UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Kamila Fernanda Lobo Madalena

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS SINGULARES COM TERMO DE CONVECÇÃO E EXPOENTES ILIMITADOS

Belo Horizonte
2025

Kamila Fernanda Lobo Madalena

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS SINGULARES COM TERMO DE CONVECÇÃO E EXPOENTES ILIMITADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luís Albuquerque de Araujo

Belo Horizonte
2025

2025, Kamila Fernanda Lôbo Madalena.
Todos os direitos reservados

Madalena, Kamila Fernanda Lôbo.

M178s Sobre uma classe de problemas singulares com termo de convecção e expoentes ilimitados [recurso eletrônico] / Kamila Fernanda Lôbo Madalena. Belo Horizonte — 2025.
1 recurso online (38 f. il.): pdf.

Orientador: Hamilton Prado Bueno.
Coorientador: Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 36-38

1. Matemática – Teses. 2. Equações diferenciais elípticas – Teses. 3. Dirichlet, Problemas de – Teses. I. Bueno, Hamilton Prado. II. Arújo, Anderson Luís Albuquerque de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre uma classe de problemas singulares com termo de convecção e expoentes ilimitados

KAMILA FERNANDA LÔBO MADALENA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Hamilton Prado Bueno
Orientador – UFMG

Prof. Anderson Luís Albuquerque de Araújo
Coorientador – UFV

Prof. Aldo Henrique de Souza Medeiros
UFV

Prof. Gilberto de Assis Pereira
UFV

Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UnB

Prof. Luiz Fernando de Oliveira Faria
UFJF

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFSCar

Belo Horizonte, 04 de abril de 2025.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço, com todo o meu carinho e gratidão, aos meus pais, Eliandra e Walter, e às minhas avós, Izalina e Izabel, por todo o apoio incondicional e por sempre acreditarem no meu potencial, mesmo nos momentos em que eu mesma duvidei.

Ao meu namorado, Matheus, por ser meu porto seguro: obrigada por todo o amor, pela leveza que trouxe aos dias difíceis e por estar sempre ao meu lado, celebrando cada pequena conquista comigo.

Ao meu orientador, professor Hamilton, sou profundamente grata pela orientação dedicada, pela confiança depositada em meu trabalho e por todo o aprendizado compartilhado ao longo desta trajetória.

Ao meu coorientador, professor Anderson, que me acompanha desde o mestrado, agradeço sinceramente pela paciência constante, pela generosidade em compartilhar seu conhecimento e pelo apoio essencial em cada etapa do caminho.

Aos colegas acadêmicos, por cada troca de saberes, pelas colaborações e pela amizade construída dentro e fora da sala de aula.

Aos professores e funcionários do ICEx/UFMG, pela excelência na formação e pela dedicação que fizeram toda a diferença em minha trajetória.

Estendo também meu sincero agradecimento a todos que, mesmo não tendo sido mencionados nominalmente, me apoiaram, torceram por mim e fizeram parte desse caminho de alguma forma. Sou profundamente grata por cada gesto de incentivo e carinho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, essencial para a concretização deste trabalho e para o desenvolvimento da pesquisa científica em nosso país.

"A força de vontade deve ser mais forte que a habilidade."

Muhammad Ali

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de uma solução para uma classe de problemas de Dirichlet com uma singularidade e um termo de convecção. Mais precisamente, estudamos a existência de uma solução positiva para o problema de Dirichlet

$$-\Delta_p u = \frac{\lambda}{u^\alpha} + f(x, u, \nabla u)$$

em um domínio suave e limitado Ω. O termo de convecção tem expoentes sem limitações superiores nem em u nem em ∇u. Isso é um tanto inesperado e raro. Então, abordamos uma gama de problemas ainda não contidos na literatura.

A solução dos problemas combina a definição de um problema auxiliar, o método de sub e super-solução, o teorema do ponto fixo de Schauder e o método de Galerkin.

Palavras-chave: equação elíptica quasilinear; solução positiva; crescimento por convecção; crescimento supercrítico.

Abstract

In this work, we study the existence of a solution for a class of Dirichlet problems with a singularity and a convection term. More precisely, we study the existence of a positive solution to the Dirichlet problem

$$-\Delta_p u = \frac{\lambda}{u^\alpha} + f(x, u, \nabla u)$$

in a bounded, smooth domain Ω. The convection term has exponents with no upper limitations neither in u nor in ∇u. This is somewhat unexpected and rare. So, we address a range of problems not yet contained in the literature.

The solution of the problems combines the definition of an auxiliary problem, the method of sub- and super-solution, Schauder's fixed point theorem and Galerkin method.

Keywords: quasilinear elliptic equation; positive solution; convection growth; supercritical growth.

Sumário

Introdução 9

1 Preliminares 12
1.1 Lorentz e espaços de Lorentz-Sobolev 12
1.2 Alguns Resultados Sobre Convergência 13
1.3 Alguns Resultados Sobre Problemas Elípticos 14

2 Um Problema Elíptico Singular 18
2.1 Um Problema Aproximado 18
2.1.1 Espaços de Dimensão Finita 19
2.1.2 Existência de uma Solução Aproximada 19
2.2 Demonstração do Teorema 2.1 23

3 Um Problema Singular com Expoentes Ilimitados 25
3.1 Caso $0 < r_1, r_2 < p - 1$ 26
3.1.1 Um Problema Aproximado 26
3.1.2 Existência de uma Solução Aproximada 26
3.1.3 Demonstração do Teorema 3.1 29
3.2 Caso $r_1, r_2 > p - 1$ 30
3.2.1 Demonstração do Teorema 3.2 31

Referências 36

Introdução

Neste trabalho estudaremos uma classe de problemas elípticos singulares com termo de convecção. Buscamos a existência de pelo menos uma solução positiva para dois problemas, ambos definidos em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. No primeiro, a não-linearidade tem crescimento subcrítico no sentido de Sobolev. Já no segundo problema, a não-linearidade tem crescimento supercrítico e, além disso, possui crescimento rápido no gradiente, no sentido que o expoente que acompanha o termo de convecção é maior que p.

Nos últimos anos, equações elípticas singulares têm desafiado os matemáticos. Uma extensa literatura é dedicada a tais problemas com singularidade, especialmente do ponto de vista da análise teórica. O seguinte problema foi estudado em muitos artigos

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \eta(x)u^{-\alpha} & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\eta(x) \geq 0$ in Ω e $0 < \alpha < 1$. Em [9], Canino, Sciunzi e Trombetta mostraram a existência e unicidade de soluções para (1) quando $p \neq 2$ de muitas formas.

Em [22], Giacomoni, Schindler e Takáč estudaram a existência e multiplicidade de soluções fracas para o problema modelado pelo operador p-laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{-\alpha} + u^s & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $1 < p < \infty, p-1 < s \leq p^* - 1, \lambda > 0$, e $0 < \alpha < 1$. Usualmente, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $1 < p < N$ e $p^* = +\infty$ se $p \geq N$.

Além disso, problemas singulares com operadores mais gerais também estão na literatura. Por exemplo,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) &= u^{-\alpha} + u^{\beta} & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

foi considerado por Corrêa, Corrêa e Figueiredo em [12] para um domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), expoentes $0 < \alpha, \beta < p-1$ e uma função $a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, que permite aos autores considerar uma ampla gama de problemas, incluindo o operador p-laplaciano Δ_p e o operador (p,q)-laplaciano, entre outros.

Mais detalhes sobre tópicos relacionados a problemas singulares sem termos de convecção podem ser encontrados em [3, 4, 12, 21, 29] e suas referências.

Problemas elípticos com termos de convecção também foram considerados em várias estruturas. Em [7], usando o método de sub- e super-soluções combinado com uma estimativa

global no gradiente, Bueno e Ercole provam a existência de pelo menos uma solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \beta f(x,u,\nabla u) + \lambda h(x,u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo h, f são não linearidades contínuas que satisfazem $0 \leq \omega_1(x)u^{q-1} \leq h(x,u) \leq \omega_2(x)u^{q-1}$ com $1 < q < p$ e $0 \leq f(x,u,v) \leq \omega_3(x)u^a|v|^b$ com $a, b > 0$ e as funções ω_i, $1 \leq i \leq 3$, são pesos positivos e contínuos em $\bar{\Omega}$. É importante notar que os resultados apresentados em [7] são raros na literatura quando os expoentes de u e $|\nabla u|$ são maiores que $p-1$.

Em [19], Faria, Miyagaki e Motreanu provaram a existência de uma solução positiva para o seguinte problema elíptico quasilinear envolvendo o (p,q)-laplaciano e um termo de convecção aplicando o método de Galerkin e uma base de Schauder,

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu\Delta_q u &= f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em [27], Liu, Motreanu e Zeng, usando o método de sub e super-solução, técnicas de truncamento, teoria da regularidade não linear, princípio alternativo de Leray-Schauder, estabeleceram um resultado da existência de uma solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u(x),\nabla u(x)) + g(x,u(x)) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz uma condição de crescimento adequada (em particular o caso especial quando $r_1 = r_2 = p-1$ em (3.2)) e a função semilinear $g\colon \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é singular em $s = 0$, isto é, $\lim\limits_{s\to 0^+} g(x,s) = +\infty$.

No capítulo 2, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\left(\dfrac{1}{u^\alpha} + a_1\left|\nabla u\right|^{r_2}\right) + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^2, r_2 e a_1 são constantes tais que $0 < r_2 < p-1$, $a_1 > 0$, $0 < \lambda \leq \lambda^*$ é um parâmetro e f é uma não-linearidade contínua satisfazendo

$$0 \leq f(x,t) \leq a_2|t|^{r_1}, \tag{3}$$

sendo r_1 e a_2 são constantes tais que $a_2 > 0$, $r_1 \in (0, p-1) \cup (p-1, p^*-1)$, em que p^* é o expoente crítico de Sobolev, com $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $1 < p < N$ e $p^* = +\infty$ se $p \geq N$.

Nossa abordagem para mostrar a existência de uma solução positiva para o problema (2) é usar o método de Galerkin. Mostraremos existência de uma solução positiva para um problema auxiliar usando o método de Galerkin e uma base de Schauder em $W_0^{1,p}(\Omega)$ combinado com uma consequência do teorema do ponto fixo de Brouwer. A existência de

solução para (2) é então obtida mostrando que a solução do problema auxiliar converge para a solução do problema (2), usando que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo e que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < p^*$ é compacta.

No capítulo 3, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \frac{\lambda}{u^\alpha} + f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

sendo Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $C^{1,1}$, $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma não-linearidade contínua satisfazendo

$$0 \leq f(x,t,\xi) \leq a|t|^{r_1} + b|\xi|^{r_2} \quad a,b > 0, \tag{5}$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro e $r_1, r_2 \in (0, p-1) \cup (p-1, \infty)$.

Note que o lado direito da equação (4) apresenta duas dificuldades principais. Uma é a presença do termo singular, o que o torna ilimitado e, portanto, não podemos usar diretamente as técnicas aplicadas em Bueno e Ercole [7]. Outra dificuldade é que os expoentes r_1 de u e r_2 de ∇u podem ser supercríticos e impõem severas restrições ao uso de técnicas devido à falta de imersões de espaços de Sobolev em espaços adequados.

Para $r_1, r_2 \in (0, p-1)$ a abordagem para mostrar a existência de solução para (4) será a mesma do problema (2). Para $r_1, r_2 \in (p-1, \infty)$ usaremos um método de sub-super solução juntamente com o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados os espaços e as ferramentas principais para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Lorentz e espaços de Lorentz-Sobolev

Ver [1], [11] ou [32] para mais detalhes.

Seja $(\mathcal{R}, m)$ espaço mensurável, positivo, finito e não-atômico. Seja u função mensurável em $\mathcal{R}$. A função distribuição $\mu_u : [0,\infty) \to [0, m(\mathcal{R})]$ é dada por

$$\mu_u(t) = m(\{x \in \mathcal{R} : |u(x)| > t\}) \quad \text{para } t \geq 0.$$

O rearranjo decrescente $u^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ de u é definido como

$$u^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\} \quad \text{para } s \in [0,\infty),$$

e é a única função contínua à direita não crescente em $[0,\infty)$ equidistribuída com u. Note que $u^*(s) = 0$ se $s \geq m(\mathcal{R})$. A função $u^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty)$, definida por

$$u^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s u^*(r)dr \quad \text{para } s > 0,$$

é não-decrescente e cumpre $u^*(s) \leq u^{**}(s)$ para $s > 0$. A desigualdae de Hardy-Littlewood afirma que

$$\int_{\mathcal{R}} |u(x)v(x)|dm(x) \leq \int_0^\infty u^*(s)v^*(s)ds$$

para toda função mensurável u e v em $\mathcal{R}$. Dado $q \in (1,\infty)$ e $\sigma \in (0,\infty]$, o espaço de Lorentz $L^{q,\sigma}(\mathcal{R})$ consiste em todas as funções mensuráveis $u : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ para a qual a quantidade

$$\|u\|_{L^{q,\sigma}(\mathcal{R})} = \left\| s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\sigma}} u^*(s) \right\|_{L^\sigma(0,m(\mathcal{R}))} \tag{1.1}$$

é finita. Se $\sigma \in [1,\infty]$, então $L^{q,\sigma}(\mathcal{R})$ é um espaço de Banach, equipado com a norma, equivalente a $\|\cdot\|_{L^{q,\sigma}(\mathcal{R})}$, obtida substituindo u^* por u^{**} no lado direito de (1.1). Temos que

$$\begin{aligned} &L^{q,q}(\mathcal{R}) = L^q(\mathcal{R}) && \text{para } q \in (1,\infty), \\ &L^{q,\sigma_1}(\mathcal{R}) \subsetneq L^{q,\sigma_2}(\mathcal{R}) && \text{se } \sigma_1 < \sigma_2, \end{aligned}$$

e

$$L^{q_1,\sigma_1}(\mathcal{R}) \subsetneqq L^{q_2,\sigma_2}(\mathcal{R}) \quad \text{se } q_1 > q_2 \text{ e } \sigma_1, \sigma_2 \in (0,\infty].$$

Seja Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. Seja $m \in \mathbb{N}$, e seja $q \in (1,\infty)$ e $\sigma \in [1,\infty]$. O espaço de Lorentz-Sobolev $W^m L^{q,\sigma}(\Omega)$ é um espaço de Banach definido como

$$W^m L^{q,\sigma}(\Omega) = \{u \in L^{q,\sigma}(\Omega) : m\text{-vezes fracamente diferenciável em } \Omega \\ \text{e } \left|\nabla^k u\right| \in L^{q,\sigma}(\Omega) \text{ para } 1 \leq k \leq m\},$$

e é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^m L^{q,\sigma}(\Omega)} = \|u\|_{L^{q,\sigma}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \left\|\nabla^k u\right\|_{L^{q,\sigma}(\Omega)}$$

onde $\nabla^k u$ denota o vetor de todas as derivadas fracas de u de ordem k.

Conforme observado por Cianchi e Maz'ya em [11], a hipótese $\partial\Omega \in W^2 L^{N-1,1}$ significa que Ω é localmente o gráfico de uma função de $N-1$ variáveis cujas derivadas fracas de segunda ordem pertencem ao espaço de Lorentz $L^{N-1,1}$. Esta é a hipótese de integrabilidade mais fraca possível em derivadas de segunda ordem para que as derivadas de primeira ordem sejam contínuas e, portanto, para $\partial\Omega \in C^{1,0}$.

1.2 Alguns Resultados Sobre Convergência

Sejam X um espaço normado, $S \subset X$ um compacto, Y um espaço de Banach e o espaço de Banach $C(S,Y) = \{f : S \longrightarrow Y : f \text{ é contínua}\}$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Definição 1.1. *Um subconjunto $E \subset C(S,Y)$ é equicontínuo em um ponto $x_0 \in S$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$x \in S,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon,\ \forall f \in E.$$

O subconjunto E é equicontínuo, se for equicontínuo em cada ponto de S.

Teorema 1.2 (Arzelà-Ascoli). *Seja S um compacto no espaço normado X. Um subconjunto $E \subset C(S,Y)$ é relativamento compacto se, e somente se, E for equicontínuo e, para cada $x \in S$, $E(x) = \{f(x) : f \in E\}$ for relativamente compacto em Y.*

Demonstração: Ver [8], p.28, Teorema 1.73. ■

Corolário 1.3. *Sejam $f_k \in C(S,\mathbb{K}^N)$ funções tais que $|f_k(x)| < M_x$ para todo $x \in S$ e $k \in \mathbb{N}$, sendo M_x uma constante dependendo de x. Se $E = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ for equicontínuo, então (f_k) possui uma subsequencia convergente.*

Demonstração: Ver [8], p.29, Corolário 1.74 ■

Proposição 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $E = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \in C^1\}$. Se para todo compacto $K \in \Omega$, existir uma constante $M_k > 0$ (positivamente dependendo de K) tal que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M_K$ para quaisquer $x \in K$ e $f \in E$, então E é equicontínuo.*

Demonstração: Ver [8], p.29, Proposição 1.75. ■

1.3 Alguns Resultados Sobre Problemas Elípticos

O próximo lema é uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Como explicado em [2], essa é uma generalização sutil (mas muito útil) ao compará-la com a literatura. Em particular, este resultado nos permite trabalhar em espaços de Banach gerais, com liberdade na escolha da norma. Adotaremos $|x|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ para denotar a norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^d$ e $|x|_d$ para denotar uma norma geral em $\mathbb{R}^d$.

Lema 1.5. *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua com $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ para todo x verificando $|x|_d = r > 0$. Então existe $z_0 \in B[0, r]$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração: Ver [2], Lema 2.4. ■

Teorema 1.6 (Ponto Fixo de Schauder)**.** *Seja M um subconjunto fechado limitado e convexo do espaço de Banach X. Suponha que o operador $\Lambda : M \longrightarrow M$ é compacto. Então Λ tem pelo menos um ponto fixo em M.*

Lema 1.7. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $0 < \alpha < 1$. Então existe uma única solução $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, com $0 < \beta < 1$, do problema,*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = u_0^{-\alpha} & \text{em } \Omega \\ u_0 > 0 & \text{em } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração: Ver [9], Teorema 1.3. ■

Lema 1.8. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Seja $g \in L^\infty(\Omega)$ e suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Então existe uma constante positiva K, dependendo somente de p, N e Ω, tal que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq K \left(\|g\|_\infty\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Demonstração: Ver [7], Lema 1. ■

Teorema 1.9. *Seja Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, tal que $\partial\Omega \in W^2 L^{\theta,1}$ para algum $\theta > N - 1$ e suponha que $f \in L^{N,1}(\Omega)$. Seja $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Então existe uma constante C dependendo no máximo de N e Ω tal que

$$\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \leq C \begin{cases} 2^{\frac{p}{p-1}} (p-1)^{-\frac{\theta N}{\theta-(N-1)}} \|f\|_{N,1} & \text{se } 1 < p < 2 \\ p^{\frac{5}{2}+\frac{\theta N}{\theta-(N-1)}} \|f\|_{N,1} & \text{se } p \geq 2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Além disso, se a suposição $\partial\Omega \in W^2 L^{\theta,1}$ for substituída pela suposição que Ω é convexo, então

$$\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \leq C \begin{cases} 2^{\frac{p}{p-1}} \|f\|_{N,1} & \text{se } 1 < p < 2 \\ p^{\frac{5}{2}} \|f\|_{N,1} & \text{se } p \geq 2 \end{cases} \tag{1.6}$$

em que C é uma constante dependendo no máximo de N e Ω.

Demonstração: Ver [17], Teorema 1.2. ■

Teorema 1.10. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$ tal que $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$, para algum $\theta > 1$. Seja $f \in L^q(\Omega)$, para algum $q > 2$ e seja u_p uma solução fraca do problema de Dirichlet (1.4). Então,*

$$\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \leq C \begin{cases} 2^{\frac{p}{p-1}}(p-1)^{-\frac{2\theta}{\theta-1}}\|f\|_q & \text{se } 1 < p < 2 \\ p^{\frac{5}{2}+\frac{2\theta}{\theta-1}}\|f\|_q & \text{se } p \geq 2, \end{cases} \tag{1.7}$$

para alguma constante C dependendo no máximo de q e Ω. Além disso, se a suposição $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$ for substituída pela suposição que Ω é convexo, então

$$\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \leq C \begin{cases} 2^{\frac{p}{p-1}}\|f\|_q & \text{se } 1 < p < 2 \\ p^{\frac{5}{2}}\|f\|_q & \text{se } p \geq 2, \end{cases} \tag{1.8}$$

para alguma constante C dependendo no máximo de q e Ω.

Demonstração: Ver [17], Teorema 1.3. ■

Lema 1.11. *O operador $-\Delta_p$ define uma correspondência 1-1 entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$, com inversa $(-\Delta_p)^{-1}$ monótona, limitada e contínua.*

Demonstração: Ver [16], Teorema 8. ■

Lema 1.12. *Seja f função contínua não negativa tal que $f(u)$ é não-crescente para $u \in (0,\infty)$, onde $1 < p$. Suponha que $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ são soluções fracas tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(u), & u > 0 \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(v), & v > 0 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

e $u \geq v$ em $\partial\Omega$. Então $u \geq v$ em Ω.

Demonstração: Ver [13], Proposição 2.3. ■

Para os próximos resultados, considere $d(x) := \inf_{y\in\partial\Omega}|x-y|$ a função distância até a fronteira de Ω.

Lema 1.13. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

em que $f \in C(\overline{\Omega})$ e $f \geq 0$. Então existem constantes $0 < c \leq C$ tal que para todo $x \in \Omega$,

$$cd(x) \leq u(x) \leq Cd(x).$$

Demonstração: *Em [5], Teoremas 2.3.6 e 2.5.8 é tratado para o problema com o operador laplaciano, esta demonstração é uma adaptação para o operador p-laplaciano.*

Sendo d uma função contínua e $\partial\Omega$ compacto, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(x) = |x - x_0|$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$u(x) = u(x) - u(x_0) = (x - x_0)\nabla u(y),$$

em que $y = x_0 + t\nu_0$, com $t \in \mathbb{R}$ e ν_0 é o vetor normal interior em x_0.

Pelo Lema 1.8, existe constante positiva C tal que $|\nabla u| \leq C$. Dessa forma,

$$u(x) \leq |x - x_0||\nabla u(y)| \leq Cd(x).$$

Por outro lado, pelo princípio de comparação, segue que $u \geq 0$ em Ω. Além disso, pelo princípio do máximo, segue que $u > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$. Logo, existe $0 < m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < -m < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $A_\varepsilon = \{x - \theta\nu(x) : x \in \partial\Omega,\ 0 < \theta < \varepsilon\} \subset \Omega$ vizinhança de $\partial\Omega$. Para $y \in A_\varepsilon$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) < -m < -\frac{m}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) > \frac{m}{2} > 0.$$

Suponha que $y \in A_\varepsilon$ e $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz $d(y) = |y - x_0|$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$u(y) = u(y) - u(x_0) = (y - x_0)\nabla u(\varrho),$$

em que ϱ pertence ao segmento $y\vec{x}_0$.

Sendo $u > 0$ em Ω, temos

$$u(y) = |u(y)| = |y - x_0||\nabla u(\varrho)|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial u}{\partial \nu}(\varrho) \leq \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(\varrho)\right| \leq |\nabla u(\varrho)||\nu| \\ &\Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial \nu}(\varrho)|y - x_0| \leq |y - x_0||\nabla u(\varrho)| = u(y) \\ &\Rightarrow \frac{m}{2}d(y) \leq u(y). \end{aligned}$$

Agora, seja $\overline{\Omega}_\varepsilon = \Omega \backslash A_\varepsilon$. Note que $\overline{\Omega}_\varepsilon$ é um conjunto compacto, pois A_ε é aberto. Assim, para $x \in \overline{\Omega}_\varepsilon$, temos

$$u(x) \geq \min_{y \in \overline{\Omega}_\varepsilon} u(y) \geq \min_{y \in \overline{\Omega}_\varepsilon} u(y)\frac{d(x)}{d(\Omega)},$$

onde $d(\Omega)$ é o diâmetro de Ω. Considere

$$c = \min\left\{\frac{m}{2}, \frac{\min\limits_{y \in \overline{\Omega}_\varepsilon} u(y)}{d(\Omega)}\right\}.$$

Portanto, $u(x) \geq cd(x)$, $\forall x \in \Omega$. ■

Lema 1.14. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^k para algum $k \geq 1$. Então*

$$\int_\Omega d(x)^{-\sigma} < \infty, \text{ para todo } 0 < \sigma < 1.$$

Demonstração: *Ver [31], Lema B.1.* ■

Lema 1.15. *Cada solução fraca positiva u do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \dfrac{\lambda}{u^\alpha} + u^q & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

em que $q \leq p^* - 1$, satisfaz $c_\lambda d(x) \leq u(x) \leq K_\lambda d(x)$ q.t.p em Ω, onde $0 < c_\lambda \leq K_\lambda < \infty$ são constantes independentes de u.

Demonstração: Ver [22], Lema A.7. ■

Considere o seguinte problema elíptico quasilinear,

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}(x, \nabla u)) = f(x) \text{ em } \Omega; \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \tag{1.11}$$

em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. O operador elíptico quasilinear $(x, u) \mapsto \nabla \cdot (\mathbf{a}(x, \nabla u))$ é definido por

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}(x, \nabla u)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u(x)) \quad \text{para } x \in \Omega \text{ e } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Suponha que $\mathbf{a}$ e f satisfazem as seguintes condições:

(H1) Existem constantes $\kappa \in [0, 1], \gamma, \Gamma \in (0, \infty)$, e $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$a_i(x, 0) = 0; \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta) \cdot \xi_i \xi_j \geq \gamma \cdot (\kappa + |\eta|)^{p-2} \cdot |\xi|^2, \tag{1.13}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta) \right| \leq \Gamma \cdot (\kappa + |\eta|)^{p-2}, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i(x, \eta) - a_i(y, \eta)| \leq \Gamma \cdot (1 + |\eta|)^p \cdot |x - y|^\alpha, \tag{1.15}$$

para todo $x, y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(H2) Existem constantes c e $\delta, 0 < c < \infty$ e $0 < \delta < 1$, tal que

$$0 \leq f(x) \leq c d(x)^{-\delta} \quad \text{q.t.p } x \in \Omega.$$

Proposição 1.16. *Suponha que $\mathbf{a}(x, \eta)$ e $f(x)$ satisfazem as hipóteses (H1) e (H2). Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (única) solução fraca do problema (1.11). E suponha que*

$$0 \leq u(x) \leq C d(x) \quad \text{q.t.p } x \in \Omega, \tag{1.16}$$

onde C é uma constante, $0 \leq C < \infty$. Então existem constantes β e M com $0 < \beta < \alpha$ e $0 \leq M < \infty$, dependendo somente de Ω, N, p, e das constantes γ, Γ, α, c, δ em (H1) e (H2), e da constante C em (1.16), mas não de $\kappa \in [0, 1]$, tal que u satisfaz $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \leq M.$$

Demonstração: *Ver [22], Teorema B.1.* ■

Capítulo 2

Um Problema Elíptico Singular

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 2$ e $0 < \alpha < 1$. Buscamos a existência de pelo menos uma solução positiva para o seguinte problema elíptico singular com fronteira satisfazendo a condição de Dirichilet e operador diferencial p-laplaciano.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \left(\dfrac{1}{u^\alpha} + a_1 \left|\nabla u\right|^{r_2} \right) + f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo r_2 e a_1 são constantes tais que $0 < r_2 < p-1$, $a_1 > 0$, $0 < \lambda \leq \lambda^*$ é um parâmetro e f é uma não-linearidade contínua satisfazendo

$$0 \leq f(x,t) \leq a_2 |t|^{r_1}, \tag{2.2}$$

sendo r_1 e a_2 são constantes tais que $a_2 > 0$, $r_1 \in (0, p-1) \cup (p-1, p^*-1)$, em que p^* é o expoente crítico de Sobolev, com $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $1 < p < N$ e $p^* = +\infty$ se $p \geq N$.

Trabalharemos para provar um resultado sobre existência solução positiva para o problema (2.1). Segue o enunciado do teorema principal deste capítulo:

Teorema 2.1. *Suponha que f é uma função contínua satisfazendo (2.2). Então existe uma constante $\lambda^* > 0$, tal que, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$ o problema (2.1) tem pelo menos uma solução positiva $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

2.1 Um Problema Aproximado

Para qualquer $\varepsilon > 0$ definimos o problema auxiliar por

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \left(\dfrac{1}{(|u| + \varepsilon)^\alpha} + a_1 \left|\nabla u\right|^{r_2} \right) + f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

sendo r_2 e a_1 são constantes tais que $0 < r_2 < p-1$, $a_1 > 0$, $0 < \lambda \leq \lambda^*$ é um parâmetro, f é uma não-linearidade contínua satisfazendo (2.2).

Para provar o Teorema 2.1 mostraremos, usando o método de Galerkin, a existência de uma solução positiva do problema (2.3).

2.1.1 Espaços de Dimensão Finita

A fim de aplicar o método de Galerkin no problema auxiliar (2.3), seja $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m, ...\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ seja

$$V_m \coloneqq [e_1, ..., e_m]$$

o qual é um subespaço m-dimensional de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Em V_m consideremos a norma induzida de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dado $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, considere a função $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e note que

$$|\xi|_m \coloneqq \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

define uma norma em $\mathbb{R}^m$. De fato, sejam $\xi^i = (\xi_1^i, \ldots, \xi_m^i) \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $|\xi^1 + \xi^2|_m \leq |\xi^1|_m + |\xi^2|_m$:

$$\begin{aligned} \left|\xi^1 + \xi^2\right|_m &= \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 e_j + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} + \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \\ &= \left|\xi^1\right|_m + \left|\xi^2\right|_m . \end{aligned}$$

(ii) $|\lambda\xi^1|_m = |\lambda| \, |\xi^1|_m$:

$$\left|\lambda\xi^1\right|_m = \left\| \lambda \sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} = |\lambda| \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} = |\lambda| \left|\xi^1\right|_m$$

(iii) $|\xi^1|_m = 0 \Leftrightarrow \xi^1 = 0$

$(\Rightarrow) 0 = |\xi^1|_m = \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 e_j \right\|_{W_0^{1,N}(\Omega)}$ implica $\sum_{j=1}^{m} \xi_j^1 w_j = 0$. Pela unicidade da representação do vetor nulo (usando uma base de Schauder), concluímos que $\xi^1 = 0$. $(\Leftrightarrow)$ É trivial.

Usando o notação acima podemos identificar os espaços normados $(V_m, \| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$ e $(\mathbb{R}^m, | \cdot |_m)$ pelo isomorfismo isométrico

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in V_m \mapsto \xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{2.4}$$

2.1.2 Existência de uma Solução Aproximada

O próximo lema é um resultado sobre existência de solução para o problema (2.3).

Lema 2.2. *Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\lambda^* > 0$ tal que (2.3) admite uma solução positiva $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \sigma < 1$, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração: Fixe $\varepsilon > 0$ e considere $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m, ...\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina o subespaço m-dimensional $V_m = [e_1, ..., e_m]$. Usando o isomorfismo isométrico (2.4) defina a função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que
$F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), \ldots, F_m(\xi))$, onde

$$F_j(\xi) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla e_j - \lambda \left(\int_\Omega \frac{e_j}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} e_j \right) - \int_\Omega f(x,u)e_j,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ e $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in V_m$.
Vamos verificar as hipóteses do Lema 1.5. Por (2.2), pela desigualdade de Holder e pelo fato de que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para $1 \leq q \leq p^*$ obtemos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \lambda \left(c_1 \|u\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + a_1 c_2 \|u\|^{r_2+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \right) - c_3 \|u\|^{r_1+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes positivas independentes de m e u.

Se $r_1 \in (0, p-1)$, como $r_2 \in (0, p-1)$ e $1 - \alpha < p$ obtemos que $\langle F(\xi), \xi \rangle$ é coerciva, ou seja, para cada $\lambda > 0$ existe $R = R(\lambda) > 0$ grande o suficiente tal que $|\xi|_m := \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R$ implica $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$.

Se $r_1 \in (p-1, p^*-1)$, suponha que $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R$ para algum $R > 0$. Escolheremos R tal que

$$R^p - c_3 R^{r_1+1} \geq \frac{R^p}{2},$$

ou seja,

$$R \leq \left(\frac{1}{2c_3} \right)^{\frac{1}{r_1+1-p}}.$$

Portanto,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \frac{R^p}{2} - \lambda(c_1 R^{1-\alpha} + a_1 c_2 R^{r_2+1}) \geq 0 \quad \iff \quad \lambda \leq \frac{R^p}{2(c_1 R^{1-\alpha} + a_1 c_2 R^{r_2+1})}.$$

Então, escolhemos $\lambda^* := \dfrac{R^p}{2(c_1 R^{1-\alpha} + a_1 c_2 R^{r_2+1})}$. Segue que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*]$.

Pelo Lema 1.5 para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $y \in \mathbb{R}^m$ com $|y|_m \leq R$ tal que $F(y) = 0$. Portanto, existe $u_m \in V_m$ satisfazendo

$$\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq R \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

tal que,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v = \lambda \left(\int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon + |u_m|)^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u_m|^{r_2} v \right) + \int_\Omega f(x, u_m)v, \qquad (2.5)$$

$\forall\, v \in V_m$.

Como R não depende de m e ε, então a sequência (u_m) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, para alguma subsequência, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u_m \to u \quad \text{fortemente em} \quad L^q(\Omega),\ 1 \le q < p^* \quad \text{e q.t.p. em } \Omega, \tag{2.6}$$

pois a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta. Além disso, temos

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le R,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Afirmamos que

$$u_m \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.8}$$

Usando o fato de $\mathcal{B}$ ser uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\ge1}$ em $\mathbb{R}$ tal que $u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Consequentemente

$$\phi_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \to u \quad \text{in } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{quando } m \to \infty. \tag{2.9}$$

Por (2.2) temos

$$\int_\Omega |f(x,u_m)|^{\frac{r_1+1}{r_1}} \le a_2^{\frac{r_1+1}{r_1}} \int_\Omega |u_m|^{r_1+1} \le C, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Assim, $(f(x,u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\frac{r_1+1}{r_1}}(\Omega)$.

Usando $(u_m - \phi_m) \in V_m$ como função teste em (2.5), segue de (2.2), da desigualdade de Holder, da limitação de $\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, de (2.6) e (2.9) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla(u_m - \phi_m)\\
&= \lambda\left(\int_\Omega \frac{(u_m-\phi_m)}{(\varepsilon+|u_m|)^\alpha} + a_1\int_\Omega |\nabla u_m|^{r_2}(u_m-\phi_m)\right) + \int_\Omega f(x,u_m)(u_m-\phi_m)\\
&\le \frac{\lambda}{\varepsilon^\alpha}\|u_m-\phi_m\|_{L^1(\Omega)} + \lambda a_1 \tilde{c}_1 \|u_m\|^{r_2}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|u_m-\phi_m\|_{L^{r_2+1}(\Omega)}\\
&+ \|f(\cdot,u_m)\|_{L^{\frac{r_1+1}{r_1}}(\Omega)}\|u_m-\phi_m\|_{L^{r_1+1}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad m\to\infty,
\end{aligned}$$

pois $r_1 + 1 < p^*$. Assim, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla(u_m-u) = 0.$$

Agora, é suficiente aplicar a propriedade (S_+) do operador $-\Delta_p$ como em [28, Proposição 3.5] para obter (2.8).

Seja $k \in \mathbb{N}$, então para todo $m \ge k$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v_k = \lambda\left(\int_\Omega \frac{v_k}{(\varepsilon+|u_m|)^\alpha} + a_1\int_\Omega |\nabla u_m|^{r_2} v_k\right) + \int_\Omega f(x,u_m)v_k,$$

$\forall v_k \in V_k$.

Note que para $x, y \in \mathbb{R}^N$ existe uma constante positiva C_p dependendo apenas de p tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq C_p \left(|x| + |y|\right)^{p-2} |x - y|. \tag{2.11}$$

A prova dessa desigualdade pode ser vista em [14, Lema 2.1].

Pela desigualdade de Holder e (2.11) temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v_k \right| \leq \int_\Omega \left| |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right| |\nabla v_k| \\
&\leq C_p \int_\Omega \left(|\nabla u_m| + |\nabla u|\right)^{p-2} |\nabla(u_m - u)| \, |\nabla v_k| \\
&\leq C_p \left(\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{p-2} \|\nabla(u_m - u)\|_{L^p(\Omega)} \|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

Assim

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v_k \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_k. \tag{2.12}$$

De forma análoga podemos mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{r_2} v_k \to \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} v_k. \tag{2.13}$$

Por (2.10), $(f(x, u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\frac{r_1+1}{r_1}}(\Omega)$ e como $u_m \to u$ q.t.p. em Ω obtemos $f(x, u_m) \to f(x, u)$ q.t.p. em Ω. Portanto por [23, Teorema 13.44]

$$f(x, u_m) \rightharpoonup f(x, u) \text{ em } L^{\frac{r_1+1}{r_1}}(\Omega).$$

Consequentemente

$$\int_\Omega f(x, u_m)v_k \to \int_\Omega f(x, u)v_k, \forall v_k \in V_k \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{r_1+1}(\Omega). \tag{2.14}$$

Por (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_k = \lambda \left(\int_\Omega \frac{v_k}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} v_k \right) + \int_\Omega f(x, u)v_k, \ \ \forall v_k \in V_k.$$

Como $[V_k]_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$ concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \lambda \left(\int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} v \right) + \int_\Omega f(x, u)v, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, como $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- = \lambda \left(\int_\Omega \frac{u^-}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} u^- \right) + \int_\Omega f(x, u)u^-.$$

Portanto

$$-\|u^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \lambda\left(\int_{\Omega/\{u(x)>0\}} \frac{u^-}{(\varepsilon+|u|)^\alpha} + a_1\int_{\Omega/\{u(x)>0\}} |\nabla u|^{r_2}u^-\right) \geq 0.$$

Então $u_- \equiv 0$ q.t.p. em Ω. Dessa forma, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v = \lambda\left(\int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon+u)^\alpha} + a_1\int_\Omega |\nabla u|^{r_2}v\right) + \int_\Omega f(x,u)v,\ \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A equação em (2.3) garante que $u \not\equiv 0$. Por [24, Teorema 7.1] deduzimos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, os resultados de regularidade na fronteira de [26, Theorem 1] garantem que $u \in C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma \in (0,1)$. Aplicando o princípio do máximo forte [30, Teorema 5.4.1] concluímos que $u > 0$ em Ω, ou seja, u é uma solução positiva do problema (2.3). ■

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

No decorrer da demonstração do Teorema 2.1, denotaremos por λ_1 e ϕ_1 o primeiro autovalor e a primeira autofunção, respectivamente, do operador p-laplaciano, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p\phi_1 = \lambda_1\phi_1^{p-1} & \text{em} \quad \Omega \\ \phi_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

com $\phi_1 > 0$ satisfazendo $\|\phi_1\|_\infty = 1$. Note que o princípio do máximo forte [33, Theorem 5] garante que $\phi_1 > 0$ em Ω e $\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} < 0$ em $\partial\Omega$, respectivamente. Consequentemente, como $\phi_1 \in C^1(\bar{\Omega})$, pelo Lema 1.13, obtemos que existem constantes ℓ e $L, 0 < \ell < L$, tais que $\ell d_\Omega(x) \leq \phi_1(x) \leq L d_\Omega(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Demonstração: Pelo Lema 3.3 para cada $\lambda \in (0,\lambda^*)$ e $n \in \mathbb{N}$ obtemos uma solução $u_n \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ para o problema p-laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda\left(\dfrac{1}{(u_n+\frac{1}{n})^\alpha} + a_1\left|\nabla u_n\right|^{r_2}\right) + f(x,u_n) & \text{em} \quad \Omega \\ u_n > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

isto é

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v = \lambda\left(\int_\Omega \frac{v}{(\frac{1}{n}+u_n)^\alpha} + a_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{r_2}v\right) + \int_\Omega f(x,u_n)v, \tag{2.17}$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em particular, a equação (2.17) vale para todo $v \in C_0^1(\Omega)$.

Segue de (2.7) que (u_n) é uma sequência limitada, pois R não depende de n, ou seja, a limitação é uniforme, podemos argumentar como em (2.8), para encontrar uma subsequência (u_n) tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.18}$$

Seja $w = \lambda^{\frac{1}{p-1-\alpha}} u_0$, onde u_0 é solução de (1.2). Podemos ver que w é uma solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \dfrac{\lambda}{w^\alpha} & \text{em} \quad \Omega \\ w > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Agora, temos que u_n, solução de (2.16), satisfaz

$$-\Delta_p \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = -\Delta_p u_n \geq \frac{\lambda}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \quad \text{e} \quad \left(u_n + \frac{1}{n}\right)\Big|_{\partial\Omega} > 0.$$

Em particular, $u_n + \frac{1}{n}$ é uma super-solução de (2.19). Pelo Lema 1.12 obtemos $u_n + \frac{1}{n} \geq w$.

Seja ϕ_1 solução de (2.15). Para cada $\beta \in \left(0, \lambda_1^{-\frac{1}{p-1-\alpha}}\right)$ temos que $\beta\phi_1$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p(\beta\phi_1) \leq \dfrac{1}{(\beta\phi_1)^\alpha} & \text{em} \quad \Omega \\ \beta\phi_1 > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \beta\phi_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Em particular, $\beta\phi_1$ é uma sub-solução de (1.2). Pelo Lema 1.12 temos $u_0 \geq \beta\phi_1$. Como existe constante $\ell > 0$ tal que $\ell d_\Omega \leq \phi_1$, obtemos que

$$u_0 \geq k d_\Omega, \tag{2.20}$$

onde $k = \ell\beta$. Portanto, por (2.20) obtemos que

$$w = \lambda^{\frac{1}{p-1-\alpha}} u_0 \geq k_1 d_\Omega, \tag{2.21}$$

onde $k_1 = k\lambda^{\frac{1}{p-1-\alpha}}$. Por (2.21) temos

$$u_n + \frac{1}{n} \geq w \geq k_1 d_\Omega \quad \text{implica} \quad \frac{|v|}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \leq \frac{|v|}{(k_1 d_\Omega)^\alpha}, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$

Pelo Lema 1.14 temos que $\dfrac{v}{(k_1 d_\Omega)^\alpha}$ é integrável e como $u_n + \frac{1}{n} \to u$ q.t.p. em Ω temos $u \geq k_1 d_\Omega > 0$,

$$\frac{v}{(\frac{1}{n} + u_n)^\alpha} \to \frac{v}{u^\alpha} \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \quad \text{quando} \quad n \to +\infty \quad \text{e}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_\Omega \frac{v}{(\frac{1}{n} + u_n)^\alpha} \to \int_\Omega \frac{v}{u^\alpha} \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{2.23}$$

Então por (2.18), (2.23), o fato de u_n satisfazer (2.17) e o fato de $C_0^1(\Omega)$ ser denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, fazendo $n \to +\infty$ concluímos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \lambda \left(\int_\Omega \frac{v}{u^\alpha} + a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{r_2} v \right) + \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

Capítulo 3

Um Problema Singular com Expoentes Ilimitados

Neste capítulo vamos estabelecer resultados de existência de soluções positivas para o seguinte problema envolvendo o operador p-laplaciano.

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \dfrac{\lambda}{u^\alpha} + f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma não-linearidade contínua satisfazendo

$$0 \leq f(x,t,\xi) \leq a|t|^{r_1} + b|\xi|^{r_2} \quad a,b > 0, \tag{3.2}$$

em que $r_1, r_2 \in (0, p-1) \cup (p-1, \infty)$.

Mostraremos existência de solução para o problema (3.1) em dois resultados principais.

No primeiro resultado consideraremos o caso $0 < r_1, r_2 < p-1$.

Teorema 3.1. *Suponha que f é uma função contínua satisfazendo* (3.2) *tal que $r_1, r_2 < p-1$. Então o problema* (3.1) *tem pelo menos uma solução positiva $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada $\lambda > 0$.*

Para lidar com o caso $p-1 < r_1, r_2$, precisamos assumir uma hipótese mais forte sobre a regularidade de Ω: ou $\partial\Omega \in C^{1,1}$ ou Ω convexo e $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$, $0 < \tau < 1$. Em ambos os casos, podemos aplicar os Teoremas 1.9 e 1.5, que exigem $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$, $\theta > N-1$, em que $W^2L^{\theta,1}$ denota o espaço de Lorentz-Sobolev (Ver Seção 1.1).

Então, com a hipótese mais forte em $\partial\Omega$, obtemos o próximo resultado.

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado tal que $\partial\Omega \in C^{1,1}$ e $q > \max\{N, p'\}$, onde $p' = \frac{p}{p-1}$ e $p \geq 2$. Suponha que f é uma função contínua satisfazendo* (3.2), *$0 < \alpha q < 1$ e $r_1, r_2 > p-1$. Então existe uma constante $A^* > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0, A^*)$, existe $M := M(\lambda)$ tal que o problema* (3.1) *tem pelo menos uma solução positiva u_λ satisfazendo*

$$\lambda u_0 \leq u_\lambda \leq M u_0 \quad \text{e} \quad \|\nabla u_\lambda\|_\infty \leq M,$$

onde u_0 é solução de (1.2).

3.1 Caso $0 < r_1, r_2 < p - 1$

Para demonstrar o Teorema 3.1 argumentaremos como na demontração do Teorema 2.1 no Capítulo 2.

3.1.1 Um Problema Aproximado

Para qualquer $\varepsilon > 0$ definimos o problema auxiliar por

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \frac{\lambda}{(|u|+\varepsilon)^\alpha} + f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro e f é uma não-linearidade contínua satisfazendo (3.2).

Usaremos o método de Galerkin para mostrar a existência de uma solução positiva do problema (3.3). Em seguida, utilizando os mesmoo argumentos do Capítulo 2 mostramemos que a sequência de soluções u_ε do problema (3.3) converge para uma solução de (3.1).

3.1.2 Existência de uma Solução Aproximada

O próximo lema é um resultado sobre existência de solução para o problema (3.3).

Lema 3.3. *Para qualquer $\varepsilon > 0$ o problema* (3.3) *admite solução positiva $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ para cada $\lambda > 0$ e algum $0 < \sigma < 1$.*

Demonstração: Utilizando os argumentos feitos na Subseção 2.1.1, fixe $\varepsilon > 0$ e considere $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m, ...\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina o subespaço m-dimensional $V_m = [e_1, ..., e_m]$. Usando o isomorfismo isométrico (2.4) defina a função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), \ldots, F_m(\xi))$, em que

$$F_j(\xi) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla e_j - \lambda \int_\Omega \frac{e_j}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} - \int_\Omega f(x,u,\nabla u)e_j,$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ e $u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$.

Afirmamos que F satisfaz as hipóteses do Lema 1.5.

De fato, para $k \in \mathbb{N}$, suponha que $\zeta^k \to \zeta^0$ em $\mathbb{R}^m$ e considere $u_k = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i^k e_i \in V_m$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ fixo, note que

$$F_j(\zeta^k) = \int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla e_j - \lambda \int_\Omega \frac{e_j}{(\varepsilon + |u_k|)^\alpha} - \int_\Omega f(x,u_k,\nabla u_k)e_j.$$

Em virtude dos argumentos utilizados na Seção 2.1, daremos apenas atenção ao termo $\int_\Omega f(x, u_k, \nabla u_k)e_j$. Como

$$u_k = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i^k e_i \to u_0 \coloneqq \sum_{i=1}^{m} \zeta_i^0 e_i \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$

obtemos $u_k \to u_0$ e $\nabla u_k \to \nabla u_0$, ambos em $L^p(\Omega)$.

Como $r_1, r_2 < p-1$ segue de (3.2) que

$$0 \leq f(x,t,\xi) \leq c_1 + c_2|t|^{p-1} + c_3|\xi|^{p-1},$$

em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. A continuidade do operador de Nemytskii resulta em

$$f(\cdot, u_k, \nabla u_k) \to f(\cdot, u_0, \nabla u_0) \quad \text{em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega). \tag{3.4}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega f(x,u_k,\nabla u_k)e_j - \int_\Omega f(x,u_0,\nabla u_0)e_j \right| \\ &\leq \|f(\cdot,u_k,\nabla u_k) - f(\cdot,u_0,\nabla u_0)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|e_j\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, concluímos que $F_j(\zeta^k) \to F_j(\zeta^0)$, provando a continuidade de F.

Segue de (3.2), da desigualdade de Holder e da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \lambda c_1 \|u\|^{1-\alpha}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c_2\|u\|^{r_1+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c_3\|u\|^{r_2+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

onde c_1, c_2 and c_3 são constantes positivas independentes de m e u. Como $r_1, r_2 < p-1$ e $1-\alpha < p$, obtemos que $\langle F(\xi), \xi \rangle$ é coercivo, ou seja, para cada $\lambda > 0$ existe $R = R(\lambda) > 0$ grande o suficiente tal que $|\xi|_m := \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R$ implica $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$.

Pelo Lema 1.5 para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $y \in \mathbb{R}^m$ com $|y|_m \leq R$ tal que $F(y) = 0$. Portanto, existe $u_m \in V_m$ satisfazendo

$$\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq R \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v = \lambda \int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon + |u_m|)^\alpha} + \int_\Omega f(x,u_m,\nabla u_m)v, \tag{3.6}$$

$\forall\, v \in V_m$.

Como R não depende de m, então a sequência (u_m) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, para alguma subsequência, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u_m \to u \quad \text{fortemente em} \quad L^q(\Omega),\ 1 \leq q < p^* \quad \text{e q.t.p. em } \Omega, \tag{3.7}$$

pois a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta. Além disso, temos

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq R,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Afirmamos que

$$u_m \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.9}$$

Usando o fato de $\mathcal{B}$ ser uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}$ tal que $u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Consequentemente

$$\phi_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \to u \ \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.10}$$

Usando $(u_m - \phi_m) \in V_m$ como função teste em (3.6), segue de (3.2), da desigualdade de Holder, da limitação de $\|u_m\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, de (3.7) e (3.10) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla(u_m - \phi_m) = \lambda \int_\Omega \frac{(u_m - \phi_m)}{(\varepsilon + |u_m|)^\alpha} + \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - \phi_m) \\
&\leq \frac{\lambda}{\varepsilon^\alpha}\|u_m - \phi_m\|_{L^1(\Omega)} + \tilde{c}_1\|u_m\|^{r_2}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|u_m - \phi_m\|_{L^{r_2+1}(\Omega)} \\
&\quad + \tilde{c}_2\|u_m\|^{r_1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|u_m - \phi_m\|_{L^{r_1+1}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla(u_m - u) = 0.$$

Agora, é suficiente aplicar a propriedade (S_+) do operador $-\Delta_p$ como em [28, Proposition 3.5] para obter (2.8).

Seja $k \in \mathbb{N}$, então para todo $m \geq k$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v_k = \lambda \int_\Omega \frac{v_k}{(\varepsilon + |u_m|)^\alpha} + \int_\Omega f(x, u_m \nabla u_m) v_k, \quad \forall v_k \in V_k.$$

Procedendo como em (3.4) e (3.5) obtemos

$$f(\cdot, u_m, \nabla u_m) \to f(\cdot, u, \nabla u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) v_k - \int_\Omega f(x, u, \nabla u) v_k \right| \\
&\leq \|f(\cdot, u_m, \nabla u_m) - f(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|v_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \ \text{ quando } \ m \to \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega f(x, u_m, \nabla u_m) v_k \to \int_\Omega f(x, u, \nabla u) v_k, \quad \forall v_k \in V_k.$$

Assim, como feito na demonstração do Lema 2.2 é possível mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla v_k \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_k, \tag{3.11}$$

o que resulta, para todo $v_k \in V_k$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_k = \lambda \int_\Omega \frac{v_k}{(\varepsilon + |u|)^\alpha} + \int_\Omega f(x, u, \nabla u) v_k.$$

Como $[V_k]_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$ concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v = \lambda\int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon+|u|)^\alpha} + \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v.$$

Além disso, como $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u^- = \lambda\int_\Omega \frac{u^-}{(\varepsilon+|u|)^\alpha} + \int_\Omega f(x,u,\nabla u)u^-.$$

Portanto

$$-\|u^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq \lambda\int_{\Omega/\{u(x)>0\}} \frac{u^-}{(\varepsilon+|u|)^\alpha} \geq 0.$$

Então $u_- \equiv 0$ q.t.p. em Ω. Dessa forma, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v = \lambda\int_\Omega \frac{v}{(\varepsilon+u)^\alpha} + \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A equação em (3.3) garante que $u \not\equiv 0$. Por [24, Teorema 7.1] deduzimos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, os resultados de regularidade na fronteira de [26, Theorem 1] garantem que $u \in C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma \in (0,1)$. Aplicando o princípio do máximo forte [30, Teorema 5.4.1] concluímos que $u > 0$ em Ω, ou seja, u é uma solução positiva do problema (3.3). ■

3.1.3 Demonstração do Teorema 3.1

Demonstração: Consideramos primeiro a existência de uma solução tomando sucessivamente $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.3, para cada $\lambda > 0$, existe uma solução $u_n \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ do problema auxiliar (3.3), ou seja, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v = \lambda\int_\Omega \frac{v}{(\frac{1}{n}+u_n)^\alpha} + \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)v, \tag{3.12}$$

e, em particular, (3.12) é válido para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Considerando (3.8) e procedendo como em (3.9), obtemos uma subsequência (u_n) tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Procedendo como em (2.23) na demonstração do Teorema 2.1 é possível mostrar que

$$u \geq k_1 d_\Omega > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \quad \text{e} \quad \int_\Omega \frac{v}{(\frac{1}{n}+u_n)^\alpha} \to \int_\Omega \frac{v}{u^\alpha} \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v = \lambda\int_\Omega \frac{v}{u^\alpha} + \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

3.2 Caso $r_1, r_2 > p-1$

O próximo resultado é técnico e será crucial na prova do Teorema 3.2.

Proposição 3.4. *Seja u_0 solução de* (1.2) *e $p \geq 2$. Existem constantes positivas M e λ tais que*

(i) $aM^{r_1}\|u_0\|_\infty^{r_1} + bM^{r_2} \leq \dfrac{\lambda^{1-\alpha}}{\|u_0\|_\infty^{\alpha}}$;

(ii) $2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} \leq M$;

(iii) $M \leq \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}}$.

Demonstração: Temos,

$$aM^{r_1}\|u_0\|_\infty^{r_1} \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2\|u_0\|_\infty^{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad M \leq \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}$$

e

$$bM^{r_2} \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2\|u_0\|_\infty^{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad M \leq \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_2}}}{(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{1}{r_2}}}.$$

Comparando a desigualdade em (ii) com a primeira expressão obtida para M, observamos que

$$2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} < \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}$$

é equivalente a

$$\lambda^{\frac{(1-\alpha)(r_1+1-p)}{r_1(p-1)}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{p-1}}\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}. \tag{3.13}$$

Resolvendo (3.13) para λ obtemos

$$\lambda < \frac{1}{2^{\frac{r_1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}}.$$

Analogamente,

$$\lambda < \frac{1}{2^{\frac{r_2}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}\left(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}}.$$

Agora consideremos (ii) e (iii). Temos

$$2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} < \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}} \Leftrightarrow \lambda^{\frac{\alpha(1-\alpha)+(p-1)(p-2)}{\alpha(p-1)}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{p-1}}} \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)+(p-1)(p-2)}}}.$$

Portanto, para obter $(i)-(ii)-(iii)$ é suficiente definir

$$A := \min\left\{\frac{1}{2^{\frac{r_1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}}, \frac{1}{2^{\frac{r_2}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}\left(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)+(p-1)(p-2)}}}, 1\right\}$$

e considerar

$$0 < \lambda < A,$$

pois a última desigualdade implica

$$2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} < \min\left\{\frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}, \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_2}}}{(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{1}{r_2}}}, \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}}\right\}.$$

Com tal escolha de λ, podemos escolher M satisfazendo

$$2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} \leq M \leq \min\left\{\frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}, \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_2}}}{(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{1}{r_2}}}, \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}}\right\},$$

e assim a prova está completa. ■

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.2

Demonstração: Para um λ fixo tal que $0 < \lambda < A^*$, onde

$$A^* := \min\left\{\frac{1}{2^{\frac{r_1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}}, \frac{1}{2^{\frac{r_2}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}}, \right.$$
$$\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)+(p-1)(p-2)}}}, \frac{1}{\left(\tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{r_1(p-1)}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_1+1-p)}}},$$
$$\left.\frac{1}{\left(\tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{r_2(p-1)}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{p-1}{(1-\alpha)(r_2+1-p)}}}, \frac{1}{\left(\tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha(1-\alpha)+(p-1)(p-2)}}}, 1\right\}$$

e $\tilde{C}_p$ é definido (3.18), temos, em particular, que λ satisfaz a Proposição 3.4 e

$$\tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} < \min\left\{\frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}, \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_2}}}{(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{1}{r_2}}}, \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}}\right\}. \tag{3.14}$$

Pela Proposição 3.4 e (3.14) obtemos $M = M(\lambda)$ tal que

$$\max\left\{2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}}, \tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}}\right\} \leq M \leq \min\left\{\frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_1}}}{\left(2a\|u_0\|_\infty^{r_1+\alpha}\right)^{\frac{1}{r_1}}}, \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{r_2}}}{(2b\|u_0\|_\infty^{\alpha})^{\frac{1}{r_2}}}, \lambda^{\frac{2-p}{\alpha}}\right\}. \tag{3.15}$$

Sabemos que existem constantes positivas ℓ e C_2 tais que

$$\ell d_\Omega(x) \leq \phi_1(x) \leq C_2 u_0(x),$$

assim, para $c = \ell/C_2$,

$$c d_\Omega(x) \leq u_0(x). \tag{3.16}$$

Se $p' = \frac{p}{p-1}$ e $q > \max\{N, p'\}$, por hipótese temos $0 < \alpha q < 1$. Então

$$\frac{1}{u_0(x)^{q\alpha}} \leq \frac{1}{[cd_\Omega(x)]^{q\alpha}}.$$

Dessa forma, segue do Lema 1.14 que

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{u_0(x)^\alpha}\right)^q = \int_\Omega \frac{1}{u_0(x)^{q\alpha}} \leq \int_\Omega \frac{1}{[cd_\Omega(x)]^{q\alpha}} < \infty. \tag{3.17}$$

Pelas informações anteriores, Teorema 1.9 e Teorema 1.10, concluímos que a solução u_0 de (1.2) satisfaz:

Se $N = 2$, como $\dfrac{1}{u_0^\alpha} \in L^q(\Omega)$, segue do Teorema 1.10 que

$$\|\nabla u_0\|_\infty^{p-1} \leq c_p \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)},$$

e portanto

$$\|\nabla u_0\|_\infty \leq c_p^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Se $N \geq 3$, como $q > N$, temos $L^q(\Omega) \subset L^{N,1}(\Omega)$, nos permitindo concluir que $\dfrac{1}{u_0^\alpha} \in L^{N,1}(\Omega)$. Então, (3.17) resulta em

$$\left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^{N,1}(\Omega)} \leq \overline{c} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)} < \infty$$

e segue do Teorema 1.9 que

$$\|\nabla u_0\|_\infty^{p-1} \leq C_p \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^{N,1}(\Omega)} \leq C_p\, \overline{c} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)},$$

concluímos que

$$\|\nabla u_0\|_\infty \leq (C_p \overline{c})^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Assim, temos para todo $N \geq 2$

$$\|\nabla u_0\|_\infty \leq \tilde{C}_p := \max\left\{ c_p^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}, (C_p \overline{c})^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}} \right\}. \tag{3.18}$$

Agora, definimos o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \lambda u_0 \leq v \leq M u_0,\ \|\nabla v\|_\infty \leq M \right\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. De fato, como $\lambda < \lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} < M$, obtemos que $\tilde{u} = \lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} u_0$ satisfaz

$$\lambda u_0 \leq \tilde{u} \leq M u_0.$$

Como u_0 é solução de (1.2), $\tilde{u}$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p \tilde{u} &= \lambda^{1-\alpha} u_0^{-\alpha} & \text{em } \Omega \\ \tilde{u} &> 0 & \text{em } \Omega \\ \tilde{u} &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e segue de (3.15) e (3.18) a estimativa

$$\|\nabla \tilde{u}\|_\infty \leq \tilde{C}_p \lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} \leq \tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} \leq M,$$

assim, a prova da afirmação está concluída.

Provaremos que para cada $v \in \mathcal{A}$ existe uma única solução positiva u do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda v^{-\alpha} + f(x, v, \nabla v) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Seja $v \in \mathcal{A}$, como $\lambda u_0 \leq v$,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \left| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_\Omega \left(\left| \frac{\lambda}{v^\alpha} \right| + a|v|^{r_1} + b|\nabla v|^{r_2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} + aM^{r_1} \|u_0\|_\infty^{r_1} + bM^{r_2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} + \frac{\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega \left(\frac{2\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 2\lambda^{1-\alpha} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)} < \infty. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Concluímos que $\dfrac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) \in L^q(\Omega)$ e, como $q > p'$, segue que

$$\frac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) \in L^{p'}(\Omega).$$

Aplicando o Lema 1.11 , obtemos a existência e unicidade da solução u.

Agora mostraremos que $u \in \mathcal{A}$, primeiro provaremos que $\lambda u_0 \leq u \leq M u_0$. De fato, seja $v \in \mathcal{A}$. A Proposição 3.4 garante que

$$-\Delta_p u \geq \frac{\lambda}{v^\alpha} \geq \frac{\lambda}{M^\alpha u_0^\alpha} = \frac{\lambda}{M^\alpha} \frac{1}{u_0^\alpha} \geq \lambda^{p-1} \frac{1}{u_0^\alpha} = \lambda^{p-1}(-\Delta_p u_0) = -\Delta_p(\lambda u_0).$$

O princípio de comparação implica $u \geq \lambda u_0$.

Por outro lado, segue da Proposição 3.4 e (3.2) que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) &\leq \frac{\lambda}{\lambda^\alpha u_0^\alpha} + a|v|^{r_1} + b|\nabla v|^{r_2} \\ &\leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{u_0^\alpha} + aM^{r_1} \|u_0\|_\infty + bM^{r_2} \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{u_0^\alpha} + \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\|u_0\|_\infty^\alpha} \\ &\leq \frac{2\lambda^{1-\alpha}}{u_0^\alpha} = 2\lambda^{1-\alpha}(-\Delta_p u_0) = -\Delta_p(2^{\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} u_0). \end{aligned}$$

O princípio de comparação e Proposição 3.4 implicam $u \leq 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}}u_0 \leq Mu_0$, ou seja,

$$\lambda u_0 \leq u \leq Mu_0. \tag{3.21}$$

Mostraremos agora que $\|\nabla u\|_\infty \leq M$. Se $N = 2$, como $\dfrac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) \in L^q(\Omega)$, segue do Teorema 1.10 que

$$\|\nabla u\|_\infty^{p-1} \leq c_p \left\| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(\ .\ , v, \nabla v) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c_p 2\lambda^{1-\alpha} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)},$$

e portanto

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \tilde{c_p} 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}},$$

onde $\tilde{c_p} = c_p^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$.

Se $N \geq 3$, como $q > N$, temos $L^q(\Omega) \subset L^{N,1}(\Omega)$, nos permitindo concluir que $\dfrac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) \in L^{N,1}(\Omega)$. Então, (3.20) resulta em

$$\left\| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(\ .\ , v, \nabla v) \right\|_{L^{N,1}(\Omega)} \leq \bar{c} \left\| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(\ .\ , v, \nabla v) \right\|_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

Segue do Teorema 1.9 que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_\infty^{p-1} &\leq C_p \left\| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(\ .\ , v, \nabla v) \right\|_{L^{N,1}(\Omega)} \\ &\leq C_p\, \bar{c} \left\| \frac{\lambda}{v^\alpha} + f(\ .\ , v, \nabla v) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_p\, \bar{c}\, 2\lambda^{1-\alpha} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \hat{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}},$$

onde $\hat{C}_p = (C_p\bar{c})^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$.

Assim, como $\tilde{C}_p = \max\left\{ c_p^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}, (C_p\bar{c})^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{u_0^\alpha} \right\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}} \right\} = \max\{\tilde{c_p}, \hat{C}_p\}$, temos para todo $N \geq 2$

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}}.$$

Portanto, por (3.15) concluímos

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \tilde{C}_p 2^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{p-1}} \leq M.$$

Afirmação. Temos $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ para alguem $0 < \beta < 1$, uniformemente com respeito a $v \in \mathcal{A}$.

Para provar a Afirmação, aplicaremos o Lema 1.15. De fato, como cada solução U de (1.10) é uma super-solução de (1.2), o princípio de comparação (Lema 1.12) resulta em $w = \lambda^{\frac{1}{p-1+\alpha}}u_0 \leq U$.

Pelo Lema 1.15 existe uma constante positiva K_λ tal que $U \leq K_\lambda d_\Omega$, consequentemente, $u_0 \leq K_\lambda d_\Omega$. Além disso, por (2.20) existe uma constante positiva k tal que $u_0 \geq k d_\Omega$. Mais ainda, como

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{v^\alpha} + f(x, v, \nabla v) &\leq \frac{\lambda}{v^\alpha} + a|v|^{r_1} + b|\nabla v|^{r_2} \\ &\leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} + aM^{r_1}\|u_0\|_\infty^{r_1} + bM^{r_2} \leq \frac{2\lambda^{1-\alpha}}{|u_0|^\alpha} \\ &\leq \frac{K_1}{d_\Omega^\alpha} = K_1 d_\Omega^{-\alpha} \text{ q.t.p. em } \Omega,\end{aligned}$$

onde $K_1 = \frac{2\lambda^{1-\alpha}}{k^\alpha}$, como uma consequência de (3.16). Além disso, (3.21) implica

$$u \leq M u_0 \leq M K_\lambda d_\Omega.$$

Dessa forma, a Proposição 1.16 garante que a solução de (3.19) satisfaz $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \beta < 1$.

Como consequência dos argumentos anteriores, o operador

$$\begin{array}{rccc} T : \mathcal{A} & \longrightarrow & W_0^{1,p}(\Omega) \\ v & \longmapsto & u, \end{array}$$

está bem definido, u sendo solução positiva de (3.19). Além disso, T é contínuo e compacto. De fato, seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $T(v_n) = u_n$. como

$$\frac{\lambda}{v_n^\alpha} + f(x, v_n, \nabla v_n) \leq \frac{K_1}{d_\Omega^\alpha} = K_1 d_\Omega^{-\alpha}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

pelos argumentos anteriores e Proposição 1.16 concluímos que

$$\|u_n\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \leq \Gamma$$

ou, equivalentemente,

$$\|T(v_n)\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \leq \Gamma.$$

Consequentemente, pela Proposição 1.4, $\mathcal{A}$ é um subconjunto equicontínuo . Portanto, pelo Corolário 1.3, existe uma subsequência convergente de $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em $C^1(\bar{\Omega})$ que, em particular, é convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dessa forma, como $\mathcal{A}$ é um conjunto limitado, convexo e invariante sob T. Segue, do Teorema do Ponto Fixo de Schauder 1.6, a existência de um ponto fixo u_λ para T. E o ponto fixo u_λ satisfaz (3.1), com u_λ satisfazendo a equação $-\Delta_p u = \lambda u^{-\alpha} + f(x, u, \nabla u)$. ■

Referências

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.

[2] A. L. A. de Araujo, L. F. O. Faria, *Existence, nonexistence, and asymptotic behavior of solutions for N-Laplacian equations involving critical exponential growth in the whole $\mathbb{R}^N$*. Math. Ann. **384** (2022), no. 3–4, 1469–1507.

[3] Y. Bai, D. Motreanu and S. Zeng, *Continuity results for parametric nonlinear singular Dirichlet problems*. Adv. Nonlinear Anal. **9** (2020), no.1, 372–387.

[4] Y. Bai, N. S. Papageorgiou and S. Zeng, *A singular eigenvalue problem for the Dirichlet (p, q)-Laplacian*. Math. Z. **300** (2022), no. 1, 325–345.

[5] M. Beygmohammadi, *Hopf's Type Estimates near Singular Boundary Points*. 2015. 94 f. Dissertação (mestrado) – Curso de Matemática, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, Universität zu Köln, Kangavar, 2015.

[6] H. Brezis, *Function Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[7] H. Bueno and G. Ercole, *A quasilinear problem with fast growing gradient*. Appl. Math. Letters **26** (2013), 520–523.

[8] H. Bueno, G. Ercole, H. C. Rodrigues, A. Zumpano, *Ortogonalidade: Um passeio pela Análise Funcional*. SBM, Rio de Janeiro, 2021.

[9] A. Canino, B. Sciunzi, and A. Trombetta, *Existence and uniqueness for p-Laplace equations involving singular nonlinearities*. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **23** (2016), no. 2, Art. 8, 18 pp.

[10] M. M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti, *Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2011.

[11] A. Cianchi and V. G. Maz'ya, *Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear elliptic equations*. Comm. Partial Differential Equations **36** (2011), no. 1, 100–133.

[12] F.J. Corrêa, A.S. Corrêa and G. Figueiredo, *Positive solution for a class of p&q-singular elliptic equation*. Nonlinear Anal. Real World Appl. **16** (2014), 163–169.

[13] M. Cuesta and P. Takáč, *A strong comparison principle for positive solutions of degenerate elliptic equations*. Differential Integral Equations **13** (2000), no. 4-6, 721–746.

[14] L. Damascelli, *Comparison theorems for some quasiliner degenerate elliptic operators and appçications to symmetry and monotonicity results*. Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. 15 (1998): 493–516.

[15] E. DiBenedetto, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*. Nonlinear Anal. **7** (1983), no. 8, 827–850 (1998).

[16] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*. Port. Math. (N.S.) **58** (2001), no.3, 340–378.

[17] G. Ercole, *On a global gradient estimate in p-Laplacian problems*, to appear in Israel J. Math.

[18] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. Berkeley: University of California, 1998.

[19] L. F. O. Faria, O. H. Miyagaki and D. Motreanu, *Comparison and positive solutions for problems with* (p, q)*-Laplacian and convection term*. Proc. Edinb. Math. Soc. **57** (2014), no. 2, 687–698 (2014).

[20] F. Francesca, and D. Puglisi. *A singular semilinear problem with dependence on the gradient*. Journal of Differential Equations **260** (2016), no. 4, 3327–3349.

[21] L. Gasiński and N. S. Papageorgiou, *Nonlinear elliptic equations with singular terms and combined nonlinearities*. Ann. Henri Poincaré **13** (2012), no. 3, 481–512.

[22] J. Giacomoni, I. Schindler and P. Takáč, *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **6** (2007), 117–158.

[23] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, 1975.

[24] O.A. Ladyzhenskaja, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press, New York-London, 1968, xviii+495 pp.

[25] A. C. Lazer and P. J. Mckenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 3, 721–730.

[26] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*. Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1203–1219.

[27] Z. Liu, D. Motreanu, and S. Zeng, *Positive solutions for nonlinear singular elliptic equations of p-Laplacian type with dependence on the gradient*. Calc. Var. Partial Differential Equations **58** (2019), no. 1, Paper no. 28, 22 pp.

[28] D. Motreanu, V. V. Motreanu and N. S. Papageorgiou, *Multiple constant sign and nodal solutions for Nonlinear Neumann eigenvalue problems*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **10** (2011), no. 3, 72–755.

[29] N. S. Papageorgiou, V. D. Rădulescu and L. Wen, *Strongly singular nonhomogeneous eigenvalue problems*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **117** (2023), no.1, Paper No. 32, 17 pp.

[30] P. Pucci and J. Serrin, *The maximum principle*. In: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol.73. Birkhauser,Basel (2007).

[31] M. F. Stapenhorst, *A class of singular elliptic equations*. Ph. D. dissertation, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Departamento de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, Brasil.

[32] L. Tartar, *Imbedding theorems of Sobolev spaces into Lorentz spaces*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **1** (1998), no. 3, 479–500.

[33] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*. Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 191–202.