

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jorge Henrique Mendonça Lemos

Cotas assintóticas para os Números de Ramsey diagonais

Belo Horizonte
2022

Jorge Henrique Mendonça Lemos

COTAS ASSINTÓTICAS PARA OS NÚMEROS DE RAMSEY DIAGONAIS

Monografia apresentada ao Programa de Especialização em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis

Belo Horizonte
2022

Lemos, Jorge Henrique Mendonça.

L557c

Cotas assintóticas para os números de Ramsey diagonais
[recurso eletrônico] / Jorge Henrique Mendonça Lemos – 2022.
1 recurso online (42 f. il.) : pdf.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 42.

1. Matemática. 2. Teoria dos grafos. 4. Números de Ramsey – Teoria assintótica. I. Sanchis, Rémy de Paiva.
II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

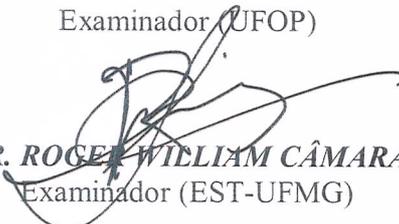
CDU 51(043)

ATA DA DEFESA DE MONOGRAFIA DO ALUNO JORGE HENRIQUE MENDONÇA LEMOS, REGULARMENTE MATRICULADO NO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 24 DE MARÇO DE 2022.

Aos vinte e quatro dias do mês de março de 2022, às 14h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link meet.google.com/gsw-mdac-iih (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesas de trabalhos durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Coordenação do curso de Especialização em Matemática, para julgar a defesa de monografia do aluno **Jorge Henrique Mendonça Lemos**, intitulada: "*Cotas assintóticas para os Números de Ramsey diagonais*", requisito final para obtenção do Grau de Especialista em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Rémy de Paiva Sanchis, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, sem ressalvas e por unanimidade, com nota 90 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 24 de março de 2022.


PROF. DR. RÉMY DE PAIVA SANCHIS
Orientador (UFMG)


PROF. DR. CRISTIANO SANTOS BENJAMIN
Examinador (UFOP)


PROF. DR. ROGER WILLIAM CÂMARA SILVA
Examinador (EST-UFMG)

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados a Deus.

Em segundo lugar, aos meus pais, irmã e Daniela Botelho por todo apoio, carinho e incentivo que prestaram.

Ao meu coordenador Remy Sanchis pela paciência, carinho e ensinamentos. Ao meu amigo Eduardo Pimenta por todo o auxílio na monografia e na especialização.

E ao professor Bernardo Nunes que, através de suas aulas, despertou o meu desejo do estudo de combinatória.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar cotas assintóticas para os números de Ramsey diagonais. Para a obtenção de uma cota inferior, utilizaremos o chamado “Método Probabilístico” de Erdős, mais especificamente, utilizaremos o Lema Local de Lovász e para cota superior o teorema de Erdős-Szekeres.

Palavras-chave: Ramsey; cota; grafo.

Abstract

This thesis aims to establish asymptotic bounds for the diagonal Ramsey numbers. For the lower bound, we employ the Probabilistic Method introduced by Erdős, specifically applying Lovász's Local Lemma. For the upper bound, we make use of the Erdős–Szekeres theorem. Keywords: Ramsey, bounds, graph.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Grafos	7
1.2	Notação de Bachmann–Landau	8
2	O Teorema de Ramsey	10
2.1	Números de Ramsey	10
2.2	A Cota de Erdős-Szekeres	14
2.3	Generalização dos Números de Ramsey	16
3	O Método Probabilístico	18
3.1	Grafos aleatórios	18
3.2	Variáveis aleatórias	20
3.3	Esperança	21
3.4	Lema do cruzamento	23
3.5	Uma cota inferior elementar para Números de Ramsey diagonais	28
4	Cotas inferiores da diagonal de Ramsey	30
4.1	As Cotas de Erdős	30
4.2	O Lema Local de Lovász e a cota de Spencer	32
4.3	Análise assintótica das cotas de Erdős e Spencer	36
5	Conclusão	40
	Referências	41

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Ramsey é o ramo da matemática que estuda as condições necessárias para que uma estrutura possua algumas características desejadas. Esta teoria aparece em várias áreas da matemática como Análise, Teoria dos Números, Geometria, entre outros. Nosso foco na Teoria de Ramsey nesta monografia será em grafos.

1.1 Grafos

Definimos um grafo G como sendo um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto de vértices e o conjunto $E(G)$ de elos, onde cada elo é um par não ordenado de vértices distintos de $V(G)$. Com intuito de simplificar a notação, podemos utilizar V e E como sendo o conjunto de vértices e elos respectivamente.

Denotaremos um elo e de E formado por dois vértices u e v por $e = uv$. Neste caso, diremos que u e v são as pontas de e . Dois vértices u e v serão vizinhos se existe um elo e pertencente a $E(G)$ tal que $uv = e$. O grau de um vértice v é dado pelo número de elos de $E(G)$ tais que, v é uma das pontas destes elos.

Definimos um passeio de um grafo G como sendo uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{l-1} e_l v_l$ tal que, os termos são alternados por vértices e elos de G , não necessariamente distintos, e v_i e v_{i-1} são as pontas de e_i para todo $1 \leq i \leq l$. Um caminho é um passeio que não possui vértices repetidos e o termo inicial e final da sequência W são distintos. Um ciclo é um passeio que não possui vértices repetidos, exceto o vértice inicial e o vértice final da sequência.

Um grafo completo é um grafo com todos os elos possíveis, ou seja, $\forall u, v \in V$,

$\exists e \in E; uv = e$. Se $n = |V(G)|$, a notação usual para este grafo é K_n e dado um grafo G , definimos o complemento de G como sendo o grafo H com $V(H) = V(G)$, e $\forall v, w \in V(H), vw \in E(H) \Leftrightarrow vw \notin E(G)$. A notação para o complemento do grafo G será G^c .

Um grafo será chamado bipartido se existirem dois subconjuntos A e B com $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ e para todo $uv \in E$, $u \in A$ e $v \in B$ ou $u \in B$ e $v \in A$.

Um grafo conexo por caminhos é um grafo com a propriedade de qualquer par de vértices possui um caminho entre eles. Uma árvore é um grafo conexo por caminhos sem ciclos e uma estrela é uma árvore com um único vértice com grau $n \geq 1$ e o restante igual a um.

Definimos um subgrafo H de um grafo G , como sendo o par ordenado $(V(H), E(H))$, tal que, $V(H) \subseteq V(G)$ e se $vw \in E(H)$, então $vw \in E(G)$. No caso particular onde $vw \in E(H)$ se, e somente se, $vw \in E(G)$, H será um subgrafo induzido.

Um conjunto $I \subseteq V$ será estável se para todo par de vértices distintos de I , não existe um elo incidente a estes vértices pertencente a E , ou seja, $\forall v, w \in I, vw \notin E$. Um subconjunto $J \subset V$ será um clique se para todo par de vértices distintos de J , existe um elo adjacente a este vértice pertencente a E , ou seja, $\forall v, w \in J, vw \in E$. Definimos o número de estabilidade como sendo o número máximo de vértices de um conjunto estável e o número clique o número máximo de vértices de um clique.

1.2 Notação de Bachmann–Landau

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de números reais positivos. Dizemos que a_n é assintótica a b_n e escrevemos $a_n \sim b_n$ se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Exemplos

a) $(n + 1)^3 \sim n^3$

b) $e^n + \sin(3n^4) - \sqrt{2 - n^2} \sim e^n$

c) $7n^{\frac{5}{2}} + 18n^2 \log^3 n + 98 \sim 7n^{\frac{5}{2}}$

Ao invés de sequências, podemos falar de funções, porém como estamos lidando com conceitos combinatórios, as variáveis são inteiras o que motiva o uso de sequências. A

utilização de sequências assintóticas nos permite focar apenas no termo de maior ordem, desta forma, a análise do comportamento da sequência se torna mais simples.

Escrevemos $a_n = O(b_n)$ e lemos a_n é “ozãõ” de b_n , se existe $C \in \mathbb{R}_+$, tal que para todo n suficientemente grande.

$$a_n \leq Cb_n.$$

Isto é equivalente a dizer que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$$

Exemplos

- a) $6n^4 - 3n^2 + 7 = O(n^4)$
- b) $7n^{\frac{5}{2}} + 18n^2 \log^3 n + 98 = O(n^{\frac{5}{2}})$
- c) $4^n = O(8^n)$

Escrevemos $a_n = o(b_n)$ e lemos a_n é “ozinho” de b_n se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Exemplos

- a) $7n^{\frac{5}{2}} + 18n^2 \log^3 n + 98 = o(n^4)$
- b) $e^n + \sin(3n^4) - \sqrt{2 - n^2} = o(n!)$
- c) $\log(n) = o(n)$

Uma aplicação importante da notação de Bachmann-Landau que utilizaremos será a fórmula de Stirling, que é uma aproximação para a função fatorial utilizando apenas funções elementares.

Teorema 1.1 (Fórmula de Stirling).

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (1.1)$$

Ou seja:

$$n! = (1 + o(1)) \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

O teorema acima não será demonstrado nesta monografia, mas pode ser encontrado em [8].

Capítulo 2

O Teorema de Ramsey

O filósofo e matemático Frank Plumpton Ramsey demonstrou um dos teoremas fundamentais em combinatória, que indica o número mínimo n de vértices para que todo grafo G com cardinalidade de V igual a n exista um subconjunto de vértices de V tal que este conjunto seja estável ou um clique.

De forma equivalente, dadas n pessoas registradas na rede social Facebook, Ramsey mostra que sempre haverá um subconjunto destas n pessoas tal que nenhuma delas se conheçam ou todas se conhecem. Note que estas características desejadas são opostas uma da outra.

A priori, este número de vértices pode não existir. O Teorema de Ramsey demonstra que independentemente da cardinalidade do conjunto estável e clique desejados, existe um número n tal que todo grafo G com cardinalidade de V igual a n existe um subconjunto de V , sendo este um conjunto estável ou um clique com as respectivas quantidades desejadas.

2.1 Números de Ramsey

Sejam k, l e $R(k, l)$ pertencentes aos inteiros positivos, diremos que $R(k, l)$ é um número de Ramsey se $R(k, l)$ for o menor inteiro de tal forma que, para todo grafo G com $|V(G)| = R(k, l)$, exista um subconjunto com k vértices que forme um conjunto estável ou um clique com l vértices.

Outras interpretações para o mesmo problema são possíveis. Por exemplo: Qual o menor inteiro positivo $R(k, l)$ tal que, todo grafo completo com $|V| = R(k, l)$ e com cada elo colorido com uma de duas cores, digamos vermelho e azul, existir um subgrafo K_k

com todos os elos vermelhos ou um subgrafo K_l com todos os elos azuis.

Determinar o número de Ramsey para quaisquer valores é um problema difícil e ainda não resolvido. A seguir, mostraremos alguns exemplos de valores conhecidos do número de Ramsey.

Primeiramente, observe que um clique é o complemento de um conjunto estável. Logo, $R(k,l) = R(l,k)$ e para todo $k, l \in \mathbb{N}$, $R(1,l) = R(k,1) = 1$, $R(k,2) = k$ e $R(2,l) = l$.

Para a determinarmos outros valores como o $R(3,3)$, podemos utilizar de grafos específicos, conhecidos como Grafos de Ramsey. Um grafo de Ramsey (k,l) é definido como sendo o grafo maximal sem cliques de k vértices ou conjuntos estáveis com l vértices. A Figura 2.1 nos dá alguns exemplos destes grafos.

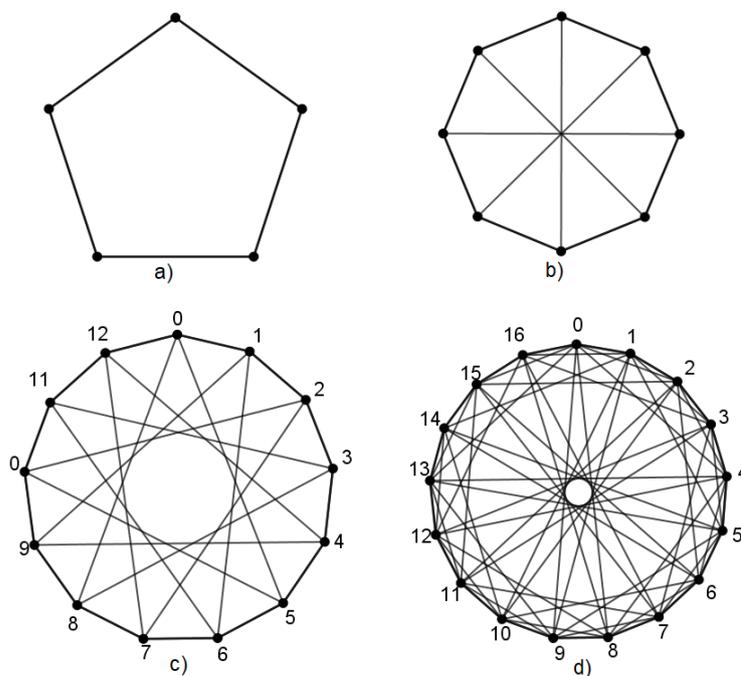


Figura 2.1: Grafos de Ramsey a) $(3,3)$; b) $(3,4)$; c) $(3,5)$; d) $(4,4)$

Ademais, não temos motivos para acreditar que o grafo (a) da Figura 2.1 é maximal. Suponha que não, ou seja, suponha que exista um grafo completo K_6 de tal forma que exista uma coloração dos elos de K_6 de tal forma que não exista um triângulo monocromático. Seja G este grafo com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

Tome um vértice qualquer inicial, digamos v_1 . Sabemos que há 5 elos incidentes a ele. Então, pelo menos 3 destes elos possuem a mesma cor. Sem perda de generalidade, suponha que 3 vértices são azuis.

A Figura 2.2 letra b nos mostra uma representação do grafo acima. Observe que o

elo v_6v_5 desta figura será vermelho, assim como o elo v_5v_4 , caso contrário teremos um triângulo monocromático azul.

Por fim, independentemente da cor do elo v_6v_4 escolhida, teremos ou um triângulo monocromático azul (v_1, v_6, v_4) ou vermelho (v_6, v_5, v_4) . Logo, a afirmação é um absurdo. Então, por construção, $R(3, 3) = 6$

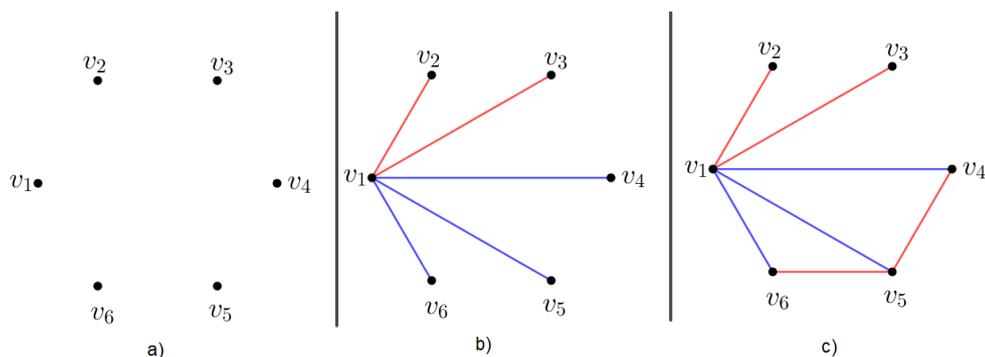


Figura 2.2: Representação do grafo G acima

Para determinarmos $R(3, 4)$, seja G um grafo e x um vértice de V . Definimos A_x como sendo o conjunto dos vértices v de V tais que, vx é vermelho, e B_x o conjunto de vértices w de V tais que, wx é azul.

Lema 2.1. *Se $|B_x| \geq 6$ então o grafo possui ou subgrafo K_3 com todos os elos vermelhas ou um K_4 com todos os elos azuis.*

Demonstração. Como $B_x \subset V(G)$, então G possui pelo menos 6 vértices. Logo, existe um subgrafo K_3 monocromático azul ou vermelho, pois $R(3, 3) = 6$ como demonstrado anteriormente. Como x é vizinho destes 6 vértices e toda aresta adjacente a ele é azul, então existirá um subgrafo K_3 com elos vermelho ou K_4 com todos os elos azuis. \square

Lema 2.2. *Se $|A_x| \geq 4$ então existirá um subgrafo K_3 com todos os elos vermelhos ou um K_4 com todos os elos azuis.*

Demonstração. Seja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V$ com xx_i vermelho para todo $i \leq 4$. Note que, se x_ix_j for vermelho para algum i e j , com $1 \leq i < j \leq 4$, então teremos um subgrafo K_3 vermelho. Caso contrário, se x_ix_j for azul para todo i, j com $1 \leq i < j \leq 4$, então teremos um subgrafo K_4 com todos os elos azuis. \square

Dado os lemas acima, provaremos que $R(3, 4) = 9$. Para tanto, observe que, pelo grafo de Ramsey $(3, 4)$ da Figura 2.1, $R(3, 4) \geq 9$. Agora suponha por absurdo que exista um

grafo K_9 com elos coloridos de azul ou vermelho, de forma que não exista um triângulo vermelho ou um subgrafo K_4 com todos os elos azuis. Pelos Lemas 2.1 e 2.2, podemos notar que $|B_x| = 5$, pois se $|B_x| \geq 6$, o grafo terá as características não desejadas e se $|B_x| \leq 4$ então $|A_x| \geq 4$, o que também implica um grafo com características não desejadas. Desta forma, todo vértice do grafo G será incidente a exatamente 5 elos azuis. Logo, o número de linhas azuis saindo de cada vértice é igual a $9 \cdot 5 = 45$. Como cada linha é contada duas vezes, então teremos 22,5 elos, o que é um absurdo.

Nos parágrafos anteriores, apresentamos ao leitor alguns exemplos de números de Ramsey, porém isto não é suficiente para afirmar que para todo par de números inteiros k e l , o número de Ramsey $R(k, l)$ existe. Demonstraremos a seguir que este número é bem definido.

Teorema 2.1. *Para todo k e l inteiros com $k \geq 2$ e $l \geq 2$,*

$$R(k, l) \leq R(k, l - 1) + R(k - 1, l).$$

E se $R(k, l - 1)$ e $R(k - 1, l)$ forem par, a desigualdade estrita é válida.

Demonstração. Seja G um grafo completo com $|V| = R(k, l - 1) + R(k - 1, l)$. Devemos mostrar que todo grafo completo com $|V| = R(k, l - 1) + R(k - 1, l)$ e elos coloridos de azul ou vermelho possui um subgrafo K_k vermelho ou um K_l azul.

Seja $v \in V$, sabemos que v é vizinho a $R(k, l - 1) + R(k - 1, l) - 1$ vértices. Definimos $A = \{x \in V; xv \text{ é vermelho}\}$ e $B = \{x \in V; xv \text{ é azul}\}$. Note que $|A| + |B| = |V| - 1$, logo não é possível $|A|$ e $|B|$ menores que $R(k, l - 1)$ e $R(k - 1, l)$ simultaneamente. Logo $|A| \geq R(k - 1, l)$ ou $|B| \geq R(k, l - 1)$.

Se $|A| \geq R(k - 1, l)$, o subgrafo induzido H gerado pelo conjunto $A \cup \{v\}$ possui pelo menos $R(k - 1, l)$ vértices. Logo, existe um subgrafo K_{k-1} vermelho ou um K_l azul pela definição do número de Ramsey. Como todo elo vx , com $x \in A$, é vermelho, então H possui um K_k vermelho ou um K_l azul. Se $|B| \geq R(k, l - 1)$, teremos um raciocínio análogo.

Por fim, para a demonstração da cota restrita onde $R(k, l - 1)$ e $R(k - 1, l)$ são pares, suponha G um grafo com $|V| = R(k, l - 1) + R(k - 1, l) - 1$ sendo $R(k, l - 1)$ e $R(k - 1, l)$ pares. Note que $|V(G)|$ é um número ímpar e a soma dos graus dos vértices de G é igual a duas vezes o número de elos. Logo existe um vértice v com grau par, caso contrário a

soma dos graus seria ímpar, o que é um absurdo.

Seja $x \in V$ com grau de x par, $C = \{v \in V; xv \in E\}$ e $D = \{v \in V; xv \notin E\}$. Como $|C| \neq R(k-1, l) - 1$ pelo fato de a cardinalidade de C ser par, e $|C| + |D| = |V| - 1$, então $|D| \geq R(k, l-1)$ ou $|C| \geq R(k-1, l)$.

De forma análoga, se $|C| \geq R(k-1, l)$, então pela propriedade do número de Ramsey, existe um clique com $k-1$ vértices ou um conjunto estável com l vértices. Como para todo vértice $v \in C$, $vx \in E$, então existirá um clique com k vértices ou um conjunto estável com l vértices. Se $|D| \geq R(k, l-1)$, o raciocínio é análogo. \square

A partir do Teorema 2.1, determinaremos mais exemplos de números de Ramsey. Primeiramente, note que os exemplos $R(3, 3)$ e $R(3, 4)$ feitos na seção anterior podem ser demonstrados utilizando o Teorema 2.1. Pelo teorema, $R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 6$ e pelo grafo de Ramsey $(3, 3)$ da Figura 2.1, $R(3, 3) \geq 6$, logo $R(3, 3) = 6$. Pela desigualdade restrita, $R(3, 4) < R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10$, e pelo grafo de Ramsey $(3, 4)$, $R(3, 4) \geq 9$, logo $R(3, 4) = 9$.

De forma análoga, pelo Teorema 2.1 $R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) = 5 + 9 = 14$ e $R(4, 4) \leq 2R(3, 4) = 2 \cdot 9 = 18$. Pelos grafos de Ramsey $(3, 5)$ e $(4, 4)$ da Figura 2.1, $R(3, 5) \geq 14$ e $R(4, 4) \geq 18$. Logo $R(3, 5) = 14$ e $R(4, 4) = 18$.

2.2 A Cota de Erdős-Szekeres

O Teorema 2.1 nos mostra um exemplo de cota superior para o número de Ramsey, sendo essa utilizada para demonstração de outras cotas. A seguir, demonstraremos uma versão da cota de Erdős-Szekeres provada em [3].

Teorema 2.2. *Para todo k e l inteiros positivos maiores que um,*

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Demonstração. Provaremos o teorema por indução em $k+l$. Note que para $k+l \leq 5$, a afirmação é verdadeira, pois, na Seção 2.1, foram provados os casos particulares do número de Ramsey $R(1, l)$ e $R(2, l)$. Suponha que para todos os números positivos n, m com $5 \leq k+l \leq n+m$, o teorema seja válido. Queremos demonstrar que é válido para o caso k, l com $k+l = n+m+1$. Pelo Teorema 2.1 e pela hipótese de indução, sabemos que

$$\begin{aligned}
R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) &= \binom{k+l-3}{k-1} + \binom{k+l-3}{k-2} \\
&= \binom{k+l-2}{k-1}.
\end{aligned}$$

□

Para um caso particular do teorema acima, note que $\binom{k+l-2}{k-1}$ representa o número de subconjuntos com $k-1$ elementos de um conjunto de $k+l-2$.

Corolário 2.1. *Para todo inteiro positivo k e l , $R(k, l) \leq 2^{k+l-2}$, com igualdade se, e somente se, $k = l = 1$.*

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$, logo,

$$\begin{aligned}
R(k, l) &\leq \binom{k+l-2}{k-1} \\
R(k, l) &\leq \sum_{i=0}^{k+l-2} \binom{k+l-2}{i} \\
R(k, l) &\leq 2^{k+l-2}.
\end{aligned}$$

□

Definimos a diagonal de Ramsey, como sendo o número de Ramsey no caso particular onde $k = l$.

Teorema 2.3. *Para todo k inteiro positivo*

$$R(k, k) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi k}}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, sabemos que $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$. Se $k = l$, então

$R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$. Pelo Teorema 1.1

$$\begin{aligned}
R(k, k) &\leq \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \\
&= \frac{(1+o(1)) \left(\frac{2k-2}{e}\right)^{2k-2} \sqrt{2\pi \cdot 2(k-1)}}{(1+o(1))^2 \left(\frac{k-1}{e}\right)^{2(k-1)} \sqrt{2\pi(k-1)}^2} \\
&= (1+o(1)) 2^{2k-2} \frac{\left(\frac{k-1}{e}\right)^{2k-2} \sqrt{2} \sqrt{2\pi \cdot (k-1)}}{\left(\frac{k-1}{e}\right)^{2k-2} \sqrt{2\pi \cdot (k-1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot (k-1)}} \\
&= (1+o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi \cdot (k-1)}} \\
&= (1+o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi k}}
\end{aligned}$$

□

2.3 Generalização dos Números de Ramsey

O número de Ramsey, como definido anteriormente, tinha como interesse analisar as características de um grafo com elos coloridos com duas cores. Uma das generalizações do número de Ramsey tem como princípio analisar os mesmos grafos, porém com múltiplas cores.

Seja C_1, C_2, \dots, C_k k cores e t_1, t_2, \dots, t_k números inteiros. Definimos $R(t_1, t_2, t_3, \dots, t_k)$ o menor número de vértices de um grafo completo G tal que, para todo grafo G com cada elo colorido com uma das k cores citadas, existe um subgrafo K_{t_i} com elos monocromáticos de cor C_i para algum i , $1 \leq i \leq k$.

Provaremos a seguir dois teoremas análogos aos Teoremas 2.1 e 2.3 para o número de Ramsey generalizado.

Teorema 2.4. *Para todo número inteiro positivo t_i , $1 \leq i \leq k$,*

$$R(t_1, t_2, \dots, t_k) \leq R(t_1-1, t_2, \dots, t_k) + R(t_1, t_2-1, \dots, t_k) + \dots + R(t_1, t_2, \dots, t_k-1) - k + 2.$$

Demonstração. Considere um grafo completo G com $|V| = R(t_1-1, t_2, \dots, t_k) + R(t_1, t_2-1, \dots, t_k) + \dots + R(t_1, t_2, \dots, t_k-1) - k + 2$, $v \in V$ e C_1, C_2, \dots, C_k k cores. O número de vizinhos de v é igual a $R(t_1-1, t_2, \dots, t_k) + R(t_1, t_2-1, \dots, t_k) + \dots + R(t_1, t_2, \dots, t_k-1) - k + 1$. Sejam $A_i = \{x \in V; xv \text{ é da cor } C_i\}$ com $1 \leq i \leq k$.

Note que $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| = R(t_1 - 1, t_2, \dots, t_k) + R(t_1, t_2 - 1, \dots, t_k) + \dots + R(t_1, t_2, \dots, t_k - 1) - k + 1 = t$. Logo se $|A_i| < R(t_1, t_2, \dots, t_i - 1, \dots, t_k)$ para todo $i \leq k$ então $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| < t$. Logo $|A_i| \geq R(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, \dots, t_k)$ para algum $i \leq k$. Portanto, pela definição do número de Ramsey, existe um subgrafo K_{t_j} com elos monocromáticos de cor C_j para $j \neq i$ ou um subgrafo $K_{t_{i-1}}$ com elos monocromáticos de cor C_i . Como todo elo vw com $w \in A_i$ possui a cor C_i , então existirá um subgrafo K_{t_i} monocromático de cor C_i para algum i , $1 \leq i \leq k$ como queríamos. \square

Corolário 2.2. *Para todo número inteiro positivo t_i , $1 \leq i \leq k$,*

$$R(t_1 + 1, t_2 + 1, \dots, t_k + 1) \leq \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_k)!}{t_1! t_2! \dots t_k!}.$$

Demonstração. A prova será por indução em $t_1 + t_2 + \dots + t_k$. Para o caso inicial: $t_i = 1$, para todo i com $1 \leq i \leq k$, $R(2, 2, \dots, 2) = 2 \leq k!$. Suponha que a desigualdade seja válida para $k \leq t_1 + t_2 + \dots + t_k \leq n$. Demonstraremos que a desigualdade é válida para o caso $t_1 + t_2 + \dots + t_k = n + 1$. Pelo Teorema 2.4

$$\begin{aligned} R(t_1 + 1, \dots, t_k + 1) &\leq R(t_1, t_2 + 1, \dots, t_k + 1) + \dots + R(t_1 + 1, \dots, t_k) \\ &\leq \frac{(t_1 + \dots + t_k - 1)!}{(t_1 - 1)! \dots (t_k)!} + \dots + \frac{(t_1 + \dots + t_k - 1)!}{(t_1)! \dots (t_k - 1)!} \\ &= \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_k - 1)!}{(t_1 - 1)! (t_2 - 1)! \dots (t_k - 1)!} \left(\frac{1}{t_2 t_3 \dots t_k} + \frac{1}{t_1 t_3 \dots t_k} + \dots + \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_{k-1}} \right) \\ &= \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_k - 1)!}{(t_1 - 1)! (t_2 - 1)! \dots (t_k - 1)!} \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_k}{t_1 t_2 \dots t_k} \\ &= \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_k)!}{t_1! t_2! \dots t_k!} \end{aligned}$$

\square

Capítulo 3

O Método Probabilístico

O método probabilístico é uma poderosa ferramenta combinatória, que tem como objetivo demonstrar a existência de um elemento em um conjunto com certas propriedades. A prova da existência deste objeto, será equivalente a demonstrar que a probabilidade do mesmo é positiva. Para a utilização do método, precisaremos introduzir o conceito de grafo aleatório.

3.1 Grafos aleatórios

Definimos um espaço de probabilidade como sendo um par ordenado (Ω, \mathbb{P}) , onde Ω consiste em um conjunto finito chamado espaço amostral e uma função de probabilidade $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$, chamada de distribuição de probabilidade satisfazendo

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

Se Ω é um conjunto de grafos, um elemento $x \in \Omega$ será chamado de grafo aleatório.

Como exemplo, considere o conjunto \mathcal{G}_n de todos os subgrafos rotulados de K_n , e para todo $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_n$, $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$. Observe que $|\mathcal{G}_n| = \binom{n}{2}$, pois cada aresta gera um grafo distinto. Logo, dado $G \in \mathcal{G}_n$, $\mathbb{P}(G) = \binom{n}{2}^{-1}$.

Para o segundo exemplo, considere a construção de um grafo com n vértices acrescentando cada aresta com probabilidade p , sendo cada aresta independente entre si (definiremos a seguir o conceito de independência). Então dado $G \in \mathcal{G}_n$ com $|E(G)| = m$, lembrando que $E(G)$ é o conjunto dos elos do grafo G , $\mathbb{P}(G) = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2} - m}$. Este

espaço de probabilidade é denotado por $\mathcal{G}_{n,p}$.

Dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{P}) , definimos um evento A como sendo um subconjunto de Ω . Como exemplo, tome o espaço de probabilidade $\mathcal{G}_{3,p}$ e tome A e B os eventos: o conjunto dos grafos G conexos por caminhos e bipartidos respectivamente. Na Figura 3.1 é mostrado este espaço amostral.

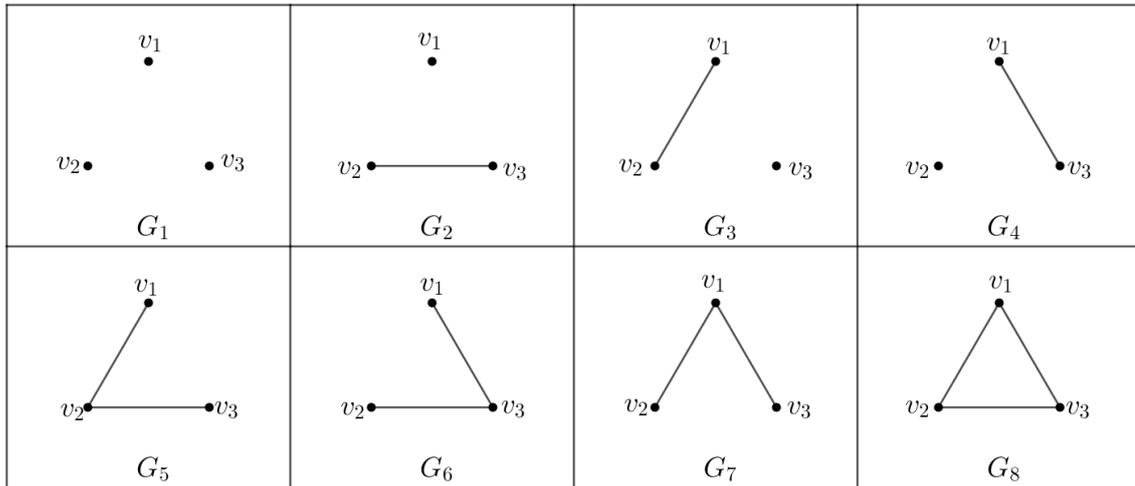


Figura 3.1: $\mathcal{G}_{3,p}$

O evento A é composto pelos grafos: G_5, G_6, G_7, G_8 . O evento B : $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7$. A probabilidade de um evento C qualquer é dada por

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{\omega \in C} \mathbb{P}(\omega)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= p^2(3-2p), \\ \mathbb{P}(B) &= (1-p)^3 + 3(1-p)^2p + 3(1-p)p^2 \\ &= (1-p)(1+p+p^2). \end{aligned}$$

Dois eventos A_1 e A_2 serão chamados de independentes, se $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$; caso contrário eles serão dependentes. No exemplo anterior:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 3p^2(1-p) \neq p^2(3-2p)(1-p)(1+p+p^2) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Então A e B são dependentes. Mais geral, dizemos que $A_i, i \in I$ são mutuamente independentes, se para todo $S \subseteq I$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i).$$

Note que, se um conjunto de eventos são mutuamente independentes, então estes também serão dois a dois independentes, contudo eventos dois a dois independentes não implica eventos mutuamente independentes. Como exemplo, considere dois lançamentos de uma moeda honesta e os eventos A_1 o primeiro lançamento cara, A_2 o segundo lançamento é cara e A_3 o primeiro e segundo lançamentos iguais. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \frac{1}{4} = \frac{1^2}{2} = \mathbb{P}(A_1)P(A_2), \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \frac{1}{4} = \frac{1^2}{2} = \mathbb{P}(A_1)P(A_3), \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{4} = \frac{1^2}{2} = \mathbb{P}(A_2)P(A_3), \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{4} \neq \frac{1^3}{2} = \mathbb{P}(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

3.2 Variáveis aleatórias

No estudo de grafos aleatório, estaremos interessados em características específicas do grafo, como a conectividade, número de estabilidade, número clique etc. Como estes valores dependem especificamente do grafo, funções que relacionam o espaço amostral a estes valores serão chamadas de variáveis aleatórias.

Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{P}) é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. No contexto de combinatória, uma variável aleatória são frequentemente valores inteiros, logo utilizaremos $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$.

Como exemplo, seja S um conjunto de vértices de um grafo e $G \in \mathcal{G}_{n,p}$. Definimos a variável aleatória X_S como sendo:

$$X_S(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } S \text{ é um conjunto estável de } G, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A variável aleatória X_S é um exemplo do que chamamos de indicadora de um evento. De forma mais geral, seja $A \in \Omega$ em um espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{P}) . A indicadora de

A é definida por:

$$\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{se } w \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.3 Esperança

Dada uma variável aleatória X , definimos a esperança de X ou valor esperado, sendo a média dos valores da variável aleatória. Também podemos definir a esperança de X como sendo a soma das multiplicações das probabilidades dos elementos de Ω pelo valor assumido pela variável aleatória.

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega).$$

Tome como exemplo o espaço amostral $\mathcal{G}_{3,p}$ e X a variável aleatória que representa o número de componentes de $G \in \mathcal{G}_{3,p}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 3 \cdot (1-p)^3 + 3 \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p)^2 + 1 \cdot (p^3 + 3 \cdot p^2(1-p)) \\ &= 3 - 3p + p^3. \end{aligned}$$

Teorema 3.1 (Linearidade da esperança). *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e $r, s \in \mathbb{R}$. Então*

$$\mathbb{E}(rX + sY) = r\mathbb{E}(X) + s\mathbb{E}(Y).$$

Demonstração. Pela definição da esperança, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(rX + sY) &= \sum_{w \in \Omega} (rX + sY)(w) \cdot \mathbb{P}(w) \\ &= \sum_{w \in \Omega} [(rX)(w) + (sY)(w)] \cdot \mathbb{P}(w) \\ &= \sum_{w \in \Omega} (rX)(w) \cdot \mathbb{P}(w) + \sum_{w \in \Omega} (sY)(w) \cdot \mathbb{P}(w) \\ &= r \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot \mathbb{P}(w) + s \sum_{w \in \Omega} Y(w) \cdot \mathbb{P}(w) \\ &= r\mathbb{E}(X) + s\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. *Seja $\mathbf{1}_A$ a indicadora do evento A . Então*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = P(A).$$

Demonstração. Pela definição da esperança, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) &= \sum_{w \in \Omega} \mathbf{1}_A(w) \cdot \mathbb{P}(w) \\ &= \sum_{w \in A} \mathbb{P}(w) \\ &= \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3. *[Desigualdade de Markov] Se X é uma variável aleatória não-negativa e $t \in \mathbb{R}^+$, então*

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Demonstração. Pela definição da esperança, temos

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq t} t \cdot \mathbb{P}(\omega) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t).$$

Logo

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

□

Um caso particular do Teorema 3.3 será utilizado para demonstrar que um grafo aleatório em $\mathcal{G}_{n,p}$ possui uma propriedade quase certamente. Dada uma sequência de espaços amostrais (Ω_n, \mathbb{P}_n) , uma propriedade A ocorrerá quase certamente se, $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $A_n := A \cap \Omega_n$.

Corolário 3.1. *Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variáveis aleatórias com valores inteiros não-negativos nos espaços de probabilidade (Ω_n, \mathbb{P}_n) , $n \geq 1$. Se $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, temos

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(X_n)$$

Sendo X_n variáveis que assumem apenas valores inteiros não negativos, temos

$$P(X_n = 0) = P(X_n < 1) \geq 1 - \mathbb{E}(X_n).$$

Tomando limite de ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{E}(X_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) &\geq 1. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$. □

3.4 Lema do cruzamento

Nesta seção, apresentaremos um exemplo simples de aplicação do método probabilístico no campo de grafos. Esta mesma demonstração pode ser encontrada no livro [5] capítulo 13. Primeiramente, algumas definições importantes.

Dado um grafo G , definimos a representação plana de G como sendo um grafo com todos os vértices pertencentes ao um único plano. Definimos um cruzamento de uma representação plana de um grafo, como sendo um ponto de interseção entre dois elos que não seja uma das pontas. Denotaremos por \tilde{G} como sendo uma representação plano de um grafo G de forma que o número de cruzamentos deste grafo seja mínimo e denotaremos o número mínimo de cruzamentos de um grafo por $cr(G)$. Um grafo G será chamado de plano se existir uma representação plana com número de cruzamentos igual a zero.

Dado $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$, o número de cruzamento $cr(G)$ pode ser cotado por

$$cr(G) \geq m - 3n. \tag{3.1}$$

Para a demonstração da cota acima, definimos o número de faces de um grafo como sendo o número de regiões delimitadas por elos, sendo estas internas ou externas. Dados

n, m e f o número de vértices, elos e faces respectivamente de um grafo plano conexo,

$$n - m + f = 2. \quad (3.2)$$

A demonstração da fórmula acima pode ser encontrada em [5] capítulo 10 seção 3.

Seja G_1 um grafo plano. Sabemos que $3f \leq 2e$, pois cada face, exceto a exterior, é limitada por pelo menos três elos e um elo toca no máximo duas faces. Então, pela fórmula de Euler,

$$n = 2 + m - f$$

$$n \geq 2 + m - \frac{2m}{3}$$

$$3n \geq 6 + m$$

$$m \leq 3n - 6$$

$$m \leq 3n.$$

A partir da desigualdade, tome G é um grafo com representação plana com $cr(G)$ cruzamentos, m elos e n vértices, contruímos um subgrafo de G com todos os vértices, porém retirando de cada cruzamento um elo que forma o cruzamento. Logo o novo subgrafo é plano, sendo $m - cr(G)$ o número de elos. Logo:

$$m - cr(G) \leq 3n$$

$$cr(G) \geq m - 3n,$$

o que demonstra a cota.

Lema 3.1. [*Lema de cruzamento*] Seja G um grafo com $m \geq 4n$. Então:

$$cr(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}.$$

Demonstração. Considere \tilde{G} uma representação plana de G com $cr(G)$ cruzamentos. Seja S um subconjunto de V obtido escolhendo cada vértices de G de forma independente com probabilidade $p := \frac{4n}{m}$. Seja H o grafo induzido pelo conjunto de vértices S e \tilde{H} a

incorporação do grafo H .

Definimos o espaço de probabilidade de (Ω, \mathbb{P}) dos vértices de G escolhidos de forma independente com probabilidade p e as variáveis aleatórias X , Y e Z de Ω como sendo: X é o número de vértices de \tilde{H} , Y o número de elos de \tilde{H} e Z o número de cruzamentos de \tilde{H} . Pela Cota (3.1), $Z \geq Y - 3X$. Logo pela linearidade da esperança:

$$\mathbb{E}(Z) \geq \mathbb{E}(Y) - 3\mathbb{E}(X) \quad (3.3)$$

Para todo $v_i \in V(G)$, definimos as indicadoras $\mathbb{1}_{A_i}$ sendo A_i o evento $v_i \in S$, com $1 \leq i \leq n$. De forma análoga, para todo $e_i \in E(G)$, definimos as indicadoras $\mathbb{1}_{B_i}$ sendo B_i o evento $e_i \in E(H)$, com $1 \leq i \leq m$ e para todo cruzamento $c_i \in \tilde{G}$, tome as indicadoras $\mathbb{1}_{C_i}$ sendo C_i o evento $c_i \in \tilde{H}$, com $1 \leq l \leq cr(G)$.

Como o grafo H é induzido pelo conjunto S , uma aresta pertencerá a H se, e somente se, as pontas deste elo pertencem a H . Logo $\mathbb{P}(B_i) = p^2, \forall i \leq m$. De forma equivalente, um cruzamento pertencerá a \tilde{H} se, e somente se, os elos que formam este cruzamento pertencem a \tilde{G} . Logo $\mathbb{P}(C_i) = p^4, \forall i \leq cr(G)$. Desta forma:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \leq n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = pn, \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i \leq m} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_i}) = p^2m, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i \leq cr(G)} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C_i}) = p^4 cr(G). \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} p^4 cr(G) &\geq p^2m - 3pn, \\ cr(G) &\geq \frac{pm - 3n}{p^3}. \end{aligned}$$

Substituindo $p = \frac{4n}{m}$, obtemos

$$cr(G) \geq \frac{(4n/m)m - 3n}{(4n/m)^3} = \frac{n}{(4n/m)^3} = \frac{m^3}{64n^2}.$$

□

O Lema 3.1 foi base para demonstração de teoremas em geometria combinatorial, alguns que eram considerados desafiadores. Considere dois deles a seguir.

Dado um plano com n pontos, sabemos que por dois pontos passam uma única reta, contudo, pode ocorrer desta reta passar por outros pontos deste plano. Então, podemos nos perguntar quantas retas do plano passam por pelo menos k pontos. Se por exemplo n é um quadrado perfeito e os pontos estão em um plano com coordenadas (i, j) , com $i, j \in \mathbb{Z}_+^*$, $i, j \leq \sqrt{n}$, então teremos $2\sqrt{n} + 2$ linhas com \sqrt{n} pontos. O desafio seria determinar se esta era a configuração com o maior número de linhas passando por esta quantidade de pontos.

Teorema 3.4. *Seja P um conjunto de pontos com n pontos em um plano, e seja l o número de linhas no plano passando por pelo menos $k + 1$ destes pontos, onde $1 \leq k \leq 2\sqrt{2n}$. Então $l < 32n^2/k^3$.*

Demonstração. Seja G um grafo com $V(G) = P$ e os elos são segmentos de retas entre vértices consecutivos em uma reta com pelo menos $k + 1$ vértices de P . Este grafo possui pelo menos kl elos, pois ele possui l retas com $k + 1$ pontos e como cada uma das l retas pode se cruzar exatamente uma vez com outra reta, então podem existir no máximo $\binom{l}{2}$ cruzamentos.

A partir destes fatos, podem ocorrer duas hipóteses.

1 - $kl < 4n$, o que implica:

$$l < \frac{4n}{k} \leq \frac{16n^2}{k^2} \leq \frac{32n^2}{k^3}.$$

2 - $kl \geq 4n$, o que pelo Lema 3.1:

$$\frac{(kl)^3}{64n^2} \leq cr(G) \leq \binom{l}{2} < \frac{l^2}{2}.$$

Por conseguinte:

$$\begin{aligned} \frac{(kl)^3}{64n^2} &< \frac{l^2}{2}, \\ l &< \frac{32n^2}{k^3}. \end{aligned}$$

□

Para a segunda aplicação, queremos determinar o número de pares de pontos em um plano com n pontos com distância unitária.

Teorema 3.5. *Seja P um conjunto com n pontos em um plano, e seja k o número de pares de pontos de P com distância unitária. Então*

$$k < 5n^{\frac{4}{3}}.$$

Demonstração. De cada ponto do conjunto P , desenharemos no plano uma circunferência de raio um. Cada circunferência passar por no máximo $n - 1$ pontos. Seja n_i o número de circunferências que passam por i pontos, com $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $i \leq n - 1$. Note que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i n_i = k.$$

A primeira igualdade é verdade pelo princípio fundamental da contagem, uma vez que temos n circunferências e cada circunferência obrigatoriamente passará por um dos valores de i . A segunda igualdade vem do fato que cada circunferência tem raio unitário, sendo assim, se uma circunferência possui i pontos de P , então existem i pares de pontos de distância unitária (centro e um ponto da circunferência). Note que a soma é dividida por dois pois cada reta é contada duas vezes.

Seja H um grafo com $V(H) = P$ e os elos são os arcos de pontos consecutivos que passam por pelo menos três pontos. Então:

$$E(H) = \sum_{i=3}^{n-1} i n_i = \sum_{i=0}^{n-1} i n_i - n_1 - 2n_2 \leq 2k - 2 \sum_{i=0}^{n-1} n_i = 2k - 2n.$$

Pode acontecer de dois elos de H possuam mesmas pontas, pois os elos são arcos de circunferências. No pior dos casos, metade dos elos de H são paralelos. Então construiremos um grafo simples G que seja um subgrafo de H retirando todos os elos paralelos. Então $E(G) \geq k - n$.

Perceba que $cr(G) \leq n(n - 1)$, pois G é formado por no máximo n circunferências e

duas circunferências serão interceptadas no máximo por dois pontos. Então existem duas possibilidades para o grafo G :

1 - Se $E(G) < 4n$, então

$$k - n < 4n$$

$$k < 5n$$

$$k < 5n^{\frac{4}{3}}.$$

2 - Se $E(G) \geq 4n$, pelo Lema 3.1

$$\frac{(k - n)^3}{64n^2} \leq cr(G) \leq n(n - 1) < n^2$$

$$\frac{(k - n)^3}{64n^2} < n^2$$

$$(k - n)^3 < 64n^4$$

$$k - n < 4n^{\frac{4}{3}}$$

$$k < 4n^{\frac{4}{3}} + n$$

$$k < 5n^{\frac{4}{3}}.$$

□

3.5 Uma cota inferior elementar para Números de Ramsey diagonais

Se $k = l$, $R(k, k)$ é conhecido como a diagonal de Ramsey. Então, Corolário 2.1 nos dá uma cota superior para a diagonal de Ramsey que cresce de forma exponencial. Com o próximo teorema, mostraremos uma cota inferior para estas diagonais.

Teorema 3.6. *Para todo inteiro positivo k*

$$R(k, k) \geq 2^{k/2}.$$

Demonstração. Note que para $k = 1$ e $k = 2$ o teorema é válido. Então assumimos $k \geq 3$.

Seja \mathcal{G}_n o conjunto dos grafos com n vértices e \mathcal{G}_n^k o conjunto dos grafos com n vértices e com um clique com k vértices. Sabemos que

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}, \quad (3.7)$$

pois cada subconjunto dos $\binom{n}{2}$ elos gera um novo grafo. De forma análoga

$$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}, \quad (3.8)$$

pois, fixados k vértices, existem $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ grafos com um clique nestes k vértices. O total de formas de escolhermos estes k vértices é igual a $\binom{n}{k}$. Temos uma desigualdade pelo fato de contarmos o total de grafos com pelo menos um clique com k vértices. Então contamos duas vezes os grafos com por exemplo um clique de $k+1$ vértices ou dois cliques com k vértices.

Usando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}.$$

Suponha que $n < 2^{k/2}$. Então

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{2^{k^2/2} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Ou seja, se $n < 2^{k/2}$, existem menos da metade dos grafos de \mathcal{G}_n com um clique com k vértices. De forma análoga, por complementar, existem menos da metade dos grafos em \mathcal{G}_n com um conjunto estável de k vértices. Logo existe pelo menos um grafo em \mathcal{G}_n o qual não tenha um conjunto estável ou um clique de k vértices. Logo $R(k, k) \geq 2^{k/2}$ \square

Capítulo 4

Cotas inferiores da diagonal de Ramsey

Na década de 30, Paul Erdős e George Szekeres provaram alguns teoremas importantes na teoria de Ramsey, como a demonstração de que número de Ramsey é finito e melhoraram algumas cotas, sendo a cota superior discutida na Seção 2.2. Discutiremos as cotas inferiores demonstradas por Erdős e a melhora desta cota por Spencer através do Lema Local de Lovász.

4.1 As Cotas de Erdős

Erdős em 1947, através do método probabilístico, provou no artigo [2] uma das melhores cotas inferiores para a diagonal de Ramsey até hoje encontrada. A seguir demonstraremos esta cota, vamos refina-la e na Seção 4.3 analisaremos o comportamento da mesma.

Teorema 4.1. *Se*

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1, \quad (4.1)$$

então $R(k,k) > n$.

Demonstração. Considere o espaço de probabilidade (Ω, P) sendo Ω o conjunto dos grafos aleatórios K_n com elos coloridos de azul ou vermelho de forma independente com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja M um conjunto com k vértices de G , A o evento o subgrafo gerado por M é monocromático e $\mathbb{1}_A$ a indicadora do evento A . Note que:

$$P(A) = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Basta observar que cada aresta tem probabilidade $\frac{1}{2}$ e temos duas possíveis cores iniciais. Existem $\binom{n}{k}$ escolhas de conjuntos com k elementos. Seja S o conjunto de todos os M_i conjunto de k vértices, A_i o evento o subgrafo gerado por M_i monocromático e $\mathbb{1}_{A_i}$ a indicadora do evento A_i . Então,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_i A_i\right) &\leq \sum_i P(A_i) \\ &= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

Pela hipótese inicial, este número é menor que um, o que implica que o complemento desta probabilidade é positivo, ou seja, existe alguma forma de colorir os elos de K_n com cor azul ou vermelho de forma que, não haja um subgrafo K_k monocromático. \square

Teorema 4.2. *Para todo inteiro positivo m*

$$R(k, k) > m - \binom{m}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \quad (4.2)$$

Demonstração. Considere o espaço de probabilidade (Ω, P) sendo Ω o conjuntos dos grafos aleatórios K_m com elos coloridos de azul e vermelho de forma independente com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja M é um conjunto de k vértices de K_m , A o evento o subgrafo gerado por M é monocromático e $\mathbb{1}_A$ é a indicadora do evento A . Então

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Seja S o conjunto de todos os M_i conjunto de k vértices, A_i o evento onde o subgrafo gerado por M_i monocromático, $\mathbb{1}_{A_i}$ a indicadora do evento A_i e $X = \sum \mathbb{1}_{A_i}$. Logo pela linearidade da esperança:

$$E(X) = \sum_M E(X_M) = \binom{m}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Como X é uma variável discreta positiva, existe $\omega \in \Omega$ de tal forma que

$$0 < X(\omega) \leq E(X).$$

Note que o fato de $X(\omega) > 0$ é pelo fato de se existir $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) = 0$, então

o teorema está satisfeito pelo fato de existir um grafo sem nenhum subconjunto com k vértices com os elos monocromáticos.

Então existe um grafo aleatório K_m com no máximo $\binom{m}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$ conjuntos com k vértices monocromáticos. Seja G_1 o grafo com esta coloração. Para cada subconjunto com k vértices retire um vértice deste grafo. O número de vértices restantes deste grafo será pelo menos $m - \binom{m}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$ e neste subgrafo restante, não há subconjuntos com k vértices monocromático. \square

4.2 O Lema Local de Lovász e a cota de Spencer

Os capítulos anteriores foram uma preparação para que possamos demonstrar o lema a seguir, mas primeiro uma motivação. Suponha que tenhamos uma quantidade finita n de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, P) , todos com probabilidade diferente de zero e alguns eventos sendo dois a dois independentes. Se a probabilidade de não ocorrer nenhum desses eventos for positiva, então isso quer dizer que existe um elemento ω pertencente Ω sem nenhuma destas características.

Como exemplo tome G um grafo K_n e todos os elos são coloridos de azul ou vermelho de forma independente com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja (S_i) todos os subconjuntos com k vértices de G , A_i o evento o subgrafo gerado por S_i monocromáticos e $\mathbb{1}_{A_i}$ a indicadora do evento A_i . Note que A_i e A_j são independentes se $|S_i \cap S_j| < 2$ e a probabilidade de A_i diferente de zero para todo i . Então se $\mathbb{P}(\bigcap_i \overline{A_i}) > 0$, então $R(k, k) > n$.

Antes da demonstração, definiremos um grafo de dependência. Seja A_1, A_2, \dots, A_n eventos em um espaço de probabilidade Ω . Definimos o grafo de dependência $G[V, E]$, com $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ e dois vértices A_i e A_j são adjacentes se, e somente se, os eventos são dependentes. Um grafo completo por exemplo, será de dependência, porém note que este grafo não nos tráz informações relevantes sobre os eventos.

Lema 4.1 (Lema local de Lovász: caso simétrico). *Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos em um espaço de probabilidade arbitrário com $P(A_i) \leq p$ para todo i . Suponha que o grafo de dependência $G[V, E]$ dos eventos A_1, A_2, \dots, A_n tenha grau no máximo d e que $ep(d+1) \leq 1$. Então*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^n.$$

Demonstração. Afirmamos que $\mathbb{P}(A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}) \leq \frac{1}{d+1}$ para $S \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $j \neq i$.

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i^c) &= \mathbb{P}(A_1^c) \mathbb{P}(A_2^c \mid A_1^c) \mathbb{P}(A_3^c \mid A_1^c \cap A_2^c) \cdots \mathbb{P}(A_n^c \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1)) (1 - \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)) \cdots (1 - \mathbb{P}(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)) \\ &\geq (1-p) \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{n-1} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{e(d+1)}\right) \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{n-1} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Ou seja, se provarmos a afirmação acima, estará demonstrado o lema. Seja $S \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Provaremos por indução em S que a afirmação é verdadeira. Primeiramente note que se A_i e A_j são independentes, então $\mathbb{P}(A_i \mid \overline{A_j}) = P(A_i)$. Se $S = \emptyset$, então

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in S} A_j^c\right) = \mathbb{P}(A_i) \leq p \leq \frac{1}{e(d+1)} \leq \frac{1}{d+1}.$$

Suponha que a afirmação seja válida para todo S com $|S| = k$. Considere S com $|S| = k+1$, $S_1 = \{j \in S; A_i A_j \in G[V, E]\}$ e $S_2 = S \setminus S_1$. Pela definição da probabilidade condicional:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}) &= \frac{\mathbb{P}(A_i \cap (\bigcap_{t \in S_1} \overline{A_t}) \mid \bigcap_{j \in S_2} A_j^c)}{\mathbb{P}(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A_t} \mid \bigcap_{j \in S_2} \overline{A_j})} \\ &\leq \frac{\mathbb{P}(A_i \mid \bigcap_{j \in S_2} \overline{A_j})}{\mathbb{P}(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A_t} \mid \bigcap_{j \in S_2} \overline{A_j})} \\ &\leq \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A_t} \mid \bigcap_{i \in S_2} \overline{A_i})} \end{aligned}$$

Suponha que $S_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A_t} \mid \bigcap_{i \in S_2} \overline{A_i}\right) = \mathbb{P}(\overline{A_{t_1}} \mid \bigcap_{i \in S_2} \overline{A_i}) \mathbb{P}(\overline{A_{t_1}} \cap \overline{A_{t_2}} \mid (\bigcap_{i \in S_2} \overline{A_i}) \cap \overline{A_{t_1}}) \cdots \mathbb{P}\left(\bigcap_{r \leq k} A_{t_r} \mid (\bigcap_{i \in S_2} \overline{A_i}) \cap \bigcap_{r \leq k-1} A_{t_r}\right)$$

Como $|S_1| = k$, podemos concluir, com base na hipótese de indução, que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A}_t \mid \bigcap_{i \in S_2} \overline{A}_i\right) &\geq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \\ &\geq \frac{1}{e} \end{aligned}$$

A última desigualdade segue dos seguintes fatos. Seja $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^x$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right) \left[\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right]$$

Pela desigualdade de Bernoulli:

$$1 - \frac{1}{x+1} \leq e^{-\frac{1}{x+1}}$$

Aplicando logaritmo dos dois lados da desigualdade, obtemos:

$$\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \leq 0$$

Ou seja, $f(x)$ é estritamente decrescente, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$ e $f(1) = \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$. Por estes fatos podemos concluir que $\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \geq \frac{1}{e}$.

Por fim:

$$\frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in S_1} \overline{A}_t \mid \bigcap_{i \in S_2} \overline{A}_i\right)} \leq eP(A_i) \leq ep \leq \frac{1}{d+1}$$

□

A partir do Lema Local de Lovász, Spencer demonstrou o teorema a seguir.

Lema 4.2. *Se*

$$e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}} < 1, \quad (4.3)$$

então $R(k, k) > n$.

Demonstração. Considere o espaço de probabilidade (Ω, P) sendo Ω os conjuntos dos grafos completos K_n com elos coloridos de azul ou vermelho de forma independente com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja M é um conjunto de k vértices de K_m , A o evento o subgrafo gerado

por M é monocromático e $\mathbb{1}_A$ é a indicadora do evento A . Então:

$$\mathbb{P}(A) = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Seja S o conjunto de todos os M_i conjunto de k vértices, A_i o evento onde o subgrafo gerado por M_i monocromático e $\mathbb{1}_{A_i}$ a indicadora do evento A_i . Vamos criar um grafo de dependência $G[V, E]$ tal que V serão os eventos A_i e dois vértices A_i e A_j são adjacentes se $|M_i \cap M_j| \geq 2$. Note que A_i é adjacente a no máximo d' vértices, sendo que podemos cotar d' por:

$$\begin{aligned} d' &= \binom{n}{k} - \binom{n-k}{k} - k \binom{n-k}{k-1} \\ &\leq \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} = d. \end{aligned}$$

Note que d representa o número de conjuntos com dois vértices pertencentes a M munido com o conjunto com $k-2$ vértices pertencentes a V . Note também que estes conjuntos podem ter k elementos, ou $k-1$, ou $k-2$, uma vez que podemos escolher duas vezes os mesmos vértices escolhidos inicialmente. Então a desigualdade segue deste fato.

Logo, pelo Lema 4.1, se $ep(d+1) = e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, então $P(\bigcap_i \overline{A_i}) > 0$, logo existe um grafo aleatório K_n com elos coloridas de azul ou vermelho de forma que não exista um subgrafo K_k monocromático. Então $R(k, k) > n$. \square

No Capítulo 4.3, utilizaremos o Lema 4.2 com a seguinte cota

$$4 \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} \right) 2^{1-\binom{k}{2}} < 1. \quad (4.4)$$

Afirmamos que se a Desigualdade (4.4) é válida, então a Desigualdade (4.3) também será. De fato, sabemos que $k \geq 3$ e $n \geq k+1$. Então:

$$4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} - e \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} \geq (4-e) \binom{3}{2} \binom{4}{3-2} = 12(4-e) \geq e$$

Logo

$$4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} \geq e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Note que a Desigualdade (4.4) poderia ser substituída por

$$3 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

e o Lema 4.2 continuaria sendo válido. Utilizaremos a Inequação (4.4) por motivos de simplificação.

4.3 Análise assintótica das cotas de Erdős e Spencer

A partir dos Teoremas 4.1, 4.2 e Lema 4.2, desejamos deduzir as cotas da diagonal de Ramsey feita por Erdős e Spencer. Para isso, vamos analisar o comportamento assintótico das mesmas.

Considere o Teorema 4.1. No Livro [6], é determinado o valor n_o maximal para que a cota seja válida no capítulo 7. Primeiramente, queremos uma aproximação para $\binom{n}{k}$. Observe que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = A_{(n,k)} \frac{n^k}{k!}.$$

Afirmamos que se $k = o(\sqrt{n})$ então, $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$. De fato, basta demonstrar que $A_{(n,k)}$ tende a um para este o caso particular. Primeiramente, aplicando logaritmo $A_{(n,k)}$ através de logaritmo.

$$\log A_{(n,k)} = \sum_{i=1}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Uma pequena observação ao leitor, se $x \rightarrow 0$ então $\ln(1-x) \sim -x$. Se $k = o(\sqrt{n})$, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{i}{n}\right) &= - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + \sum_{i=1}^{k-1} O\left(\frac{i^2}{n^2}\right) \\ &= - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{k-1} i^2. \end{aligned}$$

Note que a última igualdade é válida, pois $O\left(\frac{(k-1)^2}{n^2}\right) = a_n$ implica que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c \cdot \frac{i^2}{n^2}$. Logo c é o mesmo para todo $i \leq k-1 = o(\sqrt{n})$.

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{k-1} i^2 = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + o(n^{3/2})O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} + O(1) \sim -\frac{k^2}{2n} = o(1)$$

Logo $\ln A_{(n,k)} = o(1) \Rightarrow A_{(n,k)} \sim 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Então é válido que:

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \sim \left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}. \quad (4.5)$$

Para cotarmos n do Teorema 4.1, utilizaremos primeiramente que $\binom{n}{k} \leq n^k$. Logo se $n^k 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, então o teorema é válido para n . Logo:

$$\begin{aligned} n^k &< 2^{\binom{k}{2}-1} \\ n &< \frac{2^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\frac{1}{k}}} \\ n &= (1 + o(1))2^{\frac{k-1}{2}}. \end{aligned}$$

Note que $k = o(\sqrt{n})$. Portanto temos uma nova cota para o número de Ramsey, sendo que a mesma pode ser melhorada. Se $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$, então:

$$\frac{n^k e^k}{k^k \sqrt{2\pi k}} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1 \Leftrightarrow n < \frac{k 2^{\frac{k-1}{2}}}{e 2^{\frac{1}{k}}} (\sqrt{2\pi k})^{\frac{1}{k}}.$$

Aplicando $n_o = n = (1 + o(1)) \frac{k}{e} 2^{\frac{k-1}{2}}$ obtemos que:

$$R(k, k) \geq (1 + o(1)) \frac{k}{e\sqrt{2}} \sqrt{2}^k$$

Esta foi uma das cotas demonstradas por Erdős. Para a segunda cota tome o Teorema 4.2, e seja $f(m)$ o conjunto:

$$f(m) = m - \binom{m}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Vamos parametrizar m por $m = yn_o$, com $y \geq 1$ e n_o definido acima, com intuito de analisarmos o comportamento assintótico deste conjunto. Devemos comparar o comportamento assintótico de $f(m)$ com $f(n_o)$. Para o caso inicial $y = 1$, $f(n_o) \sim n_o$

uma vez que n_o é o maximal da Cota 4.1. Se $y \neq 1$, então:

$$\begin{aligned} f(yn_o) &= yn_o - \binom{yn_o}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}, \\ &> yn_o - y^k \frac{n_o^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}}, \\ &\sim yn_o - y^k. \end{aligned}$$

Agora devemos analisar o comportamento assintótico de $f(yn_o)$. Para isto, simplificaremos n_o , lembrando que $n_o = (1 + o(1)) \frac{k}{e\sqrt{2}} \sqrt{2}^k$. Observe que o fator $\sqrt{2}^k$, tende ao infinito mais rápido que $\frac{k}{e\sqrt{2}}$ quando $k \rightarrow \infty$. Desta forma $n_o = (\sqrt{2} + o(1))^k$, ou seja, n_o cresce tão rápido quanto $\sqrt{2}^k$ quando k tende ao infinito.

Se $y = \sqrt{2} - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$, temos que $\frac{y}{n_o^{\frac{1}{k}}} < 1$ para k suficientemente grande, uma vez que $\epsilon > 0$ e $n_o \sim \sqrt{2}^k$. Logo $y^k = o(n_o)$, o que implica $f(yn_o) \sim yn_o$.

Se $y = \sqrt{2} + \epsilon$, então $yn_o = o(y^k)$, pois de forma análoga $\epsilon > 0$ e $o(1)$ tende a zero para k suficientemente grande. Logo $f(yn_o) = yn_o - y^k < 0$ se k tendendo ao infinito.

Então a função é otimizada em $y = \sqrt{2} + o(1)$. Se tomarmos y um pouco menor que $\sqrt{2}$, o termo negativo de $f(m)$ é insignificante e pelo Teorema 4.2:

$$R(k, k) \geq yn_o = (1 + o(1)) \frac{k}{e} \sqrt{2}^k. \quad (4.6)$$

Note que a Cota 4.6 melhora a Cota 4.1 por um fator $\sqrt{2}$. Para a última cota inferior, tome o Lema 4.2 e o conjunto:

$$g(n) = 4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}}. \quad (4.7)$$

Lembrando que se $4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, então o Lema 4.2 é válido. Observe que:

$$g(n) = 4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{2k^4}{n^2} \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

De forma análoga ao conjunto $f(m)$, podemos parametrizar $n = zn_o$ com intuito de analisar o comportamento assintótico de $g(n)$. Para o caso inicial $z = 1$,

$$g(n_o) = \frac{2k^4}{n_o^2} \binom{n_o}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \text{ Se } z \neq 1$$

$$g(zn_o) = \frac{2k^4}{(zn_o)^2} \binom{zn_o}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{z^k 2k^4 n_o^k}{z^2 n_o^2 k!} 2^{1-\binom{k}{2}} \sim z^{k-2} g(n_o)$$

Desta forma:

$$g(zn_o) \sim z^{k-2}g(n_o)$$

Agora observe que $g(n_o) \sim \frac{2k^4}{n_o^2}$, pois n_o é o valor maximal de n de forma que $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Lembrando que $n_o = (\sqrt{2} + o(1))^k$, então

$$g(n_o) = \frac{2k^4}{n_o^2} = \frac{2k^4}{(\sqrt{2} + o(1))^{2k}} = \left(\frac{2 + o(1)}{2^{\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{4}{k}}} \right)^{-k}, = (2 + o(1))^{-k}$$

Então se cotarmos z por $2 - \epsilon$ com $\epsilon > 0$, $g(zn_o) = o(1)$, pois $\epsilon > 0$ e $o(1)$ tende a zero. Então pelo Lema 4.2, $R(k, k) > n = zn_o$, logo

$$R(k, k) \geq (1 + o(1)) \frac{k\sqrt{2}}{e} \sqrt{2}^k. \quad (4.8)$$

Então, da mesma forma que a Cota (4.6) pelo Teorema 4.2 foi refinada pela Cota (4.1) por um fator $\sqrt{2}$, a Cota (4.8) pelo Teorema 4.2 foi refinada pela Cota 4.6 por um fator $\sqrt{2}$.

Capítulo 5

Conclusão

Segundo Spencer em [7], o estudo das cotas do número de Ramsey teve como primeiro marco na década de 30 a cota $R(r, k) \leq \binom{r+k-2}{k-1}$ dos matemáticos Erdős e Szekeres em [3]. Para o caso $k = r$, $R(k, k) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi k}}$, sendo esta refinada por Colon em 2009 no Artigo [1], onde foi demonstrado que $R(k, k) \leq k^{-c \frac{\log k}{\log \log k}} 4^k$.

Com relação a conta inferior, Erdős utilizando o método probabilístico obteve a cota $R(k, k) \geq (1 + o(1)) \frac{k}{e\sqrt{2}} \sqrt{2}^k$ que foi melhorada por Spencer em [4], onde foi demonstrado que $R(k, k) \geq (1 + o(1)) \frac{k\sqrt{2}}{e} \sqrt{2}^k$ que refinou a cota por um fator dois.

Por anos, os matemáticos tentaram melhorar as cotas de Colon e Lovász ou demonstrar que estas cotas são equivalentes, o que não houve sucesso. Mas estes problemas têm influenciado na combinatória, bem como no desenvolvimento de grafos aleatórios e no método probabilístico.

Referências

- [1] Colon, D.: *A new upper bound for diagonal Ramsey numbers*. Annals of Mathematics. Pg 941-960. 2009.
- [2] Erdős, P.: *Some remarks on the theory of graphs*. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol 53, pg 292-294. 1947.
- [3] Erdős, P. and Szekeres, G.: *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Math. **2**, pg 463-470. 1935.
- [4] Spencer, J.: *Ramsey's theorem—A new lower bound*. Journal of Combinatorial Theory, vol 18, pg 108-115. 1975.
- [5] Bondy, J.A., and Murty, U.S.: *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated. 2008.
- [6] Spencer, J. H.: *Asymptopia*. American Mathematical Soc. Vol 71. 2014.
- [7] Soifer, A., Spencer, J. H., Radziszowski, S., Dudek, A., Rödl, V. and Gyárfás, A., Burkert, J., Johnson, Jr., Graham, R. L. and Tressler, E.: *Ramsey Theory: Yesterday, today, and tomorrow*. Springer. Vol 26. 2011.
- [8] Frenzen, C. L.: *A New Elementary Proof of Stirling's Formula*. Mathematics Magazine, vol 68, n. 1, pg 55-58. 1995.