}_T} N_j(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^6 \llbracket F_{E_j}^l(\mathbf{x}) \rrbracket \mathbf{b}_j^l \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (3.96)$$

3.5 Forma Discreta das Equações do Problema

Aplicando as equações de aproximação do campo de deslocamentos para as diferentes estratégias de enriquecimento abordadas na seção 3.4 à forma fraca do problema (eq. (3.7)), pode-se obter:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ZPF}}} \llbracket \hat{\mathbf{N}} \rrbracket^T \mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) d\Gamma = \int_{\partial\Omega^\sigma} \hat{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{t}} ds \quad (3.97)$$

onde $\hat{\mathbf{B}}$ representa a matriz de derivadas espaciais, $\hat{\mathbf{N}}$ é a matriz de funções de forma, e $\llbracket \hat{\mathbf{N}} \rrbracket = \hat{\mathbf{N}}(r, \pi) - \hat{\mathbf{N}}(r, -\pi)$ é a matriz construída para representar o salto no campo de deslocamentos na trinca.

No sistema computacional empregado para as simulações deste trabalho, o INSANE, as matrizes de funções de forma e de derivadas espaciais são montadas a partir da incidência nodal, partindo dos graus de liberdade associados ao MEF até eventuais parâmetros nodais acrescidos em metodologias baseadas no MEFG/X para cada nó. É por esta razão que se optou por representar as matrizes $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{N}}$ com chapéu, de forma a destacar sua diferença em relação às matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ convencionais do MEF. Essas matrizes contêm além das funções convencionais do MEF aquelas funções advindas do MEFG/X e/ou MEFG-E. É importante observar ainda que as colunas de $[\hat{\mathbf{N}}]$ associadas aos graus de liberdade do MEF ($\tilde{\mathbf{u}}_j$) são zeradas em razão da continuidade de $N_j(\mathbf{x})$ dentro de um elemento, em consonância com as equações de salto no campo de deslocamentos abordadas na seção 3.4.

A fim de desenvolver um procedimento de solução incremental, as relações constitutivas devem ser escritas em forma de taxas. A taxa de variação das tensões no contínuo é expressa em termos das velocidades dos deslocamentos nodais como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{B}}\dot{\hat{\mathbf{u}}} \quad (3.98)$$

onde $\dot{\hat{\mathbf{u}}}$ representa a taxa de um vetor de coeficientes que inclui os graus de liberdade pertinentes apresentados nas equações do campo de deslocamentos, para cada estratégia de enriquecimento, na seção 3.4. Analogamente, a taxa das tensões coesivas na descontinuidade pode ser expressa em termos de velocidades nodais como

$$\dot{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{T}}[\dot{\hat{\mathbf{u}}}] = \bar{\mathbf{T}}[\hat{\mathbf{N}}(r, \pi) - \hat{\mathbf{N}}(r, -\pi)]\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{T}}[\hat{\mathbf{N}}]\dot{\hat{\mathbf{u}}} \quad (3.99)$$

onde $\bar{\mathbf{T}}$ é definida pelas matrizes $\mathbf{T}$ ou $\mathbf{S}$ apresentadas para as leis coesivas aqui abordadas, de acordo com o valor assumido pela função de carregamento f (seção 3.3.1), devidamente pré e pós multiplicadas pela transposta de e pela matriz de rotação para coordenadas globais.

Substituindo as eqs. (3.98) e (3.99) na eq. (3.97), obtém-se o sistema de equações a ser resolvido:

$$\underbrace{\left(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ZPF}}} [\hat{\mathbf{N}}]^T \bar{\mathbf{T}} [\hat{\mathbf{N}}] d\Gamma \right)}_{\mathbf{K}} \dot{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{f}_{\hat{\mathbf{u}}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\hat{\mathbf{u}}}^{\text{int}} \quad (3.100)$$

com $\mathbf{K}$ sendo a matriz de rigidez,

$$\mathbf{f}_{\hat{\mathbf{u}}}^{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega^\sigma} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} ds, \quad (3.101)$$

e

$$\mathbf{f}_{\hat{\mathbf{u}}}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ZPF}}} [\hat{\mathbf{N}}]^T \mathbf{t}([\mathbf{u}]) d\Gamma \quad (3.102)$$

3.5.1 Estratégia de Integração Numérica

Esta seção objetiva trazer uma breve explanação sobre a estratégia de integração numérica adotada para os elementos que contêm alguma descontinuidade nas simulações conduzidas nesta tese. Como se verá no capítulo 5, um adequado tratamento da integração numérica se mostrará fundamental para garantir a robustez de algumas das estratégias de enriquecimento aqui propostas. O procedimento de integração numérica tratado nesta seção se baseia em pequenas adaptações do trabalho de Campos (2020).

Seja, por exemplo, um elemento finito quadrilateral Q4, com as coordenadas cartesianas nodais físicas (x, y) e paramétricas (ξ, η) apresentadas na Fig. 3.13:

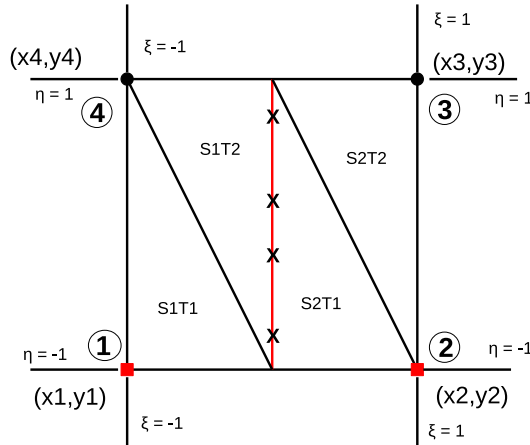


Figura 3.13 – Elemento finito quadrilateral Q4 qualquer que ilustra a estratégia de integração numérica. Um exemplo de triangulação, a incidência nodal, e os pontos de integração (x) sobre a trinca são mostrados na figura. O segmento de reta em vermelho representa a trinca com modelo de zona coesiva, e os nós marcados por um quadrado da mesma cor são enriquecidos por funções de Heaviside. Desenho fora de escala.

A parcela da matriz de rigidez de cada elemento $\mathbf{K}_e$ relativa à integração no volume é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \int_e (\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}) t dA = \int_e (\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}) t J d\xi d\eta \quad (3.103)$$

onde t é a espessura do elemento, J é o determinante do Jacobiano e os demais elementos mantêm a simbologia explicitada na seção 3.5. Considerando elementos quadrilaterais, pode-se realizar a integração em ξ e η :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{PG} \sum_{j=1}^{PG} \mathbf{G}(\xi_i, \eta_j) t J(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (3.104)$$

com w_i, w_j sendo os pesos associados aos pontos de integração e $\mathbf{G}(\xi_i, \eta_j)$ sendo igual ao produto $(\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}})$ avaliado em (ξ_i, η_j) . Para elementos triangulares, por sua vez:

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{PG} \mathbf{G}(r_i, s_i, t_i) t J(r_i, s_i, t_i) w_i \quad (3.105)$$

onde r, s, t são as coordenadas de área do elemento mestre e $\mathbf{G}(r_i, s_i, t_i)$ representa o produto $(\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}})$ avaliado em (r_i, s_i, t_i) .

No caso da estratégia empregada neste trabalho para a integração de quaisquer elementos que contenham alguma descontinuidade, o elemento é subdividido em células triangulares, segundo a triangulação de Delaunay (Fig. 3.13). A cada uma dessas células, é atribuída a quantidade de pontos de integração prescrita pelo usuário, de acordo com as coordenadas paramétricas de Bathe (2014). Assim sendo, o cálculo realizado pelas eqs. (3.104) e (3.105) passa a ser a soma das parcelas de cada célula triangular (CAMPOS, 2020). Desta forma, pode-se chegar a

$$\mathbf{K}_e = \sum_{j=1}^{NT} \sum_{i=1}^{PG} \mathbf{G}(r_i, s_i, t_i) J_j(r_i, s_i, t_i) w_i t = t \sum_{j=1}^{NT} J_j(r_i, s_i, t_i) \sum_{i=1}^{PG} \mathbf{G}(r_i, s_i, t_i) w_i, \quad (3.106)$$

colocando-se em evidência a espessura t , constante para cada elemento finito e o jacobiano, constante para células triangulares de lados retos.

Um desenvolvimento mais completo pode ser encontrado em Campos (2020). Cabe ressaltar que esta estratégia é empregada na integração tanto dos elementos enriquecidos pelas funções degrau quanto dos elementos que usam funções trigonométricas para representar a trinca. Uma vez que estas funções são não singulares, a estratégia adotada para a integração da matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ continua válida também nesta situação. O que muda é o resultado da triangulação de Delaunay, a depender da configuração geométrica assumida pela trinca.

No caso das análises que empregam modelos distribuídos, seguindo também a implementação de Campos (2020), as degenerações guardam, além das coordenadas naturais e pesos de integração, as variáveis constitutivas que são atualizadas a cada passo da trajetória de equilíbrio. Faz-se necessário que estas informações estejam presentes nos novos pontos de integração criados em função da geração das células triangulares. Uma vez que os novos pontos não possuem histórico das variáveis, recorreu-se a um processo de atribuição por média ponderada. Para tal, baseou-se na lógica da formulação não local, apresentada na seção 3.2.4 e comumente empregada em modelos de dano a fim de melhor representar o comportamento do material (CAMPOS, 2020). Assim, as novas degenerações criadas têm os valores de suas variáveis constitutivas atribuídos a partir de uma ponderação dos valores prévios registrados para os pontos de integração existentes. Tal ponderação considera como função peso a função expressa pela eq. (3.37), com $k = 1,0$ e $l = \sqrt{A_e}$, sendo A_e a área do elemento finito no qual a integração está sendo realizada. A Fig. 3.14 ilustra como a formulação não local é empregada no contexto da integração numérica pela subdivisão de elementos.

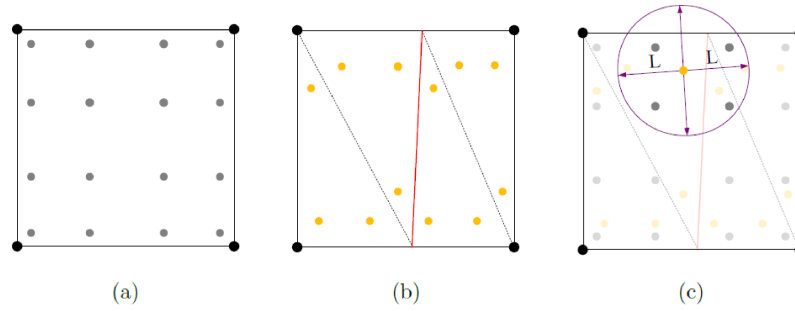


Figura 3.14 – Ponderação das variáveis constitutivas para os novos pontos de integração (CAMPOS, 2020).

É válido observar que essa ponderação é relevante em alguns dos modelos investigados no capítulo 6. Particularmente, naqueles que desconsideram a transição energética proposta na seção 3.3.3, ou seja, nos quais o dano oriundo do modelo constitutivo continua atuando mesmo com a introdução de uma descontinuidade. No modelo aqui proposto, no entanto, o dano é congelado nos elementos nos quais a trinca é introduzida. Com isso, os novos pontos de integração criados precisam ter devidamente apenas os valores de dano a eles atribuídos, de forma a impedir erros no processo de verificação da propagação (que se baseia na avaliação desta variável, como exposto na seção 3.3.2.2).

Para a integração das forças coesivas, seguindo o trabalho de Moës e Belytschko (2002), é empregada a integração Gaussiana convencional sobre cada segmento de trinca, considerando 4 pontos de integração por segmento. Assim:

$$\int_L [\hat{\mathbf{N}}]^T \bar{\mathbf{T}} [\hat{\mathbf{N}}] J d\xi = \sum_{i=1}^{PG} \mathbf{H}(\xi_i) J(\xi_i) w_i \quad (3.107)$$

com $\mathbf{H}(\xi_i)$ sendo o produto $([\hat{\mathbf{N}}]^T \bar{\mathbf{T}} [\hat{\mathbf{N}}])_L$ avaliado em ξ_i e $J(\xi_i) = L/2$, já que cada segmento de trinca é considerado um elemento finito de dois nós (L é, portanto, o comprimento do segmento em questão).

A integração dos demais elementos da malha também é feita usando a estratégia de Gauss. A não ser quando definido diferentemente, no INSANE, é pré-estabelecido que modelos que empreguem o MEFG/X e métodos dele derivados utilizem 4×4 para elementos do tipo Q4 e 3 pontos para elementos do tipo T3. O número de pontos escolhido para elementos do tipo Q4 tem por base a utilização do MEFG/X em modelos distribuídos. Para materiais de comportamento linear elástico, salvo demandas das funções enriquecedoras empregadas, o número mínimo de pontos pode ser empregado, retornando o mesmo resultado.

4 Análise do Comportamento das Funções Enriquecedoras Propostas

Neste capítulo, são expostos os resultados preliminares relativos ao estudo do comportamento das funções de enriquecimento discutidas no capítulo 3. A seção 4.1 compara o desempenho das diferentes funções de Heaviside propostas no contexto do MEFG-E e do MEFG/X em um experimento de flexão em três pontos, considerando a capacidade de representação do amolecimento a partir das trajetórias de equilíbrio e o condicionamento à medida que a trinca propaga em duas configurações distintas de malhas. A partir destes experimentos, constata-se que as funções de Heaviside lineares tal como propostas por Gupta et al. (2013) apresentam de fato um problema de robustez com a evolução da propagação. Na seção 4.2, por sua vez, discute-se a evolução do condicionamento com o refinamento h da malha da combinação dos enriquecimentos propostos no capítulo 3 para um problema linear estático. Este problema é também empregado para estudar a robustez das funções enriquecedoras, variando a configuração da trinca na malha a partir de uma aproximação gradual da descontinuidade das arestas dos elementos. Constata-se que as funções propostas são robustas, e que o MEFG-E pode apresentar ganhos significativos em termos de condicionamento quando se emprega uma base maior de funções trigonométricas.

4.1 Verificação das Funções de Heaviside

Os experimentos numéricos conduzidos nesta seção visavam verificar a generalização da implementação computacional realizada no INSANE (ver apêndice A) para a construção da matriz $[\hat{\mathbf{N}}]$ da eq. (3.100), relativa ao cômputo do salto das funções de enriquecimento empregadas para representar a trinca com modelo de zona coesiva. Para tal, as estratégias de enriquecimento EE-I- H_L e EE-I- H_{mod} do MEFG-E (eqs. (3.79) e (3.84) da seção 3.4.1.4, respectivamente) foram contrapostas à estratégia de enriquecimento EE-I do MEFG/X, a partir de experimentos numéricos realizados com uma viga sob flexão em 3 pontos (Fig. 4.1). Este exemplo foi escolhido por constar no trabalho de Silva (2016), servindo como parâmetro, portanto, não só para avaliação da performance do MEFG-E neste tipo de problema, como também para conferência dos resultados obtidos pelo MEFG/X após a generalização do código. O modelo coesivo adotado foi descrito nas seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1 do capítulo 3. A única ressalva refere-se ao critério de direção adotado para a trinca. À época dos experimentos, o critério da máxima tensão circunferencial, descrito na seção 3.3.2.1, ainda não havia sido implementado no INSANE. Empregou-se, portanto, o critério da direção perpendicular à máxima deformação principal não local, descrito

na seção 3.3.2.2. A viga foi modelada em estado plano de tensão, utilizando elementos quadriláteros do tipo Q4.

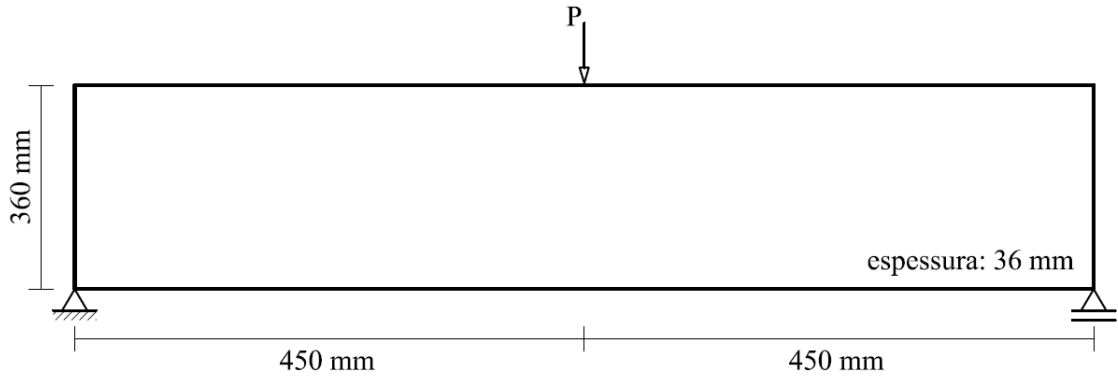


Figura 4.1 – Viga sob flexão em 3 pontos utilizada nos experimentos numéricos desta seção (PENNA, 2011).

Optou-se por utilizar, nestas simulações, um modelo constitutivo linear elástico, com os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade $E = 44.000,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, resistência à tração $f_t = 3,8 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,164 \text{ N/mm}$ e resistência inicial da fissura ao cisalhamento $d_{\text{init}} = 61,111 \text{ N/mm}^3$. Este parâmetro foi obtido seguindo estimativa desenvolvida por Silva (2016), em que $d_{\text{init}} = \beta_r G/l_c$, com $\beta_r = 0,05$ sendo o fator de retenção ao cisalhamento, $G = E/2(1 + \nu)$ e l_c sendo o tamanho do incremento de trinca. Nas simulações desta seção, que considera apenas enriquecimentos derivados das funções de Heaviside, l_c é, naturalmente, equivalente à altura dos elementos finitos (no caso, 15 mm). Cabe observar que com a evolução do trabalho, o entendimento a respeito do parâmetro d_{init} foi alterado. Assim como outras variáveis necessárias à definição da lei coesiva descrita na seção 3.3.1.1, como G_f e f_t , d_{init} passou a ser visto como um parâmetro do material, de valor fixo, dispensando-se sua estimativa na inexistência de dados de referência concretos. Este tratamento é adotado a partir do capítulo 5.

A integração numérica dos elementos cortados pela trinca é realizada a partir da subdivisão destes elementos em células triangulares, empregando a implementação desenvolvida por Campos (2020), com três e seis pontos de Gauss em cada célula para o MEFG/X e o MEFG-E, respectivamente. Os demais elementos foram integrados a partir da quadratura gaussiana convencional, com 4×4 pontos, valor default do INSANE para o MEFG/X e abordagens derivadas, embora o número mínimo de pontos pudesse ter sido utilizado. Por fim, a integração sobre a trinca, na ausência de enriquecimento trigonométrico, foi realizada com base no número de pontos adotados no trabalho de Wells e Sluys (2001). Para o MEFG/X, portanto, foram adotados dois pontos de Gauss por segmento. Para o MEFG-E, três pontos de Gauss foram empregados para cada segmento. Nesse estágio inicial, para fins de investigação, um número de pontos de integração maior foi concedido

às abordagens do MEFG-E considerando a natureza bi-linear do interpolante que compõe as funções de enriquecimento desta abordagem neste experimento. Posteriormente, optou-se por dispensar o mesmo tratamento de integração numérica para ambas estratégias para fins de comparação.

Para os experimentos dispostos nas seções 4.1.1 e 4.1.2, três valores do parâmetro de estabilização α , proposto em Wu e Li (2015b), são avaliados: 0,1, 0,5 e 1,0 (EE-I-H_{mod} $\alpha = 0.1$, EE-I-H_{mod} $\alpha = 0.5$ e EE-I-H_{mod} $\alpha = 1.0$, respectivamente). Para a solução do modelo, foi empregado o método de controle direto de deslocamentos, incrementando-se de 0,0015 *mm* o deslocamento horizontal do apoio direito (Fig. 4.1), com rigidez tangente e tolerância para convergência em termos absolutos de força de 1×10^{-4} e carga de referência $P = 1,0$ *N*. O condicionamento é avaliado, a cada passo da análise, empregando o número de condicionamento escalonado, $C(\hat{\mathbf{K}})$, como definido por Gupta et al. (2013):

$$C(\hat{\mathbf{K}}) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1 \quad (4.1)$$

onde λ_{max} e λ_{min} são o maior e o menor autovalor da matriz $\hat{\mathbf{K}}$, respectivamente. $\hat{\mathbf{K}}$ é a matriz escalonada, expressa como

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{D}$, neste caso, é a matriz diagonal tal que $D_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{K_{ij}}}$.

A trinca propaga a partir de um defeito (entalhe) inicial, inserido através da função de Heaviside pertinente (Figs. 4.2 e 4.5). Os resultados dos experimentos dispostos nesta seção foram publicados, de forma mais sucinta e como parte do desenvolvimento desta tese, por Oliveira, Barros e Campos (2020).

4.1.1 Experimento 1

O principal objetivo do experimento realizado nesta seção, além de verificar a implementação, é estudar as performances dos MEFG-Es que adotam o parâmetro de estabilização (EE-I-H_{mod}), determinado heurísticamente, uma vez que, no trabalho de Wu e Li (2015b), valores maiores de α não conduzem a bons resultados. A malha empregada neste experimento pode ser vista na Fig. 4.2 (com 15 x 24 divisões). A Fig. 4.3 mostra, por sua vez, as trajetórias de equilíbrio obtidas para cada uma das abordagens aqui investigadas, enquanto a Fig. 4.4 apresenta os números de condicionamento obtidos em cada passo da análise.

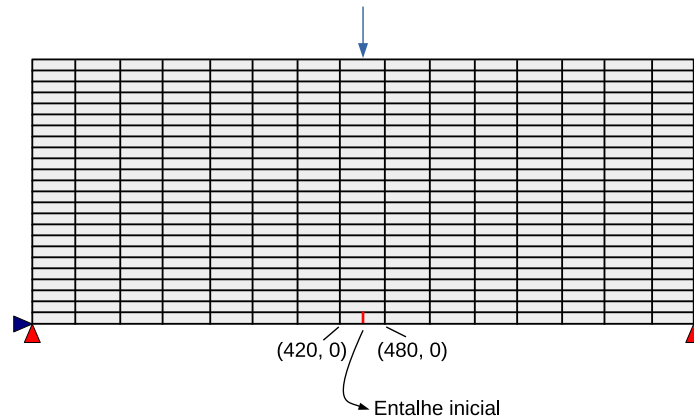


Figura 4.2 – Malha empregada no experimento 1, com elementos finitos de dimensões $60 \times 15 \text{ mm}$. Adaptado de Oliveira, Barros e Campos (2020).

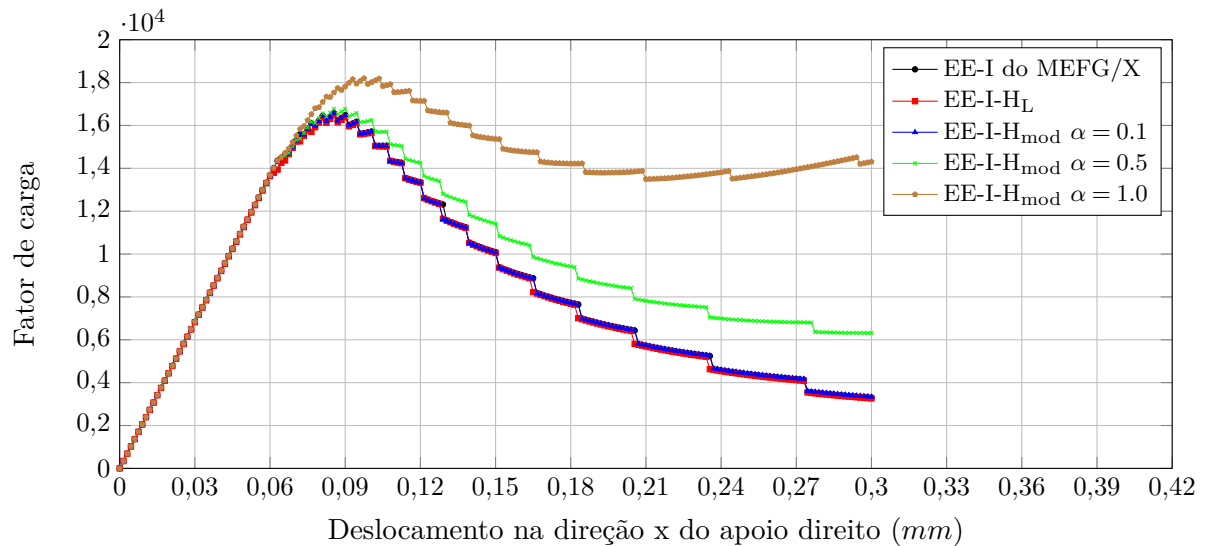


Figura 4.3 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a malha da Fig. 4.2, usando diferentes funções de Heaviside como enriquecimento.

É possível observar na Fig. 4.3 que as trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias de enriquecimento EE-I do MEFG/X, EE-I- H_L e EE-I- H_{mod} $\alpha = 0.1$ do MEFG-E são praticamente coincidentes. Além disso, estas respostas podem ser consideradas “acuradas” naquilo que Wu e Li (2015b) denominaram como uma resposta sem travamento (em inglês, “*stress locking-free*”): mesmo após a trinca surgir no último elemento da fila, o cálculo continua, representando um colapso estrutural completo a partir da perda de capacidade de carga. Com o aumento do parâmetro α , o modelo não tem a mesma acurácia, chegando ao ponto de representar, quando $\alpha = 1$, um ganho na capacidade de carga, mesmo que a trinca esteja propagando. Este comportamento é bastante similar ao verificado por Wu e Li (2015b) em suas análises. Estes autores o atribuem à incapacidade do MEFG-E de reproduzir as rotações de corpo rígido relativas quando se utiliza das funções de Heaviside convencionais, reproduzidas à medida que α tende a 1,0 na EE-I- H_{mod} .

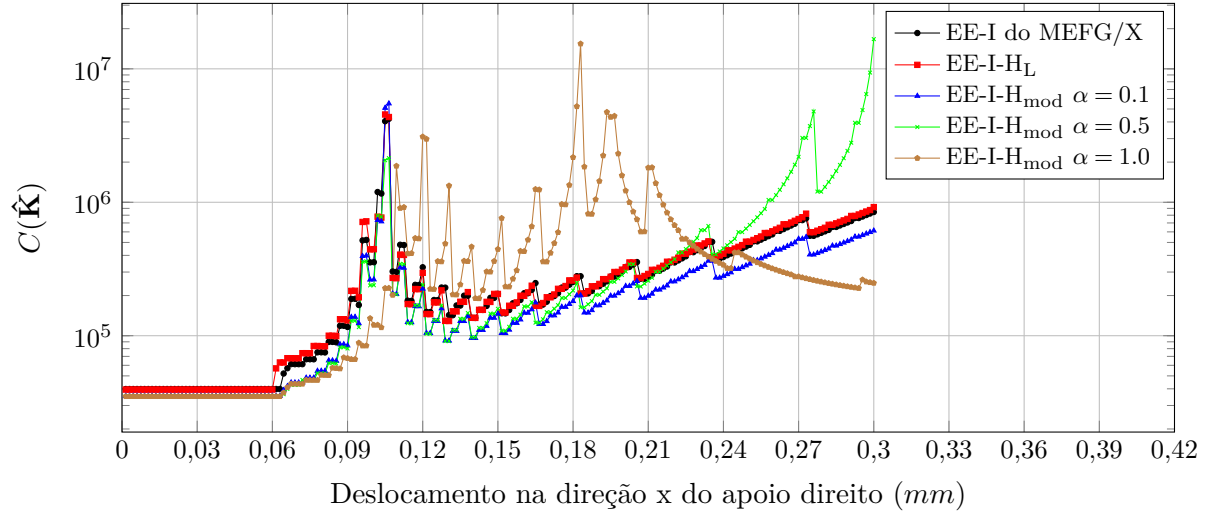


Figura 4.4 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, para a malha da Fig. 4.2. Diferentes funções de Heaviside são empregadas.

A Fig. 4.4, por sua vez, revela que, apesar de algumas oscilações ocorridas ao longo do experimento, em geral, os valores mais baixos de número de condicionamento foram obtidos empregando as abordagens EE-I- H_{mod} do MEFG-E quando $\alpha = 0.1$, que tende a reproduzir a EE-I do MEFG/X, e a própria EE-I do MEFG/X, respectivamente. Ao contrário do verificado no trabalho de Wu e Li (2015b), no entanto, EE-I- H_{mod} $\alpha = 1.0$ e EE-I- H_{mod} $\alpha = 0.5$, embora tenham, ao início da análise, resultados melhores que as demais abordagens em termos de condicionamento, sofrem oscilações, respectivamente, no meio e ao final deste processo que provocam uma deterioração tal neste parâmetro superior à verificada para as demais estratégias, ainda que os $C(\hat{\mathbf{K}})$ s de EE-I- H_{mod} $\alpha = 1.0$ voltem a cair com a proximidade do término dos passos. A abordagem EE-I- H_L do MEFG-E, por fim, apresenta números de condicionamento ligeiramente superiores àqueles verificados para o MEFG/X e, de maneira geral, um desempenho bastante similar ao desta abordagem.

4.1.2 Experimento 2

Apesar de os resultados apresentados para o condicionamento das diversas abordagens aqui tratadas na Fig. 4.4 permitirem observar algumas tendências de comportamento, os valores calculados para os números de condicionamento estão, em geral, próximos, em termos de ordem de grandeza, e os $C(\hat{\mathbf{K}})$ s obtidos para a EE-I do MEFG/X são relativamente baixos. Com o intuito de investigar se os ganhos alcançados relativamente a esta grandeza utilizando a estratégia estável associada ao parâmetro de estabilização α seriam realmente significativos, bem como de verificar a robustez da EE-I do MEFG/X e da EE-I- H_L do MEFG-E - já que em outros trabalhos, como em Zhang, Babuška e Banerjee (2016) e em Oliveira et al. (2019), esta função não se mostrou robusta -, propôs-se a malha ilustrada na Fig. 4.5. Nela, buscou-se criar uma condição desfavorável, em termos de

condicionamento, fazendo com que a descontinuidade cortasse os elementos de tal forma a dividi-los em porções desiguais. Isso com o objetivo de explorar a falta de robustez das funções de Heaviside convencionais em relação à posição da descontinuidade e dos nós dos elementos, bem conhecida pela literatura (DOLBOW; MOËS; BELYTSCHKO, 2000). A Fig. 4.6 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias, enquanto a Fig. 4.7 ilustra seus respectivos números de condicionamento para cada passo.

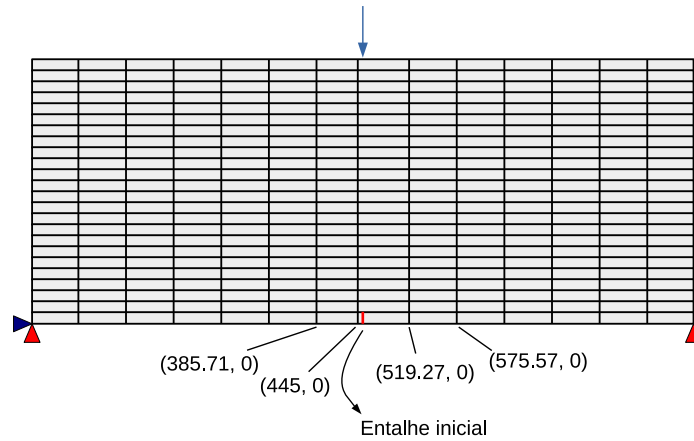


Figura 4.5 – Malha adotada no experimento 2. Adaptado de Oliveira, Barros e Campos (2020).

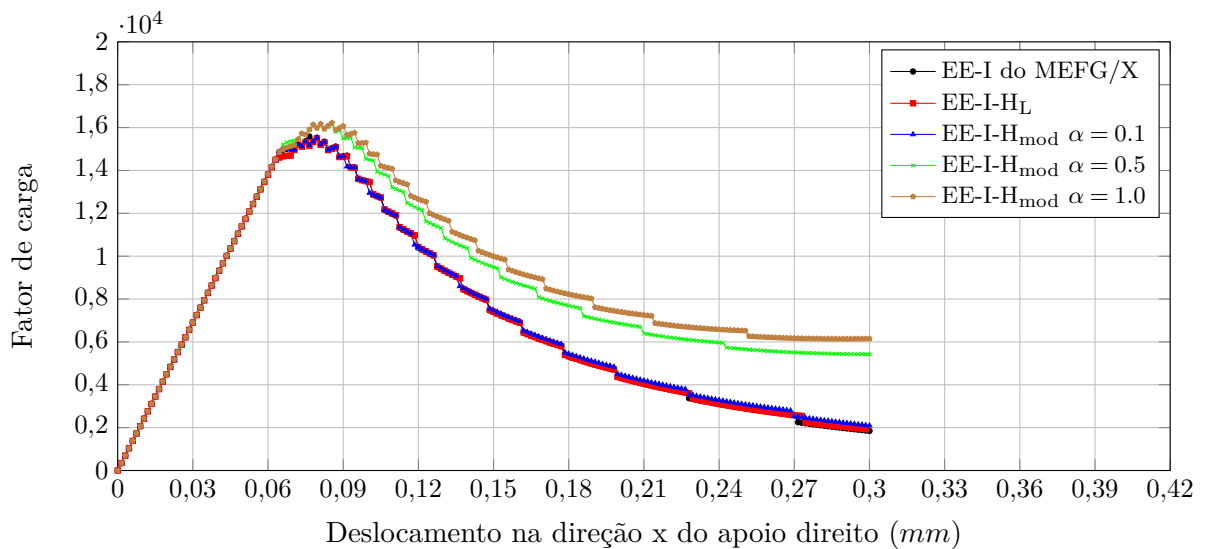


Figura 4.6 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a malha da Fig. 4.5, usando diferentes funções de Heaviside como enriquecimento.

Pode-se notar pela Fig. 4.6 que as tendências observadas na seção 4.1.1 se mantiveram, e os resultados mostrados nas Figs. 4.3 e 4.6 são parecidos. A diferença básica entre elas é que, na nova configuração, as estratégias EE-I- H_{mod} do MEF-G-E que utilizam um α mais alto conseguem simular um pouco melhor o comportamento esperado, ainda que

a resposta de $\text{EE-I-H}_{\text{mod}} \alpha = 1.0$ não esteja totalmente livre de travamento, e que as abordagens ainda sejam um pouco mais dúcteis que as demais estratégias.

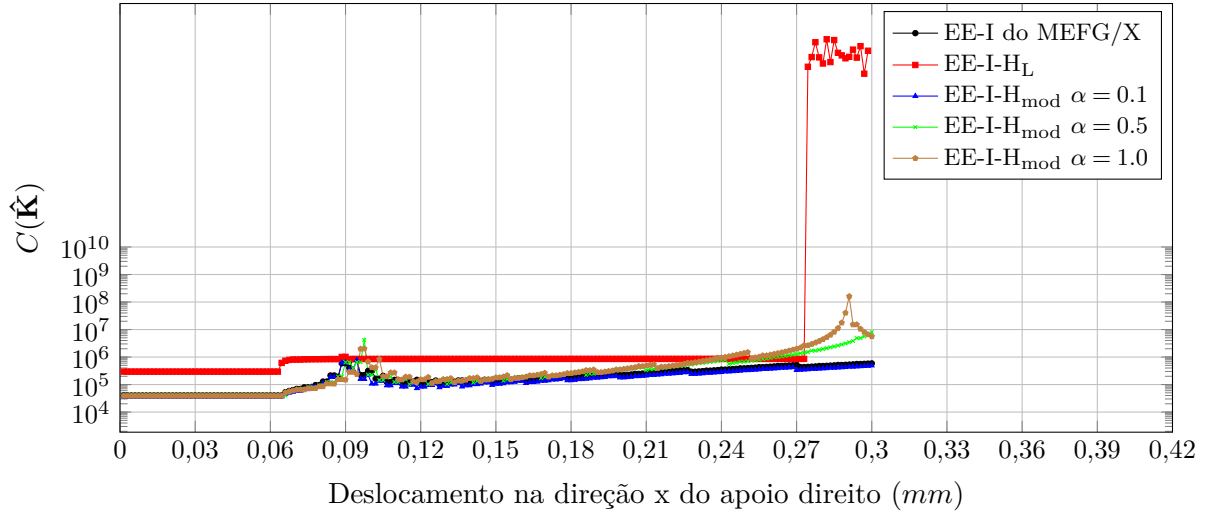


Figura 4.7 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, para a malha da Fig. 4.5. Diferentes funções de Heaviside são empregadas.

Por outro lado, a Fig. 4.7 mostra que, assim como em Wu e Li (2015b), a estratégia $\text{EE-I-H}_{\text{mod}} \alpha = 0.1$ parece ser robusta quando considerada a posição relativa entre a trinca e a malha. Uma vez mais, esta abordagem atingiu os melhores resultados em termos de condicionamento. Para os demais experimentos desta tese, com base nestes resultados, adotou-se, portanto, o valor de $\alpha = 0,1$ para esta abordagem. É interessante observar ainda que a estratégia EE-I do MEFG/X também se mostrou robusta. De fato, este resultado indica consonância com aquilo que foi apontado nos trabalhos de Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020) e Ndeffo et al. (2017). O uso da função de Heaviside com deslocamento nodal (EE-I do MEFG/X) associado a uma estratégia de integração com subdivisão e o pré-condicionamento da matriz de rigidez indica ser suficiente para garantir a estabilidade numérica, em termos de condicionamento, da função em questão. Na contramão das outras estratégias, a falta de robustez da EE-I-H_L fica evidente no gráfico da Fig. 4.7, principalmente nos últimos passos da análise. É importante destacar que, em razão de sua capacidade de aproximação superior oriunda da introdução dos termos lineares quando comparada à função de Heaviside tradicional, as funções de Heaviside lineares têm sido empregadas, com modificações que visam garantir sua robustez, em trabalhos recentes da literatura, como Bento, Proença e Duarte (2022) e Cui et al. (2022). Este emprego se dá em geral em problemas da mecânica da fratura com aproximações de ordem superior, o que não é o caso dos problemas aqui tratados. Neste trabalho, portanto, optou-se por abandonar o uso desta estratégia de enriquecimento. Observa-se, por fim, que as estratégias $\text{EE-I-H}_{\text{mod}} \alpha = 0.5$ e $\text{EE-I-H}_{\text{mod}} \alpha = 1.0$ tiveram comportamento similar ao discutido na seção 4.1.1.

4.2 Avaliação de robustez e condicionamento dos enriquecimentos trigonométricos

Os experimentos numéricos conduzidos nesta seção visaram à avaliação do crescimento do condicionamento com refinamento h e da robustez das demais estratégias de enriquecimento dispostas no capítulo 3. Posto de outro modo, seu principal objetivo era prover um panorama do comportamento das abordagens propostas em termos de estabilidade numérica, além de verificar a implementação da classe relativa à representação do(s) enriquecimento(s) trigonométrico(s). Para tal, fez-se uso de um problema presente nos trabalhos de Oliveira (2018) e Oliveira et al. (2019). Trata-se de uma chapa de espessura unitária submetida a estado plano de tensão, com carregamento de tração também unitário aplicado em sua extremidade superior (Fig. 4.8). A chapa possui ainda uma trinca em sua estrutura, cuja ponta se localiza em seu centro geométrico. Os parâmetros de material empregados (em unidades consistentes) são módulo de elasticidade $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Não se considera aqui a propagação de trincas e nem a lei coesiva. Trata-se de um problema de MFLE com trinca estática.

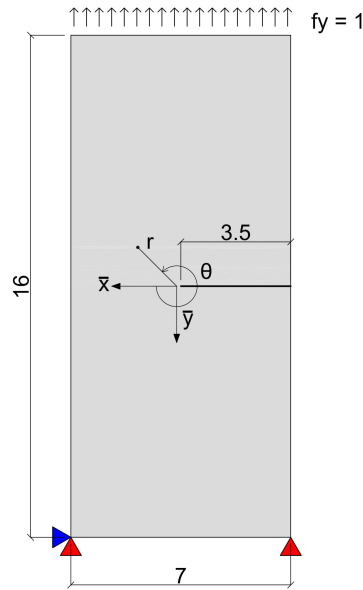


Figura 4.8 – Chapa tracionada investigada nos experimentos desta seção (OLIVEIRA et al., 2019).

4.2.1 Estudo de crescimento dos números de condicionamento

Para os experimentos numéricos realizados nesta seção, foram consideradas três malhas aninhadas, também extraídas do trabalho de Oliveira (2018) e dispostas na Fig. 4.9.

Os nós em vermelho da Fig. 4.9 são enriquecidos pelas funções de trinca das estratégias de enriquecimento EE-II e EE-III do MEFG/X e do MEFG-E (eqs. (3.72), e (3.76), além das eqs. (3.87), e (3.92), respectivamente). Os nós verdes, por outro lado, são enriquecidos pelas funções de Heaviside nodalmente deslocadas (estratégias EE-II - eq. (3.73) da seção

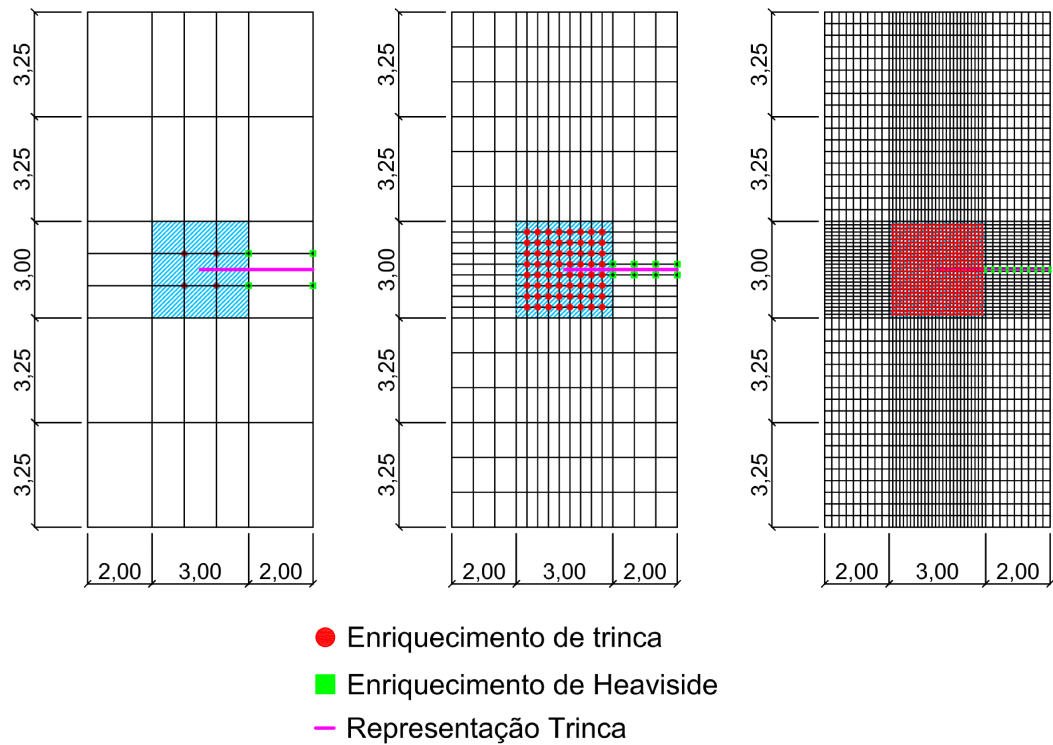


Figura 4.9 – Malhas empregadas nos experimentos desta seção, bem como esquema de enriquecimento utilizado. Adaptado de Oliveira (2018).

3.4.1.2 - e EE-III - eq. (3.77) da seção 3.4.1.3 - do MEFG/X e EE-II-B - eq. (3.90) da seção 3.4.1.5 - e EE-III-B - eq. (3.95) da seção 3.4.1.6 - do MEFG-E) ou modificadas pelo parâmetro de estabilização (estratégias EE-II-A - eq. (3.88) da seção 3.4.1.5 - e EE-III-A - eq.(3.93) da seção 3.4.1.6 - do MEFG/E). Nos elementos cortados pela trinca, a integração numérica é realizada a partir de subdivisão em células triangulares, com três pontos de Gauss em cada célula. Na região de enriquecimento geométrico das funções trigonométricas, os elementos de mistura são integrados com 12×12 pontos de Gauss. Os demais elementos da malha são integrados com 8×8 pontos, seguindo Oliveira (2018), embora o número mínimo de pontos pudesse ter sido utilizado produzindo exatamente o mesmo resultado.

Os resultados obtidos para o condicionamento podem ser vistos na Fig. 4.10. Nesta, são dispostas também as taxas de crescimento do condicionamento para as diferentes estratégias de enriquecimento estudadas.

Pode-se perceber que as abordagens que empregam apenas um termo para compor a função trigonométrica (EE-II do MEFG/X, e EE-II-A e EE-II-B do MEFG-E) são aquelas que obtêm os menores números de condicionamento, bem como as menores taxas de crescimento. De fato, considerando que, segundo Babuška e Banerjee (2012), o condicionamento de um MEFG-E deve ter sua taxa de crescimento da ordem de h^{-2} , o que equivaleria,

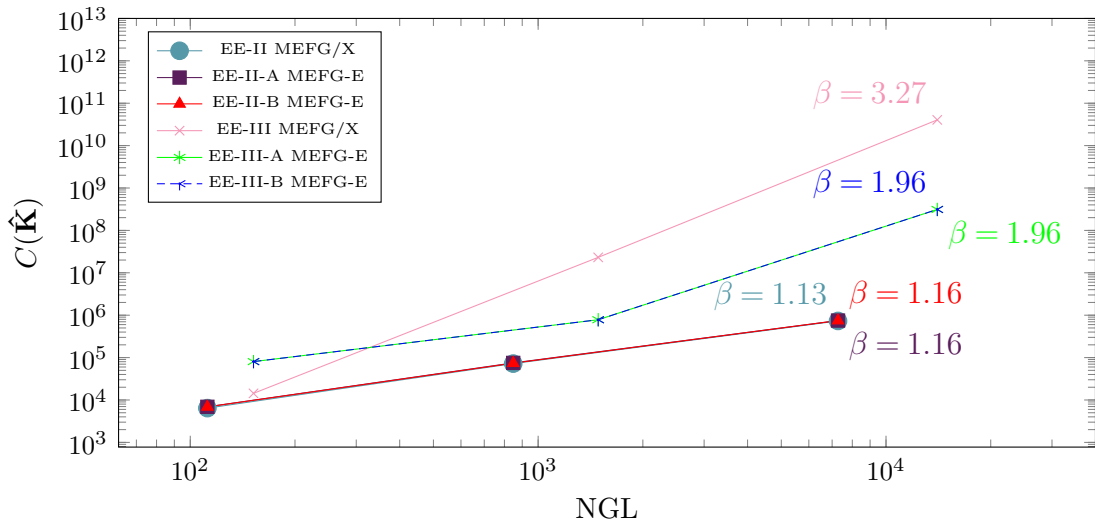


Figura 4.10 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ pelo número de graus de liberdade (NGL) para as três malhas da Fig. 4.9.

em termos de NGL para problemas 2D, a algo próximo da unidade, os resultados obtidos indicam que estas estratégias de enriquecimento estão próximas do comportamento almejado. Deve-se observar inclusive que, embora as respostas estejam bastante próximas, podendo ser consideradas equivalentes, diferentemente do que ocorreu na seção 4.1, os menores números de condicionamento das estratégias de enriquecimento estudadas, bem como a menor taxa, pertencem à EE-II do MEFG/X, ou seja, à estratégia que combina as funções de Heaviside nodalmente deslocadas com a função trigonométrica nodalmente deslocada (ver tabela 4.1) - não à uma abordagem do MEFG-E que empregasse as funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização.

Tabela 4.1 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ das estratégias EE-II para as três malhas da Fig. 4.9.

Estratégia de Enriquecimento	Malhas		
	1	2	3
EE-II MEFG/X	5,55E+03	7,22E+04	7,32E+05
EE-II-A MEFG-E	5,91E+03	7,49E+04	7,47E+05
EE-II-B MEFG-E	5,77E+03	7,39E+04	7,47E+05

Há que se fazer, no entanto, uma ressalva acerca do problema estudado. Embora tenha sido uma análise preliminar que permitiu tecer algumas observações iniciais sobre a performance das estratégias de enriquecimento e selecionar as estratégias empregadas nos experimentos dos capítulos posteriores, deve-se ter em mente que o problema em questão (Fig. 4.8) possui singularidade no campo de tensões na ponta da trinca. Isso significa que as funções trigonométricas propostas no capítulo 3 não são capazes de reproduzir o comportamento da solução nas vizinhanças da trinca. Por esta razão, apenas o condicionamento foi avaliado. Portanto, deve-se ter certa parcimônia na interpretação

dos resultados, embora algumas tendências possam sim ser destacadas. Posteriormente, em problemas mais adequados às funções selecionadas, discutir-se-á a acurácia das diversas abordagens.

Quando as estratégias de enriquecimento optam por empregar 6 termos para compor o enriquecimento trigonométrico (EE-III do MEFG/X, e EE-III-A e EE-III-B do MEFG-E), observa-se uma deterioração do condicionamento. Os $C(\hat{\mathbf{K}})$ s verificados para estas abordagens são não só maiores como também suas taxas de crescimento estão acima daquelas observadas para as EE-II. Particularmente, para o MEFG/X o condicionamento cresce mais vertiginosamente, enquanto que os MEFG-Es têm comportamentos muito similares e possuem uma taxa mais baixa ($\beta = 1,96$ contra $\beta = 3,27$ para o MEFG/X). Isso indica que, para a EE-III, a estratégia de subtração do interpolante está de fato tendo algum impacto na estabilização numérica da abordagem em questão, ainda que produza, neste caso, uma taxa um pouco acima da esperada. Este comportamento parece ser recorrente quando a base de funções trigonométricas empregada como enriquecimento é ampliada. Em resultados que não serão aqui exibidos por concisão do equacionamento do capítulo 3, já que esta estratégia de enriquecimento mostrou-se precocemente inviável do ponto de vista computacional, testou-se inclusive empregar todos os nove termos não-singulares propostos por Wang e Waisman (2018) como enriquecimento no problema discutido nesta seção. A consequência é uma deterioração ainda mais significativa dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s para o MEFG/X, com esta abordagem atingindo uma taxa $\beta = 4,28$. Os MEFG-Es, por outro lado, nesse contexto, apresentam taxas de crescimento $\beta = 1,79$ (ou seja, ainda muito abaixo da taxa verificada para a EE-III do MEFG/X e um pouco abaixo da taxa das estratégias EE-III do MEFG-E), indicando certa estabilidade de comportamento apesar do acréscimo de graus de liberdade introduzidos pelo aumento no número de termos empregados na função trigonométrica.

4.2.2 Estudo de robustez

O experimento numérico discutido na seção 4.2.1 apresenta a configuração de trinca mais favorável possível, com a descontinuidade particionando os elementos que atravessa em duas porções iguais. Assim sendo, é pertinente estudar também a robustez das estratégias de enriquecimento consideradas. Para tal, a trinca foi progressivamente aproximada das arestas inferiores dos elementos da malha 1 da Fig. 4.9, com um decréscimo incremental de sua coordenada y original de $h/16$ conforme Fig. 4.11, sendo $h = 1$ a altura dos elementos finitos atravessados pela descontinuidade, até a coordenada $y = 7,5625$, a mais próxima da coordenada das arestas inferiores ($y = 7,5000$). O gráfico da Fig. 4.12 mostra, em escala logarítmica, o comportamento dos números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ com a variação do parâmetro δ/h .

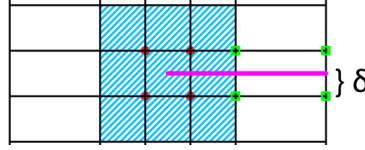


Figura 4.11 – Parâmetro δ no detalhe da região da trinca.

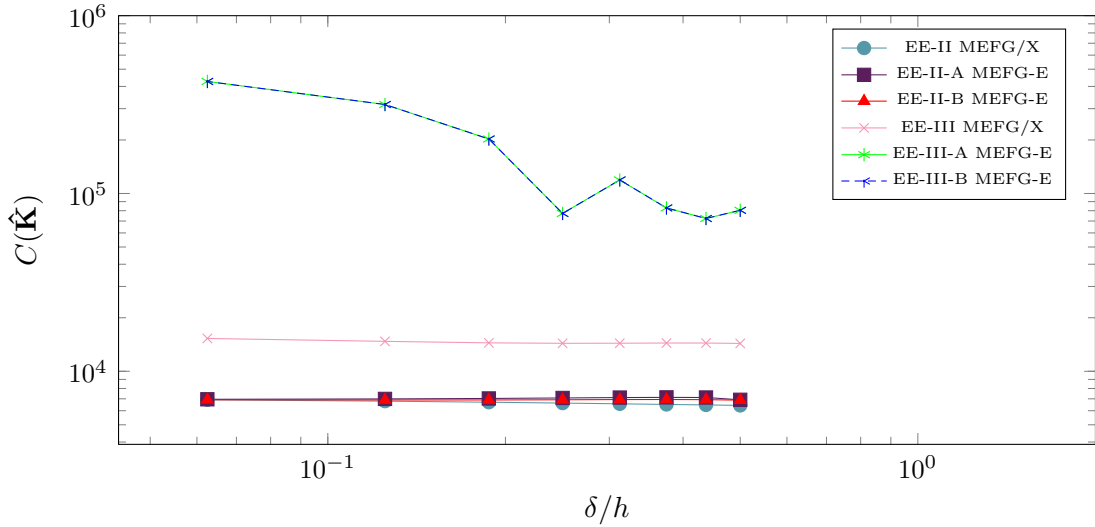


Figura 4.12 – Robustez das estratégias de enriquecimento consideradas.

Pode-se perceber que as abordagens propostas são robustas, variando muito pouco os valores obtidos para os números de condicionamento à medida que a trinca se aproxima da aresta. De fato, este era um resultado esperado para as estratégias EE-II e EE-III do MEFG/X e EE-II-B e EE-III-B do MEFG-E, visto que todas elas empregam as funções de Heaviside nodalmente deslocadas, o que, associado ao pré-condicionador (SANCHEZ-RIVADENEIRA; DUARTE, 2020) e à estratégia de integração numérica adotados contorna as eventuais limitações de robustez relacionadas ao uso das funções de Heaviside. Ao que tudo indica, as funções de Heaviside propostas por Wu e Li (2015b) também são robustas. Pode-se questionar, no entanto, em face dos resultados das demais abordagens, o desempenho das estratégias EE-III do MEFG-E que, depois de oscilar um pouco, têm um acréscimo em seus $C(\hat{\mathbf{K}})$ s com a aproximação da descontinuidade das arestas dos elementos. No entanto, a autora frisa que, em testes similares conduzidos na literatura, como por exemplo em Zhang, Babuška e Banerjee (2016) ou em Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020), funções enriquecedoras consideradas não robustas tiveram acréscimos muito maiores em seus números de condicionamento à medida que a trinca se aproxima da aresta. No primeiro trabalho, salta-se de um $C(\hat{\mathbf{K}})$ da ordem de 10^5 para um $C(\hat{\mathbf{K}})$ da ordem de 10^{35} , enquanto, no segundo, tem-se um salto de menor amplitude - mas ainda assim de algumas ordens superior - de 10^3 para 10^7 . Assim sendo, considerou-se o resultado ilustrado na Fig. 4.12 para as EE-III do MEFG-E mais como um ponto de atenção do que como uma evidência de falta de robustez desta estratégia de

enriquecimento.

4.3 Conclusões parciais

Na seção 4.1, as funções de Heaviside empregadas nas estratégias EE-I do MEFG/X e do MEFG-E, e para composição das demais estratégias de enriquecimento, foram verificadas e estudadas. Constatou-se que, à exceção de EE-I- H_{mod} com valores relativamente altos do parâmetro α , todas as abordagens foram capazes de representar a perda de capacidade de carga da estrutura analisada com a propagação da trinca. Com isso, foi definido o valor do parâmetro de estabilização empregado nos demais experimentos desta tese, $\alpha = 0,1$. Constatou-se ainda que as funções de Heaviside lineares (EE-I- H_L do MEFG-E) não são robustas, tendo o condicionamento da matriz de rigidez associada à esta aproximação experimentado deterioração com a evolução da propagação quando a trinca se aproxima da aresta dos elementos. Com isso, decidiu-se por abandonar o emprego desta estratégia de enriquecimento nos experimentos numéricos conduzidos em capítulos posteriores.

A seção 4.2, por sua vez, traz um estudo de estabilidade numérica das estratégias EE-II e EE-III em termos do número de condicionamento escalonado $C(\hat{\mathbf{K}})$ (eqs. (4.1) e (4.2)). As estratégias de enriquecimento EE-II do MEFG/X e do MEFG-E não só atingiram as taxas de crescimento almejadas para seus respectivos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s, como também se mostraram robustas no que concerne à posição relativa entre a descontinuidade e a malha. Nas estratégias EE-III, por outro lado, houve deterioração no condicionamento com o refinamento da malha, principalmente para o MEFG/X, no qual a taxa de crescimento foi de cerca de três vezes o valor buscado para uma abordagem “estável” (ZHANG; BABUŠKA; BANERJEE, 2016). Apesar disso, a estratégia EE-III do MEFG/X se mostrou uma abordagem robusta. As estratégias EE-III do MEFG-E, embora tenham atingido taxas mais baixas de crescimento dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s com o refinamento da malha - indicando que, para malhas suficientemente refinadas, a estratégia de subtração do interpolante tem de fato impacto na estabilização do condicionamento - ainda estiveram um pouco acima dos valores esperados, e mostraram um desempenho em termos de robustez inferior ao das demais estratégias. Ainda que se possa considerar as abordagens robustas, visto que a deterioração dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s com a aproximação da trinca da aresta não foi significativa, este deve ser um ponto de atenção nos experimentos numéricos que se seguirão.

5 Simulação da Propagação de Trincas com Modelo de Zona Coesiva em Meio Linear Elástico

Neste capítulo, a performance das estratégias de enriquecimento propostas no capítulo 3, com exceção da estratégia EE-I-H_L do MEFG-E, devido à falta de robustez observada na seção 4.1.2, é estudada em três problemas de referência da literatura que envolvem a simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva. Até onde vai o conhecimento da autora, com exceção dos conceitos iniciais discutidos no trabalho de Oliveira, Barros e Penna (2022) como parte dos desenvolvimentos desta tese, é a primeira aplicação do MEFG-E a este tipo de problema na presença de enriquecimento(s) trigonométrico(s). O material dos elementos das malhas adotadas para os diferentes experimentos é representado a partir de um material linear elástico isotrópico, cujos parâmetros, que variam conforme o experimento, são dispostos nas seções pertinentes. O modelo coesivo empregado, portanto, foi descrito nas seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1 do capítulo 3. Como definido no capítulo 4, o valor adotado para o parâmetro de estabilização empregado na estratégia EE-I-H_{mod} é $\alpha = 0,1$. O desempenho das diferentes estratégias é estudado mediante comparação dos resultados obtidos com resultados experimentais, além de outros modelos numéricos de referência, quando disponíveis, a partir das trajetórias de equilíbrio. O condicionamento de cada uma das abordagens é avaliado, em cada passo da análise, a partir do número de condicionamento escalonado, $C(\hat{\mathbf{K}})$ (eqs. (4.1) e (4.2)). As abordagens se mostram, em geral, acuradas e bem condicionadas. Os desempenhos do MEFG/X e do MEFG-E são bastante similares. As estratégias que empregam o(s) enriquecimento(s) trigonométrico(s) (EE-II e EE-III) podem ser consideradas vantajosas nos experimentos em que cresce a influência do modo II na propagação da trinca, já que apresentam maior sensibilidade para capturar mudanças de trajetória nestas situações. Nos problemas em que o modo I é significativamente predominante, as estratégias EE-I, a despeito de sua maior simplicidade, apresentam desempenho satisfatório. As abordagens EE-III se mostraram, com a implementação atual do código, inviáveis do ponto de vista computacional, retornando tempos de análise muito acima das demais, principalmente quando um incremento de trinca pequeno em relação ao tamanho do elemento finito é empregado.

5.1 Ensaio de Tração com Entalhes Assimétricos de Shi et al. (2005)

O primeiro exemplo tratado neste capítulo consiste na reprodução de um ensaio de tração de uma chapa retangular com entalhes assimétricos espaçados verticalmente de 15 mm, e submetida a um carregamento uniformemente distribuído em sua face superior. Este

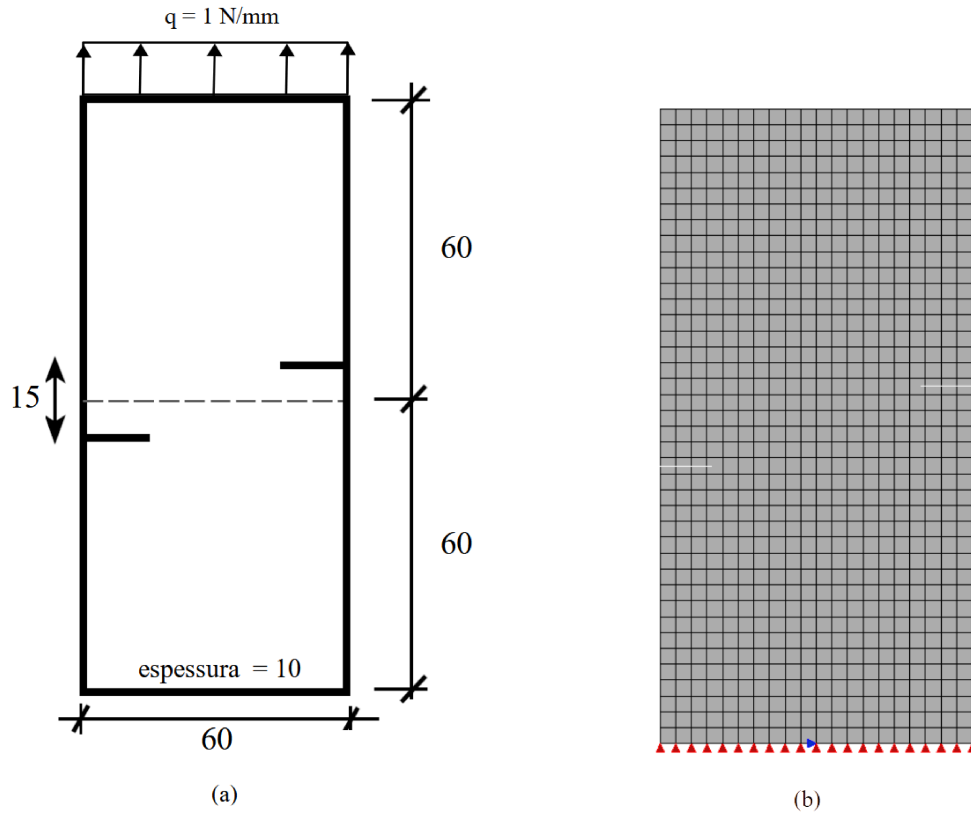


Figura 5.1 – a) Geometria e carregamento da chapa com entalhes assimétricos. Dimensões em mm . b) Malha (elementos com dimensões de $2,5 \times 3,0 \text{ mm}$) e condições de contorno.

espécime foi ensaiado por Shi et al. (2005). A geometria, carregamento e condições de contorno, assim como a malha empregada nos experimentos, podem ser vistos na Fig. 5.1. A chapa é modelada em estado plano de tensão, com elementos quadriláteros do tipo Q4. Os seguintes parâmetros de material (AZEVEDO, 2019) foram adotados: módulo de Elasticidade ou de Young $E = 31\,000,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, resistência à tração $f_t = 3,0 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,050 \text{ N/mm}$, e resistência inicial ao cisalhamento $d_{\text{init}} = 0,0 \text{ N/mm}^3$. Para as estratégias que empregam enriquecimento(s) trigonométrico(s), um incremento de trinca de $2,0 \text{ mm}$ (cerca de $2h/3$) foi assumido. Procurou-se trabalhar, nos experimentos conduzidos nesta tese, com incrementos de trinca suficientemente pequenos para produzir a necessidade de atuação do enriquecimento trigonométrico mas não pequenos demais para gerar um acúmulo de erros em razão das mudanças de direção da trinca no interior de um elemento (BELYTSCHKO; BLACK, 1999). Outros estudos sobre a influência deste parâmetro nos resultados poderão ser conduzidos em trabalhos futuros. O deslocamento vertical de todos os nós da face superior (SHI et al., 2005) foi incrementado em $0,0005 \text{ mm}$ por 500 passos. A análise não linear é solucionada a partir do método de Newton-Raphson, com equilíbrio tangente e tolerância para convergência em termos de deslocamentos de 1×10^{-4} . Os entalhes são

simulados a partir das funções de Heaviside pertinentes a cada uma das estratégias de enriquecimento estudadas.

A integração numérica dos elementos cortados pela trinca é realizada a partir da subdivisão destes elementos em células triangulares, empregando, assim como no capítulo anterior, a implementação desenvolvida por Campos (2020). Foram adotados três pontos de Gauss em cada célula triangular para todas as abordagens. Os demais elementos da malha, não atravessados por descontinuidade, foram integrados a partir da quadratura gaussiana convencional, com 4×4 pontos, valor default do INSANE para o MEFG/X e abordagens derivadas, embora o número mínimo de pontos pudesse ter sido utilizado. Por fim, para integração das forças coesivas sobre os segmentos de trinca foram adotados, assim como em Moës e Belytschko (2002), quatro pontos de Gauss por segmento para todas as estratégias. Este procedimento de integração numérica, a não ser quando especificado o contrário, foi empregado em todos os experimentos numéricos realizados neste capítulo.

A Fig. 5.2 ilustra as trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento estudadas, comparando-as com a resposta experimental de Shi et al. (2005) e com o modelo numérico de Sancho et al. (2006).

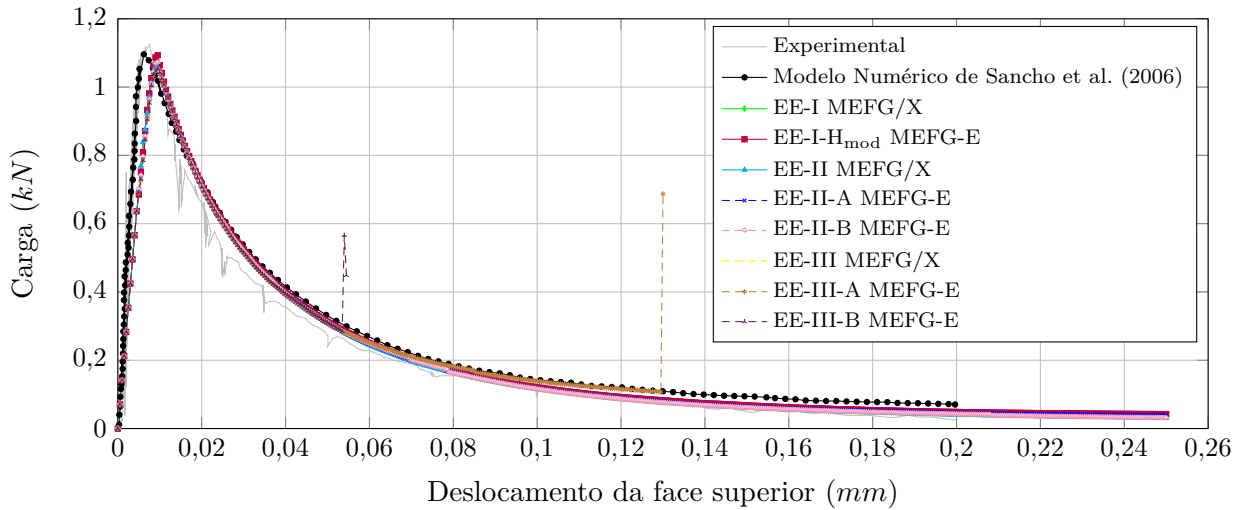


Figura 5.2 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.1.

É possível observar na Fig. 5.2 que todas as trajetórias do equilíbrio, com exceção das referentes às estratégias EE-III do MEFG-E, foram capazes de bem representar a evolução da propagação com a malha considerada. As trajetórias em questão se aproximam das cargas de pico obtidas tanto pelo experimento quanto pelo modelo numérico de Sancho et al. (2006), e estão praticamente entre ambas as curvas no amolecimento, especialmente nos passos finais. As diferentes estratégias de enriquecimento, com exceção das abordagens já mencionadas, têm desempenhos muito similares. Desta forma, a fim de melhor avaliar

a qualidade das curvas, optou-se por empregar uma medida d_r presente no trabalho de Paiva (2023). Para o experimento constante nesta seção, define-se d_r como

$$d_r = \left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d_i^2 \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

onde $d_i = P_i^{Lab} - P_i^{Pn}$, sendo P_i^{Lab} a carga observada na curva experimental e P_i^{Pn} a carga registrada para as diferentes soluções numéricas para uma dada coordenada da abscissa. Os pontos de cálculo foram escolhidos dividindo a largura da trajetória experimental, que vai até um deslocamento de 0,2 mm, em cinco intervalos. Como em Paiva (2023), menores valores de d_r indicam maior concordância com a curva do experimento. A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos para cada uma das estratégias consideradas, com exceção das estratégias EE-III do MEFG-E, que não completaram todos os passos da análise.

Tabela 5.1 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.1.

Estratégia de Enriquecimento	d_r
EE-I MEFG/X	0,020168013
EE-I-H _{mod} MEFG-E	0,021950854
EE-II MEFG/X	0,019381203
EE-II-A MEFG-E	0,019917938
EE-II-B MEFG-E	0,018945863
EE-III MEFG/X	0,017683427

Por ela, constata-se que as abordagens que conseguiram completar todos os passos de análise, com a malha considerada, tiveram de fato respostas muito próximas, diferindo em geral, com algumas exceções, na terceira casa decimal para a determinação do parâmetro d_r . A estratégia que se mostrou mais acurada foi a estratégia EE-III do MEFG/X. Pode-se considerar este um resultado esperado, visto que a inclusão de mais termos à função trigonométrica a princípio deve produzir uma melhoria na representação do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca. No entanto, destaca-se também o bom desempenho das estratégias de enriquecimento EE-II, que empregam apenas uma função trigonométrica. Entre estas, a abordagem EE-II-B do MEFG-E mostrou-se, por uma pequena diferença, a mais acurada. As estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-A do MEFG-E ficaram bastante próximas, diferindo apenas na quarta casa decimal, com ligeira vantagem para a abordagem do MEFG/X. Isso parece indicar que os eventuais ganhos de acurácia obtidos pela aplicação da estratégia do interpolante sobre a função trigonométrica são compensados pelas eventuais perdas de se trocar as funções de Heaviside nodalmente deslocadas pelas funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização. De fato, Wu e Li (2015b) propuseram estas funções como “um meio-termo” entre acurácia e condicionamento, ou seja, já tendo em vista que seriam melhor condicionadas mas menos

acuradas que as funções de Heaviside convencionais. Os valores de d_r da tabela 5.1 para as estratégias EE-I confirmam que as funções de Heaviside nodalmente deslocadas (EE-I do MEFG/X) possuem um pouco mais de acurácia que as funções de Heaviside modificadas (EE-I- H_{mod} do MEFG-E).

A tabela 5.2 mostra ainda as cargas de pico obtidas para as diferentes abordagens estudadas, novamente, com exceção das EE-III do MEFG-E. Os valores em geral são bastante razoáveis, e representam suficientemente bem aquilo que foi verificado em laboratório. Nota-se que as estratégias EE-I foram as que mais se aproximaram da carga atingida no experimento, estando também bastante próximas do valor alcançado pelo modelo de Sancho et al. (2006). Depois delas, a estratégia que mais se aproximou da carga de pico esperada foi a EE-II-B do MEFG-E, que atinge um valor mais alto que quaisquer das outras abordagens que empreguem enriquecimento trigonométrico. Para um mesmo método numérico (por exemplo, estratégias EE-I, EE-II e EE-III do MEFG/X), o acréscimo de funções trigonométricas parece conduzir a uma ligeira redução dos valores de carga de pico.

Tabela 5.2 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.1.

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental (SHI et al., 2005)	1,1248
Modelo Numérico de Sancho et al. (2006)	1,0960
EE-I MEFG/X	1,0933
EE-I- H_{mod} MEFG-E	1,0931
EE-II MEFG/X	1,0625
EE-II-A MEFG-E	1,0699
EE-II-B MEFG-E	1,0716
EE-III MEFG/X	1,0522

No que concerne à representação das trajetórias assumidas pelas trincas, as Figs. 5.3 e 5.4 revelam que as estratégias consideradas, em geral, possuem uma boa concordância com as trajetórias simuladas pelo modelo numérico de Sancho et al. (2006), e uma representação aceitável do comportamento experimental. A Fig. 5.4, em particular, detalha as trajetórias de trinca obtidas para todas as estratégias de enriquecimento investigadas nesta seção, com exceção das abordagens EE-III do MEFG-E. As figuras são parecidas, com pequenas diferenças na geometria observada e com as estratégias que empregam enriquecimento trigonométrico fazendo a curva perto do contorno de forma mais suave em relação às estratégias que utilizam apenas enriquecimentos de Heaviside. Tais curvas não ocorrem nem no modelo numérico de Sancho et al. (2006) nem no experimento (Fig. 5.3). Acredita-se que, nos modelos apresentados neste capítulo, esta configuração possa ter relação com os pontos escolhidos para determinação dos fatores de intensidade de tensão (que, por sua vez, determinam a direção assumida pela trinca) com base no raio da integral de

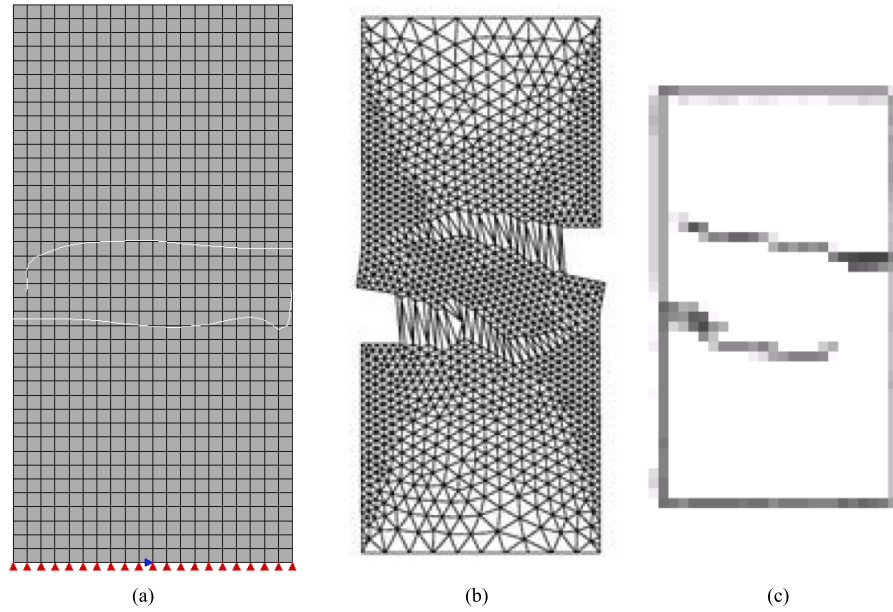


Figura 5.3 – Trajetórias de trinca obtidas por a) EE-II-B do MEFG-E b) Modelo numérico de Sancho et al. (2006) c) Ensaio de Shi et al. (2005). Os experimentos numéricos aqui realizados se basearam na configuração dos entalhes do modelo de Sancho et al. (2006).

interação (r_d , seção 3.3.2.1). Nas proximidades do contorno, cresce a influência dos pontos de integração anteriores à ponta da trinca, já que o círculo de interação pode ultrapassar os limites do domínio. Esta questão poderá ser avaliada em trabalhos futuros. Nota-se, por fim, que, na estratégia EE-III do MEFG/X, as trincas propagam um pouco mais que nas demais estratégias.

As estratégias EE-III do MEFG-E, diferentemente das demais abordagens e ao contrário do inicialmente esperado, falham em representar completamente, para a malha considerada, o fenômeno estudado. As trincas inferiores acabam sofrendo uma mudança prematura de trajetória, como pode ser visto na Fig. 5.5. A partir daí, os modelos deixam de reproduzir adequadamente a evolução da propagação das trincas, o que incorre num travamento com posterior perda da capacidade de representar as trajetórias de equilíbrio, como se anteviu pela Fig. 5.2.

Até onde foi possível apurar, não se pode atribuir este comportamento a uma deterioração no condicionamento, já que, como apresentará a Fig. 5.7, a mudança na trajetória antecede qualquer valor anômalo verificado para $C(\hat{\mathbf{K}})$ (o passo 81 corresponde a um deslocamento de 0,0405 mm). Algumas hipóteses foram consideradas para tentar explicar este desempenho inferior àqueles das demais abordagens. A principal delas é que se trata de instabilidade numérica, que poderia ser provocada ou evitada com pequenas perturbações no valor de determinados parâmetros da análise. Acredita-se que, por serem estratégias

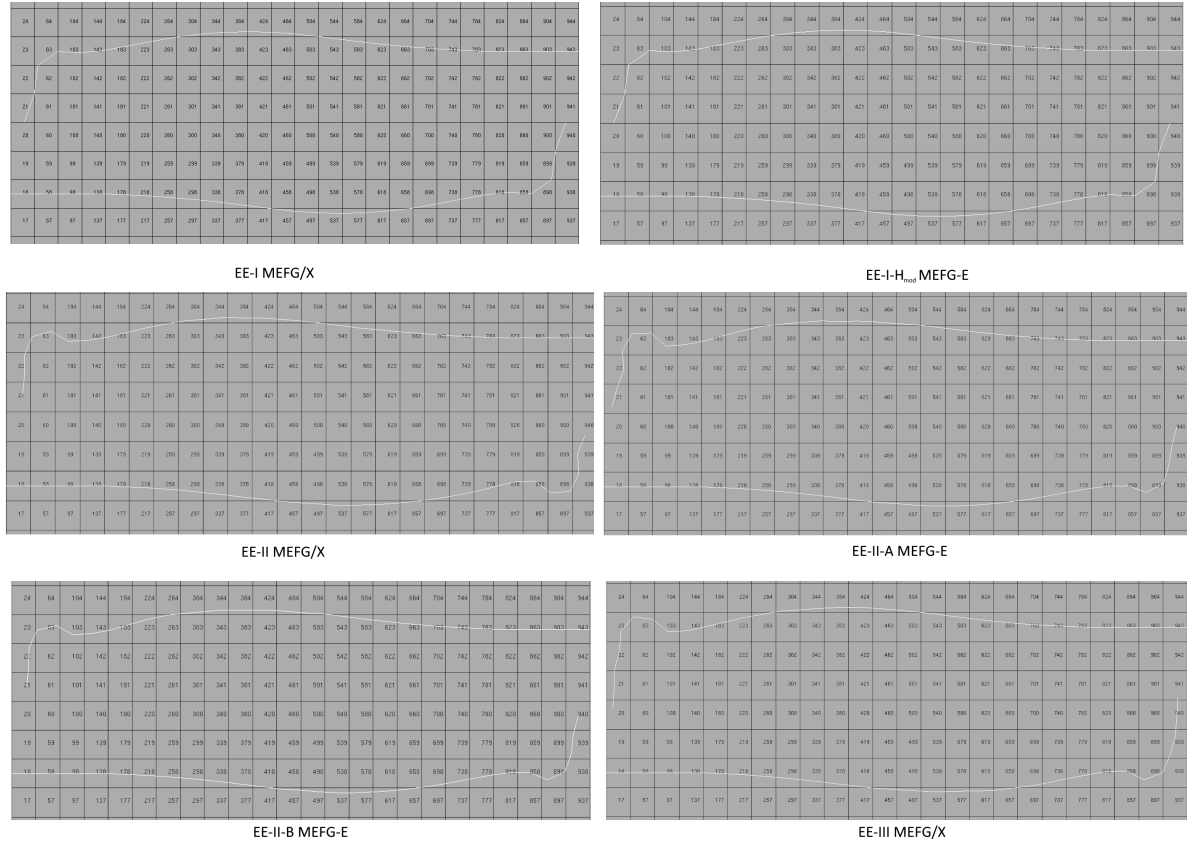


Figura 5.4 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento investigadas nesta seção no passo 500.

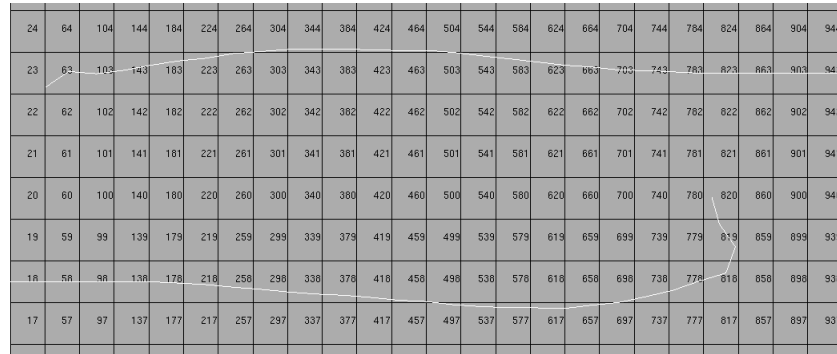


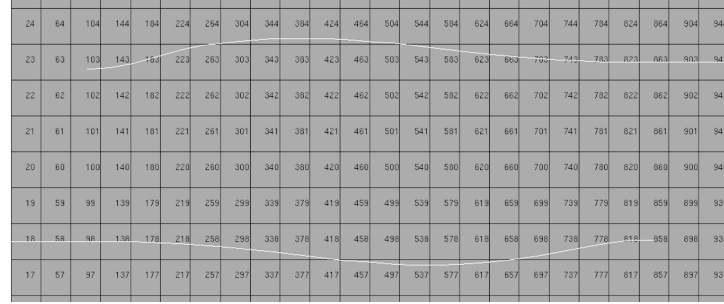
Figura 5.5 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-III-A do MEFG-E no passo 81.

que empregam um número significativamente maior de funções trigonométricas (seis por direção por nó) em relação às outras abordagens, sua aproximação se torne mais sensível à variação dos demais parâmetros da análise. O indício que atua a favor desta hipótese é basicamente que alterando o incremento de trinca para 1 mm ($h/3$) a trajetória se modifica suficientemente para que tal curva não mais ocorra. Nesse contexto, resultados razoáveis são alcançados, por exemplo, com a EE-III-B do MEFG-E. Esse comportamento

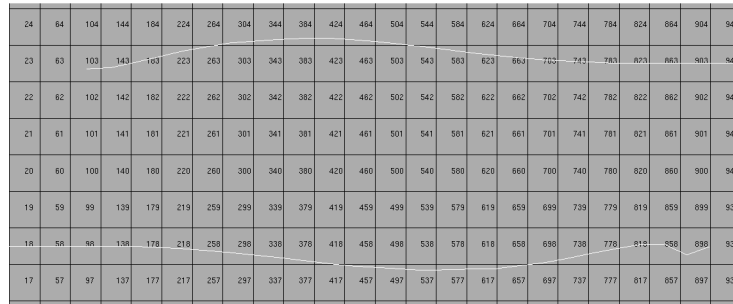
instável pode inclusive estar associado à natureza deletéria dos dois primeiros termos do enriquecimento da eq. (3.75) após a aplicação do interpolante (ver apêndice B). Por outro lado, o aumento do número de pontos de integração teve pouquíssimo efeito e, embora atrase a mudança de direção, não evita que ela ocorra. Tampouco houve sucesso com alterações na tolerância da análise não linear (baixando-a, por exemplo, para 1×10^{-5}), que produziu comportamento similar ao do aumento do número de pontos de integração.

O que se pode afirmar, comparando o momento anterior ao problema ocorrido com as estratégias de enriquecimento EE-III do MEFG-E com o de outras abordagens, é que existem pequenas diferenças na geometria assumida pelas trincas entre elas. A Fig. 5.6 traz uma comparação entre essas diferenças. Pode-se notar que, enquanto a abordagem EE-II-B do MEFG-E ainda guardava alguma “simetria”, as estratégias EE-III já a haviam perdido. A diferença entre a geometria das trincas na EE-III do MEFG/X e na EE-III-A do MEFG-E é que, enquanto para o MEFG/X a descontinuidade inferior propagou mais, para o MEFG-E ocorre o contrário. Nessa configuração, a curva da trinca inferior desta abordagem está inclusive mais acentuada para cima que sua equivalente do MEFG/X. Em todo caso, os experimentos realizados para investigar esta anomalia foram limitados por questões de viabilidade computacional. Enquanto as demais estratégias de enriquecimento eram capazes de rodar as análises em no máximo algumas horas, as EE-III - incluso a EE-III do MEFG/X - demoravam em alguns casos vários dias numa máquina com Windows 11, 64 bits, processador AMD Ryzen 7 5800H 3.20 GHz e 16 GB de RAM. Acredita-se que isso se deva à forma com que a implementação computacional foi realizada. A cada incremento de trinca surgido em um elemento finito, o enriquecimento de trinca anterior é “congelado”, ou seja, tem os graus de liberdade associados a ele restritos (OLIVEIRA; BARROS; PENNA, 2022). Este processo se dá com o objetivo de não perder a informação a eles relacionada no vetor de deslocamentos e de garantir que o novo enriquecimento - que representa uma nova ponta de trinca - seja também inicializado em uma posição compatível do mesmo vetor. No entanto, para que o sistema INSANE monte a matriz de rigidez a ser resolvida, associada aos graus de liberdade incógnitos, ou seja, não restritos, o algoritmo do software requer que sejam montadas as matrizes totais de cada elemento finito, independentemente de ele ter graus de liberdade restritos ou não. Isso significa que a matriz dos elementos que contêm/contiveram a ponta de uma trinca pode crescer significativamente para as estratégias EE-III já que, até que a descontinuidade finde a travessia do elemento, quando serão inseridas funções de Heaviside, a cada troca de enriquecimento trigonométrico serão acrescidos 12 graus de liberdade por nó. De fato, em resultados que não serão aqui mostrados, constatou-se que, entre as tarefas executadas para a solução do problema com as abordagens EE-III, aquela que consome maior tempo com o decorrer da análise passa a ser justamente a montagem do sistema de equações. Portanto, a inviabilidade computacional da estratégia em questão não é

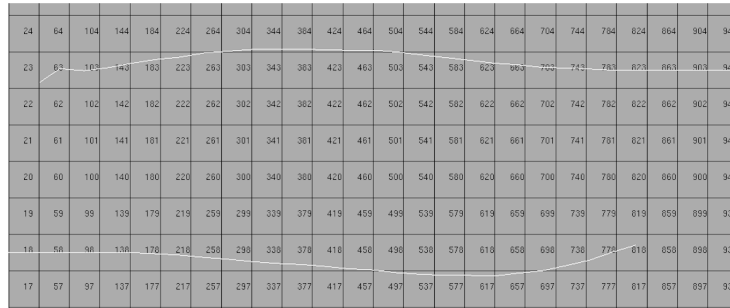
um problema das funções em si, mas de tratamento dado ao problema algébrico pelo software utilizado. Assim sendo, neste capítulo ainda serão expostos os resultados obtidos com estas abordagens em um dos experimentos numéricos aqui apresentados. No entanto, no experimento restante e nas análises do capítulo seguinte, por questões de tempo, foi preciso abandonar a investigação destas estratégias.



a)



b)



c)

Figura 5.6 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para: a) EE-II-B do MEFG-E; b) EE-III do MEFG/X e c) EE-III-A do MEFG-E no passo 80.

A Fig. 5.7 mostra o condicionamento das diferentes estratégias de enriquecimento estudadas. Como esperado, com base nos experimentos prévios realizados no capítulo 4, nenhuma das abordagens acusa problema de robustez. As estratégias estão, na verdade, para os padrões do MEFG/X e métodos derivados, bem condicionadas, e têm desempenhos similares. A observação da Fig. 5.7b indica que ao fim da análise, a estratégia que chega com os menores $C(\hat{\mathbf{K}})$ s é a EE-II do MEFG/X, seguida de perto pela EE-I do MEFG/X e pela EE-II-B do MEFG-E. Nota-se ainda que as estratégias que empregam 6 termos para compor o enriquecimento trigonométrico (EE-III), salvo exceções de eventuais oscilações, possuem números de condicionamento um pouco acima das demais abordagens. No en-

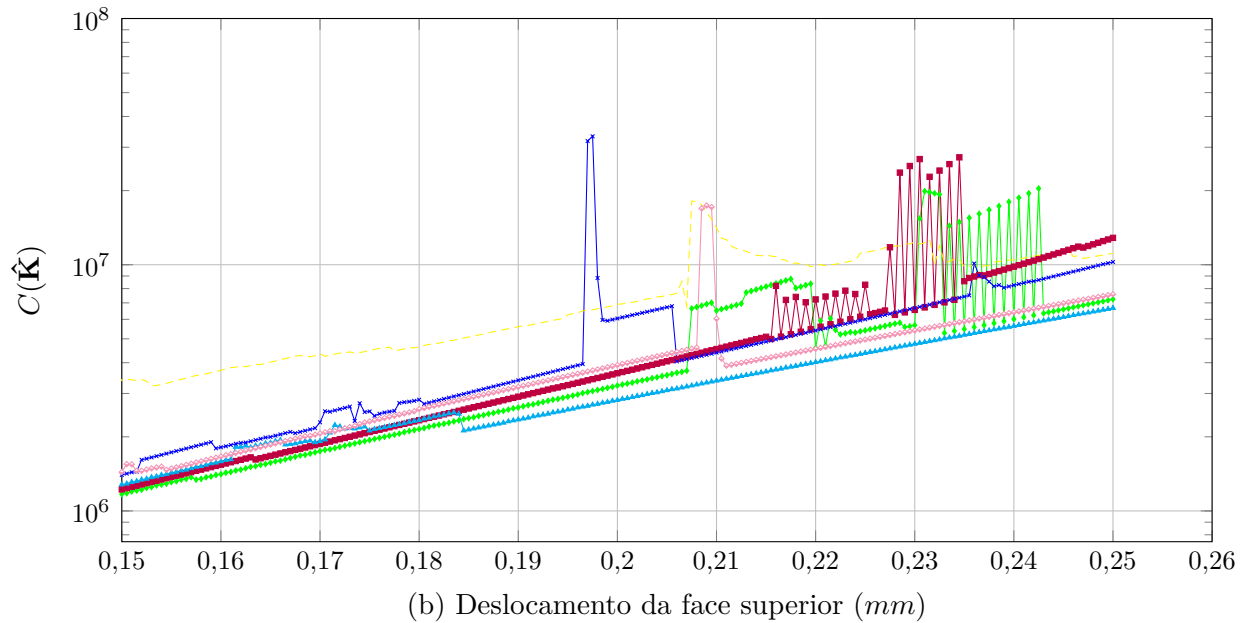
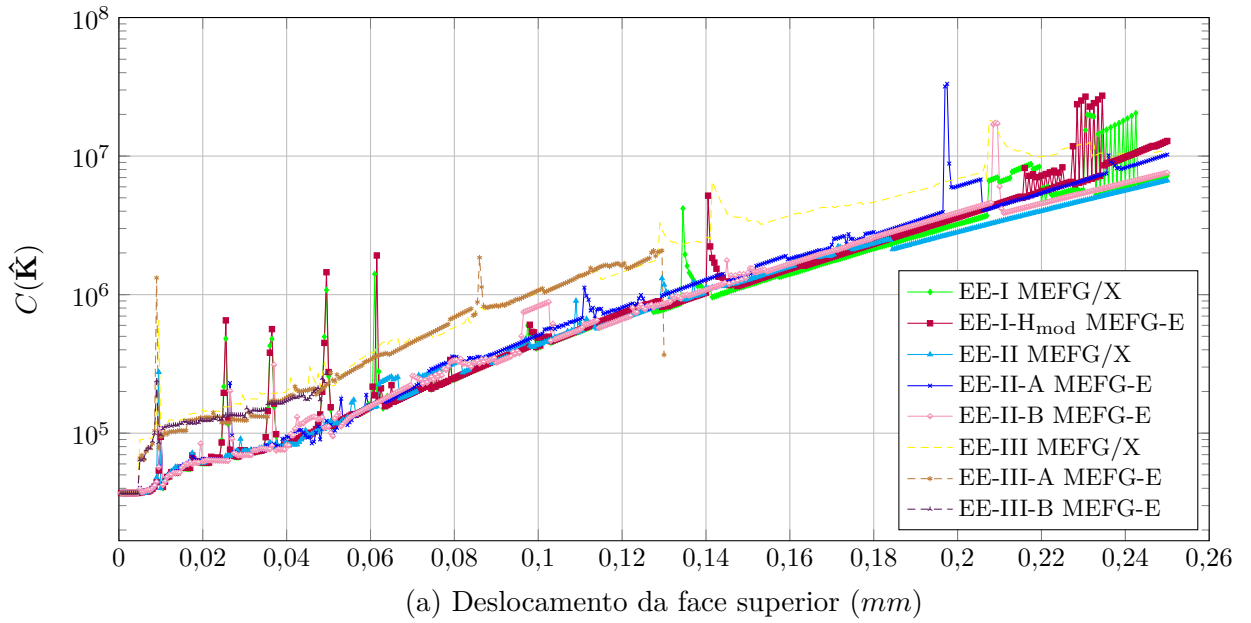


Figura 5.7 – a) Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 5.1. b) Detalhe dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s ao fim da análise.

tanto, deve-se destacar que, no que concerne a este aspecto, o desempenho de todas as abordagens que completaram a análise foi considerado bastante satisfatório.

Cabe observar que a boa performance do MEFG/X em termos de condicionamento só é possível em razão da combinação entre as funções de Heaviside nodalmente deslocadas - que resolvem a questão da dependência linear nos elementos de mistura - e a estratégia de integração numérica aqui adotada, que resolve eventuais dependências relacionadas ao particionamento desproporcional de elementos atravessados pela trinca. Em particular, deseja-se destacar a importância do emprego de uma estratégia de integração numérica

adequada. Os bons resultados do MEFG/X não podem ser conquistados, para o mesmo experimento, com a mesma malha, e com o mesmo número de pontos de Gauss por elemento quando se emprega a integração convencional. As Figs. 5.8 e 5.9 mostram o que ocorre com as estratégias EE-I e EE-II do MEFG/X, em termos de aproximação e condicionamento, quando a estratégia de integração com subdivisão dos elementos em células triangulares é abandonada.

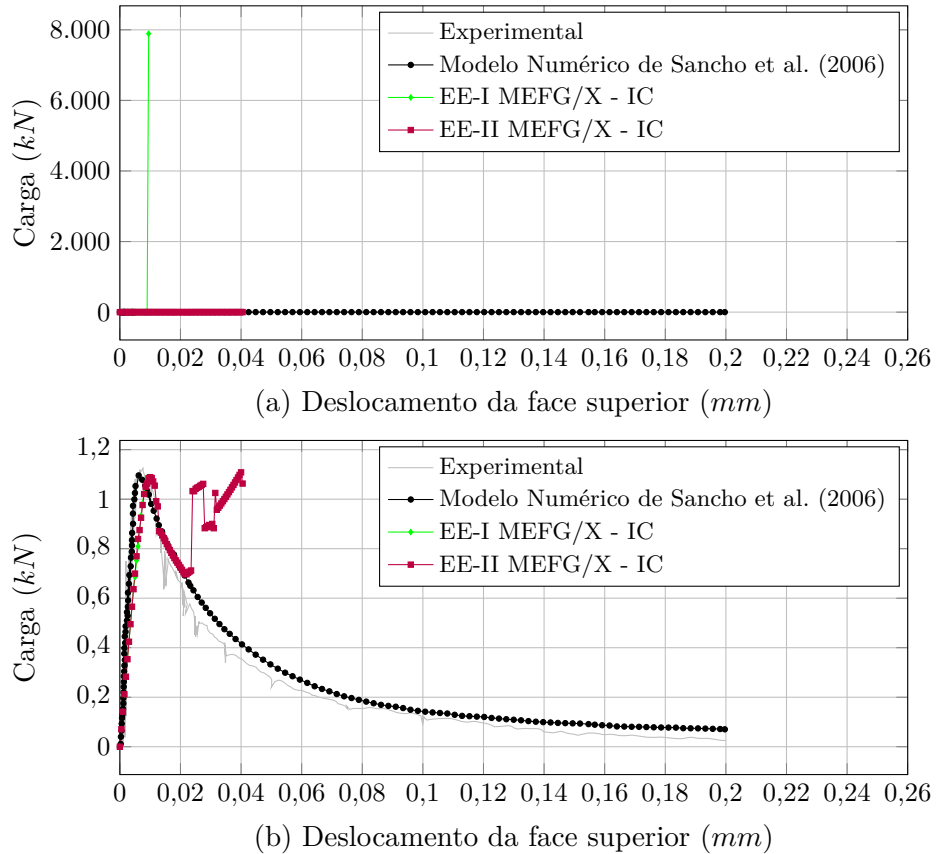


Figura 5.8 – a) Trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias de enriquecimento EE-I e EE-II do MEFG/X empregando integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento. b) Trajetórias de equilíbrio eliminando o último ponto da estratégia EE-I do MEFG/X utilizando IC.

Pode-se perceber uma deterioração severa do condicionamento das estratégias do MEFG/X, cujos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s passam de algo da ordem de 10^7 para 10^{16} e 10^{36} , até os passos onde foi possível manter a análise, para as estratégias EE-I e EE-II, respectivamente. Como o solucionador escolhido para resolver os sistemas de equações, deste experimento e dos anteriores, com base nos resultados do capítulo 4, é o solver 200 do INSANE - um solucionador mais eficiente computacionalmente, que trabalha com um método direto baseado em decomposição LU multifrontal (<https://people.engr.tamu.edu/davis/suitesparse.html>) - a perda de acurácia ocorrida em decorrência da perda de estabilidade numérica é imediata, como se nota nos gráficos da Fig. 5.8. De fato, em casos de dependência linear no contexto do MEFG/X seria mais adequado trabalhar com um solucionador associado ao

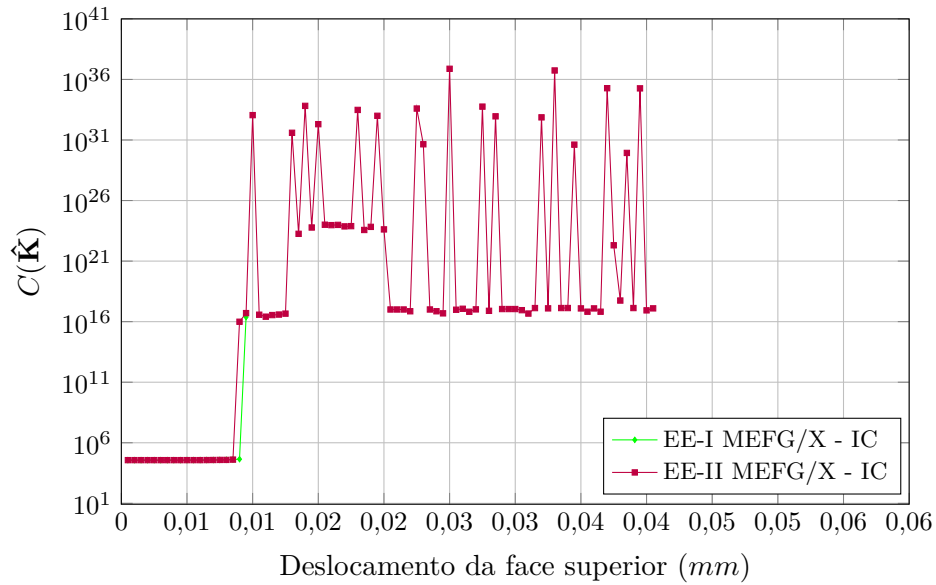


Figura 5.9 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as estratégias de enriquecimento EE-I e EE-II do MEFG/X empregando integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.

procedimento iterativo de Babuška (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000) para que a análise pudesse prosseguir por todos os passos. Mesmo neste caso, neste experimento, as soluções acabam divergindo em algum momento, em função do acúmulo de erros.

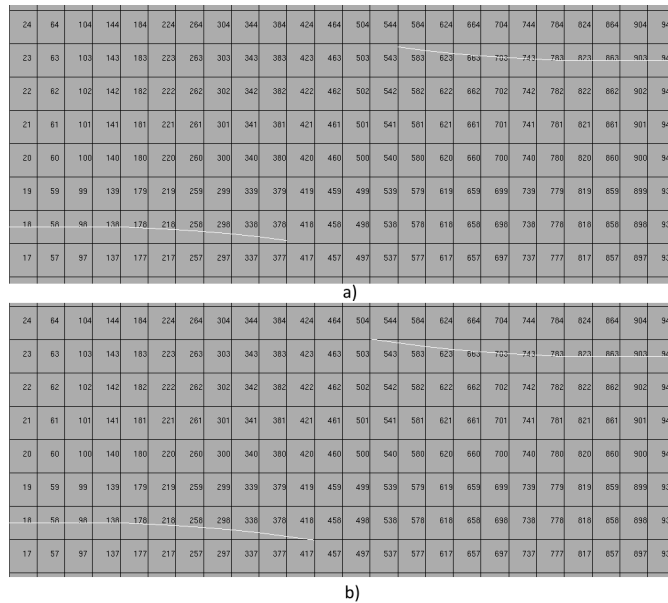


Figura 5.10 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-I do MEFG/X com IC nos passos: a) 18; b) 19.

Estes resultados podem ser explicados observando as trajetórias da trinca nos passos imediatamente anterior e posterior à deterioração ocorrida no condicionamento (Figs. 5.10 e 5.11). Observa-se que tal deterioração se dá justamente no momento em que a

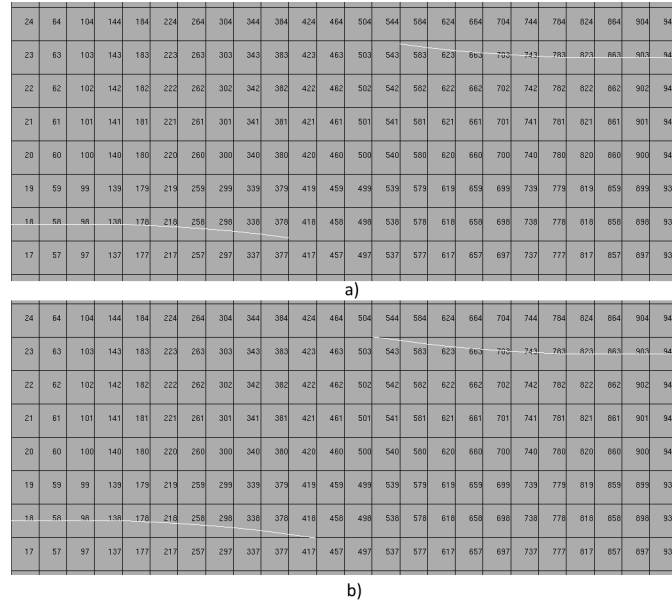


Figura 5.11 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-II do MFG/X com IC nos passos: a) 17; b) 18.

Tabela 5.3 – Número de condicionamento escalonado $C(\hat{\mathbf{K}})$ das abordagens EE-I e EE-II do MFG/X na proximidade dos passos críticos.

	EE-I MFG/X	EE-II MFG/X
Passo	$C(\hat{\mathbf{K}})$	$C(\hat{\mathbf{K}})$
16	3,94E+04	3,85E+04
17	4,12E+04	4,07E+04
18	4,41E+04	9,83E+15
19	2,39E+16	5,06E+16

trinca particiona um elemento finito em áreas muito desiguais, de tal forma que uma das áreas não contém nenhum ponto de Gauss. Essa correspondência fica ainda mais clara quando consultamos a Fig. 5.9 e a tabela 5.3, que traz os números de condicionamento escalonados das abordagens nos passos em questão (o passo 18 equivale a um deslocamento de 0,0090 *mm*, enquanto o passo 19 corresponde a um deslocamento da face superior de 0,0095 *mm* nos gráficos das Figs. 5.8 e 5.9). É, portanto, uma deterioração associada à falta de robustez das funções de Heaviside. O mesmo problema se verificou para todas as malhas dos diferentes experimentos aqui tratados, assim como para a EE-III do MFG/X. Destaca-se que, nessa situação, na ausência de uma metodologia de integração adequada no software empregado, o usuário do MFG/X deve estar especialmente atento à esta questão. É preciso avaliar se o uso de um número muito grande de pontos de integração nos elementos cortados pela trinca é viável e suficiente, especialmente se a simulação envolver propagação.

Observa-se, por fim, que o emprego das funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro

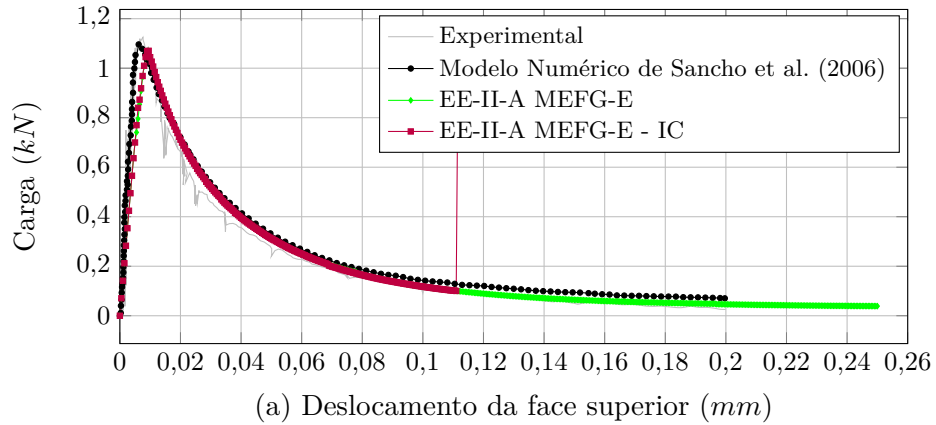


Figura 5.12 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias de enriquecimento EE-II-A do MEFG-E empregando integração com subdivisão em células triangulares e integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.

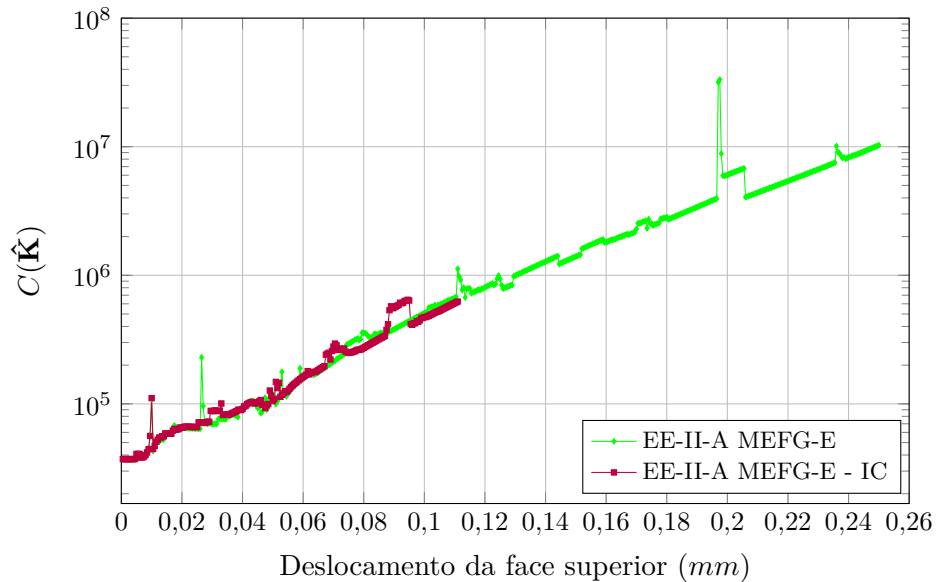


Figura 5.13 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as estratégias de enriquecimento EE-II-A do MEFG-E empregando integração com subdivisão em células triangulares e integração convencional (IC), com 4×4 pontos de Gauss por elemento.

de estabilização na estratégia EE-II-A do MEFG-E tornou a abordagem imune ao problema de condicionamento ocorrido com as EE-I e EE-II do MEFG/X com emprego de integração convencional (Figs. 5.12 e 5.13). De fato, as Figs. 5.12 e 5.13 demonstram uma boa concordância entre os resultados da EE-II-A do MEFG-E com e sem o procedimento de integração numérica adotado para os resultados anteriores. No entanto, a estratégia de subdivisão impacta também neste caso de forma significativa na acurácia da aproximação. No passo 223, correspondente a um deslocamento da face superior de $0,1115 \text{ mm}$, diferentemente do que ocorre para os resultados previamente mostrados, a trinca acaba sofrendo

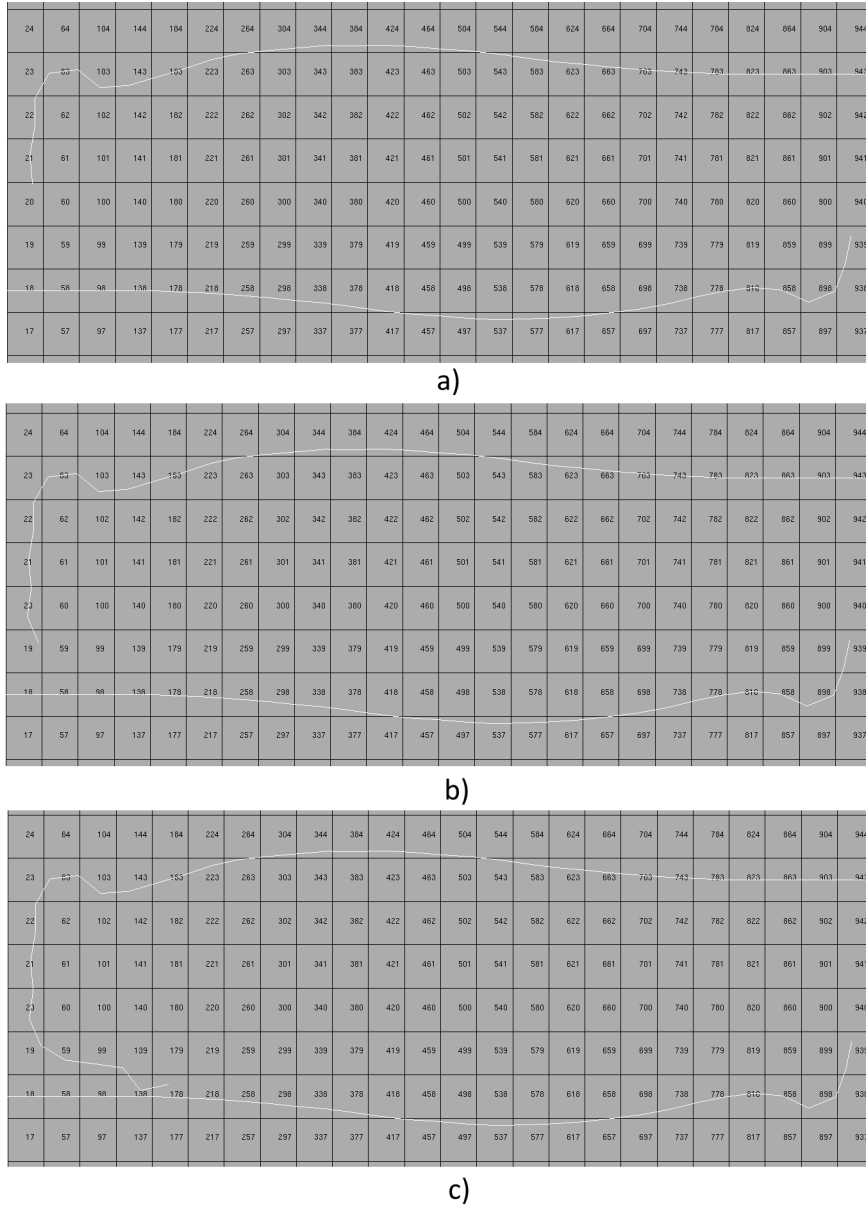


Figura 5.14 – Detalhe das trajetórias de trinca obtidas para a EE-II-A do MEFG-E com IC nos passos: a) 222; b) 223; c) 224

uma curva que origina uma posterior propagação patológica. A partir daí, constata-se que a solução deixou de representar o problema de forma adequada (Fig. 5.14).

5.2 Painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004)

O segundo problema de referência estudado neste capítulo foi analisado experimental e numericamente por Winkler, Hofstetter e Lehar (2004). Trata-se de um painel em L, cuja geometria, carregamento e condições de contorno, bem como a malha adotada nos experimentos (com elementos quadrados de dimensões $10 \times 10 \text{ mm}$), podem ser vistas na Fig. 5.15. A malha utilizada consta no trabalho de Wang e Waisman (2018), e,

assim como no exemplo da seção 5.1, é estruturada. Os seguintes parâmetros de material (WINKLER, 2001) foram adotados: módulo de elasticidade $E = 25\ 850,0\ N/mm^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, resistência à tração $f_t = 2,7\ N/mm^2$, energia de fratura de $G_f = 0,0775\ N/mm$ - a média entre os valores máximo e mínimo obtidos experimentalmente por Winkler (2001) - e rigidez inicial ao cisalhamento $d_{init} = 0,0\ N/mm^3$. Para as simulações conduzidas nesta seção que empreguem enriquecimento trigonométrico, o tamanho do incremento de trinca é $6,0\ mm$ (pouco menos de $2h/3$). Os experimentos numéricos foram realizados empregando elementos quadrilaterais do tipo Q4. A análise não linear foi conduzida a partir do método de Newton-Raphson com controle do deslocamento vertical no ponto de deslocamento vertical máximo (Fig. 5.15a), e um incremento de $0,01\ mm$ a cada passo, com 100 passos. A tolerância para convergência em termos de deslocamentos foi assumida como 1×10^{-6} , e as simulações foram realizadas com equilíbrio tangente.

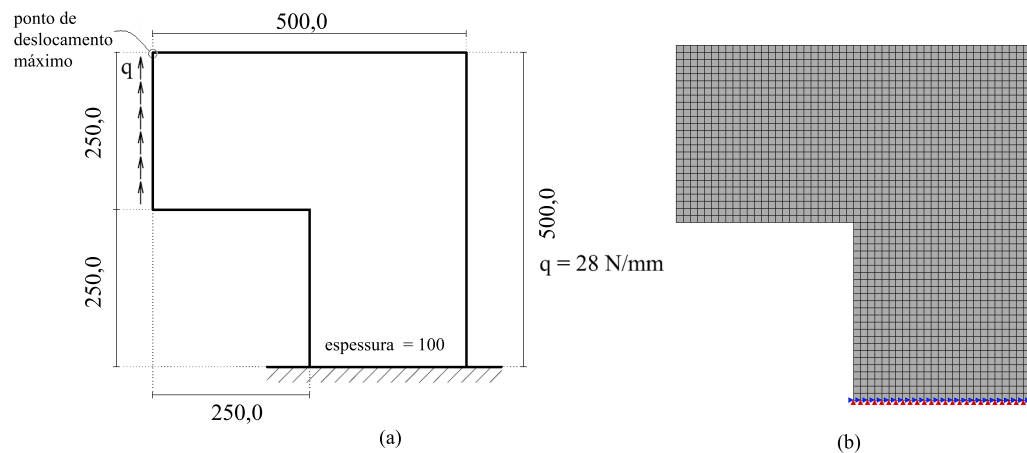


Figura 5.15 – a) Geometria, carregamento e condições de contorno do painel em L. Dimensões em mm . b) Malha empregada.

Não há defeito inicial neste experimento. Isso implica que a trinca será nucleada conforme descrito na seção 3.3.2.1. É válido ressaltar que, em razão da obrigatoriedade de a trinca passar pelo centroide do elemento (seção 3.3.2.1), a trinca inicial não sairá exatamente da quina do painel em L, como seria esperado. A integração numérica se deu pelo mesmo procedimento descrito para o experimento anterior. Neste exemplo, as estratégias EE-III não foram investigadas, em razão dos motivos apresentados na seção 5.1.

As trajetórias de equilíbrio obtidas pelas diferentes estratégias de enriquecimento podem ser vistas na Fig. 5.16. Observa-se que praticamente todas as abordagens conseguem prover um desempenho satisfatório em termos de aproximação das trajetórias de equilíbrio. A carga de pico se encontra inclusive dentro da faixa experimental para todas as abordagens (ver também tabela 5.4), e as respectivas curvas possuem excelente concordância com o segundo modelo numérico de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004). Deve-se notar, no

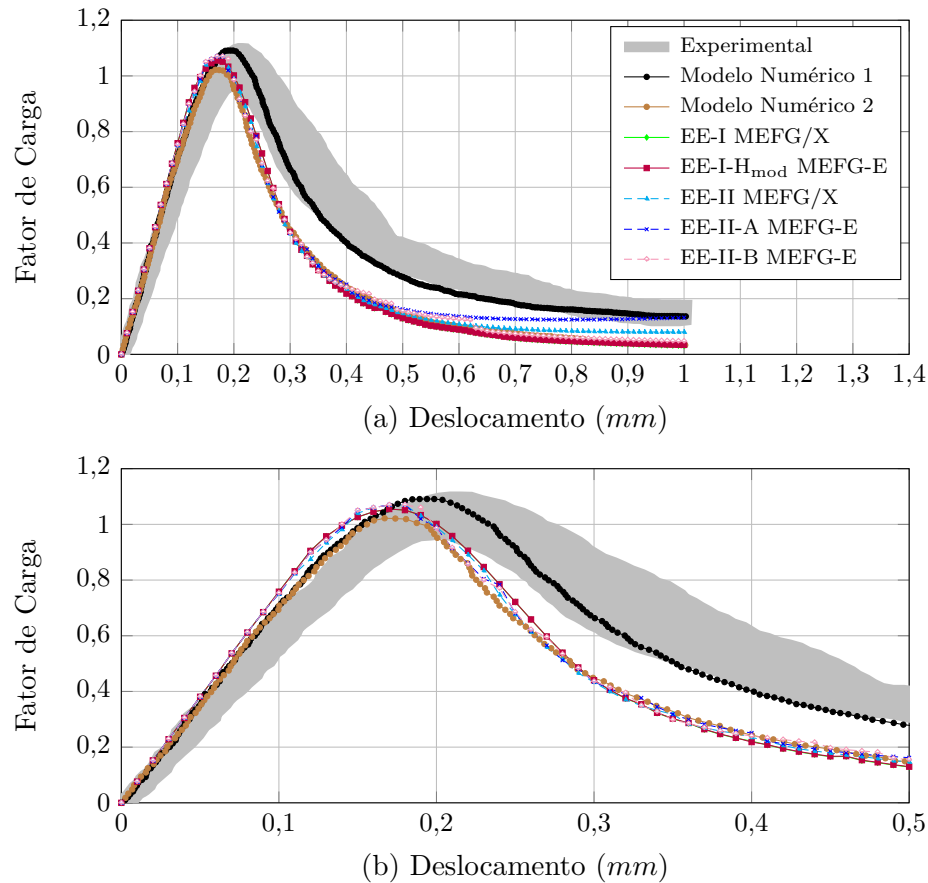


Figura 5.16 – a) Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.15. b) Detalhe das trajetórias de equilíbrio próximo à carga de pico. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

Tabela 5.4 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.15. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior	1,0990
Experimental Inferior	0,9612
Modelo Numérico 1	1,0910
Modelo Numérico 2	1,0220
EE-I MEFG/X	1,0552
EE-I-H _{mod} MEFG-E	1,0552
EE-II MEFG/X	1,0695
EE-II-A MEFG-E	1,0715
EE-II-B MEFG-E	1,0725

entanto, que as estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-A do MEFG-E apresentam um discreto travamento ao fim da análise, quase imperceptível no primeiro caso, mas já visível no segundo. Isso se deve à configuração final assumida pela trinca como se pode perceber

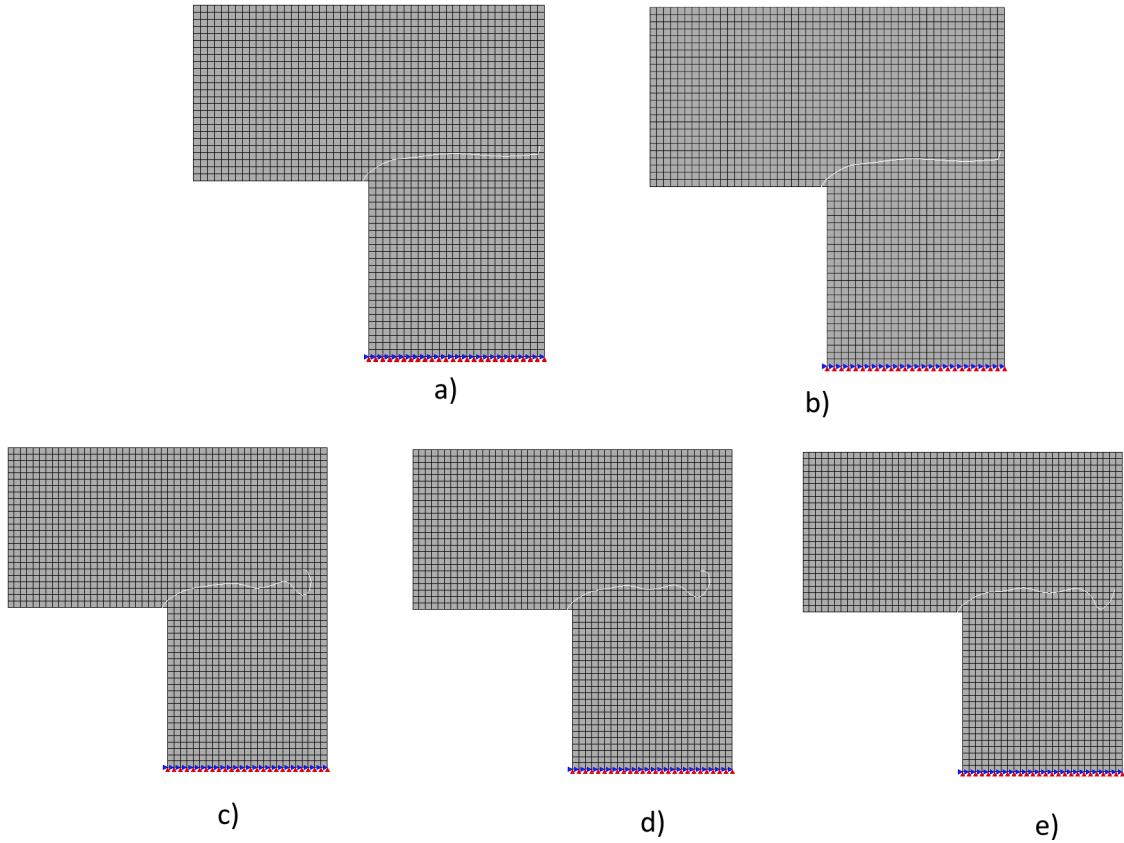


Figura 5.17 – Trajetórias de trinca obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento empregadas para a solução do problema da Fig. 5.15 no passo 100: a) EE-I MEFG/X; b) EE-I- H_{mod} MEFG-E; c) EE-II MEFG/X; d) EE-II-A MEFG-E; e) EE-II-B MEFG-E.

pela Fig. 5.17, que ilustra as trajetórias das discontinuidades no passo 100. No caso das abordagens citadas, em razão da proximidade da zona de compressão, a trinca acaba sofrendo uma curva em sua trajetória, que conduz ao travamento visto na Fig. 5.16. Acredita-se que isso se dê em função da maior sensibilidade da parte de enriquecimentos trigonométricos para capturar mudanças na trajetória, em razão da atuação de compressão, quando comparadas às abordagens que empregam apenas as funções de Heaviside. Observou-se que este comportamento varia um pouco, neste experimento, em função da malha empregada e do tamanho do incremento de trinca utilizado. A Fig. 5.18 mostra, por exemplo, o comportamento da estratégia EE-II do MEFG/X com uma malha menos refinada que emprega incremento de trinca de $4,0 \text{ mm}$ (cerca de $h/5$) e com a mesma malha dos experimentos conduzidos nesta seção, com incremento de trinca de $10,0 \text{ mm}$ (h). Em ambas as simulações, o travamento já não se verifica (Fig. 5.19).

Não se percebeu nenhum padrão claro que levasse a esse tipo de resultado (não há constância em evitar o travamento diminuindo ou aumentando o incremento de trinca,

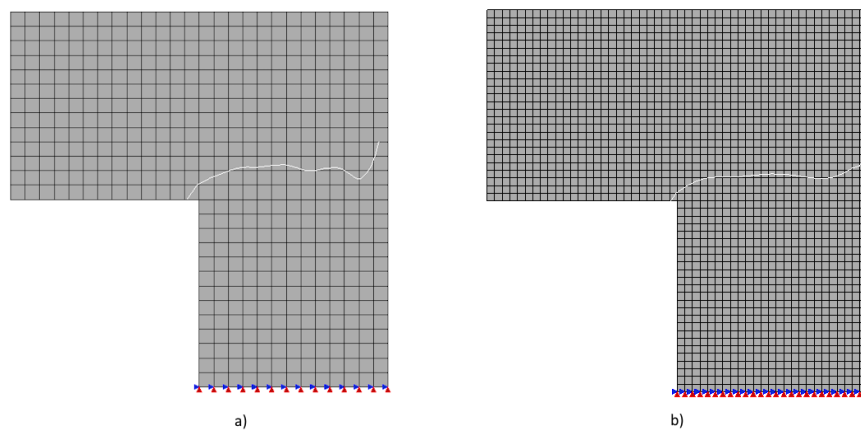


Figura 5.18 – Trajetórias de trinca obtidas para a estratégia EE-II do MEFG/X em diferentes contextos: a) Com uma malha mais grosseira e um incremento de trinca de 4 mm ; b) Com a malha da Fig. 5.15 e um incremento de trinca de 10 mm .

por exemplo). A hipótese corrente é que, em razão de combinações malha/incremento, a ponta da trinca pode cair numa região de tal proximidade com a zona de compressão existente na borda do painel que induza a mudança na trajetória. A Fig. 5.20 mostra, inclusive, uma comparação entre os estados de tensão verificados para as estratégias EE-II-A do MEFG-E (cujo resultado é muito próximo da estratégia EE-II do MEFG/X) e a estratégia EE-II do MEFG/X com incrementos de trinca de $6,0\text{ mm}$ e 10 mm , respectivamente, quando a trinca se encontra no elemento 1196, na iminência de uma nova propagação. Observa-se que com um incremento maior de trinca o passo no qual a propagação ocorre (35) é antecipado em relação às estratégias que usam um incremento de $6,0\text{ mm}$, como é o caso da EE-II-A do MEFG-E, cuja propagação ocorre após o passo 40. Desta forma, é nítida a predominância de um estado mais tracionado na Fig. 5.20b em relação à Fig. 5.20a no círculo empregado para cálculo da integral de interação e subsequente determinação dos fatores de intensidade de tensão. Nota-se ainda que, embora a abordagem EE-II-B do MEFG-E não tenha apresentado o comportamento verificado para as demais estratégias EE-II nos experimentos aqui exibidos, esta estratégia, que também emprega enriquecimento trigonométrico, o mostrou em outras situações, como em testes preliminares que consideraram o incremento de trinca igual a $5,0\text{ mm}$. O valor adotado para o incremento de trinca nos experimentos desta seção se deu de forma heurística, tentando manter a coerência com o valor escolhido na seção 5.1.

No que concerne ainda à acurácia, as tabelas 5.4 e 5.5 exibem os valores obtidos para as cargas de pico e para o parâmetro d_r oriundos das diferentes estratégias de enriquecimento investigadas para a malha da Fig. 5.15. Segue-se aqui a estratégia de Paiva (2023), que no caso da existência de valores superiores e inferiores para a faixa experimental, define d_i

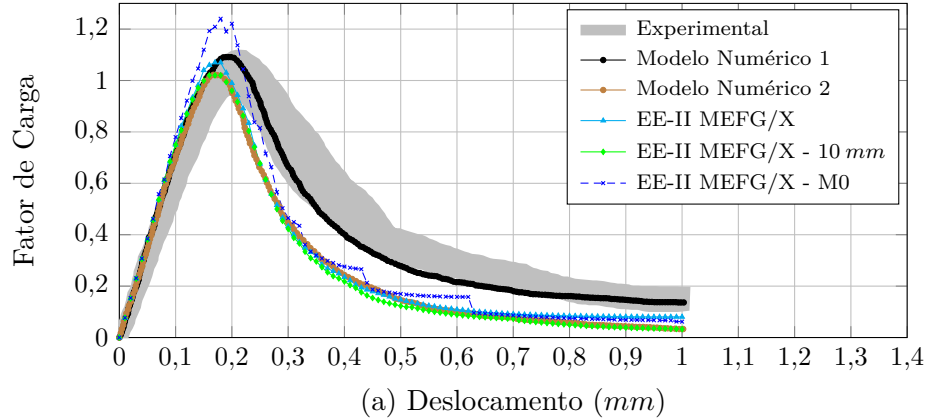


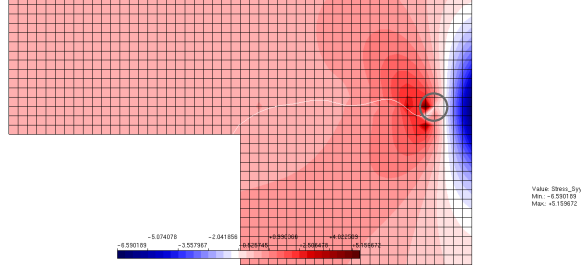
Figura 5.19 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II do MEFG/X em diferentes contextos. EE-II MEFG/X - 10 mm e EE-II MEFG/X - M0 denotam, respectivamente, as análises empregando a EE-II do MEFG/X na malha da Fig. 5.15 e com incremento de trinca igual a 10 mm, e a simulação que utiliza esta estratégia em uma malha menos refinada (Fig. 5.18a). Os saltos da trajetória de equilíbrio da EE-II MEFG/X - M0 estão relacionados à introdução da trinca em uma malha mais grosseira. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

da eq. (5.1) como sendo $d_i = P_i^{Lab} - P_i^{Pn}$, onde P_i^{Lab} é a carga observada na curva experimental em seu limite inferior, e P_i^{Pn} continua sendo a carga registrada para as diferentes soluções numéricas em uma dada coordenada da abscissa. Os pontos de cálculo foram escolhidos de forma análoga ao que foi feito na seção 5.1, dividindo a largura da trajetória experimental, que vai até um deslocamento de 1,0 mm, em cinco intervalos. Nesse tipo de situação, Paiva (2023) define ainda o parâmetro de referência d_r^{Ref} , obtido considerando um $d_i^{Ref} = P_i^{Lab, sup} - P_i^{Lab, inf}$, com $P_i^{Lab, sup}$ e $P_i^{Lab, inf}$ representando os valores de P_i^{Lab} medidos nos limites superior e inferior, respectivamente. Para o experimento desta seção, $d_r^{Ref} = 0,1165$.

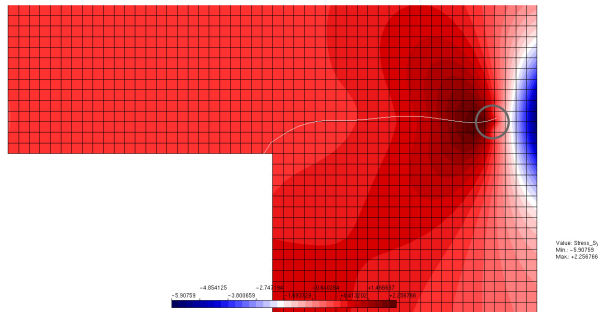
Tabela 5.5 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 5.15.

Estratégia de Enriquecimento	d_r
EE-I MEFG/X	0,1338
EE-I-H _{mod} MEFG-E	0,1334
EE-II MEFG/X	0,1121
EE-II-A MEFG-E	0,0935
EE-II-B MEFG-E	0,1133

Observa-se pela tabela 5.5 que a estratégia que em tese possui o menor desvio em relação ao limite inferior da faixa experimental é a EE-II-A MEFG-E, seguida pela EE-II do MEFG/X. No entanto, estes resultados devem ser interpretados com certa parcimônia, em razão do travamento sofrido por estas abordagens. Enquanto as demais estratégias seguem perdendo capacidade de carga, como seria esperado, a EE-II-A do MEFG-E e a EE-II do



(a) Estado de tensão na direção y da estratégia EE-II-A do MEFG-E no passo 40, na iminência da propagação que gera a curva responsável pelo travamento visto na Fig. 5.16.



(b) Estado de tensão na direção y da estratégia EE-II MEFG/X - 10 mm no passo 35, na iminência da propagação. Nesta situação, a curva que origina o travamento da trajetória de equilíbrio não ocorre.

Figura 5.20 – Comparação entre os estados de tensão na direção y das estratégias EE-II-A do MEFG-E e EE-II do MEFG/X com incrementos de 6,0 mm e 10 mm, respectivamente. O círculo representa uma estimativa do domínio que seria empregado para cômputo da integral de interação.

MEFG/X acabam se aproximando mais, nos passos finais, da faixa experimental, ainda que não estejam representando propriamente o comportamento real. Feita essa ressalva, a estratégia de fato mais próxima do experimento seria a EE-II-B MEFG-E, embora a EE-I do MEFG/X e a EE-I- H_{mod} do MEFG-E tenham tido também um ótimo desempenho, e as três abordagens estejam próximas do desvio de referência d_r^{Ref} . A tabela 5.4 revela, por sua vez, que todas as estratégias de enriquecimento são capazes de prover cargas de pico razoáveis, e dentro da faixa experimental, como mencionado anteriormente.

No que concerne ao condicionamento, a Fig. 5.21 mostra que, mais uma vez, as estratégias de enriquecimento são robustas e relativamente bem condicionadas. Ao fim da análise, três das abordagens têm $C(\hat{\mathbf{K}})$ s menores e muito próximos: EE-I do MEFG/X, EE-I- H_{mod} do MEFG-E e EE-II-B do MEFG-E, com ligeira vantagem para as estratégias que empregam apenas funções de Heaviside. A EE-I do MEFG/X e a EE-I- H_{mod} do MEFG-

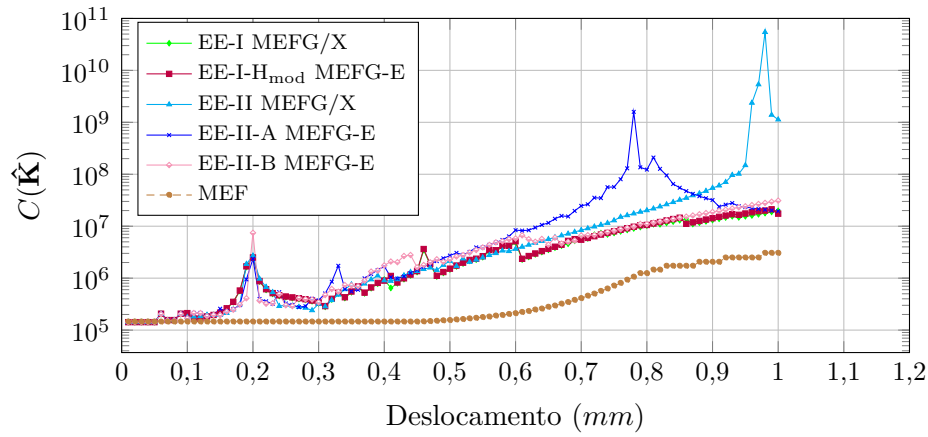


Figura 5.21 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 5.15.

E possuem, inclusive, performances muito similares neste experimento, tanto em termos de acurácia quanto de condicionamento. A EE-II-A do MEFG-E, por sua vez, também termina a simulação com um valor de $C(\hat{\mathbf{K}})$ relativamente baixo, embora tenha oscilado em valores superiores pouco antes disso. A EE-II do MEFG/X, neste experimento, se descola um pouco das demais estratégias, sofrendo uma ligeira deterioração, que leva seus números de condicionamento escalonados, nos últimos passos, para algo da ordem de 10^9 (as outras abordagens terminam em algo da ordem de 10^7). A Fig. 5.21 apresenta ainda os resultados de condicionamento de uma simulação que emprega um modelo de fratura discreta de elementos finitos baseado em duplicação nodal (MEF). Estes valores foram plotados, a despeito da inadequação da malha disposta na Fig. 5.15 a este tipo de modelo (o que compromete, inclusive, sua acurácia), com o objetivo de prover um parâmetro de comparação para as simulações do MEFG/X e abordagens derivadas em termos de comportamento almejado para o condicionamento. Nota-se que os $C(\hat{\mathbf{K}})$ s do MEF demoram um pouco mais a iniciar seu crescimento. Esta diferença se dá porque a propagação neste modelo demora um pouco mais a ser iniciada, em comparação com os modelos do MEFG/X e do MEFG-E. No entanto, pode-se afirmar que a ordem de grandeza dos números de condicionamento escalonados, com exceção da EE-II do MEFG/X, é próxima, e seu crescimento (inclinação média das tangentes às curvas) é também similar. Essa é mais uma evidência em favor da estabilidade das estratégias de enriquecimento aqui propostas.

Por fim, as trajetórias assumidas pelas trincas são comparadas com a faixa experimental na Fig. 5.22. Esta faixa foi obtida a partir de uma figura presente no trabalho de Wang e Waisman (2018), utilizando o software WebPlotDigitizer. Nota-se que as estratégias que possuem melhor concordância com as trajetórias observados nos experimentos são aquelas que empregam apenas as funções de Heaviside (EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod}

do MEFG-E). As demais estratégias, em razão da influência da zona de compressão e da relativa liberdade que os segmentos de trinca possuem de mudar de direção quando comparados às abordagens EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E, nas quais a trinca tem de necessariamente atravessar todo o elemento finito, acabam sofrendo oscilações mais significativas. No caso da EE-II-B do MEFG-E, tais oscilações provocam a sua saída da faixa experimental com a proximidade da borda do painel. No entanto, considera-se que os resultados obtidos para as diferentes aproximações foram, em geral, bastante razoáveis.

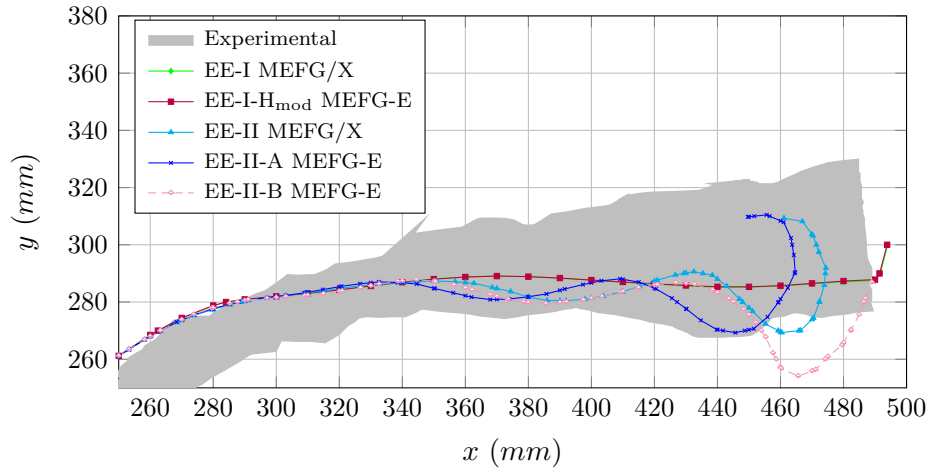


Figura 5.22 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 5.15. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.

5.3 Cisalhamento em 4 Pontos de Arrea e Ingraffea (1982)

O último experimento numérico escolhido para este capítulo é um problema em que a atuação do modo II é mais significativa que nos experimentos das seções 5.1 e 5.2. Trata-se do teste de cisalhamento em quatro pontos ensaiado por Arrea e Ingraffea (1982). A geometria, carregamento e condições de contorno do problema podem ser vistos na Fig. 5.23, que define ainda o *crack mouth sliding displacement* (CMSD), o deslizamento tangencial relativo entre as faces da trinca, utilizado por Arrea e Ingraffea (1982) na plotagem das trajetórias de equilíbrio. Os seguintes parâmetros de material, baseados na média dos valores obtidos experimentalmente (ARREA; INGRAFFEA, 1982), foram assumidos: módulo de elasticidade $E = 24\,800,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, resistência à tração $f_t = 3,4 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,120 \text{ N/mm}$ e resistência inicial ao cisalhamento $d_{\text{init}} = 1,0 \text{ N/mm}^3$. Para este parâmetro considerou-se o valor adotado para o teste de cisalhamento presente no trabalho de Wells e Sluys (2001), embora testes que não serão aqui apresentados indiquem que d_{init} parece ter pouquíssima influência nos resultados.

Um questionamento que foi levantado ainda na fase de elaboração do projeto de tese, com

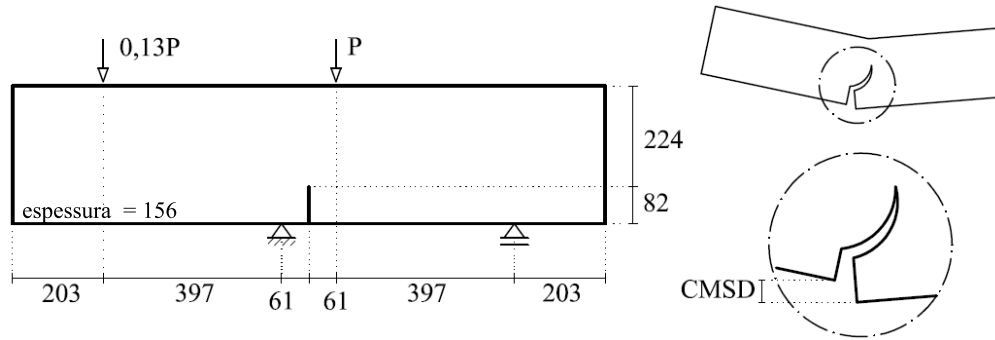


Figura 5.23 – Geometria, carregamento e condições de contorno do espécime de cisalhamento em quatro pontos. Dimensões em *mm*. $P = 130\,000,0\text{ N}$.

base nas sugestões de trabalhos futuros de Silva (2016), foi acerca da existência de possíveis ganhos em termos de “suavidade” para as trajetórias de equilíbrio com a introdução de enriquecimentos trigonométricos, principalmente em malhas mais grosseiras. Isso porque, quando comparadas a abordagens que empregam apenas funções de Heaviside, estas estratégias de enriquecimento permitiriam, em teoria, que a trinca fosse introduzida em incrementos menores, já que as funções enriquecedoras trigonométricas driblariam a exigência de se cortar um elemento inteiro por vez. Para estudar esta questão, no experimento desta seção, foram propostas duas malhas, que podem ser vistas na Fig. 5.24. A mais grosseira será denominada M1, enquanto a mais refinada foi intitulada M2. Ambas as malhas foram geradas empregando o software Gmsh, com tamanhos médios dos elementos finitos, nas regiões refinadas, iguais a 20 mm e 10 mm , respectivamente, e nas demais regiões da malha de 50 mm . Observa-se que esta linha de investigação foi adotada, durante o processo de pesquisa, também para os outros experimentos discutidos neste capítulo. Por concisão, no entanto, optou-se por concentrar as discussões em apenas um dos experimentos, visto que as tendências foram similares. Nota-se ainda que a ideia de se introduzir uma região de refinamento, na contramão dos demais experimentos, que empregam malhas estruturadas, teve a ver com estudos preliminares de estabilidade numérica em termos de condicionamento.

Para as simulações realizadas com o experimento da Fig. 5.23, o incremento de trinca é, em ambas as malhas (Fig. 5.24), de $5,0\text{ mm}$, o que equivale, na região de propagação da trinca, a cerca de $h/4$ e $h/2$ para M1 e M2, respectivamente. Diferentemente das outras seções deste capítulo, a fim de mostrar a versatilidade do modelo adotado e das abordagens propostas, os experimentos numéricos foram realizados empregando elementos triangulares do tipo T3. A análise não linear foi conduzida a partir do método de Newton-Raphson, incrementando o deslocamento horizontal do apoio direito em $0,001\text{ mm}$ até o passo 350. A tolerância para convergência em termos de deslocamentos foi assumida como 1×10^{-4} , e as simulações foram realizadas com equilíbrio tangente. Assim como na seção

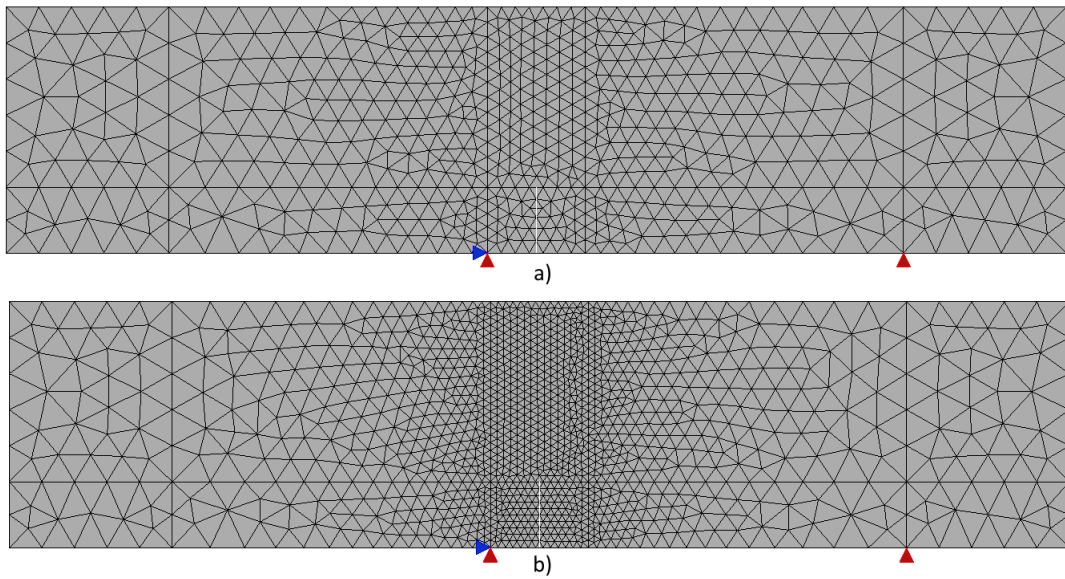


Figura 5.24 – Malhas adotadas para os experimentos numéricos conduzidos nesta seção:
a) M1; b) M2.

5.1, o defeito inicial foi modelado a partir das funções de Heaviside pertinentes à cada estratégia de enriquecimento considerada.

A integração numérica das tensões coesivas sobre os segmentos de trinca foi realizada conforme descrito na seção 5.1. Os elementos que eventualmente contenham algum segmento de trinca são integrados mais uma vez empregando o procedimento de subdivisão, com 6 pontos de integração por célula triangular, para todas as estratégias de enriquecimento aqui investigadas. Para os demais elementos da malha, utilizou-se a quadratura gaussiana convencional, também com 6 pontos de Gauss.

As trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento propostas para as malhas M1 e M2 podem ser vistas, respectivamente, nas Figs. 5.25 e 5.26. O CMSD foi calculado através do INSANE, considerando a diferença entre os deslocamentos verticais obtidos em um ponto de coordenadas imediatamente à esquerda $(660,999999; 0,0)$ e outro de coordenadas imediatamente à direita $(661,000001; 0,0)$ da origem do entalhe. Observa-se que todas as abordagens conseguem representar o comportamento experimental, provendo respostas dentro da faixa esperada. No entanto, as análises realizadas com a malha M1 produzem, naturalmente, resultados de menor acurácia, com trajetórias de equilíbrio que possuem saltos visíveis, relacionados à introdução dos segmentos de trinca. Nota-se que tais saltos estão maiores/mais evidentes nas abordagens que empregam apenas as funções de Heaviside (EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E). De fato, mesmo no gráfico da Fig. 5.26 é nítido que estas estratégias produzem curvas menos suaves que as abordagens que empregam o enriquecimento trigonométrico. Tendências similares

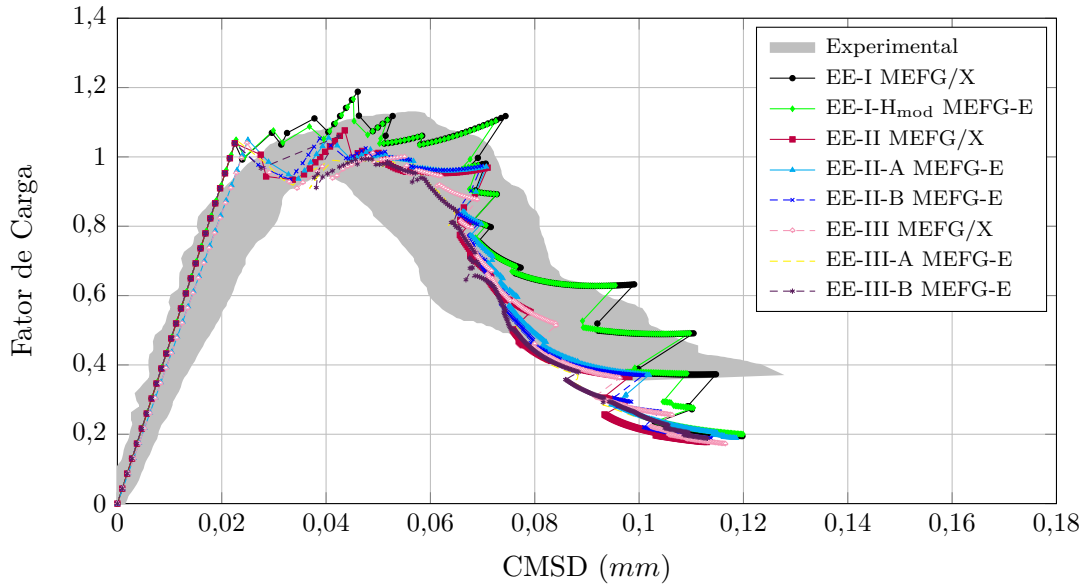


Figura 5.25 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M1 da Fig. 5.24.

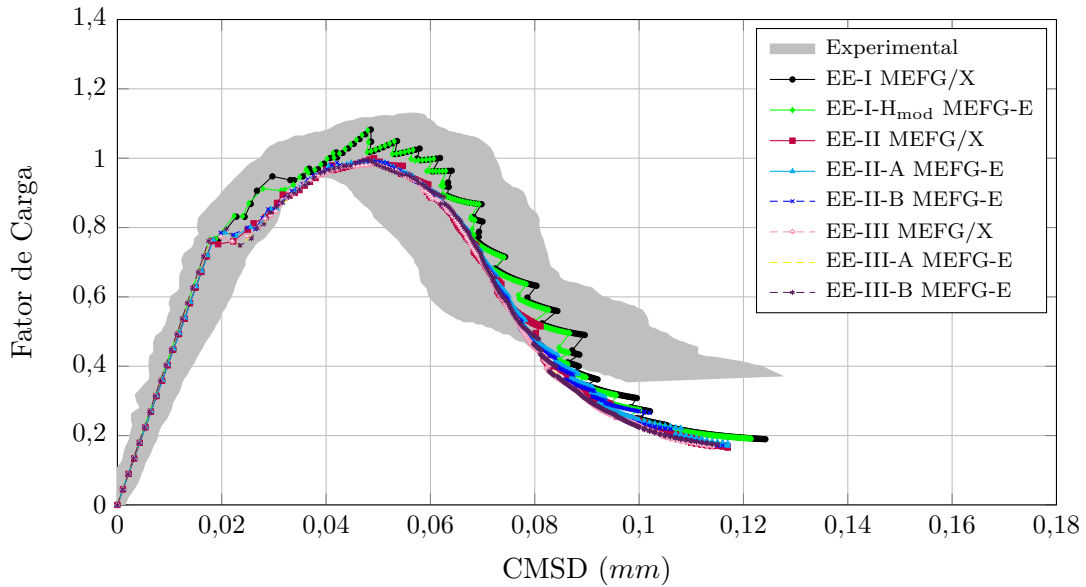


Figura 5.26 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M2 da Fig. 5.24.

foram observadas nos demais experimentos deste capítulo, embora o comportamento tenha sido mais evidente no problema tratado nesta seção (Fig. 5.23). Assim, pode-se concluir que a introdução de enriquecimento trigonométrico, que propicia a inserção da trinca em segmentos menores, pode prover de fato trajetórias de equilíbrio mais suaves mesmo com malhas mais grosseiras. Deve-se destacar, no entanto, que os ganhos devem ser interpretados com alguma cautela. Ainda que se possa melhorar a representação do comportamento das trajetórias de equilíbrio, a introdução das funções trigonométricas não provê, por si só, resultados de suficiente acurácia em malhas inadequadamente grosseiras,

e sem qualquer tipo de enriquecimento polinomial (hipótese não investigada nesta tese, podendo ser avaliada em trabalhos futuros), mesmo que se utilizem incrementos de trinca muito pequenos em relação ao tamanho do elemento finito. Pode-se notar ainda na Fig. 5.25 que as estratégias que empregam mais termos para compor o enriquecimento trigonométrico (EE-III) produziram trajetórias de equilíbrio ligeiramente mais suaves que aquelas que utilizam apenas um termo para compor a função (EE-II). Na Fig. 5.26 se verifica comportamento similar, embora o refinamento da malha tenha já produzido respostas muito boas e consideravelmente mais suaves para ambas as classes de estratégias de enriquecimento (EE-II e EE-III). Observa-se, no entanto, que os resultados das estratégias de enriquecimento EE-III na malha M2, diferentemente daqueles das outras abordagens, só foram passíveis de serem obtidos a partir de uma redução da tolerância em termos de deslocamentos para 1×10^{-7} . Com o valor adotado para as outras estratégias (1×10^{-4}), ocorria divergência da análise. Acredita-se que essa redução possibilitou, neste caso, contornar eventuais instabilidades numéricas.

As tabelas 5.6 e 5.7, exibem, por sua vez, os valores obtidos para o parâmetro d_r - com d_r definido como na seção 5.2 - e as cargas de pico das diferentes estratégias de enriquecimento investigadas adotando a malha M2 da Fig. 5.24, respectivamente. Para o experimento desta seção e a malha considerada, $d_r^{Ref} = 0,2357$. Mais uma vez, d_r foi computado a partir da divisão da trajetória de equilíbrio experimental, que vai aproximadamente até um CMSD de 0,1236 mm, em cinco intervalos.

Tabela 5.6 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da malha M2 da Fig. 5.24.

Estratégia de Enriquecimento	d_r
EE-I MEFG/X	0,1953
EE-I-H _{mod} MEFG-E	0,1943
EE-II MEFG/X	0,1838
EE-II-A MEFG-E	0,1830
EE-II-B MEFG-E	0,1604
EE-III MEFG/X	0,1839
EE-III-A MEFG-E	0,1799
EE-III-B MEFG-E	0,1845

Observa-se que a aproximação das cargas de pico é satisfatória para todas as estratégias de enriquecimento investigadas, estando entre os limites superior e inferior da faixa experimental em todos os casos. A abordagem que produziu o pico mais alto foi a EE-I do MEFG/X, enquanto a estratégia EE-III do MEFG/X resultou na carga de pico mais baixa. No que concerne ao parâmetro d_r , tendo em vista o “afastamento” entre os limites superior e inferior da faixa experimental, considerou-se também que todas as abordagens tiveram um desempenho de suficiente acurácia, estando inclusive relativamente próximas. A estratégia que mais se aproximou do limite inferior da trajetória

Tabela 5.7 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da malha M2 da Fig. 5.24.

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior (ARREA; INGRAFFEA, 1982)	1,1160
Experimental Inferior (ARREA; INGRAFFEA, 1982)	0,7471
EE-I MEFG/X	1,0827
EE-I-H _{mod} MEFG-E	1,0805
EE-II MEFG/X	1,0016
EE-II-A MEFG-E	0,9902
EE-II-B MEFG-E	0,9931
EE-III MEFG/X	0,9812
EE-III-A MEFG-E	0,9914
EE-III-B MEFG-E	0,9936

de equilíbrio experimental foi a EE-II-B do MEFG-E, enquanto aquela que mais dela se afastou foi a EE-I do MEFG/X.

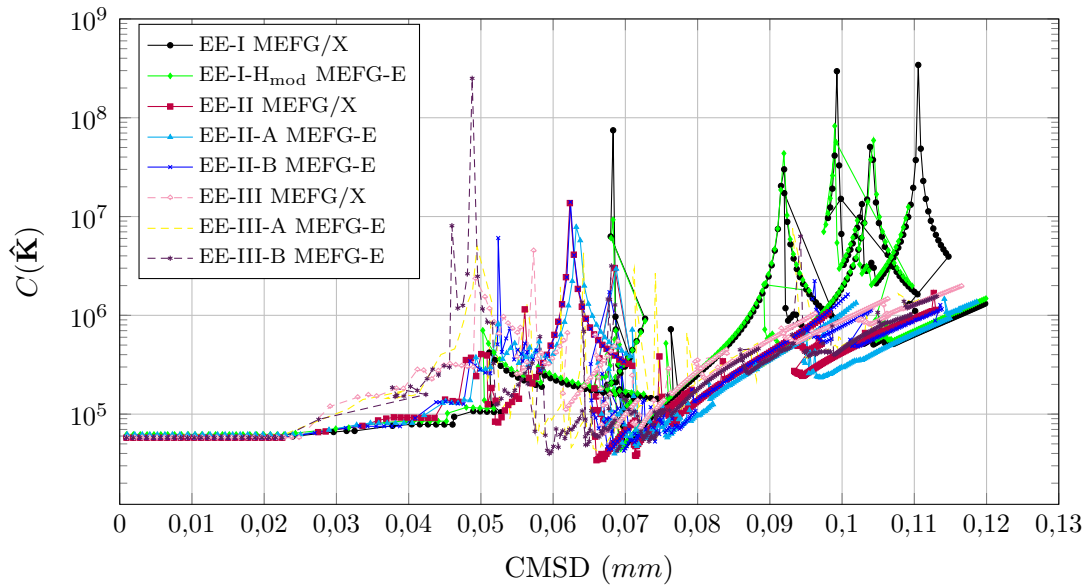


Figura 5.27 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha M1 da Fig. 5.24a).

As Figs. 5.27 e 5.28 mostram os números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ para as diferentes estratégias de enriquecimento investigadas nesta seção. Deve-se observar que, no caso da malha M2, não foi possível computar este parâmetro para as estratégias EE-III. Esta lacuna nos resultados se deu por uma incompatibilidade entre o solucionador que vinha sendo empregado nos problemas deste capítulo, o solver 200, e os arquivos de entrada destas estratégias para a malha M2. Este solver se utiliza de um procedimento de armazenagem especial da matriz de rigidez, de forma a aproveitar sua natureza esparsa para prover maior eficiência computacional. Por alguma razão que não pôde ser identificada,

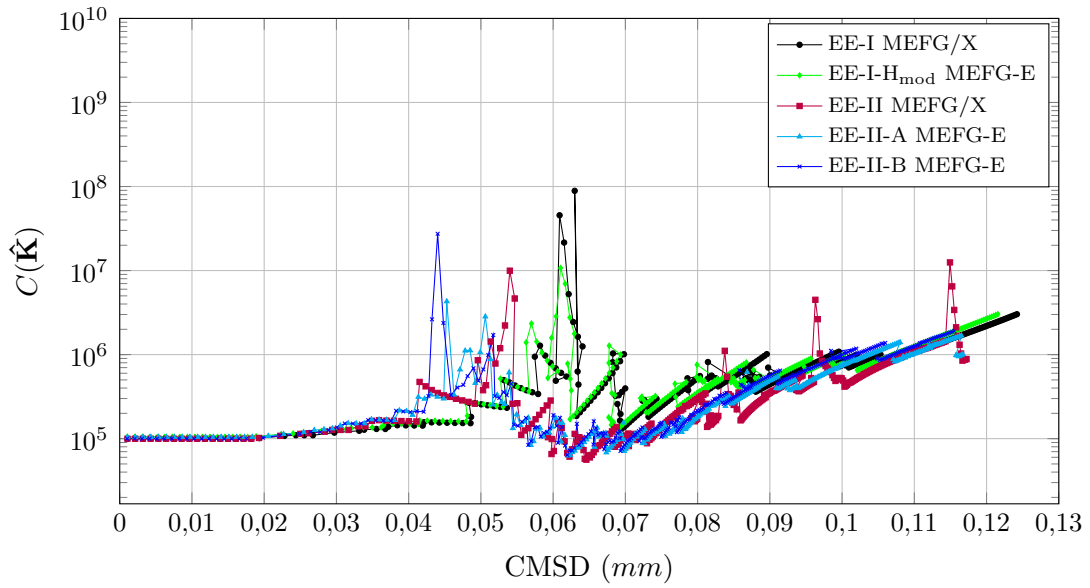


Figura 5.28 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha M2 da Fig. 5.24b).

havia um erro na armazenagem das matrizes dos experimentos envolvendo as estratégias EE-III para a malha M2 que interrompia a análise no passo 20. Com isso, as simulações relativas à estas abordagens foram solucionadas por outro solver, menos eficiente. O cálculo do números de condicionamento escalonados, entretanto, vinha sendo feito a partir da exportação das matrizes esparsas, que eram lidas por um código do software MATLAB R2023a para cômputo dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s a cada passo, conforme a eq. (4.1). Como os experimentos relativos às estratégias EE-III foram resolvidos por outro solucionador, não foi possível fazer a exportação das matrizes, e outras formas de prover o cálculo dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s internamente ao INSANE se mostraram inviáveis do ponto de vista computacional, pelas razões já explanadas na seção 5.1. Pode-se perceber pelos gráficos de condicionamento que as tendências mais relevantes observadas nos experimentos das seções anteriores se mantiveram. As abordagens se mostraram robustas, e apresentaram $C(\hat{\mathbf{K}})$ s relativamente baixos. O refinamento da malha produziu pouca elevação nos números de condicionamento escalonados.

Por fim, as Figs. 5.29 e 5.30 comparam as trajetórias obtidas para as trincas com a faixa experimental para as diferentes estratégias de enriquecimento investigadas para as malhas M1 e M2, respectivamente. De forma similar ao que foi feito na seção 5.2, a faixa experimental foi obtida a partir de uma figura presente no trabalho de Wang e Waisman (2016), usando o software WebPlotDigitizer. Pode-se observar que mesmo na malha M1 as diferentes abordagens propostas nesta tese produziram trajetórias de trinca com ótima concordância em relação àquilo que se verificou experimentalmente. Nota-se no entanto que as estratégias que utilizam apenas as funções de Heaviside tiveram maior dificuldade

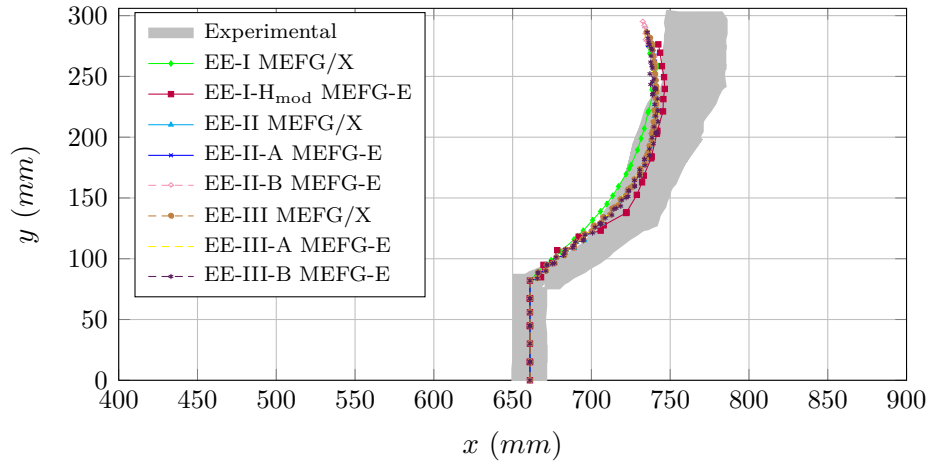


Figura 5.29 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M1 da Fig. 5.24.

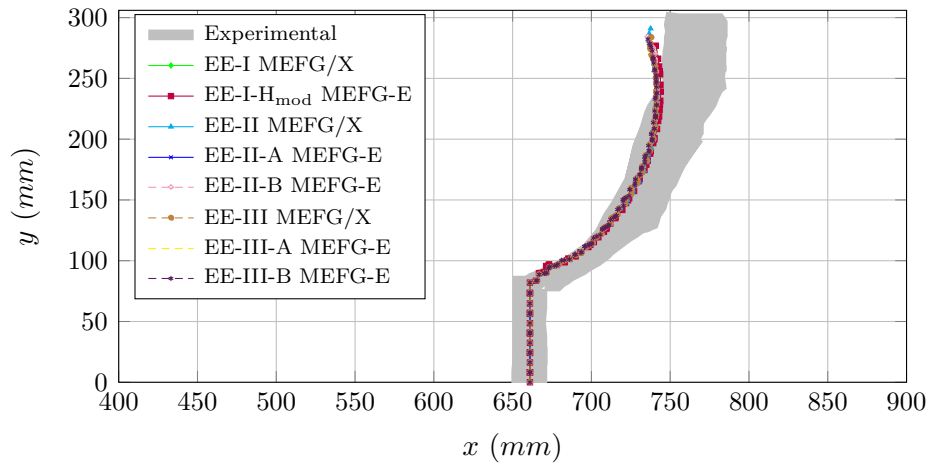


Figura 5.30 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha M2 da Fig. 5.24.

em representar, especialmente na malha M1, a curva sofrida pela descontinuidade em função da atuação do cisalhamento. No caso da EE-I do MEFG/X, é fácil ver que ela produz uma trajetória de trinca mais à esquerda e menos suave que as demais estratégias. No que concerne à EE-I- H_{mod} do MEFG-E, embora sua trajetória sofra uma correção, terminando mais à direita que aquelas das demais abordagens, pode-se notar que ela começa também mais à esquerda, demorando mais que as estratégias que empregam enriquecimento trigonométrico para iniciar a curva (Fig. 5.31). Pode-se afirmar que este era um resultado esperado, visto que as abordagens que se utilizam do enriquecimento trigonométrico (EE-II e EE-III) teriam, pela natureza de tais funções, maior capacidade em capturar e representar mudanças de trajetória em uma trinca. Este fato foi ainda intensificado, na malha M1, pela região de propagação estar relativamente grosseira, dificultando ainda mais a representação adequada das mudanças de trajetória sofridas no caso das EE-I.

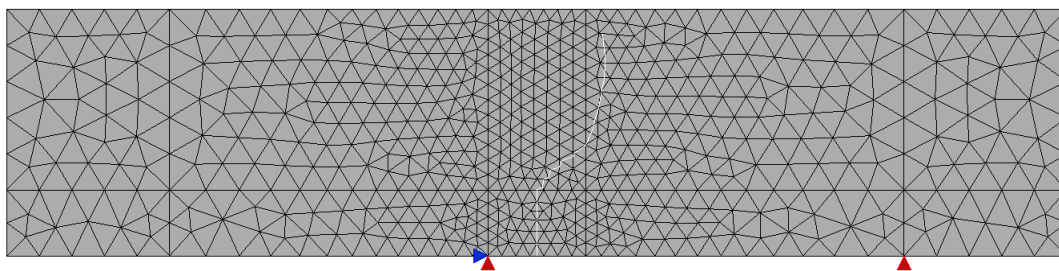


Figura 5.31 – Trajetória da trinca produzida pela EE-I- H_{mod} do MEFG-E com a malha M1 da Fig. 5.24.

5.4 Conclusões parciais

Os resultados dispostos neste capítulo demonstraram que o modelo descontínuo descrito no capítulo 3 (particularmente se destacam as seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1) exibiu boa performance em termos de representação das trajetórias de equilíbrio e assumidas pela trinca, e de condicionamento. O modelo foi aplicado a diferentes problemas de referência da literatura, empregando tanto elementos quadrilaterais quanto elementos triangulares nas malhas adotadas. As abordagens propostas demonstraram uma das grandes vantagens da aplicação do MEFG/X e métodos dele derivados na simulação da propagação de trincas, uma vez que entregam uma boa performance mesmo com malhas relativamente grosseiras (seções 5.1 e 5.2). Nos demais experimentos (seção 5.3), onde se aplica refinamento à região da trinca, cabe ressaltar que este refinamento ainda é menor do que seria o idealmente exigido para um modelo de elementos finitos.

No que concerne aos desempenhos das diferentes estratégias de enriquecimento, pode-se dizer que foram relativamente próximos, com exceção das ressalvas feitas às estratégias EE-III. Além de se mostrarem computacionalmente inviáveis pela arquitetura do código empregado, onerando o tempo gasto para montagem das matrizes de rigidez a cada passo com a evolução da propagação, estas estratégias se mostraram mais suscetíveis à instabilidade numérica em alguns contextos. Primeiramente, no ensaio de tração de Shi et al. (2005), no qual as estratégias EE-III-A e EE-III-B do MEFG-E, diferentemente das outras abordagens, mostraram trajetórias de trinca que não representavam o comportamento real. Posteriormente, no ensaio de cisalhamento em 4 pontos de Arrea e Ingraffea (1982), houve incompatibilidade com o solucionador até então empregado, também distintamente do que ocorre com as demais abordagens. Além disso, deve-se acrescentar que, apesar de as estratégias EE-III terem rendido resultados coerentes nesta seção, eles foram obtidos com uma tolerância menor, de 1×10^{-7} , já que com o valor adotado para as outras estratégias ocorria divergência da análise.

Comparando os desempenhos de MEFG/X e MEFG-E, ou das estratégias que utilizam

apenas funções de Heaviside com aquelas que empregam enriquecimento trigonométrico, pode-se dizer que os comportamentos são similares. De fato, já se havia constatado que as estratégias propostas para o MEFG/X eram robustas. Neste capítulo, elas se mostraram também em geral relativamente bem condicionadas, minimizando eventuais ganhos que poderiam ser conseguidos pelas estratégias do MEFG-E no que concerne a este aspecto. Por outro lado, feitas as ressalvas pertinentes a cada experimento, deve-se observar que a estratégia que se manteve constante e ligeiramente mais próxima do comportamento experimental, com base nas trajetórias de trinca e de equilíbrio, e nas estimativas para os parâmetros d_r , foi a EE-II-B do MEFG-E, indicando que o método pode prover alguma vantagem, ainda que menos significativa do que inicialmente esperado, em termos de acurácia. Na comparação entre as estratégias que utilizam apenas funções de Heaviside com aquelas que empregam também enriquecimento trigonométrico, pode-se perceber que estas abordagens podem prover, a depender da malha adotada, maior suavidade para as trajetórias de equilíbrio e maior capacidade de representar mudanças nas trajetórias assumidas pelas trincas. No entanto, deve-se observar que, a despeito de suas limitações, as EE-I são formulações mais simples, e de mais fácil implementação computacional que as demais estratégias.

Por fim, deve-se destacar ainda a importância do uso de uma estratégia de integração numérica adequada para manter a estabilidade numérica das abordagens que empregam as funções de Heaviside convencionais em termos de condicionamento. Como se constatou na seção 5.1, o uso de integração convencional, a depender da posição relativa trinca/malha, pode conduzir a uma deterioração significativa dos números de condicionamento escalonados. Em outros testes não mostrados nesta tese por concisão, constatou-se que o uso de um algoritmo de modificação nodal (*node-snapping*) poderia servir para contornar esta limitação. Este problema, no entanto, não se verifica com o uso das funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização, embora o abandono da estratégia de subdivisão possa provocar uma perda de acurácia.

A análise dos resultados gerados por este capítulo levou a algumas perguntas. A principal delas é se este modelo poderia ser melhorado ainda mais com modificações mínimas. Seria possível produzir uma resposta numérica mais de acordo com a faixa experimental no amolecimento para o painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004)? Haveria alguma forma de controlar melhor a oscilação ocorrida com as trajetórias das trincas na borda do painel para as abordagens que usam enriquecimento trigonométrico? É possível simular a propagação de forma mais próxima da curva demonstrada no experimento do espécime em cisalhamento em 4 pontos de Arrea e Ingraffea (1982)? Tentando responder afirmativamente a estes questionamentos, passou-se ao estudo do modelo contínuo-descontínuo.

6 Simulação da Propagação de Trincas com Modelo de Zona Coesiva Associado a Modelos de Dano

Neste capítulo, o modelo contínuo-descontínuo (C-D) proposto nas seções 3.3.1.2, 3.3.2.2 e 3.3.3 do capítulo 3 é aplicado para a solução de três problemas de referência da literatura que envolvem a simulação da propagação de trincas. Dois dos experimentos considerados foram abordados também no capítulo 5. As estratégias de enriquecimento envolvidas nestes experimentos são as estratégias EE-I e EE-II do MEFG/X (eqs. (3.70) e (3.73) das seções 3.4.1.1 e 3.4.1.2, respectivamente) e as estratégias EE-I- H_{mod} (com $\alpha = 0,1$), EE-II-A e EE-II-B do MEFG-E (eqs. (3.85), (3.88) e (3.90) das seções 3.4.1.4 e 3.4.1.5, respectivamente). Pelos motivos explicitados no capítulo anterior, as estratégias EE-III do MEFG/X e do MEFG-E não serão aqui investigadas. Até onde vai o conhecimento da autora, esta é a primeira aplicação do MEFG-E a um modelo contínuo-descontínuo para simulação da propagação de trincas. O material dos elementos das malhas adotadas para os diferentes experimentos é representado a partir dos modelos de dano descritos nas seções 3.2.1 e 3.2.2, considerando uma formulação não local baseada em integral (seção 3.2.4). O desempenho das diferentes estratégias é estudado mediante comparação dos resultados obtidos com resultados experimentais, além de outros modelos numéricos de referência, quando disponíveis, a partir das trajetórias de equilíbrio. Realiza-se também uma breve investigação acerca da relação acurácia/custo computacional, através da avaliação do número de iterações gasto para a solução da análise não linear. O condicionamento de cada uma das abordagens é avaliado, em cada passo da análise, a partir do número de condicionamento escalonado, $C(\hat{\mathbf{K}})$ (eqs. (4.1) e (4.2)). Nos experimentos aqui realizados, o critério de direção adotado para a trinca, baseado em uma medida não local de deformações, se mostra um fator limitante nas proximidades das regiões de compressão. O valor assumido para o dano crítico ($\omega_{\text{cr}} = 0,5$) em geral deflagra a nucleação da fratura discreta antes que as trajetórias de equilíbrio atinjam as cargas de pico. Dentro dos limites surgidos em função das limitações de representação oriundas dos problemas relacionados ao critério de direção, a estratégia EE-II-B do MEFG-E se destaca, em relação às demais do MEFG/X e do MEFG-E por prover, até esses limites, um desempenho relativamente satisfatório com relativa eficiência computacional, demandando, na maior parte dos problemas, menos iterações por passo que seus pares. Todas as abordagens se mostram robustas e bem condicionadas. Para os dois últimos experimentos, é feita ainda uma análise comparativa entre os modelos adotados para o material dos elementos, considerando as respostas com meio linear elástico isotrópico obtidas no capítulo 5, o modelo contínuo-descontínuo proposto e um modelo que desconsidera qualquer transição energética, ou seja, no qual a lei de evolução de dano continua atuando em um elemento mesmo com o surgimento da

fratura discreta. Os resultados indicam que o modelo mais simples, descrito nas seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1 do capítulo 3, provê na maioria dos casos a resposta mais satisfatória. Os dados fornecidos pelo modelo C-D, por sua vez, sugerem que a aproximação proposta nesta tese, considerando a energia de fratura para acoplamento entre os modelos contínuo e descontínuo, tornam as trajetórias de equilíbrio dos experimentos numéricos muito próximas daquelas obtidas por um modelo que desconsidera qualquer transição energética.

6.1 Flexão em 3 Pontos de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012)

O primeiro exemplo tratado neste capítulo consiste num ensaio de flexão em três pontos realizado por García-Álvarez, Gettu e Carol (2012). Trata-se de uma viga de concreto com um entalhe inicial e um carregamento concentrado aplicado ao meio do vão. A geometria, carregamento e condições de contorno podem ser vistos na Fig. 6.1. A viga é modelada em estado plano de tensão, com elementos triangulares do tipo T3. A malha adotada para os experimentos, extraída do trabalho de Assis (2023), pode ser vista na Fig. 6.2. Diferentemente do procedimento adotado no capítulo 5, no qual os entalhes iniciais foram representados a partir das funções de Heaviside, o entalhe inicial deste experimento foi incluído na geometria do problema. Deve-se observar que há uma limitação em relação a este modo de proceder quando se emprega o modelo coesivo descrito nas seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1 (modelo descontínuo) associado à adoção de um material linear elástico para os elementos finitos. Neste contexto, quando o entalhe é incluído na geometria de um problema, mais de um elemento finito nas proximidades do entalhe pode atingir a resistência à tração f_t simultaneamente, o que cria um cenário aleatório para que a trinca seja nucleada no elemento e/ou na região corretos. Pretende-se mostrar que, no modelo C-D, essa limitação é contornada.

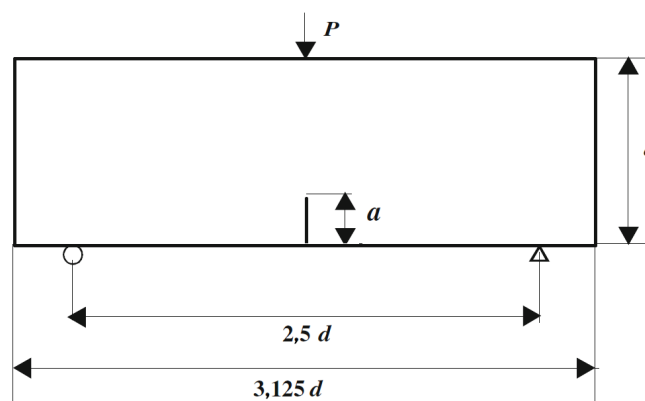


Figura 6.1 – Geometria da viga sujeita à flexão em três pontos. $d = 80 \text{ mm}$, $a = 20 \text{ mm}$ e $P = 1 \text{ N}$. Adaptado de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012).

O modelo constitutivo adotado para os elementos foi descrito na seção 3.2.2, ou seja, trata-se do modelo de dano ortotrópico proposto por De Borst e Gutiérrez (1999). Os

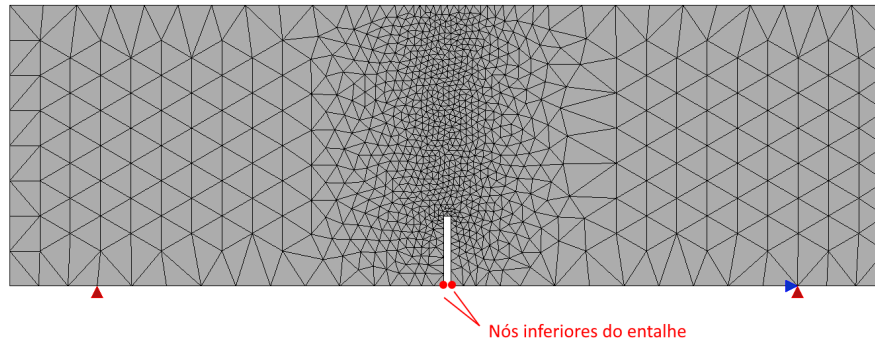


Figura 6.2 – Malha (ASSIS, 2023) adotada para os experimentos numéricos realizados nesta seção. $h \approx 1 \text{ mm}$ na região refinada, e $h \approx 10 \text{ mm}$ fora dela.

parâmetros adotados para o material, para a formulação não local e para a lei de evolução de dano com variação serpentina (seção 3.2.3.2) podem ser vistos na tabela 6.1. Tais parâmetros foram retirados de Assis (2023), com duas exceções. Uma delas é a energia de fratura G_f , assumida como o valor recomendado para a energia de fratura em modo I por García-Álvarez, Gettu e Carol (2012). A outra é o valor adotado para o parâmetro k da formulação não local, ligeiramente superior ao assumido no trabalho de Assis (2023), onde $k = 8,0$. Esta escolha foi feita com base na análise da banda de dano em testes preliminares, de forma a garantir que a nucleação da trinca se desse na região correta. O comprimento característico, equivalente ao valor adotado para o parâmetro não local l (tabela 6.1), é entendido como um parâmetro de material. Ele é determinado como sendo aproximadamente de 3 a 5 vezes o tamanho do diâmetro máximo do agregado (PENNA, 2011). A mesma consideração se estende aos demais problemas tratados neste capítulo. Para as estratégias que empregam enriquecimento trigonométrico, um incremento de trinca de $0,6 \text{ mm}$ (pouco menos de $2h/3$) foi assumido. O deslocamento vertical do nó de aplicação da carga foi incrementado em $-0,001 \text{ mm}$ por 100 passos. A análise não linear foi solucionada a partir do método de Newton-Raphson, com equilíbrio secante e tolerância para convergência em termos de deslocamentos de 1×10^{-4} .

Tabela 6.1 – Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.

Parâmetros Não Locais	Parâmetros de Material	Parâmetros da Lei de Dano Serpentina (eqs. (3.31) e (3.32))
$l = 36 \text{ mm}$	$E = 33800 \text{ N/mm}^2$	$f_e = 3,5$
$k = 10,0$	$\nu = 0,2$	$\kappa_0 = 2,071 \times 10^{-4}$
	$G_f = 0,080 \text{ N/mm}$	$\tilde{E} = 33800 \text{ N/mm}^2$
	$d_{\text{init}} = 0 \text{ N/mm}^3$	

A integração numérica dos elementos cortados pela trinca é realizada a partir da subdivisão destes elementos em células triangulares, empregando, assim como no capítulo anterior, a implementação desenvolvida por Campos (2020). Foram adotados seis pontos

de Gauss em cada célula triangular para todas as abordagens. Os demais elementos da malha, não atravessados por descontinuidade, foram integrados a partir da quadratura gaussiana convencional, com seis pontos por elemento. A integração das forças coesivas sobre os segmentos de trinca, assim como no capítulo 5, é realizada com quatro pontos de Gauss por segmento para todas as estratégias. Este procedimento de integração numérica foi também adotado nas simulações conduzidas na seção 6.3 deste capítulo.

A Fig. 6.3 ilustra as trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento estudadas, comparando-as com a resposta experimental de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012) e com um modelo numérico de dano não local que não emprega qualquer tipo de enriquecimento (MEF), com os mesmos parâmetros da tabela 6.1 e a mesma malha da Fig. 6.2. O CMOD é calculado a partir da diferença entre os deslocamentos horizontais dos dois nós inferiores do entalhe (Fig. 6.2).

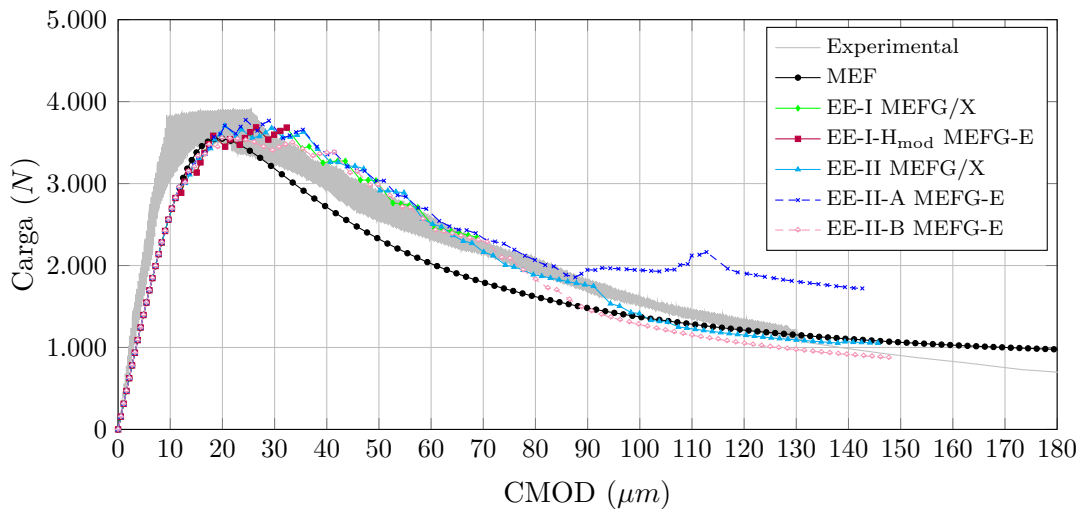


Figura 6.3 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.2.

Tabela 6.2 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.1. Os valores referentes à faixa experimental foram extraídos de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012).

Estratégia	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior	3914,57
Experimental Inferior	3417,32
MEF	3547,80
EE-I MEFG/X	3678,05
EE-I-H _{mod} MEFG-E	3685,70
EE-II MEFG/X	3695,09
EE-II-A MEFG-E	3776,58
EE-II-B MEFG-E	3554,21

É possível observar na Fig. 6.3 que nem todas as trajetórias do equilíbrio foram capazes de bem representar a evolução da propagação com a malha considerada. As cargas de pico

são razoáveis, e próximas do que foi obtido experimentalmente (tabela 6.2). O travamento ocorrido com a estratégia EE-II-A do MEFG-E, responsável também pelas divergências ocorridas com as estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I-H_{mod} do MEFG-E, se deve à perda de representação da trajetória da trinca, já que esta acaba sofrendo uma curva e retornando quando a propagação se aproxima da região de compressão (Fig. 6.4). A estratégia EE-II do MEFG/X fica sujeita a fenômeno similar, embora consiga se corrigir suficientemente de modo a seguir simulando a perda de capacidade de carga na trajetória de equilíbrio. Tais resultados das estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-A do MEFG-E só foram passíveis de ser obtidos a partir da troca do solucionador para o solver 500 (menos eficiente), já que o solver original (200) acabava divergindo em função deste fenômeno. A troca do solucionador, no entanto, não foi suficiente para garantir a continuidade da análise com as estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I-H_{mod} do MEFG-E. O uso de um critério de direção baseado em deformações, como é o caso do adotado para o modelo C-D aqui proposto (seção 3.3.2.2), pode de fato incorrer em certa sensibilidade à compressão, ocasionando retornos na trinca. Esta é uma limitação conhecida da literatura (ver, por exemplo, Wang e Waisman (2018) ou Oliveira, Barros e Penna (2022)). Entretanto, optou-se por lidar com eventuais modificações do critério de direção do modelo C-D em trabalhos futuros.

A despeito desta limitação, a estratégia EE-II-B do MEFG-E, por outro lado, é capaz de representar adequadamente a trajetória da trinca (Fig. 6.5) - ainda que os efeitos da compressão se façam sentir, com a curva que a trinca sofre perto da região em que esta é predominante - e prover uma trajetória de equilíbrio satisfatória, em consonância com o comportamento experimental. Neste caso, os resultados foram obtidos (serendipicamente) empregando três pontos de Gauss por célula triangular. Quando são utilizados os seis pontos (como para as demais estratégias), a estratégia EE-II-B do MEFG-E passa a estar sujeita aos mesmos problemas verificados para as demais abordagens. Esta evidência, mais uma ocorrência comum entre as estratégias, torna muito provável que tais dificuldades de representação da trajetória assumida pela trinca estejam de fato relacionadas ao critério de direção, sensível à quantidade de pontos de integração presentes na região de sua avaliação. É interessante observar, no entanto, que, sob as mesmas condições (três pontos de integração por célula triangular), as estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-A do MEFG-E continuam sofrendo retornos nas trajetórias das trincas, diferentemente do que ocorre para a estratégia EE-II-B do MEFG-E.

Há ainda alguns aspectos dignos de nota no gráfico da Fig. 6.3. A trajetória de equilíbrio apresentada pela estratégia MEF demonstra que os parâmetros adotados na tabela 6.1 são razoáveis, tendo em vista o comportamento experimental. Observa-se também que este modelo contínuo, no final dos passos e diferentemente do que ocorre com os modelos

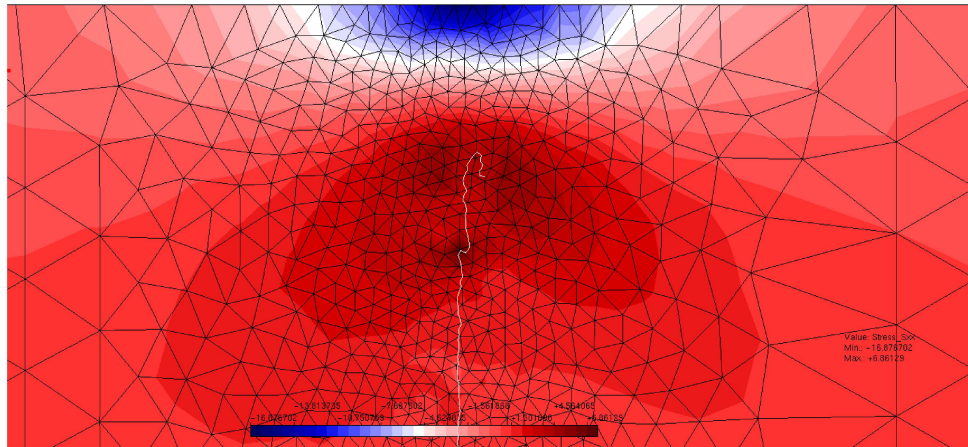


Figura 6.4 – Detalhe da trajetória de trinca obtida pela estratégia EE-II-A do MEFG-E antes de seu retorno. Configuração similar é obtida, em passos anteriores, para as estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I-H_{mod} do MEFG-E.

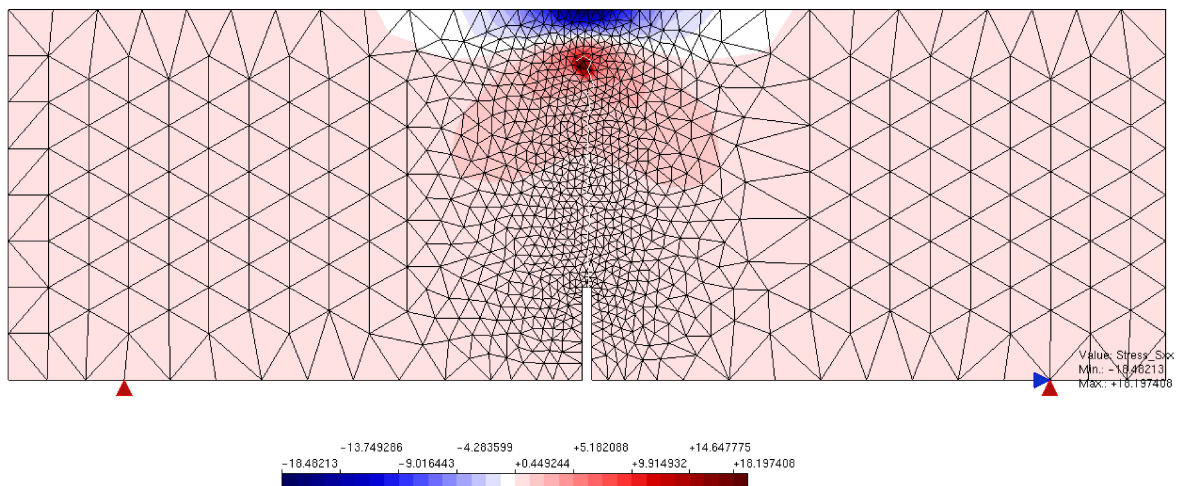


Figura 6.5 – Trajetória de trinca obtida pela estratégia EE-II-B do MEFG-E no passo 100.

C-D (desde que consigam bem representar a trajetória da trinca), dá sinais de travamento, ficando acima da faixa experimental. Isso se torna mais evidente quando permitimos que a análise corra por mais passos (Fig. 6.6). Este era um comportamento esperado, e é um dos argumentos empregados na literatura em favor dos modelos C-D. Nota-se, por fim, que o valor adotado para o dano crítico ($\omega_{cr} = 0,5$) nos experimentos desta tese deflagra, neste caso, a nucleação e propagação da trinca antes que a carga de pico seja atingida. Este é um aspecto que, como se verá na seções posteriores, parece ser uma constante.

No que concerne ainda à avaliação acerca da qualidade das curvas ilustradas no gráfico da Fig. 6.3, assim como no capítulo 5, optou-se por empregar mais uma vez a medida d_r presente no trabalho de Paiva (2023). Para facilitar a leitura do texto, apresenta-se

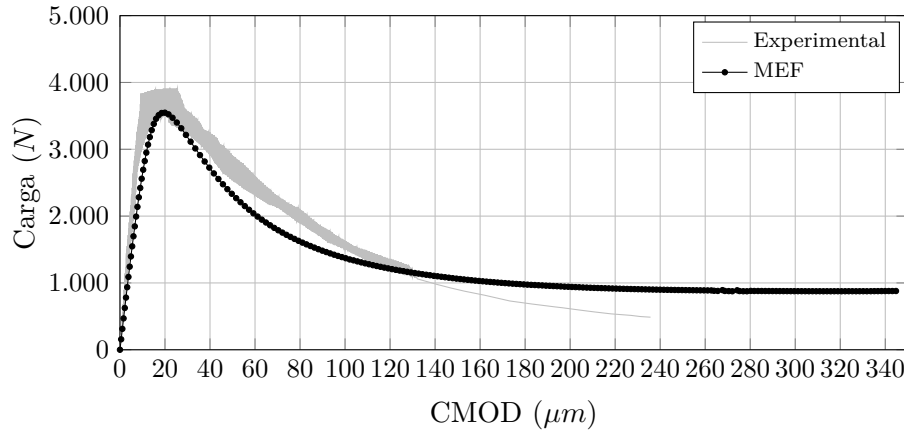


Figura 6.6 – Trajetória de equilíbrio obtida para a estratégia MEF com 220 passos.

novamente a definição deste parâmetro como

$$d_r = \left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d_i^2 \right]^{1/2} \quad (6.1)$$

onde $d_i = P_i^{Lab} - P_i^{Pn}$, com P_i^{Lab} sendo, neste e nos demais experimentos deste capítulo, a carga registrada na faixa experimental em seu limite inferior, e P_i^{Pn} sendo a carga registrada para as diferentes soluções numéricas em uma dada coordenada da abscissa. Os pontos de cálculo foram escolhidos de forma análoga ao que foi feito no capítulo 5, dividindo a largura da trajetória experimental em cinco intervalos. Para que a comparação fosse “justa”, considerando as ocorrências relativas à perda de representação da trajetória de trinca, o ponto limite para essa divisão foi escolhido como aquele correspondente a um CMOD de $85 \mu m$, o que equivale, em número de passos, aproximadamente ao passo 65 (passo em que a maior parte das abordagens acaba sofrendo a alteração em sua trajetória). O parâmetro de referência d_r^{Ref} é obtido considerando um $d_i^{Ref} = P_i^{Lab, sup} - P_i^{Lab, inf}$, com $P_i^{Lab, sup}$ e $P_i^{Lab, inf}$ representando os valores de P_i^{Lab} medidos nos limites superior e inferior, respectivamente. Para o experimento desta seção e com os pontos de cálculo considerados, $d_r^{Ref} = 297,79$.

A tabela 6.3 exhibe os valores obtidos para os parâmetros d_r com as diferentes estratégias. A tabela 6.4, por sua vez, mostra o número de iterações necessário para a solução da análise não linear (até o passo em que as estratégias foram capazes de manter a simulação), e a média de iterações por passo. Observa-se que, no caso das estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E, que divergem antes das demais estratégias, foram empregados menos pontos para a determinação de d_r na tabela 6.3 (foram considerados apenas os primeiros quatro e dois pontos, respectivamente, adequando devidamente a eq. (6.1)).

Tabela 6.3 – Parâmetro d_r calculado para as diferentes estratégias empregadas para solução do problema da Fig. 6.1. $d_r^{Ref} = 297,79$.

Estratégia	d_r
MEF	204,85
EE-I MEFG/X	384,76
EE-I-H _{mod} MEFG-E	396,03
EE-II MEFG/X	265,68
EE-II-A MEFG-E	336,37
EE-II-B MEFG-E	274,98

Tabela 6.4 – Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.1. A estratégia MEF, para construção do gráfico da Fig. 6.6, foi analisada, excepcionalmente, até o passo 220.

Estratégia	Número de Iterações	Média de iterações por passo
MEF	1534	6,97
EE-I MEFG/X	508	9,07
EE-I-H _{mod} MEFG-E	285	7,70
EE-II MEFG/X	912	9,12
EE-II-A MEFG-E	1277	12,77
EE-II-B MEFG-E	1205	12,05

Pode-se perceber que as estratégias propostas se encontram relativamente próximas da faixa experimental, com parâmetros d_r de mesma ordem de d_r^{Ref} . Entre as abordagens oriundas do MEFG/X e do MEFG-E, as estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E, no intervalo considerado, são aquelas que se encontram mais próximas do limite inferior da carga de laboratório, com ligeira vantagem para a estratégia EE-II do MEFG/X. O modelo distribuído (MEF), por sua vez, é a estratégia mais próxima do limite em questão, considerando o cálculo de d_r até o CMOD de $85 \mu m$. Apesar disso, pelo gráfico da Fig. 6.3, constata-se que esta abordagem, diferentemente das estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E, encontra-se um pouco abaixo da faixa experimental. As demais abordagens, que sofrem mais com a mudança de direção da trinca em função da região de compressão se encontram mais distantes da faixa experimental, com o pior desempenho para a abordagem EE-I-H_{mod} do MEFG-E. No que concerne à eficiência computacional, medida em termos do número de iterações e da média de iterações por passo, entre as abordagens do MEFG/X e do MEFG-E, em tese a estratégia EE-I-H_{mod} do MEFG-E poderia ser considerada a mais eficaz, com uma média de 7,70 iterações por passo. No entanto, este resultado merece ser interpretado com prudência, uma vez que a interrupção da análise desta abordagem ocorre anteriormente a quaisquer uma das demais, ou seja, com menor avanço da trinca. Cabe lembrar que todos os experimentos numéricos tratados nesta tese que demandaram um procedimento de solução incremental foram

resolvidos empregando o método de controle de deslocamentos. Este método por vezes fica sujeito a oscilações no erro que retardam a convergência e aumentam o número de iterações requerido para solucionar determinado passo, mesmo quando se lança mão de dispositivos como o controle de tolerância, disponível no INSANE. Nos experimentos aqui realizados, este comportamento foi recorrente em passos nos quais algum segmento de trinca era inserido. Pretende-se investigar outros métodos de controle associados aos modelos aqui propostos em trabalhos futuros. Com isso, não se pode afirmar que a média obtida para a estratégia EE-I- H_{mod} do MEFG-E conseguiria se manter constante com o decorrer da análise. Por motivo análogo, ou seja, por não incluir a fratura discreta propriamente dita, era esperado que o modelo do MEF - cujos registros foram feitos considerando os 220 passos empregados para o gráfico da Fig. 6.6 - obtivesse, proporcionalmente, entre as estratégias, o menor número de iterações e a menor média de iterações por passo, o que de fato aconteceu. Entre as estratégias que conseguiram completar os 100 passos da análise oriundas do MEFG/X e métodos derivados, o destaque vai para a estratégia EE-II do MEFG/X, com uma média de 9,12 iterações por passo. Quando se alia essa análise a todas as considerações acerca da acurácia, há que se fazer notar a estratégia EE-II-B do MEFG-E que, com cerca de 3 iterações a mais por passo, consegue melhor representar o comportamento real da trinca do problema, diferentemente das demais abordagens, além de apresentar um d_r próximo de d_r^{Ref} .

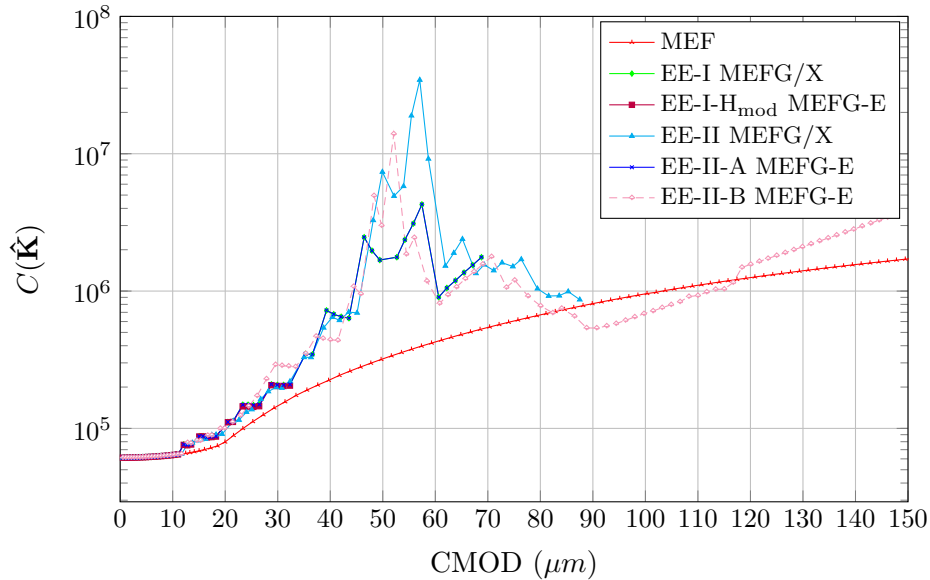


Figura 6.7 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.2.

A Fig. 6.7 mostra, por fim, o condicionamento das diferentes estratégias de enriquecimento estudadas. Nem todas as abordagens apresentam os valores de $C(\hat{\mathbf{K}})$ para todos os passos por razões similares às já discutidas no capítulo 5. Tendo boa parte delas divergido com a mudança de trajetória da trinca com o solucionador corrente e mais eficiente,

não houve viabilidade computacional para se determinar os números de condicionamento escalonados por outros meios. No entanto, até onde foi possível medir, fica claro que as tendências dos experimentos anteriormente realizados nesta tese se mantiveram. Nenhuma das abordagens acusa problema de robustez, e estão, a despeito de algumas oscilações, bem condicionadas. Elas possuem, até o passo em que é possível fazer a comparação, desempenhos similares, com ligeira vantagem, entre as estratégias do MEFG/X e do MEFG-E, para a estratégia EE-II-B do MEFG-E. Nota-se ainda que a ordem de grandeza dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s obtidos para as estratégias de enriquecimento propostas é próxima da ordem de grandeza dos valores provenientes do modelo distribuído do MEF.

6.2 Painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004)

O segundo problema de referência estudado neste capítulo já foi abordado na seção 5.2 do capítulo anterior. Trata-se do painel em L analisado experimental e numericamente por Winkler, Hofstetter e Lehar (2004). Para facilitar a leitura, entretanto, apresenta-se uma vez mais a geometria, carregamento e condições de contorno do problema, bem como a malha adotada nos experimentos (Fig. 6.8). A malha representada nesta figura é a mesma dos experimentos conduzidos na seção 5.2, com elementos quadrados de dimensões $10 \times 10 \text{ mm}$. O modelo constitutivo adotado para os elementos foi descrito na seção 3.2.1. Trata-se, portanto, do modelo de dano isotrópico que emprega como medida de deformação equivalente aquela proposta por De Vree, Brekelmans e Van Gils (1995) (eq. (3.18)). Os parâmetros assumidos para o material, para a formulação não local e para a lei de evolução de dano com variação exponencial (seção 3.2.3.1) (WOLENSKI et al., 2018) podem ser vistos na tabela 6.5. Para as simulações conduzidas nesta seção que empreguem enriquecimento trigonométrico, assim como no capítulo anterior, o tamanho do incremento de trinca é $6,0 \text{ mm}$ (pouco menos de $2h/3$). Os experimentos numéricos foram realizados utilizando elementos quadrilaterais do tipo Q4. A análise não linear foi conduzida a partir do método de Newton-Raphson com controle do deslocamento vertical no ponto de deslocamento vertical máximo, e um incremento de $0,01 \text{ mm}$ a cada passo, com 100 passos. A tolerância para convergência em termos de deslocamentos foi assumida como 1×10^{-6} , e as simulações foram realizadas com equilíbrio secante. Observa-se mais uma vez que, em razão da obrigatoriedade, na nucleação, de a trinca passar pelo centroide do elemento (seção 3.3.2.2), a trinca inicial não sairá exatamente da quina do painel em L, como seria esperado. A integração numérica se deu pelo mesmo procedimento descrito no capítulo 5, ou seja, foi empregado o procedimento de subdivisão nos elementos que continham alguma descontinuidade com três pontos de integração por cada célula triangular. Os demais elementos da malha foram integrados usando 4×4 pontos de Gauss. Para a integração das forças coesivas sobre cada segmento de trinca, como nas demais seções dos capítulos 5 e 6, utilizou-se quatro pontos de Gauss (MOËS; BELYTSCHKO,

2002).

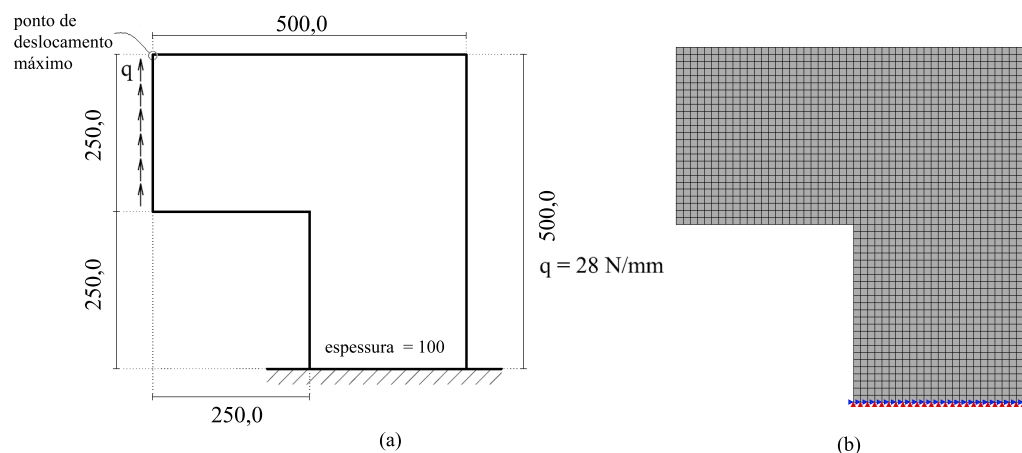


Figura 6.8 – a) Geometria, carregamento e condições de contorno do painel em L. Dimensões em *mm*. b) Malha empregada.

Tabela 6.5 – Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.

Parâmetros Não Locais	Parâmetros de Material	Parâmetros da Lei de Dano Exponencial (eqs. (3.28) e (3.29))
$l = 28 \text{ mm}$	$E = 25850 \text{ N/mm}^2$	$\alpha = 0,999$
$k = 7,0$	$\nu = 0,18$	$\beta = 500$
	$G_f = 0,0775 \text{ N/mm}$	$\kappa_0 = 1,52 \times 10^{-4}$
	$d_{\text{init}} = 0 \text{ N/mm}^3$	
	$k_r = 11,48$	

6.2.1 Comparação entre estratégias de enriquecimento

As trajetórias de equilíbrio obtidas pelas diferentes estratégias de enriquecimento podem ser vistas na Fig. 6.9, que traz ainda os resultados providos por um modelo numérico em que apenas o dano de De Vree, Brekelmans e Van Gils (1995) não local é empregado, sem qualquer tipo de enriquecimento (MEF), com os mesmos parâmetros da tabela 6.5 e a mesma malha da Fig. 6.8. Podem ser vistas ainda neste gráfico a faixa experimental e as trajetórias de equilíbrio dos modelos numéricos de referência encontrados em Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

O gráfico da Fig. 6.9 revela que as estratégias oriundas do MEFG/X e do MEFG-E, com exceção das estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I-H_{mod} do MEFG-E, deixam de representar o comportamento real da estrutura nas proximidades do passo 40, o que corresponde, em termos de deslocamento, a cerca de 0,4 *mm*. A razão por trás deste comportamento é similar à já abordada na seção 5.2 do capítulo 5. Nas proximidades da zona de compressão, a trinca acaba retornando, o que causa o travamento e as distorções verificadas nas trajetórias de equilíbrio das estratégias que empregam enriquecimento

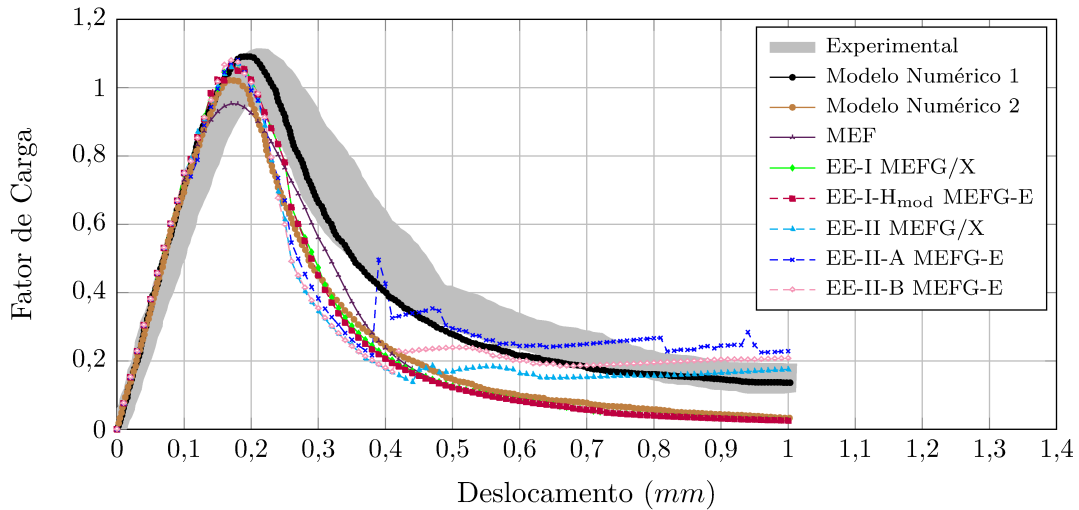


Figura 6.9 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.8. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

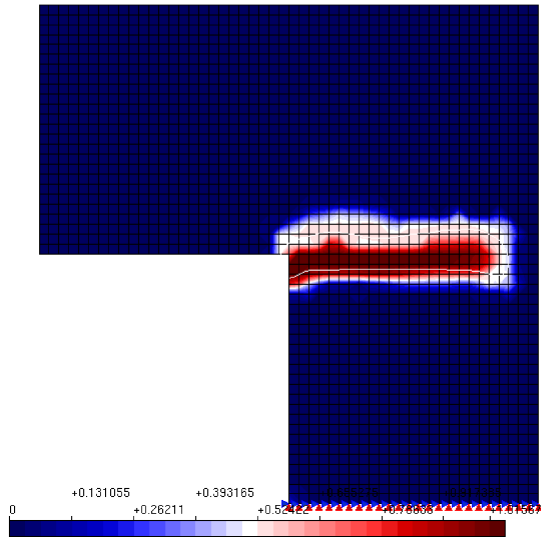


Figura 6.10 – Configuração final de dano, no passo 100, para a estratégia EE-II do MEFG/X.

trigonométrico. Embora o painel em L aqui tratado pareça ser especialmente sensível a este fenômeno quando se emprega um critério de direção baseado em deformações (OLIVEIRA; BARROS; PENNA, 2022), no caso dos experimentos realizados nesta seção este efeito é ainda agravado pelo fato de que, ao retornar, a trinca acaba caindo na banda de dano, e encontrando uma série de elementos que já haviam atingido o valor do dano crítico $\omega_{cr} = 0,5$, como se pode constatar para a estratégia EE-II do MEFG/X na Fig. 6.10. Isso faz com que seu retorno seja completo, comprometendo a sequência da análise e as trajetórias de equilíbrio. É relevante destacar uma vez mais que o modelo empregado nesta tese não restringe artificialmente, em nenhum dos casos, a direção assumida pela trinca. A

única limitação imposta é que o novo segmento deve ser inserido no primeiro ou no segundo quadrantes considerando o sistema local da descontinuidade (Fig. 3.9). As estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E ficam aparentemente imunes a este efeito por uma outra limitação. Como se constata na Fig. 6.11 para a estratégia EE-I do MEFG/X, a trinca das estratégias que empregam apenas funções de Heaviside está acima da das outras abordagens (ver também Fig. 6.12), parando na aresta inferior de um elemento que fica praticamente fora da banda de dano (destacado em verde na Fig. 6.11). Assim sendo, o dano crítico ω_{cr} jamais é atingido neste elemento, e a propagação da descontinuidade é paralisada, de modo que o principal responsável pelos resultados das estratégias EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E passa a ser o modelo constitutivo dos elementos. De fato, as curvas destas abordagens tendem ao resultado alcançado pelo modelo do MEF, em que apenas o dano é empregado. Apesar destas limitações, e apesar do pico relativamente baixo da análise realizada com o MEF, antes da ocorrência do retorno das trincas, a resposta das trajetórias de equilíbrio das diferentes estratégias é relativamente boa, estando próximas de um dos modelos numéricos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004) e provendo cargas de pico dentro dos valores esperados com base no comportamento real (tabela 6.6). Assim como nos experimentos numéricos conduzidos na seção 6.1, nota-se que, em relação ao modelo distribuído do MEF, o modelo C-D promoveu uma elevação da carga de pico obtida pelas trajetórias de equilíbrio das diferentes estratégias aqui estudadas.

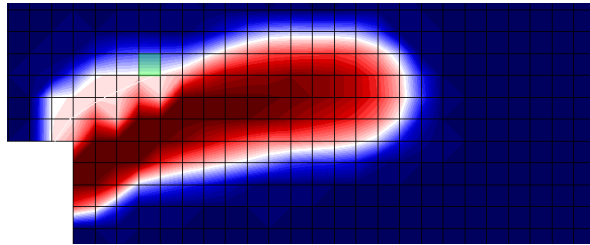


Figura 6.11 – Detalhe da trinca no passo 27 para a estratégia EE-I do MEFG/X. O elemento adjacente ao último segmento de trinca foi destacado em verde.

A Fig. 6.12 revela ainda que, mesmo antes do retorno, as trajetórias das trincas das estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E se encontravam um pouco abaixo da faixa experimental, especialmente tendo em vista os resultados obtidos na seção 5.2 do capítulo 5 (Fig. 5.22). A estratégia EE-II-A do MEFG-E, por outro lado, tem boa concordância com o experimento, até ser afetada pela zona de compressão. As trajetórias das trincas destas abordagens também parecem oscilar menos que suas versões da Fig. 5.22, embora estejam também sujeitas a um retorno muito mais acentuado.

No que concerne ainda à acurácia e à eficiência computacional, a tabela 6.7 exhibe os valores obtidos para o parâmetro d_r , enquanto a tabela 6.8 mostra o número de iterações

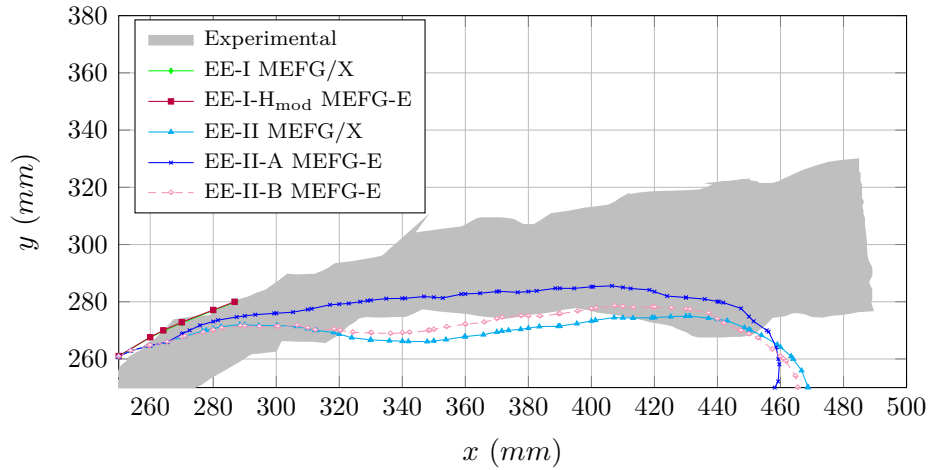


Figura 6.12 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.8. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.

Tabela 6.6 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior	1,0990
Experimental Inferior	0,9612
Modelo Numérico 1	1,0910
Modelo Numérico 2	1,0220
MEF	0,9532
EE-I MEFG/X	1,0635
EE-I-H _{mod} MEFG-E	1,0634
EE-II MEFG/X	1,0696
EE-II-A MEFG-E	1,0807
EE-II-B MEFG-E	1,0795

totais necessárias para a solução da análise e a média de iterações por passo oriundos das diferentes estratégias de enriquecimento investigadas para a malha da Fig. 6.8. Para que a comparação entre as estratégias fosse razoável, para o cômputo de d_r , a trajetória de equilíbrio foi analisada até um deslocamento limite de 0,4 mm, próximo do passo em que os problemas envolvendo o retorno da trinca ocorrem. Neste caso, $d_r^{Ref} = 0,0583$.

Observa-se pela tabela 6.7 que as estratégias têm, até o deslocamento considerado, desempenhos razoáveis e muito próximos, em termos de d_r , estando perto de d_r^{Ref} , com exceção das estratégias EE-I. Particularmente, as estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E e o modelo do MEF se aproximam mais do limite inferior da faixa experimental que as demais abordagens. A tabela 6.8 revela, por outro lado, que a média de iterações por passo, no caso de algumas das abordagens oriundas do MEFG/X e do MEFG-E, é

Tabela 6.7 – Parâmetro d_r calculado para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8. $d_r^{Ref} = 0,0583$.

Estratégia	d_r
MEF	0,0473
EE-I MEFG/X	0,0748
EE-I- H_{mod} MEFG-E	0,0748
EE-II MEFG/X	0,0473
EE-II-A MEFG-E	0,0516
EE-II-B MEFG-E	0,0473

Tabela 6.8 – Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.8.

Estratégia	Número de Iterações	Média de iterações por passo
MEF	2832	28,32
EE-I MEFG/X	3687	36,87
EE-I- H_{mod} MEFG-E	3575	35,75
EE-II MEFG/X	9783	97,83
EE-II-A MEFG-E	9802	98,02
EE-II-B MEFG-E	4673	46,73

relativamente alta. Isso pode ser explicado tanto pela combinação entre uma tolerância mais restritiva e os parâmetros adotados para controle desta, que atuam apenas após a centésima iteração, elevando a média de iterações por passo (inclusive para o modelo do MEF), quanto, no caso das estratégias que empregam enriquecimento trigonométrico, pelo comportamento irreal assumido pela trinca, que acaba fazendo com que mais iterações sejam necessárias. Há que se destacar que, a despeito disso, a estratégia EE-II-B do MEFG-E demanda menos da metade das iterações requeridas pelas abordagens EE-II-A do MEFG-E e EE-II do MEFG/X para resolver o problema. Como a atuação do controle de tolerância se dá em geral nos passos em que existe a incorporação de algum segmento de trinca, já era esperado que as estratégias EE-I, nas quais a trinca propaga menos, e o modelo distribuído do MEF, no qual não há propagação, tivessem uma média menor de iterações por passo.

Por fim, no que concerne ao condicionamento, a Fig. 6.13 mostra que, mais uma vez, as estratégias de enriquecimento são robustas e relativamente bem condicionadas, confirmando as tendências já discutidas previamente nesta tese. Este bom desempenho em termos de condicionamento é atingido mesmo com o comportamento irreal apresentado pela trinca nas estratégias que usam enriquecimento trigonométrico. Chama atenção positivamente também e uma vez mais a proximidade dos $C(\hat{\mathbf{K}})$ s obtidos com as estratégias do MEFG/X e do MEFG-E em relação àqueles verificados para o modelo do MEF.

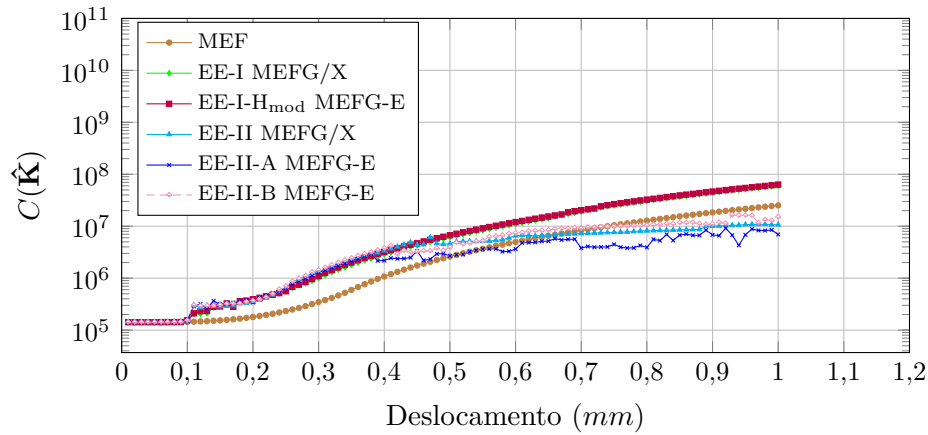


Figura 6.13 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.8.

6.2.2 Comparação entre os modelos de material

Nesta seção, buscou-se realizar uma investigação acerca dos diferentes modelos de material empregados para simulação do painel em L, a partir da análise do desempenho de uma das estratégias de enriquecimento. A ideia deste estudo partiu de uma dúvida da autora acerca do custo-benefício envolvido na utilização de modelos mais complexos, como o modelo C-D aqui proposto, que depende da determinação de vários parâmetros distintos. Como abordado nas conclusões parciais do capítulo 5 (seção 5.4), o que motivou a proposição deste modelo era uma tentativa de melhorar ainda mais os resultados obtidos no capítulo em questão, inclusive controlando melhor as oscilações verificadas pelas trajetórias de trinca das abordagens que empregam enriquecimento trigonométrico (o que, de certa forma, foi atingido) e aproximando da faixa experimental, especialmente na zona de amolecimento, as trajetórias de equilíbrio obtidas no painel em L. Como se constatou pela Fig. 6.9, este objetivo não foi alcançado, e o modelo acoplado trouxe novas questões (como o retorno total da trinca nas estratégias EE-II e a limitação das estratégias EE-I relacionada à propagação com o dano). Assim sendo, julgou-se pertinente contrapor o modelo cujos resultados foram apresentados na seção anterior (seção 6.2.1) ao modelo cujos resultados constam na seção 5.2 do capítulo 5. Para tal, elegeu-se a estratégia de enriquecimento EE-II-B do MEFG-E que, provê, até um deslocamento de 0,4 mm, resultados razoáveis com uma média de iterações mais baixa que as demais abordagens que empregam enriquecimento trigonométrico.

A Fig. 6.14 traz as trajetórias de equilíbrio obtidas para esta estratégia considerando o modelo C-D aqui proposto (EE-II-B MEFG-E), um modelo que não considera transição energética, ou seja, que permite que o dano continue atuando livremente mesmo após a nucleação da trinca em um dado elemento (EE-II-B MEFG-E Superposto) e o modelo com

material linear elástico (EE-II-B MEFG-E Linear), cujos resultados já foram apresentados na seção 5.2 do capítulo 5. A Fig. 6.14 traz ainda a resposta proveniente de uma variação do modelo C-D, que considera que a energia G_{dis} utilizada para acoplamento entre os modelos contínuo e descontínuo da eq. (3.56) seria na verdade $1,5G_f$ (EE-II-B MEFG-E $1.5G_f$), em que 1,5 é valor médio do parâmetro β sugerido por Wang e Waisman (2016) (seção 3.3.3). Neste caso, portanto, $G_{dis} = 0,11625 \text{ N/mm}$.

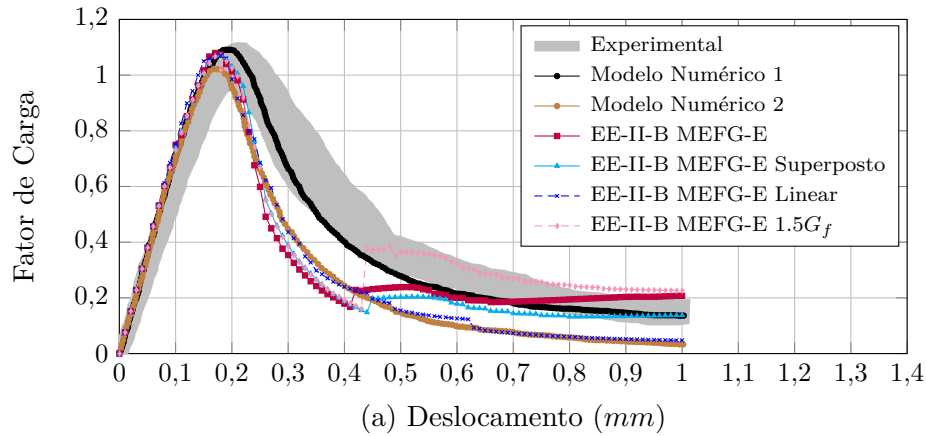


Figura 6.14 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II-B do MEFG-E empregando diferentes modelos de material. Os modelos numéricos de referência são de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

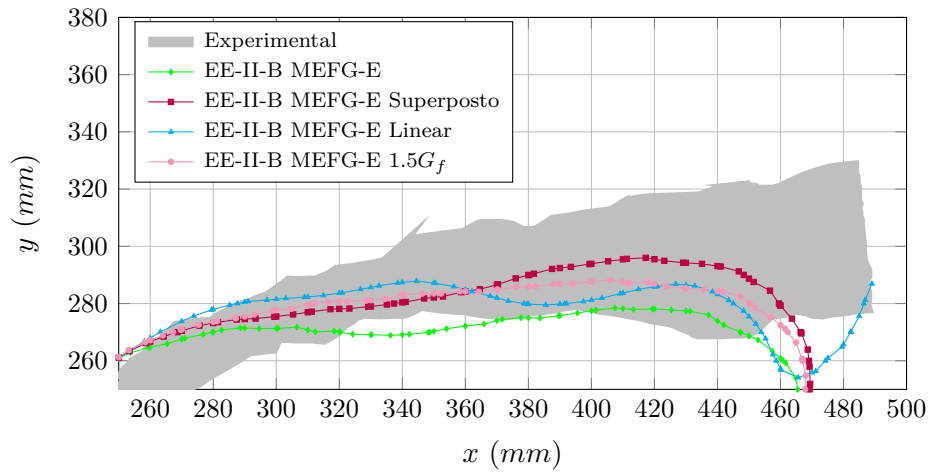


Figura 6.15 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II-B usando a malha da Fig. 6.8, com diferentes modelos de material. O ponto de coordenadas (250, 250) representa a quina do painel em L.

Pode-se observar na Fig. 6.14 que a resposta dos distintos modelos considerados é bastante similar. A diferença mais nítida se refere ao fato de que a trajetória de equilíbrio da estratégia EE-II-B MEFG-E Linear não está sujeita ao travamento verificado para as demais abordagens, já que a trinca desta simulação, que emprega como critério de direção a direção normal à máxima tensão circunferencial, não retorna como a dos demais modelos (Fig. 6.15), nos quais a direção é obtida a partir de uma medida não local de deformações

avaliada em relação à ponta da trinca. Excluindo este aspecto, as diferenças entre os modelos parecem estar no nível de detalhe. A curva obtida para a estratégia EE-II-B MEFG-E Linear é ligeiramente mais aberta, no amolecimento, que a de seus pares que empregam modelos combinados. Este comportamento, desde que o expoente provido para a lei coesiva (eq. (3.61)) no caso do modelo combinado que emprega $G_{dis} = 1,5G_f$ não seja muito inferior, é razoável, já que, nos demais modelos, além da dissipação energética associada à lei coesiva, existe também a dissipação associada à lei de evolução de dano. Em particular, nota-se que as estratégias EE-II-B MEFG-E Superposto e EE-II-B MEFG-E $1.5G_f$ também produzem trajetórias de equilíbrio ligeiramente mais amplas que aquela do modelo C-D aqui proposto. Este fato pode ser explicado se considerarmos que a energia de fratura no modelo C-D está, de certa forma, sendo dividida entre a dissipação por dano e a dissipação pela lei coesiva, o que incorre num valor inferior aos $0,0775 \text{ N/mm}$ passados para determinação do expoente da componente t_n das leis coesivas dos modelos das estratégias EE-II-B MEFG-E Superposto e EE-II-B MEFG-E Linear, por exemplo. De fato, os autores estudados para esta tese que trataram até agora da transição energética entre modelos contínuos e descontínuos com coesão no âmbito do MEFG/X propuseram, em geral, um valor maior que G_f como energia total dissipada. Para Comi, Mariani e Perego (2007), este valor é a energia G_c resultante da integração da lei de evolução de dano empregada em seu trabalho, procedimento que se tornou inviável nesta tese já que as leis de evolução de dano aqui estudadas ou resultaram em uma integral que ia para o infinito (lei de evolução de dano exponencial), ou não possuíam solução analítica para a integral (lei de evolução de dano serpentina). Wang e Waisman (2016), por sua vez, trabalham com um parâmetro de ajuste β , que varia de experimento para experimento. O que se pretendia aqui era fazer uma simplificação de tudo isso, atrelando o acoplamento a um parâmetro real de material. Entretanto, os experimentos realizados nesta seção indicam que o modelo proposto, o modelo que não considera qualquer transição energética, e a variação do modelo proposto que considera um multiplicador intermediário com base nos valores de β assumidos por Wang e Waisman (2016) acabam tendo respostas muito similares. Mesmo as cargas de pico obtidas (tabela 6.9) são muito próximas. O gráfico da Fig. 6.14 indica principalmente que um modelo que desconsidera a transição energética, muito mais simples que aqueles que empregam algum acoplamento, neste exemplo, provê uma resposta de aceitabilidade próxima às respostas dos demais. As trajetórias de trinca ilustradas na Fig. 6.15 demonstram ainda que os modelos EE-II-B MEFG-E Superposto e EE-II-B MEFG-E $1.5G_f$, antes do retorno das trincas, provêm as trajetórias com melhor concordância com a faixa experimental, junto do modelo mais simples, que considera o material linear elástico.

Por fim, a Fig. 6.16 mostra que a estratégia EE-II-B do MEFG-E é bem condicionada e robusta independentemente do modelo de material adotado para os elementos. Pode-se

Tabela 6.9 – Cargas de pico obtidas para a estratégia EE-II-B do MEFG-E considerando diferentes modelos de material. Os valores referentes à faixa experimental e aos modelos numéricos 1 e 2 foram extraídos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004).

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior	1,0990
Experimental Inferior	0,9612
Modelo Numérico 1	1,0910
Modelo Numérico 2	1,0220
EE-II-B MEFG-E	1,0795
EE-II-B MEFG-E Superposto	1,0720
EE-II-B MEFG-E Linear	1,0725
EE-II-B MEFG-E $1.5G_f$	1,0675

dizer inclusive, dada a proximidade entre as respostas em termos de $C(\hat{\mathbf{K}})$, que este não é um critério que permita fazer distinção entre as abordagens.

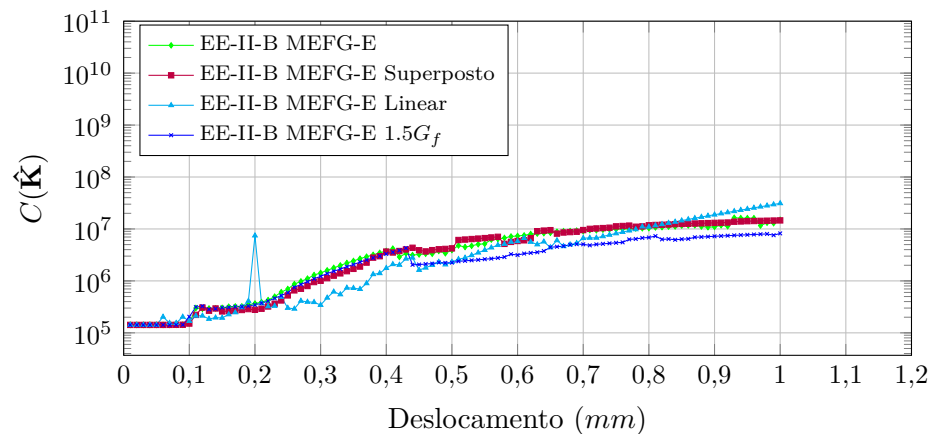


Figura 6.16 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para a estratégia EE-II-B do MEFG-E empregando diferentes modelos de material.

6.3 Cisalhamento em 4 Pontos de Arrea e Ingraffea (1982)

O último experimento numérico escolhido para este capítulo também já foi abordado anteriormente, na seção 5.3 do capítulo 5. Trata-se do teste de cisalhamento em quatro pontos ensaiado por Arrea e Ingraffea (1982). Assim como na seção 6.2, para facilitar a leitura, a geometria, carregamento e condições de contorno do problema são reexibidos na Fig. 6.17, que define ainda o *crack mouth sliding displacement* (CMSD), o deslizamento tangencial relativo entre as faces da trinca, utilizado por Arrea e Ingraffea (1982) na plotagem das trajetórias de equilíbrio. Mais uma vez, o modelo constitutivo adotado foi o descrito na seção 3.2.1, ou seja, o modelo de dano isotrópico que emprega como medida de deformação equivalente aquela proposta por De Vree, Brekelmans e Van Gils (1995)

(eq. (3.18)). Os parâmetros assumidos para o material, para a formulação não local e para a lei de evolução de dano com variação exponencial (seção 3.2.3.1) podem ser vistos na tabela 6.10. Para este experimento, os parâmetros da lei de dano foram obtidos seguindo o procedimento descrito no Apêndice G de Penna (2011), que se baseia no ajuste de curvas tendo em vista o ensaio de tração direta (Fig. 6.18).

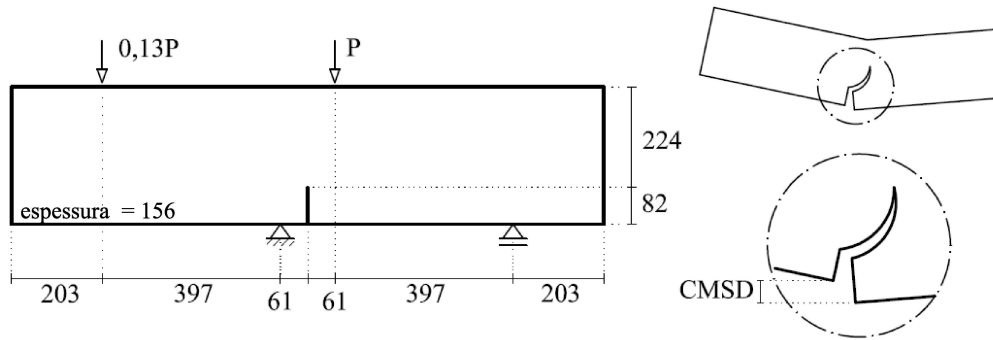


Figura 6.17 – Geometria, carregamento e condições de contorno do espécime de cisalhamento em quatro pontos. Dimensões em mm . $P = 130.000,0 \text{ N}$.

Tabela 6.10 – Parâmetros adotados para os experimentos numéricos realizados nesta seção.

Parâmetros Não Locais	Parâmetros de Material	Parâmetros da Lei de Dano Exponencial (eqs. (3.28) e (3.29))
$l = 40 \text{ mm}$	$E = 24800 \text{ N/mm}^2$	$\alpha = 0,999$
$k = 8,0$	$\nu = 0,18$	$\beta = 875$
	$G_f = 0,120 \text{ N/mm}$	$\kappa_0 = 1,64 \times 10^{-4}$
	$d_{\text{init}} = 0 \text{ N/mm}^3$	
	$k_r = 10,0$	

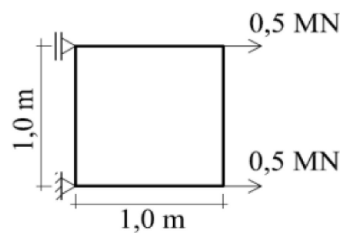


Figura 6.18 – Ensaio de tração empregado no procedimento usado para determinação dos parâmetros da lei de evolução de dano exponencial da tabela 6.10.

Diferentemente do que ocorreu no capítulo 5, apenas uma malha foi considerada para o experimento aqui tratado. Trata-se da malha M2 da seção 5.3, que pode ser vista novamente na Fig. 6.19. Para as simulações realizadas, o incremento de trinca é de $5,0 \text{ mm}$, o que equivale, na região de propagação da trinca, a cerca de $h/2$. A análise não linear foi conduzida a partir do método de Newton-Raphson, incrementando o deslocamento horizontal do apoio direito em $0,001 \text{ mm}$ até o passo 350. A tolerância para convergência

em termos de deslocamentos foi assumida como 1×10^{-4} , e as simulações foram realizadas com equilíbrio secante. Como optou-se por aproveitar a malha dos experimentos conduzidos no capítulo anterior, o defeito inicial foi modelado a partir das funções de Heaviside pertinentes a cada estratégia de enriquecimento considerada. O procedimento adotado para a integração numérica foi descrito na seção 6.1 (seis pontos de Gauss por elemento e por célula triangular, e quatro pontos de integração por segmento de trinca).

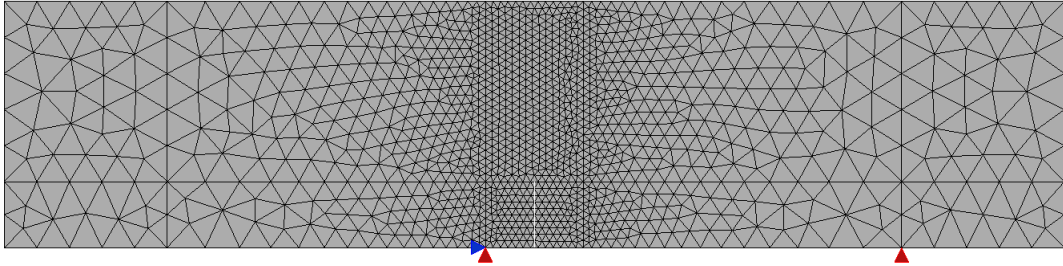


Figura 6.19 – Malha adotada para os experimentos numéricos conduzidos nesta seção. O tamanho médio dos elementos finitos na região refinada é igual a 10 mm . Nas demais regiões da malha, é de 50 mm .

Para este experimento, são feitos três estudos distintos. Na seção 6.3.1, são contrapostos os desempenhos das diferentes estratégias de enriquecimento investigadas neste tese. A seção 6.3.2 discute brevemente, para uma das abordagens consideradas, o efeito de se adotar um parâmetro d_{init} não nulo. Na seção 6.3.3, por outro lado, são analisadas as diferenças de representação providas pelos diversos modelos de material.

6.3.1 Comparação entre estratégias de enriquecimento

As trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui investigadas podem ser vistas na Fig. 6.20, que traz ainda a resposta resultante da simulação que emprega apenas o modelo não local distribuído, sem a utilização de enriquecimento para representar a propagação da fratura discreta (identificada por MEFG/X contínuo, já que as funções de Heaviside nodalmente deslocadas foram empregadas para simular o entalhe). O CMSD foi calculado seguindo o procedimento descrito na seção 5.3.

Diferentemente do que ocorreu no capítulo 5, em que todas as estratégias de enriquecimento estudadas foram capazes de reproduzir o comportamento do experimento, a Fig. 6.20 revela que as estratégias que não empregam enriquecimento trigonométrico (EE-I do MEFG/X e EE-I- H_{mod} do MEFG-E) falharam nesta representação, deixando de apresentar valores factíveis para CMSD e fator de carga nas proximidades de um CMSD de $0,04 \text{ mm}$. Nestas estratégias, a descontinuidade pouco propaga (Fig. 6.21), ficando limitada às proximidades do entalhe. A partir disto, o modelo mostrou-se mais sensível à condição de apoio concentrado em um único nó, alterando o mecanismo de ruptura

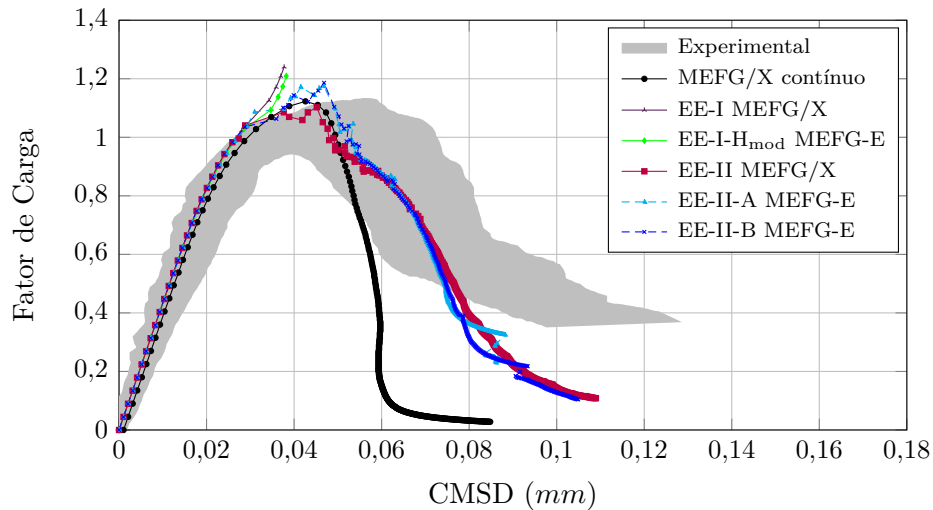


Figura 6.20 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.19.

do problema (Fig. 6.22). A resposta destas estratégias foi modificada com a variação de alguns parâmetros de análise (como a região de avaliação da propagação), mas há outras hipóteses a serem testadas. Em todo caso, o comportamento descrito para as estratégias EE-I é inesperado, e será melhor investigado em trabalhos futuros.

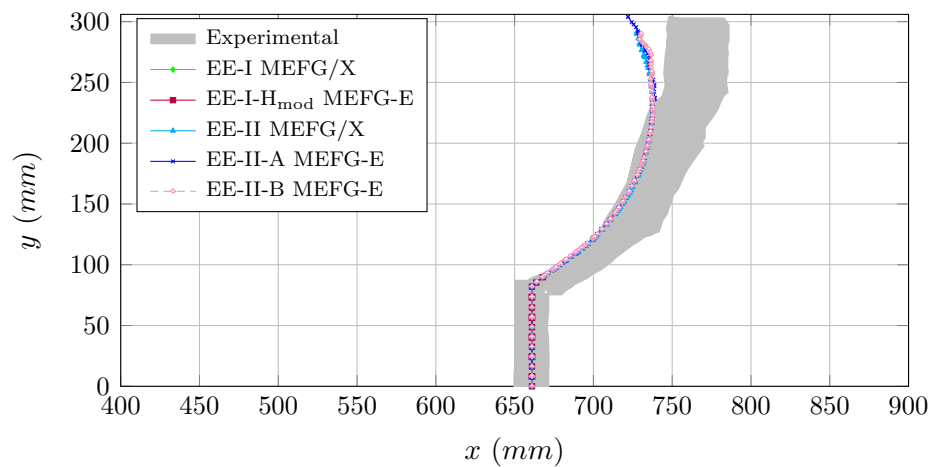


Figura 6.21 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para as diferentes estratégias de enriquecimento aqui propostas para a malha da Fig. 6.19.

Observando ainda a Fig. 6.20, pode-se constatar que as trajetórias de equilíbrio obtidas para as estratégias EE-II, tanto do MEFG/X quanto do MEFG-E, são satisfatórias e se encontram em concordância com a faixa experimental. Em particular, é relevante destacar que as trajetórias das trincas das estratégias em questão no modelo C-D aqui proposto vão um pouco além (Fig. 6.21) das trajetórias observadas para estas abordagens na seção 5.3 do capítulo 5 (Fig. 5.30), que trata do modelo com material linear elástico. De fato, a trinca chega muito perto de atravessar a viga por inteiro quando a análise está perto de um CMSD de 0,085 mm (próximo ao passo 225). Nesta região, a compressão é mais

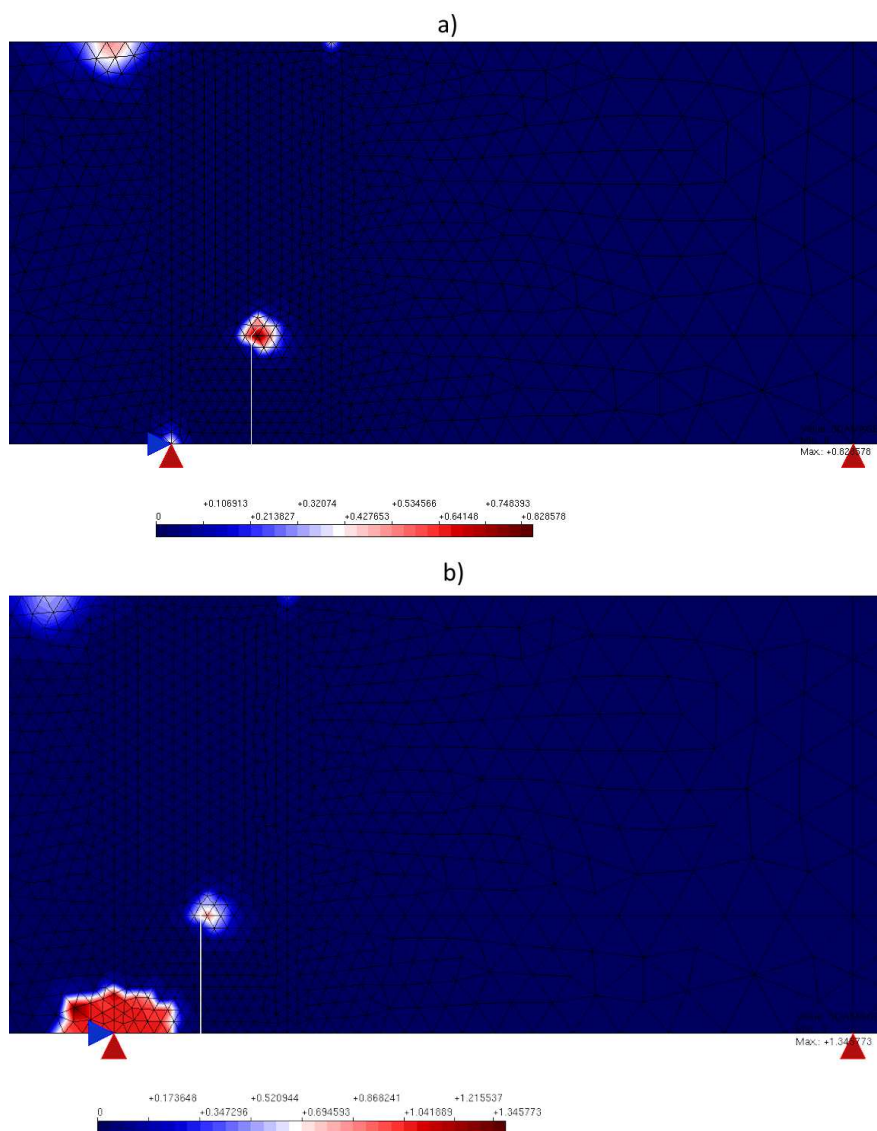


Figura 6.22 – Configuração do dano para a estratégia EE-I do MEFG/X nos passos: a) 28 e b) 29. Comportamento similar foi observado para a estratégia EE-I- H_{mod} do MEFG-E.

atuante, o que incorre mais uma vez num retorno da trinca com posterior divergência para a estratégia EE-II-A do MEFG-E. Por isso, os resultados desta estratégia são exibidos apenas até o passo 225 - antes do retorno em questão - nos gráficos pertinentes. Nas estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E, por outro lado, a propagação é interrompida um pouco antes (Fig. 6.21), e a análise prossegue pelos 350 passos. Por fim, a análise da trajetória de equilíbrio obtida empregando apenas o modelo distribuído de formulação não local baseada em integral, sem qualquer tipo de enriquecimento para representar a propagação de fratura discreta (MEFG/X contínuo), revela que o pico provido por esta simulação é razoável (ver também a tabela 6.11), estando, assim como as estratégias de enriquecimento do modelo C-D, com exceção da estratégia EE-II do

MEFG/X, que manteve a carga de pico dentro da faixa experimental, pouco acima do limite superior desta. A abertura provida pela curva, em termos de CMSD, por sua vez, não demonstra boa concordância com os resultados do experimento. De fato, o ajuste de parâmetros do modelo distribuído, quando se considera a formulação não local, pode ser um desafio uma vez que, além dos parâmetros associados à lei de evolução de dano exponencial (eqs. (3.28) e (3.29)), há que se determinar também os parâmetros k e l da formulação não local. Como discutido na seção 3.2.4, l foi assumido como o comprimento característico do material, em todas as seções deste capítulo. A determinação de k , por outro lado, suscita dúvidas. Não há consenso com relação ao valor assumido para este parâmetro. Com base nos experimentos realizados nesta tese com o modelo acoplado, o que se observou foi que valores superiores para este parâmetro (a partir de 7,0 ou 8,0) provinham respostas melhores, por definirem uma banda mais estreita (próximo ao que talvez se obtivesse com um modelo distribuído local, se este não sofresse localização com o refinamento da malha) de dano. De qualquer forma, a trajetória da estratégia MEF/X contínuo revela que o modelo C-D permite um ganho de representação neste caso, tornando o comportamento mais próximo do observado experimentalmente. O dano crítico adotado nos experimentos desta tese ($\omega_{cr} = 0,5$) mais uma vez deflagrou a propagação antes de a carga de pico ser atingida. Neste experimento, o efeito causado por esta ação é interessante. Depois de apresentar um serrilhado mais intenso próximo ao pico em si, as trajetórias de equilíbrio das estratégias que conseguem completar a análise parecem sofrer uma correção, no sentido de prover um amolecimento próximo ao visto para o modelo com material linear elástico, como será discutido na seção 6.3.3. Sobre as trajetórias da trinca mostradas na Fig. 6.21, cabe notar que as estratégias produzem uma boa concordância com a faixa experimental, sofrendo uma curva mais à esquerda no fim da análise, na direção do nó em que o carregamento é aplicado. A Fig. 6.23 mostra a trajetória final da trinca da estratégia EE-II do MEF/X, acompanhando devidamente o perfil de dano obtido para o experimento.

Tabela 6.11 – Cargas de pico obtidas para as diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17.

Estratégia de Enriquecimento	Carga de Pico (kN)
Experimental Superior (ARREA; INGRAFFEA, 1982)	1,1160
Experimental Inferior (ARREA; INGRAFFEA, 1982)	0,7471
MEF	1,1228
EE-II MEF/X	1,1024
EE-II-A MEF-E	1,1741
EE-II-B MEF-E	1,1863

A tabela 6.12, exibe, por sua vez, os valores obtidos para o parâmetro d_r , com d_r definido pela eq. (6.1), das diferentes estratégias de enriquecimento investigadas. Para o experimento desta seção, a malha e os pontos de cálculo considerados, $d_r^{Ref} = 0,3161$. Mais uma

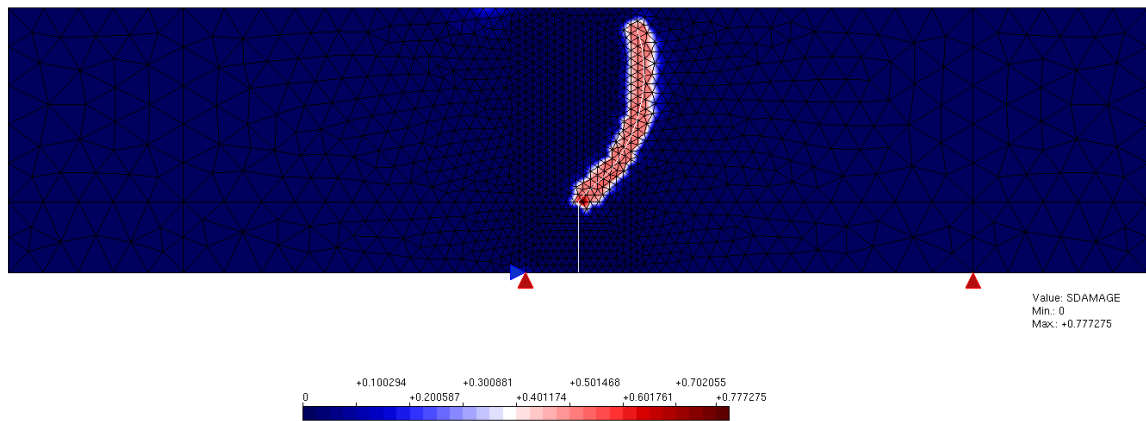


Figura 6.23 – Configuração final da estratégia EE-II do MEFG/X.

vez, d_r foi computado a partir da divisão da trajetória de equilíbrio experimental. Para que a comparação fosse “justa”, considerando a divergência de uma das estratégias que empregam enriquecimento trigonométrico, o CMSD tomado como limite, de $0,085 \text{ mm}$, foi dividido em cinco intervalos. O cômputo de d_r não foi feito para as estratégias EE-I, que apresentam problemas muito precocemente. A tabela 6.13 apresenta, por outro lado, o número de iterações necessário para a solução da análise, e a média de iterações por passo.

Tabela 6.12 – Parâmetro d_r das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17. $d_r^{Ref} = 0,3161$

Estratégia	d_r
MEFG/X contínuo	0,3030
EE-II MEFG/X	0,1592
EE-II-A MEFG-E	0,1856
EE-II-B MEFG-E	0,1862

Tabela 6.13 – Número de iterações totais e média de iterações por passo das diferentes estratégias de enriquecimento utilizadas para a solução do problema da Fig. 6.17.

Estratégia	Número de Iterações	Média de iterações por passo
MEFG/X contínuo	2846	8,13
EE-I MEFG/X	2275	6,50
EE-I-H _{mod} MEFG-E	3750	10,71
EE-II MEFG/X	17036	48,67
EE-II-A MEFG-E	6427	28,56
EE-II-B MEFG-E	7657	21,88

Tendo em vista o “afastamento” entre os limites superior e inferior da faixa experimental (d_r^{Ref}), considerou-se que todas as abordagens, com exceção das estratégias EE-I, tiveram

um desempenho de suficiente acurácia em termos de d_r , embora as estratégias associadas ao modelo C-D tenham estado mais próximas do limite inferior da trajetória experimental que a abordagem MEFG/X contínuo. Entre aquelas, a que mais se aproximou deste limite foi a estratégia EE-II do MEFG/X, que aparentava pelo gráfico da Fig. 6.9 ser de fato aquela que provinha a trajetória de equilíbrio mais próxima do experimento, considerando, inclusive, a representação da carga de pico. No que concerne às iterações demandadas para a solução do problema, nota-se pela tabela 6.13 que, neste caso, a média de iterações por passo requeridas pelas abordagens oriundas do MEFG/X e métodos derivados, com exceção novamente das estratégias EE-I, que não produzem respostas factíveis, foi muito superior à média da estratégia MEFG/X contínuo. Isso pode ser explicado em função dos parâmetros assumidos para o controle de tolerância, que tem permissão para atuar apenas após a centésima iteração, incrementando a tolerância em duas vezes. Isso faz com que alguns passos das análises empregando as estratégias de enriquecimento superem as cem iterações, aumentando a média por passo. Apesar dos valores relativamente próximos do parâmetro d_r , constata-se que a estratégia EE-II-B do MEFG-E foi a mais eficaz entre aquelas que empregam enriquecimento trigonométrico, com uma média de sete iterações a menos por passo em relação à estratégia EE-II-A do MEFG-E. Em relação à estratégia, EE-II do MEFG/X, que é um pouco mais acurada, a diferença é ainda mais gritante, com a estratégia EE-II do MEFG/X demandando mais do que o dobro de iterações por passo quando comparada à estratégia EE-II-B do MEFG-E.

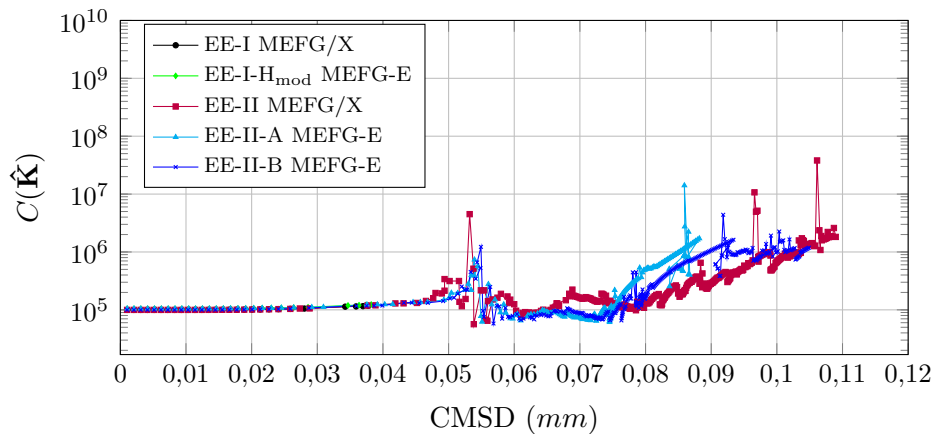


Figura 6.24 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para as diferentes estratégias empregadas para solução da malha da Fig. 6.19.

A Fig. 6.24 mostra os números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$ para as diferentes estratégias de enriquecimento investigadas nesta seção. Pode-se perceber pelos gráficos de condicionamento que as tendências mais relevantes observadas nos experimentos das seções e do capítulo anteriores se mantiveram. As abordagens se mostraram robustas, e apresentaram $C(\hat{\mathbf{K}})$ s relativamente baixos.

6.3.2 Resistência inicial ao cisalhamento

Os experimentos realizados nesta seção visam compreender o efeito do parâmetro d_{init} no modelo acoplado aqui proposto, no problema tratado neste capítulo em que a solicitação de cisalhamento é mais predominante. Como discutido no capítulo 3, a consideração do modo II em modelos C-D pode ser entendida, no mínimo, como nebulosa. Diferentemente do tratamento dado à energia de fratura para o modo I, não existe sequer um consenso sobre a energia dissipada em modo II ser de fato um parâmetro de material real. A consideração da componente tangencial t_s nas eqs. (3.45) e (3.46) suscita sem dúvidas alguma inconsistência num modelo que se pretendia energeticamente consistente. Levando em conta, no entanto, que em experimentos preliminares realizados para o capítulo 5, a resistência inicial ao cisalhamento d_{init} parecia ter pouco impacto nos resultados, desejava-se compreender qual seria exatamente o efeito deste parâmetro se inserido no modelo C-D.

Para tal investigação, fez-se uso da estratégia EE-II-B do MEFG-E, que entregou um resultado relativamente satisfatório com menos iterações. A Fig. 6.25 traz as trajetórias de equilíbrio obtidas com esta abordagem usando os parâmetros de material da tabela 6.10 (com exceção de d_{init}) em três situações distintas: considerando $d_{\text{init}} = 0 \text{ N/mm}^3$ (EE-II-B-0 MEFG-E), $d_{\text{init}} = 1 \text{ N/mm}^3$ (EE-II-B-1 MEFG-E) e $d_{\text{init}} = 5 \text{ N/mm}^3$ (EE-II-B-5 MEFG-E). Na Fig. 6.26, por outro lado, podem ser vistas as trajetórias de trinca obtidas para estas simulações.

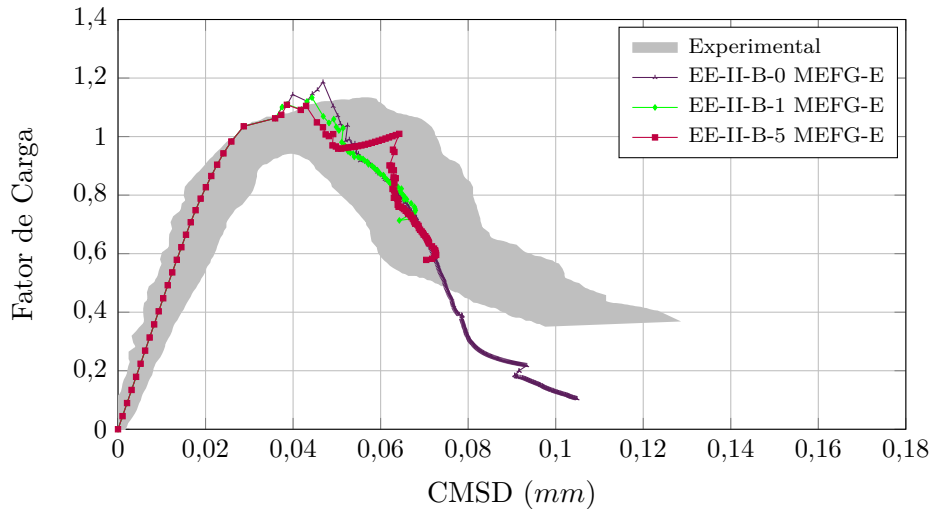


Figura 6.25 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II-B do MEFG-E com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init} .

A análise das Figs. 6.25 e 6.26, aliada à interpretação da tabela 6.14, que traz as cargas de pico e o parâmetro d_r considerando os quatro primeiros pontos entre aqueles escolhidos na seção 6.3.1, com a devida adequação da eq. (6.1), revela que a inclusão de um $d_{\text{init}} \neq 0$ melhora a solução, inserindo-a na faixa experimental. Percebe-se que a curva na qual

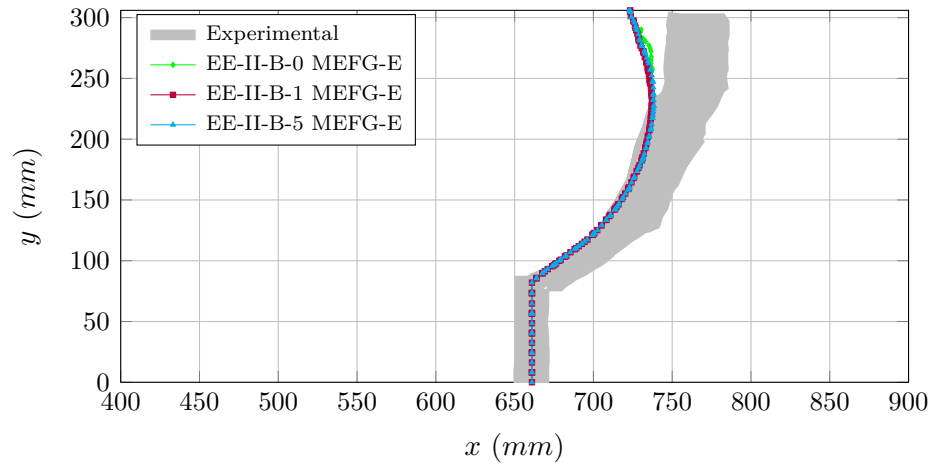


Figura 6.26 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II-B do MEFG-E com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init} .

$d_{\text{init}} = 5 \text{ N/mm}^3$ é a mais suave na transição entre os modelos, e é também a mais próxima do limite inferior da faixa experimental, sendo a única entre as três simulações que apresenta a carga de pico entre os limites esperados. Outra consequência visível na Fig. 6.26 é que as trincas acabam evoluindo mais na propagação e cortam toda a viga tanto no caso em que $d_{\text{init}} = 1 \text{ N/mm}^3$ quanto no caso em que $d_{\text{init}} = 5 \text{ N/mm}^3$, antecipando o encerramento das análises e a interrupção das trajetórias de equilíbrio. O aumento deste parâmetro, inclusive, parece induzir a trajetória de trinca ainda mais no sentido do nó de aplicação do carregamento, já que a coordenada x final da estratégia EE-II-B-5 do MEFG-E é $722,72 \text{ mm}$, ligeiramente mais à esquerda que a verificada para a estratégia EE-II-B-1 do MEFG-E ($723,36 \text{ mm}$). O efeito de a descontinuidade cortar inteiramente a viga nas trajetórias de equilíbrio é que estas sofrem um *snap-back* localizado e, por isso, apenas os pontos que antecedem este momento foram plotados no gráfico da Fig. 6.25.

Tabela 6.14 – Cargas de pico e valores do parâmetro d_r para a estratégia EE-II-B do MEFG-E com diferentes valores de resistência inicial ao cisalhamento d_{init} . O parâmetro d_r foi computado a partir dos quatro primeiros pontos da seção 6.3.1, ou seja, até um CMSD de $0,068 \text{ mm}$.

Estratégia	Carga de Pico (kN)	d_r
EE-II-B-0 MEFG-E	1,1863	0,1863
EE-II-B-1 MEFG-E	1,1330	0,1764
EE-II-B-5 MEFG-E	1,1086	0,1561

Percebe-se, portanto, que os resultados do modelo C-D indicam alguma sensibilidade, de certa forma positiva, ao parâmetro d_{init} . A dificuldade reside tanto na determinação deste parâmetro - já que sua menção mesmo no trabalho de Wells e Sluys (2001) suscita dúvidas sobre sua obtenção - quanto em estabelecer uma formulação para o acoplamento energético em modo II, o que poderá ser considerado em trabalhos futuros. Um autor

que se propôs a calcular d_{init} a partir de outros parâmetros de material foi, como já mencionado, Silva (2016). A limitação de seu equacionamento, no entanto, reside no fato de ela resultar em valores variados para um mesmo problema, já que sua determinação depende do comprimento dos segmentos de trinca e, conseqüentemente, ou do tamanho do incremento de trinca ou do tamanho dos elementos da malha. Uma possibilidade é adaptar esta formulação para que passe a estar atrelada não ao comprimento dos segmentos de trinca, mas ao comprimento característico do material. O estabelecimento do acoplamento energético em modo II, por outro lado, pode constituir um desafio maior já que, até onde vai o conhecimento da autora, são ainda incipientes as discussões na literatura de formulações nesse sentido.

6.3.3 Comparação entre os modelos de material

Assim como na seção 6.2.2, buscou-se fazer uma comparação entre os diferentes modelos empregados na simulação do ensaio de cisalhamento em quatro pontos, a partir de uma das estratégias de enriquecimento. Para este experimento, elegeu-se a estratégia EE-II do MEFG/X, que apresentou, na seção 6.3.1 o melhor resultado em termos de acurácia. A Fig. 6.27 compara as trajetórias de equilíbrio obtidas para o modelo C-D aqui proposto (EE-II MEFG/X), para um modelo que desconsidera a transição energética, ou seja, que permite que o dano continue atuando livremente mesmo após a nucleação da trinca (EE-II MEFG/X Superposto) e o modelo com material linear elástico (EE-II MEFG/X Linear), cujos resultados já foram apresentados na seção 5.3 do capítulo 5. De modo análogo ao que foi feito na seção 6.2.2, uma variação do modelo C-D, que considera que a energia G_{dis} utilizada para acoplamento entre os modelos contínuo e descontínuo da eq. (3.56), seria na verdade $1,5G_f$ (EE-II MEFG/X $1.5G_f$), também é analisada (neste caso, portanto, $G_{dis} = 0,180 \text{ N/mm}$). A Fig. 6.28, por sua vez, traz as trajetórias das trincas alcançadas para cada uma destas abordagens.

Considerando os resultados ilustrados nas Figs. 6.14 e 6.15, bem como os dados presentes na tabela 6.15, que traz as cargas de pico dos diferentes modelos e o parâmetro d_r calculado como na seção 5.3, ou seja, com a divisão do CMSD de $0,1236 \text{ mm}$ - limite da faixa experimental - em cinco pontos, pode-se concluir que o modelo com melhor aproximação para o limite inferior da faixa experimental considerando a malha da Fig. 6.19 foi o modelo mais “simples”, que representa o material dos elementos finitos como linear elástico. De fato, ele já se constituía uma excelente aproximação em termos de acurácia. É esta a estratégia cuja trajetória de trinca mais se aproxima da trajetória experimental (Fig. 6.15). Ela apresenta ainda uma carga de pico dentro do esperado, uma trajetória de equilíbrio relativamente suave e o menor afastamento entre as abordagens em relação ao limite inferior da faixa experimental - embora, considerando que $d_r^{Ref} = 0,2357$, todas as respostas - inclusive a da estratégia EE-II MEFG/X $1.5G_f$, se considerarmos que ela

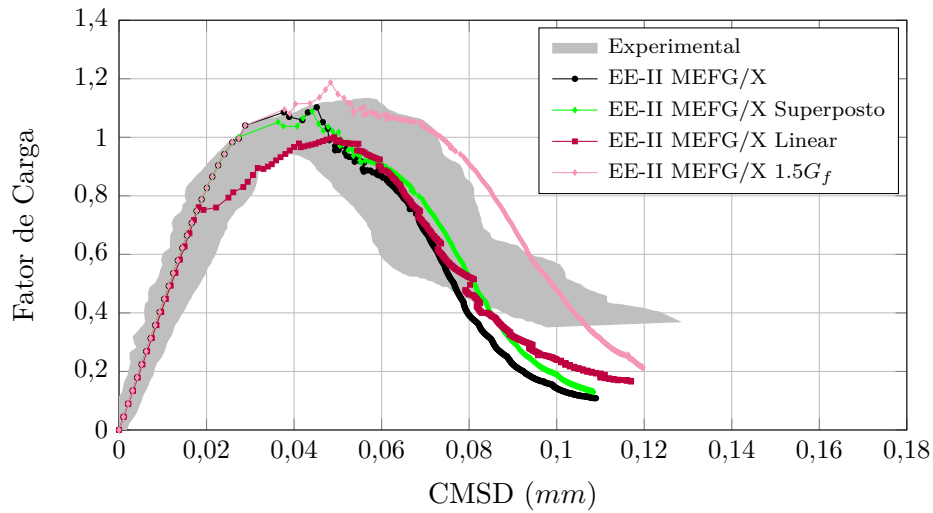


Figura 6.27 – Trajetórias de equilíbrio obtidas para a estratégia EE-II do MEFG/X para a malha da Fig. 6.19 considerando diferentes modelos de material.

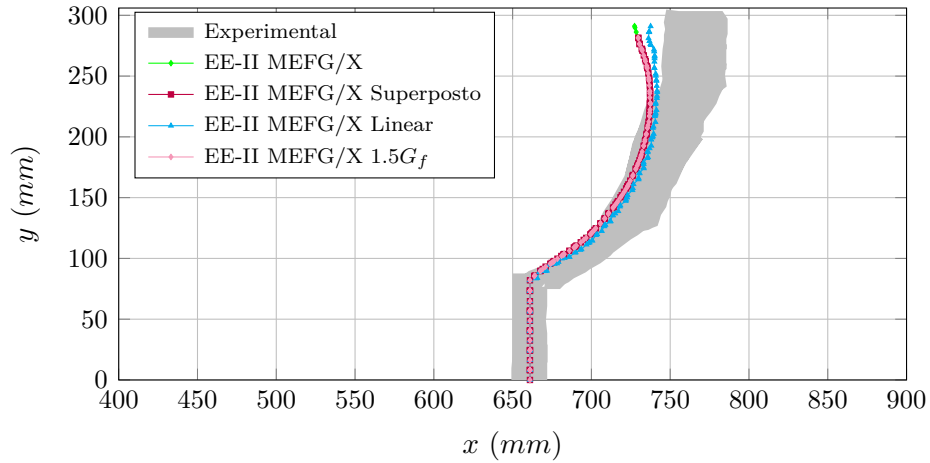


Figura 6.28 – Detalhe das trajetórias assumidas pelas trincas para a estratégia EE-II do MEFG/X para a malha da Fig. 6.19, considerando diferentes modelos para o material dos elementos.

se aproxima do limite superior da faixa experimental, superando-o ligeiramente - possam ser entendidas como satisfatórias. Diferentemente do que ocorreu na seção 6.2.2, na qual a consideração de uma energia de acoplamento superior produziu resultados similares aos das demais estratégias que usavam um modelo de dano não local com formulação baseada em integral, no problema da Fig. 6.17, tal consideração provocou certa suavização e uma abertura mais significativa da trajetória de equilíbrio. A estratégia EE-II MEFG/X $1.5G_f$ manteve ainda seu limite superior mais próximo do comportamento verificado para o limite superior da faixa experimental. Embora tenham tido como consequência a “retirada” da curva da faixa em questão no amolecimento, estes resultados podem sugerir que a energia de acoplamento “real” no experimento em questão está próxima do valor suposto. Wang e Waisman (2016) consideram de fato o valor de 1,5 para o

parâmetro β nos experimentos numéricos conduzidos para o ensaio de cisalhamento em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982) em seu trabalho, embora assumam outros valores para os parâmetros de material empregados em seu modelo. Em termos de representação da trajetória da trinca, a Fig. 6.28 revela que a trajetória simulada pela estratégia EE-II MEFG/X $1.5G_f$ é muito próxima da trajetória obtida para o modelo superposto. Observa-se ainda que, diferentemente das demais estratégias, a carga de pico registrada para a estratégia EE-II MEFG/X $1.5G_f$ é ligeiramente superior ao limite do experimento (tabela 6.15).

Tabela 6.15 – Cargas de pico e valores do parâmetro d_r para a estratégia EE-II do MEFG/X com diferentes modelos de material. $d_r^{Ref} = 0,2357$.

Estratégia	Carga de Pico (kN)	d_r
EE-II MEFG/X	1,1024	0,2401
EE-II MEFG/X Superposto	1,0887	0,2395
EE-II MEFG/X Linear	1,0016	0,1838
EE-II MEFG/X $1.5G_f$	1,1872	0,3305

É interessante também notar que, de forma análoga ao que ocorreu na seção 6.2.2, as aproximações providas pelas estratégias EE-II MEFG/X Superposto e EE-II MEFG/X (modelo C-D) são bastante próximas, diferindo apenas em detalhes, como o fato de a abordagem EE-II MEFG/X Superposto prover uma carga de pico ligeiramente menor e uma curva um pouco mais aberta que a do modelo C-D. Estes resultados confirmam as tendências observadas, em relação a estas duas estratégias, para o painel em L. No que concerne à abertura das curvas, o entendimento é idêntico ao que foi apresentado na seção 6.2.2. Nota-se que este fator é influenciado pela energia que se considera para realizar o acoplamento entre os modelos contínuo e descontínuo. Uma possibilidade para trabalhos futuros, tendo em vista também os resultados interessantes obtidos para a estratégia EE-II MEFG/X $1.5G_f$ nesta seção, seria tentar determinar de fato com maior precisão, e de forma genérica, qual função de G_f permitiria o acoplamento devido, considerando também a dissipação energética no ramo elástico.

A Fig. 6.29 mostra, por fim, assim como na seção 6.2.2, que as abordagens são todas bem condicionadas e robustas, e que os $C(\hat{\mathbf{K}})$ s não são um fator relevante para fazer alguma distinção entre elas.

6.4 Conclusões parciais

Os resultados dispostos neste capítulo demonstraram que o modelo contínuo-descontínuo (C-D) descrito no capítulo 3 (particularmente se destacam as seções 3.3.1.2, 3.3.2.2 e 3.3.3) exibiu uma performance um pouco aquém do esperado em termos de representação das trajetórias de equilíbrio e assumidas pela trinca, principalmente nos primeiros

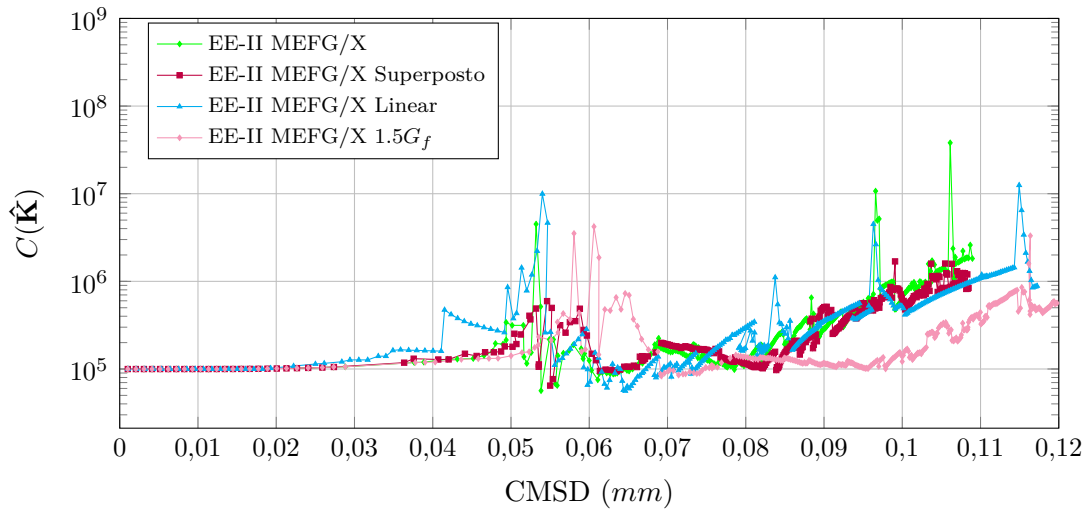


Figura 6.29 – Números de condicionamento escalonados $C(\hat{\mathbf{K}})$, a cada passo, calculados para estratégia EE-II do MCFG/X com diferentes modelos de material.

dois experimentos numéricos tratados neste capítulo. O modelo foi aplicado a diferentes problemas de referência da literatura, empregando tanto elementos quadriláteros quanto elementos triangulares nas malhas adotadas. A principal razão para este desempenho aquém parece estar relacionada à escolha do critério de direção assumida pela trinca, baseado em uma medida não local de deformações, que é sensível a regiões de compressão. No que diz respeito ao condicionamento, no entanto, todas as abordagens apresentaram um bom desempenho em todos os experimentos considerados, se mostrando robustas, bem condicionadas e relativamente próximas, nos testes em que essa avaliação foi feita, dos números de condicionamento escalonados calculados para abordagens oriundas do MEF.

No que concerne aos desempenhos das diferentes estratégias de enriquecimento, não se pode deixar de destacar as ocorrências relacionadas às estratégias EE-I do MCFG/X e EE-I- H_{mod} do MCFG-E, que, talvez por terem menor sensibilidade às mudanças de direção assumidas pela trinca quando comparadas às abordagens que empregam enriquecimento trigonométrico, acabaram, em dois dos experimentos, em configurações limitantes em relação ao critério de propagação adotado. Nestas ocorrências, o elemento que constituía a região de pesquisa de propagação, acabou nunca atingindo o dano crítico, o que impediu que a trinca seguisse a evolução verificada no experimento real. Em uma delas, inclusive, esta ocorrência pareceu estar relacionada também a uma maior sensibilidade do modelo à condição de apoio concentrado em um único nó, o que alterou o mecanismo de ruptura do problema. As estratégias EE-II do MCFG/X e do MCFG-E, embora tenham estado sujeitas às limitações relacionadas ao critério de direção, não apresentaram problemas desta natureza. Em termos de acurácia, considerando os limites impostos pelas limitações do critério de direção, entre as abordagens do MCFG/X e do MCFG-E se destacaram

as estratégias EE-II do MEFG/X e EE-II-B do MEFG-E. Em geral, no entanto, com exceção do experimento da flexão em três pontos de García-Álvarez, Gettu e Carol (2012) (seção 6.1), a estratégia EE-II-B do MEFG-E atingiu estes resultados com maior eficiência computacional, demandando menos iterações para a solução da análise não linear.

Não se pode negar que o modelo C-D proposto apresente algumas vantagens em relação ao modelo linear elástico abordado no capítulo 5, como a capacidade de prover a nucleação da trinca na região correta mesmo com a representação geométrica do defeito inicial, como foi feito na seção 6.1. Neste tipo de situação, a nucleação da trinca no modelo descontínuo, que depende de as tensões principais nos pontos de integração de um elemento superarem a resistência à tração do material f_t , pode ocorrer em mais de um elemento ao mesmo tempo, por vezes acarretando o surgimento da trinca numa região não de todo correta. Este é o motivo pelo qual os entalhes tratados no capítulo 5 foram representados a partir de funções de Heaviside. Apesar disso, nos experimentos conduzidos neste capítulo em que os modelos descontínuo e contínuo-descontínuo foram contrapostos em situações que não contemplavam esta limitação, houve certa vantagem, em termos de acurácia, para o modelo descontínuo, de formulação e implementação mais simples. A simplificação proposta para o modelo C-D, atrelando a dissipação energética total à energia de fratura G_f , se mostrou próxima da resposta de um modelo que desconsidera qualquer tipo de transição energética, ou seja, que permite a livre atuação do dano a despeito do surgimento de uma trinca, e possui também formulação e implementação mais simples que o modelo C-D. Em um dos experimentos, ambos os modelos se aproximaram de uma variação do modelo C-D que empregava uma energia de valor superior a G_f para o acoplamento das parcelas contínua e descontínua do modelo, indicando que ambos poderiam ser aproximações razoáveis, com ligeira vantagem, em termos de proximidade, para o modelo superposto. A mesma consideração, no entanto, no ensaio de cisalhamento em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982), acarretou uma alteração mais significativa da trajetória de equilíbrio, explicitando as diferenças entre esta resposta e as respostas dos modelos que consideram alguma simplificação (modelo C-D aqui proposto, que simplifica a energia de acoplamento, e modelo superposto, que desconsidera a transição energética). Este fato aponta para a possibilidade de maiores estudos que possam definir, mais precisamente, a energia envolvida na troca de modelos C-D, e se é possível atrelá-la a parâmetros reais do material.

Por fim, cabe também uma reflexão acerca dos diversos parâmetros cuja determinação é exigida para a aplicação do modelo aqui tratado. Quando se trabalha com modelos de dano, há que se fazer uso de técnicas como a mencionada na seção 6.3 para tentar garantir o ajuste dos parâmetros empregados nas leis de evolução de dano. Nem sempre a resposta obtida usando tais metodologias é inteiramente satisfatória. A complexidade,

no entanto, aumenta ainda mais quando se acrescenta a esta busca a necessidade de determinar o parâmetro k para a formulação não local baseada em integral. Não há consenso na literatura sobre a obtenção deste parâmetro, que pode provocar mudanças na resposta inicialmente investigada pelas metodologias já citadas em termos do ajuste para os parâmetros da lei de evolução de dano. Há que se fazer notar, no entanto, que outros modelos que empregam a formulação não local baseada em integral podem utilizar outras funções para a suavização do domínio não local (eq. (3.37)) que prescindem de k , como ocorre no trabalho de Wang e Waisman (2016). Não se descarta a realização de experimentos com o modelo C-D e uma outra formulação para cumprir esta função em trabalhos futuros. A lei coesiva estudada nesta tese, adaptada de Wells e Sluys (2001), demanda ainda a determinação de um parâmetro d_{init} para consideração da componente tangencial t_s na integração das forças coesivas. Constatou-se que este parâmetro pode afetar os resultados em experimentos em que a solicitação de cisalhamento é mais atuante, embora não se tenha ainda clareza de como incorporar esta grandeza de forma a manter a consistência energética também em modo II. Outras leis coesivas, como as apresentadas em Wu e Li (2015b) e Wang e Waisman (2018) poderão ser consideradas em trabalhos futuros. Finalmente, o que se observou nos experimentos conduzidos neste capítulo foi que a determinação heurística do dano crítico como sendo $\omega_{\text{cr}} = 0,5$ deflagrou a propagação da trinca antes que a carga de pico houvesse sido atingida nos experimentos. Este fato realmente aponta para a necessidade de maiores estudos sobre este parâmetro, que permitam traçar um panorama mais claro sobre o impacto, em termos de trajetória de equilíbrio e de representação da trinca, de se considerar valores superiores ou inferiores para ω_{cr} .

7 Considerações Finais

Esta tese buscou aplicar o MEFG/X e o MEFG-E à simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva, contrapondo seus desempenhos. Apesar dos vários trabalhos publicados sobre o tema, ainda não se conhecia nenhuma publicação que adaptasse o MEFG-E para este tipo de problema, considerando o enriquecimento trigonométrico e investigando seu desempenho. Além disso, visando aprimorar os resultados obtidos por um modelo que considerava o material dos elementos finitos como linear elástico, buscou-se propor uma nova versão de um modelo contínuo-descontínuo. Este modelo se centrou na busca pela consistência energética entre modelos de dano não locais com formulação baseada em integral e o modelo de fratura discreta simulado pelo MEFG/X e pelo MEFG-E a partir da energia de fratura, e com consideração de coesão. Foi também, até onde se sabe, a primeira aplicação do MEFG-E a um modelo C-D que tivesse tais premissas.

Este capítulo reúne as considerações finais da tese, resumindo e destacando os pontos mais relevantes tratados nas páginas anteriores. A seção 7.1 apresenta uma síntese das principais conclusões e contribuições do trabalho, traçadas com base sobretudo nos resultados dispostos nos capítulos 4 a 6. A seção 7.2, por sua vez, objetiva listar algumas lacunas e limitações identificadas ao longo do processo da tese que poderiam servir como ponto de partida para trabalhos futuros.

7.1 Síntese das Principais Contribuições

7.1.1 Investigação sobre robustez e condicionamento das funções de enriquecimento propostas

O presente trabalho apresentou uma extensiva investigação sobre a estabilidade do condicionamento das matrizes de rigidez e sobre a robustez das estratégias de enriquecimento discutidas no capítulo 3. A avaliação preliminar destes aspectos realizada para as diferentes funções de enriquecimento no capítulo 4 foi corroborada por diversos experimentos conduzidos nos capítulos 5 e 6. Com exceção da estratégia EE-I-H_L, cuja falta de robustez já era conhecida da literatura (ZHANG; BABUŠKA; BANERJEE, 2016), e, por isso, foi investigada apenas no capítulo 4, todas as estratégias se mostraram, em problemas da mecânica da fratura com aproximação de primeira ordem, robustas e bem condicionadas. No caso das abordagens que empregaram a função de Heaviside nodalmente deslocada, este resultado serve, de certa forma, como validação experimental das discussões conduzidas por Ndeffo et al. (2017) e Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020), sobre as modificações necessárias para garantir a robustez das funções de Heaviside no contexto do MEFG/X.

No caso das estratégias que usam as funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização de Wu e Li (2015b) (eq. (3.84)), os experimentos indicam que valores baixos de α , como sugerido pelos autores, de fato entregam um meio-termo entre acurácia e condicionamento.

7.1.2 Aplicação do MEFG-E a um modelo descontínuo com enriquecimento trigonométrico

O MEFG-E foi aplicado pela primeira vez na simulação da propagação de trincas com modelo de zona coesiva considerando uma combinação entre funções degrau e funções trigonométricas. Esta talvez seja a principal contribuição da tese. Constatou-se que, em problemas da mecânica da fratura com aproximação de primeira ordem, seu desempenho é similar ao das estratégias de enriquecimento equivalentes do MEFG/X. No entanto, há que se fazer notar que, nos experimentos do capítulo 5, a estratégia EE-II-B do MEFG-E mostrou-se constantemente a mais acurada das abordagens e que, no capítulo 6 a mesma estratégia demonstrou entregar acurácia similar à da melhor das abordagens do MEFG/X (EE-II do MEFG/X) com número de iterações por passo equivalente ou significativamente inferior. Portanto, ainda que os ganhos em termos de aproximação entre o MEFG-E e o MEFG/X não sejam tão significativos em problemas com aproximação de elementos finitos de primeira ordem quanto em outros tipos de problemas abordados na literatura, não se pode negar que o MEFG-E traz também vantagens ao ser aplicado a situações como as estudadas nesta tese.

7.1.3 O papel da estratégia de integração numérica na estabilidade/robustez do MEFG/X

Experimentos como o realizado na seção 5.1 do capítulo 5 demonstraram que a robustez das funções de Heaviside convencionais no contexto do MEFG/X não está condicionada apenas à aplicação do deslocamento nodal e de um pré-condicionador diagonal (SANCHEZ-RIVADENEIRA; DUARTE, 2020), mas também ao emprego de uma estratégia de integração numérica adequada. Enquanto o deslocamento nodal garante a razoabilidade do condicionamento nos elementos de mistura, zerando as funções de enriquecimento, a estratégia de subdivisão provê esta garantia para configurações da trinca que produzam áreas/volumes díspares no interior de um mesmo elemento. Este fato se dá porque a estratégia de subdivisão assegura que serão considerados pontos de Gauss nas duas regiões, evitando a dependência linear trazida pela soma da partição da unidade com um múltiplo de si mesma (situação que ocorreria se todos os pontos de Gauss do elemento acusassem o mesmo valor para o enriquecimento de Heaviside). No contexto do MEFG-E, as funções de Heaviside modificadas pelo parâmetro de estabilização (eq. (3.84)) demonstraram manter a robustez mesmo quando se adota um procedimento de integração

gaussiana convencional. Entretanto, a acurácia da aproximação foi comprometida neste caso. Esta é mais uma evidência em favor da escolha de uma estratégia de integração numérica adequada.

7.1.4 Efeitos da inclusão do enriquecimento trigonométrico na simulação de propagação de trincas com modelo de zona coesiva

Embora se conheça diversas publicações que tratem da propagação de trincas com modelo de zona coesiva no contexto do MEFG/X empregando apenas funções de Heaviside - como os trabalhos de Wells e Sluys (2001), Comi, Mariani e Perego (2007), Wu e Li (2015b), Roth, Léger e Soulaïmani (2015), Wang e Waisman (2016) e Silva (2016), apenas para citar alguns - e utilizando uma combinação entre funções de Heaviside e enriquecimento trigonométrico - como em Moës e Belytschko (2002) e Wang e Waisman (2018) -, não se conhecia um trabalho que comparasse ambas as escolhas na simulação de um mesmo problema. Nos experimentos do capítulo 5, embora se tenha constatado que as estratégias que empregam apenas funções degrau entregam um bom desempenho, verificou-se também que a inclusão do enriquecimento trigonométrico proveu maior suavidade à aproximação, ainda que a adoção de uma malha adequada seja sempre necessária. No capítulo 6 - primeira aplicação conhecida da combinação entre enriquecimento de Heaviside e enriquecimento trigonométrico no âmbito de um modelo C-D com consideração de coesão no contexto do MEFG/X -, a inclusão das funções trigonométricas parece ser crucial para garantir a continuidade das análises, evitando as limitações sofridas pelas estratégias EE-I no que concerne ao critério de propagação adotado. Além disso, nos experimentos em que a solicitação por cisalhamento era mais atuante, como no teste de cisalhamento em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982), as funções trigonométricas demonstraram prover uma representação mais fidedigna da trajetória assumida pela trinca, por capturarem melhor mudanças de direção.

7.1.5 Proposição do modelo C-D com o acoplamento energético realizado a partir da energia de fratura

Na seção 3.3.3 do capítulo 3, uma nova formulação de modelo contínuo-descontínuo que acoplasse modelos de dano com uma formulação não local baseada em integral e a fratura discreta simulada no contexto do MEFG/X e métodos derivados foi proposta, com base nos trabalhos de Comi, Mariani e Perego (2007), Roth, Léger e Soulaïmani (2015) e Wang e Waisman (2016). O desenvolvimento desta formulação se centra em uma simplificação da energia conservada entre os modelos, suposta nesta tese como a energia de fratura em modo I, G_f . As equações necessárias para a determinação da lei coesiva neste contexto foram igualmente apresentadas no capítulo 3 (seções 3.3.1.2 e 3.3.2.2). A simplificação

proposta permitiu flexibilizar a implementação, de forma a viabilizar sua aplicação com diferentes leis de evolução de dano.

7.1.6 Avaliação da simplificação proposta para o acoplamento energético do modelo C-D

No capítulo 6, o modelo C-D proposto no capítulo 3 foi testado em três problemas de referência da literatura. No que concerne à simplificação sugerida nesta tese, centrada no acoplamento energético com base na energia de fratura em modo I, procurou-se estabelecer o quão razoável era esta proposição tendo em vista outros modelos de material. Constatou-se que a simplificação proposta resultou em respostas similares às de um modelo que desconsidera a transição energética entre dano e fratura discreta, ou seja, que permite que o dano continue atuando mesmo após o surgimento da trinca discreta. Investigou-se ainda a sugestão de alguns autores de que o acoplamento energético deveria ser realizado com uma energia maior que a energia de fratura. Uma vez que a proposta de Comi, Mariani e Perego (2007) era, neste caso, inviável, em função da formulação das leis de evolução de dano empregadas neste trabalho, optou-se por testar o valor médio do parâmetro β sugerido por Wang e Waisman (2016), o que resulta numa energia total equivalente a $1,5G_f$. Constatou-se que o efeito desta consideração varia com o tipo de problema. Se a resposta deste modelo foi próxima das respostas dos demais modelos distribuídos no painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004), no teste de cisalhamento em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982) produziu uma curva significativamente mais aberta, e um pouco mais suave. Recorda-se que autores como os próprios Wang e Waisman (2016) consideram de fato a energia de acoplamento atrelada a um parâmetro que varia conforme o experimento. Isso, no entanto, dificulta a aplicação e a generalização do modelo.

7.1.7 Resistência inicial ao cisalhamento no modelo C-D

Por fim, discutiu-se brevemente o possível papel do parâmetro d_{init} em um modelo C-D. A consideração deste parâmetro certamente traz questões relativas à inconsistência em um modelo que se pretendia energeticamente consistente. Os experimentos conduzidos na seção 6.3.2 do capítulo 6 indicam, contudo, que d_{init} pode ter um impacto positivo nos resultados. A utilização deste parâmetro, no entanto, suscita dificuldades sobre as considerações energéticas para o modo II e sobre sua determinação a partir de parâmetros reais de material.

7.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Como visto, o presente trabalho apresentou algumas contribuições que se espera que sejam relevantes para o evolução dos modelos para a simulação da propagação de trincas com

modelo de zona coesiva e para o desenvolvimento de abordagens não convencionais de métodos numéricos baseados em malha, como o MEFG/X e o MEFG-E. No entanto, no decorrer do texto, foram identificadas também uma série de lacunas e possibilidades que podem dar origem a futuros trabalhos da área. A seguir são listados alguns destes tópicos:

1. Estudo sobre a influência do tamanho assumido para o incremento de trinca com modelo de zona coesiva nas estratégias de enriquecimento que empreguem funções trigonométricas, de forma a tentar determinar, com maior precisão, se haveria um valor ótimo em relação ao tamanho dos elementos da malha ou se seria possível trabalhar com este parâmetro de forma adaptativa, encontrando uma formulação que se adequasse aos diversos tipos de problema.
2. Inclusão do enriquecimento polinomial nos modelos apresentados, com investigações sobre o impacto em termos de aproximação e de condicionamento.
3. Na hipótese do cumprimento do item interior, investigação da utilização de outras partições da unidade, também no contexto da simulação de propagação de trincas com modelo de zona coesiva, para a construção do espaço de enriquecimento do MEFG-E, de forma a evitar dependências lineares entre a PU lagrangiana do MEF e as funções obtidas a partir do enriquecimento polinomial.
4. Investigação acerca da acurácia da determinação dos fatores de intensidade de tensão para obtenção da direção assumida pela trinca no modelo descontínuo.
5. Estudo sobre o impacto que as proximidades do contorno poderia ter sobre a integral de interação na determinação dos fatores de intensidade de tensão para obtenção da direção assumida pela trinca no modelo descontínuo.
6. Implementação/utilização de outros métodos de controle para solução da análise não linear.
7. Definição de um novo critério para a obtenção da direção assumida pela trinca em um modelo C-D. Talvez esta seja a questão mais pungente relativa a este modelo. A princípio, a maior parte dos trabalhos desta área emprega critérios de direção baseados na direção assumida pelo dano, como Wang e Waisman (2016). É esta ideia que tem norteado as implementações iniciais nesse sentido. Entretanto, há outros critérios disponíveis, como os empregados nos trabalhos de Comi, Mariani e Perego (2007) e Roth, Léger e Soulaïmani (2015).
8. Investigação acerca do valor ótimo assumido para o dano crítico ω_{cr} .
9. Realização de simulações que considerem, para a formulação não local baseada em integral, outra função de suavização, que não dependa da determinação do parâmetro k .
10. Elaboração de uma formulação que considere o acoplamento energético em modo II.
11. Elaboração de uma função que permita determinar, genericamente, os valores de energia de modo I para transição energética em um modelo C-D com base em

parâmetros reais de material.

Referências

- ABEDI, R.; HABER, R. B.; CLARKE, P. L. Effect of random defects on dynamic fracture in quasi-brittle materials. *International Journal of Fracture*, v. 208, p. 241–268, 2017.
- AGATHOS, K.; BORDAS, S.; CHATZI, E. Improving the conditioning of XFEM/GFEM for fracture mechanics problems through enrichment quasi-orthogonalization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 346, p. 1051–1073, 2019.
- AGATHOS, K.; CHATZI, E.; BORDAS, S. A unified enrichment approach addressing blending and conditioning issues in enriched finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 349, p. 673–700, 2019.
- ALVES, P. D. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2012.
- ANACLETO, F. E. S.; RIBEIRO, T. S. A.; RIBEIRO, G. O.; PITANGUEIRA, R. L. S.; PENNA, S. S. An object-oriented tridimensional self-regular boundary element method implementation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, p. 1276–1284, 2013.
- ANDERSON, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. [S.l.]: Tayloy & Francis, 2005.
- ARAGÓN, A. M.; DUARTE, C. A.; GEUBELLE, P. H. Generalized finite element enrichment functions for discontinuous gradient fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 82, p. 242–268, 2010.
- ARREA, M.; INGRAFFEA, A. *Mixed mode crack propagation in mortar and concrete*. Ithaca, EUA: [s.n.], 1982.
- ASSIS, N. D. O. *Implementação de um Modelo de Trinca Discreta com Redefinição da Malha Associado a Modelos de Dano Escalar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Outubro 2023.
- AZEVEDO, T. d. O. *Implementação Computacional de Elementos de Interface com Elevada Razão de Aspecto para Análise Não Linear de Estruturas de Concreto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2019.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. *Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)*. 2011.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 201–204, p. 91–111, 2012.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. Generalized finite element methods - main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, v. 1, p. 67–103, 2003.

- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach. *Acta Numerica*, v. 12, p. 1–125, 2003.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM J Numerical Analysis*, v. 31 (4), p. 745–981, 1994.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. *The partition of unity finite element method*. 1995.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727–758, 1997.
- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, p. 55–129, 1962.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELLOS, C. S. de. On error estimator and p -adaptivity in the generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 60 (14), p. 2373–2398, 2004.
- BATHE, K. *Finite Element Procedures*. Watertown, MA, EUA: K J Bathe, 2014.
- BAŽANT, Z. P.; PFEIFFER, P. A. Shear fracture tests of concrete. *Materials and Structures*, v. 19, 1986.
- BÉCHET, E.; MINNEBO, H.; MOËS, N.; BURGARDT, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 1033–1056, 2005.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering*, v. 17, n. 4, p. 24 pp, 2009.
- BENTO, M. H. C.; PROENÇA, S. P. B.; DUARTE, C. A. Well-conditioned and optimally convergent second-order generalized/extended FEM formulations for linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 394, p. 114917, 2022.
- CAMPOS, B. C. *Integração Numérica por decomposição de elementos no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2020.
- CARPINTERI, A.; VALENTE, S.; FERRARA, G.; MELCHIORRI, G. Is mode II fracture energy a real material property? *Computers & Structures*, v. 48, n. 3, p. 397–413, 1993. ISSN 0045-7949.
- CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, v. 82, 1985.
- CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *ACI Journal Proceedings*, v. 83, 1986.

- CHAHINE, E.; LABORDE, P.; RENARD, Y. A non-conformal extended finite element approach: Integral matching xfem. *Applied Numerical Mathematics*, v. 61 (3), p. 322–343, 2011.
- CHESSA, J.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 1015–1038, 2003.
- COMI, C.; MARIANI, S.; PEREGO, U. An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 31, n. 2, p. 213–238, 2007.
- CUI, C.; ZHANG, Q. Stable generalized finite element methods for elasticity crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 121 (14), p. 3066–3082, 2020.
- CUI, C.; ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Stable generalized finite element method (SGFEM) for three-dimensional crack problems. *Numerische Mathematik*, v. 152, p. 475–509, 2022.
- CUVILLIEZ, S.; FEYEL, F.; LORENTZ, E.; MICHEL-PONNELLE, S. A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 237-240, p. 244–259, 2012.
- DE BORST, R.; GUTIÉRREZ, M. A. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture*, v. 95, p. 261–277, 1999.
- DE BORST, R.; REMMERS, J. J. C.; NEEDLEMAN, A.; ABELLAN, M.-A. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 28, p. 583–607, 2004.
- DE VREE, J.; BREKELMANS, W.; VAN GILS, M. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, v. 55, n. 4, p. 581–588, 1995.
- DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 36, p. 235–260, 2000.
- DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computer & Structures*, v. 77, n. 2, p. 215–232, 2000.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. H - p clouds – an h - p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 12, p. 673–705, 1996.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An hp adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237–262, 1996.
- DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960.

- DUMSTORFF, P.; MESCHKE, G. Crack propagation criteria in the framework of x-fem-based structural analyses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 31, n. 2, p. 239–259, 2007.
- ERDOGAN, F.; SIH, G. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *ASME Journal of Basic Engineering*, v. 85, n. 4, p. 519–525, 1963.
- EVANGELISTA, F.; MOREIRA, J. F. A. A novel continuum damage model to simulate quasi-brittle failure in mode i and mixed-mode conditions using a continuous or a continuous-discontinuous strategy. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 109, p. 102745, 2020. ISSN 0167-8442.
- FERTÉ, G.; MASSIN, P.; MOËS, N. 3d crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 300, p. 347–374, 2016.
- FILLMORE, T. B.; GUPTA, V.; DUARTE, C. A. Preconditioned Conjugate Gradient Solvers for the Generalized Finite Element Method. *Meshfree Methods for Partial Differential Equations IX, At Bonn, Germany*, 2018.
- FLEMING, M.; CHU, Y. A.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 1483–1504, 1997.
- FONSECA, F. T. *Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2008.
- FONSECA, F. T.; PITANGUEIRA, R. L. S. An object oriented class organization for dynamic geometrically non-linear. *CMNE (Congress on Numerical Methods in Engineering)/CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)*, 2007.
- FONSECA, G. M. *Propagação de trincas em meios elásticos lineares via Método dos Elementos Finitos Generalizados com estratégia Global-Local Automatizada*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2019.
- FONSECA, G. M.; BARROS, F. B.; OLIVEIRA, T. S.; MONTEIRO, H. A. S.; NOVELLI, L.; PITANGUEIRA, R. L. S. 2-d crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 118, p. 70–83, 2020.
- FRIES, T.-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 75, p. 503–532, 2008.
- FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The intrinsic xfem: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 68, p. 1358–1385, 2006.
- FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The eXtended/Generalized Finite Element Method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 84, p. 253–304, 2010.

- GARCÍA-ÁLVAREZ, V. O.; GETTU, R.; CAROL, I. Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model. *Sadhana*, v. 37, p. 187–205, 2012.
- GONG, W.; LI, H.; ZHANG, Q. Improved enrichments and numerical integrations in sgfem for interface problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 438, p. 115540, 2024.
- GONG, W.; ZHANG, Q. Mass lumping of stable generalized finite element methods for parabolic interface problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 47, n. 12, p. 10373–10389, 2024.
- GONG, W.; ZHANG, Q. Multi-grid methods of stable generalized finite element methods for interface problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 166, p. 105860, 2024.
- GRACIE, R.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. Blending in the eXtended Finite Element Method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 74(11), p. 1645–1669, 2008.
- GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A. A particle-partition of unity method, part ii: efficient cover construction and reliable integration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 23, p. 1655–1652, 2002.
- GUPTA, V. *Improved Conditioning and Accuracy of a two-scale Generalized Finite Element Method for Fracture Mechanics*. Tese (Doutorado) — University of Illinois,, Urbana-Champaign, EUA, 2014.
- GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 266, p. 23–39, 2013.
- GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 289, p. 355–386, 2015.
- HENSHELL, R. D.; SHAW, K. G. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 495–507, 1975.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v. 6, n. 6, p. 773–781, 1976.
- HOSSEINI, S.; MALEKAN, M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; SILVA, R. P. Imposition of Dirichlet Boundary Conditions in Element Free Galerkin Method through an Object-Oriented Implementation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 14, p. 1017–1039, 2017.
- JANSARI, C.; NATARAJAN, S.; BEEEX, L.; KANNAN, K. Adaptive smoothed stable extended finite element method for weak discontinuities for finite elasticity. *European Journal of Mechanics / A Solids*, v. 78, p. 103824, 2019.

- JIANG, Y.; NIAN, M.; ZHANG, Q. A Stable Generalized Finite Element Method Coupled with Deep Neural Network for Interface Problems with Discontinuities. *Axioms*, v. 11, n. 8, 2022. ISSN 2075-1680.
- JIRÁSEK, M. Non-local damage mechanics with application to concrete. *Revue Française de Génie Civil*, Taylor & Francis, v. 8, n. 5-6, p. 683–707, 2004.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model. part ii: combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, n. 6, p. 1291–1305, 2001.
- JU, J. Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 116, n. 12, p. 2764–2770, 1990.
- KARIHALOO, B. L. *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1995. ISBN 0-470-24988-9.
- LABORDE, P.; POMMIER, J.; RENARD, Y.; Salaü, M. High-order eXtended Finite Element Method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 354–381, 2005.
- LADEVÈZE, P. *Sur une théorie de l'endommagement anisotrope*. 1983.
- LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. Berlin, Alemanha: Springer Berlin, Heidelberg, 1992.
- LI, H. *Investigation of stability and accuracy of high order generalized finite element methods*. Dissertação (Mestrado) — University of Illinois,, Urbana-Champaign, EUA, 2014.
- LI, H.; CUI, C.; ZHANG, Q. Stable generalized finite element methods (SGFEM) for interfacial crack problems in bi-materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 138, p. 83–94, 2022.
- LI, X.; CHEN, J. An extended cohesive damage model for simulating arbitrary damage propagation in engineering materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 315, p. 744–759, 2017.
- LINS, R. M. *A Posteriori Error Estimations for the Generalized Finite Element Method and Modified Versions*. Tese (Doutorado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, Agosto 2015.
- LINS, R. M.; FERREIRA, M. D. C.; PROENÇA, S. P. B.; DUARTE, C. A. An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the Stable Generalized/eXtended Finite Element Method. *Computational Mechanics*, v. 56, p. 947–965, 2015.
- LOEHNERT, S. A stabilization technique for the regularization of nearly singular extended finite elements. *Computational Mechanics*, v. 54, p. 523–533, 2014.
- MALEKAN, M.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S.; ALVES, P. D.; PENNA, S. S. A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method. *Engineering Computations*, v. 34, n. 3, p. 988–1019, 2017.

- MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese (Doutorado) — Université Paris, Paris, França, 1984.
- MAZARS, J.; PIAUDIER-CABOT, G. From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 20, p. 3327–3342, 1996. ISSN 0020-7683.
- MELENK, J. M. *On generalized finite element methods*. Tese (Doutorado) — University of Maryland, College Park, Maryland, EUA, 1995.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 289–314, 1996.
- MENK, A.; BORDAS, S. P. A. A robust preconditioning technique for the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, p. 1609–1632, 2011.
- MESCHKE, G.; DUMSTORFF, P. Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via x-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 21–24, p. 2338–2357, 2007.
- MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Extended Finite Element Method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, p. 813–833, 2002.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, p. 131–150, 1999.
- MOËS, N.; STOLZ, C.; BERNARD, P.-E.; CHEVAUGEON, N. A level set based model for damage growth: The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 86, n. 3, p. 358–380, 2011.
- NDEFFO, M.; MASSIN, P.; MOËS, N.; MARTIN, A.; GOPALAKRISHNAN, S. On the construction of approximation space to model discontinuities and cracks with linear and quadratic extended finite elements. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, v. 4:6, 2017.
- NGUYEN, V. P.; RABCZUK, T.; BORDAS, S.; DUFLOT, M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 79, p. 763–813, 2008.
- NOVELLI, L.; OLIVEIRA, T. S.; MONTEIRO, H. A. S.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Stable generalized/extended finite element method with global-local enrichment for material nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 372, p. 113429, 2020.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and fem's. In: *International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE*. Barcelona, Espanha: [s.n.], 1997. p. 302–321.

- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, p. 117–126, 1998.
- OLIVEIRA, T. S. *Análise de problemas bidimensionais pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2018.
- OLIVEIRA, T. S.; BARROS, F. B.; CAMPOS, B. C. Cohesive crack propagation simulated by different SGFEM strategies. *XLI CILAMCE*, 2020.
- OLIVEIRA, T. S.; BARROS, F. B.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S. 2-D fracture mechanics problems by SGFEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 108, p. 279–294, 2019.
- OLIVEIRA, T. S.; BARROS, F. B.; PENNA, S. S. On the implementation of SGFEM simulation of cohesive crack propagation problems. *Proceedings of XLIII CILAMCE, Foz do Iguaçu, Paraná, Brazil*, 2022.
- PAIVA, G. O. F. D. *Desenvolvimento e aplicação do MEF/S Global-Local de Alta Ordem com funções flat-top para análise de estruturas em processo de danificação*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, Abril 2023.
- PATZÁK, B.; JIRÁSEK, M. Adaptive resolution of localized damage in quasi-brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 130, n. 6, p. 720–732, 2004.
- PENNA, S. S. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2011.
- PINHEIRO, D. C. C. *Estratégias baseadas na Partição da Unidade para simulação do comportamento de meios parcialmente frágeis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Setembro 2019.
- PINHEIRO, D. C. C.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S.; PENNA, S. S. High regularity partition of unity for structural physically non-linear analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 83, p. 43–54, 2017.
- PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G. V. Cohesive cracks versus nonlocal models: Closing the gap. *International Journal of Fracture*, v. 63, n. 3, p. 173–187, 1993.
- RAMOS, C. S.; PROENÇA, S. P. B. Sobre o emprego da partição da unidade flat-top no mefg. In: *XIII SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional*. Vitória, ES, Brasil: [s.n.], 2018. p. 1–15.
- REINHARDT, H. W.; XU, S. A practical testing approach to determine mode ii fracture energy g_{II} for concrete. *International Journal of Fracture*, v. 105, 2000.
- ROTH, S.-N.; LÉGER, P.; SOULAÏMANI, A. A combined xfem-damage mechanics approach for concrete crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, p. 923–955, 2015. ISSN 0045-7825.

- SANCHEZ-RIVADENEIRA, A.; DUARTE, C. A simple, first-order, well-conditioned, and optimally convergent Generalized/eXtended FEM for two- and three-dimensional linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 372, p. 113388, 2020. ISSN 0045-7825.
- SANCHEZ-RIVADENEIRA, A. G.; DUARTE, C. A. A stable generalized/extended FEM with discontinuous interpolants for fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 345, p. 876–918, 2019.
- SANCHO, J. M.; PLANAS, J.; GÁLVEZ, J. C.; REYES, E.; CENDÓN, D. A. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*, v. 29 (12), p. 1056–1065, 2006.
- SATO, F. M. *Numerical experiments with stable versions of the Generalized Finite Element Method*. Dissertação (Mestrado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, 2017.
- SATO, F. M.; NETO, D. P.; PROENÇA, S. Numerical experiments with the Generalized Finite Element Method based on a flat-top Partition of Unity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 15 (11), p. [online], 2018.
- SAUERLAND, H.; FRIES, T.-P. The stable XFEM for two-phase flows. *Computers & Fluids*, v. 87, p. 41–49, 2013. ISSN 0045-7930. USNCCM Moving Boundaries.
- SAXBY, B. A.; HAZEL, A. L. Improving the modified xfem for optimal high-order approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 00 (online), p. 1–25, 2019.
- SHI, C.; VAN DAM, A. G.; VAN MIER, J. G.; SLUYS, B. Crack interaction in concrete. *Materials for Buildings and Structures*, v. 6, p. 125–131, 2005.
- SILLEM, A.; SIMONE, A.; SLUYS, L. The Orthonormalized Generalized Finite Element Method—OGFEM: Efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 287, p. 112–149, 2015.
- SILVA, I. A.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M.; WEINHARDT, P. O. Assessment of the flat-top stable GFEM for free vibration analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 117 (C), p. 271–283, 2022.
- SILVA, L. L. *Sistema Gráfico Interativo para Análise de Nucleação e Propagação de Trincas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2016.
- SIMO, J.; JU, J. Strain- and stress-based continuum damage models-i. formulation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 23, n. 7, p. 821–840, 1987.
- SIMO, J. C.; OLIVER, J.; ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, v. 12, p. 277–296, 1993.
- SIMONE, A.; WELLS, G. N.; SLUYS, L. J. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 41–42, p. 4581–4607, 2003.

- SOUZA, P. L. F. B. d. *Modelo de Dano Ortotrópico Não Local Aplicado à Regularização de Resultados na Análise Fisicamente Não Linear*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2016.
- STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, 2000.
- SUKUMAR, N.; PRÉVOST, J.-H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, n. 26, p. 7513–7537, 2003.
- THOMAZ, E. *Trincas em edifícios: causas, prevenção e recuperação*. São Paulo: Pini: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: Instituto de Pesquisas Tecnológicas, 1989.
- TIAN, R. Extra-dof-free and linearly independent enrichments in GFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 266, p. 1–22, 2013.
- TIAN, R.; WEN, L. Improved XFEM – an extra-dof free, well-conditioning, and interpolating XFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 285, p. 639–658, 2015.
- TIAN, R.; WEN, L.; WANG, L. Three-dimensional improved XFEM (IXFEM) for static crack problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 343, p. 339–367, 2019.
- WANG, Y.; WAISMAN, H. From diffuse damage to sharp cohesive cracks: a coupled xfm framework for failure analysis of quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 299, p. 57–89, 2016.
- WANG, Y.; WAISMAN, H. An arc-length method for controlled cohesive crack propagation using high-order xfm and irwin's crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 199, p. 235–256, 2018.
- WELLS, G. N.; SLUYS, L. J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 2667–2682, 2001.
- WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; LEHAR, H. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, n. 7-8, p. 797–819, 2004.
- WINKLER, B. J. *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bew. Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. Tese (Doutorado) — University of Innsbruck, Austria, 2001.
- WOLENSKI, A. R. V.; MONTEIRO, A. B.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Nonlinear analysis of concrete structures using gfem enrichment strategy with a microplane constitutive model. *IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 11, n. 3, p. 523–524, 2018.

- WOLFF, K. P. *Implementação Computacional de um Modelo de Fissuração para o Concreto baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2010.
- WU, J.; CAI, Y. A partition of unity formulation referring to the nmm for multiple intersecting crack analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 72, p. 28–36, 2014.
- WU, J.; LI, F. Stable extended finite element for the modeling of localized failure in solids. *Proceedings of EMI International Conference, Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China*, p. 7–9, 2015.
- WU, J.-Y.; LI, F.-B. An improved stable XFEM (is-XFEM) with a novel enrichment function for the computational modeling of cohesive cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 295, p. 77–107, 2015.
- YAU, J. F.; WANG, S. S.; CORTEN, H. T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, p. 335–341, 1980.
- ZHANG, Q.; BABUŠKA, I. A stable generalized finite element method (SGFEM) of degree two for interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 363, 2020.
- ZHANG, Q.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Robustness in stable generalized finite element methods (SGFEM) applied to poisson problems with crack singularities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 311, p. 476–502, 2016.
- ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher Order Stable Generalized Finite Element Method. *Numerische Mathematik*, v. 128, p. 1–29, 2014.
- ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Strongly Stable Generalized Finite Element Method (SSGFEM) for a non-smooth interface problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 344, p. 538–568, 2018.
- ZHANG, S.; WANG, G.; YU, X. Seismic cracking analysis of concrete gravity dams with initial cracks using the extended finite element method. *Engineering Structures*, v. 56, p. 528–543, 2013.
- ZHU, P.; ZHANG, Q.; LIU, T. Stable generalized finite element method (sgfem) for parabolic interface problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 367, p. 112475, 2020.
- ZI, G.; BELYTSCHKO, T. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p. 2221–2240, 2003.

APÊNDICE A – O Sistema INSANE

Este apêndice tem por finalidade esclarecer alguns aspectos computacionais relativos às implementações realizadas no âmbito do sistema INSANE. Particularmente, objetiva-se discriminar o funcionamento do sistema para nucleação e propagação de fissuras com modelo de zona coesiva desenvolvido por Silva (2016), bem como as modificações nele operadas. Além disso, pretende-se comentar também um pouco sobre a estrutura adotada para os modelos que combinam uma formulação não local de dano com o MEF_G/X e métodos dele derivados.

A.1 Visão Geral

Como visto no capítulo 1, o INSANE (FONSECA; PITANGUEIRA, 2007) é um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). A opção por esta linguagem e este paradigma tiveram como objetivo fazer do INSANE um sistema amigável, modulado e escalável em complexidade. Estas características facilitam a implementação de novas abordagens para a resolução de PVCs, por exemplo. Correntemente, no INSANE, é possível a resolução deste tipo de problema por métodos distintos, como o MEF convencional (FONSECA; PITANGUEIRA, 2007), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (ANACLETO et al., 2013), alguns Métodos sem Malha (MSM) (HOSSEINI et al., 2017), (PINHEIRO et al., 2017), o MEF_G/X (ALVES, 2012), (MALEKAN et al., 2017) e pelo MEF_G-E (OLIVEIRA, 2018). As linhas de pesquisa desenvolvidas no âmbito do INSANE, bem como publicações relacionadas a outros tipos de implementação, podem ser encontradas no mesmo endereço em que o software é disponibilizado (<https://www.insane.dees.ufmg.br>).

O sistema INSANE pode, em linhas gerais, ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas, que contêm ferramentas para construção das diversas representações discretas de um problema estrutural, além da visualização de resultados (FONSECA, 2008). O processador, por sua vez, é o núcleo numérico do sistema e o responsável pela obtenção dos resultados dos modelos. Os segmentos do INSANE tratados neste apêndice se situam no âmbito desta aplicação.

O processador, enquanto núcleo numérico do INSANE, é estruturado a partir de interfaces e de classes abstratas, que atuam na representação das diversas abstrações da solução por modelos discretos. Sua organização é centrada nas relações existentes entre as interfaces

Assembler e *Persistence*, além das classes abstratas *Model* e *Solution* (FONSECA, 2008). A Fig. A.1 apresenta o diagrama *Unified Modeling Language* (UML) das classes citadas, destacando a comunicação entre elas.

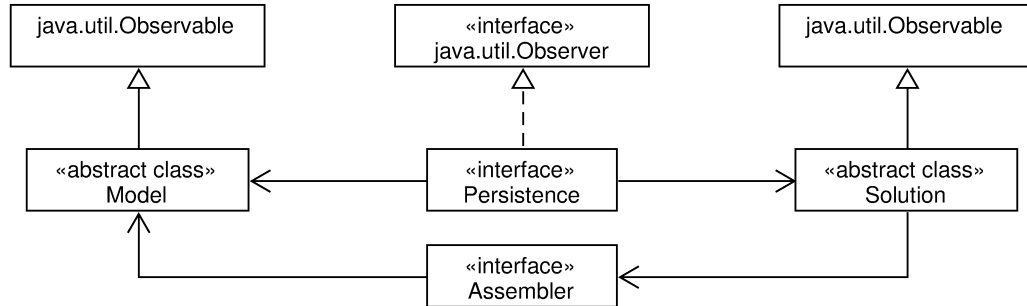


Figura A.1 – Núcleo Numérico do INSANE (PINHEIRO, 2019).

A interface *Assembler* é a responsável pela montagem do sistema de equações que representa genericamente a forma discreta de um problema de valor de contorno, expresso por:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{X}$ é o vetor solução, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são matrizes e $\mathbf{D}$ é um vetor.

A classe abstrata *Solution*, por sua vez, detém as ferramentas necessárias para a resolução do sistema de equações expresso pela eq. (A.1), sendo responsável por desencadear o processo de solução. A classe abstrata *Model*, por outro lado, contém todos os dados do modelo discreto, e fornece à interface *Assembler* as informações pertinentes à montagem do sistema expresso pela eq. (A.1). *Model* e *Solution* se comunicam com a interface *Persistence*, que interpreta os dados de entrada e provê os dados de saída para outras aplicações, sempre que alterações no estado do modelo discreto são realizadas (FONSECA, 2008).

A.2 Nucleação e propagação de trincas e o núcleo numérico do INSANE

Esta seção se propõe a resumir o funcionamento do sistema para nucleação e propagação de trincas com modelo de zona coesiva implementado por Silva (2016) no INSANE. Maiores detalhes sobre esta implementação poderão ser encontrados em seu trabalho.

O sistema desenvolvido por Silva (2016) estrutura-se sobretudo numa classe existente no contexto de *Model*, cuja instância representa uma descontinuidade no plano: *DiscontinuityByGfem*. Esta classe é capaz de prover a representação tanto de um entalhe, ou

seja, de uma falha sem mecanismos de tenacidade, quanto de uma trinca com modelo de zona coesiva. Além dos construtores e dos métodos que deflagravam estas representações (*buildNotch* e *buildCrack*, respectivamente), havia métodos para atribuição dos parâmetros relacionados à lei coesiva de um modelo descontínuo (seções 3.3.1.1 e 3.3.2.1) a um elemento finito, incluindo os pontos de integração da trinca (*setsCohesion*), para seleção do enriquecimento a ser aplicado aos nós pertinentes (*enrichingNodes*), para determinação da direção assumida pelo segmento de trinca durante a propagação (*getInitialSegmentDirectionByNonLocalPrincipalStrain(Element, IPoint3d)* para o primeiro segmento e *getDiscontinuityDirectionByNonLocalPrincipalStrain(Element, IPoint3d, IPoint3d)* para os demais) e para atualização das variáveis da classe (*update*). A Fig. A.2 ilustra um diagrama da classe *DiscontinuityByGfem*, com alguns dos métodos que abrigava. No trabalho de Silva (2016) a representação de entalhes e trincas com modelo de zona coesiva só era possível a partir do emprego das funções de Heaviside (equação (3.69)), representadas pela classe *DiscontinuousEnrichment*, segundo a perspectiva do MEFG/X. A cada instância de *DiscontinuityByGfem*, tinha-se associada uma instância da classe *DiscontinuousEnrichment*. Oliveira (2018) flexibilizou esta implementação para entalhes, inserindo como variáveis da classe uma instância da classe abstrata *EnrichmentType*, que representa, no âmbito de *Model*, uma função de enriquecimento qualquer, que pode se utilizar da estratégia estável ou não (no lugar da variável que simulava um enriquecimento estrito, *DiscontinuousEnrichment*), além de *Strings* identificadores do tipo de função de Heaviside utilizada e da estratégia de enriquecimento (estável ou conforme a versão convencional do MEFG/X). Com isso, tornou-se possível a modelagem de entalhes utilizando também as funções de Heaviside lineares (equação (3.79)) e a estratégia estável, tanto associada a estas funções quanto às funções de Heaviside padrão. Estas modificações não se estenderam, no entanto, ao caso das trincas com modelo de zona coesiva.

Além de *DiscontinuityByGfem*, outras classes importantes para o sistema de Silva (2016) eram aquela que representava um modelo segundo a abordagem do MEFG/X (ampliada também para o MEFG-E em Oliveira (2018)), *GFemModel*, e as classes abstratas *Element* e *Plane*, que representam, respectivamente, um elemento finito e um modelo de análise plano.

A classe *GFemModel* possuía algumas variáveis relacionadas ao sistema para nucleação e propagação de trincas com modelo de zona coesiva, como uma lista que armazenava as trincas do modelo, ou seja, armazenava os objetos de *DiscontinuityByGfem*, e dois booleanos, *withCrackPropagation* e *onlyOneCrack*, que definiam se a análise deveria avaliar o processo de nucleação e propagação de trincas e, em caso afirmativo, se somente uma trinca deveria ser nucleada. Esta classe continha ainda dois métodos de importância fundamental: um que deflagrava a avaliação de propagação de trincas já existentes,

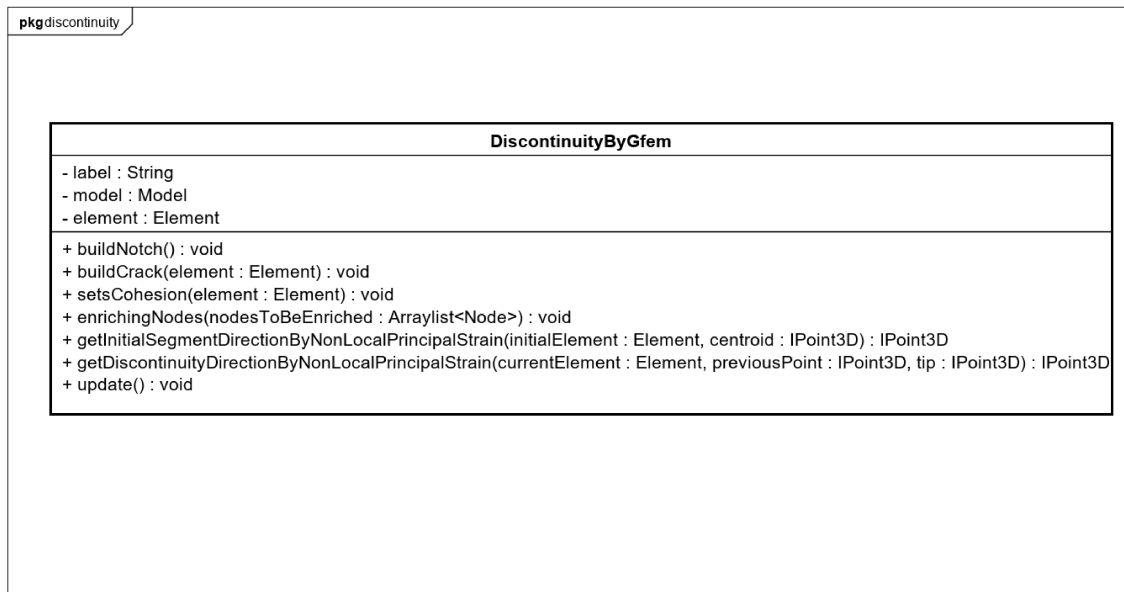


Figura A.2 – Classe *DiscontinuityByGfem*, com alguns de seus métodos e atributos.

evaluateCracksPropagation, e outro que avaliava a existência da nucleação de trincas nos elementos, *evaluateCracksNucleation*. Ambos eram acionados, nesta ordem, a partir do método que atualizava as variáveis do modelo do MEF/X, *update*.

A avaliação da nucleação, convocada a partir do método *evaluateCracksNucleation* em *GFemModel*, era realizada no âmbito de *Element*, a partir do método *checksStrainLocalization*. Este método atuava de duas formas. Para um modelo constitutivo linear elástico, condicionado, no INSANE, ao material *ConcreteCohesiveCrack* implementado por Wolff (2010), o fenômeno de nucleação era indicado se em algum ponto de Gauss a máxima tensão principal fosse maior ou igual à resistência à tração do material. Se, por outro lado, o modelo constitutivo fosse não linear, este fenômeno seria indicado se em algum ponto de Gauss o tensor acústico $\mathbf{Q}$ fosse singular, ou seja, se $\det \mathbf{Q} = 0$, para algum vetor unitário. O tensor de localização ou acústico é definido em Silva (2016) como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{m}$ (Fig. 3.1) é o vetor normal unitário à nova superfície de descontinuidade a ser criada, e $\mathbf{D}$ é o tensor constitutivo tangente (rigidez tangente).

A classe *Plane*, por sua vez, contém o método responsável pela busca por um vetor unitário que singularize o tensor acústico, recebendo como atributo a rigidez tangente $\mathbf{D}$.

Caso o fenômeno da nucleação seja identificado, uma instância de *DiscontinuityByGfem* é criada a partir de um construtor específico para trincas com modelo de zona coesiva

que era acionado em *GFemModel*. Este construtor recebia, até então como argumentos, um nome para a trinca, definido pelo programa, e o próprio objeto *GFemModel* no qual se tinha identificado a nucleação de uma trinca. O construtor era ainda responsável por deflagrar o método que simula a representação de uma trinca, *buildCrack* (Fig. A.2). Este método verifica se, após identificada a nucleação em um elemento, existem outros elementos a ele adjacentes que também experimentaram este fenômeno, com o objetivo de, caso haja uma fila de elementos nucleados, distinguir aquele no qual é maior a deformação principal, avaliada em seus pontos de Gauss. Este elemento passa a ser então considerado como o primeiro e origem da trinca. O método *buildCrack* deflagrava ainda a atualização das variáveis da classe de *DiscontinuityByGfem*, acionando seu método *update*, que é responsável por verificar, por sua vez, se a trinca originada no elemento já identificado propaga-se para outros elementos. A determinação da direção de propagação baseava-se na determinação da direção normal à máxima deformação principal não local, avaliada a partir de uma função de peso Gaussiana (eq. (3.53)).

De posse de todo este arcabouço, Silva (2016) pôde finalmente implementar as contribuições oriundas da integração das tensões coesivas (equação (3.100)) à matriz de rigidez do elemento e ao vetor de forças equivalentes às tensões internas. Para tal, os métodos *getIncrementalC*, responsável pela construção da matriz de rigidez tangente de um elemento em uma análise fisicamente não linear sob perspectiva do MEF_G/X, e *getF*, de função similar, relativamente ao vetor de forças equivalentes às tensões internas, foram modificados, respectivamente, em *GFemPhysicallyNonLinear* e *GFemParametric*. Ambas as classes possuem a função de informar ao *Assembler* as grandezas necessárias para a montagem da equação final do modelo (equação (A.1)), fornecendo, respectivamente, as informações relativas a um elemento paramétrico, dentro do escopo da mecânica dos sólidos, sob regime fisicamente não linear, e a um elemento paramétrico fora deste regime, sob perspectiva do MEF_G/X. Para fins didáticos, o algoritmo idealizado por Silva (2016) e aqui descrito de forma sintética é apresentado na Fig. A.3.

É válido destacar uma vez mais, considerando alguns dos objetivos deste trabalho, uma das limitações do sistema desenvolvido por Silva (2016). No código desenvolvido por este autor, a trinca é considerada um segmento de reta que atravessa o elemento de aresta a aresta. Esta opção cria uma certa dependência em relação à malha, exigindo configurações mais refinadas desta a fim de evitar a introdução de fragilidade estrutural precoce em razão da propagação da trinca a partir de segmentos relativamente grandes. Esta limitação foi, inclusive, constatada pelo próprio Silva (2016) em seu trabalho. Por isso, uma dos objetivos chave desta tese foi viabilizar a base de funções proposta por Moës e Belytschko (2002) e Wang e Waisman (2018) como enriquecimento neste contexto, permitindo que a ponta da trinca pudesse se encerrar no interior de um elemento finito. Observa-se, por fim, que

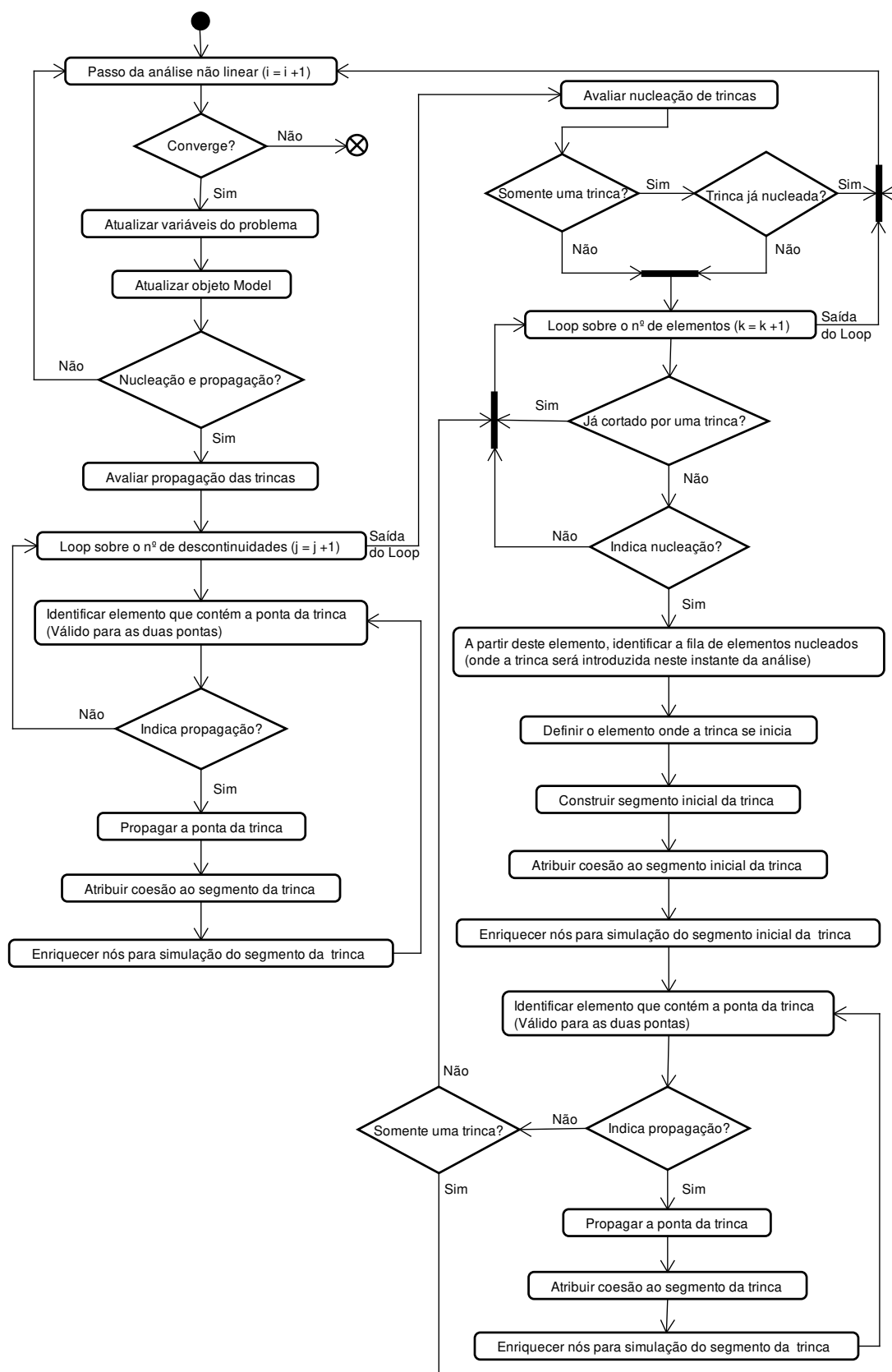


Figura A.3 – Fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas (SILVA, 2016).

no sistema até então existente não havia tampouco previsão de um modelo contínuo-descontínuo que considerasse uma transição energética.

A.2.1 Modificações realizadas

A.2.1.1 Reorganização da estrutura explorando a POO

A fim de melhor organizar a estrutura do sistema de nucleação e propagação de trincas do INSANE no contexto do MEFG/X, e de conservar a atualidade do código frente ao branch principal (*Master*), o arcabouço descrito na seção anterior foi movido para o branch *GFEM_CrackModelling*. A ideia por trás dessa reorganização era explorar de forma mais efetiva o paradigma de programação orientada a objetos (POO), já que muitos dos métodos dispostos em classes “genéricas” como *Element* - que representa qualquer elemento finito - e *GFemModel* - que representa todo e qualquer modelo do MEFG/X, independentemente da função enriquecedora empregada, diziam respeito especificamente e apenas à simulação de trincas no contexto do MEFG/X. Há que se observar que essa reestruturação se deu com contribuições inestimáveis do professor Samuel Silva Penna, coorientador desta tese.

As principais mudanças são listadas a seguir:

- Os métodos *evaluateCracksNucleation* e *evaluateCracksPropagation* passaram da classe *GFemModel* para uma classe filha, *GFemModelDiscreteCrack*. Os métodos *update* - responsável pela atualização das variáveis da classe - e *init* - incumbida da inicialização das variáveis em questão - da classe filha foram devidamente adequados para manter o sistema em operação. Isto é feito a partir da chamada dos respectivos métodos da classe mãe e, no caso do *update*, provendo também a verificação da propagação e nucleação de trincas.
- A partir da classe *GFemModelDiscreteCrack* foi criada mais uma classe filha, *Non-LocalGFemModelDiscreteCrack*, destinada à representação de um modelo não local com formulação baseada em integral no contexto do MEFG/X. Esta classe modifica basicamente os métodos *init* e *update* para incluir, além dos processos oriundos da classe mãe, a determinação dos elementos de vizinhança que permitem, por sua vez, o cálculo da função de suavização (eq. (3.37)). A Fig. A.4 traz um diagrama das alterações realizadas no pacote *gfemmodel*, com algumas das variáveis e dos principais métodos das classes citadas. Nela, assim como na sequência deste apêndice, as classes que sofreram alguma modificação direta aparecem em verde.
- Como filha da classe *GFemElement*, que estende, por sua vez a classe *ParametricElement*, filha de *Element*, foi criada a classe *GFemElementDiscreteCrack*. Esta classe contém, além do método *checkStrainLocalization*, responsável por verificar a nuclea-

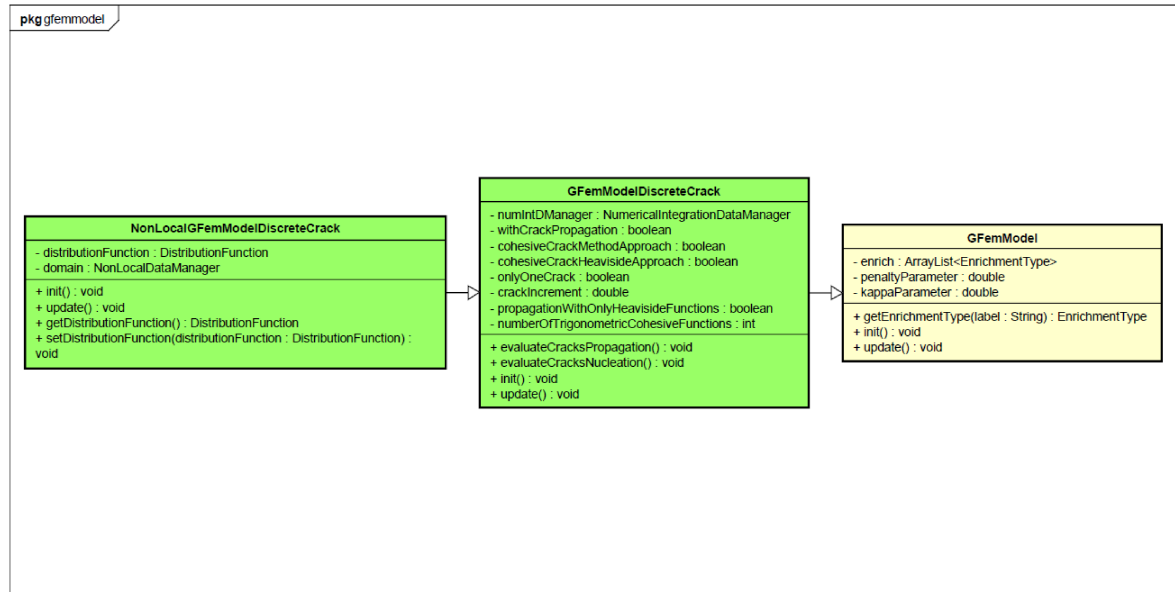
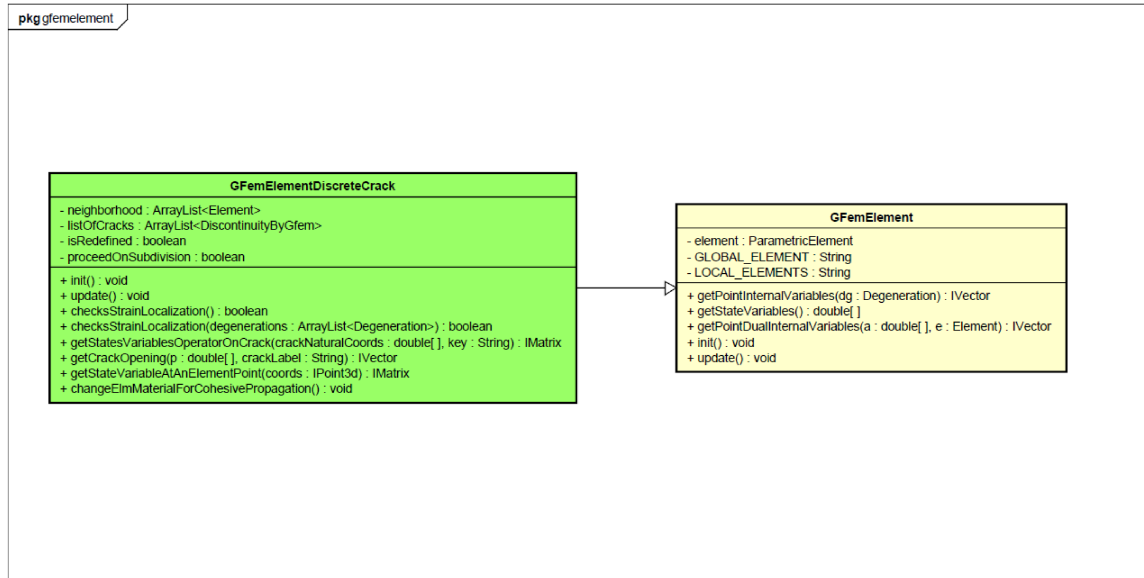
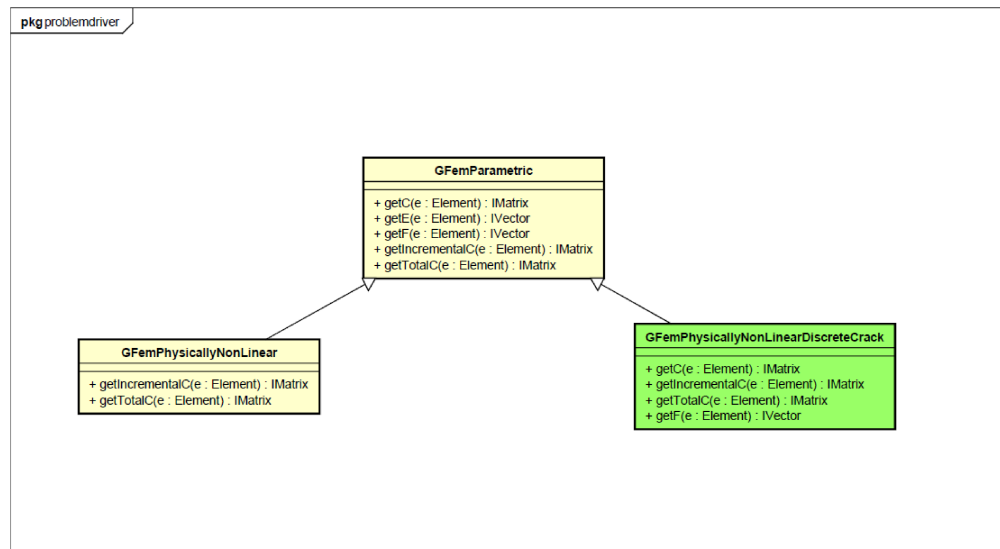


Figura A.4 – Pacote *gfemmodel*.

ção ou propagação de uma trinca em um objeto que seja um *GFemElementDiscreteCrack*, outros métodos relacionados ao tratamento da trinca no interior do elemento, como *getCrackOpening*, que calcula a abertura da trinca, ou seja, seu deslocamento normal às faces, para avaliação das tensões coesivas, outras variáveis e “getters” e “setters” importantes para o funcionamento do modelo. Entre estes elementos, podem ser citados *proceedOnSubdivision*, variável que contém a informação sobre se a estratégia de integração numérica por subdivisão deve ser atualizada em um dado elemento após uma nova configuração da trinca, *getCriticalEquivalentStrain*, que informará ao modelo a deformação equivalente correspondente ao dano crítico na lei de dano, *getListOfCracks*, que retorna uma lista com todos os segmentos de trinca contidos no elemento, entre outros. A classe *GFemElementDiscreteCrack* contém ainda métodos que foram acrescentados ao modelo com as modificações realizadas para esta tese, como o método *getStatesVariablesOperatorOnCrack*, sobre o qual se discorre na seção A.2.1.2, e o método *changeElmMaterialForCohesivePropagation*, elaborado para permitir o funcionamento do modelo C-D. A Fig. A.5 mostra um diagrama que resume algumas das principais alterações realizadas no pacote *gfemelement*.

- Por fim, os métodos responsáveis pela construção das matrizes de rigidez e dos vetores de força com consideração das tensões coesivas que antes constavam nas classes *GFemPhysicallyNonLinear* e *GFemParametric* foram movidos para a classe *GFemPhysicallyNonLinearDiscreteCrack*, filha de *GFemParametric* e que sobreescreve os métodos pertinentes a esta de forma a garantir a coerência da simulação. A Fig. A.6 sintetiza algumas das alterações realizadas no âmbito do pacote *problem-driver*, dentro de um modelo do MEF/X.

Figura A.5 – Pacote *gfemelement*.Figura A.6 – Pacote *problemdriver*.

A.2.1.2 Cômputo da matriz de salto $\llbracket \hat{\mathbf{N}} \rrbracket$

Passa-se agora a explicar as modificações “inéditas” requeridas em relação ao sistema desenvolvido por Silva (2016) de forma a incorporar as novidades trazidas por este trabalho, como a inclusão de enriquecimento trigonométrico, novos critérios de direção e propagação, e a implementação da lei coesiva do modelo C-D.

As modificações mais fundamentais principiaram a partir da necessidade de cômputo da matriz de salto $\llbracket \hat{\mathbf{N}} \rrbracket$ (eq. (3.97)) considerando outras funções de enriquecimento que não as funções de Heaviside convencionais (eq. (3.69)). Para tal, alterações foram realizadas no corpo dos métodos *getIncrementalC*, *getTotalC* (rigidez secante) e *getF* no âmbito de

GFemPhysicallyNonLinearDiscreteCrack, uma vez que a contribuição da integração das tensões coesivas a estas entidades era até então computada de forma completamente específica para as funções de Heaviside tradicionais, sob a perspectiva do MEFG/X. Também foi necessário modificar o construtor relacionado à representação de trincas com modelo de zona coesiva na classe *DiscontinuityByGfem*, incluindo como seus atributos, ao ser acionado em *GFemModelDiscreteCrack*, dois *Strings* identificadores do tipo de função de Heaviside a ser utilizada (padrão ou linear) e do tipo de estratégia de enriquecimento empregada (MEFG/X convencional ou estratégia estável), de forma similar ao que foi feito por Oliveira (2018) para entalhes. Isso tornou possível a utilização das funções de Heaviside lineares (eq. (3.79)) e modificadas por Wu e Li (2015b) (eq. (3.84)), bem como da estratégia de enriquecimento estável, no âmbito da simulação de nucleação e propagação de fissuras com modelo de zona coesiva. O código foi arquitetado de forma genérica, de modo a permitir, em fases posteriores, que o cômputo da matriz $[\hat{\mathbf{N}}]$ incluísse também o enriquecimento trigonométrico.

As modificações em *getIncrementalC*, *getTotalC* e *getF* consistiram essencialmente no fato de que o salto na trinca verificado para a matriz de funções de forma enriquecidas $[\hat{\mathbf{N}}]$, eq. (3.97), passou a ser avaliado pelo método *getStatesVariablesOperatorOnCrack*, criado na classe *GFemElementDiscreteCrack*, responsável pela representação de um elemento finito que pode conter ou contém algum segmento de trinca na perspectiva do MEFG/X (e abordagens derivadas). Este método realiza uma busca sobre os nós do elemento finito, identificando aqueles que possuem algum tipo de enriquecimento. Verifica-se então se o enriquecimento identificado é uma função utilizada para simular a trinca com modelo de zona coesiva a partir do valor atribuído à variável booleana *isThisACohesiveCrackEnrichment*, existente em *EnrichmentType*. Caso o valor retornado seja verdadeiro, o salto no enriquecimento, calculado sobre a trinca, é avaliado a partir do método *getJumpAtEnrichmentFunctionOnCrack*, implementado também em *EnrichmentType* e suas classes filhas. A partir desta avaliação, é construída a matriz que representa o salto nas funções de forma enriquecidas $[\hat{\mathbf{N}}]$, onde se verifica ocorrência de descontinuidade, com base nos pontos de integração da trinca, passados como atributo.

A.2.1.3 Modificação e Acréscimo de Critérios de Direção e Propagação

Para que o sistema de propagação e nucleação de fissuras pudesse funcionar com o enriquecimento trigonométrico, era necessário que sua lógica geométrica fosse adaptada considerando segmentos de reta genéricos, que poderiam parar em qualquer ponto do interior de um elemento finito, sem necessariamente atravessá-lo por inteiro. Essa mudança de configuração exigiu alterações nos critérios de propagação e de direção assumida pela trinca.

No caso das estratégias de enriquecimento que usavam apenas funções degrau, buscou-se preservar, o máximo possível, a idealização de Silva (2016) a partir do reaproveitamento, dentro da classe *DiscontinuityByGfem*, do método *update*, que passou a se chamar, neste caso, *updateForPropagationWithHeavisideOnly*. O código distingue entre um modelo com esta característica e outro que emprega a combinação entre funções de Heaviside e funções trigonométricas a partir da variável booleana *PropagationWithOnlyHeavisideFunctions*, presente no arquivo de entrada. Caso seu valor seja verdadeiro, apenas as funções degrau, em sua forma convencional (eq. (3.69)), estabilizada pelo parâmetro α (eq. (3.84)) ou linear (eq. (3.79)), são consideradas para a simulação, e o método *updateForPropagationWithHeavisideOnly* é o empregado como atualizador da classe. Este método preserva a região de verificação de propagação (Fig. 3.5) implementada por Silva (2016).

No caso das estratégias que incluíram o enriquecimento trigonométrico, era preciso que se realizasse uma adaptação da região de propagação, visto não ser mais razoável verificá-la no elemento vizinho ao último segmento de trinca. Para tal, criou-se um novo método *checkStrainLocalization* na classe *GFemElementDiscreteCrack*. Este método, diferentemente do original, recebe como parâmetro uma lista de degenerações. Estas degenerações representam os pontos de integração contidos na região semicircular à frente da trinca da Fig. 3.5, e são selecionadas a partir do método *getListOfDegenerationsForCrackPropagationCriteria*, implementado em *DiscontinuityByGfem*. A pesquisa sobre o critério de propagação passa a se dar, portanto, com base nesta lista de degenerações, em vez de percorrer apenas os pontos de integração do elemento que aciona o método *checkStrainLocalization*.

As ocorrências relacionadas à limitação relativa ao critério de direção baseado em uma medida não local de deformações não se deram apenas nos experimentos do capítulo 6. Mesmo com material linear elástico, a autora teve dificuldades em obter resultados razoáveis utilizando este critério com o painel em L de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004). A partir de uma discussão do grupo de pesquisa do INSANE, houve a sugestão de se tentar um novo critério de cômputo da direção neste contexto, que foi efetivado em Oliveira, Barros e Penna (2022). Trata-se do critério de direção perpendicular à máxima tensão circunferencial, implementado também na classe *DiscontinuityByGfem* como o método *getDiscontinuityDirectionBySifs*. Após os experimentos corroborarem a melhor aproximação das trajetórias das trincas por este critério, ele foi assumido como o critério padrão em modelos descontínuos, a partir da adequação dos métodos *update* - atualizador da classe quando se emprega uma combinação entre funções degrau e enriquecimentos trigonométricos - e *updateForPropagationWithHeavisideOnly* de forma a garantir sua chamada, substituindo, nestes casos, a deflagração de *getDiscontinuityDirectionByNon-LocalPrincipalStrain*.

Outra alteração relevante ocorreu no âmbito dos métodos *checkStrainLocalization*, na classe *GFemElementDiscreteCrack*. Antes da realização desta tese, a propagação poderia se dar apenas ou se a tensão principal avaliada nos pontos de integração em análise excedesse a máxima resistência à tração do material ou se houvesse localização do tensor acústico, no caso de um material não linear. Nos testes preliminares realizados para o capítulo 6, entretanto, constatou-se que, nesta forma de tratar a propagação, a trinca não estava atuando em consonância com a banda de dano. Posteriormente, uma vez que se decidiu propor a formulação de um modelo que realizasse a transição energética entre modelos de dano e fratura discreta simulada pelo MEFG/X e pelo MEFG-E, tornou-se primordial modificar estes métodos de forma a incluir o critério de propagação baseado em dano crítico. Por fim, uma alteração menor em relação ao trabalho de Silva (2016) foi feita no método *getDiscontinuityDirectionByNonLocalPrincipalStrain*, que até então provê a direção da trinca nos modelos C-D. A região de cômputo da direção por este critério passou a ser a região semicircular da Fig. 3.8, não mais um círculo centrado na ponta da trinca.

A.2.1.4 Inclusão do Enriquecimento Trigonométrico

A inclusão do enriquecimento trigonométrico talvez tenha sido a etapa que mais demandou alterações no sistema desenvolvido por Silva (2016). Além dos ajustes requeridos para a generalização do cômputo da matriz de salto $[\![\hat{\mathbf{N}}]\!]$ (seção A.2.1.2) e nos critérios de direção e propagação (seção A.2.1.3) já relatados, foi preciso imaginar uma nova forma de gerir o objeto trinca no âmbito da classe *DiscontinuityByGfem*. Antes disso, no entanto, fez-se necessário implementar o enriquecimento trigonométrico em si, a partir da classe *CohesiveCrackTipEnrichment*, no âmbito do pacote *EnrichmentType*. Essa classe contém métodos para o cálculo de toda a base de funções não singulares propostas por Wang e Waisman (2018), bem como de suas derivadas, e do salto verificado nas faces da trinca. A distinção entre o número de termos a ser considerado como enriquecimento é feita a partir da chave `<NumberOfTrigFunc>`, presente no arquivo de entrada.

A grande mudança demandada pela inclusão deste tipo de enriquecimento no contexto de *DiscontinuityByGfem* esteve relacionada, como mencionado, à gestão do objeto trinca. Para Silva (2016), cada instância da classe em questão representava uma única trinca, com todos os elementos e eventuais pontos (coordenadas) incluídos pela propagação. Após discussões conduzidas com outros integrantes do grupo de pesquisa, não se considerou viável manter esta estrutura. Aproveitando a lógica do arcabouço desenvolvido pela linha de pesquisa da estratégia global-local no trabalho de Fonseca (2019), optou-se por tratar cada novo segmento de trinca como um novo objeto da classe *DiscontinuityByGfem*. Para que isso fosse possível, foi preciso criar o método *buildCrackSegment*, responsável, justamente, pela criação dos novos segmentos, com atribuição da coesão e seleção dos nós a

serem enriquecidos com a propagação. Este método é acionado a partir de um construtor, por sua vez convocado no âmbito de *GFemModelDiscreteCrack* quando os critérios pertinentes acusam alguma propagação. Este construtor recebe como parâmetros uma série de atributos, que incluem um identificador da trinca inicial que deu origem aos segmentos, os pontos inicial e final do novo segmento - obtidos a partir do método *update* após a verificação da propagação e da obtenção da direção pelo critério pertinente -, booleanos que identificam se a trinca pode propagar pelas duas pontas (por *default*, sim), entre outras informações. Naturalmente, a inserção de um novo construtor demandou adequações também no método relativo à avaliação da propagação (*evaluateCracksPropagation*) na classe *GFemModelDiscreteCrack*. O processo de nucleação do primeiro segmento de uma trinca, no entanto, foi mantido, em estrutura, como proposto por Silva (2016), a partir do método *buildCrack*. Este método é acionado, por sua vez, por um construtor pertinente convocado a partir do método *evaluateCracksNucleation* em *GFemModelDiscreteCrack*.

Outra demanda oriunda da consideração do enriquecimento trigonométrico nos modelos investigados neste trabalho diz respeito ao tratamento dado às funções em questão com o avanço da propagação. É evidente que, com o avanço da trinca, a troca do enriquecimento em determinado elemento pode ser necessária, tanto pelo surgimento de uma nova ponta, demandando outras funções trigonométricas, quanto pelo atravessamento completo do elemento em questão, o que acarreta a substituição do enriquecimento trigonométrico de pelo menos parte dos nós deste elemento por funções de Heaviside. Essa gestão é feita no âmbito do método *buildCrackSegment*, a partir da chamada do método *changeRestrainsOfCohesiveEnrich*, implementado também na classe *DiscontinuityByGfem*. A cada vez que a troca de enriquecimento se faz necessária, o método *changeRestrainsOfCohesiveEnrich* cumpre a função de “desativar” o enriquecimento corrente, ao mudar os valores das restrições nodais associadas aos graus de liberdade do enriquecimento em questão para verdadeiro. Desta feita, estes graus de liberdade não mais farão parte da matriz associada aos graus de liberdade incógnitos empregada na solução do problema da eq. (A.1), nem do vetor de deslocamentos incremental calculado no contexto da análise não linear. Com este tratamento, apresentado preliminarmente em Oliveira, Barros e Penna (2022), objetivava-se também garantir que os parâmetros nodais das novas funções enriquecedoras fossem alocados em posições compatíveis nas matrizes e vetores, sem sobrescrever os termos anteriores e assegurando a coerência da análise. Como se constatou no capítulo 5, entretanto, devido à arquitetura do INSANE, que demanda que as matrizes totais dos elementos finitos sejam montadas para que possam ser estabelecidas as matrizes parciais do problema, este tratamento acabou incorrendo em inviabilidade computacional para algumas das estratégias de enriquecimento investigadas nesta tese.

Por fim, algumas modificações foram feitas na classe *SubdivisionOfElements*, responsável

pela estratégia de integração numérica baseada na subdivisão do elemento trincado em células triangulares. Anteriormente, a subdivisão estava disponível apenas no caso em que se empregavam somente funções de Heaviside. Com a adequação do método *setup*, bem como a criação de *fillCrackVerticesForCohesivePropagation*, foi possível usar este arcabouço também quando o elemento possuía diversos segmentos de trinca em seu interior, e/ou empregava enriquecimento trigonométrico.

A.2.1.5 Tratamento do Modelo Contínuo-Descontínuo

A proposição do modelo C-D exigiu também algumas mudanças no sistema existente, embora, a esta altura, poucas adequações tenham sido estruturais. A principal delas com esta característica talvez tenha sido a exploração do modelo constitutivo representado pela classe *CrackingConstModel* (Fig. A.7), classe abstrata que é uma das variáveis da classe *DiscontinuityByGfem*. Esta classe era responsável por criar o objeto *CohesiveCrackConstModel*, que representa a lei coesiva descrita para o modelo descontínuo (seção 3.3.1.1). Neste trabalho, *CrackingConstModel* passou a estar encarregada também da concepção do objeto *ContinuumDamageToCohesiveCrackLawConstModel*, que representa a lei coesiva adotada para o modelo C-D (seção 3.3.1.2). A partir desta tese, esses objetos passaram a ser criados no âmbito do método *setsCohesion*, a partir de uma verificação que investiga se o modelo constitutivo do material dos elementos é representado por um modelo de dano. Em caso negativo, o método prossegue com desenvolvimento muito similar à implementação de Silva (2016). Em caso afirmativo, por outro lado, existe um bloco do código que faz o cálculo da energia dissipada pela lei de evolução de dano até então, a partir do valor de deformação equivalente associado ao dano crítico. Calcula-se também qual é a tensão corrente verificada na lei em questão. Estes valores são atribuídos ao objeto *ContinuumDamageToCohesiveCrackLawConstModel*, e é a partir daí que se consegue determinar o expoente γ e o valor do parâmetro t_o da eq. (3.44). O cômputo da energia dissipada pelas leis de evolução de dano se dá a partir do método *getDamageLawDissipatedEnergy*, implementado nas classes que representam as leis de dano investigadas.

Além disso, foi necessária a criação do método *changeElmMaterialForCohesivePropagation* na classe *GFemElementDiscreteCrack*. Este método é responsável basicamente por “congelar” o dano nos elementos em que a fratura discreta surgiu, transformando o material destes em um material linear elástico isotrópico, de módulo de elasticidade igual ao módulo secante no momento da troca. O método é também responsável pelo armazenamento do material e do modelo constitutivo do elemento anteriores à troca, informação que é empregada para manter a generalidade do código na estratégia de integração numérica adotada. Este método é acionado nos métodos *buildCrack* e *buildCrackSegment*, sempre que se verifica que a troca de modelo constitutivo é necessária em dado elemento, ou seja,

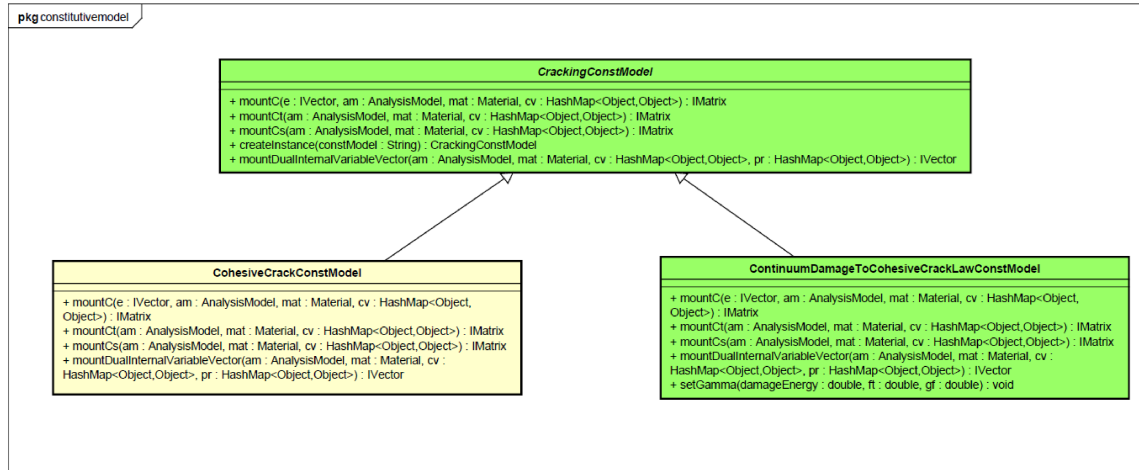


Figura A.7 – Classes de interesse para representação das leis coesivas estudadas neste trabalho no âmbito do pacote *constitutivemodel*.

após o surgimento do primeiro segmento de uma trinca no interior deste.

Muitas das modificações descritas nesta seção se deram no âmbito da classe *DiscontinuityByGfem*. A Fig. A.8 tenta sintetizar algumas das discussões aqui conduzidas, trazendo algumas das variáveis e métodos acrescentados por este trabalho.

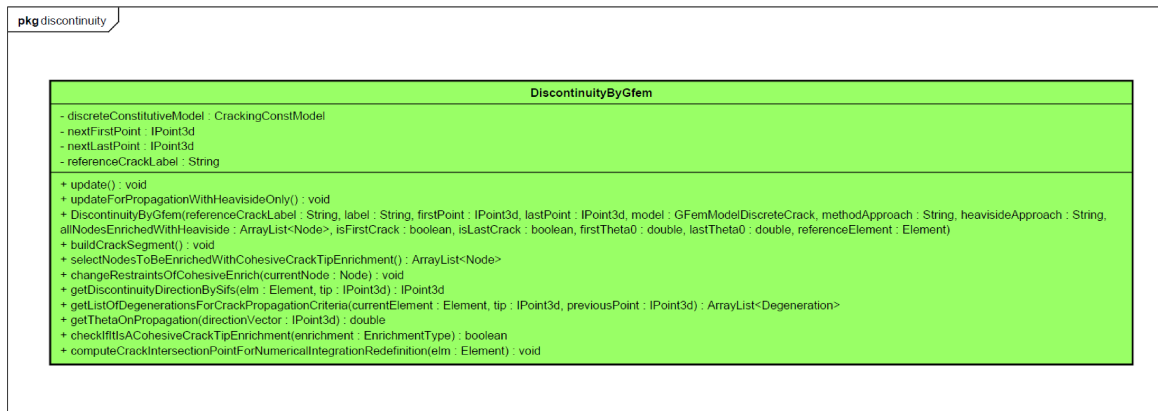


Figura A.8 – Classe *DiscontinuityByGfem* após o término desta tese, com alguns dos principais métodos e atributos implementados.

APÊNDICE B – Gráficos das Funções de Enriquecimento

Este apêndice visa demonstrar, ao leitor interessado, o comportamento gráfico das funções de enriquecimento dispostas na seção 3.4.1 do capítulo 3. Isso é feito com o intuito de prover uma melhor visualização das funções em questão. Os gráficos dispostos neste apêndice foram gerados com auxílio do programa MATLAB R2023a, considerando um elemento finito quadrilateral cujo domínio é $[-1, -1] \times [1, 1]$. A seção B.1 apresenta as figuras relativas às diferentes funções de Heaviside empregadas nesta tese. A seção B.2, por sua vez, exhibe o comportamento do enriquecimento de natureza trigonométrica.

B.1 Funções de Heaviside

Três diferentes funções de Heaviside são investigadas nesta tese. A versão nodalmente deslocada do enriquecimento convencional (eq. (3.69)), utilizada para compor as estratégias do MEFG/X e as estratégias EE-II-B e EE-III-B do MEFG-E, pode ser vista na Fig. B.1a. A figura exhibe ainda o interpolante de elementos finitos de $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ (b), empregado no cômputo da função de Heaviside modificada pelo parâmetro de estabilização $\mathcal{H}_{mod}^j(\mathbf{x})$ (eq. (3.84)). Esta função foi empregada nas estratégias EE-I-H_{mod}, EE-II-A e EE-III-A do MEFG-E. Ela pode ser vista nas Figs. B.1c e d. O nó de referência, utilizado para determinação de $\mathcal{H}(\mathbf{x}_j)$ é o nó de coordenadas $(-1, -1)$. Para a geração dos gráficos dessa seção, considerou-se que havia uma trinca representada por um segmento de reta que ia das coordenadas $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Este segmento aparece em magenta nas figuras subsequentes.

Observa-se que a proposta de Wu e Li (2015b), quando se emprega valores baixos para o parâmetro de estabilização α , interfere pouco no comportamento observado para $\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_j)$. De fato, é difícil diferenciar as Figs. B.1a e c. Pela Fig. B.1d, no entanto, pode-se verificar que os patamares da Fig. B.1c, aparentemente constantes, variam ligeiramente de forma linear, efeito da subtração do termo $\alpha I_{\phi_j}(\mathcal{H}(\mathbf{x}))(\mathbf{x})$.

As funções de Heaviside lineares (eq. (3.79)), experimentadas numericamente apenas no capítulo 4, podem ser vistas nas Figs. B.2 a B.4, que exibem os três termos que a compõem, seus interpolantes e o enriquecimento estável resultante da subtração do termo original por seu respectivo interpolante. Estas funções foram usadas apenas para compor a estratégia EE-I-H_L do MEFG-E.

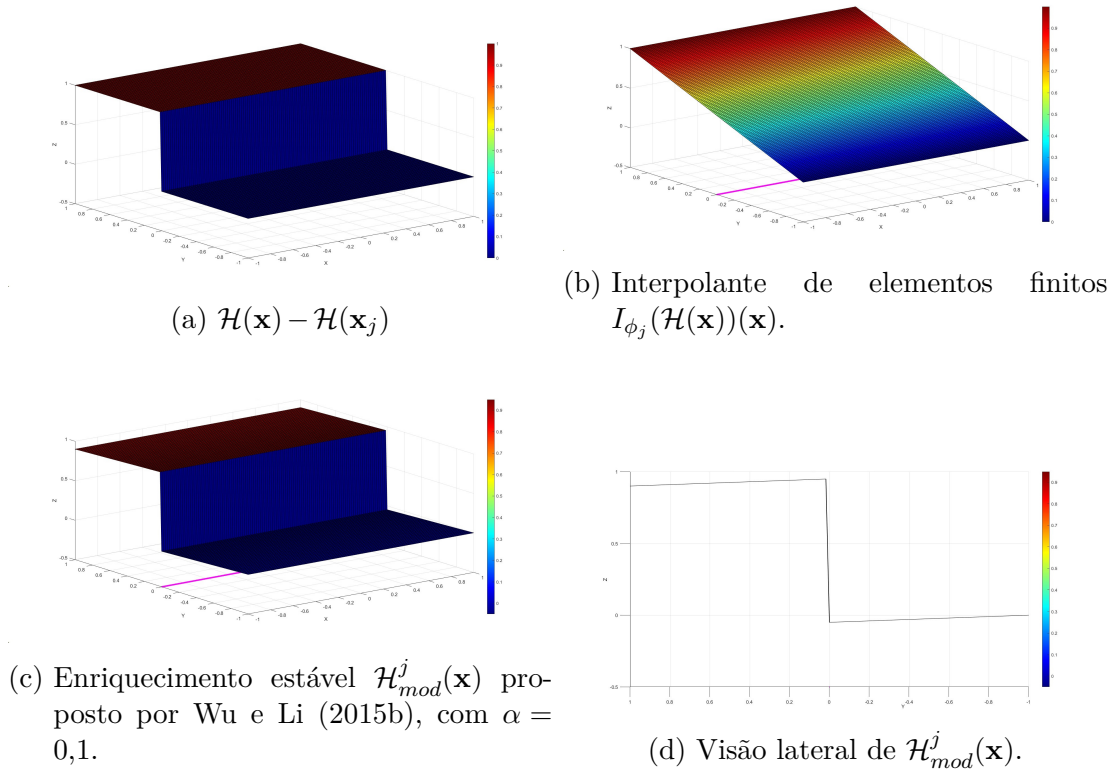


Figura B.1 – Comportamento gráfico de $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ (a) e de $\mathcal{H}_{mod}^j(\mathbf{x})$ (c e d).

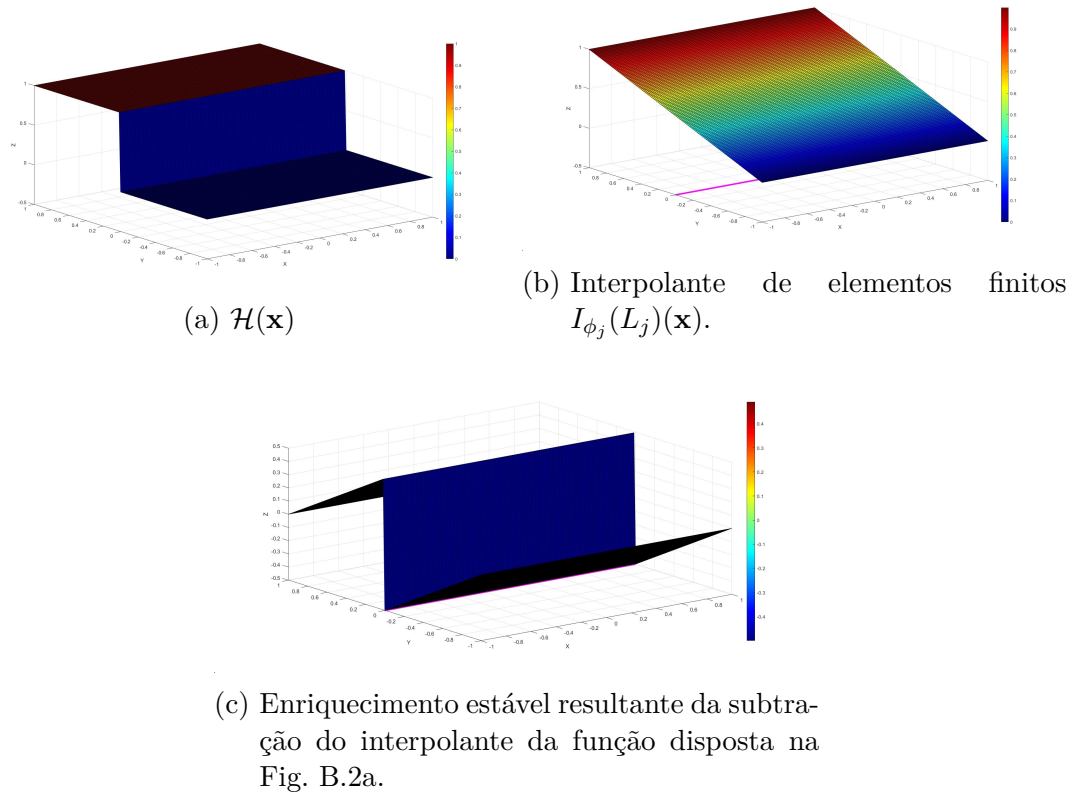
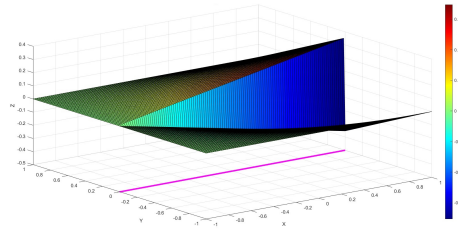
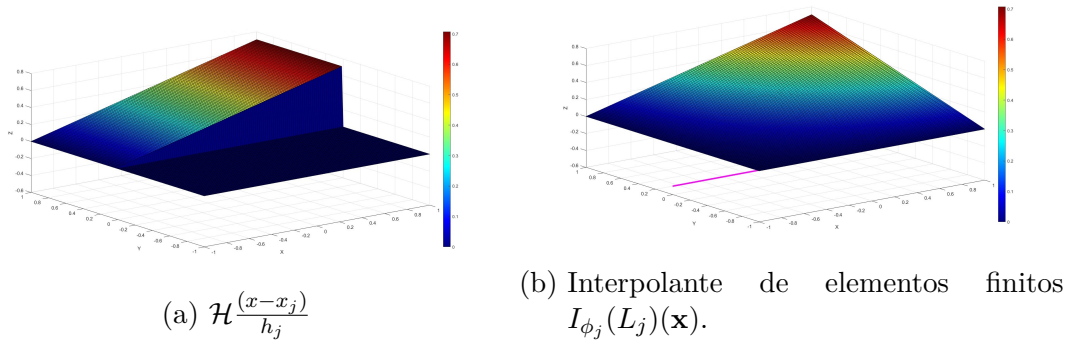
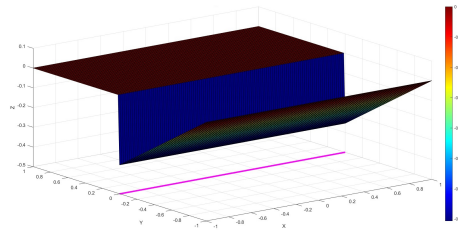
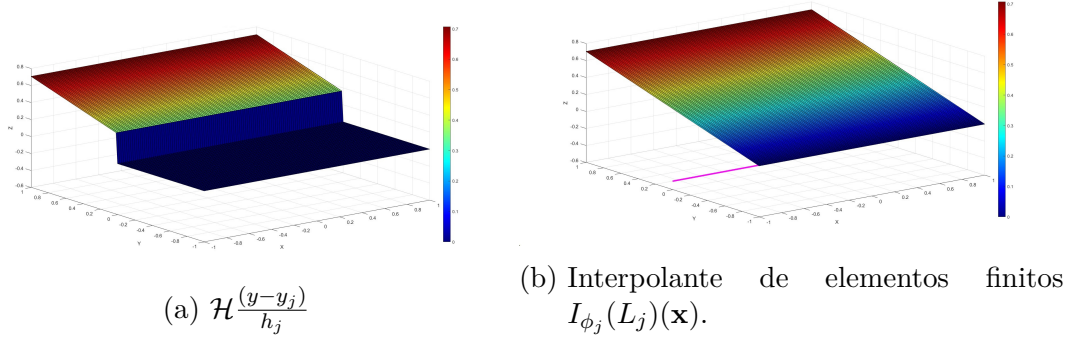


Figura B.2 – Comportamento gráfico de $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ no âmbito do MFG-E (c).



(c) Enriquecimento estável resultante da subtração do interpolante da função disposta na Fig. B.3a.

Figura B.3 – Comportamento gráfico de $\mathcal{H} \frac{(x-x_j)}{h_j}$ no âmbito do MEFG-E (c).



(c) Enriquecimento estável resultante da subtração do interpolante da função disposta na Fig. B.4a.

Figura B.4 – Comportamento gráfico de $\mathcal{H} \frac{(y-y_j)}{h_j}$ no âmbito do MEFG-E (c).

B.2 Funções Trigonômétricas

As funções de natureza trigonométrica, empregadas no estabelecimento das estratégias EE-II e EE-III do MEFG/X e do MEFG-E podem ser vistas nas Figs. B.5 a B.10. Observa-

se que as estratégias EE-II tratam apenas do termo apresentado na Fig. B.7. Assim como na seção anterior, o nó de referência, utilizado para determinação dos valores nodais das funções é o nó de coordenadas $(-1, -1)$. Para a geração dos gráficos dessa seção, considerou-se que havia uma trinca representada por um segmento de reta que ia das coordenadas $(1, 0)$ a $(0, 0)$, ou seja, com a ponta situada em $(0, 0)$. Este segmento aparece em magenta nas figuras subsequentes. Nestas, $\mathbf{R}$ representa a matriz de rotação para coordenadas globais (ver, por exemplo, eq. (3.72)).

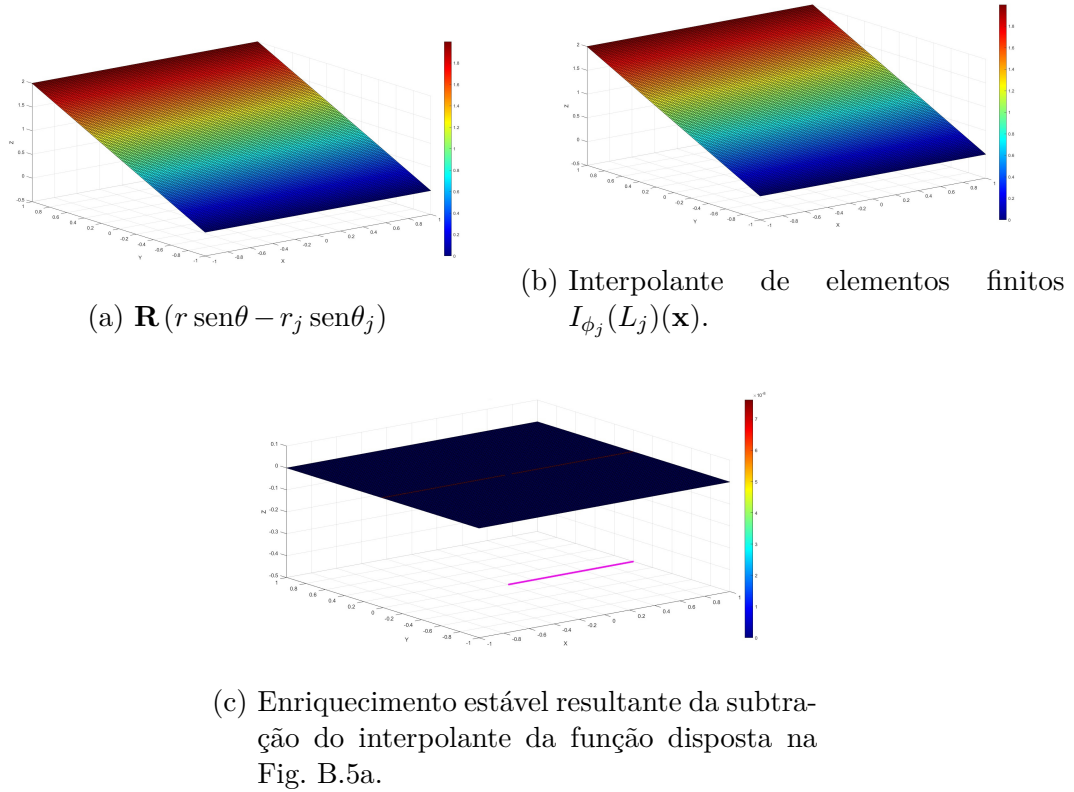


Figura B.5 – Comportamento gráfico de $r \sin \theta$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).

Observa-se pelas Figs. B.5 e B.6 que os termos $r \sin \theta$ e $r \cos \theta$ têm seus valores zerados quando se aplica a estratégia estável, que consiste na subtração de seus interpolantes de elementos finitos. Isso se dá em decorrência da natureza linear destas funções. Acredita-se que este fato possa ter contribuído para as instabilidades numéricas ocorridas com as estratégias EE-III do MEFG-E no capítulo 5.

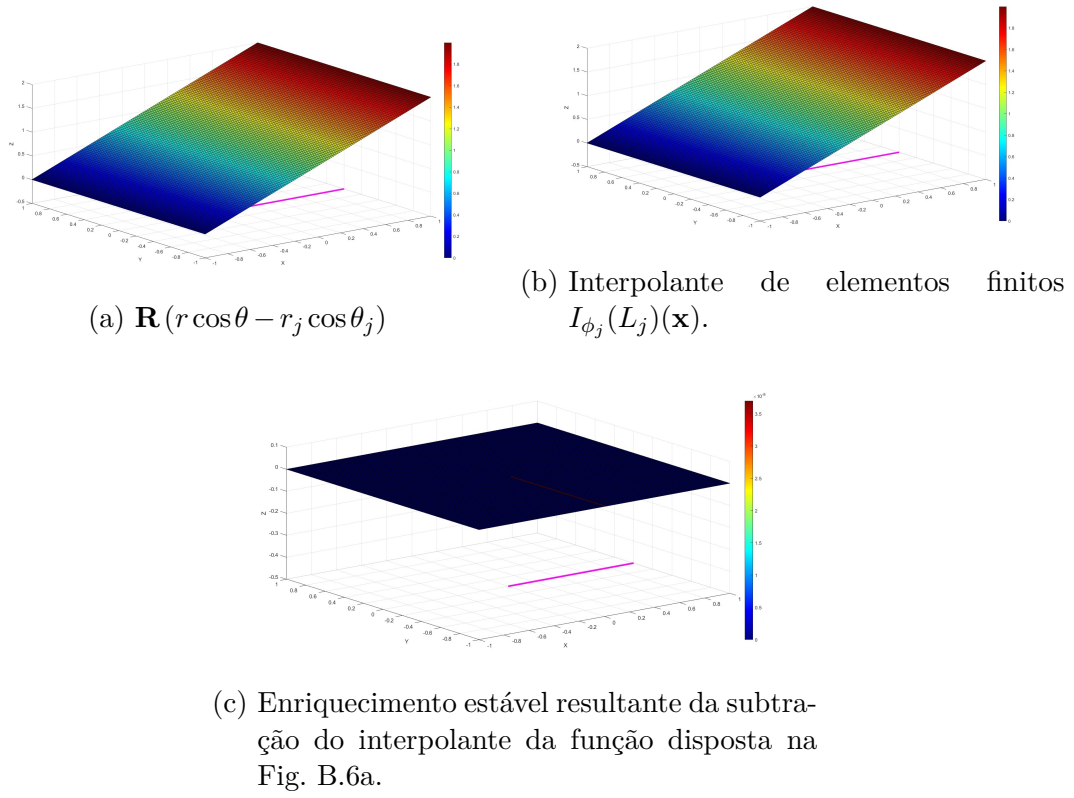


Figura B.6 – Comportamento gráfico de $r \cos \theta$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).

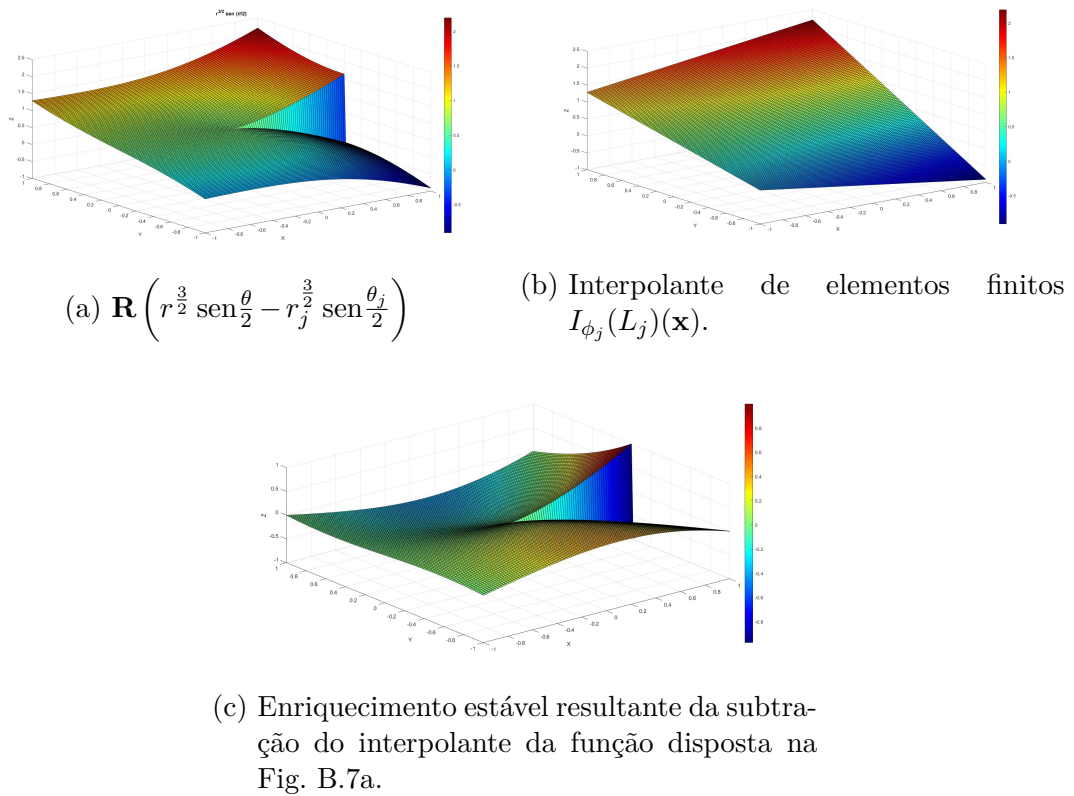
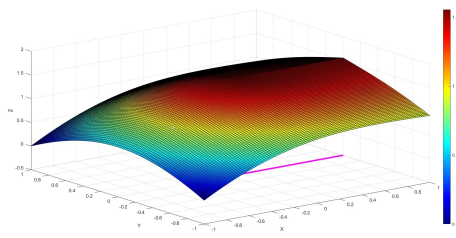
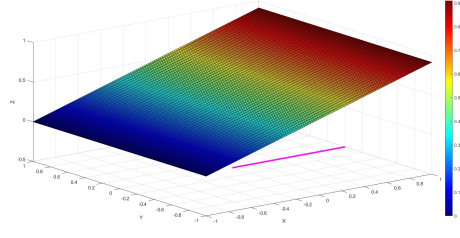


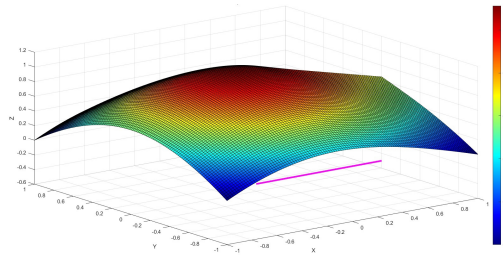
Figura B.7 – Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).



(a) $\mathbf{R} \left(r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta_j}{2} \right)$

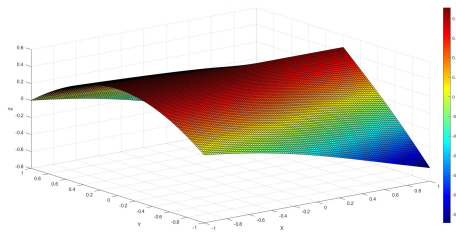


(b) Interpolante de elementos finitos $I_{\phi_j}(L_j)(\mathbf{x})$.

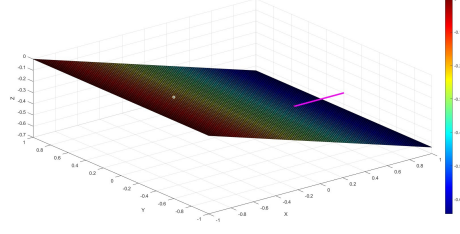


(c) Enriquecimento estável resultante da subtração do interpolante da função disposta na Fig. B.8a.

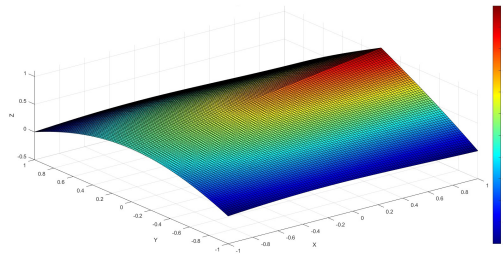
Figura B.8 – Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).



(a) $\mathbf{R} \left(r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} - r_j^{\frac{3}{2}} \sin \theta_j \sin \frac{\theta_j}{2} \right)$



(b) Interpolante de elementos finitos $I_{\phi_j}(L_j)(\mathbf{x})$.



(c) Enriquecimento estável resultante da subtração do interpolante da função disposta na Fig. B.9a.

Figura B.9 – Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).

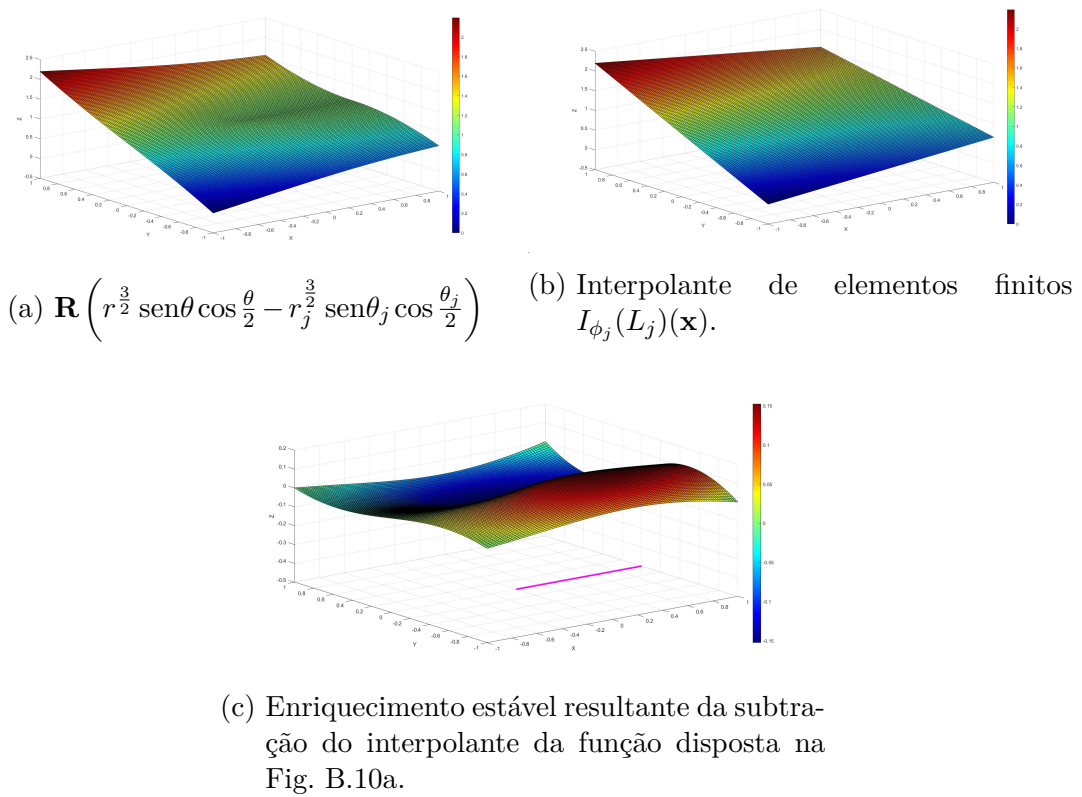


Figura B.10 – Comportamento gráfico de $r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$, no âmbito do MEFG/X (a) e do MEFG-E (c).