

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Igor Martins Silva

**Computação do corpo das invariantes de uma álgebra de Lie
via folheações por curvas**

Belo Horizonte

2025

Igor Martins Silva

Computação do corpo das invariantes de uma álgebra de Lie via folheações por curvas

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Csaba Schneider

Belo Horizonte
2025

S586c	Silva, Igor Martins. Computação do corpo das invariantes de uma álgebra de Lie via folheações por curvas [recurso eletrônico] / Igor Martins Silva. Belo Horizonte — 2025. 1 recurso online (99 f. il.): pdf. Orientador: Csaba Schneider. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 93-96. 1. Matemática – Teses. 2. Invariantes – Teses. 3. Lie, Álgebra de – Teses. 4. Álgebra Computacional – Teses. 5. Classes características – Teses. I. Schneider, Csaba. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título. CDU 51(043)
-------	---

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

Computação do corpo das invariantes de uma álgebra de Lie via folheações por curvas

IGOR MARTINS SILVA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Documento assinado digitalmente



CSABA SCHNEIDER
Data: 23/03/2025 09:59:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Csaba Schneider
Orientador - UFMG

Documento assinado digitalmente



ARTEM LOPATIN
Data: 23/03/2025 18:27:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Artem Lopatin
UNICAMP

Documento assinado digitalmente



ARTURO ULISES FERNANDEZ PEREZ
Data: 24/03/2025 10:04:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Arturo Ulises Fernández Pérez
UFMG

Documento assinado digitalmente



ELIZAVETA VISHNYAKOVA
Data: 25/03/2025 09:48:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Elizaveta Vishnyakova
UFMG

Documento assinado digitalmente



JOSE LUIS VILCA RODRIGUEZ
Data: 25/03/2025 14:05:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. José Luis Vilca Rodriguez
USP

Documento assinado digitalmente



RENATO VIDAL DA SILVA MARTINS
Data: 26/03/2025 15:35:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG

Belo Horizonte, 27 de fevereiro de 2025.

Agradecimento

Sou, certamente, uma pessoa de muita sorte. Tenho o mérito do esforço e da dedicação, eu admito. Eu tento fazer a minha parte, claro. Mas sem o fator sorte, nenhum time é campeão. E se hoje escrevo esta tese é porque tive a sorte dos campeões. Fui premiado em vários momentos com algum fator, às vezes, imperceptível, que me guiou em uma direção ao invés de outra e me fez chegar até aqui. Essa sorte trouxe-me pessoas que fizeram e fazem parte da minha história e contribuíram, direta ou indiretamente, para minha evolução e, em especial, para a realização desta tese. Foram colegas, amigos, professores, familiares e até mesmo desconhecidos que, de diferentes formas, tornaram possível a superação dos desafios dessa incrível e árdua jornada. Agradeço profundamente a todos que estiveram comigo nesse percurso.

Em especial, expresso minha gratidão aos meus pais, João e Eleonora, pelo exemplo, apoio e força incondicionais; à minha esposa, Raquel, pelo cuidado, compreensão e companheirismo inabaláveis; aos meus irmãos, Ingrid e Italo, pela amizade sincera; ao meu cunhado Moisés, a quem não agradei devidamente na dissertação de mestrado, pela nobre atitude de se deslocar de onde estava para ficar comigo e com sua irmã naquele momento difícil, oferecendo-me sua companhia e apoio enquanto eu estava doente; aos meus sogros, Geraldo e Eneida, por terem me permitido morar com eles em Guanhães, tratando-me como filho, no primeiro ano de doutorado, quando eu estava sem bolsa, de forma que eu não tive de me separar da Raquel, com quem eu já morava, mesmo sendo ainda apenas namorados à época; à minha prima Bruna, por me emprestar sua casa, que estava à venda, quando voltei de Guanhães para Belo Horizonte, no período em que as aulas voltaram a ser presenciais, demonstrando grande amizade; ao professor Lucas Calixto, por sua paciência, compreensão e orientação durante o mestrado e no início do doutorado; ao professor Csaba Schneider, por ter me aceitado como orientando na metade do doutorado, por ter desenvolvido comigo esta tese e por compartilhar sua vasta experiência e amplo conhecimento, permitindo-me viver a pesquisa matemática ao lado de um grande matemático; à UFMG e ao Departamento de Matemática pela infraestrutura; e à Capes, pela bolsa de estudos, crucial para minha permanência no doutorado.

Concluir este trabalho é motivo de grande felicidade para mim, e é com alegria que compartilho esse momento com todos que fizeram parte dessa trajetória.

Muito obrigado a todos!

Epígrafe

“Uma grande coisa sobre a filosofia [e sobre a matemática] é que ela começa com algo tão simples que não parece valer a pena afirmar, e termina com algo tão paradoxal que ninguém acreditará.”

Bertrand Russell, em The Philosophy of Logical Atomism, adaptada por mim.

Resumo

Nesta tese, apresentamos um procedimento algorítmico para a computação de um conjunto gerador algebricamente independente da álgebra dos invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente. Inicialmente, introduzimos conceitos fundamentais sobre álgebras. Em seguida, apresentamos o método das características, uma ferramenta analítica empregada na resolução de equações diferenciais parciais, adaptada ao contexto algébrico, e o aplicamos a derivações triangulares, obtendo um conjunto gerador algebricamente independente de seus núcleos. Também abordamos as derivações lineares, descrevendo um procedimento efetivo para calcular um conjunto algebricamente independente que gera os núcleos dessas derivações. Finalmente, utilizamos a teoria desenvolvida para determinar um conjunto gerador algebricamente independente da álgebra dos invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente, demonstrando que, ao considerar uma base triangular da álgebra de Lie, a derivação adjunta de um elemento dessa base, restrita ao núcleo da derivação adjunta do elemento anterior, resulta em uma derivação triangular. Por fim, apresentamos exemplos computacionais para álgebras de Lie solúveis de dimensões até quatro, utilizando as técnicas descritas para derivações triangulares e lineares.

Palavras-chave: álgebra de Lie; álgebra de invariantes; método das características; derivações triangulares; derivações lineares; geradores algebricamente independentes.

Abstract

In this thesis, we present an algorithmic procedure for computing an algebraically independent generating set of the algebra of rational invariants of a nilpotent Lie algebra. We begin by introducing fundamental concepts of algebras. Next, we present the method of characteristics, an analytical tool used in solving partial differential equations, adapted to the algebraic context, and apply it to triangular derivations, obtaining an algebraically independent generating set of their kernels. We also address linear derivations, describing an effective procedure to compute an algebraically independent set that generates the kernels of these derivations. Finally, we use the developed theory to determine an algebraically independent generating set of the algebra of rational invariants of a nilpotent Lie algebra, demonstrating that, by considering a triangular basis of the Lie algebra, the adjoint derivation of an element of this basis, restricted to the kernel of the adjoint derivation of the previous element, results in a triangular derivation. Lastly, we present computational examples for solvable Lie algebras of dimensions up to four, using the techniques described for triangular and linear derivations.

Keywords: Lie algebra; invariants algebra; method of characteristics; triangular derivations; linear derivations; algebraically independent generators.

Lista de notações

$\mathfrak{t}_n$	Álgebra das matrizes triangulares superiores estritas de tamanho $n \times n$.
$\mathbb{F}[L]^L$	Álgebra dos invariantes polinomiais de uma álgebra de Lie L .
$\mathbb{F}(L)^L$	Álgebra dos invariantes racionais de uma álgebra de Lie L .
$\mathbb{F}[L]$	Álgebra dos polinômios $\mathbb{F}[x_n]$, onde $\{x_1, \dots, x_n\}$ é base da álgebra de Lie L .
$\mathbb{F}[x_n]$	Álgebra dos polinômios nas variáveis $x_1, \dots, x_n$.
$\mathbb{F}[\mathcal{V}]$	Anel de coordenadas de um conjunto algébrico afim $\mathcal{V}$.
$J_k(\lambda)$	Bloco de Jordan de tamanho $k \times k$ com $\lambda \in \mathbb{F}$ na diagonal.
$\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$	Categoria das $\mathbb{F}$ -álgebras associativas, comutativas e com identidade.
$\mathbf{Ring}$	Categoria dos anéis comutativos, associativos e com identidade.
$\mathbf{Set}$	Categoria dos conjuntos.
$\mathcal{Z}(L)$	Centro de uma álgebra de Lie L .
$\text{lc}(f)$	Coeficiente líder de um polinômio $f \in \mathbb{F}[x_n]$.
$\mathcal{V}(I)$	Conjunto algébrico afim associado $I \trianglelefteq \mathbb{F}[x_n]$.
$\text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$	Conjunto das $\mathbb{F}$ -derivações de $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$.
$\text{Mat}_{n \times m}(R)$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com entradas em $R \in \mathbf{Ring}$.
$\mathcal{X}\mathbb{F}^n$	Conjunto de todos os campos vetoriais de $\mathbb{F}^n$.
$\mathbf{M}$	Conjunto dos monômios nas variáveis $x_1, \dots, x_n$.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{Z}_{>0}$	Conjunto dos números inteiro positivos.
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Conjunto dos números não negativos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{T}$	Conjunto dos termos nas variáveis $x_1, \dots, x_n$.
$\mathcal{F}(S)$	Conjunto $\{f : S \rightarrow A \mid S \subseteq A^n\}$, onde $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathcal{Alg}$.
$\text{supt}(f)$	Conjunto $\{\mu \in \mathbb{M} \mid \text{o termo de suporte } \mu \text{ tem coeficiente não nulo em } f\}$.
$\mathbb{F}(\mathcal{V})$	Corpo das funções racionais de um conjunto algébrico afim $\mathcal{V}$.
$\mathbb{F}$	Corpo de característica zero.
$\mathbb{F}(x_n)$	Corpo de frações de $\mathbb{F}[x_n]$.
$\text{Frac}(R)$	Corpo de frações de um domínio integral R .
$\mathbb{F}(A)$	Corpo gerado pelo conjunto A .
$\text{GrF}(R)$	Corpo graduado de um domínio Φ -graduado R .
$\text{den}(f)$	Denominador de $f \in \mathbb{F}(x_n)$.
$D_{A,X}$	Derivada em $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ associada a $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$.
$\dim_{\text{Krull}}(R)$	Dimensão de Krull de um anel R .
$T_p \mathbb{F}^n$	Espaço tangente de $\mathbb{F}^n$ no ponto p .
$T\mathbb{F}^n$	Fibrado tangente de $\mathbb{F}^n$.
δ_{ij}	Função delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$.
$\text{trdeg}(A)$	Grau de transcendência de uma $\mathbb{F}$ -álgebra A .
$\text{deg}(f)$	Grau total de um polinômio $f \in \mathbb{F}[x_n]$.
$\mathcal{I}(X)$	Ideal de aniquilação de $X \subseteq \mathbb{F}^n$.
$\langle r_1, \dots, r_n \rangle$	Ideal de um anel R gerado por $r_1, \dots, r_n \in R$.
∇_X	Matriz coluna das derivadas $D_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, isto é, $\nabla_X^T = (D_{x_1} \ \dots \ D_{x_n})$.
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	Matriz diagonal em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ com valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
$\text{lm}(f)$	Monômio líder de um polinômio $f \in \mathbb{F}[x_n]$.
A^D	Núcleo de uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$.
$\text{wt}(f)$	Peso de um polinômio $f \in \mathbb{F}[x_n]$.
$\mathbb{F}[a_r]$	Subálgebra finitamente gerada por $\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq A \in \mathbb{F}\text{-}\mathcal{Alg}$.
$\text{span}_V(A)$	Subespaço de V gerado pelo conjunto $A \subseteq V$.
$\text{lt}(f)$	Termo líder de um polinômio $f \in \mathbb{F}[x_n]$.

Sumário

Introdução	12
1 Motivação	12
2 Objetivo	15
3 Contexto bibliográfico	16
4 Estrutura do texto	18
1 Noções algébricas preliminares	20
1.1 Alguns conceitos sobre anéis	20
1.2 Propriedades da álgebra de polinômios em n variáveis	21
1.3 Ordem monomial	24
1.4 Topologia de Zariski para $\mathbb{F}^n$	27
1.5 Álgebra de Lie nilpotente e solúvel	30
1.6 Derivações de uma álgebra	32
1.6.1 Observação sobre a relação entre derivação e campo vetorial	35
1.7 Álgebra de invariantes de uma álgebra de Lie	36
2 Método das características	40
2.1 Hipóteses para aplicação do método	40
2.2 Obtenção de geradores algebricamente independentes	44
3 Derivações triangulares	47
3.1 Contextualização e definição	47
3.2 Aplicação do método das características	51
3.3 Invariantes polinomiais	55
3.4 Exemplo: <i>down operator</i>	56
4 Derivações lineares de $\mathbb{F}(x_n)$	59
4.1 A forma matricial de derivações lineares	59
4.2 Derivação associada a uma matriz na forma normal de Jordan	61
4.2.1 Caracterização do núcleo	62
4.2.2 Geradores do núcleo	67
4.2.3 Exemplo: matriz $J_n(\lambda)$ com $\lambda \neq 0$	70

5 Geradores do corpo de invariantes racionais	73
5.1 Algoritmo para álgebra de Lie nilpotente	73
5.1.1 Consequências algébricas	80
5.1.2 Exemplo: álgebras L onde $\dim(L) \leq 6$	81
5.1.3 Exemplo: álgebra $\mathfrak{t}_n$ das matrizes triangulares superiores estritas $n \times n$. . .	87
5.2 Álgebra de Lie solúvel: exemplo quando $\dim(L) \leq 4$	88
Referências	93
Índice remissivo	97

Introdução

1 Motivação

Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero. Considerando $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de L , defina $\mathbb{F}[L] := \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ a álgebra dos polinômios nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{F}$. Para encurtar a notação, muitas vezes, vamos escrever $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ no lugar de $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Considerando L como um módulo sobre si mesmo, onde a ação é a adjunta, podemos, para cada $x \in L$, definir uma $\mathbb{F}$ -derivação de $\mathbb{F}[L]$ nele mesmo, estendendo $\text{ad}(x)$ por linearidade e pela regra de Leibniz. Nesse caso, se denotarmos, por abuso de notação, essa derivação obtida de $\text{ad}(x)$ pelo mesmo símbolo, temos que, para todo $f \in \mathbb{F}[L]$,

$$\text{ad}(x)(f) = \sum_{i=1}^n [x, x_i] D_{x_i}(f), \quad (1.1)$$

onde $D_{x_i}(f)$ é a derivada parcial de f com respeito a variável x_i . Dado um operador de $\mathbb{F}[L]$ para $\mathbb{F}[L]$, seu *núcleo* é o conjunto formado por todos os elementos do domínio que são levados no elemento neutro aditivo do módulo do contradomínio. Assim, em particular, o núcleo de $\text{ad}(x)$ é

$$\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\text{ad}(x)} := \{f \in \mathbb{F}[L] \mid \text{ad}(x)(f) = 0\}.$$

polinômio nulo $\longleftarrow$

A álgebra de invariantes polinomiais de L é definida como sendo

$$\mathbb{F}[L]^L := \{f \in \mathbb{F}[L] \mid \text{ad}(x)(f) = 0, \text{ para todo } x \in L\}.$$

Mas, é direto mostrar que

$$\mathbb{F}[L]^L = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\text{ad}(x_i)}.$$

Tal álgebra tem importância tanto teórica, na própria Matemática, como também prática, na Física.

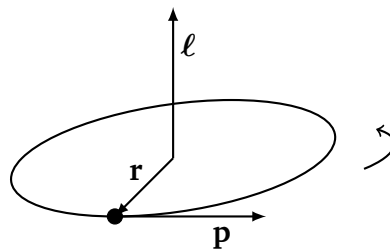
Na Matemática, considerando a teoria de representações de álgebras de Lie, sabemos que a categoria de módulos sobre uma álgebra de Lie L é isomorfa à categoria de módulos sobre a álgebra universal envolvente de L , $U(L)$. Além disso, sabemos também, do Lema de Schur, que se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e V é um $U(L)$ -módulo simples, então, considerando a representação correspondente ao V , dada por $\rho : U(L) \rightarrow \text{End}(V)$, temos que $\rho(\mathcal{Z}(U(L)))$ é uma subálgebra

de $\{\lambda \text{id}_V \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$. Portanto, saber quem é $\mathcal{Z}(U(L))$ é algo interessante, já que sua representação é realizada apenas por multiplicação de escalares. Aqui é onde entra a álgebra de invariantes polinomiais, já que temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Teorema de Duflo). Seja L é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então $\mathcal{Z}(U(L))$ e $\mathbb{F}[L]^L$ são álgebras isomorfas. $\square$

A demonstração desse resultado é bastante difícil e pode ser vista no Teorema 2 em [Duf77]. Uma outra demonstração desse teorema é apresentada no Teorema 7 em [Kon99], onde é usado cohomologia, evitando-se separar a demonstração em vários casos. Tal resultado vale mesmo para corpos que não sejam algebricamente fechados, desde que a álgebra de Lie seja nilpotente.

Considerando a motivação física para o estudo de $\mathbb{F}[L]^L$, temos, da física clássica, que o *momento linear* de um objeto é uma grandeza vetorial que, grosseiramente, mede a vontade que um objeto tem em se manter em linha reta. Precisamente, o momento linear $\mathbf{p}$ de um objeto é calculado pelo produto da massa do objeto, m , pelo vetor velocidade do objeto, $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Na situação de um sistema composto por vários objetos, o momento linear do sistema é definido como sendo a soma do momento linear dos objetos desse sistema. Nesse caso, vê-se a importância do momento linear, uma vez que em um sistema fechado, não importa como os objetos se interajam, se a resultante de forças externas for nula, o momento linear do sistema é conservado, por mais que, individualmente, o momento linear dos objetos se altere. Observe que, no momento linear, os movimentos analisados foram de translações. Agora, considerando os movimentos rotacionais em $\mathbb{R}^3$ pode-se definir um análogo ao momento linear, que é *momento angular*, ℓ : grandeza vetorial dada pelo produto vetorial da posição $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ em que o objeto se encontra, em relação a um ponto de referência, pelo momento linear, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, isto é, $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.



Há também uma lei de conservação do momento angular, semelhante a do momento linear: o momento angular de um sistema de objetos sujeito a um torque externo nulo é constante. Contudo, para o nosso propósito, que é dar uma motivação física para o estudo da álgebra de invariantes polinomiais, precisamos generalizar o momento angular usando a ótica da física quântica. Para isso, é preciso ter em vista que na física quântica os operadores lineares são as entidades matemáticas que desempenham um papel fundamental na descrição dos fenômenos. Assim, para generalizar o momento angular clássico para o quântico, usa-se as expressões das coordenadas de ℓ para se definir o operador L_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$. Pode-se provar que esses três operadores geram uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie subjacente à álgebra dos endomorfismos do espaço $\mathbb{R}^3$ isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$. Tal subálgebra é dita *álgebra do momento angular* em três dimensões. Os autovalores desses operadores descrevem estados possíveis de partículas. Dessa forma, uma

vez que os operadores que comutam preservam os autovalores, então, aplicando isso a L_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, temos que $\mathbb{R}[\mathfrak{so}(3)]^{\mathfrak{so}(3)}$ forma o conjunto dos operadores que não alteram o estado das partículas, ou seja, a álgebra de invariantes polinomiais é formada por operadores que representam grandezas físicas conservadas. Isso é particularmente útil para descrever sistemas estáveis e prever propriedades de estados estacionários ([SR13], Seção 4.2; [Iac06], Seção 1.15; [ŠW14], Seção 3.1; [vdW74], Seção 8).

Uma outra possibilidade de se deparar com a álgebra de invariantes polinomiais é através do seguinte problema:

Sejam L_1 e L_2 álgebras de Lie tais que $U(L_1) \cong U(L_2)$. Então é verdade que $L_1 \cong L_2$?

Por exemplo, em [RSU22] pode-se extrair as álgebras de Lie L_1 com base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, tais que os colchetes de Lie não nulos são

$$[x_4, x_1] = x_1, \quad [x_4, x_2] = x_3, \quad [x_4, x_3] = x_3,$$

e L_2 com base $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, com os colchetes de Lie não nulos sendo

$$[y_1, y_2] = y_2, \quad [y_3, y_4] = y_4.$$

Nesse caso, temos que essas álgebras não são isomorfas e o artigo mostrar que $\mathcal{Z}(U(L_1)) \neq \{0\}$ e $\mathcal{Z}(U(L_2)) = \{0\}$, o que implica que $U(L_1) \not\cong U(L_2)$. Assim, a tentativa de se responder a essa pergunta, leva ao estudo do centro de álgebras de Lie.

Sendo a álgebra de invariantes polinomiais finitamente gerada, como é o caso para álgebras de Lie *standard filiform*, conforme o Teorema Maurer-Weitzenböck ([Fre17], Teorema 6.1) afirma, uma questão que se coloca é determinar um conjunto minimal de geradores para ela. Esta tarefa pode ser demasiadamente difícil, já para álgebras de dimensão relativamente pequena. Por exemplo, em [Fre13], temos que o conjunto minimal de geradores para a álgebra de invariantes polinomiais da álgebra de Lie *standard filiform* de dimensão 10 tem 69 elementos, sendo que o elemento de grau 12 tem 3651 termos não nulos.

Assim, um outro objeto relevante que surge relacionado à álgebra de invariantes polinomiais é o *corpo de invariantes racionais*, isto é, o conjunto das funções racionais $f \in \mathbb{F}(L) := \text{Frac}(\mathbb{F}[L])$ tais que $\text{ad}(x)(f) = 0$, para todo $x \in L$. Perceba que, aqui, repetimos a notação, escrevendo $\text{ad}(x)$ para ser a derivação no corpo $\mathbb{F}(L)$, estendida da derivação na álgebra $\mathbb{F}[L]$, conforme a Proposição 1.6.3. Aqui, assim como para a álgebra de invariantes polinomiais, temos que

$$\mathbb{F}(L)^L = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)},$$

onde $\mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)}$ é o núcleo de $\text{ad}(x_i)$, vista como uma derivação em $\mathbb{F}(x_n)$. Essa é uma álgebra cujos geradores podem ser calculados com mais facilidade. Por exemplo, para a álgebra de Lie *standard filiform* de dimensão 10, comentada no parágrafo anterior, o corpo de invariantes racionais é gerada por apenas 9 elementos, todos de grau no máximo 9.

2 Objetivo

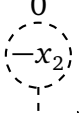
Reconhecendo a relevância da álgebra de invariantes polinomiais de uma álgebra de Lie e observando, como exemplificado no caso da álgebra *standard filiform*, que determinar seus geradores é uma tarefa significativamente mais desafiadora do que identificar os geradores do corpo de invariantes racionais, este trabalho concentra-se no estudo do corpo de invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente, focando na determinação algorítmica de seus geradores algebricamente independentes. Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho pode ser resumido como:

Objetivo principal. Dada uma álgebra de Lie nilpotente, desenvolver um algoritmo prático que produza um conjunto algebricamente independente que gere seu corpo de invariantes racionais, e implementar tal algoritmo em um sistema de matemática computacional.

Para isso, analisaremos o método das características apresentado no livro [ŠW14], Capítulo 3, onde se busca determinar os invariantes *funcionalmente independentes* de uma álgebra de Lie, de modo a torná-lo um algoritmo explícito implementado no sistema SageMath [Sage23]. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1. Considere a álgebra de Lie nilpotente L , com base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, cuja matriz de multiplicação é a seguinte:

$$M_L = ([x_i, x_j]) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{matrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_4)).$$


 $\dashrightarrow = [x_4, x_3]$

Da matriz de multiplicação e da Equação (1.1), vemos que, dado $f \in \mathbb{F}(L) = \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)$,

$$\begin{cases} \text{ad}(x_1)(f) = 0, \\ \text{ad}(x_2)(f) = -x_1 D_{x_3}(f), \\ \text{ad}(x_3)(f) = x_1 D_{x_2}(f) + x_2 D_{x_4}(f), \\ \text{ad}(x_4)(f) = -x_2 D_{x_3}(f). \end{cases}$$

Uma observação direta das equações acima nos permite concluir que $\mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_1)} = \mathbb{F}(L)$ e que $\mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_2)} = \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_4)} = \mathbb{F}(x_1, x_2, x_4) =: K$. Observe que $\text{ad}(x_3)(K) \subseteq K$. Logo,

$$\mathbb{F}(L)^L = \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_1)} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_2)} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_3)} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_4)} = K \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_4)} = K^{\text{ad}(x_3)|_K},$$

ou seja, para determinar um conjunto algebricamente independente que gere $\mathbb{F}(L)^L$, precisamos determinar tal conjunto para a derivação

$$\text{ad}(x_3)|_K = x_1 D_{x_2} + x_2 D_{x_4} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(K).$$

Para isso, usaremos o método das características, conforme será visto no Capítulo 2, observando que tal derivação é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, x_2, x_4\}$, o que será explicado no Capítulo 3. De posse de tal método, podemos concluir que

$$\mathbb{F}(L)^L = K^{\text{ad}(x_3)|_K} = \mathbb{F}(x_1, -x_2^2 + 2x_1x_4).$$

A álgebra deste exemplo é a álgebra de Lie nilpotente [4, 3], conforme será vista na Seção 5.1.2, onde apresentaremos, na Tabela 5.2, os geradores algebricamente independentes dados pelo nosso algoritmo, de todas as álgebras de Lie nilpotentes com dimensão até 6.

Para concluir este exemplo, destacamos duas observações decorrentes da aplicação de resultados que serão apresentados nesta tese. A primeira observação é que, considerando $M_L \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{F}(x_4))$, temos $\text{posto}(M_L) = 2$. Assim, aplicando o Corolário 5.1.3 (a ser visto na Seção 5.1.1), concluímos que o número maximal de geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(L)^L = \dim(L) - \text{posto}(M_L) = 2$. A segunda, é que este exemplo ilustra o fato geral de que $\mathbb{F}(L)^L = \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L)$, conforme veremos no Teorema 1.7.2. $\square$

No Exemplo 2.1, observamos que $\mathbb{F}(L)^L = \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L)$, um resultado geral para álgebras de Lie nilpotentes, conforme mencionado anteriormente. Essa observação destaca que, embora o foco principal deste trabalho esteja no corpo de invariantes racionais, mantivemos nosso interesse pela álgebra de invariantes polinomiais. Assim, podemos afirmar que extrair informações dessa última, a partir dos invariantes racionais, constitui um objetivo secundário. Nesse contexto, por exemplo, provamos, como consequência de nosso algoritmo, o Corolário 5.1.4, que estabelece a inclusão da álgebra de invariantes polinomiais na álgebra de polinômios cujas variáveis são os geradores do corpo de invariantes racionais, localizada por um certo denominador obtido a partir de nosso método.

Além disso, buscamos generalizar o método desenvolvido para álgebras nilpotentes, ampliando-o para incluir também álgebras solúveis. Esse objetivo adicional é exemplificado na Seção 5.2, onde apresentamos os geradores do corpo de invariantes racionais para álgebras de Lie solúveis de dimensão até 4. Contudo, para essas álgebras, ainda há detalhes que precisam ser demonstrados.

3 Contexto bibliográfico

De uma certa perspectiva, podemos dizer que, para alcançar o objetivo deste trabalho, temos que resolver algebricamente um sistema de equações diferenciais parciais lineares, homogêneas e de primeira ordem, ou seja, dadas funções $p_1, \dots, p_n$, em n variáveis, com $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, queremos encontrar uma função f que satisfaz um sistema de equações, cuja forma de cada equação é

$$\sum_{i=1}^n p_i D_{x_i}(f) = 0,$$

onde D_{x_i} é a derivada parcial em relação à x_i . Esse tipo de abordagem, isto é, essa busca em resolver uma equação diferencial por meios algébricos, tem despertado interesse, como pode

ser visto nas conferências "Algebraic and Algorithmic Aspects of Differential and Integral Operators Session"(AADIOS), focada na discussão e exploração de aspectos algébricos e algorítmicos relacionados a operadores diferenciais e integrais. Por exemplo, Georg Regensburger, um dos organizadores da AADIOS, juntamente de Alban Quadrat, no texto [QR20], estão interessados em resolver equações integro-diferenciais lineares com coeficientes em $\mathbb{F}[t]$, como, por exemplo, a equação que descreve o circuito RLC padrão,

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s)ds = v(t),$$

onde R é um resistor, L é um indutor, C é um capacitor, i é a corrente e v é a fonte de tensão. Para isso, estudam a subálgebra de $\text{End}(\mathbb{F}[t])$, gerada por

$$\begin{array}{llll} 1 : \mathbb{F}[t] \rightarrow \mathbb{F}[t], & t : \mathbb{F}[t] \rightarrow \mathbb{F}[t], & \partial : \mathbb{F}[t] \rightarrow \mathbb{F}[t], & \int : \mathbb{F}[t] \rightarrow \mathbb{F}[t] \\ t^n \mapsto t^n & t^n \mapsto t^{n+1} & t^n \mapsto nt^{n-1} & t^n \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Um outro exemplo é o artigo [GLSW18]. Nele, um sistema de equações diferenciais parciais algébricas é tratado do ponto de vista de um algébrico-geométrico, fazendo um sistema desse tipo, ser associado a uma variedade algébrica. Se essa variedade associada admitir uma parametrização racional, obtém-se informações sobre a solubilidade racional a partir dessa parametrização.

O estudo de invariantes de uma álgebra de Lie está estritamente relacionado ao estudo de invariantes de um grupo de Lie, graças a aplicação exponencial, no sentido de que se G é um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G , então existe uma equivalência entre os invariantes de G , $V^G = \{v \in V \mid gv = v, \forall g \in G\}$, com os invariantes de $\mathfrak{g}$, $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid xv = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$, onde V é um espaço vetorial. Nesse sentido, o texto [GMNS19] observa que para certos grupos de Lie reais (como os grupos ortogonais ou simpléticos não compactos), a teoria dos invariantes coincide com a dos grupos algébricos reais correspondentes, o que simplifica a análise dos invariantes. Em [GR14], os autores investigam formas diferenciais invariantes à esquerda em grupos de Lie apresentando uma classificação das álgebras de Lie de Frobenius.

No que tange o estudo algébrico da álgebra de invariantes polinomiais, temos em [BH06] a conjectura abaixo.

Conjectura. Se L é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ com $\text{char}(\mathbb{F}) = p > 0$, então $\mathbb{F}[L]^L$ é um domínio fatorial.

Em [Bra15], usando métodos algébricos, é demonstrado que tal conjectura vale sob certas circunstâncias. Por exemplo, temos que ela é válida para $L = \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(n)$, onde $\text{mdc}(p, n) = 1$. Em [Oom12], temos a descrição de $\mathbb{F}[L]^L$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes e indecomponíveis de dimensão no máximo sete, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

No artigo [BB66], temos a fórmula de Beltrametti-Blasi, que limita o número de invariantes analíticos funcionalmente independentes, fórmula essa que também aparece em [CS04], com uma outra interpretação. Em [Oom09] é dada uma condição suficiente para que o semicentro de Poisson seja uma álgebra de polinômios, permitindo uma descrição explícita do centro de Poisson

para mais da metade das álgebras de Lie nilpotentes complexas e indecomponíveis de dimensão no máximo 7. No artigo [BPP07], é determinado os invariantes analíticos da álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores e no artigo [BPP06] é apresentado um procedimento, usando *moving frames*, um método geométrico, para computar invariantes funcionalmente independentes de uma álgebra de Lie.

Do ponto de vista analítico, dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto, é uma *integral primeira* de um campo vetorial X , se sua derivada na direção do campo é igual a zero (ver Seções 10.2 e 10.5 em [Arn06]). Nesse caso, a $\mathbb{F}[L]^L$ pode ser vista como sendo o conjunto das integrais primeiras *polinomiais* dos campos associados a álgebra de Lie L e, semelhantemente, $\mathbb{F}(L)^L$ pode ser vista como sendo o conjunto das integrais primeiras *racionais* dos campos associados a L . Com essa perspectiva, temos, por exemplo, o artigo [FG10], onde é apresentado um método para calcular integrais primeiras racionais de um campo vetorial polinomial planar.

Dessa forma, esse contexto bibliográfico mostra que o assunto estudado nesta tese está em sintonia com várias pesquisas atuais e tem um pequeno caráter inovador, por se tratar de explicitar algoritmicamente um conjunto algebricamente independente que gera a álgebra de invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente.

4 Estrutura do texto

Nosso trabalho está dividido em 5 capítulos, organizados na seguinte ordem: *Noções algébricas preliminares*, *Método das características*, *Derivações triangulares*, *Derivações lineares de $\mathbb{F}(x_n)$* e *Geradores do corpo de invariantes racionais*.

No Capítulo 1, fazemos uma breve revisão de conceitos algébricos importantes naquilo que envolve a natureza deste trabalho. Tratamos de definições e resultados bem estabelecidos na literatura, mas que julgamos relevantes serem apresentados, com o intuito de tornar este texto mais autossuficiente.

O assunto do Capítulo 2 envolve o estudo do núcleo de derivações de $\mathbb{F}(x_n)$. Mais precisamente, estabelecemos, neste capítulo, hipóteses a serem satisfeitas por uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, de modo a ser possível construir um conjunto algebricamente independente que gera seu núcleo $\mathbb{F}(x_n)^D$. Para isso, usamos uma ferramenta analítica, chamada método das características, extraíndo sua parte algébrica, para aplicarmos em nosso contexto.

Como exemplo de aplicação do conteúdo abordado no Capítulo 2, apresentamos no Capítulo 3 as derivações triangulares. Tais derivações, como veremos, satisfazem as hipóteses estabelecidas no capítulo anterior, o que nos permitirá construir um conjunto algebricamente independente que gera seus núcleos. Veremos que saber determinar tal conjunto de geradores para derivações triangulares será a chave para alcançarmos nosso objetivo principal.

Visando o objetivo secundário de estender o algoritmo que calcula um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(L)^L$, quando L é nilpotente, para o caso em que L é solúvel, investigamos, no Capítulo 4, as derivações lineares de $\mathbb{F}(x_n)$. Esse tipo de derivação tem uma forma matricial que, se supormos que o corpo, sobre a qual a matriz associada à derivação está

definida, seja uma extensão algébrica simples de $\mathbb{Q}$ contendo os autovalores da matriz, então será possível, também para esse tipo de derivação, construir um conjunto algebricamente independente que gera seu núcleo. Usaremos essa construção, bem como a apresentada para derivações triangulares, para calcular um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(L)^L$, quando L for solúvel com dimensão menor do que 4.

Finalmente, no Capítulo 5, apresentaremos o algoritmo que alcançará nosso objetivo principal, qual seja, determinar um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(L)^L$, quando L é nilpotente. Nele também apresentaremos algumas consequências algébricas do nosso algoritmo, bem como 2 exemplos de aplicação do algoritmo: um sobre as álgebras de dimensão até 6 e outro da álgebra t_n das matrizes triangulares superiores estritas $n \times n$; e terminaremos com o exemplo das álgebras de Lie solúveis de dimensão até 4.

Capítulo 1

Noções algébricas preliminares

Neste capítulo, apresentamos conceitos algébricos fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Iniciamos com uma revisão concisa sobre anéis, abordando estruturas graduadas, corpos de frações e a teoria da localização. Em seguida, exploramos a álgebra de polinômios em várias variáveis, destacando a ordem monomial, com ênfase na ordem lexicográfica. Introduzimos também a topologia de Zariski, onde definimos o corpo das funções racionais. Definimos a derivação de uma álgebra, com especial atenção ao módulo das derivações do corpo de frações da álgebra de polinômios. Discutimos as noções de álgebra de Lie nilpotente e solúvel, e apresentamos o conceito de base triangular para essas álgebras. Por fim, tratamos das definições de álgebra de invariantes polinomiais e racionais de uma álgebra de Lie, objetos cruciais deste trabalho.

1.1 Alguns conceitos sobre anéis

Seja $\mathbf{Ring}$ a categoria dos anéis comutativos, associativos e com identidade. Seja Φ um monoide. Dizemos que $R \in \mathbf{Ring}$ é um anel Φ -graduado, se

$$R = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} R_{\varphi} \quad \text{e} \quad R_{\varphi} R_{\varphi'} := \{rr' \mid r \in R_{\varphi} \text{ e } r' \in R_{\varphi'}\} \subseteq R_{\varphi\varphi'},$$

onde R_{φ} é um subgrupo de R . Um elemento em R_{φ} é dito **elemento homogêneo** de grau φ .

Neste trabalho, denotaremos $\mathbb{F}$ para ser um corpo de característica zero. Seja $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ a categoria das $\mathbb{F}$ -álgebras associativas, comutativas e com identidade. Definimos uma **álgebra Φ -graduada** $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ de maneira semelhante à definição de um anel Φ -graduado, com a diferença de que a álgebra é decomposta como soma direta de subespaços vetoriais e não somente de subgrupos.

O seguinte resultado é bem conhecido e sua demonstração é direta.

Proposição 1.1.1. Sejam $A = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} A_{\varphi} \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ uma álgebra Φ -graduada e $f : A \rightarrow A$ uma transformação linear tal que $f(A_{\varphi}) \subseteq A_{\varphi}$, para todo $\varphi \in \Phi$. Se $K := \ker(f)$, então

$$K = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} K_{\varphi},$$

onde $K_{\varphi} = A_{\varphi} \cap K$. □

Seja $U \subseteq R \in \mathbf{Ring}$ um conjunto *multiplicativo*, isto é, um conjunto que contenha a identidade de R e que seja fechado com relação ao produto. Considere a relação $\sim$ em $U \times R$ definida como

$$(u_1, r_1) \sim (u_2, r_2) \iff \text{existe } u \in U \text{ tal que } uu_2r_1 = uu_1r_2$$

e denote por $\frac{r}{u}$ a classe de equivalência de $(u, r) \in U \times R$ determinada pela relação $\sim$, ou seja,

$$\frac{r}{u} := \{(u_1, r_1) \in U \times R \mid \text{existe } u' \in U \text{ tal que } u'u_1r = u'ur_1\}.$$

A **localização** de R com relação a U , denotada por $U^{-1}R$, é definida como sendo o quociente de $U \times R$ pela relação $\sim$, isto é,

$$U^{-1}R := (U \times R) / \sim = \left\{ \frac{r}{u} \mid r \in R, u \in U \right\}.$$

Seja $R \in \mathbf{Ring}$ um *domínio integral*, ou seja, um anel que não possui *divisores de zero*. O **corpo de frações** de R , denotado por $\text{Frac}(R)$, é a localização de R com relação ao conjunto $R \setminus \{0\}$:

$$\text{Frac}(R) := \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in R \setminus \{0\} \right\}.$$

Dizemos que um anel Φ -graduado $R = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} R_{\varphi} \in \mathbf{Ring}$ é um **corpo graduado**, se todo elemento homogêneo não nulo tem inverso multiplicativo. Além disso, se $R = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} R_{\varphi} \in \mathbf{Ring}$ é um anel Φ -graduado e também um domínio integral, então definimos o *corpo graduado* de R como sendo

$$\text{GrF}(R) := \left\{ \frac{f}{g} \in \text{Frac}(R) \mid g \in \mathbb{F}[x_n]_{\varphi} \setminus \{0\}, \text{ para algum } \varphi \in \Phi \right\}.$$

Quando for necessário enfatizar a graduação do anel, pode-se usar a notação $\text{GrF}(R, \Phi)$. Pode-se mostrar que

$$\text{GrF}(R)_0 := \left\{ \frac{f}{g} \in \text{Frac}(R) \mid f, g \in \mathbb{F}[x_n]_{\varphi}, \text{ para algum } \varphi \in \Phi \right\}$$

é um corpo e que se R tem um elemento não nulo de grau diferente de zero, então $\text{GrF}(R)$ pode ser identificado com os polinômios de Laurent $\text{GrF}(R)_0[x, x^{-1}]$ (veja Apêndice A em [NS02]).

Definimos a **dimensão de Krull** de $R \in \mathbf{Ring}$ como sendo

$$\dim_{\text{Krull}}(R) := \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid P_0 = \{0\} \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n, \text{ onde } P_i \text{ é ideal primo de } R\}.$$

1.2 Propriedades da álgebra de polinômios em n variáveis

Sejam $\mathbf{Set}$ a categoria dos conjuntos e $X := \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{Set}$. Considere o monoide comutativo gerado por X

$$\mathbb{M} := \{x^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}.$$

Um elemento $x^{\alpha} \in \mathbb{M}$ é dito **monômio** nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ associado a α (ou, simplesmente, *monômio*, quando o contexto estiver claro). Observe que a operação em $\mathbb{M}$ é definida como

$\mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^\beta := \mathbf{x}^{\alpha+\beta}$. Vamos denotar o elemento neutro de $\mathbb{M}$ por $1 := x_1^0 \dots x_n^0$. Se $\mathbf{x}^\alpha$ é um monômio, então definimos seu **grau** como sendo $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Seja $\mathbb{F}$ um corpo e considere

$$\mathbb{T} := \{c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{M}\} \in \mathbf{Set}.$$

Identificando $c \in \mathbb{F}$ com $c1 = c x_1^0 \dots x_n^0$, podemos afirmar que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{T}$. Chamamos $c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{T}$ de **termo** nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ associado a α (ou, apenas, *termo*). Dado um termo $c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, dizemos que c_α é o **coeficiente** do termo e $\mathbf{x}^\alpha$ é o **suporte do termo**. Uma soma formal de termos é chamada de **polinômio** nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ e o conjunto desses polinômios é denotado por $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ou $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, isto é,

$$\mathbb{F}[\mathbf{x}_n] := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} c_{\alpha_i} \mathbf{x}^{\alpha_i} \mid c_{\alpha_i} \mathbf{x}^{\alpha_i} \in \mathbb{T}, \ell \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

O **suporte** de um polinômio $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é o subconjunto de $\mathbb{M}$ definido por

$$\text{supt}(f) = \{\mu \in \mathbb{M} \mid \text{o termo de suporte } \mu \text{ tem coeficiente não nulo em } f\}.$$

Note que se $f = \lambda \in \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] \setminus \{0\}$, então $\text{supt}(f) = \{1\}$ e que se $f = 0$, então $\text{supt}(f) = \emptyset$.

O **grau total** de um polinômio $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] \setminus \{0\}$, denotado por $\deg(f)$, é o grau máximo dentre os monômios que pertencem a $\text{supt}(f)$.

Sejam

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} c_{\alpha_i} \mathbf{x}^{\alpha_i}, \quad g = \sum_{j=1}^k d_{\beta_j} \mathbf{x}^{\beta_j} \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n],$$

onde $|\text{supt}(f)| = \ell$ e $|\text{supt}(g)| = k$. Para cada $\mathbf{x}^\gamma \in \text{supt}(f) \cup \text{supt}(g)$, defina

$$a_\gamma := \begin{cases} c_\gamma + d_\gamma, & \text{se } \mathbf{x}^\gamma \in \text{supt}(f) \cap \text{supt}(g), \\ c_\gamma, & \text{se } \mathbf{x}^\gamma \in \text{supt}(f) \setminus \text{supt}(g), \\ d_\gamma, & \text{se } \mathbf{x}^\gamma \in \text{supt}(g) \setminus \text{supt}(f). \end{cases}$$

Note que, fazendo $r := |\text{supt}(f) \cup \text{supt}(g)|$, então

$$\{a_\gamma \mid \mathbf{x}^\gamma \in \text{supt}(f) \cup \text{supt}(g)\} = \{a_{\gamma_1}, \dots, a_{\gamma_r}\}.$$

Assim, definindo a soma de f com g como sendo

$$f + g := \sum_{i=1}^r a_{\gamma_i} \mathbf{x}^{\gamma_i}$$

temos que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é um grupo abeliano. O produto de um polinômio por $a \in \mathbb{F}$, definido como

$$a \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_{\alpha_i} \mathbf{x}^{\alpha_i} \right) := \sum_{i=1}^{\ell} a c_{\alpha_i} \mathbf{x}^{\alpha_i},$$

faz de $\mathbb{F}[x_n]$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e a extensão da operação do monoide $\mathbb{M}$ por bilinearidade faz de $\mathbb{F}[x_n]$ um objeto na categoria $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$, dita *álgebra dos polinômios nas variáveis $x_1, \dots, x_n$* . Contudo, note que o conjunto X usado na construção de $\mathbb{F}[x_n]$ poderia ser substituído por qualquer conjunto com n elementos. Por essa razão, dizemos também que $\mathbb{F}[x_n]$ é a **álgebra dos polinômios em n variáveis**.

Sejam $E : \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ o functor esquecimento e $\iota : X \rightarrow E(\mathbb{F}[x_n])$ a função inclusão. Então $(\mathbb{F}[x_n], \iota)$ é um objeto livre em $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$, uma vez que vale a seguinte proposição.

Proposição 1.2.1 (Propriedade universal de $\mathbb{F}[x_n]$). Seja $E : \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ o functor esquecimento. Então, para toda $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ e toda $f : X \rightarrow E(A)$ função em $\mathbf{Set}$, existe único morfismo $\bar{f} : \mathbb{F}[x_n] \rightarrow A$ em $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ tal que $f = E(\bar{f}) \circ \iota$, isto é, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & E(\mathbb{F}[x_n]) \\ & \searrow f & \downarrow E(\bar{f}) \\ & & E(A) \end{array}$$

Demonstração. Ver Capítulo 1, Seção 1, Problema 6 em [Mor96]. \(\square\)

Sejam $\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ e considere, na Proposição 1.2.1, a função $f : X \rightarrow E(A)$, $x_i \mapsto a_i$. A imagem de $\bar{f}$, $\text{im}(\bar{f})$, é dita *subálgebra finitamente gerada* por $\{a_1, \dots, a_r\}$. Nesse caso, denotamos $\text{im}(\bar{f})$ por $\mathbb{F}[a_r]$. Se $A = \mathbb{F}[a_r]$, então dizemos que A é uma **álgebra finitamente gerada** por $\{a_1, \dots, a_r\}$.

Sejam $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ e $S \subseteq A^n$ um subconjunto. Denotamos o conjunto das funções de S para A por

$$\mathcal{F}(S) := \{f : S \rightarrow A\}.$$

Proposição 1.2.2. Sejam $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ e $S \subseteq A^n$ um subconjunto. Então

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{F}[x_n] &\rightarrow \mathcal{F}(S) \\ f = \sum_{i=1}^{\ell} c_{\alpha_i} x_1^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}} &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{\ell} c_{\alpha_i} a_1^{\alpha_{i1}} \dots a_n^{\alpha_{in}}, \end{aligned}$$

é um morfismo em $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$.

Demonstração. Ver Capítulo 2, Seção 3 em [Lan02]. \(\square\)

Chamamos a função ρ da Proposição 1.2.2 de *mapa de avaliação*. Dizemos que $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ é um **conjunto algebricamente independente**, se, para todo $f \in \mathbb{F}[x_k] \setminus \{0\}$, temos que $f(a_1, \dots, a_k) \neq 0$, ou seja, se o mapa de avaliação ρ é injetivo.

Proposição 1.2.3. Se $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$ é um conjunto algebricamente independente, então $\mathbb{F}[x_n]$ é isomorfa à subálgebra $\mathbb{F}[a_n]$ de A , finitamente gerada por $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Demonstração. Da Proposição 1.2.1, temos que existe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}[x_n] \rightarrow \mathbb{F}[a_n]$ tal que $\varphi(x_i) = a_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Da independência algébrica de $\{a_1, \dots, a_n\}$, temos que φ é injetivo. A sobrejetividade é imediata. \(\square\)

O **grau de transcendência** de $A \in \mathbb{F}\langle\mathbf{x}_n\rangle$ é definido como sendo

$$\text{trdeg}(A) := \begin{cases} \sup\{|S| \mid S \subseteq A \text{ é finito e algebricamente independente}\}, & \text{se } A \neq \{0\}, \\ -1, & \text{se } A = \{0\}. \end{cases}$$

Proposição 1.2.4. Vale que $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]) = \text{trdeg}(\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]) = n$.

Demonstração. Ver Corolário 5.7 e Teorema 5.9 em [Kem11]. □

Para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, defina

$$\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_k := \{0\} \cup \{f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] \mid \text{se } \mu \in \text{supt}(f), \text{ então o grau de } \mu \text{ é igual a } k\},$$

isto é, $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_k$ é formado pela união do polinômio zero com todos os polinômios tais que o suporte dos termos têm grau igual a k . Note que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_k$ é um subespaço de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_0 = \mathbb{F}$.

Proposição 1.2.5. A álgebra $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada, onde

$$\mathbb{F}[\mathbf{x}_n] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_i.$$

Demonstração. Ver Capítulo 4, Exemplo 4.10 em [Tu11]. □

Da Proposição 1.2.5, temos que todo $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ se escreve unicamente como $f = f_0 + \cdots + f_d$, onde $f_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_i$ e $d = \deg(f)$. Nesse caso, chamamos f_i de **componente homogêneo** de f e um polinômio em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]_k$ é dito **polinômio homogêneo** de grau k .

1.3 Ordem monomial

Uma **ordem parcial** em um conjunto X é uma relação $\prec$ que é:

- (i) *reflexiva*: para todo $x \in X$, ocorre $x \prec x$;
- (ii) *antissimétrica*: para todo $x, y \in X$, temos que se $x \prec y$ e $y \prec x$, então $x = y$;
- (iii) *transitiva*: para todo $x, y, z \in X$, temos que se $x \prec y$ e $y \prec z$, então $x \prec z$.

Nesse caso, também dizemos que X é um conjunto *parcialmente ordenado*, fato que pode ser denotado por $(X, \prec)$, para enfatizar qual é a relação de ordem parcial. Uma ordem parcial em um conjunto X é dita **ordem total**, se satisfizer:

- (iv) *tricotomia*: para todo $x, y \in X$, vale $x \prec y$, $y \prec x$ ou $x = y$.

Nesse caso, assim como na ordem parcial, chamamos X ou $(X, \prec)$ de conjunto *totalmente ordenado*.

Uma ordem $\prec$ em $\mathbb{M}$ é dita **ordem monomial** quando

- (a) $\prec$ é ordem total;

(b) $1 \prec x^\alpha$, sempre que $\alpha \neq (0, \dots, 0)$;

(c) para todo $\mu, \mu', \nu \in \mathbb{M}$, se $\mu \prec \mu'$, então $\mu\nu \prec \mu'\nu$.

Considere em $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, o conjunto gerador do monoide $\mathbb{M}$, a ordem

$$x_n < x_{n-1} < \dots < x_1.$$

Estendemos essa ordem a $\mathbb{M}$, tomando

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \in \mathbb{M}$$

e analisando os valores de $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2$ até $\alpha_n - \beta_n$, nessa ordem, respeitando a ordem estabelecida em X . Se $\alpha_1 - \beta_1 < 0$, então dizemos que $x^\alpha < x^\beta$. Se $\beta_1 - \alpha_1 < 0$, então dizemos que $x^\beta < x^\alpha$. Caso $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, então passamos a analisar $\alpha_2 - \beta_2$ procedendo da mesma maneira até chegar em $\alpha_n - \beta_n$. Assim, definimos

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } \forall i < k \text{ temos que } \alpha_i - \beta_i = 0 \text{ e } \alpha_k - \beta_k < 0.$$

Em outras palavras, podemos escrever também

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \text{a entrada não nula mais à esquerda de } \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n) \text{ é negativo.}$$

Tal ordem é dita **ordem lexicográfica**.

Proposição 1.3.1. A ordem lexicográfica é uma ordem monomial.

Demonstração. Ver Capítulo 2, Seção 2, Proposição 4 em [CLO07]. ☒

Observe que a ordem lexicográfica depende da ordem estabelecida para X e da maneira como escrevemos os monômios em $\mathbb{M}$, já que analisamos, no monômio, os expoentes correspondente a x_1, x_2 até x_n , onde $x_n < \dots < x_1$. Assim, se continuarmos a escrever os monômios como $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, começando por x_1 até chegar a x_n , podemos definir a *ordem lexicográfica com respeito a ordem $x_1 < \dots < x_n$* , fazendo

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \text{a entrada não nula mais à direita de } \alpha - \beta \text{ é negativo.}$$

Aqui, respeitando a ordem $x_1 < \dots < x_n$ em X , começamos a analisar os expoentes de x_n e vamos até o expoentes de x_1 , nessa ordem.

Dado $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado, dizemos que $\gamma \in X$ é um *elemento minimal*, se para todo $\eta \in X$, com $\eta \prec \gamma$, temos que $\eta = \gamma$. Se em um conjunto totalmente ordenado, qualquer subconjunto não vazio possuir um elemento minimal, então dizemos que tal conjunto é *bem ordenado* (nesse caso, a ordem total é dita *boa ordem*).

Proposição 1.3.2. Toda ordem monomial é uma boa ordem.

Demonstração. Ver Proposição 4.1 em [Cou12]. ☒

Sejam $f \in \mathbb{F}[x_n] \setminus \{0\}$ e $<$ uma ordem monomial em $\mathbb{M}$. O **monômio líder** de f , denotado por $\text{lm}_<(f)$, é o maior monômio de $\text{supt}(f)$, com respeito a ordem $<$ (o símbolo $<$ será omitido sempre quando possível). O termo de f cujo suporte é $\text{lm}(f)$ é dito **termo líder** de f , denotado por $\text{lt}_<(f)$, e o coeficiente do termo líder é chamado de **coeficiente líder** de f , denotado por $\text{lc}(f)$. Note que se $f = \lambda \in \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}[x_n] \setminus \{0\}$, então $\text{lm}(f) = 1$.

Proposição 1.3.3. Sejam $f, g \in \mathbb{F}[x_n] \setminus \{0\}$. Então

- (a) $\text{lm}(f + g) \leq \max(\text{lm}(f), \text{lm}(g))$, valendo a igualdade se $\text{lm}(f) \neq \text{lm}(g)$ (aqui, $f + g \neq 0$);
- (b) $\text{lm}(fg) = \text{lm}(f) \text{lm}(g)$.

Demonstração. Ver Capítulo 2, Seção 2, Lema 8 em [CLO07]. ☒

Sejam $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$ uma sequência de índices. Dizemos que o conjunto $\{z_1, \dots, z_\ell\} \subseteq \mathbb{F}[x_n]$ é um **sistema triangular crescente** de polinômios em $\mathbb{F}[x_n]$ com respeito a $i_1 < \dots < i_\ell$, se, para cada $j = 1, \dots, \ell$, temos que

$$z_j = x_{i_j} f_{j1} + f_{j2},$$

onde $f_{j1} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{i_j}] \setminus \{0\}$ e $f_{j2} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{i_{j-1}}]$, isto é, se z_j é um polinômio com a ocorrência da variável x_{i_j} , mas que não ocorram as variáveis $x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_\ell}$. Analogamente, dizemos que o conjunto $\{z_1, \dots, z_\ell\} \subseteq \mathbb{F}[x_n]$ é um **sistema triangular decrescente** de polinômios em $\mathbb{F}[x_n]$ com respeito a $i_1 < \dots < i_\ell$, se, para cada $j = 1, \dots, \ell$, temos que

$$z_j = x_{i_j} f_{j1} + f_{j2},$$

onde $f_{j1} \in \mathbb{F}[x_{i_j}, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ e $f_{j2} \in \mathbb{F}[x_{i_{j+1}}, \dots, x_n]$.

Proposição 1.3.4. Seja $\{z_1, \dots, z_\ell\} \subseteq \mathbb{F}[x_n]$ um sistema triangular crescente (decrescente) de polinômios com respeito a $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$. Então $\{z_1, \dots, z_\ell\}$ é um conjunto algebricamente independente.

Demonstração. Vamos mostrar a proposição por indução sobre ℓ . Assim, se $\ell = 1$, então $\{z_1\}$ é um conjunto com um único polinômio, logo é algebricamente independente. Assuma que o resultado vale para $\ell - 1$. Vamos mostrar que o conjunto de polinômios $\{z_1, \dots, z_\ell\}$, como no enunciado, é algebricamente independente. Para isso, suponha, por absurdo, que existe $g \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_\ell]$ um polinômio não nulo tal que $g(z_1, \dots, z_\ell) = 0$. Escreva

$$g = g_k t_\ell^k + \dots + g_1 t_\ell + g_0,$$

onde $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $g_i \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{\ell-1}]$, para todo $i = 0, \dots, k$. Se $k = 0$, então $g \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{\ell-1}]$ e $g(z_1, \dots, z_{\ell-1}) = 0$. Mas, por hipótese de indução, $\{z_1, \dots, z_{\ell-1}\}$ é algebricamente independente, o que nos leva a concluir que $g = 0$, fato que contradiz a suposição de que $g \neq 0$. Dessa forma,

suponha que $k > 0$. Note que isso implica, em particular, que $g_k \neq 0$. Avaliando g nos polinômios $z_1, \dots, z_\ell$, temos que

$$0 = g(z_1, \dots, z_\ell) = g_k(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell^k + \dots + g_1(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell + g_0(z_1, \dots, z_\ell).$$

Como $g_k \neq 0$, então $g_k(z_1, \dots, z_{\ell-1}) \neq 0$, pois, por hipótese de indução, $\{z_1, \dots, z_{\ell-1}\}$ é um conjunto algebricamente independente.

Por hipótese, z_ℓ contém a variável x_{i_ℓ} . Considere a ordem lexicográfica com respeito a ordem $x_1 < \dots < x_n$. Assim, como z_ℓ contém a variável x_{i_ℓ} e não contém as variáveis $x_{i_\ell+1}, \dots, x_n$, então

$$\text{lm}(z_\ell) = x_{i_\ell}^\alpha m \neq 0,$$

onde $\alpha > 0$ e $m \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{i_\ell-1}]$. Logo,

$$1 < \text{lm}(z_\ell) < \dots < \text{lm}(z_\ell^{k-1}) = x_{i_\ell}^{(k-1)\alpha} m^{k-1} < \text{lm}(z_\ell^k) = x_{i_\ell}^{k\alpha} m^k.$$

Por hipótese, também temos que $z_1, \dots, z_{\ell-1}$ não contém a variável x_{i_ℓ} . Daí, podemos concluir que se $i < j$, então

$$\text{lm}(g_i(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell^i) < \text{lm}(g_j(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell^j),$$

sempre que $g_i(z_1, \dots, z_{\ell-1}) \neq 0$ e $g_j(z_1, \dots, z_{\ell-1}) \neq 0$. Logo, pela Proposição 1.3.3,

$$\begin{aligned} \text{lm}(g(z_1, \dots, z_\ell)) &= \max(\text{lm}(g_i(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell^i) \mid i = 0, \dots, k) = \text{lm}(g_k(z_1, \dots, z_{\ell-1})z_\ell^k) = \\ &= \text{lm}(g_k(z_1, \dots, z_{\ell-1})) \text{lm}(z_\ell^k) \neq 0. \end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois $g(z_1, \dots, z_\ell) = 0$. Portanto, se $g \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_\ell] \setminus \{0\}$, então $g(z_1, \dots, z_\ell) \neq 0$. $\square$

1.4 Topologia de Zariski para $\mathbb{F}^n$

Seja $I \trianglelefteq \mathbb{F}[x_n]$ um ideal. O conjunto

$$\mathcal{V}(I) := \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{F}^n \mid f(p_1, \dots, p_n) = 0, \text{ para todo } f \in I\}$$

é dito **conjunto algébrico afim** associada a I (ou apenas conjunto algébrico afim, quando não for preciso enfatizar o ideal I).

Proposição 1.4.1. O conjunto $\{\mathcal{V}(I) \mid I \trianglelefteq \mathbb{F}[x_n]\}$ define uma topologia em $\mathbb{F}^n$, na qual $\mathcal{V}(I)$ são os conjuntos fechados.

Demonstração. Ver Proposição 3.1 em [Kem11]. $\square$

A topologia da Proposição 1.4.1 é dita **topologia de Zariski** para $\mathbb{F}^n$.

Proposição 1.4.2. Considere a topologia de Zariski em $\mathbb{F}^n$.

- (a) Se $|\mathbb{F}| = \infty$, então quaisquer dois abertos se interceptam.
- (b) Todo aberto é denso.

Demonstração. Ver Observação 3.3 em [Kem11]. □

Dado $X \subseteq \mathbb{F}^n$, definimos o **ideal de aniquilação** de X , como sendo

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in \mathbb{F}[x_n] \mid f(p_1, \dots, p_n) = 0, \text{ para todo } (p_1, \dots, p_n) \in X\}.$$

O **anel de coordenadas** de um conjunto algébrico afim $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ é definido como

$$\mathbb{F}[\mathcal{V}] := \mathbb{F}[x_n] / \mathcal{I}(\mathcal{V}).$$

Proposição 1.4.3. Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ um conjunto algébrico afim. Considere a função ρ da Proposição 1.2.2. Então a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{F}[\mathcal{V}] &\rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{V}) \\ f + \mathcal{I}(\mathcal{V}) &\mapsto \rho(f) \end{aligned}$$

é um morfismo injetor em $\mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$.

Demonstração. Ver Definição 2.3.12 em [BT14]. □

Da Proposição 1.4.3, temos que $\text{im}(\psi)$ é isomorfo a $\mathbb{F}[\mathcal{V}]$, ou seja, podemos ver qualquer elemento em $\mathbb{F}[\mathcal{V}] = \mathbb{F}[x_n] / \mathcal{I}(\mathcal{V})$ como sendo uma função de $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ para $\mathbb{F}$.

Dizemos que um conjunto algébrico afim $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ é **irredutível**, se $\mathcal{V} \neq \{0\}$ e se dados quaisquer dois conjuntos algébricos $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, com $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V} \neq \mathcal{V}_2$, temos que $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$.

Proposição 1.4.4. Um conjunto algébrico afim $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{F}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ é ideal primo de $\mathbb{F}[x_n]$.

Demonstração. Ver Teorema 3.10 em [Kem11]. □

Um conjunto algébrico afim irredutível é chamado de **variedade afim**. Sejam $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathbb{F}^n$ e $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathbb{F}^m$ variedades afim. Uma função $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ é um **morfismo de variedades**, se existem $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}[x_n]$ tais que $F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$, para todo $p \in \mathcal{V}_1$. Um morfismo de variedades $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ é um **isomorfismo** de variedades, se existe $G : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1$ um morfismo de variedades tal que $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{V}_2}$ e $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{V}_1}$.

Se $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ é uma variedade afim, então, pela Proposição 1.4.4, seu anel de coordenadas, $\mathbb{F}[\mathcal{V}]$, é um domínio integral. Nesse caso, definimos o **corpo das funções racionais** de $\mathcal{V}$ como sendo

$$\mathbb{F}(\mathcal{V}) := \text{Frac}(\mathbb{F}[\mathcal{V}]).$$

Um elemento de $\mathbb{F}(\mathcal{V})$ é dito *função racional* de $\mathcal{V}$.

Proposição 1.4.5. Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade afim e $\mathbb{F}(\mathcal{V})$ seu corpo de funções racionais. Seja $U \subseteq \mathcal{V}$ um conjunto aberto não vazio. Se $f, g \in \mathbb{F}(\mathcal{V})$ e $f|_U = g|_U$, então $f = g$. Em outras palavras, uma função racional de uma variedade afim é completamente determinada por seus valores em um aberto da variedade afim.

Demonstração. Ver Observação 3.1.1 em [Har77]. □

Denote o corpo de frações de $\mathbb{F}[x_n]$, por $\mathbb{F}(x_n)$, isto é,

$$\mathbb{F}(x_n) := \text{Frac}(\mathbb{F}[x_n]).$$

Exemplo 1.4.6. Seja $I = \langle 0 \rangle \subseteq \mathbb{F}[x_n]$. Então $\mathcal{V}(I) = \mathbb{F}^n$ e $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$. Assim, $\mathbb{F}[\mathcal{V}(I)] = \mathbb{F}[x_n]/\langle 0 \rangle$ pode ser vista como $\mathbb{F}[x_n]$. Com essa identificação, temos que $\mathbb{F}(x_n)$ é o corpo das funções racionais de $\mathbb{F}^n$. □

Definimos um *sistema triangular crescente (decrecente)* de funções racionais com respeito a $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$ semelhantemente à definição de sistema triangular crescente (decrecente) de polinômios. Assim, temos um resultado análogo àquele visto na Proposição 1.3.4, conforme apresentado abaixo.

Proposição 1.4.7. Sejam $\{h_1, \dots, h_\ell\} \subseteq \mathbb{F}(x_n)$ um sistema triangular decrecente (crescente) de funções racionais com respeito a $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$, isto é, para cada $j = 1, \dots, \ell$, a função racional h_j contém a variável x_{i_j} , mas que não contém as variáveis $x_1, \dots, x_{i_j-1}$. Então $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ é um conjunto algebricamente independente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $f \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_\ell] \setminus \{0\}$ tal que $f(h_1, \dots, h_\ell) = 0$. Assuma que f é de menor grau total possível. Note que $f(h_1, \dots, h_\ell) \in \mathbb{F}(x_n)$ é a função racional de $\mathbb{F}^n$ igual a zero. Logo, a derivada parcial de $f(h_1, \dots, h_\ell)$ com relação a x_i , $\frac{\partial f(h_1, \dots, h_\ell)}{\partial x_i}$, é igual a zero, para todo $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial f(h_1, \dots, h_\ell)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial f}{\partial t_j}(h_1, \dots, h_\ell) \frac{\partial h_j}{\partial x_i},$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, temos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_\ell}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_\ell}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial h_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times \ell} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1}(h_1, \dots, h_\ell) \\ \frac{\partial f}{\partial t_2}(h_1, \dots, h_\ell) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_\ell}(h_1, \dots, h_\ell) \end{pmatrix}_{\ell \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}. \quad (1.4.1)$$

Como a função $f \neq 0$, então existe algum $i = 1, \dots, \ell$ tal que $\frac{\partial f}{\partial t_i} \neq 0$. Assim, o grau total de $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ é menor do que o grau total de f . Uma vez que f é o polinômio de menor grau total onde $f(h_1, \dots, h_\ell) = 0$, então $\frac{\partial f}{\partial t_i}(h_1, \dots, h_\ell) \neq 0$. Logo, da Equação (1.4.1), temos que a matriz $\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right)_{ij}$ leva um vetor não nulo em um vetor nulo, o que implica que seu posto é menor do que

ℓ . Contudo, a hipótese de que, para cada $j = 1, \dots, \ell$, a função h_j contém a variável x_{i_j} , mas não contém as variáveis $x_1, \dots, x_{i_j-1}$, implica que o posto da mesma matriz $\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)_{ij}$ é igual a ℓ , já que podemos escalonar essa matriz de modo a obter nas ℓ primeiras linhas a submatriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_{i_1}} & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_\ell}{\partial x_{i_\ell}} \end{pmatrix},$$

onde $\frac{\partial h_j}{\partial x_{i_j}} \neq 0$, para todo $j = 1, \dots, \ell$, e $*$ é uma função racional qualquer em $\mathbb{F}(x_n)$. Isso é uma contradição. Portanto, se $f \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_\ell] \setminus \{0\}$, então $f(h_1, \dots, h_\ell) \neq 0$. $\square$

1.5 Álgebra de Lie nilpotente e solúvel

Uma **álgebra de Lie**, L , é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$ cuja multiplicação, denotada por $[\cdot, \cdot]$ e chamada de *colchete de Lie*, satisfaz:

- (a) *anticomutatividade*, isto é, para todo $x \in L$, $[x, x] = 0$ e
- (b) *identidade de Jacobi*, isto é, dados $x, y, z \in L$,

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Vamos trabalhar com álgebras de dimensão finita.

Exemplo 1.5.1. Seja A uma álgebra associativa, onde a multiplicação é denotada pela justaposição dos elementos, então o espaço vetorial A com a multiplicação definida por $[x, y] := xy - yx$ é uma álgebra de Lie, denotada por $[A]$ e dita álgebra de Lie *subjacente* à álgebra associativa. Em particular, se V é um espaço vetorial, então $\text{End}(V)$ é uma álgebra associativa. Nesse caso, denotamos $[\text{End}(V)]$ por $\mathfrak{gl}(V)$. $\square$

Defina $\zeta_0(L) = \{0\}$, $\zeta_1(L) = \mathcal{Z}(L)$ e, para cada $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, defina $\zeta_{i+1}(L)$ como sendo o único ideal de L , contendo $\zeta_i(L)$, que faz corresponder, segundo o Teorema da Correspondência, ao ideal $\mathcal{Z}\left(\frac{L}{\zeta_i(L)}\right)$. Então, temos que

$$\zeta_0(L) \subseteq \zeta_1(L) \subseteq \zeta_2(L) \subseteq \cdots$$

Essa cadeia é dita **cadeia central superior** de L . Chamamos uma álgebra de Lie L de **nilpotente**, se existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\zeta_n(L) = L$.

Exemplo 1.5.2. Considere a álgebra de Lie L com base $\{x_1, x_2, x_3\}$, cujo colchete não trivial é $[x_1, x_2] = x_3$. Tal álgebra é denominada **álgebra de Heisenberg**. Observe que seu centro é $\mathcal{Z}(L) = \langle x_3 \rangle$, ou seja, $\zeta_1(L) = \langle x_3 \rangle$. Observe também que $L/\zeta_1(L)$ é abeliano. Logo, $\zeta_2(L) = L$. Portanto, L é nilpotente. $\square$

Defina $L^{(1)} := L$ e, para todo $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, defina $L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}]$. Chamamos a cadeia

$$L = L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq L^{(3)} \supseteq \dots$$

de **cadeia derivada**. Uma álgebra de Lie L tal que $L^{(n)} = \{0\}$, para algum $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, é dita **solúvel**.

Exemplo 1.5.3. Seja L a álgebra de Lie com base $\{x_1, x_2\}$ e cujo colchete não trivial é $[x_1, x_2] = -x_2$. Nessa álgebra, temos que $L^{(2)} = \langle x_2 \rangle$ e $L^{(3)} = \{0\}$. Logo, essa é uma álgebra solúvel. Note que o centro dessa álgebra é trivial, portanto ela não é nilpotente. $\square$

Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de uma álgebra de Lie nilpotente L . Defina $I_0 := \{0\}$ e I_i como sendo o subespaço gerado por $\{x_1, \dots, x_i\}$. Dizemos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma **base triangular** de L , se

$$[L, I_i] \subseteq I_{i-1},$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A proposição a seguir nos mostrará como obter uma base triangular de uma álgebra de Lie nilpotente.

Proposição 1.5.4. Seja L uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão igual a $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então L possui uma base triangular.

Demonstração. Como L é nilpotente, então existe $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\zeta_\ell(L) = L$. Assim, temos a seguinte cadeia

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta_0(L) & \subseteq & \zeta_1(L) & \subseteq & \zeta_2(L) & \subseteq & \dots \subseteq \zeta_\ell(L) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \{0\} & & \mathcal{Z}(L) & & & & L \end{array}$$

Lembre-se de que $\zeta_i(L)$ é ideal de L , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, seja $\{x_1, \dots, x_{m_1}\}$ base de $\zeta_1(L)$. Como $\zeta_1(L) \subseteq \zeta_2(L)$, vamos completar a base de $\zeta_1(L)$ para formar uma base de $\zeta_2(L)$, qual seja, $\{x_1, \dots, x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}\}$. Procedendo dessa maneira, obtemos uma base de L , dada por

$$\{x_1, \dots, x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2}, \dots, x_{m_{\ell-1}+1}, \dots, x_n\}.$$

Observe que, para todo $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos que $\zeta_i/\zeta_{i-1} = \mathcal{Z}(L/\zeta_{i-1})$. Assim, se $x \in L$ e $y \in \zeta_i$, então $y + \zeta_{i-1} \in \mathcal{Z}(L/\zeta_{i-1})$ e, conseqüentemente,

$$[x, y] + \zeta_{i-1} = [x + \zeta_{i-1}, y + \zeta_{i-1}] = 0 + \zeta_{i-1}.$$

Isto significa que $[L, \zeta_i] \subseteq \zeta_{i-1}$, de onde concluímos que qualquer subespaço S tal que $\zeta_{i-1} \subseteq S \subseteq \zeta_i$ é um ideal de L . Portanto, podemos definir I_i para ser o subespaço gerado por $\{x_1, \dots, x_i\}$. $\boxtimes$

Há também um conceito de base triangular para álgebras de Lie solúveis, análogo ao conceito definido para álgebras nilpotentes. Dizemos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma **base triangular** de uma álgebra de Lie solúvel, se o subespaço gerado por $\{x_1, \dots, x_i\}$ é um ideal. Álgebras de Lie solúveis que admitem uma base triangular são ditas *completamente solúveis*. Além disso, tal base é garantida pelo Teorema de Lie, no caso onde o corpo sobre o qual a álgebra esteja definida contenha todos os autovalores de $\text{ad}(x)$, para todo $x \in L$ (veja Teorema 1.25 e Corolário 1.29 em [Kna02] e Observação 1.3.14 em [Dix96]).

1.6 Derivações de uma álgebra

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $A \in \mathbb{F}\text{-}\mathbf{Alg}$. Definimos uma $\mathbb{F}$ -**derivação** de A ou, simplesmente, *derivação*, quando $\mathbb{F}$ e A estiverem claros, como sendo uma função $D : A \rightarrow A$ que satisfaz:

- (a) ($\mathbb{F}$ -linearidade) $D(\lambda a_1 + a_2) = \lambda D(a_1) + D(a_2)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ e todo $a_1, a_2 \in A$,
- (b) (*regra de Leibniz*) $D(a_1 a_2) = a_1 D(a_2) + a_2 D(a_1)$, para todo $a_1, a_2 \in A$.

Denotamos por $\text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ o conjunto de todas as $\mathbb{F}$ -derivações de A . Dados $a \in A$ e $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$, definimos $(aD)(a') := a(D(a'))$, para todo $a' \in A$. Tal definição faz $\text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ um A -módulo. Pode-se ver também que, definindo

$$[D_1, D_2](a) := D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a)),$$

onde $a \in A$ e $D_1, D_2 \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$, temos que $[D_1, D_2] \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$. Com essa definição, temos que $\text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ é uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.6.1. Na álgebra $\mathbb{F}[x_n]$, podemos definir

$$\begin{aligned} D_{x_i} : \mathbb{F}[x_n] &\rightarrow \mathbb{F}[x_n] \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada parcial formal de f com relação à x_i . Das propriedades da derivada parcial formal de um polinômio, temos que $D_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$, para todo $i = 1, \dots, n$. $\square$

Observação 1.6.2. Seja A uma álgebra finitamente gerada por $\{a_1, \dots, a_n\}$. Então toda derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ é determinada por seus valores em $D(a_i)$, com $i = 1, \dots, n$, porque se $a \in A$, então a pode ser escrito como $\sum_{i=1}^m c_{\alpha_i} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$ e, pela linearidade e regra de Leibniz, temos que

$$D(a) = \sum_{i=1}^m c_{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j a_1^{\alpha_1} \dots a_j^{\alpha_j-1} \dots a_n^{\alpha_n} D(a_j).$$

Em particular, se $A = \mathbb{F}[x_n]$, então D_{x_i} é caracterizada como sendo a derivação tal que avaliada em x_j resulta em δ_{ij} , para todo $j = 1, \dots, n$, onde δ_{ij} a função delta de Kronecker. Além disso,

se $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$, então, definindo $D' = D(x_1)D_{x_1} + \cdots + D(x_n)D_{x_n}$, temos que $D = D'$, pois $D(x_i) = D'(x_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$. $\square$

Proposição 1.6.3. Seja $A \in \mathbb{F}\text{-Alg}$ um $\mathbb{F}$ -domínio. Então, qualquer $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ pode ser estendida, unicamente, para uma derivação $\tilde{D} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\text{Frac}(A))$, fazendo

$$\tilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) := \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2}.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.1 em [Kap57]. $\square$

Exemplo 1.6.4. Usando a Proposição 1.6.3, temos que a derivação $D_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$, apresentada no Exemplo 1.6.1, define a derivação $\tilde{D}_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ a qual, muitas vezes, por abuso de notação, denotamos por D_{x_i} . $\square$

Proposição 1.6.5. O $\mathbb{F}[x_n]$ -módulo $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$ é livre com base $\{D_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$. Então, pela Observação 1.6.2, temos que $D = D(x_1)D_{x_1} + \cdots + D(x_n)D_{x_n}$. Assim, definindo $f_i := D(x_i)$, obtemos

$$D = \sum_{i=1}^n f_i D_{x_i},$$

ou seja, $\{D_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$ gera $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$. Agora, supondo que $\sum_{i=1}^n f_i D_{x_i} = 0$ e calculando tal derivação no polinômio x_i , concluímos que $f_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto, $\{D_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$ é base de $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$. $\square$

Veremos, agora, que as extensões de D_{x_i} , conforme visto no Exemplo 1.6.4 também formam uma base para o $\mathbb{F}(x_n)$ -módulo $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$.

Proposição 1.6.6. O $\mathbb{F}(x_n)$ -módulo $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ é livre com base $\{\tilde{D}_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. De maneira análoga à Proposição 1.6.5, mostra-se que $\{\tilde{D}_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$ é linearmente independente. Vamos mostrar que esse conjunto gera $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$. Para isso, seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e escreva

$$D_r := D|_{\mathbb{F}[x_n]} : \mathbb{F}[x_n] \rightarrow \mathbb{F}(x_n)$$

Veja que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos escrever $D_r(x_i) = \frac{f_i}{g_i}$, com $f_i, g_i \in \mathbb{F}[x_n]$. Seja $M = \text{mmc}(g_1, \dots, g_n)$. Então $MD_r \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_n])$ e, pela Proposição 1.6.5, existem $p_1, \dots, p_n$ tais que

$$MD_r = \sum_{i=1}^n p_i D_{x_i},$$

o que implica que $D_r = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} D_{x_i}$. Defina $\tilde{D}_r := \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} \tilde{D}_{x_i}$. Vamos mostrar que $\tilde{D}_r = D$, o que

finaliza a demonstração. Para isso, tome $\frac{h}{q} \in \mathbb{F}(x_n)$. Então

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_r\left(\frac{h}{q}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} \widetilde{D}_{x_i}\left(\frac{h}{q}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} \left(\frac{D_{x_i}(h)q - D_{x_i}(q)h}{q^2} \right) = \frac{1}{q^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} D_{x_i}(h)q - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{M} D_{x_i}(q)h \right) = \\ &= \frac{1}{q^2} (D_r(h)q - D_r(q)h) = \frac{1}{q^2} (D(h)q - D(q)h) = D\left(\frac{h}{q}\right). \quad \square \end{aligned}$$

O **núcleo** de $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$ é definido como sendo o conjunto de todo $a \in A$ tal que $D(a) = 0$, o qual denotamos por $\ker(D)$ ou por A^D .

Proposição 1.6.7. Se A é um corpo e $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$, então A^D é um corpo.

Demonstração. Basta mostrar que se $a \in A^D$, então $a^{-1} \in A^D$. Isso segue do fato de que $D(aa^{-1}) = D(1)$, e que $D(1) = 0$, pois $D(1) = D(1^2) = 2D(1)$. $\square$

Lema 1.6.8. Sejam $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $P \in \text{Mat}_{\ell \times \ell}(\mathbb{F}(x_n))$ invertível e $D_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} D_{x_j} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, para cada $i = 1, \dots, \ell$. Defina $M = (f_{ij}) \in \text{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{F}(x_n))$ e $M' = PM := (f'_{ij}) \in \text{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{F}(x_n))$. Defina $D'_i = \sum_{j=1}^n f'_{ij} D_{x_j} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$. Então

$$\mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell} = \mathbb{F}(x_n)^{D'_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D'_\ell}.$$

Demonstração. Denote $\nabla_X := (D_{x_1} \ \dots \ D_{x_n})^T$. Então, $f \in \mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell}$, se, e somente se, $D_i(f) = 0$, para todo $i = 1, \dots, \ell$. Isso significa que

$$M \nabla_X(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell 1} & f_{\ell 2} & \dots & f_{\ell n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x_1}(f) \\ D_{x_2}(f) \\ \vdots \\ D_{x_n}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\ell \times 1}.$$

Multiplicando essa igualdade por P , concluímos que $f \in \mathbb{F}(x_n)^{D'_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D'_\ell}$. Uma vez que P é invertível, então a inclusão recíproca é análoga, pois $M' = P^{-1}M$. $\square$

Proposição 1.6.9. Sejam $D, D_1, \dots, D_\ell \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e S o submódulo de $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ gerado por $D_1, \dots, D_\ell$. Então $D \in S$ se, e somente se, $\mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell} \subseteq \mathbb{F}(x_n)^D$.

Demonstração. Suponha que $D \in S$. Então existem $h_1, \dots, h_\ell \in \mathbb{F}(x_n)$ tais que $D = h_1 D_1 + \dots + h_\ell D_\ell$. Assim, se $g \in \mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell}$, então $D_i(g) = 0$, para todo $i = 1, \dots, \ell$. Logo, $D(g) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $D \notin S$. Escreva $D = \sum_{j=1}^n g_j D_{x_j}$ e, para cada $i = 1, \dots, \ell$, escreva $D_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} D_{x_j}$. Defina $M \in \text{Mat}_{(\ell+1) \times n}(\mathbb{F}(x_n))$, como sendo

$$M = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell 1} & f_{\ell 2} & \dots & f_{\ell n} \end{pmatrix}.$$

Seja $P \in \text{Mat}_{(\ell+1) \times (\ell+1)}(\mathbb{F}(x_n))$ invertível tal que PM é a forma escalonada reduzida de M , dada por

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1k_1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{2k_2} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{\ell+1, k_{\ell+1}} & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

onde $m_{ik_i} = 1$ é o pivô da linha i e $*$ é algum elemento em $\mathbb{F}(x_n)$. Denote $\nabla_X := (D_{x_1} \cdots D_{x_1})^T$. Sejam L_i a i -ésima linha de PM e $D' = L_1 \nabla_X$ e $D'_i = L_{i+1} \nabla_X$, com $i = 1, \dots, \ell$, derivações em $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$. Pelo Lema 1.6.8, sabemos que

$$\mathbb{F}(x_n)^D \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell} = \mathbb{F}(x_n)^{D'} \cap \mathbb{F}(x_n)^{D'_1} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D'_\ell}.$$

Pela forma da matriz PM , temos que na derivação D' o termo que multiplica $D_{x_{k_1}}$ é $m_{1k_1} = 1$, enquanto nas demais derivações o termo que multiplica $D_{x_{k_1}}$ é zero. Daí, podemos concluir que $x_{k_1} \in \mathbb{F}(x_n)^{D'_1} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D'_\ell}$, mas $x_{k_1} \notin \mathbb{F}(x_n)^{D'}$. Seja $h = D'(x_{k_1}) \neq 0$. Então

$$M \nabla_X(x_{k_1}) = P^{-1} P M \nabla_X(x_{k_1}) = P^{-1} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $h' \neq 0$. Portanto, $x_{k_1} \in \mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell} \setminus \mathbb{F}(x_n)^D$, ou seja, $\mathbb{F}(x_n)^{D_1} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(x_n)^{D_\ell} \not\subseteq \mathbb{F}(x_n)^D$. $\square$

1.6.1 Observação sobre a relação entre derivação e campo vetorial

Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $p \in \mathbb{F}^n$. Definimos **espaço tangente** de $\mathbb{F}^n$ no ponto p como sendo

$$T_p \mathbb{F}^n := \{p\} \times \mathbb{F}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{F}^n\}.$$

Dados $(p, v_1), (p, v_2) \in T_p \mathbb{F}^n$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, definindo

$$(p, v_1) + (p, v_2) := (p, v_1 + v_2) \quad \text{e} \quad \lambda(p, v_1) := (p, \lambda v_1),$$

temos que $T_p \mathbb{F}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ isomorfo ao espaço $\mathbb{F}^n$, com uma base dada por $\{(p, e_i) \mid i = 1, \dots, n\}$, onde e_i o vetor com coordenada 1 na posição i e zero nas demais.

A união disjunta de todos os espaços vetoriais é chamada de **fibrado tangente** de $\mathbb{F}^n$ e é denotada por $T\mathbb{F}^n$, isto é,

$$T\mathbb{F}^n := \bigsqcup_{p \in \mathbb{F}^n} T_p \mathbb{F}^n.$$

Um **campo vetorial** de $\mathbb{F}^n$ é uma função $X : \mathbb{F}^n \rightarrow T\mathbb{F}^n$, isto é, é uma função que associa um

ponto $p \in \mathbb{F}^n$ a um vetor $v_p \in T_p \mathbb{F}^n$. Um exemplo de campo vetorial é a função

$$\begin{aligned} D_{x_i}(-) : \mathbb{F}^n &\rightarrow T \mathbb{F}^n \\ p &\mapsto D_{x_i}(-)|_p = (p, e_i) \in T_p \mathbb{F}^n, \end{aligned}$$

dita *campo vetorial constante*. Assim, como $\{(p, e_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ é uma base de $T_p \mathbb{F}^n$, dado um campo vetorial $X : \mathbb{F}^n \rightarrow T \mathbb{F}^n$, podemos escrever $X(p) = \sum_{i=1}^n v_i D_{x_i}(-)|_p$, onde $v_i \in \mathbb{F}$. Se existem $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}(x_n)$ tais que

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F} \\ p &\mapsto v_i, \end{aligned}$$

então X é dito **campo vetorial racional**.

Denote por $\mathcal{X} \mathbb{F}^n$ o conjunto de todos os campos vetoriais racionais de $\mathbb{F}^n$. Pode-se mostrar que se $X \in \mathcal{X} \mathbb{F}^n$, com $X(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) D_{x_i}(-)|_p$, então $\bar{X} = \sum_{i=1}^n f_i D_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{X} \mathbb{F}^n &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n)) \\ X &\mapsto \bar{X} \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Para mais detalhes veja [Tu11].

Esse isomorfismo pode ser útil para estudar as derivações, usando as ferramentas da geometria diferencial tais como formas diferenciais e folheações. Por exemplo, em [CMS09], os autores apresentam um algoritmo para verificar se uma derivação em $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$, satisfazendo certas condições, tem uma curva algébrica invariante, utilizando técnicas da geometria diferencial. Outro exemplo de texto que utiliza essa abordagem é o livro [ŠW14], onde se estuda o núcleo de derivações lineares, conforme comentaremos mais adiante.

1.7 Álgebra de invariantes de uma álgebra de Lie

Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita, com base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Defina $\mathbb{F}[L] := \mathbb{F}[x_n]$ a álgebra dos polinômios nas variáveis $\{x_1, \dots, x_n\}$. Observe que, podemos identificar $x \in L$ como um elemento $x \in \mathbb{F}[L]$, ou seja, podemos ver $L \subseteq \mathbb{F}[L]$. Considere a *ação adjunta* de $x \in L$,

$$\begin{aligned} \text{ad}(x) : L &\rightarrow L \\ y &\mapsto [x, y]. \end{aligned}$$

Note que $\text{ad}(x)(y) = [x, y] \in L \subseteq \mathbb{F}[L]$, para todo $y \in L$. Pela Proposição 1.6.5, $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[L])$ é um $\mathbb{F}[L]$ -módulo livre, com base $D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$. Logo, definimos a *derivação adjunta* de $x \in L$ (a qual, por abuso de notação, é denotada pelo mesmo símbolo da ação adjunta de $x \in L$) como sendo

$$\text{ad}(x) := \text{ad}(x)(x_1)D_{x_1} + \dots + \text{ad}(x)(x_n)D_{x_n} = [x, x_1]D_{x_1} + \dots + [x, x_n]D_{x_n}. \quad (1.7.1)$$

Denote o núcleo de $\text{ad}(x)$ por $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\text{ad}(x)}$. A **álgebra de invariantes polinomiais** de L , denotada por $\mathbb{F}[L]^L$, é definida como sendo

$$\mathbb{F}[L]^L := \{f \in \mathbb{F}[L] \mid \text{ad}(x)(f) = 0, \forall x \in L\} = \bigcap_{x \in L} \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\text{ad}(x)}.$$

Uma vez que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é base de L , então

$$\mathbb{F}[L]^L = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\text{ad}(x_i)}.$$

Estendendo a derivação $\text{ad}(x) \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathbf{x}_n])$, apresentada na Equação (1.7.1), para uma derivação em $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_n))$, conforme a Proposição 1.6.3, a qual receberá o mesmo nome, $\text{ad}(x)$, temos que

$$\text{ad}(x) = [x, x_1]D_{x_1} + \dots + [x, x_n]D_{x_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)),$$

sendo que, agora, interpretamos D_{x_i} como uma derivação no corpo de frações de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Denote o núcleo de $\text{ad}(x) \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_n))$ por $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x)}$. Assim, similarmente à definição da álgebra de invariantes polinomiais, definimos o **corpo de invariantes racionais** de L , denotada por $\mathbb{F}(L)^L$, como sendo

$$\mathbb{F}(L)^L := \{f \in \mathbb{F}(L) \mid \text{ad}(x)(f) = 0, \forall x \in L\} = \bigcap_{x \in L} \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x)}.$$

Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ é base de L , então

$$\mathbb{F}(L)^L = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}.$$

Proposição 1.7.1. Sejam L uma álgebra de Lie nilpotente ou completamente solúvel e $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base triangular de L . Sejam $k \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in L$. Então $\bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}$ é $\text{ad}(x)$ -invariante, ou seja,

$$\text{ad}(x) \left(\bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)} \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}.$$

Demonstração. Sejam $k \in \{1, \dots, n\}$, $x \in L$ e $f \in \bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}$. Temos que mostrar que $\text{ad}(x_i)(\text{ad}(x)(f)) = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{ad} : L &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}[L]) \\ x &\mapsto \text{ad}(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. Logo, para qualquer $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que

$$\text{ad}(x_i)(\text{ad}(x)(f)) = \text{ad}(x)(\text{ad}(x_i)(f)) + \text{ad}([x_i, x])(f)$$

Como $f \in \bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}$, então $\text{ad}(x_i)(f) = 0$, logo $\text{ad}(x)(\text{ad}(x_i)(f)) = 0$. Pela propriedade da base, dada pela Proposição 1.5.4, temos que $[x_i, x]$ é combinação linear de $x_1, \dots, x_{i-1}$. Assim, uma vez que $f \in \bigcap_{i=1}^k \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(x_i)}$, então $\text{ad}([x_i, x])(f) = 0$. $\square$

Vamos apresentar uma relação entre as álgebras de invariantes polinomiais e racionais, quando L é nilpotente.

Teorema 1.7.2. Se L é nilpotente, então

$$\mathbb{F}(L)^L = \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L).$$

Demonstração. Seja $\frac{f}{g} \in \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L)$. Então, para todo $x \in L$, $\text{ad}(x)(f) = \text{ad}(x)(g) = 0$, onde $\text{ad}(x) \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[L])$ é a derivação adjunta na álgebra $\mathbb{F}[L]$. Por abuso de notação, seja $\text{ad}(x) \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(L))$, conforme Proposição 1.6.3, a derivação no corpo $\mathbb{F}(L)$. Então

$$\text{ad}(x)\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\text{ad}(x)(f)g - \text{ad}(x)(g)f}{g^2} = 0.$$

Logo, $f, g \in \mathbb{F}(L)^L$. Reciprocamente, seja $\frac{f}{g} \in \text{Frac}(\mathbb{F}(L)^L)$. Suponha, sem perda de generalidade, que f e g são coprimos. Então

$$0 = \text{ad}(x)\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\text{ad}(x)(f)g - \text{ad}(x)(g)f}{g^2} = 0.$$

Logo, $\text{ad}(x)(f)g = \text{ad}(x)(g)f$. Daí, temos que $\text{ad}(x)(f)g$ pertence tanto ao ideal $\langle f \rangle$, quanto ao ideal $\langle g \rangle$. Mas, como $\text{mdc}(f, g) = 1$, então $\langle fg \rangle = \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$. Isso implica que $\text{ad}(x)(f)g = qfg$, com $q \in \mathbb{F}[x_n]$. Logo, $\text{ad}(x)(f) = qf$. Uma vez que $\deg(\text{ad}(x)(f)) = \deg(f)$, então $q = \lambda_x \in \mathbb{F}$, ou seja, $\text{ad}(x)(f) = \lambda_x f$. Como L é nilpotente, então existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$0 = \text{ad}(x)^n(f) = \lambda_x^n f.$$

Assim, $\lambda_x = 0$ e, por conseguinte, $\text{ad}(x)(f) = 0$. Portanto, $f, g \in \mathbb{F}[L]^L$. □

O exemplo a seguir mostra um caso onde o Teorema 1.7.2 não vale (veja que L , nesse exemplo, não é nilpotente).

Exemplo 1.7.3. Seja L a álgebra com base $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde $[x_1, x_3] = -x_1$, $[x_2, x_3] = -x_2$ e zero nos outros casos. Assim, temos que

$$\text{ad}(x_1) = -x_1 D_{x_3}, \quad \text{ad}(x_2) = -x_2 D_{x_3}, \quad \text{ad}(x_3) = x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2}.$$

Uma vez que as derivações $\text{ad}(x_1)$ e $\text{ad}(x_2)$ são múltiplas de D_{x_3} , então

$$\mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_1)} = \mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_2)} = \mathbb{F}(x_1, x_2).$$

Observe que $\text{ad}(x_3)(\mathbb{F}(x_1, x_2)) \subseteq \mathbb{F}(x_1, x_2)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(L)^L &= \mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_1)} \cap \mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_2)} \cap \mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_3)} = \mathbb{F}(x_1, x_2) \cap \mathbb{F}(x_3)^{\text{ad}(x_3)} = \\ &= \mathbb{F}(x_1, x_2)^{\text{ad}(x_3)|_{\mathbb{F}(x_1, x_2)}}, \end{aligned}$$

ou seja, precisamos determinar o núcleo da derivação

$$\text{ad}(x_3)|_{\mathbb{F}(x_1, x_2)} = x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Veremos, na Seção 4.2.2, que um conjunto algebricamente independente que gera o núcleo dessa derivação é formado por elementos da forma $x_1^a x_2^b$, em que $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ são elementos da base do conjunto solução da equação $a + b = 0$. Portanto, $(a, b) = (1, -1)$, ou seja,

$$\mathbb{F}(L)^L = \mathbb{F}\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Agora, observe que

$$\mathbb{F}[L]^L = \mathbb{F}(L)^L \cap \mathbb{F}[L] = \mathbb{F}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cap \mathbb{F}[L] = \mathbb{F}.$$

Portanto, $\mathbb{F}(L)^L \neq \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L)$. □

Para finalizar essa seção, vamos apresentar mais um resultado envolvendo a álgebra de invariantes polinomiais e o corpo de invariantes racionais.

Corolário 1.7.4. Seja L uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita. Se $\mathbb{F}[L]^L$ é um domínio finitamente gerado, então

$$\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{F}[L]^L) = \text{trdeg}(\mathbb{F}(L)^L),$$

onde $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{F}[L]^L)$ é a dimensão de Krull de $\mathbb{F}[L]^L$.

Demonstração. Sabe-se, de álgebra comutativa, que se A é um domínio finitamente gerado, então $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{F}[L]^L) = \text{trdeg}(\text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L))$. Mas, pelo Teorema 1.7.2, temos que $\mathbb{F}(L)^L = \text{Frac}(\mathbb{F}[L]^L)$, o que conclui a demonstração. ☒

Capítulo 2

Método das características

Neste capítulo, apresentamos o método das características, uma ferramenta baseada em Análise e adaptada ao estudo de derivações de $\mathbb{F}(x_n)$. Discutimos as condições necessárias para a aplicação do método, destacando o papel das curvas integrais, com forte caráter geométrico. Tal método será crucial para a construção de um conjunto algebricamente independente que gera o núcleo de uma derivação triangular, conforme veremos no Capítulo 3. Esse tipo de derivação, por sua vez, será importante para nosso propósito de calcular um conjunto algebricamente independente que gera o corpo de invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente, assunto a ser tratado no Capítulo 5.

2.1 Hipóteses para aplicação do método

Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ uma derivação. Nosso objetivo, neste capítulo, é descrever $\mathbb{F}(x_n)^D$, construindo geradores algebricamente independentes, no caso em que certas condições são satisfeitas. Nossa abordagem se baseia no *método das características*, que é uma técnica usada em Análise para se resolver equações diferenciais parciais de primeira ordem a partir de curvas integrais (veja [Eva10], Seção 3.2). Para isso, vamos, primeiro, a uma definição.

Seja $D = \sum_{i=1}^n f_i D_{x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$. Considere $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}[t]^n$, isto é, uma n -úpla de polinômios em $\mathbb{F}[t]$. Dizemos que $\mathbf{c}$ é uma **curva integral** (ou *curva característica*) de D , se

$$D_t(c_i) = f_i(\mathbf{c}), \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.1.1)$$

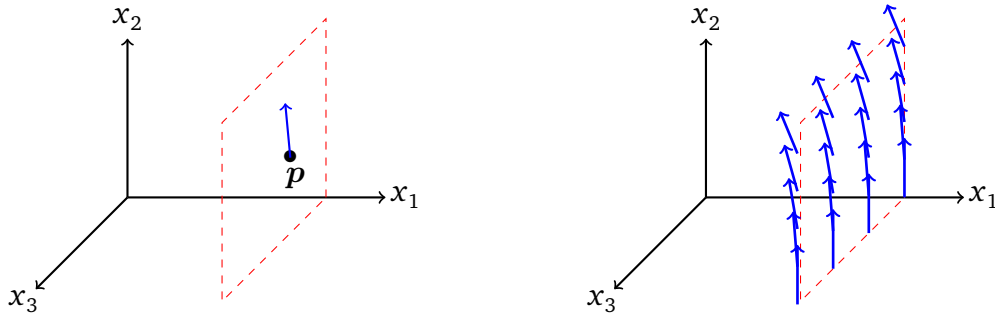
onde D_t é a derivada em relação à t . Note que uma curva integral $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}[t]^n$ de D pode ser vista como a função $\mathbf{c} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^n$, $t \mapsto (c_1(t), \dots, c_n(t))$. Nesse caso, dizemos que $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^n$ pertence a $\mathbf{c}$, se $\mathbf{p}$ pertence ao conjunto imagem de $\mathbf{c}$, isto é, se existe $t \in \mathbb{F}$ tal que $\mathbf{p} = \mathbf{c}(t)$.

Exemplo 2.1.1. Considere a derivação

$$D = x_1 D_{x_2} + x_2 D_{x_3} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_1, x_2, x_3)).$$

Note que tal derivação, considerando a Seção 1.6.1, está associada a um campo vetorial que

relaciona o ponto $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{F}^3$ ao vetor $(0, p_1, p_2) \in T_p \mathbb{F}^3$, conforme figura abaixo.

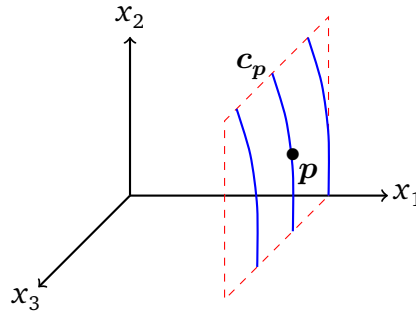


Por definição, uma curva integral de D , é uma tripla $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{F}[t]^3$, que satisfaz o sistema

$$D_t(c_1) = 0, \quad D_t(c_2) = c_1, \quad D_t(c_3) = c_2.$$

Por integração, obtemos como solução desse sistema, a família de curvas $(\mathbf{c}_p)_{p \in \mathbb{F}^3}$, onde

$$\mathbf{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}) = \left(p_1, p_1 t + p_2, p_1 \frac{t^2}{2} + p_2 t + p_3 \right).$$



Nesse caso, veja que $p = \mathbf{c}_p(0)$, ou seja, todo ponto $p \in \mathbb{F}^3$ pertence a alguma curva integral. Além disso, sejam $p, q \in \mathbb{F}^3$ tais que $q \in \mathbf{c}_p$, isto é,

$$q = (q_1, q_2, q_3) = \mathbf{c}_p(t_0) = (c_{p1}(t_0), c_{p2}(t_0), c_{p3}(t_0)), \text{ para algum } t_0 \in \mathbb{F}.$$

Isso nos dá

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = p_1 t_0 + p_2 \quad \text{e} \quad q_3 = p_1 \frac{t_0^2}{2} + p_2 t_0 + p_3. \quad (2.1.2)$$

Considere a curva integral

$$\mathbf{c}_q = (c_{q1}, c_{q2}, c_{q3}) = \left(q_1, q_1 t + q_2, q_1 \frac{t^2}{2} + q_2 t + q_3 \right).$$

Então, usando as Equações 2.1.2, obtemos

$$c_{q1} = q_1 = p_1 = c_{p1}(t + t_0),$$

$$c_{q2} = q_1 t + q_2 = p_1 t + p_1 t_0 + p_2 = p_1(t + t_0) + p_2 = c_{p2}(t + t_0),$$

$$\begin{aligned}
c_{q3} &= q_1 \frac{t^2}{2} + q_2 t + q_3 = p_1 \frac{t^2}{2} + (p_1 t_0 + p_2) t + p_1 \frac{t_0^2}{2} + p_2 t_0 + p_3 = \\
&= p_1 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2} + t t_0 \right) + p_2 (t + t_0) + p_3 = p_1 \frac{(t + t_0)^2}{2} + p_2 (t + t_0) + p_3 = c_{p3}(t + t_0).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{c}_q(t) = \mathbf{c}_p(t + t_0)$, ou seja, $\text{im}(\mathbf{c}_p) = \text{im}(\mathbf{c}_q)$. Com isso, temos que se $\mathbf{c}_p \cap \mathbf{c}_q \neq \emptyset$, então $\text{im}(\mathbf{c}_p) = \text{im}(\mathbf{c}_q)$. Uma vez que cada ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^3$ pertence à curva integral $\mathbf{c}_p$, com a conta que acabamos de fazer, concluímos que, para esse exemplo, todo ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^3$ pertence a uma única curva integral, onde unicidade, nesse contexto, significa a imagem da curva e não sua expressão como função. $\square$

Uma propriedade notável das curvas integrais de uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_n))$ manifesta-se ao avaliar uma função pertencente ao núcleo de D ao longo de uma dessas curvas, conforme a Proposição 2.1.2.

Proposição 2.1.2. Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_n))$. Se $f \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$ e $\mathbf{c}$ é uma curva integral de D , então

$$f(\mathbf{c}) \in \mathbb{F},$$

ou seja, f é constante ao longo das curvas integrais.

Demonstração. Seja $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}[t]^n$ uma curva integral de D . Seja $f \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$. Então, podemos ver $f(\mathbf{c}) = f(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}(t)$. Assim, pela Regra da Cadeia, temos que

$$D_t(f(\mathbf{c})) = \sum_{i=1}^n D_{x_i}(f)(\mathbf{c}) D_t(c_i).$$

Sabemos, da Proposição 1.6.6, que podemos escrever $D = \sum_{i=1}^n f_i D_{x_i}$, com $f_i \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$. Dessa forma, usando a definição de curva integral, temos que $D_t(c_i) = f_i(\mathbf{c})$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$D_t(f(\mathbf{c})) = \sum_{i=1}^n D_{x_i}(f)(\mathbf{c}) D_t(c_i) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{c}) D_{x_i}(f)(\mathbf{c}) = \left(\sum_{i=1}^n f_i D_{x_i}(f) \right)(\mathbf{c}) = D(f)(\mathbf{c}).$$

Assim, como $f \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$, temos que $D(f)(\mathbf{c}) = 0$, o que implica $D_t(f(\mathbf{c})) = 0$. Uma vez que, para todo $g \in \mathbb{F}(t)$, $D_t(g) = 0$ se, e somente se, $g \in \mathbb{F}$, concluímos que $f(\mathbf{c})$ é constante. $\square$

Como mencionado no início desta seção, nosso objetivo é descrever $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$ por meio da construção de geradores algebricamente independentes sob determinadas condições. Apresentaremos agora três hipóteses que, caso sejam satisfeitas por uma derivação, permitirão alcançar esse objetivo. Tais hipóteses são:

(H1) existe $U \subseteq \mathbb{F}^n$ um aberto de Zariski tal que para cada $\mathbf{p} \in U$ existe única curva integral $\mathbf{c}$ de D (lembrando que unicidade se refere a imagem da curva) tal que $\mathbf{p} \in \mathbf{c}$ (tal curva é, frequentemente, denotada por $\mathbf{c}_p$);

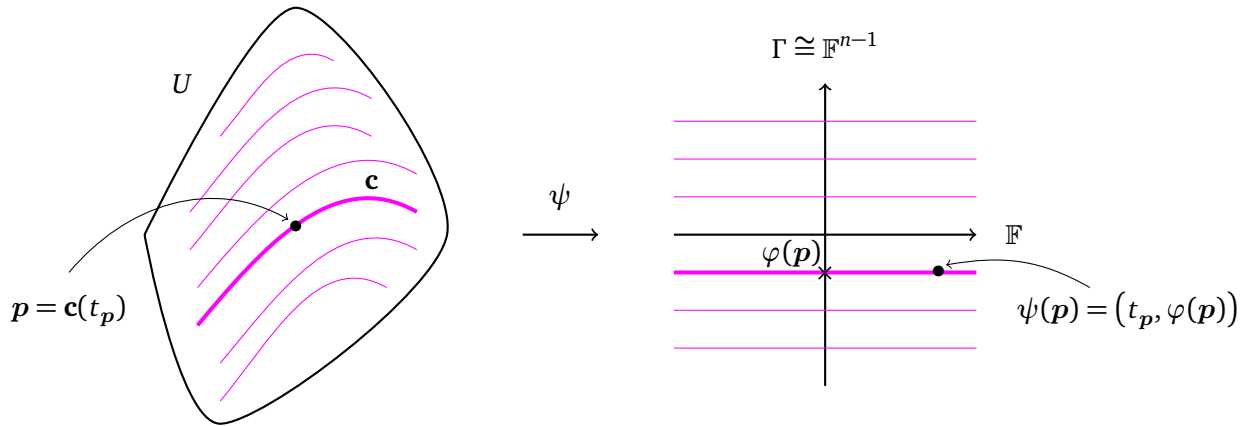
(H2) existe $\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n$ uma variedade afim isomorfa a $\mathbb{F}^{n-1}$ tal que $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ e, para todo $p \in U$, a interseção $\mathbf{c}_p \cap \Gamma$ contém exatamente um elemento, denotado por p_0 ;

(H3) cada componente da correspondência

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \Gamma \\ p &\mapsto p_0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

é uma função racional de $\mathbb{F}^n$.

Observação 2.1.3. As hipóteses acima nos remetem ao conceito de *folheação* do aberto $U \subseteq \mathbb{F}^n$. Esse é um conceito que envolve muitas definições, tais como: espaço topológico Hausdorff com base enumerável, atlas maximal, funções de classe C^k , sistema de coordenadas admissível, variedade diferenciável, mergulho, entre outros. Os detalhes dessas definições podem ser vistos em [Lee13]. Contudo, sem aprofundarmos em tais detalhes, dado $p \in U$, por (H1), existe única curva integral $\mathbf{c}$ de D tal que $p = \mathbf{c}(t_p)$, para algum $t_p \in \mathbb{F}$ e, por (H2) e (H3), podemos considerar a função $\varphi : U \rightarrow \Gamma$ dada em (2.1.3). Assim, tomando a função $\psi : U \rightarrow \mathbb{F} \times \Gamma$, $p \mapsto (t_p, \varphi(p))$, temos que (U, ψ) é uma variedade de dimensão n .



Nesse contexto, temos ainda que cada curva integral da derivação é uma subvariedade conexa de dimensão 1 de U e $U = \sqcup_{p \in U} \mathbf{c}_p$ é uma união disjunta. Além disso, para todo $p \in \mathbf{c}$ temos que $\varphi(p) = a \in \Gamma$ é um valor constante, logo $\psi(p) = (t_p, a)$. Isso faz de $\mathcal{F} = \{\mathbf{c}_p\}_{p \in U}$ uma folheação de dimensão 1 de U , pois, por definição, uma **folheação** de dimensão k de uma variedade M de dimensão n é uma coleção $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ tal que

(a) F_i é subvariedade conexa de dimensão k

(b) $M = \bigsqcup_{i \in I} F_i$

(c) para todo $p \in M$ existe um aberto $U \subseteq M$ contendo p e existe um sistema de coordenadas $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : M \rightarrow \mathbb{F}^n$ tal que para todo $x \in U \cap F_i$

$$\psi_j(x) = \text{constante, com } j = k + 1, \dots, n.$$

□

2.2 Obtenção de geradores algebricamente independentes

Nesta seção, vamos considerar uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ que satisfaz as hipóteses da seção anterior e vamos construir um isomorfismo entre $\mathbb{F}(x_n)^D$ e um corpo finitamente gerado, conforme apresentado na Proposição 2.2.1. Para isso, vamos a uma observação breve.

Seja $\mathbb{F}(\Gamma)$ o corpo das funções racionais de Γ . Como Γ é uma variedade afim isomorfa a $\mathbb{F}^{n-1}$, então $\mathbb{F}(\Gamma)$ pode ser visto como $\mathbb{F}(y_1, \dots, y_{n-1})$. Sejam $f_0 \in \mathbb{F}(\Gamma)$, $\text{den}(f_0)$ o denominador de f_0 e

$$\mathcal{V}(\text{den}(f_0)) = \{p \in \Gamma \mid \text{den}(f_0)(p) = 0\} \subseteq \Gamma$$

o conjunto algébrico afim associada a $\text{den}(f_0)$, conforme visto na Seção 1.4. Considere também a função $\varphi : U \rightarrow \Gamma$, conforme definido na Equação (2.1.3). Dado $p \in U \setminus \varphi^{-1}(\mathcal{V}(\text{den}(f_0)))$, então podemos considerar $f_0(\varphi(p)) \in \mathbb{F}$.

Proposição 2.2.1. Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ uma derivação que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3), vistas na Seção 2.1, para algum aberto de Zariski U e algum $\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n$ isomorfo a $\mathbb{F}^{n-1}$. Então a função

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{F}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{F}(x_n)^D \\ f_0 &\mapsto \alpha(f_0) \end{aligned}$$

onde $\alpha(f_0)(p) = f_0(\varphi(p))$, para todo $p \in U \setminus \varphi^{-1}(\mathcal{V}(\text{den}(f_0)))$ é um isomorfismo de corpos.

Demonstração. Vamos, primeiro, mostrar que α está bem definida, isto é, vamos mostrar que, para todo $f_0 \in \mathbb{F}(\Gamma)$, temos que $\alpha(f_0) \in \mathbb{F}(x_n)^D$. Para isso, precisamos mostrar que: (i) $\alpha(f_0)$ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$ e (ii) $D(\alpha(f_0)) = 0$. Vejamos.

(i) Denote por $U_{\text{den}(f_0)}$ o conjunto $U \setminus \varphi^{-1}(\mathcal{V}(\text{den}(f_0)))$ e tome $p \in U_{\text{den}(f_0)}$. Por definição, $\alpha(f_0)(p) = f_0(\varphi(p))$. Observe que, pela hipótese (H3), cada componente de φ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$ e, por definição, f_0 é uma função racional de Γ . Como $\alpha(f_0)$ é a composição dessas funções, restrita ao conjunto $U_{\text{den}(f_0)}$, e sendo $U_{\text{den}(f_0)}$ um aberto de Zariski de $\mathbb{F}^n$, então $\alpha(f_0)$ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$.

(ii) Sejam $p_1, p_2 \in U_{\text{den}(f_0)}$ pertencentes a uma curva integral $\mathbf{c}$ de D . Por definição de φ , temos que $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$. Logo, $\alpha(f_0)(p_1) = \alpha(f_0)(p_2)$. Isso significa que, restrita a uma curva integral de D , o valor de $\alpha(f_0)$ é constante, ou seja, $\alpha(f_0) \circ \mathbf{c} \in \mathbb{F}$. Note que $\alpha(f_0) \in \mathbb{F}(x_n)$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{F}[t]^n$, logo $\alpha(f_0) \circ \mathbf{c} \in \mathbb{F}[t]$. Daí, $D_t(\alpha(f_0) \circ \mathbf{c}) = 0$. Assim, usando a Regra da Cadeia, temos que

$$0 = D_t(\alpha(f_0) \circ \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^n D_{x_j}(\alpha(f_0))(\mathbf{c}) D_t(c_j) \quad (2.2.1)$$

Pela Proposição 1.6.6, podemos escrever $D = \sum_{i=1}^n f_i D_{x_i}$, onde $f_i \in \mathbb{F}(x_n)$. Nesse caso, como $\mathbf{c}$ é uma curva integral de D , então $D_t(c_j) = f_j(\mathbf{c})$, para todo $j = 1, \dots, n$. Dessa forma, voltando à

Equação (2.2.1), temos que

$$\sum_{j=1}^n D_{x_j}(\alpha(f_0))(\mathbf{c}) D_t(c_j) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{c}) D_{x_j}(\alpha(f_0))(\mathbf{c}) = D(\alpha(f_0))|_{\mathbf{c}},$$

ou seja, $D(\alpha(f_0))|_{\mathbf{c}} = 0$. Pela hipótese (H1), temos que todo ponto em U pertence a uma curva integral, logo $D(\alpha(f_0))|_{\mathbf{c}} = 0$ implica em $D(\alpha(f_0))(\mathbf{p}) = 0$, para todo $\mathbf{p} \in U_{\text{den}(f_0)}$. Novamente, por $U_{\text{den}(f_0)}$ ser um aberto de Zariski, obtemos que $D(\alpha(f_0))$ é a função nula em $\mathbb{F}^n$, isto é, $D(\alpha(f_0)) = 0$.

Assim, concluímos que α está bem definida. Vamos mostrar, agora, que tal função é um homomorfismo de corpos. Para ver isso, basta observar que, dados $f_0, g_0 \in \mathbb{F}(\Gamma)$, temos que

$$\alpha(f_0 g_0)(\mathbf{p}) = (f_0 g_0)(\varphi(\mathbf{p})) = f_0(\varphi(\mathbf{p})) g_0(\varphi(\mathbf{p})) = (\alpha(f_0)(\mathbf{p}))(\alpha(g_0)(\mathbf{p})),$$

$$\alpha(f_0 + g_0)(\mathbf{p}) = (f_0 + g_0)(\varphi(\mathbf{p})) = f_0(\varphi(\mathbf{p})) + g_0(\varphi(\mathbf{p})) = \alpha(f_0)(\mathbf{p}) + \alpha(g_0)(\mathbf{p}).$$

Logo, α é um homomorfismo de corpos. Vamos mostrar que α é injetiva. Para isso, suponha que $\alpha(f_0) = 0$. Pela hipótese (H2), $\Gamma \cap U \neq \emptyset$. Então

$$0 = \alpha(f_0) = \alpha(f_0)|_{\Gamma \cap U} = f_0|_{\Gamma \cap U}.$$

Uma vez que $\Gamma \cap U$ é um aberto de Γ , então $f_0 \in \mathbb{F}(\Gamma)$ é a função nula. Dessa forma, para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que α é sobrejetivo. Com esse intuito, suponha que $f \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$. Seja $\Gamma_f := \Gamma \setminus \mathcal{V}(\text{den}(f))$ um aberto de Γ e defina $f_0 := f|_{\Gamma_f}$. Como cada componente de φ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$, então cada componente é contínua na topologia de Zariski. Assim, podemos afirmar que o conjunto $\varphi^{-1}(\Gamma_f) \subseteq U$ é um conjunto aberto em U . Seja $\mathbf{p} \in \varphi^{-1}(\Gamma_f)$. Pela Proposição 2.1.2, temos que $f(\mathbf{p}) = f(\varphi(\mathbf{p}))$. Assim,

$$f(\mathbf{p}) = f(\varphi(\mathbf{p})) = f_0(\varphi(\mathbf{p})) = \alpha(f_0)(\mathbf{p}).$$

Com isso, demonstramos que α é um isomorfismo de corpos. □

Corolário 2.2.2. Considerando o enunciado da Proposição 2.2.1, e identificando $\mathbb{F}(\Gamma)$ com o corpo $\mathbb{F}(y_1, \dots, y_{n-1})$, então

$$\{\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{n-1})\}$$

é um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$.

Demonstração. Segue do fato de $\alpha : \mathbb{F}(y_1, \dots, y_{n-1}) \rightarrow \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^D$ ser um isomorfismo de corpos e $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ ser um conjunto algebricamente independente em $\mathbb{F}(\Gamma) = \mathbb{F}(y_1, \dots, y_{n-1})$. □

Exemplo 2.2.3. Vamos retornar ao Exemplo 2.1.1, onde consideramos a derivação $D = x_1 D_{x_2} + x_2 D_{x_3} \in \text{Der}(\mathbb{F}(\mathbf{x}_3))$. Para determinarmos o isomorfismo dado pela Proposição 2.2.1, precisamos achar U e Γ que satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (H3), ou seja, temos que encontrar U um

aberto de Zariski tal que cada um dos seus pontos pertençam a uma única curva integral de D ; e temos que encontrar Γ isomorfo a $\mathbb{F}^2$ onde $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ e onde uma curva integral intersectam Γ em um único ponto de tal forma que cada componente da correspondência $\varphi : U \rightarrow \Gamma, p \mapsto p_0$ seja uma função racional de $\mathbb{F}^n$. Vimos, no Exemplo 2.1.1, que $\mathbb{F}^3$ satisfaz (H1). Logo, (H1) vale para um aberto $U \subseteq \mathbb{F}^3$ a ser definido adiante.

Para definir Γ , lembre-se de que, para cada $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{F}^3$, a curva integral $\mathbf{c}_p$ é dada por

$$\mathbf{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}) = \left(p_1, p_1 t + p_2, p_1 \frac{t^2}{2} + p_2 t + p_3 \right).$$

Note que c_{p2} é o primeiro componente de $\mathbf{c}_p$ onde há a ocorrência de t . Assim, vamos definir $\Gamma := \{(y_1, 0, y_3) | y_i \in \mathbb{F}\}$. Nesse caso, $\mathbf{c}_p$ intersecta Γ se, e somente se, $c_{p2} = 0$, ou seja, a interseção ocorre quando $t = t_0 := -\frac{p_2}{p_1}$. Tal interseção é dada por

$$\mathbf{c}_p \cap \Gamma = \{(c_{p1}(t_0), c_{p2}(t_0), c_{p3}(t_0))\} = \left\{ \left(p_1, 0, -\frac{p_2^2}{2p_1} + p_3 \right) \right\}.$$

Aqui, precisamos que $p_1 \neq 0$. Portanto, o aberto que precisamos é $U := \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \neq 0\}$. Note que

$$U \cap \Gamma = \{(x_1, 0, x_3) | x_1 \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Assim, (H1) e (H2) são satisfeitas. Veja também que os componentes da correspondência $p \mapsto p_0$ são funções racionais de $\mathbb{F}^3$, pois a função que leva p em $\mathbf{c}_{pi}$ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$, uma vez que as coordenadas de p são levadas nos coeficientes do polinômio $\mathbf{c}_{pi} \in \mathbb{F}[t]$; e também porque a função que leva $\mathbf{c}_{pi}$ em $\mathbf{c}_{pi}(t_0)$ é uma função racional de $\mathbb{F}^n$, já que $t_0 = -\frac{p_2}{p_1}$. Portanto, (H3) também se verifica. Dessa forma, o isomorfismo da Proposição 2.2.1 é

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{F}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{F}(x_n)^D \\ y_1 &\mapsto \alpha(y_1)(x) = y_1 \left(x_1, 0, -\frac{x_2^2}{2x_1} + x_3 \right) = x_1 \\ y_3 &\mapsto \alpha(y_3)(x) = y_3 \left(x_1, 0, -\frac{x_2^2}{2x_1} + x_3 \right) = -\frac{x_2^2}{2x_1} + x_3. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{F} \left(x_1, -\frac{x_2^2}{2x_1} + x_3 \right).$$

□

Capítulo 3

Derivações triangulares

As derivações triangulares de $\mathbb{F}(z_n)$ formam uma classe especial de derivações que permitem a aplicação do método das características, apresentado no Capítulo 2, possibilitando a construção um conjunto algebricamente independente que gera seus núcleos. No nosso contexto, essas derivações surgem naturalmente ao lidarmos com álgebras de Lie nilpotentes de dimensão finita. Para essas álgebras, é possível determinar uma base que conduz a uma sequência finita de derivações triangulares. A aplicação sucessiva do método das características a essa sequência possibilita a construção de um conjunto algebricamente independente que gera a álgebra de invariantes racionais. Sendo assim, neste capítulo, exploraremos essa classe de derivações em maior detalhe.

3.1 Contextualização e definição

Seja $A \in \mathbb{F}\text{-Alg}$ e $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(A)$. Dizemos que D é uma **derivação localmente nilpotente**, se para cada $a \in A$, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tal que $D^n(a) = 0$, onde D^n é a composição de D com ele mesmo n vezes. Derivações localmente nilpotentes exercem um papel importante na resposta ao 14º. *problema de Hilbert*, que levanta a questão:

se $\mathbb{K}$ é um corpo tal que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}(z_n)$, então $\mathbb{K} \cap \mathbb{F}[z_n]$ é uma $\mathbb{F}$ -álgebra finitamente gerada?

Tal questão pode ser vista na Seção 6.1 em [Fre17]. Em 1990, Robert, em [Rob90], apresentou um exemplo que nega tal problema de Hilbert. Tal exemplo, conforme mostrou A'Campo-Neuen, em [AN94], é de fato o núcleo de uma derivação localmente nilpotente.

Estamos interessados em um subconjunto das derivações localmente nilpotentes, o qual definiremos agora. Sejam $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ um conjunto algebricamente independente e $\mathbb{F}[a_n]$ a subálgebra de A gerada por $\{a_1, \dots, a_n\}$. Dizemos que uma derivação D da álgebra $\mathbb{F}[a_n]$ é uma **derivação triangular** com respeito ao conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$, se $D(a_1) \in \mathbb{F}$ e $D(a_i) \in \mathbb{F}[a_1, \dots, a_{i-1}]$, para todo $i = 2, \dots, n$. Uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[a_n])$ é uma *derivação triangularizável* se existe $\{a'_1, \dots, a'_n\} \subseteq \mathbb{F}[a_n]$ um conjunto algebricamente independente que também gera $\mathbb{F}[a_n]$ tal que D é triangular com respeito ao conjunto $\{a'_1, \dots, a'_n\}$.

Se A é um domínio, estendemos essa definição para $\text{Frac}(A)$, dizendo que $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\text{Frac}(A))$ é uma *derivação triangular* com respeito ao conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$, se $D(a_1) \in \mathbb{F}$ e, para todo $i =$

$2, \dots, n$, vale que $D(a_i) \in \mathbb{F}[a_1, \dots, a_{i-1}]$. Em particular, considerando a Observação 1.6.2, temos que $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$ é uma derivação triangular com respeito a $\{z_1, \dots, z_n\}$, se

$$D = D(z_1)D_{z_1} + \dots + D(z_n)D_{z_n},$$

onde $D_{z_i} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$ é uma derivação do corpo $\mathbb{F}(z_n)$ e $D(z_i)$ pertence à álgebra dos polinômios $\mathbb{F}[z_n]$, satisfazendo $D(z_1) \in \mathbb{F}$ e $D(z_i) \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{i-1}]$.

A Proposição 3.29 de [Fre17] mostra que toda derivação triangularizável é localmente nilpotente, contudo a recíproca não é verdadeira, conforme mostra o *exemplo de Bass*, dado pela derivação

$$(z_1 z_3 - z_2^2)z_1 D_{z_2} + 2(z_1 z_3 - z_2^2)z_2 D_{z_3} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1, z_2, z_3])$$

e cuja demonstração pode ser vista na seção 3.8.1 de [Fre17].

Saber se uma derivação é triangularizável é algo difícil. Mas há trabalhos que buscam esse objetivo, conforme visto no artigo [Dai10], onde há uma caracterização de tais derivações para o caso de derivações em $\mathbb{F}[z_1, z_2, z_3]$. Além disso, ainda com uma perspectiva do 14º. problema de Hilbert, temos, no artigo [DF01], um resultado que mostra que o núcleo de toda derivação triangular em $\mathbb{F}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é finitamente gerada como $\mathbb{F}$ -álgebra.

Os próximos dois lemas mostram propriedades de derivações triangulares do corpo $\mathbb{F}(z_n)$ que serão usadas no decorrer do texto. Em ambos os lemas usaremos a ordem monomial lexicográfica com respeito a ordem $z_1 < \dots < z_n$, conforme visto na Seção 1.3. O Lema 3.1.1 faz uma afirmação acerca do monômio líder de um polinômio no núcleo da derivação. Baseamos sua demonstração naquela apresentada no Lema 3.3 de [dJS23], onde se demonstra algo semelhante para o *down operator*, um exemplo de derivação triangular, que comentaremos mais tarde na Seção 3.4. O Lema 3.1.2 mostrará que o monômio líder de polinômio f fora do núcleo da derivação é maior do que o monômio líder do polinômio resultante da aplicação da derivação em f .

Lema 3.1.1. Seja

$$D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$$

uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, onde $f_k \neq 0$, para algum $k = 1, \dots, n$. Considere a ordem monomial lexicográfica com respeito a ordem $z_1 < \dots < z_n$. Se $f \in \mathbb{F}[z_n]^D$, então $\text{lm}(f)$ não contém a variável z_k .

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{F}[z_n]^D$ e assuma, primeiro, que $f \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_k]$. Escreva $f = z_k^\ell d_\ell + \dots + z_k d_1 + d_0$, onde $d_i \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$, para todo $i = 1, \dots, \ell$. Se $\ell = 0$, então $f = d_0$, logo $\text{lm}(f)$ não contém z_k . Suponha que $\ell \neq 0$. Note que $D(d_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, \ell$, pois $d_i \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$ e $D(z_i) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= D(f) = D(z_k^\ell d_\ell + z_k^{\ell-1} d_{\ell-1} + \dots + z_k^2 d_2 + z_k d_1 + d_0) = \\ &= \ell z_k^{\ell-1} d_\ell D(z_k) + (\ell-1) z_k^{\ell-2} d_{\ell-1} D(z_k) + \dots + 2 z_k d_2 D(z_k) + d_1 D(z_k) = \\ &= \ell z_k^{\ell-1} d_\ell f_k + (\ell-1) z_k^{\ell-2} d_{\ell-1} f_k + \dots + 2 d_1 z_k f_k + d_1 f_k. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Analisando o coeficiente de $z_k^{\ell-1}$, temos que $\ell d_\ell f_k = 0$, o que é um absurdo, porque ℓ , d_ℓ e f_k são todos diferentes de zero. Logo, $\ell = 0$, ou seja, se $f \in \mathbb{F}[z_n]^D$ e $f \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_k]$, então $\text{lm}(f)$ não contém z_k .

Seja $i \in \{k, \dots, n\}$ e suponha, por indução, que se $f \in \mathbb{F}[z_n]^D$ e $f \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_i]$, então $\text{lm}(f)$ não contém z_k . Tome $f \in \mathbb{F}[z_n]^D$ tal que $f \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{i+1}]$. Escreva $f = z_{i+1}^r b_r + \dots + z_{i+1} b_1 + b_0$, onde $b_i \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_i]$. Novamente, se $r = 0$, então $f = b_0$ e, por indução, $\text{lm}(f)$ não contém z_k . Suponha que $r \neq 0$. Note que, nesse caso,

$$\text{lm}(f) = z_{i+1}^r \text{lm}(b_r). \quad (3.1.2)$$

Aplicando D em f , como fizemos na Equação (3.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = D(f) &= D(z_{i+1}^r b_r + z_{i+1}^{r-1} b_{r-1} + \dots + z_{i+1}^2 b_2 + z_{i+1} b_1 + b_0) = \\ &= r z_{i+1}^{r-1} f_{i+1} b_r + z_{i+1}^r D(b_r) + (r-1) z_{i+1}^{r-2} f_{i+1} b_{r-1} + z_{i+1}^{r-1} D(b_{r-1}) + \dots + \\ &\quad + 2 z_{i+1} f_{i+1} b_2 + z_{i+1}^2 D(b_2) + f_{i+1} b_1 + z_{i+1} D(b_1) + D(b_0), \end{aligned}$$

o que nos dá

$$D(b_r) z_{i+1}^r + (r f_{i+1} b_r + D(b_{r-1})) z_{i+1}^{r-1} + \dots + (2 f_{i+1} b_2 + D(b_1)) z_{i+1} + f_{i+1} b_1 + D(b_0) = 0.$$

Disso, segue que $D(b_r) = 0$. Por indução, $\text{lm}(b_r)$ não contém z_k . Portanto, pela Equação (3.1.2), o mesmo vale para $\text{lm}(f)$. $\square$

Lema 3.1.2. Seja

$$D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$$

uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, onde $f_k \neq 0$, para algum $k = 1, \dots, n$. Seja $f \in \mathbb{F}[z_n]$ um polinômio e considere a ordem monomial lexicográfica com respeito a ordem $z_1 < \dots < z_n$. Se $D(f) \neq 0$, então

$$\text{lm}(D(f)) < \text{lm}(f).$$

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{F}[z_n]$ tal que $D(f) \neq 0$. Escreva $f = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_\ell m_\ell$ como combinação linear de monômios. Então

$$0 \neq D(f) = \alpha_1 D(m_1) + \dots + \alpha_\ell D(m_\ell).$$

Pela Proposição 1.3.3,

$$\text{lm}(D(f)) \leq \max \{ \text{lm}(D(m_k)) \mid D(m_k) \neq 0, \text{ com } k = 1, \dots, \ell \}.$$

Logo, é suficiente mostrar a afirmação para monômios m tais que $D(m) \neq 0$.

Assim, sejam $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ índices tais que $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_m} \in \mathbb{Z}_{>0}$ sejam diferentes de

zero e considere $s := z_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots z_{j_i}^{\alpha_{j_i}} \cdots z_{j_m}^{\alpha_{j_m}}$. Suponha que $D(s) \neq 0$ e defina, para cada $\ell = 1, \dots, m$,

$$s_{j_\ell} := f_{j_\ell} z_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots z_{j_{\ell-1}}^{\alpha_{j_{\ell-1}}} z_{j_\ell}^{\alpha_{j_\ell}-1} z_{j_{\ell+1}}^{\alpha_{j_{\ell+1}}} \cdots z_{j_m}^{\alpha_{j_m}},$$

onde f_{j_ℓ} é o polinômio que acompanha $D_{z_{j_\ell}}$ na derivação $D = \sum_{i=1}^n f_i D_{z_i}$. Note que $s_{j_\ell} \neq 0$, se $f_{j_\ell} \neq 0$. Assim, sejam $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq m$ índices tais que $f_{j_{k_\ell}} \neq 0$, para todo $\ell = 1, \dots, r$. Uma vez que $f_{j_{k_\ell}} \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{j_{k_\ell}-1}]$, então

$$\text{lm}(s_{j_{k_\ell}}) = m_{j_{k_\ell}} z_{j_{k_\ell}}^{\alpha_{j_{k_\ell}}-1} z_{j_{k_\ell+1}}^{\alpha_{j_{k_\ell+1}}} \cdots z_{j_{k_r}}^{\alpha_{j_{k_r}}},$$

onde $m_{j_{k_\ell}}$ é um monômio $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_{j_{k_\ell}-1}]$. Assim, se $k_a < k_b$, então $\text{lm}(s_{j_{k_a}}) > \text{lm}(s_{j_{k_b}})$, pois na ordem monomial adotada $z_{j_{k_a}} < z_{j_{k_b}}$ e, analisando o expoente da variável $z_{j_{k_b}}$ temos que em $s_{j_{k_a}}$ é $\alpha_{j_{k_b}}$, enquanto que em $s_{j_{k_b}}$ é $\alpha_{j_{k_b}} - 1$. Agora, aplicando D em $s = z_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots z_{j_i}^{\alpha_{j_i}} \cdots z_{j_m}^{\alpha_{j_m}}$, temos que

$$D(s) = \alpha_{j_{k_1}} s_{j_{k_1}} + \cdots + \alpha_{j_{k_r}} s_{j_{k_r}}.$$

Pela Proposição 1.3.3, temos que $\text{lm}(D(s)) = \max(\text{lm}(s_{j_{k_1}}), \dots, \text{lm}(s_{j_{k_r}}))$. Como $\text{lm}(s_{j_{k_1}}) > \cdots > \text{lm}(s_{j_{k_r}})$, então

$$\text{lm}(D(s)) = \text{lm}(s_{j_{k_1}}) = m_{j_{k_1}} z_{j_{k_1}}^{\alpha_{j_{k_1}}-1} z_{j_{k_2}}^{\alpha_{j_{k_2}}} \cdots z_{j_{k_r}}^{\alpha_{j_{k_r}}} < z_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots z_{j_{k_1}}^{\alpha_{j_{k_1}}} \cdots z_{j_m}^{\alpha_{j_m}} = s. \quad \square$$

O próximo resultado será útil na demonstração do Teorema 5.1.1, quando mostraremos uma certa preservação da triangularidade para as derivações adjuntas de uma álgebra de Lie nilpotente, conforme é explicado no teorema.

Lema 3.1.3. Sejam

- (a) L uma álgebra de Lie com base $\{x_1, \dots, x_n\}$;
- (b) $K = \mathbb{F}(z_1, \dots, z_m)$ um corpo, onde $\{z_1, \dots, z_m\}$ é algebricamente independente;
- (c) $\psi : L \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{F}}(K)$ um homomorfismo de álgebras de Lie, onde $\psi(y)$ é uma derivação triangular com respeito a $\{z_1, \dots, z_m\}$, para todo $y \in L$;
- (d) $a \in L$ tal que $[a, L] \subseteq \ker(\psi)$

Escreva $\psi(a) = f_k D_{z_k} + \cdots + f_n D_{z_n}$, onde $f_k \neq 0$. Então $\psi(y)(f_k) = 0$, para todo $y \in L$.

Demonstração. Pela Observação 1.6.2, temos que $f_k = \psi(a)(z_k)$. Assim, dado $y \in L$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(y)(f_k) &= \psi(y)(\psi(a)(z_k)) = \psi(a)(\psi(y)(z_k)) - [\psi(a), \psi(y)](z_k) = \\ &= \psi(a)(\psi(y)(z_k)) - \psi([a, y])(z_k). \end{aligned}$$

Como $\psi(y)$ é derivação triangular com respeito a $\{z_1, \dots, z_n\}$, então $\psi(y)(z_k) \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$. Logo, pela expressão de $\psi(a)$, temos que $\psi(a)(\psi(y)(z_k)) = 0$. Além disso, como $[a, L] \subseteq \ker(\psi)$, então $\psi([a, y]) = 0$. Portanto, $\psi(y)(f_k) = 0$. $\square$

3.2 Aplicação do método das características

Nosso interesse nas derivações triangulares está relacionado à determinação dos geradores algebricamente independentes do corpo de invariantes racionais $\mathbb{F}(L)^L$ de uma álgebra de Lie nilpotente L , conforme veremos na Seção 5.1. Mostraremos que, apesar da dificuldade de se identificar uma derivação triangular, quando estabelecemos uma base adequada para a álgebra de Lie nilpotente, todas as derivações necessárias para determinar os geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(L)^L$ serão derivações triangulares com respeito a determinados conjuntos.

O primeiro passo, daremos agora, quando mostraremos que derivações triangulares satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (H3) da Proposição 2.2.1, que, relembrando, são:

- (H1) existe $U \subseteq \mathbb{F}^n$ um aberto de Zariski tal que para todo $p \in U$ existe única curva integral $\mathbf{c}_p$ da derivação tal que $p \in \mathbf{c}_p$;
- (H2) existe $\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n$ variedade afim isomorfa a $\mathbb{F}^{n-1}$ tal que $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ e, para todo $p \in U$, a interseção $\mathbf{c}_p \cap \Gamma = \{p_0\}$;
- (H3) cada componente da correspondência $\varphi : U \rightarrow \Gamma$, dada pela Equação (2.1.3), é uma função racional de $\mathbb{F}^n$.

Isso nos permitirá determinar os geradores algebricamente independentes do núcleo de uma derivação triangular.

Teorema 3.2.1. Seja

$$D = f_k D_{z_k} + \cdots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$$

uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, onde $f_k \neq 0$, para algum $k = 1, \dots, n$. Sejam

$$U := \{p = (p_1, \dots, p_n) \mid f_k(p) \neq 0\} = \mathbb{F}^n \setminus \mathcal{V}(f_k) \text{ e } \Gamma := \{(p_1, \dots, p_{k-1}, 0, p_{k+1}, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{F}\}.$$

Então U e Γ são os conjuntos que satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (H3).

Demonstração. Considere D uma derivação conforme descrito no enunciado no teorema. Então, uma curva integral $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}[t]^n$ de D é dada pela solução do sistema de equações diferenciais

$$D_t(c_1) = 0, \quad \dots, \quad D_t(c_{k-1}) = 0, \quad D_t(c_k) = f_k(c_1, \dots, c_{k-1}), \quad \dots, \quad D_t(c_n) = f_n(c_1, \dots, c_{n-1}).$$

Note que cada derivada desse sistema envolve polinômios na variável t que já foram determinados nas soluções das derivadas anteriores. Assim, tal sistema de equações tem solução única, se a condição inicial $\mathbf{c}(0)$ é fixada. Nesse sentido, dado $p = (p_1, \dots, p_n) \in U = \mathbb{F}^n \setminus \mathcal{V}(f_k)$, faça $\mathbf{c}(0) = p$. Pela unicidade da solução do sistema, temos que existem $F_{k+1}, \dots, F_n \in \langle t \rangle \subseteq \mathbb{F}[t]$, onde $\langle t \rangle$ é o ideal de $\mathbb{F}[t]$ gerado por t , tais que

$$c_1 = p_1, \quad \dots, \quad c_{k-1} = p_{k-1}, \quad c_k = \kappa t + p_k, \quad c_{k+1} = F_{k+1} + p_{k+1}, \quad \dots, \quad c_n = F_n + p_n, \quad (3.2.1)$$

onde $\kappa = f_k(p_1, \dots, p_{k-1}) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Vamos denotar tal curva, determinada pelo ponto $\mathbf{p}$, por $\mathbf{c}_p = (\mathbf{c}_{p1}, \dots, \mathbf{c}_{pn})$. Assim, temos que todo ponto em U pertence a uma curva integral. Suponha que $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in U$ pertence a $\mathbf{c}_p$. Isso significa que existe $t_0 \in \mathbb{F}$ tal que $\mathbf{q} = \mathbf{c}_p(t_0)$, ou seja,

$$q_1 = p_1, \dots, q_{k-1} = p_{k-1}, q_k = \kappa t_0 + p_k, q_{k+1} = F_{k+1}(t_0) + p_{k+1}, \dots, q_n = F_n(t_0) + p_n. \quad (3.2.2)$$

Seja $\mathbf{c}_q$ a curva integral determinada por $\mathbf{q}$, isto é, que $\mathbf{c}_q(0) = \mathbf{q}$. Então, por definição de curva integral, temos que

$$c_{qi} = q_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, k-1.$$

Mas $q_i = p_i = c_{pi}(t) = c_{pi}(t + t_0)$, para todo $t \in \mathbb{F}$ e para todo $i = 1, \dots, k-1$. Logo,

$$c_{qi}(t) = c_{pi}(t + t_0), \text{ para todo } t \in \mathbb{F}, \text{ e para todo } i = 1, \dots, k-1.$$

Suponha, por indução, que $c_{qi}(t) = c_{pi}(t + t_0)$, para algum $i \in \{k, \dots, n-1\}$. Então

$$D_t(c_{q,i+1}(t)) = f_{i+1}(c_{q1}(t), \dots, c_{qi}(t)) = f_{i+1}(c_{p1}(t + t_0), \dots, c_{pi}(t + t_0)) = D_t(c_{p,i+1}(t + t_0)).$$

Assim,

$$c_{q,i+1}(t) + K_1 = c_{p,i+1}(t + t_0) + K_2, \quad (3.2.3)$$

onde $K_1, K_2 \in \mathbb{F}$. Fazendo $t = 0$, obtemos

$$\begin{array}{ccc} \text{Equações (3.2.1)} & & \text{Equações (3.2.2)} \\ q_{i+1} + K_1 = c_{q,i+1}(0) + K_1 = c_{p,i+1}(0 + t_0) + K_2 = F_{i+1}(t_0) + p_{i+1} + K_2 = q_{i+1} + K_2. \end{array}$$

Assim, $K_1 = K_2$ e, conseqüentemente, voltando à Equação (3.2.3), temos que $c_{q,i+1}(t) = c_{p,i+1}(t + t_0)$. Portanto, por indução, $\mathbf{c}_q(t) = \mathbf{c}_p(t + t_0)$. Com isso, temos que se $\mathbf{c}_p \cap \mathbf{c}_q \neq \emptyset$, com $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in U$, então tais curvas contêm os mesmos pontos. Logo, U satisfaz (H1). Agora, fazendo $\Gamma = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_k = 0\}$, temos que $\mathbf{c}_p$ intersecta Γ se, e somente se,

$$0 = c_{pk} = f_k(p_1, \dots, p_{k-1})t + p_k$$

Como $f_k(p_1, \dots, p_{k-1}) \neq 0$, então a interseção é única e é determinada por $\tilde{t} = -\frac{p_k}{f_k(p_1, \dots, p_{k-1})}$, isto é, $\mathbf{c}_p \cap \Gamma = \{\mathbf{c}_p(\tilde{t})\}$, onde

$$\mathbf{c}_p(\tilde{t}) = (p_1, \dots, p_{k-1}, 0, F_{k+1}(\tilde{t}) + p_{k+1}, \dots, F_n(\tilde{t}) + p_n).$$

Dessa forma, U e Γ satisfazem (H1) e (H2). Finalmente, veja que, pelo Sistema (3.2.1), a função que associa $\mathbf{p}$ a $\mathbf{c}_{pi}$ é racional em $\mathbb{F}^n$, pois as coordenadas de $\mathbf{p}$ são levadas nos coeficientes do polinômio $\mathbf{c}_{pi} \in \mathbb{F}[t]$. Veja também que a função que leva $\mathbf{c}_{pi}$ a $\mathbf{c}_{pi}(\tilde{t})$ também é racional, já que $\tilde{t} = -\frac{p_k}{f_k(p_1, \dots, p_{k-1})}$. Assim, uma vez que o i -ésimo componente de $\varphi(\mathbf{p})$ é $\mathbf{c}_{pi}(\tilde{t})$, que é a composição dessas funções racionais, então tal componente é uma função racional de $\mathbb{F}^n$. Portanto,

U e Γ satisfazem (H1), (H2) e (H3). □

Considerando a Observação 2.1.3, podemos concluir que as curvas integrais de uma derivação triangular com respeito a um conjunto algebricamente independente definem sobre o conjunto U , do Teorema 3.2.1, uma folheação de dimensão 1. Lembre-se de que a folheação foi determinada como sendo o conjunto $\mathcal{F} = \{\mathbf{c}_p\}_{p \in U}$. Como $\mathbf{c}_p = (c_{p1}, \dots, c_{pn}) \in \mathbb{F}[t]^n$, podemos identificar a folheação $\mathcal{F}$ com a função

$$\begin{aligned} \mathbf{c}: U &\rightarrow \mathbb{F}[t]^n \\ p &\mapsto \mathbf{c}_p. \end{aligned}$$

Note que os coeficientes $\lambda_{ij} \in \mathbb{F}$ de cada $\mathbf{c}_{pi} = \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{ij} t^j$ dependem de $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Assim, podemos encarar λ_{ij} como sendo uma função racional de $\mathbb{F}(z_n)$ avaliada no ponto $\mathbf{p}$. Logo, a função $\mathbf{c}$, por sua vez, pode ser identificada com $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}(z_n)[t]^n$ a n -úpla de polinômios na variável t com entradas no corpo $\mathbb{F}(z_n)$. Feito essa observação, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.2. Seja

$$D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$$

uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, onde $f_k \neq 0$. Seja $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}(z_n)[t]^n$, definida como

$$c_1 = z_1, \dots, c_{k-1} = z_{k-1}, c_k = f_k t + z_k, c_{k+1} = F_{k+1} + z_{k+1}, \dots, c_n = F_n + z_n,$$

onde, para cada $i > k$, $F_i \in \langle t \rangle \subseteq \mathbb{F}(z_n)[t]$ é o único polinômio tal que $D_t(F_i) = f_i(c_1, \dots, c_{i-1})$. Então

$$\left\{ z_1, \dots, z_{k-1}, F_{k+1} \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_{k+1}, \dots, F_n \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_n \right\}$$

é um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$. Em particular, $\mathbb{F}(z_n)^D$ é extensão puramente transcendental de grau $n - 1$.

Demonstração. Segue do Corolário 2.2.2 e da demonstração do Teorema 3.2.1, onde um ponto $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in U$ passa a ser uma variável $(z_1, \dots, z_n)$. □

Observação 3.2.3. Seja D uma derivação conforme o enunciado do Corolário 3.2.2. Então pelo resultado do próprio corolário, $\mathbb{F}(z_n)^D$ é gerado pelo conjunto

$$C := \left\{ z_1, \dots, z_{k-1}, F_{k+1} \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_{k+1}, \dots, F_n \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_n \right\},$$

onde $F_i \in \langle t \rangle \subseteq \mathbb{F}(z_n)[t]$ é o único polinômio tal que $D_t(F_i) = f_i(c_1, \dots, c_{i-1})$. Note que, dado $i = k + 1, \dots, n$,

$$F_i \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_i$$

pode não ser um polinômio, devido ao denominador f_k . Contudo, como $z_1, \dots, z_{k-1}$ são elementos de $\mathbb{F}(z_n)^D$ e $f_k \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$, então $f_k \in \mathbb{F}(z_n)^D$. Logo, para cada $i = k + 1, \dots, n$, podemos

tomar $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e definir

$$\begin{cases} u_1 &:= z_1, \\ &\vdots \\ u_{k-1} &:= z_{k-1}, \\ u_i &:= f_k^{\alpha_{i+1}} z_{i+1} + g_i, \text{ se } i = k, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

onde $g_i := f_k^{\alpha_{i+1}} F_{i+1} \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_k]$, para $i = k, \dots, n-1$.

Note que, para cada $i = k, \dots, n-1$, o polinômio u_i contém a variável z_{i+1} , mas que não contém as variáveis $z_{i+2}, \dots, z_n$. Isso significa que $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ é um sistema triangular crescente de polinômios com respeito a $1 < \dots < k < \dots < n$, conforme definido na Seção 1.3. Logo, pela Proposição 1.3.4, o conjunto $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq \mathbb{F}[z_n]$ é algebricamente independente e

$$\mathbb{F}(z_n)^D = \mathbb{F}(u_1, \dots, u_{n-1}). \quad \square$$

Observação 3.2.4. Seja $D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$ uma derivação triangular, com $f_k \neq 0$. Da Observação 3.2.3, concluímos que $\mathbb{F}(z_n)^D = \mathbb{F}(u_1, \dots, u_{n-1})$, onde $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq \mathbb{F}[z_n]$ é um sistema triangular crescente de polinômios em $\mathbb{F}[z_n]$ com respeito a $1 < \dots < k < \dots < n$. Suponha que, para todo $i = 1, \dots, n$, a variável $z_i \in \mathbb{F}[x_m]$, isto é, seja um polinômio nas variáveis $x_1, \dots, x_m$. Se $\{z_1, \dots, z_n\}$ é um sistema triangular crescente de polinômios em $\mathbb{F}[x_m]$ com respeito a $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n$, então $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq \mathbb{F}[z_n]$ é um sistema triangular crescente de polinômios em $\mathbb{F}[x_m]$ com respeito a $1 \leq j_1 < \dots < j_k < \dots < j_n \leq n$. $\square$

De posse do Corolário 3.2.2 e da Observação 3.2.3, se D é uma derivação triangular com respeito à $\{z_1, \dots, z_n\}$, na forma

$$D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n},$$

com $f_k \neq 0$, então podemos determinar um procedimento automatizável para calcular um conjunto de geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(z_n)^D$. Tal procedimento deve executar:

Passo 1. Determinar os polinômios

$$c_1 = z_1, \quad \dots, \quad c_{k-1} = z_{k-1}, \quad c_k = f_k t + z_k, \quad c_{k+1} = F_{k+1} + z_{k+1}, \quad \dots, \quad c_n = F_n + z_n,$$

onde, para cada $i > k$, $F_i \in \langle t \rangle \subseteq \mathbb{F}(z_n)[t]$ é o único polinômio tal que $D_t(F_i) = f_i(c_1, \dots, c_{i-1})$.

Passo 2. Calcular

$$\left\{ z_1, \dots, z_{k-1}, F_{k+1} \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_{k+1}, \dots, F_n \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) + z_n \right\}$$

e obter os polinômios

$$\left\{ z_1, \dots, z_{k-1}, f_k^{\alpha_{k+1}} z_{k+1} + f_k^{\alpha_{k+1}} F_{k+1} \left(-\frac{z_k}{f_k} \right), \dots, f_k^{\alpha_{n+1}} z_n + f_k^{\alpha_{n+1}} F_n \left(-\frac{z_k}{f_k} \right) \right\}.$$

Para executar esses passos, desenvolvemos, em SageMath, o método

kernel,

para a classe das derivações. Tal método, quando aplicado a uma derivação D triangular com respeito a $\{z_1, \dots, z_n\}$, devolve um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$.

3.3 Invariantes polinomiais

Na seção anterior, apresentamos uma construção explícita dos geradores polinomiais do núcleo de uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$ triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, conforme visto no Sistema (3.2.4). Nessa seção, vamos demonstrar um teorema, onde usaremos essa construção dos geradores para, de certa maneira, limitar o núcleo de derivações triangulares com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$ na álgebra dos polinômios $\mathbb{F}[z_n]$.

Teorema 3.3.1. Seja

$$D = f_k D_{z_k} + \dots + f_n D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n))$$

uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, onde $f_k \neq 0$. Considere o conjunto de geradores de $\mathbb{F}(z_n)^D$ formado pelos elementos

$$u_1 = z_1, \dots, u_{k-1} = z_{k-1}, \dots, u_k = f_k^{\alpha_{k+1}} z_{k+1} + g_k, \dots, u_{n-1} = f_k^{\alpha_n} z_n + g_{n-1},$$

onde $g_i \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_k]$, para todo $i = k, \dots, n-1$, conforme Sistema (3.2.4). Então

$$\mathbb{F}[z_n]^D \subseteq \mathbb{F}[u_1, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}].$$

Demonstração. Seja $h \in \mathbb{F}[z_n]^D$. Observe que

$$\mathbb{F}[u_1, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}] = \mathbb{F}[u_1, \dots, u_{k-1}][u_k, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}] = \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}][u_k, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}].$$

Assim, denotando $R := \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$, temos que mostrar que $h \in R[u_k, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}]$. Para isso, usaremos indução sobre $\text{lm}(h)$, onde a ordem monomial adotada é a ordem monomial lexicográfica com respeito a ordem $z_1 < \dots < z_n$. Assim, se $\text{lm}(h) = 1$, então $h \in R$ e a afirmação do teorema é verdadeira. Suponha que $\text{lm}(h) \neq 1$ e que a afirmação do teorema vale para todo polinômio em $\mathbb{F}[z_n]^D$ com monômio líder menor do que $\text{lm}(h)$. Pelo Lema 3.1.1, sabemos que $\text{lm}(h)$ não contém a variável z_k . Assim, escreva o termo líder de h como

$$\text{lt}(h) = \alpha z_{k+1}^{\beta_{k+1}} \dots z_n^{\beta_n},$$

onde $\alpha \in R$. Defina

$$f := \alpha u_k^{\beta_{k+1}} \dots u_{n-1}^{\beta_n} = \alpha (f_k^{\alpha_{k+1}} z_{k+1} + g_k)^{\beta_{k+1}} \dots (f_k^{\alpha_n} z_n + g_{n-1})^{\beta_n} \quad \text{e} \quad \beta := \beta_{k+1} \alpha_{k+1} + \dots + \beta_n \alpha_n.$$

Então, como $g_i \in R$, para todo $i = k, \dots, n-1$, o termo líder de f é

$$\text{lt}(f) = \alpha f_k^\beta z_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots z_n^{\beta_n}.$$

Note que $\alpha f_k^\beta \in R$. Logo, na álgebra $R[z_{k+1}, \dots, z_n]$, temos que $\text{lm}(f) = \text{lm}(h)$. Defina $h_0 := f_k^\beta h - f$. Pela Proposição 1.3.3 (na verdade, por uma adaptação dessa proposição ao caso de polinômios definidos sobre anéis; veja, por exemplo, Capítulo 3, Teorema 6.1 em [Hun74]), temos que

$$\text{lm}(h_0) < \max(\text{lm}(f_k^\beta h), \text{lm}(f)) = \text{lm}(h),$$

já que $\text{lm}(f_k^\beta h) = \text{lm}(f) = \text{lm}(h)$. Note que, por construção, $D(f) = 0$. Veja também que, por $h \in \mathbb{F}[z_n]^D$ e $f_k \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{k-1}]$, então $D(f_k^\beta h) = 0$. Assim, $h_0 \in \mathbb{F}[z_n]^D$. Logo, por indução, $h_0 \in R[u_{k+1}, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}]$. Portanto, como $f \in R[u_{k+1}, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}]$, temos que

$$h = (h_0 + f)f_k^{-\beta} \in R[u_{k+1}, \dots, u_{n-1}, f_k^{-1}],$$

o que finaliza a demonstração. □

3.4 Exemplo: *down operator*

Considere a derivação

$$D = z_1 D_{z_2} + \cdots + z_{n-1} D_{z_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(z_n)).$$

Essa derivação é conhecida como *down operator*, conforme mencionado nos artigos [Fre13] e [dJS23]. Note que, no Exemplo 2.1.1, temos uma derivação desse tipo.

O artigo [dJS23] mostra uma maneira compacta de escrever os elementos de um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$. Nesse artigo, por exemplo, os autores mostram que, para $\mathbb{F}(z_6)^D$, temos os seguintes geradores algebricamente independentes:

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1, \\ w_2 &= 2z_1 z_3 - z_2^2, \\ w_3 &= 3z_1^2 z_4 - 3z_1 z_2 z_3 + z_2^3, \\ w_4 &= 2z_1 z_5 - 2z_2 z_4 + z_3^2, \\ w_5 &= 5z_1^2 z_6 - 5z_1 z_2 z_5 + z_1 z_3 z_4 + 2z_2^2 z_4 - z_2 z_3^2. \end{aligned}$$

Nesse mesmo artigo, os autores citam o Lema 3.1 de [ŠW14] e apresentam um outro conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$, formado pelos elementos

$$\begin{cases} u_1 := z_1, \\ u_k := \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{k-1-j} z_2^j z_{k+1-j}, \quad \text{para } k = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

A demonstração do Lema 3.1 em [ŠW14], onde se apresenta os geradores vistos no Sistema (3.4.1), utiliza os números complexos, e os invariantes são considerados *funcionalmente independentes*. Observando que D é uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, vamos usar o Corolário 3.2.2 e mostrar que os elementos apontados no Sistema (3.4.1) formam um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$.

Para mostrar isso, no contexto do Corolário 3.2.2, temos que

$$f_1 = 0, \quad f_2 = z_1, \quad \dots, \quad f_n = z_{n-1}.$$

Logo, o primeiro polinômio não nulo ocorre quando $k = 2$, isto é, com $f_2 = z_1$. Assim, segundo o Corolário 3.2.2, definindo

$$c_1 = z_1, \quad c_2 = z_1 t + z_2, \quad c_3 = F_3 + z_3, \quad \dots, \quad c_n = F_n + z_n,$$

onde, para cada $i > 2$, $F_i \in \langle t \rangle \subseteq \mathbb{F}(z_n)[t]$ é o único polinômio tal que $D_t(F_i) = c_{i-1}$, o conjunto

$$\left\{ z_1, F_3 \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) + z_3, \dots, F_n \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) + z_n \right\}$$

é um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(z_n)^D$. Dessa forma, para descrevermos tal conjunto precisamos determinar os polinômios F_i múltiplos de t através do sistema de equações diferenciais

$$D_t(F_3) = z_1 t + z_2, \quad D_t(F_4) = F_3 + z_3, \quad \dots, \quad D_t(F_n) = F_n + z_n,$$

o que, por integração, nos dá

$$F_3 = z_1 \frac{t^2}{2} + z_2 t, \quad F_4 = z_1 \frac{t^3}{3!} + z_2 \frac{t^2}{2} + z_3 t, \quad \dots, \quad F_n = z_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + z_2 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + z_{n-1} t.$$

Portanto, somando z_i a cada F_i e substituindo t por $-\frac{z_2}{z_1}$, obtemos os geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(z_n)^D$

$$\begin{cases} u'_1 = z_1 \\ u'_i = \sum_{j=0}^{i-1} z_{i-j} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{z_2^j}{z_1^j}, \text{ para todo } i = 3, \dots, n. \end{cases}$$

Agora, para cada $i = 3, \dots, n$, multiplicamos u'_i por z_1^{i-2} e obtemos

$$\sum_{j=0}^{i-1} z_{i-j} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{z_2^j}{z_1^j} z_1^{i-2} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{i-2-j} z_2^j z_{i-j}, \text{ para todo } i = 3, \dots, n.$$

Para finalizar, defina $k := i - 1$. Então reescrevendo a equação acima em termos de k , obtemos os gerados apresentados no Sistema (3.4.1), com $k = 2, \dots, n - 1$.

Considere o caso quando $n = 6$. Então os geradores de $\mathbb{F}(x_6)^D$ são:

$$u_1 = z_1,$$

$$u_2 = \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{1-j} z_2^j z_{3-j} = z_1^1 z_2^0 z_3 - z_1^0 z_2^1 z_2 + \frac{1}{2!} z_1^{-1} z_2^2 z_1 = z_1 z_3 - \frac{1}{2} z_2^2,$$

$$u_3 = \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{2-j} z_2^j z_{4-j} = z_1^2 z_2^0 z_4 - z_1^1 z_2^1 z_3 + \frac{1}{2!} z_1^0 z_2^2 z_2 - \frac{1}{3!} z_1^{-1} z_2^3 z_1 =$$

$$= z_1^2 z_4 - z_1 z_2 z_3 + \frac{1}{3} z_2^3,$$

$$u_4 = \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{3-j} z_2^j z_{5-j} = z_1^3 z_2^0 z_5 - z_1^2 z_2^1 z_4 + \frac{1}{2!} z_1^1 z_2^2 z_3 - \frac{1}{3!} z_1^0 z_2^3 z_2 + \frac{1}{4!} z_1^{-1} z_2^4 z_1 =$$

$$= z_1^3 z_5 - z_1^2 z_2 z_4 + \frac{1}{2} z_1 z_2^2 z_3 - \frac{1}{8} z_2^4,$$

$$u_5 = \sum_{j=0}^5 \frac{(-1)^j}{j!} z_1^{4-j} z_2^j z_{6-j} = z_1^4 z_2^0 z_6 - z_1^3 z_2^1 z_5 + \frac{1}{2!} z_1^2 z_2^2 z_4 - \frac{1}{3!} z_1^1 z_2^3 z_3 + \frac{1}{4!} z_1^0 z_2^4 z_2 -$$

$$- \frac{1}{5!} z_1^{-1} z_2^5 z_1 =$$

$$= z_1^4 z_6 - z_1^3 z_2 z_5 + \frac{1}{2} z_1^2 z_2^2 z_4 - \frac{1}{6} z_1 z_2^3 z_3 + \frac{1}{30} z_2^5.$$

Tais geradores são obtidos, a menos de um fator escalar, através de nosso procedimento, conforme visto abaixo.

```

1 sage: P = PolynomialRing(QQ, 6, "x1,x2,x3,x4,x5,x6")
2 sage: F = FractionField(P)
3 sage: D = F.derivation_module()
4 sage: diff = F.0*D.1 + F.1*D.2 + F.2*D.3 + F.3*D.4 + F.4*D.5
5 sage: diff
6 x1*d/dx2 + x2*d/dx3 + x3*d/dx4 + x4*d/dx5 + x5*d/dx6
7 sage: diff.kernel()
8 [x1,
9  -x2^2 + 2*x1*x3,
10 x2^3 - 3*x1*x2*x3 + 3*x1^2*x4,
11 -x2^4 + 4*x1*x2^2*x3 - 8*x1^2*x2*x4 + 8*x1^3*x5,
12 x2^5 - 5*x1*x2^3*x3 + 15*x1^2*x2^2*x4 - 30*x1^3*x2*x5 + 30*x1^4*x6]
```

Capítulo 4

Derivações lineares de $\mathbb{F}(x_n)$

Neste capítulo, abordamos as derivações lineares de $\mathbb{F}(x_n)$, uma classe de derivações que emergem naturalmente no contexto das álgebras de Lie, por meio das chamadas *derivações adjuntas*, como visto na Seção 1.7. Nosso foco será a apresentação de um método para determinar um conjunto gerador algebricamente independente dos núcleos dessas derivações, assumindo que o corpo $\mathbb{F}$ seja uma extensão algébrica simples de $\mathbb{Q}$ e contenha todos os autovalores da matriz associada à derivação linear. O estudo dessas derivações é discutido em [ŠW14], onde o Teorema 3.4 apresenta um sistema maximal de soluções analíticas *funcionalmente independentes*. No entanto, esse sistema inclui funções que não são racionais, o que o torna inadequado para o nosso objetivo. Aqui, buscamos construir sistemas de geradores *algebricamente independentes* para os invariantes racionais, o que exige uma análise algébrica detalhada das derivações consideradas. Este será o objetivo principal deste capítulo.

4.1 A forma matricial de derivações lineares

Vimos que as derivações triangulares formam uma classe de derivações em que conseguimos descrever um conjunto gerador algebricamente independente de geradores para o núcleo. Vamos analisar a classe das derivações lineares em que também será possível fazer isso.

Para definir tal classe, lembre-se de que a Proposição 1.6.6 afirma que toda derivação em $\mathbb{F}(x_n)$ é da forma $D = \sum_{j=1}^n f_j D_{x_j}$, onde, para todo $j = 1, \dots, n$, temos que $f_j \in \mathbb{F}(x_n)$. Uma **derivação linear** em $\mathbb{F}(x_n)$ é uma derivação onde cada f_j é uma função linear nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, isto é, $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$, para todo $j = 1, \dots, n$, onde $a_{ij} \in \mathbb{F}$.

Dada uma derivação linear $D = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i) D_{x_j}$, definindo

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F}), \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{F}(x_n)),$$

$$\nabla_X := \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ \vdots \\ D_{x_n} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times 1}(\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))),$$

temos que

$$D = X^\top A \nabla_X.$$

Uma derivação da forma $X^\top A \nabla_X$ é chamada de *derivação associada a matriz A* e é denotada por $D_{A,X}$ ou, apenas, D_A , quando não for necessário indicar a matriz X .

Lema 4.1.1. Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ matrizes. Então $[D_A, D_B] = D_{[A,B]}$. Em particular, se A e B comutam, então $D_A D_B = D_B D_A$.

Demonstração. Sejam $D_A = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{sr} x_s D_{x_r}$ e $D_B = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i D_{x_j}$ as derivações associadas à A e à B , respectivamente. Pela Observação 1.6.2, basta mostrar que $[D_A, D_B](x_\ell) = D_{[A,B]}(x_\ell)$, para todo $\ell = 1, \dots, n$. Assim, veja que

$$\begin{aligned} D_A(D_B(x_\ell)) &= D_A\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i D_{x_j}(x_\ell)\right) = D_A\left(\sum_{i=1}^n b_{i\ell} x_i\right) = \sum_{i=1}^n b_{i\ell} D_A(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n b_{i\ell} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{sr} x_s D_{x_r}(x_i) = \sum_{i=1}^n b_{i\ell} \sum_{s=1}^n a_{si} x_s = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n a_{si} b_{i\ell} x_s = \\ &= \sum_{s=1}^n (AB)_{s\ell} x_s \end{aligned}$$

e, similarmente,

$$D_B(D_A(x_\ell)) = \sum_{s=1}^n (BA)_{s\ell} x_s.$$

Observe que

$$D_{[A,B]}(x_\ell) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n (AB - BA)_{si} x_s D_{x_i}(x_\ell) = \sum_{s=1}^n (AB - BA)_{s\ell} x_s.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [D_A, D_B](x_\ell) &= D_A(D_B(x_\ell)) - D_B(D_A(x_\ell)) = \sum_{s=1}^n ((AB)_{s\ell} - (BA)_{s\ell}) x_s = \sum_{s=1}^n (AB - BA)_{s\ell} x_s = \\ &= D_{[A,B]}(x_\ell). \end{aligned} \quad \square$$

Seja $P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ uma matriz invertível. Definindo $y_j := \sum_{i=1}^n P_{ij} x_i$, então

$$Y^\top := (y_1 \ \cdots \ y_n) = X^\top P. \quad (4.1.1)$$

Uma vez que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é algebricamente independente, P é invertível e y_i é uma função linear de $x_1, \dots, x_n$, para cada $i = 1, \dots, n$, então $\{y_1, \dots, y_n\}$ também é algebricamente independente. Logo, $\mathbb{F}[x_n] = \mathbb{F}[y_1, \dots, y_n]$. Dessa forma, podemos considerar as derivações $D_{y_1}, \dots, D_{y_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e escrever

$$\nabla_Y^\top := (D_{y_1} \ \cdots \ D_{y_n})^\top.$$

Proposição 4.1.2. Sejam $A, B, P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$, onde P é invertível e $A = PBP^{-1}$. Considere $D_{A,X} \in$

$\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ a derivação associada a A e faça $Y^{\top} = X^{\top}P$, conforme Equação (4.1.1). Então

$$D_{A,X} = D_{B,Y} := Y^{\top}B\nabla_Y.$$

Demonstração. Uma vez que $y_j = \sum_{\ell=1}^n P_{\ell j}x_{\ell}$, para todo $j = 1, \dots, n$, e P é invertível, então $\mathbb{F}[x_n] = \mathbb{F}[y_1, \dots, y_n]$. Logo, pela Proposição 1.6.6, temos que $\{D_{y_1}, \dots, D_{y_n}\}$ é base para $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Observação 1.6.2} \quad D_{x_i} &= D_{x_i}(y_1)D_{y_1} + \dots + D_{x_i}(y_n)D_{y_n} = D_{x_i} \left(\sum_{\ell=1}^n P_{\ell 1}x_{\ell} \right) D_{y_1} + \dots + D_{x_i} \left(\sum_{\ell=1}^n P_{\ell n}x_{\ell} \right) D_{y_n} \\ &= P_{i1}D_{y_1} + \dots + P_{in}D_{y_n} = \sum_{\ell=1}^n P_{i\ell}D_{y_{\ell}}, \end{aligned}$$

ou seja, $\nabla_X = P\nabla_Y$. Portanto,

$$D_{A,X} = X^{\top}A\nabla_X = X^{\top}PBP^{-1}\nabla_X = Y^{\top}BP^{-1}\nabla_X = Y^{\top}B\nabla_Y = D_{B,Y}. \quad \square$$

Considerando a Proposição 4.1.2, vamos assumir que $\mathbb{F}$ contém os autovalores de A e que $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$, o que garante a existência $P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ tal que $A = PJP^{-1}$, onde J está na *forma normal de Jordan*. Estudaremos, a seguir, derivações associadas à forma normal de Jordan.

4.2 Derivação associada a uma matriz na forma normal de Jordan

Conforme, comentado na seção anterior, vamos estudar derivações associadas a matrizes na forma normal de Jordan. Dizemos que $J \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ está na **forma normal de Jordan**, se

- (a) J é uma matriz diagonal em blocos;
- (b) cada bloco é da forma

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{F}),$$

com $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dito um *bloco de Jordan*;

Podemos escrever a matriz J , sucintamente, como

$$J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_r}(\lambda_r)).$$

Observe que uma matriz na forma normal de Jordan J pode ser expressa como a soma de duas matrizes, $J = S + N$, onde S é uma matriz diagonal e N é uma matriz nilpotente. As entradas de N são nulas, exceto, possivelmente, por elementos iguais a 1 na diagonal imediatamente acima da diagonal principal. Logo,

$$D_J = X^T J \nabla_X = X^T (S + N) \nabla_X = D_S + D_N.$$

A derivação D_S é dita *parte diagonal* (ou parte semissimples) de D_J e D_N é dita *parte nilpotente* de D_J . Para enfatizar a matriz J , denotaremos tais derivações por $D_{J,S}$ e $D_{J,N}$. Note que $D_{J,N}$ é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, \dots, x_n\}$. Note também que, escrevendo $J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_r}(\lambda_r))$ e definindo

$$s_i := \sum_{j=1}^i k_j, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, r,$$

temos que

$$D_{J,S} = \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{s_1} x_i D_{x_i} \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=s_1+1}^{s_2} x_i D_{x_i} \right) + \dots + \lambda_r \left(\sum_{i=s_{r-1}+1}^{s_r} x_i D_{x_i} \right). \quad (4.2.1)$$

Nas próximas seções, vamos caracterizar o núcleo de $D_J \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e descrever um procedimento para determinar os geradores algebricamente independentes do seu núcleo.

4.2.1 Caracterização do núcleo

Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ uma derivação linear decomposta como soma $D = D_S + D_N$, onde D_S e D_N comutam, D_N é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, \dots, x_n\}$ e

$$D_S = \lambda_1 x_1 D_{x_1} + \dots + \lambda_n x_n D_{x_n},$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Nosso objetivo, nesta seção, é caracterizar o núcleo de $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, conforme o Teorema 4.2.2.

Para isso, vamos começar atribuindo para x_i , com $i = 1, \dots, n$, o valor $\text{wt}(x_i) := \lambda_i$, dito *peso* da variável x_i com respeito D_S . Estendemos esse conceito para um monômio $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ definindo seu **peso** com respeito D_S como sendo

$$\text{wt}(m) = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n.$$

Note que o peso $\text{wt}(m)$ é diferente do grau $\deg(m) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, definido na Seção 1.2. Se $f \in \mathbb{F}[x_n]$ é combinação de monômios de mesmo peso φ , então definimos $\text{wt}(f) = \varphi$.

Considerando D_S como uma transformação linear e dado $\varphi \in \mathbb{F}$, podemos definir o *autoespaço*

de D_S associado a φ , como sendo

$$\mathbb{F}(x_n)_\varphi := \{h \in \mathbb{F}(x_n) \mid D_S(h) = \varphi h\}.$$

Um elemento $h \in \mathbb{F}(x_n)_\varphi$ diferente de zero é dito *semi-invariante* de peso φ . Tais elementos exercem um papel importante na descrição do centro da álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie nilpotente, conforme se vê em [Oom09].

Note que

$$\mathbb{F}(x_n)^{D_S} = \mathbb{F}(x_n)_0.$$

Note também que, como $\mathbb{F}[x_n] \subseteq \mathbb{F}(x_n)$ é um subespaço invariante por D_S , podemos considerar, dado $\varphi \in \mathbb{F}$, o autoespaço de D_S restrito a $\mathbb{F}[x_n]$, associado a φ :

$$\mathbb{F}[x_n]_\varphi := \{f \in \mathbb{F}[x_n] \mid D_S(f) = \varphi f\}.$$

Para o próximo lema, defina o monoide

$$\Phi := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}, \quad (4.2.2)$$

com a operação de adição, e considere a seguinte notação: se V é um espaço vetorial e $A \subseteq V$, então $\text{span}_V(A)$ é o *subespaço gerado* por $A \subseteq V$.

Lema 4.2.1. Se $\varphi \in \mathbb{F}$, então

$$\mathbb{F}[x_n]_\varphi = \text{span}_{\mathbb{F}[x_n]}(\{m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid \text{wt}(m) = \varphi\}).$$

Em particular, se $\mathbb{F}[x_n]_\varphi \neq \{0\}$, então existem $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $\varphi = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n$. Além disso, a álgebra $\mathbb{F}[x_n]$ é graduada por Φ , ou seja,

$$\mathbb{F}[x_n] = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathbb{F}[x_n]_\varphi \quad \text{e} \quad \mathbb{F}[x_n]_\varphi \mathbb{F}[x_n]_\psi \subseteq \mathbb{F}[x_n]_{\varphi+\psi}, \quad \text{para todo } \varphi, \psi \in \Phi.$$

Demonstração. Por definição de peso, temos que cada monômio $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é autovetor para D_S com autovalor $\text{wt}(m) = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n$. Denote

$$W_\varphi = \text{span}_{\mathbb{F}[x_n]}(\{m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid \text{wt}(m) = \varphi\}).$$

Então $\mathbb{F}[x_n] = \bigoplus_{\varphi \in \mathbb{F}} W_\varphi$. Uma vez que $W_\varphi \subseteq \mathbb{F}[x_n]_\varphi$, para todo $\varphi \in \mathbb{F}$, e a soma de autoespaços é direta, então $W_\varphi = \mathbb{F}[x_n]_\varphi$. Agora, se $f \in \mathbb{F}[x_n]_\varphi$ e $g \in \mathbb{F}[x_n]_\psi$, então

$$D_S(fg) = D_S(f)g + D_S(g)f = \varphi fg + \psi fg = (\varphi + \psi)fg.$$

Portanto, $\mathbb{F}[x_n]_\varphi \mathbb{F}[x_n]_\psi \subseteq \mathbb{F}[x_n]_{\varphi+\psi}$. □

Observe que a Proposição 1.2.5 nos dá a decomposição de $\mathbb{F}[x_n]$ em termos do grau de um

monômio, enquanto o Lema 4.2.1 nos dá a decomposição de $\mathbb{F}[x_n]$ em termos do peso de um monômio com respeito a derivação D_S . Comentamos, após a apresentação da Proposição 1.2.5, que um elemento em algum subespaço daquela decomposição era um componente homogêneo. Para diferenciar dessa nomenclatura, diremos que um elemento em algum subespaço da decomposição dada pelo Lema 4.2.1 é *wt-homogêneo*.

Considere $\text{GrF}(\mathbb{F}[x_n], \Phi)$, o corpo graduado de $\mathbb{F}[x_n]$, isto é,

$$\text{GrF}(\mathbb{F}[x_n], \Phi) = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n) \mid g \in \mathbb{F}[x_n]_\varphi, \text{ para algum } \varphi \in \Phi \right\},$$

conforme visto na Seção 1.1. Observe que, nesse caso,

$$\begin{aligned} \text{GrF}(\mathbb{F}[x_n], \Phi)_0 &= \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n) \mid f, g \in \mathbb{F}[x_n]_\varphi, \text{ para algum } \varphi \in \Phi \right\} = \\ &= \{0\} \cup \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n) \mid \text{wt}(f) = \text{wt}(g) \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.2. Seja $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ uma derivação linear decomposta como soma $D = D_S + D_N$, onde D_S e D_N comutam, D_N é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, \dots, x_n\}$ e

$$D_S = \lambda_1 x_1 D_{x_1} + \dots + \lambda_n x_n D_{x_n}.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x_n)^D &= \text{GrF}(\mathbb{F}[x_n], \Phi)_0 \cap \text{Frac}(\mathbb{F}[x_n]^{D_N}) = \\ &= \{0\} \cup \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n) \mid \text{wt}(f) = \text{wt}(g) \text{ e } D_N(f) = D_N(g) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n)$ tal que $\text{wt}(f) = \text{wt}(g)$ e $D_N(f) = D_N(g) = 0$. Vamos mostrar que $\frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n)^D$. Para isso, veja que

$$D(f) = (D_S + D_N)(f) = D_S(f) = \text{wt}(f)f$$

e, similarmente, $D(g) = \text{wt}(f)g$. Assim,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2} = \frac{\text{wt}(f)fg - \text{wt}(f)fg}{g^2} = 0.$$

Vamos mostrar, agora, a inclusão recíproca. Seja $h = \frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n)^D \setminus \{0\}$, onde $f, g \in \mathbb{F}[x_n] \setminus \{0\}$ e $\text{mdc}(f, g) = 1$. Então

$$0 = D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - D(g)f}{g^2},$$

de onde obtemos

$$D(f)g = D(g)f. \quad (4.2.3)$$

Como $\text{mdc}(f, g) = 1$, temos que $g \mid D(g)$ e $f \mid D(f)$. Como D é uma derivação linear, temos que $\deg(D(f)) = \deg(f)$ e $\deg(D(g)) = \deg(g)$. Daí, podemos concluir que, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tais que

$$D(g) = \alpha g \quad \text{e} \quad D(f) = \beta f.$$

Dessa forma,

$$\beta f g = \overset{\text{Equação (4.2.3)}}{D(f)g} = D(g)f = \alpha g f.$$

Portanto, $\alpha = \beta$. Escreva f como soma de componentes wt-homogêneos, isto é, escreva

$$f = f_1 + \cdots + f_m,$$

onde $\text{wt}(f_i) \neq \text{wt}(f_j)$, para todo $i, j = 1, \dots, m$, com $i \neq j$. Note que,

$$\alpha f_1 + \cdots + \alpha f_m = \alpha f = D(f) = D(f_1 + \cdots + f_m) = D(f_1) + \cdots + D(f_m).$$

Como D comuta com D_S , então $D_S(D(f_i)) = \text{wt}(f_i)D(f_i)$. Logo, $\text{wt}(D(f_i)) = \text{wt}(f_i)$, para todo $i = 1, \dots, m$. Assim,

$$D(f_i) = \alpha f_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, m. \quad (4.2.4)$$

Agora, comparando o termo de peso $\text{wt}(f_m)$, vemos que

$$\alpha f_m = D(f_m) = D_S(f_m) + D_N(f_m) = \text{wt}(f_m)f_m + D_N(f_m). \quad (4.2.5)$$

Como D_N é triangular, pelo Lema 3.1.2, temos que $\text{lm}(D_N(f_m)) < \text{lm}(f_m)$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha \text{lm}(f_m) &= \text{lm}(\alpha f_m) = \text{lm}(\text{wt}(f_m)f_m + D_N(f_m)) \overset{\text{Proposição 1.3.3}}{=} \max(\text{lm}(\text{wt}(f_m)f_m), \text{lm}(D_N(f_m))) = \\ &= \text{wt}(f_m)\text{lm}(f_m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha = \text{wt}(f_m).$$

Assumindo que $f_i \neq 0$, com $i = 1, \dots, m-1$, obtemos, aplicando o mesmo raciocínio para a Equação (4.2.4), que $\alpha = \text{wt}(f_i)$. Daí,

$$\text{wt}(f_m) = \alpha = \text{wt}(f_i),$$

o que é um absurdo, pois $\text{wt}(f_i) \neq \text{wt}(f_j)$, se $i \neq j$. Logo, $f = f_m$. Voltando à Equação (4.2.5) e usando o fato de que $\text{wt}(f_m) = \alpha$, então obtemos $D_N(f_m) = 0$. Portanto, concluímos que $f \in \mathbb{F}[x_n]^{D_N}$ e tem peso $\text{wt}(f_m)$. Usando o mesmo argumento, também se mostra que $g \in \mathbb{F}[x_n]^{D_N}$ e tem o mesmo peso. $\square$

Corolário 4.2.3. Se $D = D_S = \lambda_1 x_1 D_{x_1} + \cdots + \lambda_n x_n D_{x_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, então

$$\mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{F}\left(\left\{\frac{m_1}{m_2} \mid m_1 \text{ e } m_2 \text{ são monômios, } m_2 \neq 0 \text{ e } \text{wt}(m_1) = \text{wt}(m_2)\right\}\right).$$

Demonstração. Denote

$$\mathbb{L} := \mathbb{F}\left(\left\{\frac{m_1}{m_2} \mid m_1 \text{ e } m_2 \text{ são monômios, } m_2 \neq 0 \text{ e } \text{wt}(m_1) = \text{wt}(m_2)\right\}\right).$$

Pelo Teorema 4.2.2, temos que

$$\mathbb{F}(x_n)^D = \{0\} \cup \left\{\frac{f}{g} \mid g \neq 0 \text{ e } \text{wt}(f) = \text{wt}(g)\right\}.$$

Portanto, $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}(x_n)^D$.

Reciprocamente, suponha que $\frac{f}{g} \in \mathbb{F}(x_n)^D$. Então $\text{wt}(f) = \text{wt}(g)$. Logo, pelo Lema 4.2.1,

$$f = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell \quad \text{e} \quad g = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r,$$

onde u_i, v_j são monômios tais que $\text{wt}(u_i) = \text{wt}(v_j)$, para todo $i = 1, \dots, \ell$ e $j = 1, \dots, r$. Por definição de $\mathbb{L}$, temos que $\frac{v_j}{u_i} \in \mathbb{L}$, para todo $i = 1, \dots, \ell$ e $j = 1, \dots, r$. Logo, como $\mathbb{L}$ é um corpo, temos que

$$\frac{\beta_j v_j}{u_i}, \frac{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r}{u_i}, \frac{u_i}{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r}, \frac{\alpha_i u_i}{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r}, \frac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell}{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r} \in \mathbb{L}$$

ou seja,

$$\frac{f}{g} = \frac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_\ell u_\ell}{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r} \in \mathbb{L}.$$

Portanto, $\mathbb{F}(x_n)^D \subseteq \mathbb{L}$. \(\square\)

Observação 4.2.4. Considere o Corolário 4.2.3. Dizer que $m_1 = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $m_2 = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ são monômios tais que $\text{wt}(m_1) = \text{wt}(m_2)$, significa que

$$(\alpha_1 - \beta_1) \text{wt}(x_1) + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \text{wt}(x_n) = 0.$$

Assim, podemos reescrever

$$\mathbb{F}\left(\left\{\frac{m_1}{m_2} \mid m_1 \text{ e } m_2 \text{ são monômios, } m_2 \neq 0 \text{ e } \text{wt}(m_1) = \text{wt}(m_2)\right\}\right)$$

como

$$\mathbb{L} = \mathbb{F}\left(\left\{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{wt}(x_1)a_1 + \cdots + \text{wt}(x_n)a_n = 0\right\}\right).$$

Logo, com essa notação, temos que $\mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{L}$. \(\square\)

Corolário 4.2.5. Seja $D = D_S = \lambda_1 x_1 D_{x_1} + \cdots + \lambda_n x_n D_{x_n} \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ e suponha que

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \neq 0,$$

para todo $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Então $\mathbb{F}[x_n]^D = \mathbb{F}$.

Demonstração. Pelo Corolário 4.2.3, temos que

$$\mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{F}\left(\{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0\}\right).$$

Assim, se $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \neq 0$, para todo $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, então os únicos polinômios em $\mathbb{F}(x_n)^D$ são os polinômios constantes, ou seja, $\mathbb{F}[x_n]^D = \mathbb{F}$. $\square$

4.2.2 Geradores do núcleo

Vamos mostrar, nessa seção, um procedimento para calcular um conjunto algebricamente independente de geradores do núcleo de derivações lineares $D \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ decomposta como soma $D = D_S + D_N$, conforme a seção anterior. Para isso, precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 4.2.6. Seja $D = D_S + D_N \in \text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$, como no Teorema 4.2.2. Assuma que $\{z_1, \dots, z_\ell\}$ é um conjunto gerador algebricamente independente de $\mathbb{F}(x_n)^{D_N}$, todos wt-homogêneos. Então

$$\mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{F}\left(\{z_1^{a_1} \cdots z_\ell^{a_\ell} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{wt}(z_1)a_1 + \cdots + \text{wt}(z_\ell)a_\ell = 0\}\right).$$

Demonstração. Como $z_1, \dots, z_\ell$ são geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(x_n)^{D_N}$, podemos considerá-los como as variáveis de $\mathbb{F}(x_n)^{D_N}$. Pelo Teorema 4.2.2, podemos afirmar que $\mathbb{F}(x_n)^D \subseteq \mathbb{F}(x_n)^{D_N}$. Assim, podemos avaliar D nas variáveis $z_1, \dots, z_\ell$. Uma vez que essas variáveis são wt-homogêneas, então, nessas variáveis,

$$D = \text{wt}(z_1)z_1 D_{z_1} + \cdots + \text{wt}(z_\ell)z_\ell D_{z_\ell}.$$

Portanto, pelo Corolário 4.2.3, temos que

$$\mathbb{F}(x_n)^D = \mathbb{F}\left(\{z_1^{a_1} \cdots z_\ell^{a_\ell} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{wt}(z_1)a_1 + \cdots + \text{wt}(z_\ell)a_\ell = 0\}\right). \quad \square$$

Para finalizar essa seção, vamos apresentar um procedimento para determinar um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(x_n)^D$. Para isso, vamos supor as hipóteses do Teorema 4.2.6, supor que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são algébricos sobre $\mathbb{Q}$ (note que, em nosso estudo, tais números são autovalores de um polinômio característico de uma matriz) e supor também que $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Nesse caso, temos que existe $\kappa \in \mathbb{F}$ tal que $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Q}(\kappa)$ (ver Teorema 5.5.1 em [Her75]). Seja m_κ o polinômio minimal de κ sobre $\mathbb{Q}$, isto é, o polinômio mônico irreduzível de grau mínimo em $\mathbb{Q}[t]$ tal que $m_\kappa(\kappa) = 0$. Suponha que $\deg(m_\kappa) = s$. Então existem

$c_{jk} \in \mathbb{Q}$ para cada $j = 1, \dots, r$ e $k = 1, \dots, s-1$ tais que

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{s-1} c_{jk} \kappa^k, \quad (4.2.6)$$

para cada $j = 1, \dots, r$.

Vimos, no Teorema 4.2.6, que $\mathbb{F}(x_n)^D$ é gerado por elementos da forma $z = z_1^{a_1} \cdots z_\ell^{a_\ell}$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\text{wt}(z) = 0$. Por suposição, cada z_i é wt-homogêneo, logo $\text{wt}(z_i) = \sum_{j=1}^r b_{ij} \lambda_j \in \mathbb{F}$. Assim, para gerar $\mathbb{F}(x_n)^D$, precisamos determinar $a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{wt}(z_1)a_1 + \cdots + \text{wt}(z_\ell)a_\ell = \sum_{j=1}^r b_{1j} \lambda_j a_1 + \cdots + \sum_{j=1}^r b_{\ell j} \lambda_j a_\ell = \\ (\text{Equação (4.2.6)}) &= \sum_{j=1}^r \left(b_{1j} a_1 \sum_{k=0}^{s-1} c_{jk} \kappa^k \right) + \cdots + \sum_{j=1}^r \left(b_{\ell j} a_\ell \sum_{k=0}^{s-1} c_{jk} \kappa^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^r b_{1j} c_{jk} a_1 + \cdots + \sum_{j=1}^r b_{\ell j} c_{jk} a_\ell \right) \kappa^k, \end{aligned}$$

ou seja, precisamos encontrar os inteiros a_i que solucionam o sistema

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^r b_{1j} c_{j0} \right) a_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^r b_{\ell j} c_{j0} \right) a_\ell = 0, \\ \left(\sum_{j=1}^r b_{1j} c_{j1} \right) a_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^r b_{\ell j} c_{j1} \right) a_\ell = 0, \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^r b_{1j} c_{j,s-1} \right) a_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^r b_{\ell j} c_{j,s-1} \right) a_\ell = 0. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

O conjunto solução desse sistema é um submódulo de $\mathbb{Z}^\ell$, portanto é um $\mathbb{Z}$ -módulo livre.

Proposição 4.2.7. Seja $C = \{\mathbf{s}_i = (s_{i1}, \dots, s_{i\ell}) \mid i \in \{1, \dots, k\} \text{ e } s_{ij} \in \mathbb{Z}\}$, com $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, uma base do conjunto solução do Sistema (4.2.7). Então

$$S = \{z^{\mathbf{s}_i} = z_1^{s_{i1}} \cdots z_\ell^{s_{i\ell}} \mid \mathbf{s}_i \in C\}$$

é um conjunto gerador de $\mathbb{F}(x_n)^D$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.6, sabemos que $\mathbb{F}(x_n)^D$ é gerado por elementos da forma $z_1^{a_1} \cdots z_\ell^{a_\ell}$, onde $(a_1, \dots, a_\ell)$ é solução do Sistema (4.2.7). Logo, como $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}$ é base do conjunto solução do Sistema (4.2.7), então

$$(a_1, \dots, a_\ell) = \beta_1 \mathbf{s}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{s}_k = \left(\sum_{j=1}^k \beta_j s_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^k \beta_j s_{j\ell} \right),$$

onde $\beta_j \in \mathbb{Z}$, com $j = 1, \dots, k$. Assim,

$$a_i = \sum_{j=1}^k \beta_j s_{ji}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} z_1^{a_1} \dots z_\ell^{a_\ell} &= z_1^{\sum_{j=1}^k \beta_j s_{j1}} \dots z_\ell^{\sum_{j=1}^k \beta_j s_{j\ell}} = z_1^{\beta_1 s_{11}} z_1^{\beta_2 s_{21}} \dots z_1^{\beta_k s_{k1}} \dots z_\ell^{\beta_1 s_{1\ell}} z_\ell^{\beta_2 s_{2\ell}} \dots z_\ell^{\beta_k s_{k\ell}} = \\ &= (z_1^{s_{11}} z_2^{s_{12}} \dots z_\ell^{s_{1\ell}})^{\beta_1} \dots (z_1^{s_{k1}} z_2^{s_{k2}} \dots z_\ell^{s_{k\ell}})^{\beta_k}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, \dots, s_{i\ell})$ é solução do Sistema (4.2.7), então $z_1^{s_{i1}} z_2^{s_{i2}} \dots z_\ell^{s_{i\ell}} \in \mathbb{F}(x_n)^D$, para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto,

$$S = \{z^{\mathbf{s}_i} = z_1^{s_{i1}} \dots z_\ell^{s_{i\ell}} \mid \mathbf{s}_i \in C\}$$

é um conjunto gerador de $\mathbb{F}(x_n)^D$. \(\square\)

Note que a Proposição 4.2.7 nos dá um conjunto gerador para $\mathbb{F}(x_n)^D$. Para provar que obtemos um conjunto gerador algebricamente independente, defina a matriz

$$M := \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1} & \dots & s_{k\ell} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{Z}),$$

onde a i -ésima linha é composta pelas coordenadas de $\mathbf{s}_i \in C$, sendo C uma base do conjunto solução do Sistema (4.2.7), conforme denotado na Proposição 4.2.7. Então (ver Teorema 1.5.1 e Teorema 1.5.2 em [Mad00]), existe uma matriz invertível $P \in \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{Z})$ tal que $PM =: H = (h_{rs})_{1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq k}$, onde H satisfaz:

- (a) H é triangular superior, ou seja, $h_{rs} = 0$, se $r > s$;
- (b) o coeficiente líder de uma linha não nula, isto é, a primeira entrada não nula mais à esquerda da linha, é positivo e está sempre à direita do coeficiente líder da linha acima;
- (c) os elementos abaixo dos coeficientes líderes são zero e os acima são não negativos e menores que o coeficiente líder.

Tal matriz é dita **forma normal de Hermite** de M e é obtida através da aplicação de operações elementares sobre as linhas de M , sendo o análogo a *forma escalonada reduzida em linhas* para matrizes com entradas em um corpo.

Lema 4.2.8. Sejam M a matriz cujas linhas são vetores da base do conjunto solução do Sistema 4.2.7, H a forma normal de Hermite de M e $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, \dots, h_{i\ell})$ o vetor dado pela i -ésima linha de H . Então $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k\}$ é base do conjunto solução do Sistema 4.2.7.

Demonstração. Segue do fato de existir $P \in \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{Z})$ invertível tal que $H = PM$. \(\square\)

Proposição 4.2.9. Seja $C = \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k\}$, conforme dado pelo Lema 4.2.8. Então o conjunto

$$S = \{z^{\mathbf{h}_i} = z_1^{h_{i1}} \dots z_\ell^{h_{i\ell}} \mid \mathbf{h}_i \in C\}$$

é um conjunto gerador de $\mathbb{F}(x_n)^D$ formado por elementos algebricamente independentes.

Demonstração. Uma vez que $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k\}$ é base do conjunto solução do Sistema (4.2.7), então, pela Proposição 4.2.7, temos que S é um conjunto gerador de $\mathbb{F}(x_n)^D$. Agora, vamos ver que os elementos de S são algebricamente independentes. Para isso, suponha que o coeficiente líder da i -ésima linha é $h_{ij_i} \neq 0$. Pela definição de forma normal de Hermite, fixado $i = 1, \dots, k$,

$$h_{is} = 0, \text{ para todo } s < j_i, \quad \text{e} \quad h_{rj_i} = 0, \text{ para todo } r > i,$$

ou seja, a matriz H tem a seguinte forma, onde $*$ é um número inteiro qualquer

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{1j_1} & * & \dots & * & * & \dots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{2j_2} & * & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & h_{kj_k} & * & \dots & * \end{pmatrix}_{k \times \ell}.$$

Nesse caso, temos que $z^{\mathbf{h}_i} = z_1^0 \dots z_{j_i-1}^0 z_{j_i}^{h_{ij_i}} \dots z_\ell^{h_{i\ell}}$. Note que $z^{\mathbf{h}_i}$ é um monômio com a ocorrência da variável z_{j_i} , mas que não possui as variáveis $z_1, \dots, z_{j_i-1}$, para cada $i = 1, \dots, k$. Portanto, pela Proposição 1.4.7, $S = \{z^{\mathbf{h}_i} = z_1^{h_{i1}} \dots z_\ell^{h_{i\ell}} \mid \mathbf{h}_i \in C\}$ é um conjunto algebricamente independente. $\square$

4.2.3 Exemplo: matriz $J_n(\lambda)$ com $\lambda \neq 0$

Considere a derivação

$$D_{J_n(\lambda)} = \lambda x_1 D_{x_1} + (x_1 + \lambda x_2) D_{x_2} + \dots + (x_{n-2} + \lambda x_{n-1}) D_{x_{n-1}} + (x_{n-1} + \lambda x_n) D_{x_n},$$

associada ao bloco de Jordan $J_n(\lambda)$. Note que a parte diagonal dessa derivação é

$$D_{J_n(\lambda), S} = \lambda \sum_{i=1}^n x_i D_{x_i}$$

e a parte nilpotente é o *down operator*, da Seção 3.4. Observe que o peso do monômio $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ com respeito a $D_{J_n(\lambda), S}$ é dado por

$$\text{wt}(m) = \lambda \alpha_1 + \dots + \lambda \alpha_n = \lambda \deg(m).$$

Observe também que, se $g \in \mathbb{F}[x_n] \setminus \mathbb{F}$ é componente wt-homogêneo, então

$$D_{J_n(\lambda)}(g) = D_{J_n(\lambda), S}(g) + D_{J_n(\lambda), N}(g) = \text{wt}(g)g + D_{J_n(\lambda), N}(g) \neq 0,$$

porque $\text{lm}(D_{J_n(\lambda),N}(g)) < \text{lm}(g)$, pelo Lema 3.1.2. Assim, podemos afirmar que

$$\mathbb{F}[x_n]^{D_{J_n(\lambda)}} = \mathbb{F},$$

pois se $f = f_1 + \cdots + f_m \in \mathbb{F}[x_n] \setminus \mathbb{F}$, onde f_i é wt-homogêneo, então

$$D_{J_n(\lambda)}(f) = D_{J_n(\lambda)}(f_1) + \cdots + D_{J_n(\lambda)}(f_m) \neq 0,$$

já que $\text{wt}(D_{J_n(\lambda)}(f_i)) = \text{wt}(f_i)$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Vamos, agora, analisar $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$ e mostrar, usando o que vimos na Seção 4.2.2, que

$$\left\{ \frac{z_2}{z_1^2}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_1^{n-1}} \right\}$$

é um conjunto algebricamente independente que gera $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$, onde $z_1, \dots, z_{n-1}$ são os polinômios geradores do núcleo do *down operator*, conforme visto na Equação (3.4.1) e conforme reapresentados abaixo.

$$\begin{cases} z_1 := x_1, \\ z_k := \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} x_1^{k-1-j} x_2^j x_{k+1-j}, \quad \text{para } k = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Observe que, para todo $i = 1, \dots, n-1$, o polinômio z_i é homogêneo de grau i .

Para determinar tal conjunto de geradores, segundo o Teorema 4.2.6, precisamos resolver o sistema

$$\text{wt}(z_1)a_1 + \cdots + \text{wt}(z_{n-1})a_{n-1} = 0,$$

pois, assim, cada solução $(a_1, \dots, a_{n-1})$ nos dá um invariante $z_1^{a_1} \cdots z_{n-1}^{a_{n-1}}$. Note que, pela definição de z_i e pela forma da parte diagonal de $D_{J_n(\lambda)}$, temos que $\text{wt}(z_i) = \lambda \deg(z_i) = i\lambda$. Portanto, precisamos solucionar o sistema

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = 0.$$

Veja que o conjunto solução desse sistema possui base com $n-2$ elementos pertencentes a $\mathbb{Z}^{n-1}$, no qual um exemplo de base é apontado na matriz abaixo, onde as coordenadas de um elemento dessa base é formada pelas linhas da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{(n-2) \times (n-1)}(\mathbb{Z}),$$

o que nos dá as soluções

$$\frac{z_2}{z_1^2}, \frac{z_3}{z_1^3}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_1^{n-1}}.$$

Note que, embora a matriz A não esteja na forma normal de Hermite, a Proposição 1.4.7 nos garante que

$$\left\{ \frac{z_2}{z_1^2}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_1^{n-1}} \right\}$$

é um conjunto gerador algebricamente independente de $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$. Como consequência, temos que $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$ é uma extensão puramente transcendental de $\mathbb{F}$ de grau $n - 2$.

Tais geradores de $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$, aparecem no Lema 3.2 em [ŠW14], com a diferença que nessa referência há também o elemento $L = \lambda \frac{x_2}{x_1} - \ln(x_1)$. Tal diferença ocorre, porque, no contexto desse livro, o que se quer demonstrar é um conjunto maximal de invariantes analíticos funcionalmente independentes. Nós, ao longo desta seção, mostraremos que $\frac{z_2}{z_1^2}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_1^{n-1}}$ são, de fato, geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$.

Ainda nesse contexto, vale ressaltar a fórmula de Beltrametti-Blasi (ver [BB66]), que limita o número de invariantes analíticos funcionalmente independentes, dizendo que a cardinalidade do conjunto maximal de invariantes analíticos funcionalmente independentes de uma álgebra de Lie de dimensão finita é igual a dimensão da álgebra menos o posto da sua matriz de multiplicação, conforme apresentada no Teorema 5.1.2 (ver [CS04]). Tal fórmula, se fosse verdadeira para invariantes racionais, implicaria que o grau da extensão $\mathbb{F}(x_n)^{D_{J_n(\lambda)}}$ deveria ser igual a $n - 1$, o que não ocorre, já que provamos que tal número é $n - 2$. Essa discrepância é causada, justamente pelo invariante analítico $L = \lambda \frac{x_2}{x_1} - \ln(x_1)$.

Capítulo 5

Geradores do corpo de invariantes racionais

Este é o capítulo em que, finalmente, atingiremos nosso objetivo principal, conforme apresentado na Seção 2, da Introdução, ou seja, apresentaremos um algoritmo que constrói um conjunto gerador algebricamente independente do corpo de invariantes racionais de uma álgebra de Lie nilpotente. Nosso algoritmo, de forma sucinta, parte da base triangular de uma álgebra de Lie nilpotente e, em cada passo, determina um conjunto algebricamente independente que gera o núcleo da derivação adjunta de um elemento dessa base, restrito aos geradores do núcleo da derivação adjunta de um elemento anterior da base. O ponto crucial dessa iteração é que, a cada passo, obtemos uma derivação triangular, o que nos permite aplicar a teoria apresentada no Capítulo 3. Além disso, neste capítulo, mostraremos que a teoria do Capítulo 3, juntamente com a do Capítulo 4, nos possibilitará calcular um conjunto algebricamente independente que gera o corpo de invariantes racionais de uma álgebra de Lie solúvel, quando a dimensão for menor do que ou igual a 4.

5.1 Algoritmo para álgebra de Lie nilpotente

Na Seção 1.7, definimos o corpo de invariantes racionais de uma álgebra de Lie L como sendo

$$\mathbb{F}(L)^L := \{f \in \mathbb{F}(L) \mid \text{ad}(x)(f) = 0, \forall x \in L\} = \bigcap_{x \in L} \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x)}.$$

Vimos também que se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é base de L , então

$$\mathbb{F}(L)^L = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)}.$$

Nessa seção, apresentaremos um procedimento prático para determinar um conjunto gerador algebricamente independente de $\mathbb{F}(L)^L$, quando L é álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita. Para isso, considere que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é a base triangular de L , conforme definida na Seção 1.5 e construída na Proposição 1.5.4, através da cadeia central superior de L . Para cada $i = 1, \dots, n$,

defina

$$K_i := \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_1)} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_i)}.$$

Note que $K_i = K_{i-1} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_i)}$, para $i \geq 2$. Pela Proposição 1.7.1, temos que $\text{ad}(\mathbf{x}_i)(K_{i-1}) \subseteq K_{i-1}$, ou seja, $\text{ad}(\mathbf{x}_i)|_{K_{i-1}} : K_{i-1} \rightarrow K_{i-1}$. Assim, temos que

$$K_i = K_{i-1} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_i)} = K_{i-1}^{\text{ad}(\mathbf{x}_i)|_{K_{i-1}}}.$$

Uma vez que $\mathbb{F}(L)^L = K_n$, então podemos determinar o corpo de invariantes racionais de L indutivamente, começando pelos geradores de $K_1 = \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$, depois determinando os geradores de $K_2 = K_1^{\text{ad}(\mathbf{x}_2)|_{K_1}}$, até chegar em $K_n = K_{n-1}^{\text{ad}(\mathbf{x}_n)|_{K_{n-1}}}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(L)^L &= \underbrace{\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_1)} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_2)} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_3)} \cap \cdots \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_{n-1})} \cap \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\text{ad}(\mathbf{x}_n)}}_{\substack{K_1 \\ \vdots \\ K_1^{\text{ad}(\mathbf{x}_2)|_{K_1}} =: K_2 \\ \underbrace{K_2^{\text{ad}(\mathbf{x}_3)|_{K_2}} =: K_3 \\ \vdots \\ K_{n-2}^{\text{ad}(\mathbf{x}_{n-1})|_{K_{n-2}}} =: K_{n-1}} \\ &= K_{n-1}^{\text{ad}(\mathbf{x}_n)|_{K_{n-1}}}. \end{aligned}$$

O ponto importante nessa interação é que, em cada passo, podemos escrever $K_i = \mathbb{F}(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})$, com z_{ij} sendo polinômio em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, de modo que $\text{ad}(\mathbf{x}_\ell)|_{K_i}$ é uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\}$, para todo $\ell = 1, \dots, n$, conforme veremos a seguir.

Teorema 5.1.1. Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base triangular de L nilpotente e considere a notação estabelecida anteriormente, onde $K_1 = \mathbb{F}(L)$ e $K_i = K_{i-1}^{\text{ad}(\mathbf{x}_i)|_{K_{i-1}}}$, para todo $i = 2, \dots, n$. Então, para cada $i = 1, \dots, n$, vale que

- (a) K_i é um corpo gerado por um sistema triangular crescente de polinômios $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\} \subseteq \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ com respeito a $1 \leq a_1 < \cdots < a_{m_i} \leq n$ (conforme definido na Seção 1.3), onde, para todo $j = 1, \dots, m_i$,

$$z_{ij} = x_{a_j} q_{j1} + q_{j2},$$

com $q_{j1}, q_{j2} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_j-1}]$ e $q_{j1} \in \mathbb{F}[L]^L \setminus \{0\}$;

- (b) o conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\} \subseteq \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é algebricamente independente;
- (c) $\text{ad}(\mathbf{x}_j)|_{K_i}$ é uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\}$, para todo $j = 1, \dots, n$, onde $\text{ad}(\mathbf{x}_j)|_{K_i}(z_{i1}) = 0$;
- (d) existe $d_i \in \mathbb{F}[L]^L$ tal que $d_i \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]$ e $K_i \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]$.

Demonstração. Vamos mostrar a veracidade desse teorema usando indução sobre $i = 1, \dots, n$. Assim, se $i = 1$, então $K_i = K_1 = \mathbb{F}(L) = \mathbb{F}(x_n)$. Note que $\{x_1, \dots, x_n\}$ satisfaz (a) e (b). Além disso, para todo $j = 1, \dots, n$, temos que $\text{ad}(x_j)|_{K_1} = \text{ad}(x_j)$ é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, \dots, x_n\}$ em decorrência da definição de base triangular de L , onde $\text{ad}(x_j)(x_1) = 0$, já que $x_1 \in \mathcal{Z}(L)$. Isso significa que a afirmação (c) é verdadeira. Finalmente, veja que

$$K_1 \cap \mathbb{F}[L] = \mathbb{F}(x_n) \cap \mathbb{F}[x_n] = \mathbb{F}[x_n].$$

Portanto, tomando $d_1 = 1$, temos que $K_1 \cap \mathbb{F}[L] = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n, d_1^{-1}]$. Assim, a proposição é verdadeira para $i = 1$.

Suponha, por indução, que a afirmação do teorema vale para algum $i \in \{1, \dots, n-1\}$, isto é, suponha que:

- $K_i = \mathbb{F}(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})$, onde $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\} \subseteq \mathbb{F}[x_n]$ é um sistema triangular crescente de polinômios com respeito a $1 \leq a_1 < \dots < a_{m_i} \leq n$, onde, para todo $j = 1, \dots, m_i$,

$$z_{ij} = x_{a_j} q_{j1} + q_{j2},$$

com $q_{j1}, q_{j2} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_j-1}]$ e $q_{j1} \in \mathbb{F}[L]^L \setminus \{0\}$;

- $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\}$ é algebricamente independente;
- $\text{ad}(x_j)|_{K_i}$ é uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\}$, para todo $j = 1, \dots, n$, onde $\text{ad}(x_j)|_{K_i}(z_{i1}) = 0$;
- existe $d_i \in \mathbb{F}[L]^L$ tal que $d_i \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]$ e $K_i \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]$.

Vamos mostrar que a afirmação vale para $i+1$. Assim, por hipótese de indução, temos que $\text{ad}(x_{i+1})|_{K_i}$ é uma derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}\}$. Então, podemos escrever

$$\text{ad}(x_{i+1})|_{K_i} = f_k D_{z_{ik}} + \dots + f_{m_i} D_{z_{i,m_i}},$$

onde $f_k \neq 0$ e $f_j \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,j-1}]$, para todo $j = k, \dots, m_i$. Da Observação 1.6.2, temos que $f_j = \text{ad}(x_{i+1})|_{K_i}(z_{ij})$. Assim, como $\text{ad}(x_{i+1})|_{K_i}(z_{i1}) = 0$, podemos afirmar que $k \geq 2$. Pelo Corolário 3.2.2 e pela Observação 3.2.3, temos que K_{i+1} é gerado pelos seguintes polinômios algebricamente independentes:

$$u_1 = z_{i1}, \quad \dots, \quad u_{k-1} = z_{i,k-1}, \quad u_k = f_k^{\alpha_{k+1}} z_{i,k+1} + g_k, \quad \dots, \quad u_{m_i-1} = f_{m_i}^{\alpha_{m_i}} z_{i,m_i} + g_{m_i-1},$$

onde $g_j \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,k}]$, para $j = k, \dots, m_i-1$. Da Observação 3.2.4, temos que $\{u_1, \dots, u_{m_i-1}\} \subseteq \mathbb{F}[x_n]$ é um sistema triangular crescente de polinômios com respeito a $1 \leq a_1 < \dots < a_k < \dots < a_{m_i} \leq n$. Veja que, por $z_{ij} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_j}]$, então $f_k, g_i \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_k}]$, para todo $i = k, \dots, m_i-1$. Agora, considerando o Lema 3.1.3, note que, de seu enunciado, se tomarmos o corpo $K = K_i$; o homomorfismo $\psi : L \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{F}}(K_i)$ como sendo a adjunta restrita a K_i , isto é, $\psi(x) = \text{ad}(x)|_{K_i}$;

o elemento $a = x_{i+1}$ e escrevendo, para todo $y \in L$, $[a, y] = \sum_{j=1}^i \gamma_{yj} x_j$, onde $\gamma_{yj} \in \mathbb{F}$ (isso é devido a base ser triangular), teremos que $[a, y] \in \ker(\psi)$, porque

$$\psi([a, y]) = \psi\left(\sum_{j=1}^i \gamma_{yj} x_j\right) = \sum_{j=1}^i \gamma_{yj} \psi(x_j) = \sum_{j=1}^i \gamma_{yj} \text{ad}(x_j)|_{K_i}$$

e $\text{ad}(x_j)|_{K_i} = 0$, para todo $j = 1, \dots, i$, uma vez que $K_i = \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_1)} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)}$. Assim, podemos concluir, do Lema 3.1.3, que $\text{ad}(y)(f_k) = 0$, para todo $y \in L$, ou seja, $f_k \in \mathbb{F}(L)^L$. Dessa forma, temos que o conjunto $\{u_1, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz as condições (a) e (b) do enunciado do teorema.

Seja $\ell = 1, \dots, n$. Se $j = 1, \dots, k-1$, então, por hipótese de indução, vale que $\text{ad}(x_\ell)(u_j) \in \mathbb{F}[u_1, \dots, u_{j-1}]$, pois, nesse caso, $u_j = z_{ij}$. Contudo, essa propriedade não vale se $j \geq k$, sendo, possivelmente, necessário fazer uma pequena alteração no conjunto $\{u_1, \dots, u_{m_i-1}\}$, quando $j \geq k$. Para isso, vamos usar o Teorema 3.3.1 recursivamente para construir esse novo conjunto de geradores de K_{i+1} que satisfará as condições (a), (b) e (c) do enunciado deste teorema.

A ideia para mostrar que (a), (b) e (c) valem é manter os elementos $u_1, \dots, u_{k-1}$ sem alteração, mas dar a eles outro nome, passando a chamá-los de $u'_1, \dots, u'_{k-1}$, a fim de manter uma coerência de notação. Depois, observando que $k \geq 2$ e que $\text{ad}(x_\ell)(u_j) \in \mathbb{F}[u_1, \dots, u_{j-1}]$, para $j = 1, \dots, k-1$, podemos afirmar que $\{u'_1, \dots, u'_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz as condições (a) e (b) e que $\text{ad}(x_\ell)(u'_j) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{j-1}]$, para todo $j = 1, \dots, k-1$. Feito isso, vamos supor, por indução, que tenhamos alterado os elementos $u_k, \dots, u_r$, para algum $r = k, \dots, m_i + 1$, de tal modo que o conjunto $\{u'_1, \dots, u'_{k-1}, u'_k, \dots, u'_r, u_{r+1}, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz as condições (a) e (b) e que também satisfaz o fato de $\text{ad}(x_\ell)(u'_j) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{j-1}]$, para todo $j = 1, \dots, r$. Daí, provar que o mesmo acontece quando consideramos u'_{r+1} . Vejamos.

Seja $\ell = 1, \dots, n$. Como vimos, $\{u'_1, \dots, u'_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz as condições (a) e (b) e que $\text{ad}(x_\ell)(u'_j) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{j-1}]$, para todo $j = 1, \dots, k-1$. Suponha que, para algum $r = k, \dots, m_i - 2$, o conjunto $\{u'_1, \dots, u'_r, u_{r+1}, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz as condições (a) e (b) e que $\text{ad}(x_\ell)(u'_j) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{j-1}]$, para todo $j = 1, \dots, r$. Vamos alterar u_{r+1} para u'_{r+1} , que definiremos adiante, de modo a satisfazer a indução. Para isso, observe que, como $\text{ad}(x_\ell)$ é derivação triangular com respeito ao conjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{i, m_i}\}$, $\text{ad}(x_\ell)(f_k) = 0$ e $g_{r+1} \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i, r+1}]$, temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}(x_\ell)(u_{r+1}) &= \text{ad}(x_\ell)(f_k^{\alpha_{r+2}} z_{i, r+2} + g_{r+1}) = \\ &= f_k^{\alpha_{r+2}} \text{ad}(x_\ell)(z_{i, r+2}) + \text{ad}(x_\ell)(g_{r+1}) \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i, r+1}]. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Além disso,

$$\text{ad}(x_{i+1})(\text{ad}(x_\ell)(u_{r+1})) = \text{ad}(x_\ell)(\text{ad}(x_{i+1})(u_{r+1})) - \text{ad}([x_\ell, x_{i+1}]) (u_{r+1}) = 0,$$

pois $u_{r+1} \in K_{i+1}$ e $[x_\ell, x_{i+1}]$ é combinação linear de $x_1, \dots, x_i$. Logo, pelo Teorema 3.3.1, existem

$\beta_{r+1,\ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $h_{r+1,\ell} \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{m_i-1}]$ tais que

$$\text{ad}(x_\ell)(u_{r+1}) = \frac{h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r, u_{r+1}, \dots, u_{m_i-1})}{f_k^{\beta_{r+1,\ell}}} \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_r, u_{r+1}, \dots, u_{m_i-1}, f_k^{-1}].$$

Disso segue que

$$f_k^{\beta_{r+1,\ell}} \text{ad}(x_\ell)(u_{r+1}) = h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r, u_{r+1}, \dots, u_{m_i-1}).$$

Note que o lado esquerdo da igualdade acima é um polinômio em

$$\mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,r+1}] \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_{r+1}}].$$

Como $h_{r+1,\ell} \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{m_i-1}]$ e como u_j contém a variável $x_{a_{j+1}}$ em grau 1, mas não contém as variáveis $x_{a_{j+2}}, \dots, x_n$, para todo $j = r+1, \dots, m_i-1$, então $h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r, u_{r+1}, u_{m_i-1}) = h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r)$. Logo,

$$\text{ad}(x_\ell)(u_{r+1}) = \frac{h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r)}{f_k^{\beta_{r+1,\ell}}}. \quad (5.1.2)$$

Defina,

$$\beta_{r+1} := \max(\beta_{r+1,1}, \dots, \beta_{r+1,n})$$

e considere o conjunto formado pelos elementos

$$u'_1, \dots, u'_r, u'_{r+1} := f_k^{\beta_{r+1}} u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{m_i-1}.$$

Uma vez que $K_{i+1} = \mathbb{F}(u_1, \dots, u_{m_i-1})$ e como $f_k \in \mathbb{F}[u_1, \dots, u_{k-1}]$, então, temos que $K_{i+1} = \mathbb{F}(u'_1, \dots, u'_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{m_i-1})$. Além disso, como $\{u_1, \dots, u_{m_i-1}\}$ é um sistema triangular crescente de polinômios com respeito a $1 \leq a_1 < \dots < a_k < \dots < a_{m_i} \leq n$, então o mesmo ocorre ao conjunto $\{u'_1, \dots, u'_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{m_i-1}\}$. Logo, pela Proposição 1.3.4, tal conjunto é algebricamente independente. Neste caso, temos ainda que $u'_{r+1} = f_k^{\beta_{r+1}} f_k^{\alpha_{r+2}} z_{i,r+1} + f_k^{\beta_{r+1}} g_{r+1}$, onde $f_k^{\beta_{r+1}} f_k^{\alpha_{r+2}} \in \mathbb{F}[L]^L$ e $f_k^{\beta_{r+1}} f_k^{\alpha_{r+2}}, f_k^{\beta_{r+1}} g_{r+1} \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{a_r}]$. Portanto, $\{u'_1, \dots, u'_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{m_i-1}\}$ satisfaz (a) e (b).

Veja, agora, que

$$\begin{aligned} \text{ad}(x_\ell)(u'_{r+1}) &= \text{ad}(x_\ell)(f_k^{\beta_{r+1}} u_{r+1}) = f_k^{\beta_{r+1}} \text{ad}(x_\ell)(u_{r+1}) = f_k^{\beta_{r+1}} \frac{h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r)}{f_k^{\beta_{r+1,\ell}}} = \\ &= f_k^{\beta_{r+1} - \beta_{r+1,\ell}} h_{r+1,\ell}(u'_1, \dots, u'_r) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_r], \end{aligned}$$

já que $\beta_{r+1} - \beta_{r+1,\ell} \geq 0$. Logo, $\text{ad}(x_\ell)(u'_j) \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{j-1}]$, para todo $j = 1, \dots, r+1$. Assim, temos que o conjunto formado pelos elementos

$$u'_1, \dots, u'_r, u'_{r+1} := f_k^{\beta_{r+1}} u_{r+1}, \dots, u'_{m_i-1} := f_k^{\beta_{m_i-1}} u_{m_i-1}.$$

satisfaz (a), (b) e (c). Vamos finalizar a demonstração mostrando que existe $d_{i+1} \in \mathbb{F}[L]^L$ tal que

$$K_{i+1} \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, d_{i+1}^{-1}].$$

Para isso, note que

$$K_{i+1} \cap \mathbb{F}[L] = (K_i \cap \mathbb{F}[L])^{\text{Hipótese de indução } \text{ad}(x_{i+1})} \subseteq \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]^{\text{ad}(x_{i+1})} \quad (5.1.3)$$

Vamos mostrar que vale a seguinte igualdade:

$$\mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]^{\text{ad}(x_{i+1})} = \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]^{\text{ad}(x_{i+1})} [d_i^{-1}]. \quad (5.1.4)$$

Note que inclusão $\mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]^{\text{ad}(x_{i+1})} [d_i^{-1}] \subseteq \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]^{\text{ad}(x_{i+1})}$ é direta, pois $d_i \in \mathbb{F}[L]^L$.

Agora, seja $\frac{p(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})}{d_i^r} \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}, d_i^{-1}]^{\text{ad}(x_{i+1})}$. Então

$$0 = \text{ad}(x_{i+1}) \left(\frac{p(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})}{d_i^r} \right) = \frac{\text{ad}(x_{i+1})(p(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})) d_i^r}{d_i^{2r}} = \frac{\text{ad}(x_{i+1})(p(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}))}{d_i^r}, \quad (5.1.5)$$

ou seja, $\text{ad}(x_{i+1})(p(z_{i1}, \dots, z_{i,m_i})) = 0$. Isso implica a outra inclusão, o que demonstra a Equação (5.1.4). Assim, voltando à Equação (5.1.3), obtemos

$$K_{i+1} \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]^{\text{ad}(x_{i+1})} [d_i^{-1}].$$

Do Teorema 3.3.1, temos que

$$\mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]^{\text{ad}(x_{i+1})} \subseteq \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, f_k^{-1}].$$

Assim,

$$K_{i+1} \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, f_k^{-1}, d_i^{-1}].$$

Por hipótese, $d_i \in \mathbb{F}[L]^L \cap \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]$, logo $d_i \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,m_i}]^{\text{ad}(x_{i+1})}$. Assim, pelo Teorema 3.3.1, existem um polinômio p em m_i variáveis e um $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que

$$d_i = \frac{p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1})}{f_k^r} \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, f_k^{-1}].$$

Defina

$$d_{i+1} := f_k p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1}).$$

Uma conta análoga a feita na Equação (5.1.5), mostra que $p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1}) \in \mathbb{F}[L]^L$. Como o mesmo acontece com f_k , concluímos que $d_{i+1} \in \mathbb{F}[L]^L$. Veja também que $d_{i+1} \in \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}]$. Finalmente, observe que

$$d_i^{-1} = \frac{f_k^r}{p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1})} = \frac{f_k^r}{p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1}) f_k} \frac{f_k}{d_{i+1}} = \frac{f_k^{r+1}}{d_{i+1}}$$

e que

$$f_k^{-1} = \frac{p(u'_1, \dots, u'_{m_i-1})}{d_{i+1}}.$$

Logo,

$$K_{i+1} \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, f_k^{-1}, d_i^{-1}] \subseteq \mathbb{F}[u'_1, \dots, u'_{m_i-1}, d_{i+1}^{-1}]$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

De posse do Teorema 5.1.1, vamos apresentar os passos a serem executados para a determinação de um conjunto gerador algebricamente independente de $\mathbb{F}(L)^L$.

Passo 1. Determinar $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base triangular de L .

Passo 2. Observar que $x_1 \in \mathcal{Z}(L)$, o centro de L , o que implica que $\text{ad}(x_1) = 0$ e, consequentemente, que $K_1 = \mathbb{F}(x_n)$. Nesse caso, para todo $\ell = 1, \dots, n$, temos que $\text{ad}(x_\ell)|_{K_1} = \text{ad}(x_\ell)$ é uma derivação triangular, devido à condição de $\{x_1, \dots, x_n\}$ ser uma base triangular de L . Assim, neste passo, vamos determinar x_i tal que $x_i \notin \mathcal{Z}(L)$ e $x_j \in \mathcal{Z}(L)$, para todo $j = 1, \dots, i-1$.

Passo 3. Para o valor i determinado no *Passo 2*, utilizar o método das características, conforme visto no Corolário 3.2.2 e na Observação 3.2.3, para determinar o conjunto $\{u_1, \dots, u_{m_i-1}\} \in \mathbb{F}[x_n]$ algebricamente independente que gera $K_i = K_{i-1}^{\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}}}$, apresentado no Sistema (3.2.4), isto é, determinar os elementos

$$u_1 = z_{i1}, \quad \dots, \quad u_{k-1} = z_{i,k-1}, \quad u_k = f_k^{\alpha_{k+1}} z_{i,k+1} + g_k, \quad \dots, \quad u_{m_i-1} = f_k^{\alpha_{m_i}} z_{i,m_i} + g_{m_i-1},$$

onde $g_i \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{ik}]$, para $i = k, \dots, m_i - 1$.

Passo 3.1. Fixar $j = k$, $\ell = i + 1$ e calcular $\text{ad}(x_\ell)(u_j)$. Nesse ponto, precisamos determinar $\beta_{j\ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $h_{j\ell} \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{m_i-1}]$ tais que

$$\text{ad}(x_\ell)(u_j) = \frac{h_{j\ell}(u_1, \dots, u_{m_i-1})}{f_k^{\beta_{j\ell}}}$$

conforme Equação (5.1.2). A ideia aqui é seguir o que foi feito na demonstração do Teorema 3.3.1. Para isso, calculamos

$$\text{lt}(\text{ad}(x_\ell)(u_j)) = \alpha z_{i,k+1}^{\gamma_{k+1}} \cdots z_{i,m_i}^{\gamma_{m_i}},$$

com $\alpha \in \mathbb{F}[z_{i1}, \dots, z_{i,k-1}]$ e definimos $f := \alpha u_k^{\gamma_{k+1}} \cdots u_{m_i-1}^{\gamma_{m_i}}$. Vimos, na demonstração do Teorema 3.3.1 que, definindo $\gamma := \gamma_{k+1} \alpha_{k+1} + \cdots + \gamma_n \alpha_n$ e $h_0 := f_k^\gamma \text{ad}(x_\ell)(u_j) - f$, então

$$\text{lm}(h_0) < \text{lm}(\text{ad}(x_\ell)(u_j)).$$

Note que

$$\text{ad}(x_\ell)(u_j) = \frac{h_0 + f}{f_k^\gamma}.$$

Seguimos esse raciocínio em h_0 até obter $\beta_{j\ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $h_{j\ell} \in \mathbb{F}[t_1, \dots, t_{m_i-1}]$.

Passo 3.2. Repetir o *Passo 3.1* para $\ell + 1$, até chegar em n .

Passo 3.3. Definir $\beta_j := \max(\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})$.

Passo 3.4. Repetir o *Passo 3.1*, *Passo 3.2* e *Passo 3.3* para $j + 1$ até chegar em $m_i - 1$, considerando o conjunto gerador de K_i formado pelos elementos

$$u'_1 = u_1, \dots, u'_{k-1} = u_{k-1}, u'_k = f_k^{\beta_k} u_k, \dots, u'_j = f_k^{\beta_j} u_j, \dots, u'_{m_i-1}.$$

Passo 3.5. O conjunto formado pelos elementos

$$u'_1 = u_1, \dots, u'_{k-1} = u_{k-1}, u'_k = f_k^{\beta_k} u_k, \dots, u'_{m_i-1} = f_k^{\beta_{m_i-1}} u_{m_i-1},$$

geram K_i e satisfaz as hipóteses do Teorema 5.1.1.

Passo 4. Repetir o *Passo 3* para $i + 1$ até chegar em n , obtendo ao final o conjunto gerador de $\mathbb{F}(L)^L$ desejado.

Para executar esses passos, desenvolvemos, em SageMath, o método

`rational_invariant_field,`

para a classe das álgebras de Lie. Tal método, quando aplicado a uma álgebras de Lie nilpotente L , devolve um conjunto gerador algebricamente independente de $\mathbb{F}(L)^L$.

5.1.1 Consequências algébricas

Os próximos dois corolários, seguem como consequência do Teorema 5.1.1. O Corolário 5.1.3 se alinha à fórmula de Beltrametti-Blasi, apresentada em [BB66], que limita o número de invariantes analíticos funcionalmente independentes e cujo enunciado, conforme [CS04], pode ser dado como:

Teorema 5.1.2. Sejam L uma álgebra de Lie com base $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{N}(L)$ a cardinalidade do conjunto maximal de invariantes analíticos funcionalmente independentes e $M_L = ([x_i, x_j]) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F}(x_n))$ sua tabela de multiplicação. Então

$$\mathcal{N}(L) = \dim(L) - \text{posto}(M_L).$$

□

O Corolário 5.1.3, trata de grau de transcendência, em vez de cardinalidade do conjunto maximal de invariantes analíticos funcionalmente independentes. Vejamos.

Corolário 5.1.3. Seja L álgebra de Lie nilpotente com base $x_1, \dots, x_n$ e seja $M_L = ([x_i, x_j]) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F}(x_n))$ sua matriz de multiplicação. Então $\mathbb{F}(L)^L$ é uma extensão puramente transcendental de $\mathbb{F}$ e vale que

$$\text{trdeg}(\mathbb{F}(L)^L) = \dim(L) - \text{posto}(M_L),$$

onde $\text{trdeg}(\mathbb{F}(L)^L)$ é o grau de transcendência de $\mathbb{F}(L)^L$.

Demonstração. Uma extensão de um corpo é puramente transcendental, se existe um subconjunto dessa extensão formado por elementos algebricamente independentes que gere essa extensão. Ora, o Teorema 5.1.1 nos dá, justamente, um tal subconjunto que gera $\mathbb{F}(L)^L$. Portanto,

$\mathbb{F}(L)^L$ é uma extensão puramente transcendental de $\mathbb{F}$. Nesse caso, o grau de transcendência de $\mathbb{F}(L)^L$ é igual ao número de geradores algebricamente independentes dado pelo teorema. Observe que, para obter esse número, é subtraído da dimensão de L o número de vezes que a derivação $\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}}$ é não trivial, para cada $i = 2, \dots, n$, pois, em cada passo, o número de geradores de K_i diminui em 1. Em outras palavras, começamos em $K_1 = \mathbb{F}(x_n)$ e analisamos $\text{ad}(x_2)|_{K_1}$. Se essa derivação é diferente de zero, então K_2 possui $n - 1$ geradores algebricamente independentes. Caso contrário, $K_2 = K_1$. Depois, analisamos $\text{ad}(x_3)|_{K_2}$ e repetimos o raciocínio até $\text{ad}(x_n)|_{K_{n-1}}$, obtendo

$$\text{trdeg}(\mathbb{F}(L)^L) = \dim(L) - \delta,$$

onde δ é igual ao número de vezes que a derivação $\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}}$ é não trivial, para cada $i = 2, \dots, n$. Precisamos mostrar que $\delta = \text{posto}(M_L)$. Para isso, seja L_i a i -ésima linha de M_L . Observe que $\text{ad}(x_i) = L_i \nabla_X$. Observe também que $\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}} = 0$ significa que $\mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_1)} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)} = \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_1)} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_{i-1})}$, ou seja, que $\mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_1)} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_{i-1})} \subseteq \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)}$. Assim, devemos mostrar que $\mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_1)} \cap \dots \cap \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_{i-1})} \subseteq \mathbb{F}(x_n)^{\text{ad}(x_i)}$ se, e somente se, $\text{ad}(x_i)$ pertence ao submódulo de $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}(x_n))$ gerado por $\text{ad}(x_1), \dots, \text{ad}(x_{i-1})$. Mas isso é, justamente, o que a Proposição 1.6.9 afirma. Portanto, $\text{trdeg}(\mathbb{F}(L)^L) = \dim(L) - \text{posto}(M_L)$. $\square$

O Corolário 5.1.3 pode ser obtido das Observações 1.14.13 e 4.9.24 em [Dix96], para o caso onde L é algébrica, onde afirma-se (sem demonstração) que o índice de L é igual ao grau de transcendência de $\mathbb{F}(L)^L$ e também é igual ao número $\dim(L) - \text{posto}(M_L)$. Além disso, o fato de $\mathbb{F}(L)^L$ ser uma extensão puramente transcendental é demonstrado na Proposição 1 em [Dix57]. A nossa demonstração, difere da feita pelo Dixmier, por ser mais construtiva.

Nosso próximo corolário, segue a mesma direção da Proposição 2 em [Dix57] (também visto no Teorema 31 em [Oom12]).

Corolário 5.1.4. Seja L álgebra de Lie nilpotente com base triangular $\{x_1, \dots, x_n\}$. Sejam

- $K_{r-1} = K_{r-2}^{\text{ad}(x_{r-1})|_{K_{r-2}}} = \mathbb{F}(z_{r-1,1}, \dots, z_{r-1,m_{r-1}})$ e
- $\text{ad}(x_r)|_{K_{r-1}} = f_{rk} D_{z_{r-1,k}} + \dots + f_{r,m_{r-1}} D_{z_{r-1,m_{r-1}}}$ tal que $K_r = \mathbb{F}(L)^L = \mathbb{F}(z_{r1}, \dots, z_{r,m_r})$,

para algum $r = 2, \dots, n$. Então existe $p \in \mathbb{F}[L]^L$ tal que $p \in \mathbb{F}[z_{r1}, \dots, z_{r,m_r}]$ e

$$\mathbb{F}[L]^L \subseteq \mathbb{F}[z_{r1}, \dots, z_{r,m_r}, p^{-1}].$$

Demonstração. Segue como consequência do item (d), do Teorema 5.1.1, pois

$$\mathbb{F}[L]^L = K_r \cap \mathbb{F}[L] \subseteq \mathbb{F}[z_{r1}, \dots, z_{r,m_r}, p^{-1}],$$

para algum p nas condições do enunciado. $\square$

5.1.2 Exemplo: álgebras L onde $\dim(L) \leq 6$

No artigo [dG07] é apresentado uma classificação das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor do que ou igual a 6. Vamos denotar tais álgebras por duplas ou triplas entre colchetes,

onde a primeira posição indica a dimensão da álgebra; a segunda, um número que a classifique; e a terceira, quando houver, indica um parâmetro. Assim, essas álgebras são denotadas da seguinte maneira:

Tabela 5.1: Lista das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão até 6.

Dimensão	Álgebra
1	[1,1]
2	[2,1]
3	[3,1], [3,2]
4	[4,1], [4,2], [4,3]
5	[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6], [5,7], [5,8], [5,9]
6	[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6], [6,7], [6,8], [6,9], [6,10], [6,11], [6,12], [6,13], [6,14], [6,15], [6,16], [6,17], [6,18], [6,19,a], [6,20], [6,21,a], [6,22,a], [6,23], [6,24,a], [6,25], [6,26]

Note que, as únicas álgebras que dependem de algum parâmetro $a \in \mathbb{F}$, formando, portanto, uma família de álgebras, são as álgebras: $[6, 19, a]$, $[6, 21, a]$, $[6, 22, a]$ e $[6, 24, a]$.

Tais álgebras foram implementadas no sistema Gap [GAP22], através do pacote *LieAlgDB* (veja referência [CdGSG19]). Utilizando esse pacote, pode-se importar tais álgebras para SageMath e utilizar nosso algoritmo para determinar os geradores algebricamente independentes da álgebra dos invariantes racionais. Acontece que nessa implementação, é preciso fornecer o valor do parâmetro para as álgebras $[6, 19, a]$, $[6, 21, a]$, $[6, 22, a]$ e $[6, 24, a]$. Dessa forma, desenvolvemos, no próprio sistema SageMath, funções que devolvem as álgebras de dimensão até 6, sem a necessidade de indicar algum parâmetro para as álgebras acima citadas. A função desenvolvida recebeu o nome de

`nilpotent_lie_algebra`

e recebe como entrada três valores: um corpo base para a álgebra; um parâmetro $[i, j]$ que indique qual é a álgebra desejada; e um valor booleano opcional *True*, se quiser que a álgebra seja entregue na base triangular. Por exemplo, se desejamos a álgebra $[6, 19, a]$ sobre o corpo dos racionais, dada na base triangular, devemos fazer:

`nilpotent_lie_algebra(QQ, [6, 19], True).`

Construídas tais álgebras, usamos nosso algoritmo para determinar os geradores algebricamente independentes para todas as álgebras de Lie de dimensão até 6, sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Tais geradores estão apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(L)^L$ para álgebras nilpotentes de dimensão até 6.

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(L)^L$
[1, 1]	abeliana	x_1
[2, 1]	abeliana	x_1, x_2
[3, 1]	abeliana	x_1, x_2, x_3
[3, 2]	$[x_2, x_3] = x_1$	x_1
[4, 1]	abeliana	x_1, x_2, x_3, x_4
[4, 2]	$[x_3, x_4] = x_1$	x_1, x_2
[4, 3]	$[x_2, x_3] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = x_2$	$x_1, -x_2^2 + 2x_1x_4$
[5, 1]	abeliana	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
[5, 2]	$[x_4, x_5] = x_1$	x_1, x_2, x_3
[5, 3]	$[x_3, x_4] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = x_3$	$x_1, x_2, -x_3^2 + 2x_1x_5$
[5, 4]	$[x_2, x_3] = x_1,$ $[x_4, x_5] = x_1$	x_1
[5, 5]	$[x_2, x_4] = -x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = x_2$	x_1
[5, 6]	$[x_2, x_4] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = -x_2,$ $[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = x_3$	x_1
[5, 7]	$[x_2, x_4] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = x_3$	$x_1, -x_2^2 + 2x_1x_3, x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_5$
[5, 8]	$[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_3, x_5] = x_2$	$x_1, x_2, -x_2x_4 + x_1x_5$
[5, 9]	$[x_3, x_4] = -x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = x_3$	$x_1, x_2, x_3^2 + 2x_2x_4 - 2x_1x_5$
[6, 1]	abeliana	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

Continua na próxima página

Tabela 5.2 – Continuação da página anterior

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(L)^L$
[6, 2]	$[x_5, x_6] = x_1$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$
[6, 3]	$[x_4, x_5] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad -x_4^2 + 2x_1x_6$
[6, 4]	$[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_5, x_6] = x_1$	$x_1, \quad x_2$
[6, 5]	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad x_2$
[6, 6]	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad x_2$
[6, 7]	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad x_2, \quad -x_3^2 + 2x_1x_4, \quad x_3^3 - 3x_1x_3x_4 + 3x_1^2x_6$
[6, 8]	$[x_4, x_5] = x_1,$ $[x_4, x_6] = x_2$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad -x_2x_5 + x_1x_6$
[6, 9]	$[x_4, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_6] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4^2 + 2x_2x_5 - 2x_1x_6$
[6, 10]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_5, x_6] = x_2$	$x_1, \quad -x_2^2 + 2x_1x_6$
[6, 11]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_6] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4$
[6, 12]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_6] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -x_2^2 + 2x_1x_4$
Continua na próxima página		

Tabela 5.2 – Continuação da página anterior

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(L)^L$
[6, 13]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_6] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad -x_2^3 + 3x_1x_2x_3 - 3x_1^2x_6$
[6, 14]	$[x_2, x_6] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_4, x_6] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -2x_1x_2^3 - 3x_1^2x_3^2 + 6x_1^2x_2x_4 + 6x_1^3x_5$
[6, 15]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_3, x_6] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_4, x_6] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$
[6, 16]	$[x_2, x_6] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -x_3^2 + 2x_2x_4 + 2x_1x_5$
[6, 17]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -x_2^2 + 2x_1x_3$
[6, 18]	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = -x_3,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -x_2^2 + 2x_1x_3, \quad x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,$ $-x_2^4 + 4x_1x_2^2x_3 - 8x_1^2x_2x_4 + 8x_1^3x_6$
Continua na próxima página		

Tabela 5.2 – Continuação da página anterior

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(L)^L$
$[6, 19, a]$	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = -x_1,$ $[x_3, x_6] = -ax_1,$ $[x_4, x_5] = x_2,$ $[x_4, x_6] = x_3$	$x_1, \quad \frac{a}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + ax_1x_4 - x_1x_6$
$[6, 20]$	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_4] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = x_2,$ $[x_4, x_6] = x_3$	$x_1, \quad -x_3^2 + 2x_1x_6$
$[6, 21, a]$	$[x_2, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_6] = -ax_1,$ $[x_4, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_6] = -x_3,$ $[x_5, x_6] = x_4$	$x_1, \quad -\frac{a}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_3^2 + ax_1^2x_4$
$[6, 22, a]$	$[x_3, x_4] = x_1,$ $[x_3, x_5] = x_2,$ $[x_4, x_6] = ax_2,$ $[x_5, x_6] = x_1$	$x_1, \quad x_2$
$[6, 23]$	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_2,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad x_2$
$[6, 24, a]$	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_3, x_6] = -x_2,$ $[x_4, x_5] = -ax_2,$ $[x_4, x_6] = -x_1,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad x_2$
$[6, 25]$	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_5] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad x_2, \quad -x_2x_3 + x_1x_4, \quad -x_3^2 + 2x_1x_6$
$[6, 26]$	$[x_3, x_5] = -x_1,$ $[x_4, x_6] = -x_2,$ $[x_5, x_6] = x_3$	$x_1, \quad x_2$

No artigo [Oom09], o autor faz uma descrição explícita do centro da álgebra universal en-

volvente para várias álgebras de Lie nilpotentes, indecomponíveis, de dimensão no máximo 7 e definidas sobre os complexos.

5.1.3 Exemplo: álgebra $\mathfrak{t}_n$ das matrizes triangulares superiores estritas $n \times n$

No artigo [BPP07], são determinados os invariantes analíticos de $\mathfrak{t}_n$, álgebra das matrizes triangulares superiores estritas $n \times n$. Nele, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.5. Seja $E_{ij} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ a matriz definida como

$$(E_{ij})_{k\ell} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \text{ e } j = \ell, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os geradores da álgebra dos invariantes analíticos de $\mathfrak{t}_n$ são

$$\det((E_{ij})_{j=n-k+1, \dots, n}^{i=1, \dots, k}), \text{ com } k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad \square$$

Exemplo 5.1.6. Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{t}_8$. Tal álgebra tem base $\{E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8\}$. Então, pelo Teorema 5.1.5, temos que a álgebra de invariantes analíticos de $\mathfrak{t}_8$ é gerada pelos determinantes formais das seguintes matrizes.

$$M_1 = (E_{18}), \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_{17} & E_{18} \\ E_{27} & E_{28} \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ E_{36} & E_{37} & E_{38} \end{pmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{pmatrix} E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \end{pmatrix}.$$

Por exemplo,

$$\det(M_1) = E_{18} \quad \text{e} \quad \det(M_2) = E_{17}E_{28} - E_{18}E_{27}.$$

Dispondo a base $\{E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8\}$ em uma matriz M triangular superior estrita onde a posição $(M)_{ij} = E_{ij}$, temos que as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 são dadas como abaixo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ 0 & 0 & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ 0 & 0 & 0 & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{67} & E_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A imagem acima nos mostra uma maneira prática e visual de se obter tais invariantes. □

Nosso algoritmo mostrou que temos esse mesmo resultado para álgebra de invariantes racionais, quando $n \leq 12$. Abaixo, vê-se um exemplo para o caso $n = 6$.


```

1 sage: l = lie_algebra_upper_triangular_matrices(6, strict=True)
2 sage: l.rational_invariant_field()
3 [x16,
4   x25*x16 - x26*x15,
5   x34*x25*x16^2 - x34*x26*x15*x16 - x35*x24*x16^2 + x35*x14*x26*x16 +
6     + x24*x36*x15*x16 - x36*x25*x14*x16]

```

Para valores $n > 12$, a memória do computador se esgota e o programa se fecha. Abaixo, apresentamos uma tabela com o tempo gasto para obter os invariantes para cada uma dessas álgebras, para $n = 3, \dots, 12$. Todos os cálculos foram realizados em um computador com processador 11th Gen Intel® Core™ i7-1165G7, rodando a 2,80 GHz com 8 threads e 16 GB de memória, utilizando a versão 10.2 do SageMath.

Tabela 5.3: Tempo gasto para calcular os geradores algebricamente independentes de $\mathbb{Q}(t_n)^{t_n}$.

Tamanho da matriz	3	4	5	6	7
Tempo gasto no cálculo	37,9 ms	95,9 ms	240 ms	543 ms	1,17 s

8	9	10	11	12
2,33 s	4,73 s	9,16 s	19,1 s	5 min 2 s

5.2 Álgebra de Lie solúvel: exemplo quando $\dim(L) \leq 4$

No artigo [dG05] há uma classificação das álgebra de Lie solúveis de dimensão até 4, conforme a tabela abaixo, onde, repetindo a notação para as álgebras nilpotentes, vamos denotar tais álgebras por duplas, triplas ou quádruplas entre colchetes, onde a primeira posição indica a dimensão da álgebra; a segunda, um número que a classifique; e a terceira e quarta, quando houver, indicam parâmetros da classificação.

Tabela 5.4: Lista das álgebras de Lie solúveis de dimensão até 4.

Dimensão	Álgebra
2	[2,1], [2,2]
3	[3,1], [3,2], [3,3,a], [3,4,a]
4	[4,1], [4,2], [4,3,a], [4,4], [4,5], [4,6,a,b], [4,7,a,b], [4,8], [4,9,a], [4,10,a], [4,11,a,b], [4,12], [4,13,a], [4,14,a]

As álgebras com 3 ou 4 parâmetros formam famílias de álgebras, sendo que as álgebras [4, 10, a] e [4, 11, a, b] estão definidas sobre $\mathbb{F}$ tal que $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ (não serão consideradas por nós) e a álgebra [4, 9, a] está definida apenas para $a \in \mathbb{F}$ tal que $t^2 - t - a \in \mathbb{F}[t]$ é irreduzível sobre $\mathbb{F}$. Dentro de uma mesma família, temos que valem os seguintes isomorfismos:

- $[3, 3, a] \cong [3, 3, b]$ se, e somente se, $a = b$;

- $[3, 4, a] \cong [3, 4, b]$ se, e somente se, $a = \alpha^2 b$, onde $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;
- $[4, 3, a] \cong [4, 3, b]$ se, e somente se, $a = b$;
- $[4, 6, a, b] \cong [4, 6, c, d]$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$;
- $[4, 7, a, b] \cong [4, 7, c, d]$ se, e somente se, $a = \alpha^3 c$ e $b = \alpha^2 d$, onde $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;
- $[4, 9, a] \cong [4, 9, b]$ se, e somente se, $a + \frac{1}{4} = \alpha^2 \left(b + \frac{1}{4}\right)$, onde $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$;
- $[4, 13, a] \cong [4, 13, b]$ se, e somente se, $a = b$;
- $[4, 14, a] \cong [4, 14, b]$ se, e somente se, $a = \alpha^2 b$, onde $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

Tais álgebras, assim como as nilpotentes, estão implementadas no sistema Gap, através do pacote *LieAlgDB*. Assim, podemos importá-las para SageMath e trabalhar com as ferramentas que desenvolvemos.

Exemplo 5.2.1. Seja $L = [4, 7, 1, 2]$ a álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$ com base $\{x_1, \dots, x_4\}$, onde as derivações adjuntas para os elementos dessa base, são

$$\begin{cases} \text{ad}(x_1) = -x_2 D_{x_4}, \\ \text{ad}(x_2) = -x_3 D_{x_4}, \\ \text{ad}(x_3) = (-x_1 - 2x_2) D_{x_4}, \\ \text{ad}(x_4) = x_2 D_{x_1} + x_3 D_{x_2} + (x_1 + 2x_2) D_{x_3}. \end{cases}$$

Note que $\text{ad}(x_1)$ é uma derivação triangular com respeito a $\{x_1, \dots, x_4\}$. Logo, aplicando nosso procedimento, descrito do Capítulo 3, obtemos que:

$$K_1 = \mathbb{Q}(\mathbf{x}_4)^{\text{ad}(x_1)} = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3).$$

Veja que $\text{ad}(x_2)|_{K_1} = \text{ad}(x_3)|_{K_1} = 0$. Observe que $\text{ad}(x_4)(K_1) \subseteq K_1$, logo $\mathbb{Q}(L)^L = K_1^{\text{ad}(x_4)|_{K_1}}$, onde

$$\begin{aligned} \text{ad}(x_4)|_{K_1} &= \text{ad}(x_4) = x_2 D_{x_1} + x_3 D_{x_2} + (x_1 + 2x_2) D_{x_3} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ D_{x_3} \end{pmatrix} =: X^T A \nabla_X. \end{aligned}$$

Observe que o polinômio característico de A é $p_A = (t+1)(t^2 - t - 1) \in \mathbb{Q}[t]$, cujas raízes são: $-1, a, -a+1$, onde $a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Então o corpo $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(a)$ é o corpo de fatoração de p_A . Nesse caso, temos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -a+2 & 1 \\ a & -a+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}a + \frac{7}{5} & \frac{3}{5}a - \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}a + \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}a + \frac{3}{5} & -\frac{3}{5}a - \frac{1}{5} & \frac{1}{5}a + \frac{2}{5} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =: PJP^{-1}.$$

Utilizando a teoria do Capítulo 4, temos que $D_J = D_{J,S} + D_{J,N}$, onde

$$D_{J,S} = aD_{y_1} + (-a + 1)D_{y_2} - D_{y_3} \quad \text{e} \quad D_{J,N} = 0.$$

Aqui, $y_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}x_i$. Como $\mathbb{F}(y_1, y_2, y_3)^{D_{J,N}} = \mathbb{F}(y_1, y_2, y_3)$, então, pelo Teorema 4.2.6, temos que

$$\mathbb{F}(y_1, y_2, y_3)^{D_J} = \mathbb{F}\{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} y_3^{\alpha_3} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z} \text{ e } a\alpha_1 + (-a + 1)\alpha_2 - \alpha_3 = 0\} = \mathbb{F}(y_1 y_2 y_3).$$

Voltando para as coordenadas originais, concluímos que

$$\mathbb{F}(L)^L = K_1^{\text{ad}(x_4)|_{K_1}} = \mathbb{F}(x_1, x_2, x_3)^{D_A} = \mathbb{F}(fg),$$

onde $f = x_1 + x_2 - x_3$ e $g = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_3^2$. Observe que, neste exemplo, começamos com uma álgebra definida sobre $\mathbb{Q}$, mas, para trabalharmos com as nossas ferramentas, foi preciso considerar a extensão simples $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(a)$. Com a álgebra definida sobre este corpo, conseguimos calcular os geradores algebricamente independentes de sua álgebra de invariantes racionais. $\square$

No Exemplo 5.2.1, embora não tenhamos calculado a base triangular da álgebra de Lie $L = [4, 7, 1, 2]$, obtivemos ainda a cadeia de corpos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}(x_4) & \supseteq & \mathbb{F}(x_4)^{\text{ad}(x_1)} & \supseteq & K_1^{\text{ad}(x_2)|_{K_1}} & \supseteq & K_2^{\text{ad}(x_3)|_{K_2}} \supseteq K_3^{\text{ad}(x_4)|_{K_3}} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & K_1 & & K_2 & & K_3 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & K_4 = \mathbb{Q}(L)^L \end{array}$$

Além disso, observamos também que $\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}}$ ou era uma derivação triangular com respeito aos geradores de K_{i-1} ou era uma derivação linear. Assim, para determinar os geradores de K_i , aplicamos a teoria do Capítulo 3, no primeiro caso, e aplicamos a teoria do Capítulo 4, no segundo caso. No caso de derivações lineares foi necessário tomar uma extensão simples de $\mathbb{Q}$, para obtermos a forma normal de Jordan, conforme explicado no Capítulo 4.

Esse comportamento se mostrou geral para as álgebras de Lie solúveis de dimensão até 4, isto é, sem a necessidade de alterar a base da álgebra, obtivemos a cadeia de corpos como acima e cada derivação $\text{ad}(x_i)|_{K_{i-1}}$ era uma derivação triangular com respeito aos geradores de K_{i-1} ou era uma derivação linear, onde, no caso linear, às vezes, sendo necessário fazer uma extensão de $\mathbb{Q}$ para se executar as contas.

Assim, utilizando as ferramentas que desenvolvemos, ao longo deste trabalho, foi possível determinar os geradores algebricamente independentes para essas álgebras, quando fixado algum parâmetro. Na Tabela 5.5, apresentamos esses geradores. Na última coluna, indicamos o valor a da extensão $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(a) \subseteq \mathbb{Q}$ necessária para realização do cálculo dos geradores.

Tabela 5.5: Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(L)^L$ para álgebras solúveis de dimensão até 4.

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(L)^L$	$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(a)$
[2, 1]	abeliana	x_1, x_2	1
[2, 2]	$[x_1, x_2] = -x_1$	1	1
[3, 1]	abeliana	x_1, x_2, x_3	1
[3, 2]	$[x_1, x_3] = -x_1,$ $[x_2, x_3] = -x_2$	$\frac{x_1}{x_2}$	1
[3, 3, 1]	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_2, x_3] = -x_1 - x_2$	1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
[3, 4, 1]	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_2, x_3] = -x_1$	$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$	1
[3, 4, -1]	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_2, x_3] = x_1$	$x_1^2 + x_2^2$	$i \in \mathbb{C}$
[4, 1]	abeliana	x_1, x_2, x_3, x_4	1
[4, 2]	$[x_1, x_4] = -x_1,$ $[x_2, x_4] = -x_2,$ $[x_3, x_4] = -x_3$	$\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$	1
[4, 3, 1]	$[x_1, x_4] = -x_1,$ $[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = x_2 - 2x_3$	$\frac{x_2 - x_3}{x_1}$	1
[4, 4]	$[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_3$	$x_1, x_2 - x_3$	1
[4, 5]	$[x_2, x_4] = -x_3$	x_1, x_3	1
[4, 6, 1, 1]	$[x_1, x_4] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1 - x_2 - x_3$	1	$a_{[4,6,1,1]}$
[4, 6, 1, 2]	$[x_1, x_4] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1 - 2x_2 - x_3$	1	$a_{[4,6,1,2]}$
[4, 7, 1, 1]	$[x_1, x_4] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1 - x_2$	$x_1^3 + 2x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 - 3x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 + x_3^3$	$a_{[4,7,1,1]}$
Continua na próxima página			

Tabela 5.5 – Continuação da página anterior

Álgebra L	Colchetes não nulos	Geradores algebricamente independentes de $\mathbb{F}(L)^L$	$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(a)$
$[4, 7, 1, 2]$	$[x_1, x_4] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1 - 2x_2$	$(x_1 + x_2 - x_3)(x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_3^2)$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
$[4, 8]$	$[x_1, x_2] = x_2,$ $[x_3, x_4] = x_4$	1	1
$[4, 9, 1]$	$[x_1, x_3] = -x_1,$ $[x_1, x_4] = -x_1 - x_2,$ $[x_2, x_3] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_1$	1	1
$[4, 9, -1]$	$[x_1, x_3] = -x_1,$ $[x_1, x_4] = -x_1 + x_2,$ $[x_2, x_3] = -x_2,$ $[x_2, x_4] = -x_1$	1	1
$[4, 12]$	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_1, x_4] = -x_1,$ $[x_2, x_4] = -2x_2,$ $[x_3, x_4] = -x_3$	1	1
$[4, 13, 1]$	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_1, x_4] = -x_1 - x_3,$ $[x_2, x_4] = -x_2,$ $[x_3, x_4] = -x_1$	1	1
$[4, 14, 1]$	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_1, x_4] = -x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1$	$x_2, \quad x_1^2 - x_3^2 + 2x_2x_4$	1
$[4, 14, -1]$	$[x_1, x_3] = -x_2,$ $[x_1, x_4] = x_3,$ $[x_3, x_4] = -x_1$	$x_2, \quad x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_4$	1

Os valores $a_{[4,6,1,1]}$, $a_{[4,6,1,2]}$ e $a_{[4,7,1,1]}$ são tais que:

- $\mathbb{Q}(a_{[4,6,1,1]})$ é o corpo de fatoração do polinômio $t^3 - t^2 - t - 1 \in \mathbb{F}[t]$;
- $\mathbb{Q}(a_{[4,6,1,2]})$ é o corpo de fatoração do polinômio $t^3 - t^2 - 2t - 1 \in \mathbb{F}[t]$;
- $\mathbb{Q}(a_{[4,7,1,1]})$ é o corpo de fatoração do polinômio $t^3 - t - 1 \in \mathbb{F}[t]$.

Referências

- [AN94] Annette A'Campo-Neuen. Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts. *Indag. Math. (N.S.)*, 5(3):253–257, 1994.
- [Arn06] Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Traduzido do russo por Roger Cooke, segunda impressão da edição de 1992
- [BB66] E.G. Beltrametti e A. Blasi. On the number of Casimir operators associated with any Lie group. *Physics Letters*, 20(1):62–64, 1966.
- [BH06] Amiram Braun e Charudatta R. Hajarnavis. Smooth polynomial identity algebras with almost factorial centers. *J. Algebra*, 299(1):124–150, 2006.
- [BPP06] Vyacheslav Boyko, Jiri Patera e Roman Popovych. Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(20):5749, maio 2006.
- [BPP07] Vyacheslav Boyko, Jiri Patera e Roman Popovych. Invariants of triangular Lie algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(27):7557, junho 2007.
- [Bra15] Amiram Braun. Factoriality for the reductive Zassenhaus variety and quantum enveloping algebra. *Adv. Math.*, 274:97–117, 2015.
- [BT14] Edson D. Borges e André G. Tengan. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, primeira edição, 2014.
- [CdGSG19] S. Cicalò, W. A. de Graaf, C. Schneider e T. GAP. LieAlgDB, a database of Lie algebras, Version 2.2.1. <https://gap-packages.github.io/liealgdb/>, outubro 2019. Pacote GAP revisado por pares.
- [CLO07] David Cox, John Little e Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, terceira edição, 2007. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [CMS09] S. C. Coutinho e L. Menasché Schechter. Algebraic solutions of plane vector fields. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(1):144–153, 2009.

- [Cou12] S. C. Coutinho. *Polinômios e computação algébrica*. Coleção Matemática e Aplicações. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2012.
- [CS04] Rutwig Campoamor-Stursberg. An alternative interpretation of the Beltrametti–Blasi formula by means of differential forms. *Physics Letters A*, 327(2):138–145, 2004.
- [Dai10] Daniel Daigle. Triangular derivations of $\mathbf{k}[X, Y, Z]$. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(7):1173–1180, 2010.
- [DF01] Daniel Daigle e Gene Freudenburg. Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]$. *J. Algebra*, 241(1):328–339, 2001.
- [dG05] W. A. de Graaf. Classification of solvable Lie algebras. *Experiment. Math.*, 14(1):15–25, 2005.
- [dG07] Willem A. de Graaf. Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2. *J. Algebra*, 309(2):640–653, 2007.
- [Dix57] J. Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. *Bull. Soc. Math. France*, 85:325–388, 1957.
- [Dix96] Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Reimpressão revisada da tradução de 1977.
- [dJS23] Vanderlei Lopes de Jesus e Csaba Schneider. The center and invariants of standard filiform Lie algebras. *J. Algebra*, 628:584–612, 2023.
- [Duf77] Michel Duflo. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(2):265–288, 1977.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, segunda edição, 2010.
- [FG10] Antoni Ferragut e Héctor Giacomini. A new algorithm for finding rational first integrals of polynomial vector fields. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9(1-2):89–99, 2010.
- [Fre13] Gene Freudenburg. Foundations of invariant theory for the down operator. *J. Symbolic Comput.*, 57:19–47, 2013.
- [Fre17] Gene Freudenburg. *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, volume 136 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2017. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII.
- [GAP22] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Versão 4.12.2*, 2022.

- [GLSW18] Georg Grasegger, Alberto Lastra, J. Rafael Sendra e Franz Winkler. Rational general solutions of systems of first-order algebraic partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 331:88–103, 2018.
- [GMNS19] Adrián Gordillo-Merino, José Navarro e Pedro Sancho. A remark on the invariant theory of real Lie groups. *Colloq. Math.*, 156(2):295–300, 2019.
- [GR14] Michel Goze e Elisabeth Remm. Contact and Frobeniusian forms on Lie groups. *Differential Geom. Appl.*, 35:74–94, 2014.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Her75] I. N. Herstein. *Topics in algebra*. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont., segunda edição, 1975.
- [Hun74] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1974.
- [Iac06] Francesco Iachello. *Lie algebras and applications*, volume 708 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Kap57] Irving Kaplansky. *An introduction to differential algebra*, volume No. 5 of *Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago [Publications of the Mathematical Institute of the University of Nancago]*. Hermann, Paris, 1957. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1251. [Current Scientific and Industrial Topics].
- [Kem11] Gregor Kemper. *A course in commutative algebra*, volume 256 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [Kna02] Anthony W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, segunda edição, 2002.
- [Kon99] Maxim Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. volume 48, pages 35–72. 1999. Moshé Flato (1937–1998).
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, terceira edição, 2002.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, segunda edição, 2013.
- [Mad00] Adolf Mader. *Almost completely decomposable groups*, volume 13 of *Algebra, Logic and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000.
- [Mor96] Patrick Morandi. *Field and Galois theory*, volume 167 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996.

- [NS02] Mara D. Neusel e Larry Smith. *Invariant theory of finite groups*, volume 94 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Oom09] Alfons I. Ooms. Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *J. Algebra*, 321(4):1293–1312, 2009.
- [Oom12] Alfons I. Ooms. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven. *J. Algebra*, 365:83–113, 2012.
- [QR20] Alban Quadrat e Georg Regensburger. Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients. In *Algebraic and symbolic computation methods in dynamical systems*, volume 9 of *Adv. Delays Dyn.*, pages 87–114. Springer, Cham, [2020] ©2020.
- [Rob90] Paul Roberts. An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert’s fourteenth problem. *J. Algebra*, 132(2):461–473, 1990.
- [RSU22] José L. Vilca Rodríguez, Csaba Schneider e Hamid Usefi. The isomorphism problem for universal enveloping algebras of solvable Lie algebras. *J. Algebra*, 603:281–306, 2022.
- [SR13] Mohammad Saleem e Muhammad Rafique. *Group theory for high energy physicists*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.
- [Sage23] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.2)*, 2023.
- [Tu11] Loring W. Tu. *An introduction to manifolds*. Universitext. Springer, New York, segunda edição, 2011.
- [vdW74] Bartel Leenert van der Waerden. *Group theory and quantum mechanics*, volume Band 214 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. Traduzido do original em alemão de 1932.
- [ŠW14] Libor Šnobl e Pavel Winternitz. *Classification and identification of Lie algebras*, volume 33 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

Índice remissivo

A

Ação adjunta de um elemento de uma
álgebra de Lie 36

Álgebra

de Heisenberg 31
de invariantes polinomiais 37
de Lie 30
de Lie completamente solúvel 32
de Lie nilpotente 30
de Lie solúvel 31
de Lie subjacente 30
dos polinômios em n variáveis 23
finitamente gerada por um conjunto 23
graduada por um monoide 20
das matrizes triangulares superiores
estritas $n \times n$ 87

Anel graduado por um monoide 20

Anticomutatividade 30

Autoespaço de uma transformação linear
associado a um elemento 62

B

Base

triangular de uma álgebra de Lie
nilpotente 31
triangular de uma álgebra de Lie solúvel
32

Boa ordem 25

C

Cadeia

central superior 30
derivada 31

Campo vetorial

constante 36
de $\mathbb{F}^n$ 35
racional de $\mathbb{F}^n$ 36

Coefficiente

de um termo 22
líder de um polinômio 26

Colchete de Lie 30

Componente

homogêneo da decomposição em termos
do grau 24
homogêneo da decomposição em termos
do peso 64

Conjunto

algebricamente independente 23
algébrico afim associada a um ideal 27
algébrico irredutível 28
bem ordenado 25
multiplicativo 21
parcialmente ordenado 24
totalmente ordenado 24

Corpo

das funções racionais de uma variedade
afim 28
de frações de um domínio integral 21
graduado 21
graduado de um domínio 21

Curva integral (ou característica) de uma
derivação 40

D

Derivação

adjunta de um elemento de uma álgebra		L	
de Lie	36	Localização de um anel com relação a um	
associada a uma matriz	60	conjunto multiplicativo	21
de uma álgebra	32		
linear em $\mathbb{F}(x_n)$	59	M	
localmente nilpotente	47	Mapa de avaliação de um polinômio	23
triangular com respeito a um conjunto		Método das características	40
algebricamente independente	47	Monômio	
triangularizável	47	líder de um polinômio	26
Dimensão de Krull de um anel	21	nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ associado a α	21
Domínio integral	21	Morfismo de variedades afim	28
Down operator	56		
E		N	
Elemento		Núcleo de um derivação	34
homogêneo de grau φ	20		
minimal	25	O	
Espaço tangente de $\mathbb{F}^n$ em um ponto	35	Ordem	
Exemplo de Bass	48	lexicográfica	25
		monomial	24
F		parcial	24
Fibrado tangente	35	total	24
Folheação de dimensão k de uma variedade			
43		P	
Forma normal		Peso de um monômio com respeito a uma	
de Hermite	69	transformação linear diagonal	62
de Jordan	61	Polinômio homogêneo	24
Fórmula de Beltrametti-Blasi	80		
Função racional de uma variedade afim	28	S	
		Sistema triangular	
G		crescente de funções racionais	29
Grau		crescente de polinômios	26
de transcendência	24	decrecente de funções racionais	29
de um monômio	22	decrecente de polinômios	26
total de um polinômio	22	Subespaço gerado por um conjunto	63
		Suporte	
I		de um polinômio	22
Ideal		de um termo	22
de aniquilação de um conjunto em $\mathbb{F}^n$	28		
Identidade de Jacobi	30	T	
Integral primeira	18	Teorema	
Isomorfismo de variedades afim	28	de Duflo	13
		Termo	
		líder de um polinômio	26

nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ associado a α	22	V	
Topologia de Zariski para $\mathbb{F}^n$	27	Variedade afim	28