

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Emerson Lech Taipe Huamani

Distribuições de codimensão 1 e primeira classe de Chern nula em
variedades Fano tridimensionais

Belo Horizonte
2023

Emerson Lech Taipe Huamani

Distribuições de codimensão 1 e primeira classe de Chern nula em variedades Fano tridimensionais

Versão final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura do Instituto de Ciências exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Mauricio Barros Corrêa Júnior

Belo Horizonte
2023

Taípe Huamani, Emerson Lech.

T134d Distribuições de codimensão 1 e primeira classe de Chern nula em variedades fano tridimensionais [recurso eletrônico] / Emerson Lech Taípe Huamani. Belo Horizonte — 2023.
1 recurso online (81 f. il.): pdf.

Orientador: Maurício Barros Corrêa Júnior.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 80-81

1. Matemática – Teses. 2. Teoria das distribuições (Análise funcional) – Teses. 3. classe de Chern – Teses. I. Corrêa Júnior, Maurício Barros. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

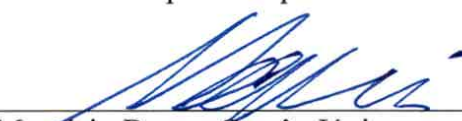


FOLHA DE APROVAÇÃO

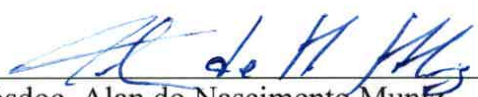
*Distribuições de codimensão 1 e primeira classe de Chern
nula em variedades Fano tridimensionais*

EMERSON LECH TAIPE HUAMANI

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:



Prof. Mauricio Barros Corrêa Júnior
UFMG



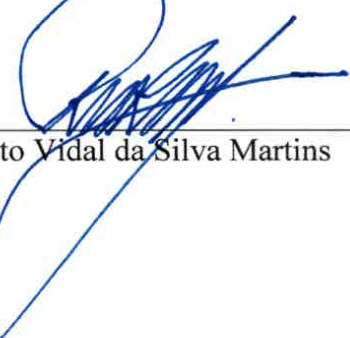
Pósdoc. Alan do Nascimento Muniz
UNICAMP



Prof. André Luis Contiero
UFMG



Prof. Fernando Lourenço
UFLA



Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG

Belo Horizonte, 03 de agosto de 2023.

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos, à minha esposa Daniela pelo apoio durante todo o processo, meus amigos, ao meu orientador Mauricio Corrêa por todo o ensinamento e paciência comigo, ao departamento de matemática da UFMG, aos colegas de doutorado, à CAPES, meus sinceros agradecimentos.

*“Es verdad; pues reprimamos
esta fiera condición,
esta furia, esta ambición,
por si alguna vez soñamos.
Y sí haremos, pues estamos
en mundo tan singular
que el vivir sólo es soñar,
y la experiencia me enseña
que el hombre que vive sueña
lo que es hasta despertar”
- Calderón de la Barca*

Resumo

O estudo de distribuições holomorfas e folheações via propriedades de seu esquema singular e o feixe tangente, permite estabelecer a classificação e descrição de seus correspondentes espaços de módulos, como por exemplo nos trabalhos de O. Calvo Andrade, M. Corrêa e M. Jardim [5], ou H. Galeano, M. Jardim e A. Muniz [12].

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma classificação de distribuições de codimensão um sobre X , uma variedade suave Fano de dimensão 3 com número de Picard 1, cujo feixe tangente é localmente livre e tem primeira classe de Chern nula. Esta classificação será feita descrevendo o feixe tangente e o esquema Singular de distribuições analisando caso por caso na classificação de Iskovskikh e Mukai para Fano tridimensionais [16], [17], [22].

Palavras-chave: distribuições; codimensão um; Fano de dimensão 3; feixe tangente localmente livre; primeira classe de Chern nula.

Abstract

The study of holomorphic distributions and foliations through the properties of their singular scheme and tangent sheaf allows for the classification and description of their corresponding moduli spaces. This approach can be seen, for example, in the works of O. Calvo Andrade, M. Corrêa, and M. Jardim [5], or H. Galeano, M. Jardim, and A. Muniz [12].

The main objective of this work is to establish a classification of codimension-one distributions on X , a smooth three-dimensional Fano variety with Picard number 1, whose tangent sheaf is locally free and has a vanishing first Chern class. This classification will be carried out by describing the tangent sheaf and the singular scheme of the distributions, analyzing case by case within the Iskovskikh and Mukai classification of three-dimensional Fano varieties [16], [17], [22].

Keywords: distributions; codimension one; tangent sheaf locally free; vanishing first Chern class.

Sumário

1	Preliminares	11
1.1	Distribuições	13
1.2	Cohomologia de $\bigwedge^r \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$	16
2	Distribuições de codimensão 1 localmente livres com primeira classe de Chern nula sobre variedades Fano de dimensão 3 com número de Picard igual a 1	19
2.1	Prova do Teorema 3.0.4	23
2.1.1	Calculo do gênero aritmético da curva	26
2.2	Prova do Teorema 3.0.5	27
2.2.1	Calculamos o gênero aritmético do lugar singular C	28
2.3	Quando o índice da variedade é 1	38
3	Distribuições sobre Fano threefolds de índice maior que 1	40
3.1	Introdução	40
3.2	Prova do Teorema 4.1.1	44
3.2.1	Quando $X = MM_{2,1}$	47
3.2.2	Quando $X = MM_{2,3}$	49
3.2.3	Quando X é $MM_{10,1}$	50
3.2.4	Quando X é $MM_{2,10}$	52
3.2.5	Quando $X = MM_{2,14}$	53
3.2.6	Quando $X = MM_{6,1}$	55
3.2.7	Quando $X = MM_{2,11}$	57
3.2.8	Quando $X = MM_{2,19}$	58
3.2.9	Quando $X = MM_{2,5}$	59
3.2.10	Quando X é $MM_{2,9}$	64
3.2.11	Quando $X = MM_{2,24}$	68
3.2.12	Quando $X = MM_{2,25}$	69
3.2.13	Quando $X = MM_{2,27}$	70
3.2.14	Quando $X = MM_{2,29}$	73
3.2.15	Cohomologias	76
	Referências	80

Introdução

O estudo de distribuições holomorfas e folheações via propriedades de seu esquema singular e o feixe tangente, permite estabelecer a classificação e descrição de seus correspondentes espaços de módulos. Nesse sentido, foi proporcionada uma classificação de distribuições holomorfas de codimensão um sobre $\mathbb{P}^3$ de grau 0, 1, 2 (ver o que foi feito em [5], [12]). A classificação é completa quando os graus são 0, 1 e para grau 2 a classificação ver o que foi feito em [12].

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma classificação de distribuições de codimensão um sobre X , uma variedade suave Fano de dimensão 3 com número de Picard 1 (grupo de Picard $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$), cujo feixe tangente é localmente livre e tem primeira classe de Chern nula. Esta classificação será feita descrevendo o feixe tangente e o esquema Singular de distribuições analisando caso por caso na classificação de Iskovskikh e Mukai para Fano tridimensionais. Tais variedades de dimensão 3 foram classificadas por Iskovskikh [16], [17] e Mukai [22]. Depois A. Cavalcante, M. Corrêa e S. Marchesi provaram em [6] que se $\mathcal{F}$ é uma distribuição de codimensão um cujo feixe tangente $T\mathcal{F}$ é localmente livre e $c_1(T\mathcal{F}) = 0$ sobre uma variedade Fano de dimensão 3 X , então ou $T\mathcal{F}$ ou split ou é estável.

No Capítulo 2, são apresentados os principais resultados e propriedades que serão utilizados ao longo deste trabalho. No Capítulo 3 estudaremos as propriedades do esquema singular e o feixe tangente das distribuições holomorfas de codimensão um sobre cada uma das variedades Fano tridimensionais da classificação de Iskovskikh e Mukai. Os resultados desta seção são expressos nos teoremas (2.0.4) e (2.0.5). Estes teoremas são provados nas seções (2.1) e (2.2), respectivamente. Além disso, utilizando o fato que quando o $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ todas as distribuições provem de uma distribuição da variedade ambiente ([1], [18]), via a restrição, daremos uma descrição do feixe tangente e o esquema singular da distribuição sobre nossa variedade Fano de dimensão 3.

No capítulo 4 determinaremos os casos de distribuições sobre variedades Fano de dimensão 3, cujo número de Picard é maior que 1, que provêm de uma distribuição na variedade ambiente, na qual a Fano de dimensão 3 está mergulhada. Este estudo abrirá caminho a futuros trabalhos, na direção da presente tese. Dada uma variedade Fano de dimensão 3 X , é conhecido que as seções de $\bigwedge^2 TX \cong \Omega_X^1 \otimes K_X^\vee$ parametriza todas distribuições $\mathcal{D}$ com $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$. No artigo de Belmans et al [4] os autores calculam o número de seções de $\bigwedge^2 TX$ para variedades Fano de dimensão

3, com número de Picard qualquer. Segundo descrição para as variedades Fano de dimensão 3 de [3] e [8] elas podem ser: 1) interseção completa numa variedade tórica (a **variedade ambiente**) ou 2) lugar de zeros de fibrados vetoriais homogêneos sobre variedades homogêneas que podem ser realizadas como produto de grassmannianas (a variedade ambiente). Nesta parte estudaremos a sobrejetividade do morfismo de restrição $\varphi : H^0(F, \bigwedge^{m-1} TF(\ell)) \rightarrow H^0(X, \bigwedge^2 TX)$, onde ℓ pode ser uma adequada r -upla de inteiros, para cada uma das variedades Fano de dimensão 3 sobre as quais $H^0(X, \bigwedge^2 TX) \neq 0$. O resultado desta seção é apresentado no teorema 3.1.1. Para a prova deste teorema (ver seção (3.2)) se mostra os resultados para alguns casos em destaque e os restantes seguem de contas análogas, para as quais se utilizam as proposições estabelecidos na subseção 3.2.15.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo deste trabalho $k = \mathbb{C}$, a menos que seja mencionado o contrario; assim, os espaços projetivos $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ são os espaços projetivos sobre $\mathbb{C}$.

Definição 1.0.1. *Uma **variedade Fano** X é uma variedade complexa compacta cujo **Fibrado anticanônico** $\mathcal{O}_X(-K_X) \cong \det(TX)$ é amplo, onde K_X é a classe canônica da variedade.*

Exemplo 1.0.2. *As mais conhecidas Variedades Fano são os espaços projetivos $\mathbb{P}^n$, cujo feixe anticanônico é $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$. Os feixes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ são amplos para todo $d > 0$.*

Definição 1.0.3. *Uma variedade algébrica X é **completa** se para qualquer variedade Y o morfismo de projeção $X \times Y \rightarrow Y$ é fechado.*

Uma variedade complexa é completa se e só se ela é compacta como variedade complexa. O exemplo mais comum de variedade completa é o espaço projetivo.

Definição 1.0.4. *Dado $\mathcal{F}$ um feixe coerente, o feixe **dual** de $\mathcal{F}$ é denotado e definido por $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.*

Lembremos que se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ são feixes coerentes sobre um esquema X então $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é um feixe coerente.

Definição 1.0.5. *Seja X uma variedade holomorfa. Um feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X é chamado livre de torção se para cada $x \in X$ os stalks $\mathcal{F}_x$ são $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos livres de torção; ou seja, $fa = 0$ para $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $a \in \mathcal{F}_x$ sempre implica que $a = 0$ ou $f = 0$.*

Definição 1.0.6. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre um esquema integral X . Dizemos que $\mathcal{F}$ é reflexivo se e o morfismo natural $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ é um isomorfismo.*

Observação 1.0.7. *Todo feixe localmente livre é reflexivo e todo feixe reflexivo é livre de torção.*

Proposição 1.0.8. *Seja X um esquema integral noetheriano e seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente. $\mathcal{F}$ é reflexivo se e só se ele pode ser colocado numa sequência exata curta*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

onde $\mathcal{E}$ é um feixe localmente livre e $\mathcal{H}$ é um feixe livre de torção.

Ver proposición 1.1 del artigo de Hartshorne ([13]).

Proposição 1.0.9. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}$ dois feixes localmente livres de posto r, s , respectivamente, sobre $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Então*

$$1. \bigwedge^k (\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}) = \bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i \mathcal{F} \otimes \bigwedge^j \mathcal{E}.$$

$$2. \bigwedge^k \mathcal{F} \cong \left(\bigwedge^{r-k} \mathcal{F} \right)^\vee \otimes \bigwedge^r \mathcal{F}.$$

Em particular, quando $r = 2$

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \bigwedge^2 \mathcal{F}.$$

3. Se $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ é uma sequência exata de feixes localmente livres

$$\bigwedge^s \mathcal{E} \cong \bigwedge^r \mathcal{F} \otimes \bigwedge^{s-r} \mathcal{G}.$$

4. Se $\mathcal{L}$ é um feixe invertível sobre X

$$\bigwedge^k (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) \cong \bigwedge^k \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes k}.$$

Ver livro de Hartshorne [14], capítulo 5, página 127.

Proposição 1.0.10. *Toda sequência exata curta de fibrados vetoriais holomorfos $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ onde L é um fibrado em retas, induz uma sequência exata curta da forma*

$$0 \rightarrow L \otimes \bigwedge^{i-1} F \rightarrow \bigwedge^i E \rightarrow \bigwedge^i F \rightarrow 0.$$

Ver livro de Huybrechts [15], página 75.

Proposição 1.0.11 (Künneth formula). *Sejam X, Y dois esquemas separados sobre um corpo fechado k e sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois feixes quase-coerentes sobre X e Y , respectivamente. Lembrando que $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := \pi_1^* \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{G}$ onde $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ são duas projeções. Então temos o isomorfismo*

$$H^k(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \mathcal{F}) \otimes H^j(Y, \mathcal{G}).$$

Ver proposição 9.2.4 do livro G. Kempf [19].

Seja X uma variedade algébrica que é uma interseção completa com peso. A seguinte proposição é devida a Flenner

Proposição 1.0.12 ([11] Satz 8.11, teorema 2.16 de [6]). *Seja X uma interseção completa com peso, então*

- $h^q(X, \Omega_X^q) = 1$ para $0 \leq q \leq n$, $q \neq \frac{n}{2}$.
- $h^p(X, \Omega_X^q(t)) = 0$ nos seguintes casos
 - $0 < p < n$, $p + q \neq n$ e ou $p \neq q$ ou $t \neq 0$;
 - $p + q > n$ e $t > q - p$;
 - $p + q < n$ e $t < q - p$.

Em geral nós temos a sequência exata curta para o tangente de uma subvariedade X suave em $\mathbb{P}^n$

$$0 \rightarrow TX \rightarrow T\mathbb{P}^n|_X \rightarrow \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^n} \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Lema 1.0.13. *Seja X uma Fano de dimensão 3. Denotando $H^\bullet(X, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H^i(X, \mathcal{F})$. Então*

1. $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong k[0]$.
2. $H^\bullet(X, T_X) = H^0(X, T_X) \oplus H^1(X, T_X)$.

Demonstração. Ver artigo de [3], lema 3.1. □

1.1 Distribuições

Seja X uma variedade complexa de dimensão n , definimos $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão r sobre X como a sequência exata de feixes coerentes

$$\mathcal{D} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\phi} T_X \xrightarrow{\pi} N_{\mathcal{D}} \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

onde $N_{\mathcal{D}}$ é um feixe livre de torção de posto r (genérico) chamado feixe normal da distribuição, $T_{\mathcal{D}}$ é o feixe chamado o tangente da distribuição.

Segue da definição que $T_{\mathcal{D}}$ é um feixe reflexivo.

Duas distribuições $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são isomorfas se e só se existe um isomorfismo $\beta : T_{\mathcal{D}} \rightarrow T_{\mathcal{D}'}$ tal que $\phi' \circ \beta = \phi$; isso é dizer que o morfismo ϕ faz o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathcal{D}} & & \\ \downarrow \beta & \searrow \phi & \\ & & T_X \\ & \nearrow \phi' & \\ T_{\mathcal{D}'} & & \end{array}$$

O morfismo $\phi : T_{\mathcal{D}} \rightarrow T_X$ induz um outro morfismo $\wedge^{n-r}\phi : \det(T_{\mathcal{D}}) \rightarrow \wedge^{n-r} T_X$; i.e., toda distribuição de codimensão r induz uma seção de $H^0(X, \wedge^{n-r} T_X \otimes \det(T_{\mathcal{D}})^\vee)$.

Se $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são duas distribuições isomorfas, então compondo os morfismos induzidos, temos o seguinte isomorfismo

$$\bigwedge^{n-r} \phi' \circ \det(\beta) = \bigwedge^{n-r} \phi,$$

onde $\det(\beta) = \lambda$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$, dado que $\det(T_{\mathcal{D}}) \cong \det(T_{\mathcal{D}'});$ i.e. $\bigwedge^{n-r} \phi' \cong \lambda \bigwedge^{n-r} \phi$. Portanto, qualquer classe de isomorfismo de distribuição de codimensão r induz um elemento no espaço projetivo:

$$\mathbb{P}(H^0(X, \bigwedge^{n-r} T_X \otimes \det(T_{\mathcal{D}})^\vee)) \cong \mathbb{P}(H^0(X, \Omega_X^r \otimes \det(T_X) \otimes \det(T_{\mathcal{D}})^\vee)).$$

O **Esquema Singular** da distribuição $\mathcal{D}$ é definido como o subesquema $Z \subset X$ cujo feixe de ideais $I_{Z/X}$ torcido por $\det(T_{\mathcal{D}})^\vee$ é a imagem do morfismo $\Omega^{n-r} \rightarrow \det(T_{\mathcal{D}})^\vee$ (induzido pelo morfismo $\phi^\vee : \Omega_X^1 \rightarrow T_{\mathcal{D}}^\vee$). Conjuntivamente, o podemos definir o **esquema singular** da distribuição por:

$$\text{Sing}(\mathcal{D}) := \{x \in X \mid (N_{\mathcal{D}})_x \text{ não é um } \mathcal{O}_{X,x}\text{-módulo livre}\},$$

ou seja, por definição, $\text{Sing}(\mathcal{D})$ é o conjunto singular de $N_{\mathcal{D}}$. Este é uma variedade analítica fechada de X de codimensão pelo menos dois, dado que $N_{\mathcal{D}}$ é livre de torção.

Quando o feixe tangente da distribuição é localmente livre chamamos a distribuição de **localmente livre** e quando o tangente da distribuição é fechado pelo colchete de Lie ($[\phi(T_{\mathcal{D}}), \phi(T_{\mathcal{D}})] \subset \phi(T_{\mathcal{D}})$, ou seja $T_{\mathcal{D}}$ é integrável) chamamos a distribuição de **Folheação**. Note-se que qualquer distribuição de codimensão $\dim(X) - 1$ é uma folheação.

De agora em diante, vamos considerar distribuições de codimensão 1 sobre X uma variedade Fano de dimensão 3 com número de Picard 1. Assim, a sequência (1.2) implica que

$$\mathcal{D} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\phi} TX \xrightarrow{\pi} I_{Z/X}(r) \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

onde $T_{\mathcal{D}}$ é um feixe reflexivo e r é um inteiro tal que $r := c_1(TX) - c_1(T_{\mathcal{D}})$. Note que, neste caso $N_{\mathcal{D}} = I_{Z/X}$ onde Z é o esquema singular da distribuição.

Uma distribuição de codimensão um pode ser representada por uma seção $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1(r))$, induzida pelo dual do morfismo $\pi : TX \rightarrow N_{\mathcal{D}}$. Reciprocamente, uma seção $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1(r))$ induz um morfismo de feixes $\omega : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1(r)$, tomando dual temos a “co-seção”

$$\omega^* : \Omega_X^1(r)^\vee = TX(-r) \rightarrow \mathcal{O}_X,$$

cujas imagem é o feixe de ideais $I_{Z/X}$ do esquema singular. O núcleo de ω^* é o feixe tangente da distribuição $\mathcal{D}$ torcido por $\mathcal{O}_X(-r)$.

Teorema 1.1.1 ([9], seção 1.4; teorema 2.7 [10]). *Seja $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ um espaço projetivo com peso e e seja $|A| = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Para todo $t \in \mathbb{Z}$, temos que*

1. $\alpha_t : S_t \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t))$ é bijetivo;
2. $H^p(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t)) = 0$ para todo $p \neq 0, n$;
3. $H^n(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t)) \cong S_{-t-|A|}$.

Teorema 1.1.2 ([9], seção 2.3.2; teorema 2.12 [6]). *Seja $h^p(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t)) = \dim H^p(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t))$. Então*

1. $h^0(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t)) = \sum_{i=0}^q \left((-1)^{i+q} \sum_{\#J=i} \dim_{\mathbb{C}} S_{t-a_J} \right)$, onde $J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ e $a_J = \sum_{i \in J} a_i$;
2. $h^0(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t)) = 0$ se $t < \min\{\sum_{j \in J} a_{i_j} \mid \#J = q\}$;
3. $h^p(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t)) = 0$ se $p \notin \{0, q, n\}$;
4. $h^p(\mathbb{P}, \overline{\Omega}_{\mathbb{P}}^q(t)) = 0$ se $t \neq 0$ e $p \notin \{0, n\}$.

Em particular, se $q \geq 1$ então

$$h^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^q(t)), \text{ para todo } t \leq q.$$

Proposição 1.1.3. *Seja $X = G(s, l+1)$. Se $k > l$ então $H^p(X, \Omega^q(k)) = 0$ para todo $p > 0$.*

Demonstração. Ver teorema 3.2 de ([24]) Cohomology of twisted holomorphic forms. □

Teorema 1.1.4. *Seja $X = G(s, l+1)$ e $r = l+1-s \geq s, n = \dim X = sr$. Suponha que $1 \leq k \leq l$. Então $H^p(X, \Omega^q(k)) = 0$ se alguma das seguintes condições é satisfeita.*

1. $sp \geq (s-1)q > 0$.
2. $p > n - q$.
3. $q > n - s = s(r-1)$, se $X \neq G(2, 4)$.
4. $q \leq k$ e $p > 0$.

Em particular $H^p(X, \Omega^q(k)) = 0$ se $p \geq \left(\frac{s-1}{2s-1}\right)n$.

Demonstração. Ver teorema 3.4, pág 171 de ([24]), após proposição 3.4. □

1.2 Cohomologia de $\bigwedge^r \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$

Nesta seção queremos provar a seguinte proposição, que sera utilizada no capítulo §3.

Proposição 1.2.1. *Seja $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$ o fibrado quociente universal definido pela sequência exata:*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Então

1. $\det(\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$
2. $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 2$ e $k \geq 0$.
3. Para $n = 3, 4$:
 - a) $H^i(\mathbb{P}^n, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.
 - b) $H^i(\mathbb{P}^n, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.
 - c) $H^i(\mathbb{P}^n, \bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 4$ e todo $k \geq 0$.
 - d) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k) \otimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.

Demonstração. 1. Aplicando o item 3 de (1.0.9) podemos calcular o fibrado determinante de $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}$

$$\det(\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1). \quad (1.5)$$

Dualizando a sequência (1.4), logo torcendo ela por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ temos

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1}(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k+1) \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

2. Utilizando esta sequência e passando a sequência exata longa cohomologia

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1}(k)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k+1)) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1}(k)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k+1)) \\ &\dots \\ &\rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1}(k)) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k+1)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$ para todo $i > 0$ e todo $k \geq 0$, temos que $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^n}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 2$ e todo $k \geq 0$.

3. Agora

- a) Aplicando a proposição (1.0.10) na sequência (1.6), quando $n = 4$, temos que para todo $k > 0$

$$0 \rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}(k) \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1) \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Logo as cohomologias

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1)) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1)) \\ &\rightarrow H^2(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1)) \\ &\rightarrow H^3(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) \rightarrow H^3(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow H^3(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1)) \\ &\rightarrow H^4(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) \rightarrow H^4(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow H^4(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(2k+1)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(k)) = H^i(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) = 0$ para todo $i > 1$ e todo $k \geq 0$, temos que $H^i(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.

- b) Analogamente ao item anterior, tensorizando a sequência anterior (1.8) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(k+1)$ teremos que $H^i(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.
- c) Segundo a proposição (1.0.10) temos que para todo $k > 0$

$$0 \rightarrow \bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \rightarrow \bigwedge^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}(k) \rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1) \rightarrow 0.$$

Logo as cohomologias

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^4, \bigwedge^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^4(\mathbb{P}^4, \bigwedge^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 4}(k)) &\rightarrow H^4(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(k)) = H^i(\mathbb{P}^4, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$, temos que $H^i(\mathbb{P}^4, \bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 4$ e todo $k \geq 0$.

d) Tensorizando a sequência (1.6) por $\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee$, no caso quando $n = 4$, temos que

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee \rightarrow (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k))^{\oplus 5} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k+1) \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Passando a sequências longas de cohomologias temos que $H^i(\mathbb{P}^4, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee(k) \otimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}^\vee) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.

Análogamente, podemos provar que

- $H^i(\mathbb{P}^3, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(k)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.
- $H^i(\mathbb{P}^3, \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(k) \otimes \mathcal{O}(k+1)) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.
- $H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(k) \otimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee) = 0$ para todo $i \geq 3$ e todo $k \geq 0$.

□

Capítulo 2

Distribuições de codimensão 1 localmente livres com primeira classe de Chern nula sobre variedades Fano de dimensão 3 com número de Picard igual a 1

Nesta seção consideraremos, a menos que seja mencionado o contrário, $\mathcal{D}$ como uma distribuição de codimensão um sobre X , uma variedade Fano 3-fold com $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, tal que $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre e $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$; definida pela seguinte sequência

$$\mathcal{D} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX \rightarrow \mathcal{I}_{Z/X}(r) \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

onde $r = c_1(TX) - c_1(T_{\mathcal{D}})$, e $Z = \text{Sing}(\mathcal{D})$ é o esquema singular da distribuição.

Iskovskikh [16, 17] e Mukay [22], fizeram uma classificação para Fano threefolds, com $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$:

O espaço projetivo $\mathbb{P}^3$.
A hipersuperfície quádrlica $Q^3 = X_2 \subset \mathbb{P}^4$.
A hipersuperfície cúbica $X_3 \subset \mathbb{P}^4$.
A interseção $X_{2,2}$ de duas hipersuperfícies quádrlicas em $\mathbb{P}^5$.
A interseção $X_{2,3}$ de uma quádrlica e uma cúbica em $\mathbb{P}^5$.
A interseção $X_{2,2,2}$ de três quádrlicas em $\mathbb{P}^6$.
A hipersuperfície de grau 4 no espaço projetivo com peso $X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$.
A hipersuperfície de grau 6 no espaço projetivo com peso $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$.
A interseção de um cone quadrático e uma hipersuperfície de grau 4 em $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1, 2)$.

Tabela 2.1: Fano tridimensionais com índice de Picard igual a 1

Ver apêndice do artigo de Jahnke et al. [18]

No.	r	H^3	g	Description
1	4	1	33	$\mathbb{P}^3$
2	3	2	28	$Q_3 \subset \mathbb{P}^4$ the quadric
3	2	1	5	Hypersurface of degree 6 in $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$
4	2	2	9	Hypersurface of degree 4 in $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$
5	2	3	13	$V_{2,3} \subset \mathbb{P}^4$ a cubic
6	2	4	17	$V_{2,4} \subset \mathbb{P}^5$ the intersection of 2 quadrics
7	2	5	21	$V_{2,5} \subset \mathbb{P}^6$ the intersection of the Grassmannian $Gr(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ by a $\mathbb{P}^6$
8	1	2	2	Hypersurface of degree 6 in $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$
9	1	4	3	$V_4 \subset \mathbb{P}^4$ a quartic
10	1	4	3	Complete intersection of a quadratic cone and a hypersurface of degree 4 in $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1, 2)$
11	1	6	4	$V_6 \subset \mathbb{P}^5$ the intersection of a quadric and a cubic
12	1	8	5	$V_8 \subset \mathbb{P}^6$ the intersection of three quadrics
13	1	10	6	$V_{10} \subset \mathbb{P}^7$ the intersection of the Grassmannian $Gr(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ by a $\mathbb{P}^7$
14	1	12	7	$V_{12} \subset \mathbb{P}^8$ the intersection of the Hermitian symmetric space $M = G/P \subset \mathbb{P}^{15}$ of type DIII by a $\mathbb{P}^8$
15	1	14	8	$V_{14} \subset \mathbb{P}^9$ the intersection of the Grassmannian $Gr(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ by a $\mathbb{P}^9$
16	1	16	9	$V_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$ the intersection of the Hermitian symmetric space $M = G/P \subset \mathbb{P}^{19}$ of type CI by a $\mathbb{P}^{10}$
17	1	18	10	$V_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$ is the intersection of the 5-dimensional rational homogeneous contact manifold $G_2/P \subset \mathbb{P}^{13}$ by a $\mathbb{P}^{11}$
18	1	22	12	$V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ is the zero locus of three sections of the rank 3 vector bundle $\Lambda^2 Q$, where Q is the universal quotient bundle on $Gr(7, 3)$

Tabela 2.2:

Seja $\mathcal{U}$ é o subfeixe maximal de $\mathcal{O}_{Z/X}$, de dimensão 0, definido pela seguinte sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}_{Z/X} \rightarrow \mathcal{O}_{C/X} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

onde $C \subset X$ é um sub-esquema (possivelmente vazio) de codimensão pura 2. O feixe quociente $\mathcal{O}_{C/X}$ é o feixe estrutural do sub-esquema $C \subset Z \subset X$ de dimensão pura 1 (ver a seção 5.1 de [6]).

Assim, pelo lema 3.1 de [6], dado que $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre, temos que Z tem codimensão pura 2, logo $C = Z$. Se $h^2(T_{\mathcal{D}}(-r)) = 0$ e $C \neq \emptyset$ então Z é conexo.

Do Teorema 5.6 de [6] temos

$$\begin{aligned} c_2(T_{\mathcal{D}}) &= c_2(TX) - rH \cdot K_{Q^3}^{-1} + r^2H^2 - [C] \\ c_3(T_{\mathcal{D}}) &= c_3(TX) - c_3(\mathcal{I}_{Z/X}) + rH \cdot [C] - K_{Q^3}^{-1} \cdot [C] - rH \cdot c_2(TX) + r^2H^2 \cdot K_{Q^3}^{-1} - r^3H^3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um resultado importante, que usaremos ao longo desta seção, é o seguinte

Teorema 2.0.1 (theorem 6.3 de [6]). *Seja X uma variedade Fano threefold com número de Picard 1 e seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão um. Se $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre e com $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, então $T_{\mathcal{D}}$ ou é split ou é estável.*

Segundo [[9], Theorem 3.3.4]

$$K_X \cong \mathcal{O}_X \left(\sum_{j=1}^c d_j - \sum_{i=0}^N q_i \right). \quad (2.4)$$

Em particular, quando X é Fano, seu índice é

$$i_X := \sum_{i=0}^N q_i - \sum_{j=1}^c d_j. \quad (2.5)$$

Lema 2.0.2. *Dada $X \subset \mathbb{P}(Q)$ uma variedade Fano threefold da tabela (2.1) e $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Então $i_X = r = c_1(TX) - c_1(T_{\mathcal{D}}) = c_1(TX)$ e $c_2(T_{\mathcal{D}}) = (c_2(TX) - \frac{\deg(C)}{\deg(X)} H^2)$.*

Demonstração. Suponha que $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k \subset \mathbb{P}(Q)$, onde $X_1, X_2, \dots, X_k$ são hipersuperfícies de grau $d_1, d_2, \dots, d_k$, respectivamente.

Da sequência de Euler para projetivos com peso $C(T\mathbb{P}(Q)) = \frac{C(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)}(q_i))}{C(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(X)})}$. Segue que

$$C(T\mathbb{P}(Q)) = (1 + q_0 H)(1 + q_1 H) \cdots (1 + q_n H) = 1 + (q_0 + q_1 + \dots + q_n)H + \dots$$

Por outro lado, da sequência do tangente e o co-normal $C(TX) = \frac{C(T\mathbb{P}(Q))}{\prod C(\mathcal{O}_X(d_i))}$

$$C(TX) = (1 + (q_0 + q_1 + \dots + q_n)H + \dots) (1 - d_1 H + \dots) \cdots (1 - d_k H + \dots).$$

Segue que $c_1(TX) = (q_0 + q_1 + \dots + q_n - d_1 - d_2 - \dots - d_k)H$. Então $r = \sum_{i=0}^N q_i - \sum_{j=1}^c d_j = i_X$.

Assim, $K_X^{-1} = rH$. Substituindo nas equações de (2.3), considerando nosso caso (quando $c_1 = 0$). Temos que

$$\begin{aligned} c_2(T_{\mathcal{D}}) &= c_2(TX) - rH(rH) + r^2 H^2 - [C] \\ &= c_2(TX) - [C]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Considerando $[C]$ é o ciclo fundamental do esquema singular da distribuição no anel de Chow de X . Então $[C] = mH^2$, logo $\deg(C) = \deg(X) m$. Pondo $c_2(TX) = c_2 H^2$, temos que

$$c_2(T_{\mathcal{D}}) = \left(c_2 - \frac{\deg(C)}{\deg(X)} \right) H^2. \quad (2.7)$$

□

Por outro lado, se X é uma Fano de dimensão 3 da classificação (ver tabela (2.1)), e $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão 1, com $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, sobre X ; segundo o Teorema (2.16 [6])

$$H^0(X, TX(t)) \cong H^3(X, \Omega_X^1(-t-r)) \neq 0 \quad (2.8)$$

se e só se $-t-r \leq 1-3 = -2$.

Além disso, pelo teorema (2.0.1) o tangente da distribuição, $T_{\mathcal{D}}$ é ou estável ou split. Analisando em cada caso:

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é estável. Temos que, pela desigualdade de Bogomolov, $c_2(T_{\mathcal{D}}) > 0$. Segue que

$$c_2(TX) \deg(X) > \deg(C). \quad (2.9)$$

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é não estável, ou seja é split, e $T_{\mathcal{D}}$ tem uma seção não nula (então existe $T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX$). Segue que $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$. Como $c_1 = 0$ então temos que $b = -a$. Assim, obtemos uma seção $\mathcal{O}_X \rightarrow TX(-a) \oplus TX(a)$. Temos duas possibilidades $r = 2$ ou $r = 1$.

Se $r = 2$, pelo feito linhas acima em (2.8), $a \geq 0$ ou $a \leq 0$; segue que $a = 0$.

Logo

$$T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}. \quad (2.10)$$

Se $r = 1$ então $a \geq 1$ e $a \leq 1$; segue que $a = 1$. Logo

$$T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1). \quad (2.11)$$

No primeiro caso ($r = 2$), $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. então temos que $0 = c_2 - \frac{\deg(C)}{\deg(X)}$; ou seja

$$\deg(C) = c_2(TX) \deg(X). \quad (2.12)$$

No outro caso ($r = 1$), $c_1 = c_3 = 0$ e $c_2 = -1$. então temos que $-1 = c_2 - \frac{\deg(C)}{\deg(X)}$; ou seja

$$\deg(C) = (1 + c_2(TX)) \deg(X). \quad (2.13)$$

Assim, acabamos de provar a seguinte proposição:

Proposição 2.0.3. *Dada $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão um sobre X uma variedade Fano threefold, com número de Picard 1, cujo tangente da distribuição $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre e tem $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$.*

1. Se $T_{\mathcal{D}}$ é estável

$$c_2(T_{\mathcal{D}}) \deg(X) > \deg(C).$$

2. Se $T_{\mathcal{D}}$ é não estável

a) Se $r = 2$ então $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ e $\deg(C) = c_2(TX) \deg(X)$.

b) Se $r = 1$ então $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ e $\deg(C) = (1 + c_2(TX)) \deg(X)$.

Nas seguintes seções analisaremos em cada um dos casos da classificação (2.1) a existência de distribuições que satisfazem as hipóteses do teorema (2.0.1). Os resultados são apresentados nos seguinte teorema

Teorema 2.0.4. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão um, com feixe tangente $T_{\mathcal{D}}$ localmente livre e primeira classe de Chern nula, sobre a hipersuperfície quádrlica $\mathcal{Q}^3$. Então ou $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ (Split) e o esquema Singular da distribuição é uma curva de grau 8 e gênero aritmético igual a 3, ou $T_{\mathcal{D}} = \pi^*N$ (estável), onde N é o null correlation bundle sobre $\mathbb{P}^3$, $\pi : \mathcal{Q}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ é o recobrimento duplo, e o esquema singular da distribuição é uma curva de grau 4 e gênero aritmético igual a -3 .*

Teorema 2.0.5. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de codimensão um, com feixe tangente $T_{\mathcal{D}}$ localmente livre e primeira classe de Chern nula, sobre uma variedade Fano threefold de índice $i_X = 2$. Então se verifica a seguinte tabela*

Fano threefold		$T_{\mathcal{D}}$	$\deg(\mathcal{D})$	$p_a(C)$	$c_2(T_{\mathcal{D}})$
$X_3 \subset \mathbb{P}^4$	Estável		6	-4	2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	12	-1	0
$X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$	Estável		0, 6, 12, ..., 60	$-107 - 6c_2$	12, 11, ..., 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	72	-107	0
$X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$	Estável		0, 4, 8, 12, 16	$-15 - 4c_2$	6, 5, 4, 3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	24	-15	0
$X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$	Estável		0, 8	$-17 - 4c_2$	3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	24	-17	0
$X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$	Estável		0, 4	$1 - 4c_2$	3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	12	1	0

Tabela 2.3:

2.1 Prova do Teorema 3.0.4

Nesta subseção $X = \mathcal{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ é hipersuperfície quádrlica. Assim, temos que $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(X)|_X \cong \mathcal{O}_X(2)$. Tomando classes de Chern na sequência (1.1), temos que:

$$c(T\mathcal{Q}^3) = \frac{c(T\mathbb{P}^4|_{\mathcal{Q}^3})}{c(\mathcal{O}_X(2))}.$$

Além disso temos que $c(T\mathbb{P}^4|_{Q^3}) = (1 + H)^5 = 1 + 5H + 10H^2 + 10H^3 + 5H^4 + H^5$ e $c(\mathcal{O}_X(2)) = 1 + 2H$, onde H é a classe hiperplana em Q^3 . Assim

$$c(TQ^3) = (1 + 5H + 10H^2 + 10H^3 + 5H^4 + H^5)(1 - 2H + 4H^2 - 8H^3 + \dots).$$

As classes de Chern de Q^3 são

$$\begin{aligned} c_1(TQ^3) &= 3H \\ c_2(TQ^3) &= 4H^2 \\ c_3(TQ^3) &= 2H^3. \end{aligned}$$

Segue que $r = 3$ (identificando as classes de Chern com inteiros). Além disso temos que $K_{Q^3}^{-1} = \mathcal{O}(-(2 - 4 - 1))$, logo $H \cdot K_{Q^3}^{-1} = 3H^2$. Dado que $\deg(C) = [C] \cdot H$ e $[C]$ é um 1-ciclo no anel de Chow de Q^3 , pelo que $[C] = mH^2$, temos que $\deg(C) = 2m$, pois $H^3 = 2 = \deg(Q^3)$. Assim, temos que

$$c_2(T_{\mathcal{D}}) = (4 - \frac{\deg(C)}{2})H^2. \quad (2.14)$$

Como $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre de posto 2 temos que $c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$.

Sabemos que $TX(l)$ tem seções globais não nulas para $l \gg 0$. Seja μ o mínimo inteiro tal que isso aconteça. Pelo teorema da dualidade de Serre, dado que $X = Q^3$ é uma variedade projetiva suave, então

$$h^0(X, TX(l)) = h^3(X, \Omega_X(-l) \otimes \omega_X) = h^3(X, \Omega(-l - 3)),$$

lembrando que quando X é projetivo $\omega_X^0 = \omega_X = \mathcal{O}(2 - 4 - 1)$. Pela fórmula de Bott para quádricas (ver [6]) temos que: se $k < -3 + 1$, então $h^p(X, \Omega(k)) \neq 0$ se e só se $p = 3$. Pondo $k = -l - 3$, segue que se $-l - 3 < -3 + 1$ (equivalentemente $l > -1$) então $TX(l)$ tem seções globais não nulas. Logo $\mu = 0$.

Pelo teorema (2.0.1) temos que $T_{\mathcal{D}}$ é split ou estável. Consideremos os seguintes casos:

- **Se $T_{\mathcal{D}}$ é não estável.** Suponha também que ele tem uma seção global não nula. Então ele é split, ou seja $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_X(a) \oplus \mathcal{O}_X(b)$. Como $T_{\mathcal{D}}$ tem sua primeira classe de Chern nula segue que $b = -a$. O morfismo de $T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX$ induz uma seção de $TX \otimes (\mathcal{O}_X(-a) \oplus \mathcal{O}_X(a)) = TX(-a) \oplus TX(a)$, então $a \geq 0$ e $a \leq 0$, segue que $a = 0$.

Temos que $c_1(T_{\mathcal{D}}) = c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$, logo de (2.14) $\deg(C) = 8$. Assim, C é uma curva de grau 8

- **Se $T_{\mathcal{D}}$ é estável,** então $h^0(X, T_{\mathcal{D}}) = 0$ (pelo Lema 8 de [27]). Pela desigualdade de Bogomolov $c_2(T_{\mathcal{D}}) \geq 0$, logo de 2.14

$$4 - \frac{\deg(C)}{2} \geq 0, \quad (2.15)$$

segue que $\deg(C) \leq 8$.

A segunda classe de Chern $c_2(T_{\mathcal{D}})$ é um inteiro, daí que $\deg(C) = 2, 4, 6, 8$. Então temos os seguintes casos:

Se $\deg(C) = 2$ então $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 3$.

Se $\deg(C) = 4$ então $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 2$.

Se $\deg(C) = 6$ então $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 1$.

Se $\deg(C) = 8$ então $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$.

Ou seja, nosso tangente da distribuição $T_{\mathcal{D}}$ é um fibrado estável, sobre a quádriga Q^3 , de posto 2 com possíveis classes de Chern $(c_1, c_2) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$. Pelo artigo de Giorgio Ottaviani-Michael Szurek [23], quando o espaço de Moduli $M(0, 2k - 1)$ dos fibrados estáveis sobre a quadrica Q^3 , de posto 2, com classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2k - 1$, é o vazio. Assim, só restam os casos $M(0, 0)$ e $M(0, 2)$.

- Quando $(c_1, c_2) = (0, 0)$, além disso temos que $c_3 = 0$, então o fibrado $T_{\mathcal{D}}$ é split pelo que teríamos uma contradição (estamos no caso não split), então este caso pode ser desconsiderado.
- Quando $(c_1, c_2) = (0, 2)$, além disso temos que $c_3 = 0$, segue que $T_{\mathcal{D}}(1)$ é um fibrado globalmente gerado (ver proposição 1 do artigo de I. Sols et al. [25]). Pela proposição 3.2 do artigo de M. Szurek et al. [26], segue que $T_{\mathcal{D}}$ é o pullback π^*N de um null-correlation bundle N , via o dobre cobrimento $\pi : Q^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$.

Construção. Considere uma distribuição $\mathcal{D}_N$ de grau 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cujo tangente é o null correlation bundle (ver teorema 9.5-2 do artigo de O. Calvo et al. [5]), definida pela seguinte sequência exata

$$\mathcal{D}_N : 0 \rightarrow N \rightarrow T\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathcal{I}_Z(4) \rightarrow 0$$

Então temos que $c_1(N) = 0$, $c_2(N) = 6 - \deg(C_N)$. Pelo Teorema 9.5-2 de [5] o conjunto singular da distribuição Z_N é uma curva conexa de grau 5, logo $C_N = Z_N$. Então temos que $c_2(N) = 1$.

Tomemos a distribuição pullback $\pi^*\mathcal{D}_N$, induzida pelo mapa de cobrimento duplo $\pi : Q^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$.

Lembrando que toda variedade algébrica complexa é uma variedade diferencial e então um morfismo entre variedades algébricas é uma mapa diferencial (ver GAGA, Serre). temos que a propriedade de “naturalidade” se satisfaz $c_2(\pi^*N) = \pi^*c_2(N)$ (ver pág 197 de [15] ou pág 50 [21]). Como π é um recobrimento duplo temos que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2(\pi^*N) = 2c_2(N) = 2$.

Em resumo, nos temos a seguinte tabela para as distribuições de codimensão 1 sobre a quadrica $\mathcal{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$, com tangente localmente livre e primeira classe de Chern nula.

	$T_{\mathcal{D}}$	(c_1, c_2)	$\deg(C)$
Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	$(0, 0)$	8
Estável	$\pi^* N$	$(0, 2)$	4

Tabela 2.4: $\pi : \mathcal{Q}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ recobrimento duplo, N é o null correlation bundle sobre $\mathbb{P}^3$, $C = Z$.

2.1.1 Cálculo do gênero aritmético da curva

Considere a sequência da distribuição $\mathcal{D}$ em (2.1) sobre a quadrica lisa $X = \mathcal{Q}^3$

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX \rightarrow \mathcal{I}_Z(3) \rightarrow 0$$

Dualizando temos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-3) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_Z(3), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Observe que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_Z(3), \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_C(3), \mathcal{O}_X) = \omega_C$ é o feixe dualizante da parte de codim pura 2. (A primeira igualdade é imediata das definições do C e a segunda está feita no livro do Vakil, capítulo 30).

Calculando as características de Euler temos

$$\chi(\mathcal{O}_X(-3)) - \chi(\Omega_X^1) + \chi(T_{\mathcal{D}}) - \chi(\omega_C) = 0.$$

Pelo teorema de H.R.R., lembrando que $H = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ e $\deg(H^3) = 2$ é o grau da hipersuperfície quádrlica. Assim temos que

$$\begin{aligned} & \chi(\mathcal{O}_X(-3)) = \\ &= \deg \left[\left(1 - 3H + \frac{1}{2}(9H^2) + \frac{1}{6}(-27H^3) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(3H) + \frac{1}{12}(9+4)H^2 + \frac{1}{24}(3)(4)H^3 \right) \right]_3 \\ &= \deg \left[\left(1 - 3H + \frac{9}{2}H^2 - \frac{9}{2}H^3 \right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2}H + \frac{13}{12}H^2 + \frac{1}{2}H^3 \right) \right]_3 \\ &= \deg \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} + \frac{27}{4} - \frac{9}{2} \right) H^3 \\ &= -1. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\chi(\Omega_X^1) &= \deg\left[\left(3 - 3H + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}H^3\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2}H + \frac{13}{12}H^2 + \frac{1}{2}H^3\right)\right]_3 \\
&= \deg\left(\frac{3}{2} - \frac{13}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)H^3 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Segue que:

$$\chi(T_{\mathcal{D}}) = \chi(\omega_C).$$

Dado que $\chi(\omega_C) = h^0(C, \omega_C) - h^1(C, \omega_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) - h^0(C, \mathcal{O}_C) = p_a(C) - 1$, segue que

$$\chi(T_{\mathcal{D}}) = p_a(C) - 1.$$

Novamente, do teorema de H.R.R. e como $c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$

$$\begin{aligned}
\chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg\left[\left(2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2}H + \frac{13}{12}H^2 + \frac{1}{2}H^3\right)\right]_3 \\
&= \deg\left(1 - \frac{3}{2}c_2H\right) \\
&= 2 - 3c_2(T_{\mathcal{D}})
\end{aligned}$$

dado que $c_2 = c_2(T_{\mathcal{D}})H^2$. Então $2 - 3c_2 = p_a(C) - 1$, ou seja

$$3c_2 + p_a(C) - 3 = 0, \quad (2.16)$$

ou alternativamente, relacionando com o grau da curva, dado que $c_2 = 4 - \frac{\deg(C)}{2}$

$$18 - 3\deg(C) + 2p_a(C) = 0. \quad (2.17)$$

	$T_{\mathcal{D}}$	(c_1, c_2)	$\deg(C)$	$p_a(C)$
Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	$(0, 0)$	8	3
Estável	π^*N	$(0, 2)$	4	-3

Tabela 2.5:

■

2.2 Prova do Teorema 3.0.5

Considere a distribuição $\mathcal{D}$, nas mesmas hipóteses do presente capítulo, definida pela sequência exata

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX \rightarrow \mathcal{I}_X(r) \rightarrow 0.$$

Tomando o dual $(\cdot)^\vee$ temos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-r) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}xt(I_Z(r), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Aplicamos a característica de Euler na sequência acima, e temos que

$$\chi(\mathcal{O}_X(-r)) - \chi(\Omega_X^1) + \chi(T_{\mathcal{D}}) - \chi(\omega_C) = 0 \quad (2.18)$$

além disso, temos que $\chi(\omega_C) = p_a(C) - 1$.

Pelo teorema de Hirzebruch Riemann Roch temos que

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg[\text{Ch}(\mathcal{E}) \cdot \text{td}(TX)]_n.$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Ch}(\mathcal{E}) &= r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots \\ \text{td}(\mathcal{E}) &= 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \cdots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Além disso, lembremos que temos a sequência de Euler para espaços projetivos com peso

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)}(q_i) \rightarrow T\mathbb{P}(Q) \rightarrow 0 \quad (2.20)$$

de onde podemos calcular as classes de Chern totais

$$C(T\mathbb{P}(Q)) = \frac{C(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)}(q_i))}{C(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)})}. \quad (2.21)$$

Temos também a sequência do tangente e o normal para $X \subset F$ de onde podemos calcular as classes de Chern totais

$$C(TX) = \frac{C(TF|_X)}{C(N_{X/F})} \quad (2.22)$$

2.2.1 Calculamos o gênero aritmético do lugar singular C

Estabelecemos uma identidade, como na igualdade (2.18), para cada um dos casos das Fano threefolds respectivas, notando que por hipóteses $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2H^2$, $c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$, onde c_2 é um número inteiro. Observe também que $\chi(\omega_C) = p_a(C) - 1$, e além disso

- Quando $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ é a hipersuperfície cúbica.

Assim $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(X)|_X \cong \mathcal{O}(3)$. Tomando classes de Chern na sequência (1.1), temos que:

$$C(TX) = \frac{C(T\mathbb{P}^4|X)}{C(\mathcal{O}_X(3))}.$$

Além disso temos que $C(T\mathbb{P}^4|X) = (1+H)^5 = 1+5H+10H^2+10H^3+5H^4+H^5$ e $C(\mathcal{O}_X(3)) = 1+3H$ onde H é a classe hiperplana em X_3 . Assim

$$C(TX) = (1+5H+10H^2+10H^3+5H^4+H^5)(1-3H+9H^2-27H^3+\dots).$$

As classes de Chern de X_3 são

$$c_1(TX_3) = 2H$$

$$c_2(TX_3) = 4H^2$$

$$c_3(TX_3) = (-27+45-30+10)H^2 = -2H^3.$$

Segue que $r = 2$. Além disso temos que $\omega_X = \mathcal{O}(3-4-1) = \mathcal{O}(-2)$, so $K_X^{-1} = 2H$. Como $\deg(C) = [C] \cdot H$ e $[C]$ é um 1-ciclo no anel de Chow de X_3 , temos que $[C] = mH^2$. Então $\deg(C) = 3m$, pois $H^3 = 3 = \deg(X_3)$.

Segue das equações em (2.3), ou o Teorema 5.6 de [6], que

$$c_2(T_{\mathcal{D}}) = 4 - 4 + 4 - \frac{\deg(C)}{3}. \quad (2.23)$$

Como $T_{\mathcal{D}}$ é localmente livre de posto 2 temos que $c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$.

Sabemos que $TX(l)$ tem seções globais não nulas para $l \gg 0$. Seja μ o mínimo inteiro tal que isso aconteça. Pelo teorema da dualidade de Serre, e como $X = X_3$ é uma subvariedade projetiva

$$h^0(X, TX(t)) = h^3(X, \Omega_X(-t) \otimes \omega_X) = h^3(X, \Omega(-t-2))$$

lembrando que quando X é projetivo $\omega_X^0 = \omega_X = \mathcal{O}(3-4-1)$. Pela fórmula de Bott para interseções completas com peso, proposição (1.0.12): $h^3(X, \Omega(-t-2)) \neq 0$ se e só se $-t-2 \leq -2$, ou seja $TX(l)$ tem seções globais não nulas se e só se $t \geq 0$.

Pelo teorema (2.0.1) temos que $T_{\mathcal{D}}$ é split ou estável. Consideremos os seguintes casos:

- **Se $T_{\mathcal{D}}$ é não estável.** Suponha também que ele tem uma seção não nula. Então $T_{\mathcal{D}}$ é split, assim $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$. Como $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$ segue que $a = -b$. Por outro lado $c_2(T_{\mathcal{D}}) = -a^2$. O morfismo injetivo $T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX$ induz uma seção de $TX \otimes (\mathcal{O}_X(-a) \oplus \mathcal{O}_X(a))$. Então $a \geq 0$ e $a \leq 0$. Logo $a = 0$, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$ e $T_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. Substituindo na equação (2.23), $\deg(C) = 12$ e $C = Z$ é uma curva de grau 12.

- **Se $T_{\mathcal{D}}$ é estável**, então $h^0(T_{\mathcal{D}}) = 0$. Pelo lema 1.3 em [2] temos que $4c_2 - c_1^2 d > 0$, onde $d = H^3$. Assim $c_2 > 0$, pelo que $4 - \frac{\deg(C)}{3} > 0$, ou seja $\deg(C) < 12$. Como c_2 é um inteiro $c_2 = 3, 2, 1$. Pela proposição 2.1 in [2] existe um fibrado vetorial estável, normalizado, de posto 2 sobre uma Fano threefold, de índice $i_X = 2$, se e só se $c_1 = 0$ e $c_2 \geq 2$ ou $c_1 = -1$ e $c_2 \geq 2$ “even”. Desta forma $c_2 = 3, 2$.

Considere a sequência da distribuição $\mathcal{D}$ em (2.1) sobre a cúbica lisa X

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow TX \rightarrow \mathcal{I}_Z(2) \rightarrow 0$$

com $c_1(T\mathcal{D}) = 0$.

Dualizando temos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow T_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_Z(2), \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Observe que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_Z(2), \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_C(2), \mathcal{O}_X) = \omega_C$ é o feixe dualizante da parte de codim pura 2. (a primeira igualdade é imediata das definição do C e a segunda está feita no livro do Vakil, capítulo 30)

Calculando as características de Euler temos

$$\chi(\mathcal{O}_X(-2)) - \chi(\Omega_X^1) + \chi(T_{\mathcal{D}}) - \chi(\omega_C) = 0.$$

Pelo teorema de H.R.R., lembrando que $H = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ e $\deg(H^3) = 3$ é o grau da hipersuperfície cúbica. Assim temos que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X(-2)) &= \\ &= \deg\left[\left(1 - 2H + \frac{1}{2}(4H^2) + \frac{1}{6}(-8H^3)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(2H) + \frac{1}{12}(4+4)H^2 + \frac{1}{24}8H^3\right)\right]_3 \\ &= \deg\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 2 - \frac{4}{3}\right)H^3 \\ &= -1. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \chi(\Omega_X^1) &= \deg\left[\left(3 - 2H + -2H^2 + \frac{11}{3}H^3\right) \cdot \left(1 + H + \frac{2}{3}H^2 + \frac{1}{3}H^3\right)\right]_3 \\ &= \deg\left(1 - \frac{4}{3} - 2 + \frac{11}{3}\right)H^3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\chi(T_{\mathcal{D}}) = \chi(\omega_C) + 5.$$

Dado que $\chi(\omega_C) = h^0(C, \omega_C) - h^1(C, \omega_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) - h^0(C, \mathcal{O}_C) = p_a(C) - 1$, segue que

$$\chi(T_{\mathcal{D}}) = p_a(C) + 4.$$

Novamente, do teorema de H.R.R. e como $c_3(T_{\mathcal{D}}) = 0$

$$\begin{aligned} \chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg\left[\left(2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)\right) \cdot \left(1 + H + \frac{2}{3}H^2 + \frac{1}{3}H^3\right)\right]_3 \\ &= \deg\left(\frac{2}{3} - c_2H\right) \\ &= 2 - 3c_2(T_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

dado que $c_2 = c_2(T_{\mathcal{D}})$. Então $2 - 3c_2 = 2p_a(C) + 4$, ou seja

$$3c_2 + 2p_a(C) + 2 = 0, \quad (2.24)$$

ou alternativamente, relacionando com o grau da curva, dado que $c_2 = 4 - \frac{\deg(C)}{3}$

$$14 - \deg(C) + 2p_a(C) = 0. \quad (2.25)$$

- Quando $X = X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$.

Usando a equação (2.21)

$$\begin{aligned} C(T\mathbb{P}(Q)) &= (1 + H)(1 + H)(1 + H)(1 + 2H)(1 + 3H) \\ &= (1 + 3H + 3H^2 + H^3)(1 + 5H + 6H^2) \\ &= 1 + 8H + (3 + 6 + 15)H^2 + (1 + 15 + 18)H^3 + \dots \\ &= 1 + 8H + 24H^2 + 34H^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, da sequência do Tangente e o normal (1.1), o normal $N_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)}(X_6)|_{X_6} = \mathcal{O}_{X_6}(6)$. Além disso, utilizando a equação (2.22) temos que

$$\begin{aligned} C(TX) &= \frac{C(T\mathbb{P}(Q))}{C(\mathcal{O}(6))} \\ &= (1 + 8H + 24H^2 + 34H^3 + \dots) \cdot (1 - 6H + 36H^2 - 216H^3 + \dots) \\ &= 1 + 2H + (-48 + 24 + 36)H^2 + (34 - 216 + 288 - 144)H^3 + \dots \\ &= 1 + 2H + 12H^2 - 36H^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim $c_1(TX) = 2H$, $c_2(TX) = 12H^2$, $c_3(TX) = -36H^3$, logo $c_1(\Omega_X^1) = -2H$, $c_2(\Omega_X^1) = 12H^2$, $c_3(\Omega_X^1) = 36H^3$.

Dai que

$$\begin{aligned}
\text{td}(TX) &= 1 + \frac{1}{2}2H + \frac{1}{12}(4 + 12)H^2 + \frac{1}{24}24H^3 \\
&= 1 + H + \frac{4}{3}H^2 + H^3. \\
\text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) &= 1 + (-2)H + \frac{1}{2}4H^2 + \frac{1}{6}(-8)H^3 \\
&= 1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3. \\
\text{Ch}(\Omega_X^1) &= 3 + (-2)H + \frac{1}{2}(4 - 24)H^2 + \frac{1}{6}(-8 + 72 + 108)H^3 \\
&= 3 - 2H - 10H^2 + \frac{86}{3}H^3. \\
\text{Ch}(T_{\mathcal{D}}) &= 2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)H^2 + \dots \\
&= 2 - c_2H^2 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}(-2)) &= \deg[\text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) \cdot \text{td}(TX)]_3 \\
&= \deg[(1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{4}{3}H^2 + H^3)]_3 \\
&= \deg(1 - \frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{3})H^3 \\
&= (-1) \times 6 = -6. \\
\chi(\Omega_X^1) &= \deg[(3 - 2H - 10H^2 + \frac{86}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{4}{3}H^2 + H^3)]_3 \\
&= \deg\left((3 - \frac{8}{3} - 10 + \frac{86}{3})H^3\right) \\
&= 19 \times 6 = 114. \\
\chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg[(2 - c_2H^2) \cdot (1 + H + \frac{4}{3}H^2 + H^3)]_3 \\
&= (2 - c_2) \times 6 = 12 - 6c_2.
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação (2.18)

$$-6 - 114 + (12 - 6c_2) - p_a(C) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-107 - 6c_2 = p_a(C)}$$

Agora, segundo a equação (2.7), identificando com inteiros, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2(TX) - \frac{\deg C}{\deg X}$

Por hipóteses, $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, então $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável. (Definição 1.1 de [2]).

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é estável, segundo a equação (2.9), $0 \leq \deg(C) < 12 \times 6 = 72$. Além disso, como $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável então $c_2(T_{\mathcal{D}}) \geq 2$ (proposição 2.1 [2]).

Assim, dado que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 12 - \frac{\deg(C)}{6}$ é um inteiro, temos que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 12, 11, \dots, 2$, se $\deg(C) = 0, 6, \dots, 60$, respectivamente.

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é split, segundo a equação (2.10), $\deg(C) = 12 \times 6 = 72$, logo $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$ e $p_a(C) = -107$.

- Quando $X = X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$

Analogamente

$$\begin{aligned} C(T\mathbb{P}(Q)) &= (1 + 4H)^4(1 + 2H) = (1 + 4H + 6H^2 + 4H^3 + H^4)(1 + 2H) \\ &= 1 + 6H + 14H^2 + 16H^3 + \dots \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} C(TX) &= \frac{C(\mathcal{O}(T\mathbb{P}(Q)))}{C(\mathcal{O}(4))} \\ &= (1 + 6H + 14H^2 + 16H^3 + \dots)(1 - 4H + 16H^2 - 64H^3 + \dots) \\ &= 1 + 2H + 6H^2 - 8H^3. \end{aligned}$$

Assim, $c_1(TX) = 2, c_2(TX) = 6, c_3(TX) = -8$, logo $c_1(\Omega_X^1) = -2H, c_2(\Omega_X^1) = 6H^2, c_3(\Omega_X^1) = 8H^3$.

Agora, calculamos as classes

$$\begin{aligned} \text{td}(TX) &= 1 + \frac{1}{2}2H + \frac{1}{12}(4 + 6)H^2 + \frac{1}{24}12H^3 \\ &= 1 + H + \frac{5}{6}H^2 + \frac{1}{2}H^3. \\ \text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) &= 1 + (-2)H + \frac{1}{2}4H^2 + \frac{1}{6}(-8)H^3 \\ &= 1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3. \\ \text{Ch}(\Omega_X^1) &= 3 + (-2)H + \frac{1}{2}(4 - 12)H^2 + \frac{1}{6}(-8 + 36 + 24)H^3 \\ &= 3 - 2H - 4H^2 + \frac{26}{3}H^3. \\ \text{Ch}(T_{\mathcal{D}}) &= 2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)H^2 \\ &= 2 - c_2H^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}(-2)) &= \deg[\text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) \cdot \text{td}(TX)]_3 \\
&= \deg[(1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{5}{6}H^2 + \frac{1}{2}H^3)]_3 \\
&= \deg(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 2 - \frac{4}{3})H^3 \\
&= (-\frac{1}{2}) \times 4 = -2. \\
\chi(\Omega_X^1) &= \deg[(3 - 2H - 4H^2 + \frac{26}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{5}{6}H^2 + \frac{1}{2}H^3)]_3 \\
&= \deg\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3} - 4 + \frac{26}{3}\right)H^3\right) \\
&= \frac{9}{2} \times 4 = 18. \\
\chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg[(2 - c_2H^2) \cdot (1 + H + \frac{5}{6}H^2 + \frac{1}{2}H^3)]_3 \\
&= (1 - c_2) \times 4 = 4 - 4c_2.
\end{aligned}$$

Substituindo estos valores na equação (2.18)

$$-2 - 18 + (4 - 4c_2) - p_a(C) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-15 - 4c_2 = p_a(C)}.$$

Agora, segundo a equação (2.7), identificando com inteiros, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2(TX) - \frac{\deg C}{\deg X}$.

Por hipóteses, $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, então $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável. (Definição 1.1 de [2]).

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é estável, segundo a equação (2.9), $0 \leq \deg(C) < 6 \times 4 = 24$. Além disso, como $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável então $c_2(T_{\mathcal{D}}) \geq 2$ (proposição 2.1 [2]). Assim, dado que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 6 - \frac{\deg(C)}{4}$ é um inteiro, temos que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 6, 5, 4, 3, 2$, se $\deg(C) = 0, 4, 8, 12, 16$, respectivamente.
- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é split, segundo a equação (2.10), $\deg(C) = 6 \times 4 = 24$, logo $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$ e $p_a(C) = -15$.

- Quando $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$.

Como nos caso acima $C(T\mathbb{P}^6) = (1 + H)^7 = 1 + 7H + 21H^2 + 35H^3 + \dots$. Logo

$$\begin{aligned}
C(TX) &= \frac{C(T\mathbb{P}^6)}{C(\mathcal{O}_X(2))C(\mathcal{O}_X(2))C(\mathcal{O}_X(2))} \\
&= (1 + 7H + 21H^2 + 35H^3 + \dots) \cdot (1 - 6H + 24H^2 - 80H^3 + \dots) \\
&= 1 + (7 - 6)H + (-42 + 21 + 24)H^2 + (35 - 80 + 168 - 126)H^3 + \dots \\
&= 1 + H + 3H^2 - 3H^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.28}$$

assim, $c_1(TX) = 1, c_2(TX) = 3, c_3(TX) = -3$, logo $c_1(\Omega_X^1) = -H, c_2(\Omega_X^1) = 3H^2, c_3(\Omega_X^1) = 3H^3$.

Logo

$$\begin{aligned}
 \text{td}(TX) &= 1 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{12}(1+3)H^2 + \frac{1}{24}3H^3 \\
 &= 1 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{8}H^3. \\
 \text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) &= 1 + (-2)H + \frac{1}{2}4H^2 + \frac{1}{6}(-8)H^3 \\
 &= 1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3. \\
 \text{Ch}(\Omega_X^1) &= 3 - H + \frac{1}{2}(1 - 2 \times 3)H^2 + \frac{1}{6}(-1 - 3(-1)3 + 3 \times 3)H^3 \\
 &= 3 - H - \frac{5}{2}H^2 + \frac{17}{6}H^3. \\
 \text{Ch}(T_{\mathcal{D}}) &= 2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)H^2 \\
 &= 2 - c_2H^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{O}(-2)) &= \deg[\text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) \cdot \text{td}(TX)]_3 \\
 &= \deg[(1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3) \cdot (1 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{8}H^3)]_3 \\
 &= \deg(\frac{-4}{3} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 1)H^3 \\
 &= \frac{-7}{8}8 = -7. \\
 \chi(\Omega_X^1) &= \deg[(3 - H - \frac{5}{2}H^2 + \frac{17}{6}H^3) \cdot (1 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{8}H^3)]_3 \\
 &= \deg((\frac{17}{6} - \frac{5}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{8})H^3) \\
 &= \frac{13}{8} \times 8 = 13. \\
 \chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg[(2 - c_2H^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{8}H^3)]_3 \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{c_2}{2}\right) \times 8 = 2 - 4c_2.
 \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação (2.18)

$$-7 - 13 + (2 - 4c_2) - p_a(C) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-4c_2 - 17 = p_a(C)}$$

Agora, segundo a equação (2.7), identificando com inteiros, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2(TX) - \frac{\deg C}{\deg X}$.

Por hipóteses, $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, então $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável. (Definição 1.1 de [2]).

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é estável, segundo a equação (2.9), $0 \leq \deg(C) < 3 \times 8 = 24$. Além disso, como $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável então $c_2(T_{\mathcal{D}}) \geq 2$ (proposição 2.1 [2]). Assim, dado que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 3 - \frac{\deg(C)}{8}$ é um inteiro, temos que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 3, 2$, se $\deg(C) = 0, 8$, respectivamente.
- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é split, segundo a equação (2.10), $\deg(C) = 3 \times 8 = 24$, logo $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$ e $p_a(C) = -17$.

- Quando $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$

Analogamente

$$C(T\mathbb{P}^5) = (1 + H)^6 = 1 + 6H + 15H^2 + 20H^3 + 15H^4 + 6H^5 + H^6.$$

Logo $C(TX) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{C(T\mathbb{P}^5)}{C(\mathcal{O}(2))C(\mathcal{O}(2))} \\ &= \frac{1 + 6H + 15H^2 + 20H^3 + 15H^4 + 6H^5 + H^6}{(1 + 2H)(1 + 2H)} \\ &= (1 + 6H + 15H^2 + 20H^3 + 15H^4 + 6H^5 + H^6)(1 - 4H + 12H^2 - 32H^3 + \dots) \\ &= 1 + 2H + 3H^2 + 0H^3. \end{aligned}$$

Assim $c_1(TX) = 2, c_2(TX) = 3, c_3(TX) = 0$, logo $c_1(\Omega_X^1) = -2H, c_2(\Omega_X^1) = 3H^2, c_3(\Omega_X^1) = 0$.

Agora, calculamos a classe

$$\begin{aligned} \text{td}(TX) &= 1 + \frac{1}{2}2H + \frac{1}{12}(4 + 3)H^2 + \frac{1}{24}6H^3 \\ &= 1 + H + \frac{7}{12}H^2 + \frac{1}{4}H^3. \\ \text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) &= 1 + (-2)H + \frac{1}{2}4H^2 + \frac{1}{6}(-8)H^3 \\ &= 1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3. \\ \text{Ch}(\Omega_X^1) &= 3 + (-2)H + \frac{1}{2}(4 - 6)H^2 + \frac{1}{6}(-8 + 18)H^3 \\ &= 3 - 2H - H^2 + \frac{5}{3}H^3. \\ \text{Ch}(T_{\mathcal{D}}) &= 2 + 0 + \frac{1}{2}(-2c_2)H^2 \\ &= 2 - c_2H^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}(-2)) &= \deg[\text{Ch}(\mathcal{O}(-2)) \cdot \text{td}(TX)]_3 \\
&= \deg[(1 - 2H + 2H^2 - \frac{4}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{7}{12}H^2 + \frac{1}{4}H^3)]_3 \\
&= \deg(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2 - \frac{7}{6})H^3 \\
&= \frac{-1}{4}4 = -1. \\
\chi(\Omega_X^1) &= \deg[(3 - 2H - H^2 + \frac{5}{3}H^3) \cdot (1 + H + \frac{7}{12}H^2 + \frac{1}{4}H^3)]_3 \\
&= \deg((\frac{5}{3} + \frac{3}{4} - \frac{7}{6} - 1)H^3) \\
&= \frac{1}{4} \times 4 = 1. \\
\chi(T_{\mathcal{D}}) &= \deg[(2 - c_2H^2) \cdot (1 + H + \frac{7}{12}H^2 + \frac{1}{4}H^3)]_3 \\
&= \left(\frac{1}{2} - c_2\right) \times 4 = 2 - 4c_2.
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação (2.18)

$$-1 - 1 + (2 - 4c_2) - p_a(C) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-4c_2 + 1 = p_a(C)}.$$

Agora, segundo a equação (2.7), identificando com inteiros, $c_2(T_{\mathcal{D}}) = c_2(TX) - \frac{\deg C}{\deg X}$.

Por hipóteses, $c_1(T_{\mathcal{D}}) = 0$, então $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável. (Definição 1.1 de [2]).

- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é estável, segundo a equação (2.9), $0 \leq \deg(C) < 3 \times 4 = 12$. Além disso, como $T_{\mathcal{D}}$ é normalizável então $c_2(T_{\mathcal{D}}) \geq 2$ (proposição 2.1 [2]). Assim, dado que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 3 - \frac{\deg(C)}{4}$ é um inteiro, temos que $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 3, 2$, se $\deg(C) = 0, 4$, respectivamente.
- Quando $T_{\mathcal{D}}$ é split, segundo a equação (2.10), $\deg(C) = 3 \times 4 = 12$, logo $c_2(T_{\mathcal{D}}) = 0$ e $p_a(C) = 1$.

Podemos resumir o feito nas linhas acima, nesta subseção, na seguinte tabela

Fano threefold		$T_{\mathcal{D}}$	$\deg(\mathcal{D})$	$p_a(C)$	$c_2(T_{\mathcal{D}})$
$Q \subset \mathbb{P}^4$	Estável	π^*N	4	-3	2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	8	3	0
$X_3 \subset \mathbb{P}^4$	Estável		6	-4	2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	12	-1	0
$X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$	Estável		0, 6, 12, ..., 60	$-107 - 6c_2$	12, 11, ..., 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	72	-107	0
$X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$	Estável		0, 4, 8, 12, 16	$-15 - 4c_2$	6, 5, 4, 3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	24	-15	0
$X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$	Estável		0, 8	$-17 - 4c_2$	3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	24	-17	0
$X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$	Estável		0, 4	$1 - 4c_2$	3, 2
	Split	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$	12	1	0

Tabela 2.6:

■

2.3 Quando o índice da variedade é 1

Neste caso temos que da proposição (1.1) de [18]. Se X é uma variedade Fano threefold de número de Picard 1, índice r e gênero g . Se $H^0(X, \Omega_X^1(1)) \neq 0$ então $r = 1$ e $g = 10$ ou 12 , ou seja $X = V_{18}$ ou $X = V_{22}$, respectivamente, segundo a classificação dada por Iskovski e Mukai (ver [16], [17], [22]) mostrada na tabela (2.2). Além disso, seguem os seguintes resultados

Proposição 2.3.1. *Considere as variedades V_{22} e V_{18} da classificação de Mukai das Fano threefold com $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ e índice 1.*

1. *Sobre a variedade $X = V_{22}$ se $\mathcal{D}$ é uma distribuição de codimensão um, então o tangente da distribuição $T_{\mathcal{D}}$ é igual a $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$.*
2. *Sobre a variedade $X = V_{18}$ existe uma única distribuição de codimensão um, não-integrável, $\mathcal{D}$ cujo $T_{\mathcal{D}}$ tangente da distribuição é um feixe estável induzido pela forma de contato θ_M via o morfismo de restrição, onde M é a variedade de contato onde X se encontra mergulhada.*

Demonstração. Para demonstrar 1. Pela proposição (2.5) de [18], considerando um elemento especial da família respectiva, $V = V_{22}^s$ (a Fano threefold de Mukai-Umemura), o tangente da distribuição é induzido pela seção não nula $\theta_{X \wedge Y} \in$

$H^0(V, \Omega_V^1(1))$ (onde $X, Y \in H^0(V, TV) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) é split $T_\theta = \mathcal{O}_V \oplus \mathcal{O}_V$. Além disso, foi demonstrado no item 1.3 da mesma proposição que essa distribuição pode ser integrável com $Z(d\theta \wedge \theta) = V$ ou não integrável com $Z(d\theta \wedge \theta) = O_1 \cup O_2$, dependendo se os campos X e Y geram a sub-álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ou não. Aquí $O_2 = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \cdot [t_0 t_1^{11}]$ e $O_1 = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C}) \cdot [t_1^{12}]$, sendo $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ a ação natural sobre $\mathbb{C}[t_0, t_1]$. Pelo teorema (8.1) do artigo de [20] temos que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão um com feixe canônico trivial sobre uma variedade X Fano threefold com grupo de Picard $= \mathbb{Z}$ e índice $\iota(X) = 1$ então $X = V_{22}^s$ é a Mukai-Umemura Fano threefold e $\mathcal{F}$ é induzido por uma ação algébrica do grupo afim.

Para provar 2. De [18] Seja M a variedade de contato de dimensão 5, homogênea sob o grupo excepcional G_2 . Naturalmente mergulhado em $\mathbb{P}^{13}$, o fibrado de contato de M é o divisor fundamental $\mathcal{O}_M(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{13}}|_M$.

Pela proposição 3.1 de [18] temos que $H^0(X, \Omega_X^1(1)) = \mathbb{C}$, então a seção geradora (a qual também induz a distribuição de codimensão um) é a imagem de θ_M via o morfismo de restrição

$$H^0(M, \Omega_M^1(1)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(1));$$

sendo M a variedade de contato onde X se encontra mergulhada e $\theta_M \in H^0(M, \Omega_M^1(1))$ a forma de contato (ver seção §3 de [18]).

Pela construção de Mukai, uma variedade Fano threefold de tipo V_{18} é a interseção completa de dois hiperplanos $H_1, H_2 \in |\mathcal{O}_M(1)|$ em nossa variedade de contato M . A construção de M , a variedade de contato, demonstra que a sequência de contato induz um isomorfismo $H^0(M, TM) \cong H^0(M, \mathcal{O}_M(1))$. Então seções hiperplanas e campos vetoriais podem ser identificados (ver pág 11 de [18]). Assim, a proposição (3.4) de [18] demonstra que os campos vetoriais X_1 e X_2 induzidos pelas seções hiperplanas H_1 e H_2 , respectivamente, geram uma seção

$$\theta_{X_1, X_2} = X_1 \wedge X_2|_X \in H^0(X, \bigwedge^2 TX),$$

a qual é não-nula e pode ser considerada como o pull-back da seção de contato θ_M . Além disso, o lugar de zeros de $d\theta_{X_1, X_2} \wedge \theta_{X_1, X_2}$ é o lugar dos zeros de $[X_1, X_2]|_V \in H^0(V, \mathcal{O}_V(1))$.

□

Capítulo 3

Distribuições sobre Fano threefolds de índice maior que 1

3.1 Introdução

Nas seções previas, foram encontradas algumas distribuições $\mathcal{D}$, localmente livres cujo feixe tangente tem $c_1 = 0$, sobre algumas variedades X Fano threefold (ver tabela (2.1)) que tem o número de Picard igual a 1. No caso de variedades Fano threefold com número de Picard maior que um, no artigo de Belmans et al [4] foram calculados o número de seções de $\bigwedge^2 T_X$, ou seja, a dimensão de $H^0(X, \bigwedge^2 T_X)$. Nos artigos de Carolina [1] e Janhke [18] foi provado que distribuições de codimensão um, sobre variedades Fano threefold com número de Picard um, provem de uma distribuição na variedade ambiente (onde a nossa variedade X se encontra mergulhada). Assim, nesta seção queremos encontrar quais variedades X , Fano threefold com número de Picard maior que um, possuem uma distribuição que provem de uma distribuição na variedade ambiente F de dimensão m , na qual X está mergulhada, via o morfismo de restrição

$$H^0(F, \bigwedge^{m-1} TF(\ell)) \rightarrow H^0(X, \bigwedge^2 TX) \rightarrow 0, \quad \text{para algum } \ell (\text{uma s-upla de inteiros}). \quad (3.1)$$

Para esse propósito, utilizaremos o fato que nossa variedade X pode ser descrita como o conjunto de zeros de seções de um fibrado homogêneo $\mathcal{E}$ sobre a variedade ambiente F que pode ser produto de Grassmannianas (ver [8], [4]) com $\text{codim}_F X = \text{rank}(\mathcal{E})$. Mas, nem todas as variedades X com tal descrição são fáceis de trabalhar, alguns casos são bem mais complexos que outros, pelo que aqui, só conseguimos provar em alguns casos do total. Os resultados são apresentados no seguinte teorema

Teorema 3.1.1. *Dada uma variedade Fano threefold X com número de Picard maior que 1. Seja F a variedade ambiente onde X está imersa. Seja $\varphi : H^0(F, \bigwedge^{m-1} TF(\ell)) \rightarrow H^0(X, \bigwedge^2 TX)$ o morfismo de restrição. Então*

- o morfismo φ é sobrejetivo nos seguintes casos:

$MM_{2,5}, MM_{2,9}, MM_{2,10}, MM_{2,12}, MM_{2,13}, MM_{2,14}, MM_{2,24}, MM_{2,25},$
 $MM_{2,13}, MM_{2,27}, MM_{2,29}, MM_{2,32}, MM_{2,33}, MM_{3,6}MM_{3,7}, MM_{3,8},$
 $MM_{3,10}, MM_{3,12}, MM_{3,13}, MM_{3,17}, MM_{3,24}, MM_{3,25}, MM_{3,28}, MM_{4,1},$
 $MM_{4,3}, MM_{4,6}, MM_{4,7}, MM_{4,10}, MM_{5,3}, MM_{6,1}, MM_{7,1}, MM_{8,1}, MM_{9,1}, MM_{10,1};$

- o morfismo φ não é sobrejetivo nos seguintes casos:

$MM_{2,1}, MM_{2,3}, MM_{2,11}, MM_{2,15}, MM_{2,19}, MM_{2,23}, MM_{2,30}, MM_{2,35}, MM_{3,11},$
 $MM_{3,18}, MM_{3,19}, MM_{3,23}, MM_{3,26}, MM_{3,30}MM_{3,31}, MM_{4,2}, MM_{4,4}, MM_{4,8}, MM_{4,9}.$

Aqui $MM_{\rho,n}$ corresponde a enumeração feita por Mori e Mukai das variedades Fano threefold, onde ρ é o número de Picard e n é a ordem na classificação (ver <https://www.fanography.info/>).

Antes de começar a prova do teorema vamos a resumir e dar uma ideia da prova que será realizada na seguinte seção.

Como $\bigwedge^2 TX \cong \Omega_X^1 \otimes \omega_X^\vee$, nos utilizaremos a sequência do conormal induzida pelo mergulho da nossa Fano threefold X na variedade ambiente F

$$0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \Omega_F^1|_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

e o fato que o feixe de ideais $\mathcal{I}$ restrito a X dá $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_X \cong \mathcal{E}^\vee|_X$. Dado que X é suave e localmente interseção completa com F , temos que $X \subset F^{sm}$, então $\Omega_F^1|_X$ é localmente livre. Segue que a sequência do conormal é

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\vee|_X \rightarrow \Omega_F^1|_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

é uma sequência exata curta de fibrados vetoriais sobre X .

Torcendo esta sequência pelo feixe canônico $\omega_X^\vee \cong \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X$.

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\vee|_X \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X \rightarrow \Omega_F^1|_X \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Observe que

$$\Omega_F^1|_X \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X \cong (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X \cong \left(\left(\bigwedge^{m-1} T_F \right) \otimes \det(\mathcal{E}) \right)|_X;$$

$$\Omega_X^1 \otimes (\omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X) \cong \bigwedge^2 TX.$$

Na seguinte seção, para encontrar um mapa sobrejetivo como em (3.1) realizaremos o seguinte procedimento em cada um dos casos (como será mostrado na prova do teorema 1.0.3):

1. Em primeiro lugar verificaremos se existe um morfismo sobrejetivo

$$H^0(X, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X). \quad (3.5)$$

2. Em segundo lugar, verificaremos se existe um morfismo sobrejetivo

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^0(X, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) \quad (3.6)$$

Compondo ambos morfismo então teremos o morfismo (3.1) desejado, induzido pelo morfismo da restrição.

Processo 1

- Para verificar o item (1) precisamos calcular $H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X)$ da sequência longa de cohomologia de (3.4)

$$\cdots \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X) \rightarrow \boxed{H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X)} \rightarrow \cdots$$

Por tal motivo, utilizaremos a sequência de Koszul de $\mathcal{E}^\vee$

$$0 \rightarrow \det \mathcal{E}^\vee \rightarrow \bigwedge^{\text{rank } \mathcal{E}-1} \mathcal{E}^\vee \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

torcida convenientemente por $\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}$; temos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow \bigwedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \cdots \\ &\vdots \\ \cdots \rightarrow \bigwedge^{r-k} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow \bigwedge^{r-k-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \cdots \\ &\vdots \\ \cdots \rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esta sequência (3.8) será dividida em sequências exatas curtas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &\rightarrow \bigwedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^{r-1}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{Ker}(d^{r-2}) &\rightarrow \bigwedge^{r-2} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^{r-2}) \rightarrow 0 \\ &\vdots \\ 0 \rightarrow \text{Ker}(d^2) &\rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{Ker}(d^1) &\rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^1) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{Ker}(d^0) &\rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

de cada uma das quais utilizaremos a sequência longa de cohomologia correspondente

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) & \longrightarrow & H^2(F, \text{Ker}(d^0)) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^2(F, \text{Img}(d^1)) & \xrightarrow{\quad \quad} & H^3(F, \text{Ker}(d^1)) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^3(F, \wedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^3(F, \text{Img}(d^2)) & \xrightarrow{\quad \quad} & H^4(F, \text{Ker}(d^2)) \longrightarrow \cdots \\
& & & & \vdots & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \wedge^{r-2} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \text{Img}(d^{r-2})) & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \text{Ker}(d^{r-1})) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^r(F, \wedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^r(F, \text{Img}(d^{r-1})) & \xrightarrow{\quad \quad} & H^{r+1}(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow \cdots
\end{array} \tag{3.9}$$

No caso que $H^i(F, \wedge^{i-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, r+1$ então $H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) = 0$. Assim, teremos conseguido que o morfismo (3.5) seja sobrejetivo.

- Para verificar o item (2) vamos a tomar a sequência (3.7) e torcer ela por $\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \wedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \cdots \\
\vdots \\
\cdots \rightarrow \wedge^{r-k} \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \wedge^{r-k-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \cdots \\
\vdots \\
\cdots \rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X \rightarrow 0.
\end{array} \tag{3.10}$$

Decompondo esta última sequência em sequências exatas curtas

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \bigwedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^{r-1}) \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow \text{Ker}(d^{r-2}) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \bigwedge^{r-2} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^{r-2}) \rightarrow 0 \\
\vdots \\
0 \rightarrow \text{Ker}(d^2) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^2) \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow \text{Ker}(d^1) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \text{Img}(d^1) \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow \text{Ker}(d^0) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X \rightarrow 0;
\end{array}$$

como foi feito linhas acima, passamos cada uma das sequências anteriores para

sequências longas de cohomología

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) & \longrightarrow & H^1(F, \text{Ker}(d^0)) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^1(F, \text{Img}(d^1)) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & H^2(F, \text{Ker}(d^1)) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^2(F, \Omega_F^1 \otimes \wedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^2(F, \text{Img}(d^2)) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & H^3(F, \text{Ker}(d^2)) \longrightarrow \cdots \\
& & & & \vdots & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{r-2}(F, \Omega_F^1 \otimes \wedge^{r-2} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^{r-2}(F, \text{Img}(d^{r-2})) & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \text{Ker}(d^{r-2})) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \Omega_F^1 \otimes \wedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) & \longrightarrow & H^{r-1}(F, \text{Img}(d^{r-1})) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & H^r(F, \Omega_F^1 \otimes \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow \cdots
\end{array} \tag{3.11}$$

No caso que $H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \wedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$, teremos que $h^1(F, \text{Ker}(d^0)) = 0$ (no caso contrario, precisamos estudar com mais cuidado).

Assim o morfismo (3.6) é sobrejetivo.

Compondo ambos morfismos (3.5), (3.6) obtemos o morfismo desejado (3.1)

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det \mathcal{E}|_X) \rightarrow 0. \tag{3.12}$$

Fin_Processo 1.

Por outro lado, observe que para $1 \leq k \leq r$ temos os seguintes isomorfismos (ver proposição (1.0.9))

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
\bigwedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
\bigwedge^{r-2} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
\bigwedge^{r-3} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^3 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
\bigwedge^{r-4} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^4 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
&\vdots \\
\bigwedge^{r-k} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^k \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Prova do Teorema 4.1.1

No artigo de Belmans et al. [4] foram calculadas o número de seções de $\wedge^2 TX$ sobre X , uma variedade Fano threefold com número de Picard maior do que 1. Isto

é, dizem quais Fano threefolds tem distribuições de codimensão 1, com $c_1 = 0$.

A continuação, provaremos alguns casos específicos do teorema 1.0.3.,

- Quando a variedade é produto de projetivos com peso: $MM_{2,1}, MM_{2,3}, MM_{10,1}$.
- Quando a variedade é produto de grassmannianas: $MM_{2,10}, MM_{2,14}, MM_{6,1}$.
- Quando o fibrado $\mathcal{E}$ é soma de um fibrado universal quociente torcido: $MM_{2,11}, MM_{2,19}$, os outros casos por analogia.
- Para o resto de casos, quando o fibrado $\mathcal{E}$ é soma de fibrados $\mathcal{O}(a, b, c)$ sobre uma variedade produto de projetivos $\mathbb{P}^n$: $MM_{2,5}, MM_{2,9}, MM_{2,24}, MM_{2,25}, MM_{2,27}, MM_{2,29}$ e o resto de casos por analogia, usando as proposições da seção §4.2.13

As provas, em cada caso, serão realizadas seguindo o procedimento descrito na seção anterior (§3.1).

Na seguinte tabela $\varphi : H^0(F, \bigwedge^{m-1} TF(\ell)) \rightarrow H^0(X, \bigwedge^2 TX)$, S= sobrejetiva e NS= não sobrejetiva.

X	F	$\mathcal{E}$	φ
$MM_{2,1}$	$\mathbb{P}(1^3, 2, 3) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(6, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	NS
$MM_{2,3}$	$\mathbb{P}(1^4, 2) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(4, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	NS
$MM_{2,5}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(0, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,9}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 2)$	S
$MM_{2,10}$	$G(2, 4) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(2, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,11}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 2)$	NS
$MM_{2,12}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 3}$	S
$MM_{2,13}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(0, 2)$	S
$MM_{2,14}$	$G(2, 5) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,15}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(2, 1)$	NS
$MM_{2,19}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 2}$	NS
$MM_{2,23}$	$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	NS
$MM_{2,24}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 2)$	S
$MM_{2,25}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 2)$	S
$MM_{2,27}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 2}$	S
$MM_{2,29}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(0, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,30}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$	NS
$MM_{2,32}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,33}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 1)$	S
$MM_{2,35}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1)$	NS
$MM_{3,6}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 0, 2) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1)$	S
$MM_{3,7}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(0, 1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1, 1)$	S
$MM_{3,8}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(0, 1, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 1, 0)$	S
$MM_{3,10}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 0, 2)$	S
$MM_{3,11}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 1, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{3,12}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(0, 1, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 0, 1)$	S
$MM_{3,13}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1)$	S
$MM_{3,17}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1, 1)$	S
$MM_{3,18}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{3,19}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(0, 2) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1)$	NS
$MM_{3,23}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{3,24}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1)$	S
$MM_{3,25}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1)$	S
$MM_{3,26}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{3,28}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 0, 1)$	S
$MM_{3,30}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{3,31}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(2, 0)$	NS
$MM_{4,1}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1, 1, 1, 1)$	S
$MM_{4,2}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$	$\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^4}(0, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(2, 0, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 1)$	NS
$MM_{4,3}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 0, 1, 1)$	S
$MM_{4,4}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 0, 2) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{4,6}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 0, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 0, 1, 1)$	S

$MM_{4,7}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(0, 0, 1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 0, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 0, 1)$	S
$MM_{4,8}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$	$\mathcal{O}(1, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 2, 0) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 0, 1)$	NS
$MM_{4,9}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}(1, 0, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 0, 1) \oplus \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 0, 0, 1)$	NS
$MM_{4,10}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1, 0, 0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, 1, 0, 1)$	S
$MM_{5,3}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1, 1, 0)^{\oplus 2}$	S
$MM_{6,1}$	$G(2, 5) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4}$	S
$MM_{7,1}$	$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(2, 0)^{\oplus 2}$	S
$MM_{8,1}$	$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(3, 0)$	S
$MM_{9,1}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(2, 2, 0)$	S
$MM_{10,1}$	$\mathbb{P}(1^2, 2, 3) \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(6, 0)$	S

Tabela 3.1: Distribuições sobre uma Fano de dimensão 3 cuja descrição é o conjunto de zeros de um fibrado homogêneo sobre uma variedade que é produto de grassmannianas.

3.2.1 Quando $X = MM_{2,1}$

Neste caso nossa variedade é descrita (ver Proposição 4.4 de [4]) como o blow-up de uma Fano de dimensão 3 Y , de deformação tipo $MM_{1,11}$, numa curva elíptica obtida como interseção completa de dois divisores half-anticanonical ($|-\frac{1}{2}K_X^{-1}|$), e Y é dado como uma hipersuperfície de grau 6 (sextic hypersurface) no espaço projetivo com peso $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$.

Alternativamente X pode ser descrito com uma $(1, 1)$ -seção de $F := Y \times \mathbb{P}^1$ (ver seção 18 de [7]).

Considere a sequência do conormal para a inclusão $X \hookrightarrow F$ torcida pelo fibrado em retas anticanônico, quem pela formula de adjunção é

$$\bigwedge^3 TX \cong \bigwedge^4 TF|_X \otimes \mathcal{N}_{X/F}^\vee$$

ou seja temos que

$$\omega_X^\vee \cong \omega_F^\vee|_X \otimes \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong (\omega_F^\vee \otimes \mathcal{O}_F(-X))|_X.$$

O feixe canônico $\omega_F = \pi_1^* \omega_Y \otimes \pi_2^* \omega_{\mathbb{P}^1} \cong \pi_1^* \omega_Y \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Lembrando que Y é uma hipersuperfície de grau 6 no espaço projetivo $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$ então $\omega_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(6 - (3 + 2 + 3))|_Y$. Temos que $\omega_F \cong \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)|_Y \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = \mathcal{O}_F(-2, -2)$

$$\omega_X^\vee \cong (\mathcal{O}_F(2, 2) \otimes \mathcal{O}_F(-X))|_X \cong \mathcal{O}_F(1, 1)|_X$$

que fornece

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_F^1(1, 1)|_X \rightarrow \Omega_X^1(1, 1) \rightarrow 0.$$

tomando a sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_F^1(1, 1)|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(1, 1)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots$$

e pelo lema (1.0.13) $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong k[0]$, então $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Ou seja, o morfismo (3.1) é sobrejetivo.

Ainda precisamos encontrar um mapa sobrejetivo

$$\varphi : H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(1, 1)),$$

ou seja, um mapa sobrejetivo $\varphi : H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes (\omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$. Mas pode-se verificar que $H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) = 0$. Com efeito, pela formula de Künneth

$$\begin{aligned} H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) &= H^0(F, \Omega_Y^1(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}_Y(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(1)) \\ &= H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)) \otimes \cancel{H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(1))} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Basta provar que $H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) = 0$ e a prova estará terminada. Como Y é uma hypersuperfície de grau 6 em $\mathbb{P}$ então da sequência exata do conormal torcida por $\mathcal{O}_Y(1)$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-5) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y \rightarrow \Omega_Y^1(1) \rightarrow 0$$

passando a sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^0(Y, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \rightarrow H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-5)) \rightarrow \dots$$

vemos que $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-5)) = 0$ pela fórmula de Flenner para interseções completas com peso (1.0.12). Então temos que $H^0(Y, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \cong H^0(Y, \Omega_Y^1(1))$. Considerando a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-6) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

logo torcendo ela por $\Omega_{\mathbb{P}}^1(1)$

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(-5) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y \rightarrow 0$$

passando à sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \rightarrow H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}(-5)) \rightarrow \dots$$

temos que pela formula de Bott para espaços projetivos com peso (ver [9] §2.3.2)

$$H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(-5)) = H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) = 0.$$

Finalmente temos que $H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) = 0$, logo $H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) = 0$.

Então, podemos concluir que, sobre $MM_{2,1}$ não existem distribuições de codimensão 1, com $c_1 = 0$, que provem de uma distribuição da variedade ambiente, via o morfismo de restrição.

3.2.2 Quando $X = MM_{2,3}$

Neste caso nossa variedade é descrita (ver [4]) como o blow-up de uma Fano threefold Y , de deformação tipo $MM_{1,12}$, numa curva elíptica obtida como interseção completa de dois divisores half-anticanonical ($| -\frac{1}{2}K_X^{-1}|$), e Y é dado como uma hipersuperfície de grau 4 (quartic hypersurface) no espaço projetivo com peso $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1^4, 2)$.

Alternativamente X pode ser descrito com uma $(1, 1)$ -seção de $F := Y \times \mathbb{P}^1$ (ver seção 18 de [7]).

Como na subseção anterior, pela formula de adjunção

$$\omega_X^\vee \cong \omega_F^\vee|_X \otimes \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong (\omega_F^\vee \otimes \mathcal{O}_F(-X))|_X.$$

O feixe canônico $\omega_F \cong \pi_1^* \omega_Y \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Lembrando que Y é uma hipersuperfície de grau 4 no espaço projetivo $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^4, 2)$ então $\omega_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4 - (4 + 2))|_Y$. Logo $\omega_F \cong \mathcal{O}_F(-2, -2)$ e

$$\omega_X^\vee \cong (\mathcal{O}_F(2, 2) \otimes \mathcal{O}_F(-X))|_X \cong \mathcal{O}_F(1, 1)|_X$$

que fornece a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_F^1(1, 1)|_X \rightarrow \Omega_X^1(1, 1) \rightarrow 0.$$

tomando a sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_F^1(1, 1)|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(1, 1)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots$$

e pelo lema (1.0.13) $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong k[0]$, então $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Ou seja, o morfismo (3.1) é sobrejetivo.

Precisamos encontrar um mapa sobrejetivo

$$\varphi : H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(1, 1)),$$

ou seja um mapa sobrejetivo $\varphi : H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes (\omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$. Mas pode-se verificar que $H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) = 0$. Pela formula de Künneth

$$\begin{aligned} H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) &= H^0(F, \Omega_Y^1(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}_Y(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(1)) \\ &= H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(1)). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Vamos provar que $H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) = 0$. Como Y é uma hipersuperfície de grau 4 em $\mathbb{P}$ então da sequência exata do conormal torcida por $\mathcal{O}_Y(1)$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y \rightarrow \Omega_Y^1(1) \rightarrow 0$$

passando a sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-3)) \rightarrow H^0(Y, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \rightarrow H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-3)) \rightarrow \dots$$

pela fórmula de Flenner para interseções completas com peso (proposição 1.0.12), vemos que $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-3)) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-3)) = 0$. Então temos que $H^0(Y, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \cong H^0(Y, \Omega_Y^1(1))$. Considerando a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

logo torcendo ela por $\Omega_{\mathbb{P}}^1(1)$

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(-3) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y \rightarrow 0$$

passando à sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)|_Y) \rightarrow H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(-3)) \rightarrow \dots$$

Temos que pela formula de Bott para espaços projetivos com peso (ver [9] §2.3.2)

$$H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(-3)) = H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) = 0.$$

Finalmente temos que $H^0(Y, \Omega_Y^1(1)) = 0$, logo $H^0(F, \Omega_F^1(1, 1)) = 0$.

Então, podemos concluir que, sobre $MM_{2,3}$ não existem distribuições de codimensão 1, com $c_1 = 0$, que provem de uma distribuição da variedade ambiente, via o morfismo de restrição.

3.2.3 Quando X é $MM_{10,1}$

Neste caso nossa variedade é descrita como $\mathbb{P}^1 \times \mathbf{Bl}_8\mathbb{P}^2$, onde $\mathbf{Bl}_8\mathbb{P}^2$ é descrito como uma superfície *del Pezzo* de grau 1 ou como uma superfície de grau 6, interseção completa, em $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ (ver [Descrição de Fano three-folds](#)). É descrito também como o lugar dos zeros de uma seção do fibrado $\mathcal{E} = \mathcal{O}(6, 0)$ sobre $F = \mathbb{P}(1, 1, 2, 3) \times \mathbb{P}^1$.

Como na subseção anterior, pela formula de adjunção

$$\omega_X^\vee \cong \omega_F^\vee|_X \otimes \mathcal{I}/\mathcal{I}^2,$$

onde $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong \mathcal{E}^\vee|_X$. O feixe canônico $\omega_F \cong \pi_1^*\omega_Y \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Lembrando que $Y := \mathbf{Bl}_8\mathbb{P}^2$ é uma superfície de grau 6 no espaço projetivo com peso $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ então $\omega_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(6 - (2 + 2 + 3))|_Y$. Logo $\omega_F \cong \mathcal{O}_F(-1, -2)$ e

$$\omega_X^\vee \cong (\mathcal{O}_F(1, 2) \otimes \mathcal{O}_F(6, 0))|_X \cong \mathcal{O}_F(7, 2)|_X$$

que fornece a sequência exata curta do conormal torcida por $\omega_X^\vee$.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(1, 2) \rightarrow \Omega_F^1(7, 2)|_X \rightarrow \Omega_X^1(7, 2) \rightarrow 0.$$

Tomando a sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1, 2)) \rightarrow H^0(X, \Omega_F^1(7, 2)|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(7, 2)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(1, 2)) \rightarrow \dots$$

temos que verificar se $H^1(X, \mathcal{O}_X(1, 2)) = 0$; ou seja, verificar se o morfismo (3.1) é sobrejetivo. Considere a sequência exata de Koszul de $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{O}(-6, 0)$ torcida por $\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}(1, 2)$, temos que

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5, 0) \rightarrow \mathcal{O}_F(1, 2) \rightarrow \mathcal{O}_X(1, 2) \rightarrow 0$$

tomando a sequência exata longa de cohomologias

$$\dots \rightarrow H^1(F, \mathcal{O}_F(1, 2)) \rightarrow H^1(F, \mathcal{O}_X(1, 2)) \rightarrow H^2(F, \mathcal{O}_F(-5, 0)) \rightarrow \dots \quad (3.16)$$

calculamos o grupo de cohomologia da esquerda, aplicando a formula de Künneth

$$H^1(F, \mathcal{O}_F(1, 2)) \cong H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))}^0.$$

Pelo teorema (1.1.1) temos que $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)) = 0$, assim $H^1(F, \mathcal{O}_F(1, 2)) = 0$.

Agora, calculamos o segundo grupo de cohomologia da sequência (3.16)

$$H^2(F, \mathcal{O}_F(-5, 0)) \cong H^2(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-5)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \oplus H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-5)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})}^0 \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-5)) \otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})}^0.$$

Pelo teorema (1.1.1) temos que $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-5)) = 0$; assim $H^2(F, \mathcal{O}_F(-5, 0)) = 0$.

Portanto $H^1(F, \mathcal{O}_X(1, 2)) = 0$, ou seja o morfismo (3.1) é sobrejetivo.

Agora, precisamos encontrar um mapa sobrejetivo $\varphi : H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(7, 2))$, ou seja um mapa sobrejetivo $\varphi : H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes (\omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$. Torcendo a sequência de Koszul de $\mathcal{E}^\vee$ por $\Omega_F^1(7, 2)$

$$0 \rightarrow \Omega_F^1(1, 2) \rightarrow \Omega_F^1(7, 2) \rightarrow \Omega_X^1(7, 2)|_X \rightarrow 0$$

passando a sequência exata longa de cohomologias

$$\dots \rightarrow H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)) \rightarrow H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)|_X) \rightarrow H^1(F, \Omega_F^1(1, 2)) \rightarrow \dots$$

precisamos verificar se $H^1(F, \Omega_F^1(1, 2)) = 0$. Então

$$\begin{aligned} H^1(F, \Omega_F^1(1, 2)) &\cong H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^1}(2)) \\ &\cong \cancel{H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))}^0 \oplus \\ &\quad \cancel{H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2))}^0 \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

dado que pelo teorema (1.1.2) $H^1(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(1)) = 0$. Logo o morfismo $\varphi : H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(7, 2))$ é sobrejetivo.

Verificamos também que $H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)) \neq 0$. Com efeito, pela formula de Künneth

$$H^0(F, \Omega_F^1(7, 2)) \cong H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(7)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(7)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \neq 0$$

desde que, pelo teorema (1.1.2) $H^0(\mathbb{P}, \Omega_{\mathbb{P}}^1(7)) \neq 0$ e $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \neq 0$.

3.2.4 Quando X é $MM_{2,10}$

Neste caso temos que $\mathcal{E} = \mathcal{O}(2, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$ e $F = G(2, 4) \times \mathbb{P}^1$. Temos que

$$\omega_F \cong \pi_1^* \mathcal{O}_{G(2,4)}(-4) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = \mathcal{O}(-4, -2),$$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{O}(2, 0) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) &= \bigoplus_{i+j=2} \bigwedge^i \mathcal{O}(2, 0) \otimes \bigwedge^j \mathcal{O}(1, 1) \\ &= \mathcal{O}(2, 0) \otimes \mathcal{O}(1, 1) \\ &= \mathcal{O}(3, 1). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= (\mathcal{O}(-2, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(4, 2) \otimes \mathcal{O}(3, 1) \\ &= (\mathcal{O}(-2, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(7, 3) \\ &= \mathcal{O}(5, 3) \oplus \mathcal{O}(6, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\ &= (\mathcal{O}(-2, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(4, 2) \\ &= \mathcal{O}(2, 2) \oplus \mathcal{O}(3, 1). \end{aligned}$$

Calculamos a cohomologia

$$\begin{aligned} h^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= h^1(F, \mathcal{O}(5, 3)) \oplus h^1(F, \mathcal{O}(6, 2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= h^2(F, \mathcal{O}(2, 2)) \oplus h^2(F, \mathcal{O}(3, 1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que por Künneth formula

$$\begin{aligned}
 h^1(F, \mathcal{O}(n, m)) &= \bigoplus_{i+j=1} h^i(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) h^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) \\
 &= h^0(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) \overbrace{h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}^0 + h^1(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^2(F, \mathcal{O}(n, m)) &= \bigoplus_{i+j=2} h^i(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) h^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

para quaisquer n, m inteiros positivos; dado que $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-m - 2)) = 0$, para todo m inteiro positivo. Pelo teorema (1.1.4) $h^1(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) = h^2(G(2, 4), \mathcal{O}(n)) = 0$.

De (3.9) temos que $h^2(F, \text{Kern}(d^0)) = 0$ logo segue que $h^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) = 0$.

Por outro lado $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) = H^0(F, (\Omega_{G(2,4)}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}^1) \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) =$

$$\begin{aligned}
 &= H^0(F, (\Omega_{G(2,4)}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}^1) \otimes \mathcal{O}(7, 3)) \\
 &= H^0(F, \Omega_{G(2,4)}^1(7) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}_{G(2,3)}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(7)).
 \end{aligned}$$

3.2.5 Quando $X = MM_{2,14}$

Neste caso $X = \mathcal{Z}(\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \subset F = G(2, 5) \times \mathbb{P}^1$.

Temos que $\omega_F = \mathcal{O}_{G(2,5)}(-5) \boxtimes \mathcal{O}(-2) = \mathcal{O}(-5, -2)$, $r = \text{rank}(\mathcal{E}) = 4$ e $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)$. Segundo (3.13) temos que

$$\begin{aligned}
 \det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
 \bigwedge^3 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
 \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &= \bigwedge^4 (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \cong \mathcal{O}(1, 0)^{\otimes 3} \otimes \mathcal{O}(1, 1) = \mathcal{O}(4, 1) \\
\omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &= \mathcal{O}(5, 2) \otimes \mathcal{O}(4, 1) \cong \mathcal{O}(9, 3) \\
\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee &\cong (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \otimes (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \\
&\cong (\mathcal{O}(0, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(0, 1))^{\oplus 3} \oplus (\mathcal{O}(0, -1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(0, 0)) \\
&\cong \mathcal{O}(0, 0)^{\oplus 10} \oplus \mathcal{O}(0, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(0, -1)^{\oplus 3} \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee &\cong (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \\
&\cong (\mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-2, -1))^{\oplus 3} \oplus (\mathcal{O}(-2, -1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-2, -2)) \\
&\cong \mathcal{O}(-2, -1)^{\oplus 6} \oplus \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 9} \oplus \mathcal{O}(-2, -2) \\
\bigwedge^2 \mathcal{E} &\cong \bigwedge^2 (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \cong \bigoplus_{i+j=2}^i (\bigwedge^i (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3}) \otimes \bigwedge^j \mathcal{O}(1, 1)) \quad (3.18) \\
&\cong (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \otimes \mathcal{O}(1, 1)) \oplus \left(\bigwedge^2 \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \right) \\
&\cong \mathcal{O}(2, 1)^{\oplus 3} \oplus (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 2} \otimes \mathcal{O}(1, 0)) \oplus \bigwedge^2 \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 2} \\
&\cong \mathcal{O}(2, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(2, 0)^{\oplus 3} \\
\bigwedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee &\cong (\mathcal{O}(2, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(2, 0)^{\oplus 3}) \otimes (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \\
&\cong (\mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3})^{\oplus 3} \oplus (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, -1)^{\oplus 3}) \\
&\cong \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 10} \oplus \mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 9} \oplus \mathcal{O}(1, -1)^{\oplus 3}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(5, 2) \cong \mathcal{O}(4, 2)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(4, 1) \\
\bigwedge^3 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(0, 0)^{\oplus 10} \oplus \mathcal{O}(0, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(0, -1)^{\oplus 3}) \otimes \mathcal{O}(5, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(5, 2)^{\oplus 10} \oplus \mathcal{O}(5, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(5, 1)^{\oplus 3} \\
\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(2, 1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(2, 0)^{\oplus 3}) \otimes \mathcal{O}(5, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(7, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 3} \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(-2, -1)^{\oplus 6} \oplus \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 9} \oplus \mathcal{O}(-2, -2)) \otimes \mathcal{O}(9, 3) \\
&\cong \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 6} \oplus \mathcal{O}(7, 3)^{\oplus 9} \oplus \mathcal{O}(7, 1) \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \otimes \mathcal{O}(9, 3) \\
&\cong \mathcal{O}(10, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(10, 4).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Calculamos a cohomología segundo (3.9)

$$\begin{aligned}
H^5(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^5(F, \mathcal{O}(4, 2)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(4, 1)) \\
&\cong H^5(F, \mathcal{O}(4, 2))^{\oplus 3} \oplus H^5(F, \mathcal{O}(4, 1))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
H^4(F, \bigwedge^3 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^4(F, \mathcal{O}(5, 2)^{\oplus 10} \oplus \mathcal{O}(5, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(5, 1)^{\oplus 3}) \\
&\cong H^4(F, \mathcal{O}(5, 2))^{\oplus 10} \oplus H^4(F, \mathcal{O}(5, 3))^{\oplus 3} \oplus H^4(F, \mathcal{O}(5, 1))^{\oplus 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^3(F, \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^3(F, \mathcal{O}(7, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 3}) \\
&\cong H^3(F, \mathcal{O}(7, 3))^{\oplus 3} \oplus H^3(F, \mathcal{O}(7, 2))^{\oplus 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^2(F, \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 6} \oplus \mathcal{O}(7, 3)^{\oplus 9} \oplus \mathcal{O}(7, 1)) \\
&\cong H^2(F, \mathcal{O}(7, 2))^{\oplus 6} \oplus H^2(F, \mathcal{O}(7, 3))^{\oplus 9} \oplus H^2(F, \mathcal{O}(7, 1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^1(F, \mathcal{O}(10, 3)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(10, 4)) \\
&\cong H^1(F, \mathcal{O}(10, 3))^{\oplus 3} \oplus H^1(F, \mathcal{O}(10, 4))
\end{aligned}$$

Observe que, para $p > 0$ e $a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
H^p(F, \mathcal{O}(a, b)) &\cong \bigoplus_{i+j=p} H^i(G(2, 5), \mathcal{O}(a)) \otimes H^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b)) \\
&\cong H^p(G(2, 5), \mathcal{O}(a)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b)) \\
&\cong 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Lembrando que pela proposição (1.1.3) $H^p(G(2, 5), \mathcal{O}(a)) = 0$ para todo $0 \leq a$ e $p > 0$.

Então, tomando em consideração (3.9), temos também que

$$H^i(F, \text{Kern}(d^{i-2})) = 0, \text{ para todo } i = 2, 3, 4.$$

Assim, podemos inferir que $H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) = 0$.

3.2.6 Quando $X = MM_{6,1}$

Neste caso $X = \mathcal{Z}(\mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4}) \subset F = G(2, 5) \times \mathbb{P}^1$. Além disso, temos que $\text{rank}(\mathcal{E}) = 4$ e $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4}$.

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &= \bigwedge^4 \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4} = \mathcal{O}(4, 0) \\
\omega_F &= \mathcal{O}(-5, -2) \\
\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee &\cong \bigwedge^2 \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 4} \\
&\cong \bigwedge^2 \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \oplus (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 3} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)) \\
&\cong \bigwedge^2 \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 2} \oplus (\mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 2} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)) \oplus \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 3} \\
&\cong \mathcal{O}(-2, 0) \oplus \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 3} \\
&\cong \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 6} \\
\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee &= \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 4} \otimes \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4} \\
&\cong \mathcal{O}(0, 0)^{\oplus 16} \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee &= \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 4} \otimes \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 4} \\
&\cong \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 16}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Tomando em conta (3.13)

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
&\cong \mathcal{O}(1, 0)^{\oplus 4} \otimes \mathcal{O}(5, 2) \cong \mathcal{O}(6, 2)^{\oplus 4} \\
\bigwedge^3 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{O}(0, 0)^{\oplus 16} \otimes \mathcal{O}(9, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(9, 2)^{\oplus 16} \\
\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 6} \oplus \mathcal{O}(9, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 6} \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{O}(-2, 0)^{\oplus 16} \otimes \mathcal{O}(9, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(7, 2)^{\oplus 16} \\
\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{O}(-1, 0)^{\oplus 4} \otimes \mathcal{O}(9, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(8, 2)^{\oplus 4},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

logo temos que

$$\begin{aligned}
H^5(F, \det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^5(F, \mathcal{O}(6, 2))^{\oplus 16} \\
H^4(F, \bigwedge^3 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^4(F, \mathcal{O}(9, 2))^{\oplus 16} \\
H^3(F, \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^3(F, \mathcal{O}(7, 2))^{\oplus 6} \\
H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^2(F, \mathcal{O}(7, 2))^{\oplus 16} \\
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^1(F, \mathcal{O}(8, 2))^{\oplus 4}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Por outro lado

$$H^p(F, \mathcal{O}(m, n)) = \bigoplus_{i+j=p} H^i(G(2, 5), \mathcal{O}(m)) \otimes H^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$$

Como $H^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = 0$ para todo $j > 0$ então

$$H^p(F, \mathcal{O}(m, n)) = H^p(G(2, 5), \mathcal{O}(m)) H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$$

pelo teorema (1.1.4) como $0 \leq m$ e $p > 0$ então $H^p(G(2, 5), \mathcal{O}(m)) = 0$. Assim, $H^p(F, \mathcal{O}(m, n)) = 0$ para todo $p, m, n \geq 0$. Logo $H^i(F, \text{Ker}(d^i - 2)) = 0$ para $i = 5, 4, 3, 2$. Portanto

$$H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) = 0.$$

3.2.7 Quando $X = MM_{2,11}$

Aqui $F = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$, $\mathcal{E} = \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 2)$, $\omega_F(-3, -5)$, $\dim(F) = 2 + 4 = 6$ e o posto de $\mathcal{E}$ é $r = \text{rank}(\mathcal{E}) = 3$.

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^3 (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 2)) \\
&\cong \bigwedge^2 (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}(0, 1)) \otimes \mathcal{O}(1, 2) \\
&\cong \left(\bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \mathcal{O}(2) \right) \otimes \mathcal{O}(1, 2) \\
&\cong (\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O}(1, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(2, 4).
\end{aligned}$$

Em princípio, como foi dito na Introdução (3.1), queremos calcular $H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$. Com esse objetivo, utilizando (3.1) e (3.7), calculamos

$$H^i(F, (\bigwedge^{i-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))) \text{ para todo } i > 0.$$

No entanto, observemos que

$$\begin{aligned} H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &\cong H^1(F, (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(0, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes \mathcal{O}(3, 5) \otimes \mathcal{O}(2, 4)) \\ &\cong H^1(F, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5, 8)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(4, 7)) \\ &\cong H^1(F, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8)) \\ &\cong H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5)) \oplus H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8)). \end{aligned}$$

Além disso, da sequência (1.7), quando $n = 2$ e $k = 5$

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5))^{\oplus 3} \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5)) \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Segue que, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^2}^\vee(5))$ não é zero, necessariamente. Logo $H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))$ não é zero, necessariamente. Então segue que o mapa (ver (3.12))

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X),$$

não é necessariamente sobrejetivo.

3.2.8 Quando $X = MM_{2,19}$

Aqui $F = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5$, $\mathcal{E} = \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)^{\oplus 2}$, $\omega_F(-4, -6)$, $\dim(F) = 3 + 5 = 8$ e o posto de $\mathcal{E}$ é $r = \text{rank}(\mathcal{E}) = 5$.

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^5 (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \\ &\cong \bigwedge^3 (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}(0, 1)) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \\ &\cong \left(\bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{O}(3) \right) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \\ &\cong (\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(3)) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \\ &\cong \mathcal{O}(3, 5). \end{aligned}$$

Em princípio, como foi dito na Introdução (3.1), queremos calcular $H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$. Com esse objetivo, utilizando (3.1) e (3.7), calculamos

$$H^i(F, (\bigwedge^{i-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))) \text{ para todo } i > 0.$$

No entanto, observemos que $H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \cong$

$$\begin{aligned} &\cong H^1(F, (\mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(0, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(4, 6) \otimes \mathcal{O}(3, 5)) \\ &\cong H^1(F, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7, 10)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(6, 10)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(6, 10)) \\ &\cong H^1(F, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(10)) \\ &\cong H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7)) \oplus H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(10)). \end{aligned}$$

Segue da sequência (1.7), quando $n = 3$ e $k = 7$

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7))^{\oplus 4} \rightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(8)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7)) \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

$H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{Q}_{\mathbb{P}^3}^\vee(7))$ não é zero, necessariamente. Logo $H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))$ não é zero, necessariamente. Então segue que o mapa (ver (3.12))

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X)$$

não necessariamente é sobrejetivo.

Nota: De forma análoga, nos casos: $MM_{2,15}$, $MM_{2,23}$, $MM_{2,30}$, $MM_{2,35}$, $MM_{3,11}$, $MM_{3,18}$, $MM_{3,19}$, $MM_{3,23}$, $MM_{3,26}$, $MM_{3,30}$, $MM_{3,31}$, $MM_{4,2}$, $MM_{4,4}$, $MM_{4,8}$, $MM_{4,9}$ se pode verificar que $H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))$ não é zero; o que impediria que nosso mapa (abaixo) seja sobrejetivo

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X).$$

3.2.9 Quando $X = MM_{2,5}$

Neste caso nossa variedade é descrita ([8]) como o conjunto de zeros de uma seção geral de $\mathcal{E} = \mathcal{O}(0, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$ sobre uma variedade $F = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$; ou seja $X = \mathcal{Z}(\mathcal{O}(0, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$.

Queremos calcular $h^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X)$.

Usando a sequência (3.8), dado que $\text{rank}(\mathcal{E}) = 2$.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}(d^0) \rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Img}(d^1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Passando a sequências longas de cohomologia cada uma das anteriores sequências

$$\cdots \rightarrow H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^2(F, \text{Ker}(d^0)) \rightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \rightarrow H^2(F, \text{Img}(d^1)) \rightarrow H^3(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow \cdots \quad (3.27)$$

Dado que estamos considerando $\text{Ker } d^i = \text{Img}(d^{i-1})$ e temos que

$$\omega_F \cong \pi_1^* \mathcal{O}(-2) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}(-5) = \mathcal{O}(-2, -5),$$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{O}(0, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) &= \bigoplus_{i+j=2}^i \bigwedge^i \mathcal{O}(0, 3) \otimes \bigwedge^j \mathcal{O}(1, 1) \\ &\cong \mathcal{O}(0, 3) \otimes \mathcal{O}(1, 1) \\ &= \mathcal{O}(1, 4). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= (\mathcal{O}(0, -3) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(2, 5) \otimes \mathcal{O}(1, 4) \\ &= (\mathcal{O}(0, -3) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(3, 9) \\ &= \mathcal{O}(3, 6) \oplus \mathcal{O}(2, 8). \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} =$$

$$\begin{aligned} &= (\mathcal{O}(0, -3) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes (\mathcal{O}(0, -3) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(2, 5) \otimes \mathcal{O}(1, 4) \\ &= (\mathcal{O}(0, -6) \oplus \mathcal{O}(-1, -4) \oplus \mathcal{O}(-1, -4) \oplus \mathcal{O}(-2, -2)) \otimes \mathcal{O}(3, 9) \\ &= \mathcal{O}(3, 3) \oplus \mathcal{O}(2, 5) \oplus \mathcal{O}(2, 5) \oplus \mathcal{O}(1, 7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H^3(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = \\
& = H^3(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee) \\
& = H^3(F, \mathcal{O}(2, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 4)) \\
& = \bigoplus_{i+j=3} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2)) \oplus \bigoplus_{i+j=3} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4)) \\
& = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) \otimes \cancel{H^3(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2))} \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))} \otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2))} \overset{0}{\bigoplus} \\
& \quad \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))} \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2))} \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^3(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))} \otimes \cancel{H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2))} \\
& \quad \oplus \\
& \quad H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes \cancel{H^3(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))} \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))} \otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))} \overset{0}{\bigoplus} \\
& \quad \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))} \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))} \overset{0}{\bigoplus} \cancel{H^3(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))} \otimes \cancel{H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^2(F, \mathcal{O}(3, 3) \oplus \mathcal{O}(2, 5) \oplus \mathcal{O}(2, 5) \oplus \mathcal{O}(1, 7)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= H^1(F, \mathcal{O}(3, 6)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(2, 8)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pela formula de Künneth para quaisquer n, m inteiros positivos

$$\begin{aligned}
H^r(F, \mathcal{O}(n, m)) &= \bigoplus_{i+j=r} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(m)) \\
&= \cancel{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))H^r(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(m))} \overset{0}{+} \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))H^{r-1}(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(m))} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \cancel{H^{r-1}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(m))} \overset{0}{+} \cancel{H^r(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(m))} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dado que $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(m)) = 0$ para todo $i, j > 0$.

Segue que $H^2(F, \text{Ker}(d^0)) = H^2(F, \text{Im}(d^1)) = 0$. Portanto $H^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) = 0$.

Por outro lado $h^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^4}^1) \otimes \mathcal{O}(3, 9))$ então

$$\begin{aligned}
h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^4}^1) \otimes \mathcal{O}(3, 9)) &= \\
&= h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(9)) \oplus (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(9))) \\
&= h^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(9)) + h^0(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(9)) \\
&= h^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3))h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(9)) + h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))h^0(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(9)) \\
&= 2 \times 715 + 4 \times 1760 = 8470.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Até aqui temos provado que

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^0(F, \Omega_X^1 \otimes (\omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow 0.$$

Ainda precisamos verificar que

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow 0.$$

Então precisamos calcular $h^1(F, \text{Ker}(d^0))$ usando a sequência de Koszul de $\mathcal{E}^\vee$ torcida por $\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})$, como foi descrito na seção anterior.

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \text{Ker}(d^0) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Img}(d^1) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Passando a sequências longas de cohomologia cada uma das anteriores sequências

Calculamos

$$\begin{aligned}
H^2(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^2(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^2(F, (\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^4}^1) \otimes \mathcal{O}(2, 5)) \\
&= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) \\
&= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) \oplus H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) &= \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) &\otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))} \xrightarrow{0} \\
H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) &= \cancel{H^2(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) &\otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))} \xrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes (\mathcal{O}(3, 6) \oplus \mathcal{O}(2, 8))) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 6)) \oplus H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 8)) \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(6)) \\
&\oplus \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(8))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6))}^0 \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6))}^0 \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(6)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6))}^0 \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(3)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6))}^0 \\
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \otimes H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8))}^0 \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(8))}^0 \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(8)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(2)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8))}^0 \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8))}^0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $H^2(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0$, pelo qual $H^1(F, \text{Im}(d^1)) = H^1(F, \text{Ker}(d^0)) = 0$. Temos assim, o mapa sobrejetivo

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

3.2.10 Quando X é $MM_{2,9}$

Neste caso nossa variedade é descrita ([8]) como o conjunto de zeros de uma seção geral de $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1,1) \oplus \mathcal{O}(1,2)$ sobre uma variedade $F = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$; ou seja $X = \mathcal{Z}(\mathcal{O}(1,1) \oplus \mathcal{O}(1,2)) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$.

Queremos calcular $h^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X)$. Lembrando que $\omega_X^\vee \cong (\omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X$ temos que

$$\omega_F \cong \pi_1^* \mathcal{O}(-3) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}(-4) = \mathcal{O}(-3, -4),$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{O}(1,1) \oplus \mathcal{O}(1,2)) &= \bigoplus_{i+j=2} \bigwedge^i \mathcal{O}(1,1) \otimes \bigwedge^j \mathcal{O}(1,2) \\
&= \mathcal{O}(1,1) \otimes \mathcal{O}(1,2) \\
&= \mathcal{O}(2,3).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes \mathcal{O}(3, 4) \otimes \mathcal{O}(2, 3) \\
&= (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes \mathcal{O}(5, 7) \\
&= \mathcal{O}(4, 6) \oplus \mathcal{O}(4, 5).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
&= (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes \mathcal{O}(3, 4) \\
&= \mathcal{O}(2, 3) \oplus \mathcal{O}(2, 2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E} &= (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes (\mathcal{O}(4, 6) \oplus \mathcal{O}(4, 5)) \\
&= \mathcal{O}(3, 5) \oplus \mathcal{O}(3, 4) \oplus \mathcal{O}(3, 4) \oplus \mathcal{O}(3, 3).
\end{aligned}$$

Calculamos a cohomologia

$$\begin{aligned}
h^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= h^1(F, \mathcal{O}(4, 6)) \oplus h^1(F, \mathcal{O}(4, 5)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= \\
&= h^2(F, \mathcal{O}(3, 5)) \oplus h^2(F, \mathcal{O}(3, 4)) \oplus h^2(F, \mathcal{O}(3, 4)) \oplus h^2(F, \mathcal{O}(3, 3)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^3(F, \det(\mathcal{E})^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) &= h^3(F, \mathcal{O}(2, 3)) \oplus h^3(F, \mathcal{O}(2, 2)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por Künneth formula, para quaisquer n, m inteiros positivos

$$\begin{aligned}
h^r(F, \mathcal{O}(n, m)) &= \bigoplus_{i+j=r} h^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) h^j(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(m)) \\
&= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) h^r(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(m)) + \overset{0}{\cancel{h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) h^{r-1}(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(m))}} + \dots \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dado que $h^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = h^j(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(m)) = 0$ para todo $i, j > 0$.

Portanto segue de (3.9) que $H^2(F, \text{Kern}(d^0)) = 0$, logo $h^1(X, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) = 0$.

Por outro lado $h^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^2}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1) \otimes \mathcal{O}(5, 7))$ então

$$\begin{aligned}
 h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^2}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1) \otimes \mathcal{O}(5, 7)) &= h^0(F, (\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7)) \oplus (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(7))) \\
 &= h^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7)) + h^0(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(7)) \\
 &= h^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5))h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5))h^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(7)) \\
 &= 24 \times 120 + 21 \times 216 = 7416.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ainda precisamos verificar se nosso mapa

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X)$$

é sobrejetivo. Pelo que precisamos calcular $h^1(F, \text{Ker}(d^0))$. Usamos a sequência de Koszul (3.7) de $\mathcal{E}^\vee$ torcida por $\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E}$, dividida em sequências exatas curtas, como descrito na seção anterior.

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Img}(d^1) \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow \text{Ker}(d^0) \rightarrow \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\rightarrow (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Passando a sequências longas de cohomologia cada uma das sequências anteriores

$$\begin{aligned}
 \text{Calculamos } H^2(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
 &= H^2(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee) \\
 &= H^2(F, (\Omega_{\mathbb{P}^2}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1) \otimes \mathcal{O}(3, 4)) \\
 &= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) \\
 &= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \oplus H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) &= \cancel{H^2(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) &\otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))} \xrightarrow{0} \\
H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) &= \cancel{H^2(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) &\otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))} \xrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -2)) \otimes \mathcal{O}(3, 4) \otimes \mathcal{O}(2, 3)) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes (\mathcal{O}(4, 6) \oplus \mathcal{O}(4, 5))) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(4, 6)) \oplus H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(4, 5)) \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) \\
&\oplus \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6))} \xrightarrow{0} \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) &= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^2, \cancel{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)}) &\otimes H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) \\
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5)) &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4))} \xrightarrow{0} \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5)) \\
&\oplus \\
H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4)) &\otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5))} \xrightarrow{0} \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5)) &= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5))} \xrightarrow{0} \\
&\oplus \\
H^1(\mathbb{P}^2, \cancel{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)}) &\otimes H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5))
\end{aligned}$$

Assim, temos que $H^2(F, \det(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0$, pelo qual $H^1(F, \text{Im}(d^1)) = H^1(F, \text{Ker}(d^0)) = 0$. O mapa abaixo é sobrejetivo

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

3.2.11 Quando $X = MM_{2,24}$

Aquí, $F = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1, 2)$, $\dim F = 2 + 2 = 4$, o posto de $\mathcal{E}$ é $r := \text{rank } \mathcal{E} = 1$.

Observemos que, $H^1(F, \text{Ker}(d^0)) = H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))$. Além disso

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^1(F, \mathcal{O}(-1, -2) \otimes \mathcal{O}(3, 3)) \\
&= H^1(F, \mathcal{O}(2, 1)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por outro lado } H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 3) \otimes \mathcal{O}(1, 2)) \\
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(4, 5)) \\
&= H^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}(5)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1)) \oplus H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1)) \\
&\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\text{Temos também que } H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 3)) \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}(3)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \oplus \\
&\quad H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Assim, temos que

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

3.2.12 Quando $X = MM_{2,25}$

Aquí, $F = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1, 2)$, $\dim F = 1 + 3 = 4$, o posto de $\mathcal{E}$   $r := \text{rank } \mathcal{E} = 1$.

Observemos que, $H^1(F, \text{Ker}(d^0)) = H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))$. Além disso

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^1(F, \mathcal{O}(-1, -2) \otimes \mathcal{O}(2, 4)) \\
&= H^1(F, \mathcal{O}(1, 2)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por outro lado } H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 4) \otimes \mathcal{O}(1, 2)) \\
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 6)) \\
&= H^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) \\
&\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\text{Temos também que } H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 4)) \\
&= H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}(4)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \oplus \\
&\quad H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, temos que

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

3.2.13 Quando $X = MM_{2,27}$

Aquí, $F = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}(1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$, $\dim F = 3 + 2 = 5$, o posto de $\mathcal{E}$ é $r := \text{rank } \mathcal{E} = 2$.

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^2 (\mathcal{O}(1, 1) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \\
&\cong \mathcal{O}(1, 1) \otimes \mathcal{O}(1, 1) \\
&\cong \mathcal{O}(2, 2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee &\cong (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \\
&\cong \mathcal{O}(-2, -2)^{\oplus 4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{O}(-1, -1)^{\oplus 2} \otimes \mathcal{O}(4, 3) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \\
&\cong \mathcal{O}(5, 4)^{\oplus 2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(-2, -2)^{\oplus 4}) \otimes \mathcal{O}(4, 3) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \\
&\cong (\mathcal{O}(4, 3))^{\oplus 4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\
&\cong (\mathcal{O}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(4, 3) \\
&\cong \mathcal{O}(3, 2)^{\oplus 2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^1(F, (\mathcal{O}(5, 4))^{\oplus 2}) \\
&= H^1(F, (\mathcal{O}(5, 4)))^{\oplus 2} \\
&= \left(\cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(5))} \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(4)) \oplus H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(5)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(4))} \right)^{0^{\oplus 2}}. \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^2(F, (\mathcal{O}(4, 3))^{\oplus 4}) \\
&= H^2(F, \mathcal{O}(4, 3))^{\oplus 4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)) = H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3)) = 0$ para todo $i, j > 0$ temos que

$$\begin{aligned} H^2(F, \mathcal{O}(4, 3)) &= \bigoplus_{i+j=2} (H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)) \otimes H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3))) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^3(F, \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^3(F, (\mathcal{O}(3, 2))^{\oplus 2}) \\ &= H^3(F, \mathcal{O}(3, 2))^{\oplus 2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(3)) = H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) = 0$ para todo $i, j > 0$ temos que

$$\begin{aligned} H^3(F, \mathcal{O}(3, 2)) &= \bigoplus_{i+j=2} (H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(3)) \otimes H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

Logo $H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) = 0$ e temos

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow H^0(F, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0$$

Por outro lado $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) =$

$$\begin{aligned} &= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(4, 3) \otimes \mathcal{O}(2, 2)) \\ &= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(6, 5)) \\ &= H^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5)) \oplus H^0(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5)) \\ &= H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(6)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(5)) \oplus H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(6)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(5)) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(5, 4))^{\oplus 2} \\ &= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(5, 4))^{\oplus 2} \\ &= (H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4)))^{\oplus 2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned} &H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \cong \\ &\cong H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5)) \otimes H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \oplus H^0(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(5)) \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4)) \cong \\
& \cong H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4))}^0 \oplus \cancel{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(4)) \\
& \cong 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \det \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^2(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(4, 3)) \\
&= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \oplus H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dado que $H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) = 0$ para todo $i, j > 0$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) &\cong \bigoplus_{i+j=2} H^i(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4)) \otimes H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \\
&\cong \cancel{H^2(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(4))}^0 \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \\
&\cong 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) &\cong \bigoplus_{i+j=2} H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \otimes H^j(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3)) \\
&\cong H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(3))}^0 \\
&\cong 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow 0$. Então

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

3.2.14 Quando $X = MM_{2,29}$

Aquí, $F = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}(0, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 1)$, $\dim F = 1 + 4 = 5$, o posto de $\mathcal{E}$ é $r := \text{rank } \mathcal{E} = 2$, $\omega_F = \mathcal{O}(-2, -5)$.

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &\cong \bigwedge^2 (\mathcal{O}(0, 2) \oplus \mathcal{O}(1, 1)) \\
&\cong \mathcal{O}(0, 2) \otimes \mathcal{O}(1, 1) \\
&\cong \mathcal{O}(1, 3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee &\cong (\mathcal{O}(0, -2) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes (\mathcal{O}(0, -2) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \\ &\cong \mathcal{O}(0, -4) \oplus \mathcal{O}(-1, -3) \oplus \mathcal{O}(-1, -3) \oplus \mathcal{O}(-2, -2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(0, -2) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(2, 5) \otimes \mathcal{O}(1, 3) \\ &\cong \mathcal{O}(3, 6) \oplus \mathcal{O}(2, 7).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong (\mathcal{O}(0, -4) \oplus \mathcal{O}(-1, -3)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-2, -2)) \otimes \mathcal{O}(2, 5) \otimes \mathcal{O}(1, 3) \\ &\cong (\mathcal{O}(3, 4) \oplus \mathcal{O}(2, 5)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1, 6)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \\ &\cong (\mathcal{O}(0, -2) \oplus \mathcal{O}(-1, -1)) \otimes \mathcal{O}(2, 5) \\ &\cong \mathcal{O}(2, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\ &= H^1(F, \mathcal{O}(3, 6) \oplus \mathcal{O}(2, 7)) \\ &= H^1(F, \mathcal{O}(3, 6)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}(2, 7)) \\ &= \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(3))} \overset{0}{\otimes} H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(6)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(3)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(6))} \overset{0}{\oplus} \\ &\quad \cancel{H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))} \overset{0}{\otimes} H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(7)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) \otimes \cancel{H^1(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(7))} \overset{0}{\oplus} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^2(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^2(F, \mathcal{O}(3, 4) \oplus \mathcal{O}(2, 5)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1, 6)) \\ &= H^2(F, \mathcal{O}(3, 4)) \oplus H^2(F, \mathcal{O}(2, 5))^{\oplus 2} \oplus H^2(F, \mathcal{O}(1, 6)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dado que $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) = H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(n)) = 0$ para todo $i, j, m, n > 0$ temos que

$$\begin{aligned}H^2(F, \mathcal{O}(4, 3)) &= \bigoplus_{i+j=2} (H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)) \otimes H^j(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3))) \\ &\cong 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^3(F, \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= H^3(F, \mathcal{O}(2, 3) \oplus \mathcal{O}(1, 4)) \\
&= H^3(F, \mathcal{O}(2, 3)) \oplus H^3(F, \mathcal{O}(1, 4)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
H^3(F, \mathcal{O}(2, 3)) &= \bigoplus_{i+j=3} (H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(3))) \\
&\cong 0. \\
H^3(F, \mathcal{O}(1, 4)) &= \bigoplus_{i+j=3} (H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))) \\
&\cong 0.
\end{aligned}$$

Logo $H^1(F, (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) = 0$ e temos

$$H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det \mathcal{E})|_X) \rightarrow H^0(F, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

Por outro lado $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) =$

$$\begin{aligned}
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 5) \otimes \mathcal{O}(1, 3)) \\
&= H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 8)) \\
&= H^0(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}(8)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(8)) \\
&= H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(8)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(8)) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Temos também que $H^1(F, \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) =$

$$\begin{aligned}
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes (\mathcal{O}(3, 6) \oplus \mathcal{O}(2, 7))) \\
&= H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(3, 6)) \oplus H^1(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 7)) \\
&= (H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(6))) \oplus \\
&\quad (H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(7)) \oplus H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(7))) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(6)) &\cong 0. \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(6)) &\cong 0. \\
H^1(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(7)) &\cong 0. \\
H^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(7)) &\cong 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \det \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) &= \\
&= H^2(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(2, 5)) \\
&= H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) \oplus H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

dado que $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) = H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) = 0$ para todo $i, j > 0$

$$\begin{aligned}
H^2(F, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) &\cong \bigoplus_{i+j=2} H^i(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) \\
&\cong \cancel{H^2(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(2))} \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) \\
&\cong 0. \\
H^2(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) &\cong \bigoplus_{i+j=2} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \otimes H^j(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5)) \\
&\cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \otimes \cancel{H^2(\mathbb{P}^4, \Omega_{\mathbb{P}^4}^1(5))} \xrightarrow{0} \\
&\cong 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(F, (\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}))|_X) \rightarrow 0$. Então

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_F^\vee|_X \otimes \det(\mathcal{E})|_X) \rightarrow 0.$$

Nota: No resto de casos: $MM_{2,12}, MM_{2,13}, MM_{2,32}, MM_{2,33}, MM_{3,6}, MM_{3,7}, MM_{3,8}, MM_{3,10}, MM_{3,12}, MM_{3,13}, MM_{3,17}, MM_{3,24}, MM_{3,25}, MM_{3,28}, MM_{4,1}, MM_{4,3}, MM_{4,6}, MM_{4,7}, MM_{4,10}, MM_{5,3}, MM_{7,1}, MM_{8,1}, MM_{9,1}$. De forma análoga ao processo realizado acima (assim como na seção §3.1) e junto com os resultados da seção a continuação (§3.2.15)(ver as proposições 3.2.5, 3.2.4, 3.2.2, 3.2.3) pode se verificar que o morfismo procurado (3.12) é sobrejetivo; ou seja, existe uma distribuição que provem de uma distribuição do espaço ambiente.

3.2.15 Cohomologias

Nesta subseção $F = \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k)$ com $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{Z}^+$. Note que

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{E}) &= \bigwedge^r \left(\bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k) \right) \\
&\cong \mathcal{O}(a_1 + a_2 + \cdots + a_r, b_1 + b_2 + \cdots + b_r, c_1 + c_2 + \cdots + c_r).
\end{aligned}$$

Dado $0 < i < r$

$$\bigwedge^i \mathcal{E} \cong \bigoplus \mathcal{O}(a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_i}, b_{k_1} + b_{k_2} + \cdots + b_{k_i}, c_{k_1} + c_{k_2} + \cdots + c_{k_i})$$

onde a soma percorre todos os $\{a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_i}\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$; $\{b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_i}\} \subset \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$; $\{c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_i}\} \subset \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$.

Proposição 3.2.1. *Se $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k)$ com $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{Z}^+$ tais que $0 < a_k \leq l+1, 0 < b_k \leq m+1, 0 < c_k \leq n+1$ então*

$$\begin{aligned} \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigoplus \mathcal{O}(a'_k, b'_k, c'_k), \text{ com } a'_k, b'_k, c'_k \in \mathbb{Z}^+, \\ \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \bigoplus \mathcal{O}(a'_k, b'_k, c'_k), \text{ com } a'_k, b'_k, c'_k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Demonstração. Dado $0 < i < r$ temos que

$$\begin{aligned} \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \left(\bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \right) \otimes (\mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee), \\ \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) &\cong \left(\bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \right) \otimes \omega_F^\vee. \end{aligned}$$

pelas hipóteses e a parte previa da proposição, segue que $\bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) =$

$$\begin{aligned} &\cong \left(\bigoplus \mathcal{O}(-a_{k_1} - a_{k_2} - \cdots - a_{k_i}, -b_{k_1} - b_{k_2} - \cdots - b_{k_i}, -c_{k_1} - c_{k_2} - \cdots - c_{k_i}) \right) \otimes \\ &\quad \mathcal{O}(a_1 + a_2 + \cdots + a_r, b_1 + b_2 + \cdots + b_r, c_1 + c_2 + \cdots + c_r) \\ &\cong \bigoplus \mathcal{O}(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k), \text{ com } \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

também temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee &\cong \left(\bigoplus \mathcal{O}(-a_k, -b_k, -c_k) \right) \otimes \mathcal{O}(l+1, m+1, n+1) \\ &\cong \bigoplus \mathcal{O}(\hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{c}_k), \text{ com } \hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{c}_k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

pelo que segue-se a proposição. □

Proposição 3.2.2. *$H^i(F, \mathcal{O}(a, b, c)) = 0$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i > 0$.*

Demonstração. Dado $i > 0$, pela formula de Kunneth

$$H^i(F, \mathcal{O}(a, b, c)) = \bigoplus_{s+t+u=i} (H^s(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) \otimes H^t(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) \otimes H^u(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)))$$

dado que $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ pela formula de Bott (seção 2.10 de [6])

$$H^s(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) = H^t(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) = H^u(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) = 0 \text{ para todo } s, t, u > 0$$

segue que $H^i(F, \mathcal{O}(a, b, c)) = 0$ para todo $i > 0$. □

Proposição 3.2.3. $H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(a, b, c)) = 0$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i > 0$.

Demonstração. Dado $i > 0$

$$\begin{aligned} H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(a, b, c)) &= H^i(F, \Omega_{\mathbb{P}^l}^1(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) \oplus \\ &\quad H^i(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^m}^1(b) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) \oplus \\ &\quad H^i(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c)) \\ &\cong 0, \end{aligned}$$

dado que $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ pela formula de Bott (seção 2.10 de [6])

$$H^s(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) = H^t(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) = H^u(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) = 0 \text{ para todo } s, t, u > 0$$

temos que pela formula de Kunneth

$$\begin{aligned} H^i(F, \Omega_{\mathbb{P}^l}^1(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) &= \\ &= \bigoplus_{s+t+u=i} (H^s(\mathbb{P}^l, \Omega_{\mathbb{P}^l}^1(a)) \otimes H^t(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) \otimes H^u(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c))) \\ &\cong \cancel{H^i(\mathbb{P}^l, \Omega_{\mathbb{P}^l}^1(a))} \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^i(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^m}^1(b) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) &= \\ &= \bigoplus_{s+t+u=i} (H^s(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) \otimes H^t(\mathbb{P}^m, \Omega_{\mathbb{P}^m}^1(b)) \otimes H^u(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c))) \\ &\cong H^0(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) \otimes \cancel{H^i(\mathbb{P}^m, \Omega_{\mathbb{P}^m}^1(b))} \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(c)) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^i(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c)) &= \\ &= \bigoplus_{s+t+u=i} (H^s(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) \otimes H^t(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) \otimes H^u(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c))) \\ &\cong H^0(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(a)) \otimes H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b)) \otimes \cancel{H^i(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c))} \xrightarrow{0} \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

□

Em virtude da proposição e podemos concluir que

Proposição 3.2.4. *Se $F = \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k)$ tais que $0 < a_k \leq l+1, 0 < b_k \leq m+1, 0 < c_k \leq n+1$ com $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{Z}^+$. Para todo $0 < i \leq r$*

$$H^i(F, \bigwedge^{i-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0,$$

$$H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0.$$

Podemos verificar também que

Proposição 3.2.5. *Se $F = \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k)$ tais que $0 < a_k \leq l+1, 0 < b_k \leq m+1, 0 < c_k \leq n+1$ com $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{Z}^+$. Para todo $0 < i \leq r$*

$$\Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \cong \Omega_F^1(a, b, c), \text{ onde } a, b, c > 1$$

$$H^0(F, \Omega_F^1 \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) \neq 0.$$

Observação 3.2.6. *De forma análoga podemos concluir que, se $F = \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k)$ com $a_k, b_k \in \mathbb{Z}^+$ tais que $0 < a_k \leq l+1, 0 < b_k \leq m+1$ então dado $i > 0$*

$$\bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \cong \bigoplus \mathcal{O}(a'_k, b'_k), \text{ com } a'_k, b'_k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E}) \cong \bigoplus \mathcal{O}(a'_k, b'_k), \text{ com } a'_k, b'_k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$H^i(F, \mathcal{O}(a, b)) = 0 \text{ para todo } a, b \in \mathbb{Z}^+,$$

$$H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \mathcal{O}(a, b)) = 0 \text{ para todo } a, b \in \mathbb{Z}^+,$$

$$H^i(F, \bigwedge^{i-1} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0,$$

$$H^i(F, \Omega_F^1 \otimes \bigwedge^i \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_F^\vee \otimes \det(\mathcal{E})) = 0.$$

Assim, também se satisfazem resultados análogos quando $F = \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^p$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(a_k, b_k, c_k, d_k)$ com $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{Z}^+$ tais que $0 < a_k \leq l+1, 0 < b_k \leq m+1, 0 < c_k \leq n+1, 0 < d_k \leq p+1$.

■

Referências

- [1] C. Araujo, M. Corrêa, and A. Massarenti. Codimension one fano distributions on fano manifolds. *Communications in Contemporary Mathematics*, 20(05):1750058, 2018.
- [2] E. Ballico and R. M. Miró-Roig. Rank 2 stable vector bundles on fano 3-folds of index 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 120(3):213–220, 1997.
- [3] P. Belmans, E. Fatighenti, and F. Tanturri. Bivector fields for fano 3-folds.
- [4] P. Belmans, E. Fatighenti, and F. Tanturri. Polyvector fields for fano 3-folds. *arXiv preprint arXiv:2104.07626*, 2021.
- [5] O. Calvo-Andrade, M. Corrêa, and M. Jardim. Codimension one holomorphic distributions on the projective three-space. *International Mathematics Research Notices*, 2018.
- [6] A. Cavalcante, M. Corrêa, and S. Marchesi. On holomorphic distributions on fano threefolds. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(6):106272, 2020.
- [7] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, and A. Kasprzyk. Quantum periods for 3-dimensional fano manifolds. *Geometry & Topology*, 20(1):103–256, 2016.
- [8] L. De Biase, E. Fatighenti, and F. Tanturri. Fano 3-folds from homogeneous vector bundles over grassmannians. *Revista Matemática Complutense*, pages 1–62, 2021.
- [9] I. Dolgachev. Weighted projective spaces, group actions and vector fields. *Proc. Vancouver*, pages 34–71, 1981.
- [10] A. C. Felipe. *Holomorphic distributions on fano threefolds*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018.
- [11] H. Flenner. Divisorenklassengruppen quasihomogener singularitäten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 328:128–160, 1981.
- [12] H. Galeano, M. Jardim, and A. Muniz. Codimension one distributions of degree 2 on the three-dimensional projective space. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 226(2):106840, 2022.

-
- [13] R. Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Mathematische Annalen*, 254(2):121–176, 1980.
 - [14] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [15] D. Huybrechts. *Complex geometry: an introduction*, volume 78. Springer, 2005.
 - [16] V. A. Iskovskikh. Fano 3-folds. i. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 41(3):516–562, 1977.
 - [17] V. A. Iskovskikh. Fano 3-folds. ii. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 42(3):506–549, 1978.
 - [18] P. Jahnke and I. Radloff. Fano threefolds with sections in $\omega_v^1(1)$. *arXiv preprint math/0310390*, 2003.
 - [19] G. Kempf. *Algebraic Varieties*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1993.
 - [20] F. Loray, J. V. Pereira, and F. Touzet. Foliations with trivial canonical bundle on fano 3-folds. *Mathematische Nachrichten*, 286(8-9):921–940, 2013.
 - [21] M. G. S. . R. S. Mol. *Índices de campos holomorfos e aplicações*, volume 23 CBM. Impa, 2001.
 - [22] S. Mukai. Fano 3—folds. *Complex Projective Geometry: Selected Papers*, 179:255, 1992.
 - [23] G. Ottaviani and M. Szurek. On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on q^3 . *Annali di Matematica pura ed applicata*, 167(1):191–241, 1994.
 - [24] D. M. Snow. Cohomology of twisted holomorphic forms on grassmann manifolds and quadric hypersurfaces. *Mathematische Annalen*, 276(1):159–176, 1986.
 - [25] I. Sols, M. Szurek, and J. A. Wiśniewski. Rank-2 fano bundles over a smooth quadric q_3 . *Pacific Journal of Mathematics*, 148(1):153–159, 1991.
 - [26] M. Szurek and J. Wisniewski. Fano bundles over p_3 and q_3 . *Pacific journal of mathematics*, 141(1):197–208, 1990.
 - [27] P. Vermeire. Stable reflexive sheaves on smooth projective 3-folds. *Pacific J. Math*, 219:391–398, 2005.