

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Tiago de Souza Mendonça

**NOVA CLASSE DE CÉLULAS COM
DESCONTINUIDADE FORTE EMBUTIDA PARA
ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Belo Horizonte

2021

Tiago de Souza Mendonça

**NOVA CLASSE DE CÉLULAS COM
DESCONTINUIDADE FORTE EMBUTIDA PARA
ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto

Coorientador: Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Belo Horizonte

2021

M539n	Mendonça, Tiago de Souza. Nova classe de células com descontinuidade forte embutida para análise de propagação de fissuras pelo método dos elementos de contorno [recurso eletrônico] / Tiago de Souza Mendonça. – 2021. 1 recurso online (194 f. : il., color.) : pdf. Orientador: Rodrigo Guerra Peixoto. Coorientador: Gabriel de Oliveira Ribeiro. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia. Apêndices: f. 189-194. Bibliografia: f. 174-188. 1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Análise numérica – Programas de computador – Teses. 3. Simulação por computador – Teses. 4. Métodos de elementos de contorno – Teses. I. Peixoto, Rodrigo Guerra. II. Ribeiro, Gabriel de Oliveira. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. VI. Título. CDU: 624(043)
-------	---



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

"NOVA CLASSE DE CÉLULAS COM DESCONTINUIDADE FORTE EMBUTIDA PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO"

Tiago de Souza Mendonça

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro - DEES - UFMG (Coorientador)

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula - DEES - UFMG

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG

Prof. Dr. Edson Denner Leonel - USP - SC

Prof. Dra. Francisco Célio de Araújo - UFOP

Belo Horizonte, 10 de fevereiro de 2021



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitangueira, Professor do Magistério Superior**, em 10/02/2021, às 20:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel de Oliveira Ribeiro, Professor Magistério Superior - Voluntário**, em 10/02/2021, às 20:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Amorim de Paula, Professor Magistério Superior - Voluntário**, em 10/02/2021, às 20:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 10/02/2021, às 20:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Denner Leonel, Usuário Externo**, em 11/02/2021, às 10:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Celio de Araujo, Usuário Externo**, em 11/02/2021, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0546633** e o código CRC **6A2F28CA**.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Rodrigo Guerra Peixoto e Gabriel de Oliveira Ribeiro pela orientação, apoio e conselhos.

À Maria do Carmo de Souza Alves, minha mãe, que sempre incentivou os meus estudos.

À minha madrinha Expedita Maria de Souza e à minha irmã Suzi de Souza Mendonça que sempre estiveram presentes e dispostas a ajudarem no que fosse preciso.

Ao Grupo Científico Ramatís e à Doutora Zélia Savala Rezende Brandão que me ajudaram a trilhar o caminho até aqui.

À Maria Ana Nery e Auxiliadora Pinto Coelho pela amizade, convívio e aconselhamentos que muito contribuíram na minha trajetória acadêmica.

Aos colegas do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, em especial aos engenheiros Danilo Bento Oliveira, Juliano dos Santos Becho, Leandro Lopes da Silva e Lucas Figueiredo Grilo pela amizade e convivência agradável.

Aos professores e funcionários do departamento de engenharia de estruturas que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Às agências brasileiras CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro à pesquisa.

RESUMO

Ao longo dos últimos anos tem ocorrido um grande avanço no estudo numérico de falhas materiais em meios sólidos, incentivado pelo aumento dos recursos computacionais disponíveis. Deste modo, diversas técnicas vem sendo criadas com o objetivo de averiguar o comportamento de materiais sujeitos a sobrecarga e, portanto, prever o colapso estrutural. Neste sentido, destacam-se a mecânica da fratura elástica linear, os modelos discretos ou coesivos, os modelos de fissuração distribuída, os meios contínuos enriquecidos e a aproximação contínua de descontinuidades fortes. Esta última técnica, por sua vez, tem ganhado um crescente destaque, pois permite que modelos constitutivos contínuos, equipados com uma lei de amolecimento, sejam compatíveis com a presença de campos de deslocamentos descontínuos e, conseqüentemente, com o surgimento de deformações ilimitadas. Deste modo, o presente trabalho adota a formulação implícita do método dos elementos de contorno para análise bidimensional de falhas materiais utilizando a aproximação contínua de descontinuidades fortes. O objetivo principal é a eliminação do fenômeno de travamento de tensões comumente presente em análises numéricas empregando células com saltos uniformes para o campo de deslocamentos. Estas células não são capazes de representar o movimento rotacional relativo entre suas partes que são divididas pela linha de descontinuidade, induzindo uma rigidez irreal na resposta estrutural. Deste modo, uma nova classe de células com saltos não-uniformes para o campo de deslocamentos é apresentada de modo a capturar adequadamente o movimento de rotação relativo entre as partes da célula e, por conseguinte, eliminar o travamento de tensões. Além disto, é utilizado um algoritmo de geração automático de células que acompanha a linha de descontinuidade à medida que os critérios de falha ou bifurcação vão sendo atingidos. As implementações serão realizadas no sistema INSANE (INteractive Structural Analysis Environment) que é desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, seguindo o paradigma de programação orientado a objetos segundo a linguagem Java.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno; aproximação contínua de descontinuidades fortes; células não-uniformes com descontinuidade embutida.

ABSTRACT

Over the past few years there has been a major advance in the numerical study of material failures in solid medium incentivized by the increase in available computing resources. Thus, several techniques were created with the objective of ascertaining the behavior of materials subject to overload and, therefore, to predict structural collapse. In this sense, the linear elastic fracture mechanics, the discrete or cohesive models, the smeared crack models, the enhanced continuous models and the continuum strong discontinuity approach stand out. The latter technique, in turn, has been gained increasing prominence because it allows that continuous constitutive models, equipped with a softening law, to be compatible with the presence of discontinuous displacement fields and, consequently, with the emergence of unlimited strains. Thus, the present work adopts the implicit formulation of the boundary element method for two-dimensional material failure analysis using the continuum strong discontinuity approach. The main objective is the elimination of the stress locking phenomenon commonly present in numerical analysis using cells with uniform displacement jumps. These cells are not able to represent the relative rotational movement between their parts that are divided by the discontinuity line, inducing an unreal rigidity in the structural response. In this way, a new class of cells with non-uniform displacement jumps will be created in order to adequately capture the relative rotational movement between the parts of the cell and, therefore, eliminate the stress locking. In addition, an automatic cell generation algorithm that follows the discontinuity line as the failure or bifurcation criteria are reached is used. Finally, the implementation is performed in the INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) system that is developed by the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais and that follows the object oriented programming paradigm according to the Java language.

Keywords: boundary element method; continuum strong discontinuity approach; non-uniform cells with embedded discontinuity.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
CMSD	Crack Mouth Sliding Displacement
CSDA	Continuum Strong Discontinuity Approach
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EIC	Equação Integral para Deslocamentos no Contorno
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
INSANE	Interactive Structural Analysis Environment
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
POO	Programação Orientada a Objetos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
XBEM	Método dos Elementos de Contorno Estendidos
XFEM	Método dos Elementos Finitos Estendidos

LISTA DE SÍMBOLOS

A^*, A^{cp}, a, b, c	Constantes escalares.
b_i	Forças de corpo.
$c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$	Termo livre para equações integrais de deslocamentos no contorno.
D	Variável de dano escalar para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\mathbf{e}}_k$	Direções principais de deformação.
E_{ijkl}	Tensor constitutivo secante: $(1 - D)E_{ijkl}^o$.
E_{ijkl}^o	Tensor constitutivo elástico linear para materiais isotrópicos.
E_{ijkl}^t	Tensor constitutivo tangente.
f_i	Vetor referente à equação de equilíbrio na interface descontínua.
f_t	Resistência à tração.
$\bar{F}(\epsilon_{ij}, r)$	Função de dano no espaço das deformações.
$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon}$	Termo livre das equações integrais de deformações em pontos internos com campos de deformação inicial.
$\bar{G}(\Delta[[u_i]], \Delta\alpha^*)$	Função de dano discreta.
G_f	Energia de fratura.
G_{SD}	Energia liberada em $\mathcal{S}$, por unidade de área, durante o regime de descontinuidade forte.
h	Espessura de banda de localização.
h_B	Espessura de banda de localização no instante de bifurcação.
H	Módulo de endurecimento-amolecimento para modelos constitutivos contínuos.

$\bar{H}$	Módulo de amolecimento discreto ou intrínseco.
H^{crit}	Módulo de amolecimento crítico para modelos constitutivos contínuos (condição de bifurcação).
$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$	Função de Heaviside com salto sobre $\mathcal{S}$.
$\mathcal{H}_{\Omega_b}$	Função de rampa linear em Ω_b .
J	Integral J .
$\mathcal{J}(\eta)$	Jacobiano da transformação de coordenadas nos elementos de contorno em problemas bidimensionais.
$\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2)$	Jacobiano da transformação de coordenadas nas células internas em problemas bidimensionais.
k	Fator escalar (≈ 0) de regularização numérica da função $\delta_{\mathcal{S}}$ no regime de descontinuidade forte.
l^*	Comprimento característico para leis de evolução da variável de dano.
m_i^d	Vetor unitário referente à direção do salto no campo de velocidades.
$M^\alpha(\eta_1, \eta_2)$	Funções de interpolação da geometria nas células internas (α é um índice relativo aos vértices da célula).
$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^\varphi(\mathbf{X})$	Função com valores não nulos apenas se $\mathbf{X} \in \Omega_\varphi$.
n_i	Vetor unitário normal a uma determinada superfície.
$N_1(\bar{\xi}), N_2(\bar{\xi})$	Funções de interpolação dos saltos no campo de deslocamentos.
$N^\gamma(\eta)$	Funções de interpolação da geometria e das variáveis nos elementos de contorno (γ é um índice relativo aos pontos de interpolação).
P_1, P_2	Pontos de colocação no interior das células.

P_N	Ponto fictício posicionado ortogonalmente a partir da linha de descontinuidade e a uma distância unitária de P_1 .
$\mathcal{P}$	Potência consumida num processo de deformação quase-estático.
$\mathcal{P}_\mathcal{S}$	Potência consumida no desenvolvimento do campo de deslocamentos.
q	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos.
q^*	Variável interna discreta do tipo tensão.
q_B	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
q_{SD}	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
$q_\mathcal{S}$	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre $\mathcal{S}$.
Q_{ij}	Tensor de localização ou tensor acústico.
Q_{ij}^e	Tensor de localização elástico.
r	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos.
r_o	Valor da variável interna do tipo deformação correspondente ao limite de proporcionalidade elástica.
r_B	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
r_{SD}	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
$r_\mathcal{S}$	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$	Superfície (ou linha, para problemas bidimensionais) de descontinuidade.
t	Tempo.
t_B	Instante de tempo referente à bifurcação.
t_{SD}	Instante de tempo referente ao início do regime de descontinuidade forte.
t_i	Vetor força de superfície ($t_i = \sigma_{ij}n_j$).
$\mathfrak{t}_i$	Forças de superfície prescritas (condições de contorno naturais).
$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: força de superfície na direção j , no ponto $\mathbf{X}$, em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
u_i	Campo de deslocamentos.
$\bar{u}_i$	Parte regular de um campo de deslocamentos.
$\hat{u}_i$	Parte regular de um campo de deslocamentos após reformulação da cinemática com descontinuidades.
$\mathfrak{u}_i$	Deslocamentos prescritos (condições de contorno essenciais).
$\llbracket u_i \rrbracket$	Componentes do salto no campo de deslocamentos.
$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: deslocamento na direção j , no ponto $\mathbf{X}$, em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
$\mathcal{W}_S$	Energia total consumida desde o início do regime de descontinuidade forte até o alívio total das tensões.
$\mathbf{X}$	Coordenadas dos pontos materiais. Pontos de campo nas equações integrais.
$\dot{\alpha}^m$	Escalar correspondente à magnitude do salto no campo de velocidades.

$\dot{\alpha}^*$	Evolução da variável interna do modelo constitutivo discreto.
β	Parâmetro escalar que define a taxa de crescimento do tamanho das células no algoritmo de geração automática.
δ_{ij}	Delta de Kronecker (1 para $i = j$; 0 para $i \neq j$).
$\delta_{\mathcal{S}}$	Delta de Dirac sobre $\mathcal{S}$.
$\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$	Delta de Dirac sobre o ponto $\boldsymbol{\xi}$.
$\Delta[[u_i]]$	Evolução das componentes do salto no campo de deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte.
$\Delta\alpha^*$	Variável interna do modelo constitutivo discreto.
ϵ_k	Componentes de deformações lineares principais.
ϵ_{ij}	Tensor de deformações lineares.
$\bar{\epsilon}_{ij}$	Parte regular (finita) do campo de deformações.
$\hat{\epsilon}_{ij}$	Parte regular do campo de deformações após reformulação da cinemática com descontinuidades.
ϵ_{ij}^+	$\sum_{k=1}^{n_{dim}} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k$.
ϵ_{ij}^{ef}	Tensor de deformações efetivas ($E_{ijkl}^{\sigma, -1} \sigma_{kl}$).
ϵ_{ij}^o	Deformações iniciais.
ϵ_{ij}^{φ}	Campo de deformações associado aos efeitos dissipativos em $\mathcal{S}$ e restrito ao subdomínio Ω_{φ} .
$\epsilon_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos sobre $\mathcal{S}$.
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos fora de $\mathcal{S}$.
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \Omega_b}$	Tensor de deformações em pontos externos à banda Ω_b .

η	coordenada paramétrica para elementos de contorno em problemas bidimensionais.
η_1, η_2	coordenadas paramétricas para células internas em problemas bidimensionais.
γ	E , para estado plano de tensões; $E/(1 - \nu^2)$, para estado plano de deformações.
Γ	Contorno de um corpo sólido.
$\dot{\lambda}$	Multiplicador de dano contínuo ($\dot{\lambda} = \dot{r}$).
$\dot{\lambda}^*$	Multiplicador de dano discreto ($\dot{\lambda}^* = \dot{\alpha}^*$).
$\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$; 0, se $\mathbf{X} \notin \mathcal{S}$.
$\mu_{\Omega_b}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \Omega_b$; 0, se $\mathbf{X} \notin \Omega_b$.
ν	Coefficiente de Poisson.
ω	Variável de dano discreta.
Ω	Domínio de um corpo sólido.
Ω^-	Subdomínio de Ω , referente à parte oposta à normal sobre $\mathcal{S}$.
Ω^+	Subdomínio de Ω , referente à parte apontada pela normal sobre $\mathcal{S}$.
Ω_b	Domínio de uma banda de localização de deformações.
Ω_{φ}	Domínio de influência da descontinuidade $\mathcal{S}$ para regularização cinemática.
$\varphi(\mathbf{X})$	Função de regularização da cinemática com descontinuidades. Distribui os efeitos da descontinuidade no subdomínio Ω_{φ} .
ψ	Energia livre de Helmholtz para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\psi}$	Energia livre para modelos constitutivos discretos.

σ_{ij}	Tensor de tensões de Cauchy.
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Função constitutiva convencional ou regularizada: tensões obtidas de um estado de deformações.
σ_{ij}^-	Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^-$.
σ_{ij}^+	Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^+$.
σ_{ij}^o	Tensões iniciais.
$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos sobre $\mathcal{S}$.
$\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos fora de $\mathcal{S}$.
$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: componentes jk de tensão, no ponto $\mathbf{X}$, em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$, aplicada na direção i .
$\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$.
τ_ϵ	Deformação equivalente.
$\tau_\Delta \llbracket u \rrbracket$	Norma da evolução das componentes de salto nos deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte com base no tensor de localização elástico ($\tau_\Delta \llbracket u \rrbracket = \sqrt{\Delta \llbracket u_i \rrbracket Q_{ij}^e \Delta \llbracket u_j \rrbracket}$).
θ	Ângulo entre $\hat{\mathbf{e}}_1$ (direção da deformação principal máxima) e o vetor normal à banda de localização de deformações no instante da bifurcação.
$\bar{\xi}$	Eixo de coordenada adimensional definido ao longo da linha de descontinuidade.
$\boldsymbol{\xi}$	Pontos fonte nas equações integrais.
$a \setminus b$	Exclusão: $a - (a \cap b)$.
$\partial_{\mathbf{q}}(\cdot), \partial_{\mathbf{p}}(\cdot)$	Derivadas direcionais em relação aos vetores unitários $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$.

$\det(\cdot)$	Determinante de $(\cdot)$.
$\langle \cdot \rangle$	Operador de Mac Auley $(= [\cdot + (\cdot)]/2)$.
$\otimes$	Operador do produto tensorial $(a_i \otimes b_j = a_i b_j)$.
$\mathcal{f}(\cdot)$	Integrais com núcleos fortemente singulares.

SUMÁRIO

1	Introdução	20
1.1	Algumas Técnicas Numéricas para Simulação de Falhas Materiais . .	34
1.1.1	Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)	35
1.1.2	Modelos Discretos ou Coesivos	39
1.1.3	Modelos de Fissuração Distribuída	40
1.1.4	Meios Contínuos Enriquecidos	41
1.1.5	Descontinuidades Fracas e Fortes	44
1.2	O Programa INSANE	58
1.3	Objetivos	59
2	Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes	61
2.1	Introdução	61
2.2	Exemplo Unidimensional Ilustrativo	62
2.3	Problema Bidimensional	64
2.3.1	Cinemática com Descontinuidades	64
2.3.2	Equações de Governo	71
2.3.3	Análise de Bifurcação Descontínua	73
2.3.4	Modelo Constitutivo de Dano Isotrópico	77
2.3.5	Modelo de Banda Variável	82
3	Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades	88
3.1	Meios Contínuos Convencionais	89
3.1.1	Teorema do Trabalho Recíproco de Betti	91
3.1.2	Equação Integral para Deslocamentos em Pontos Internos: Identidade de Somigliana	92
3.1.3	Equação Integral para Deslocamentos no Contorno (EIC) . . .	94
3.1.4	Equação Integral para Deformações Internas	97
3.2	Meios com Presença de Descontinuidades	100
3.2.1	Reformulação das Equações Cinemáticas	100
3.2.2	Formulações do Problema	102
3.2.3	Equações Integrais com Descontinuidades	103
3.3	Formulação Implícita do MEC	104

3.4	Equações Discretas	104
3.4.1	Elementos de Contorno Isoparamétricos	105
3.4.2	Equações Matriciais	106
3.5	Estratégia de Solução	110
4	Células com Campo de Deslocamentos Não-Uniformes	115
4.1	Equação de Equilíbrio da Interface Descontínua	115
4.2	Descrição das Células com Saltos de Deslocamento Não-Uniformes . .	117
4.3	Cálculo dos Saltos no Campo de Deslocamentos	120
4.4	Modelo Constitutivo Regularizado e seu Operador Tangente	123
4.5	Algoritmo Automático de Geração de Células	124
5	Resultados Numéricos	128
5.1	Tração e Flexão Simples	129
5.1.1	Tração e Flexão Simples com o Emprego de Uma Célula Interna	129
5.1.2	Tração e Flexão Simples com o Emprego de Oito Células Internas	135
5.2	Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982)	138
5.3	Viga Simétrica com Flexão em Três Pontos: Petersson (1981)	142
5.3.1	Análises com Descontinuidade Forte Direta	143
5.3.2	Análises com Modelo de Banda Variável	146
5.4	Viga Assimétrica com Flexão em Três Pontos: Ingraffea e Grigoriu (1990)	149
5.5	Chapa com Dois Entalhes Tensionada Uniaxialmente: Shi et al. (2000)	158
5.5.1	Análises com Descontinuidade Forte Direta	159
5.5.2	Análises com Modelo de Banda Variável	161
5.6	Cisalhamento com forças em quatro pontos em uma viga com dois entalhes: Bocca et al. (1990)	164
6	Considerações Finais	170
	Referências Bibliográficas	174
A	Algoritmo Completo da Estratégia de Solução	189
B	Algoritmo Completo para o Cálculo do Salto no Campo de Deslo- camentos	191

**C Modificações nas Matrizes da Formulação Implícita Associadas à
Exclusão e Geração de Novos Pontos de Colocação no Interior das
Células**

193

Capítulo 1

Introdução

Dentre os principais tipos de falhas estruturais pode-se destacar as falhas geométricas e as falhas materiais. As falhas geométricas estão associadas à perda de estabilidade espacial devido ao comportamento geometricamente não-linear da estrutura. Já as falhas materiais em meios frágeis estão relacionadas à formação de bandas de localização de deformações inelásticas em uma região de espessura muito pequena que se propagam através do domínio sólido dando origem a um progressivo amolecimento da resposta estrutural até o colapso final. A origem destas bandas se dá através da concentração de defeitos e/ou vazios micro-estruturais em um ponto material. A partir daí, elas progridem, à medida que o carregamento é imposto, até se tornarem visíveis ou macroscópicas. Deste modo, dependendo do tipo de material empregado na análise, diferentes perfis de falhas são obtidos como, por exemplo, bandas de cisalhamento em materiais dúcteis, superfícies de deslizamento na geomecânica ou trincas em materiais frágeis ou parcialmente frágeis.

O estudo de falhas materiais em engenharia é de grande importância, uma vez que possibilita prever o colapso estrutural além de permitir a determinação do comportamento pós-crítico de estruturas sujeitas a sobrecarga. Esse campo de estudo ganhou maior relevância principalmente depois da Segunda Guerra Mundial devido à grande ocorrência de catástrofes envolvendo estruturas de aviões, locomotivas e

navios mesmo quando submetidas a níveis de tensões inferiores aos prescritos pelas normas vigentes. Estes incidentes ocorreram em virtude do conhecimento ainda limitado dos efeitos da temperatura, dos concentradores de tensões e das tensões residuais, bem como ao desconhecimento do comportamento metalúrgico dos materiais empregados nas estruturas da época. Neste caso, dentre os diversos incidentes que ocorreram pode-se destacar o caso dos navios classe Liberty construídos nos Estados Unidos durante a Segunda Guerra Mundial no período compreendido entre 1941 e 1945. As estruturas destes navios eram soldadas para economizar tempo na montagem em razão da grande demanda de suprimentos que atravessavam o oceano Atlântico, realizando principalmente a rota entre EUA e Inglaterra, com o objetivo de abastecer as tropas aliadas. Além disto, os cascos destes navios eram fabricados de aço com baixa concentração de carbono que, por sua vez, se tornava frágil a baixas temperaturas. Deste modo, muitos destes navios se acidentavam devido a ocorrência de fratura frágil em seus cascos provocada pela perda de ductilidade no material do casco quando em contato com as águas frias do Atlântico Norte. Alguns destes navios fraturados podem ser observados através das figuras 1.1 à 1.4.



(a)



(b)

Figura 1.1: Fratura em navios Liberty: (a) fratura frágil em navio Liberty ainda no porto (Ferreira, 2020a), (b) navio tanque SS Schenectady fraturado (Ferreira, 2020a).



Figura 1.2: Navio tanque Charles S. Haight completamente fraturado (vista da ruptura entre a seção central do navio e a popa) (Ferreira, 2020*a*).

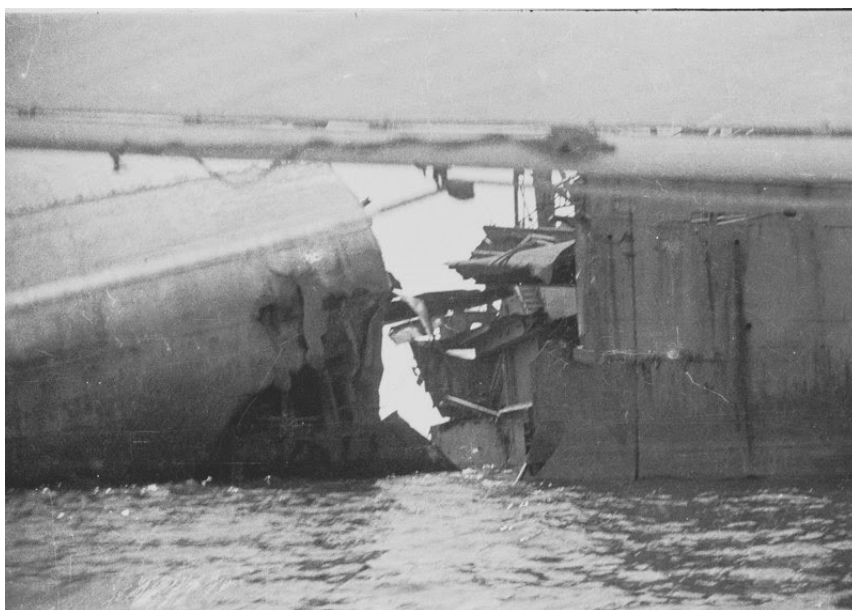


Figura 1.3: Navio tanque Charles S. Haight (detalhe do rompimento do casco) (Ferreira, 2020*a*).



Figura 1.4: Navio tanque Charles S. Haight (vista da popa adernada para bombordo) (Ferreira, 2020a).

No caso da fratura frágil, a energia necessária para propagar a fissura é normalmente baixa. Desta forma, este tipo de fratura geralmente assume grandes proporções podendo ser catastrófica como no caso dos navios Liberty. Foram construídos um total de 4694 destes navios, dos quais 1289 sofreram fratura frágil. Dentre estes, 233 tiveram falhas catastróficas, ocasionando perda completa e, em 19 casos, os navios partiram-se completamente ao meio, assim como os navios tanques SS Schenectady e o Charles S. Haight, mostrados nas figuras 1.1 à 1.4.

Outro caso de destaque ocorreu na aviação nos anos de 1950. Tratam-se dos aviões Comet, de origem inglesa, que foram os primeiros aviões comerciais no mundo a utilizarem motores a jato (figura 1.5). Eles começaram a operar em 1952 pela companhia aérea inglesa BOAC e possuíam quatro reatores nas raízes de suas asas. Esta classe de aviões foi, no início, um grande sucesso, pois voava com o dobro da velocidade quando comparados aos concorrentes da época, porém com um enorme consumo de combustível, fazendo com que suas rotas fossem sempre curtas. Entretanto, um

ano após o início de suas operações, uma destas aeronaves que decolou de Calcutá, na Índia, explodiu sobre o mar. Após breve investigação não foram encontrados maiores problemas e, deste modo, os voos continuaram normalmente até que oito meses depois um Comet que decolava de Roma se desintegrou sobre o mar, perto da Ilha de Elba, matando seus trinta e cinco ocupantes. Depois deste incidente todos os voos foram cancelados, porém, assim que foram retomados, outra aeronave se despedaçou em pleno ar, matando novamente todos os ocupantes. Após este último acidente foi realizada uma intensa investigação onde foi descoberto, finalmente, que os projetistas não tinham preparado a estrutura destes aviões adequadamente para resistirem aos vários ciclos de pressurização e despressurização que a fuselagem experimentava durante as oscilações de altitude. Estes aviões possuíam janelas grandes e quadradas cujos cantos contribuíam para uma elevada concentração de tensões. Desta forma, depois de um determinado número de voos, começavam a surgir trincas nestes cantos devido à fadiga mecânica, levando ao colapso da estrutura. Este fato foi comprovado depois que um Comet foi colocado em um tanque com água para simular a diferença de pressão atmosférica e desgaste de material, onde foi possível observar o surgimento e propagação de uma trinca no canto de uma das janelas (figura 1.6). Depois destes incidentes, todos os jatos comerciais já saíram projetados com janelas arredondadas, para eliminar concentradores de tensões que pudessem causar a fadiga e o rompimento brusco da fuselagem.



Figura 1.5: Aviões Comet: os primeiros aviões comerciais propulsionados por motores a jato a serem fabricados no mundo (Ferreira, 2020*b*).



Figura 1.6: Aviões Comet: surgimento e propagação de trinca no canto de uma de suas janelas (McGinty, 2020).

Um outro caso na aviação foi o ocorrido com o Boeing 747 da Aloha Airlines que decolou do aeroporto da cidade de Hilo, no arquipélago do Havaí, em uma breve viagem de rotina até Honolulu em 28 de abril de 1988. Durante o voo, quando a aeronave se encontrava próxima aos 7000 metros de altitude, o teto da primeira classe desapareceu no ar, devido a uma descompressão explosiva, deixando um rombo de 6 metros na fuselagem acima e ao lado da primeira fileira de assentos (figuras 1.7 e 1.8). Apesar do dano na fuselagem o piloto foi capaz de pousar seguramente no aeroporto de Kahului, em Maui. Durante as investigações foi constatado que o incidente ocorreu devido a uma combinação de corrosão e fadiga das partes mecânicas da aeronave, que tinha 19 anos de uso e mais de 89 mil voos registrados. Esta aeronave possuía um grande número de ciclos (pressurização e despressurização) por fazer voos curtos entre as ilhas do Havaí. Fato este combinado com a alta umidade do ar e os efeitos da maresia, acabaram por fragilizar o metal da fuselagem gerando corrosão e intensificando os efeitos da fadiga na estrutura.



Figura 1.7: Boeing 737 da Aloha Airlines logo após o acidente (lado esquerdo da aeronave) (Ferreira, 2020b).



Figura 1.8: Boeing 737 da Aloha Airlines logo após o acidente (lado direito da aeronave) (Swopes, 2020).

Além destes incidentes, podem-se destacar outros acidentes estruturais ocorridos por mecanismos de fraturamento em materiais dúcteis:

- i. Naufrágio do navio Titanic, em 1912;
- ii. Ruptura de um tanque de gás liquefeito em Cleveland, EUA, em 1944;
- iii. Acidentes com mísseis Polaris, na década de 50;
- iv. Acidentes com aviões $F-111$ em 1969;
- v. Ruptura do petroleiro Kurdistan em dois pedaços enquanto navegava carregado de petróleo no Atlântico norte em 1979;
- vi. Explosão no ar do ônibus espacial Challenger após decolar, em 1986.

No caso de materiais frágeis, como o concreto, pode-se destacar a ocorrência de acidentes devido à propagação de fissuras em fundações, viadutos, barragens, edificações prediais, pontes rodoviárias ou ferroviárias, dentre outros tipos de estruturas. No caso de barragens e edifícios, as consequências podem ainda ser mais graves, pois vidas podem ser perdidas se os problemas apresentados não forem resolvidos

em tembo hábil.

Neste sentido, pode-se destacar o incidente ocorrido em 1928 com a barragem St. Francis, localizada aproximadamente a 60 quilômetros ao norte de Los Angeles nos Estados Unidos. Tratava-se de uma barragem de gravidade arqueada, feita de concreto, possuindo 63.7 metros de altura e que fazia parte do sistema de abastecimento da cidade. Imagens desta barragem em plena operação podem ser vistas na figura 1.9.



(a)



(b)

Figura 1.9: Imagens da barragem St. Francis em operação (Magnus Mundi, 2021 *a*).

A barragem foi inaugurada em 1926 com 185 metros de largura e, já nos meses seguintes, começaram a surgir pequenas rachaduras na estrutura. Tal fator foi se agravando até que, dias antes de sua ruptura, trincas maiores se formaram dando origem a pequenos vazamentos de água. Após inspeções foi constatado que as fissuras não eram sinais de perigo iminente. Contudo, alguns dias depois, no dia 12 de março de 1928, a barragem não aguentou a pressão do lago artificial e se rompeu de forma súbita. Devido ao deslizamento da ombreira esquerda da barragem a estrutura em arco colapsou, levando ao esvaziamento do reservatório em pouco mais

de 1 hora. Imagens da barragem St. Francis após sua ruptura podem ser vistas na figura 1.10. Pelo menos seis cidades foram atingidas gravemente ao longo do vale San Francisquito com a força de $24 \times 10^6 m^3$ de água liberada pelo reservatório levando à morte de pelo menos 450 pessoas. Após investigações conclui-se que durante a fase de projeto foram ignoradas as características geológicas do cânion onde a barragem estava sendo construída. As rochas eram muito porosas e potencialmente instáveis. Além disto, 2 anos antes da inauguração da barragem, ainda em 1924, o projetista decidiu aumentar a altura da barragem em 3 metros sem levar em consideração um reforço estrutural para suportar a capacidade de carga extra devido ao aumento do volume do lago. E por fim, investigações posteriores apontaram que a centralização do projeto, construção e monitoramento da represa numa única pessoa foi um motivo adicional para que a catástrofe ocorresse.



(a)

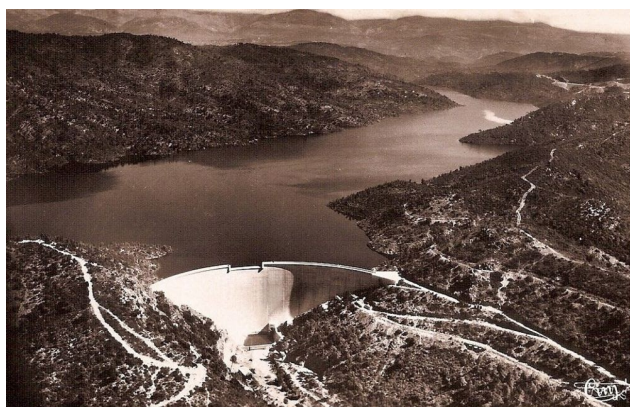


(b)

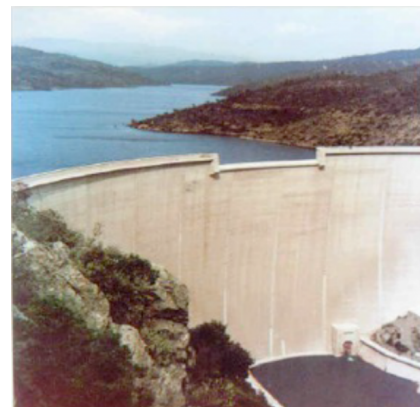
Figura 1.10: Imagens da barragem St. Francis após a ruptura (Magnus Mundi, 2021a).

Um segundo incidente de destaque foi o ocorrido em 1959 com a barragem de Malpasset localizada na França. Situava-se mais especificamente ao norte da cidade de Frejus, distrito de Cannes, próximo à costa da Riviera francesa. Esta barragem, feita de concreto, foi construída em forma de abóboda com dupla curvatura. Possuindo 60 metros de altura, sua construção começou em 1952 e foi concluída em 1954 com o intuito de regular o fluxo do rio Reyran e armazenar água para a agricultura e uso

doméstico. Imagens desta barragem em operação podem ser vistas na figura 1.11.



(a)



(b)

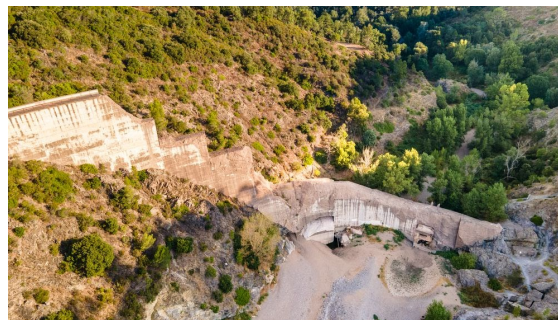
Figura 1.11: Imagens da barragem Malpasset em operação (Magnus Mundi, 2021*b*; Lessons Learned From Dam Incidents and Failures, 2021).

Pouco tempo depois da obra concluída, o primeiro enchimento do reservatório começou até que, cinco anos depois, em 1959, quando a água do reservatório ainda estava sete metros abaixo do topo, começaram a surgir pequenos vazamentos ao longo da margem direita da barragem. Naquele ano, a região sofreu chuvas superiores à média, fazendo com que a barragem atingisse seu máximo nível de operação. Com isso, na noite de 2 de dezembro de 1959 a barragem não suportou a pressão da água no reservatório e sua estrutura ruiu. Imagens da barragem Malpasset após sua ruptura podem ser vistas na figura 1.12. A onda gerada pela água chegou a quase 40 metros de altura, chegando a matar aproximadamente 423 pessoas e percorrendo 11 quilômetros até o mediterrâneo. A principal conclusão do desastre foi que era importante entender adequadamente a geologia das rochas sobre as quais a barragem foi construída. Apesar do solo onde a barragem estava implantada ter capacidade para absorver todas as forças que a barragem transmitia, a falta de mais e melhores estudos geotécnicos impossibilitou a verificação da heterogeneidade do solo numa das margens do rio. Com o aumento das forças aplicadas sobre os encontros nas

margens, devido à subida do nível da água, começou a formar-se uma fenda com uma espessura entre os 2.5 – 5.0 cm, que levou a uma rotação e um levantamento da barragem, culminando em sua ruptura.



(a)



(b)

Figura 1.12: Imagens da barragem Malpasset: (a) após a ruptura em 1959 (History by Day, 2021), (b) ruínas da barragem nos dias atuais (Magnus Mundi, 2021b).

Pode-se destacar também o incidente ocorrido com a ponte Schoharie Creek, localizada no estado de Nova York nos Estados Unidos. O projeto desta ponte foi aprovado em 1952 e sua construção foi concluída em 1954. O comprimento total da ponte era de cerca de 165 metros e consistia originalmente em 5 vãos simplesmente apoiados, variando de 30 a 36 metros de comprimento, apoiados em estruturas de pilares no meio e contrafortes nas extremidades. As estruturas do píer foram construídas com duas colunas ligeiramente cônicas e vigas de amarração. Neste caso, as colunas foram fixadas em um pedestal levemente reforçado que foi posicionado sobre uma base rasa. Contudo, na manhã de 5 de abril de 1987, após uma precipitação recorde de 150 mm, a ponte desabou repentinamente após a quebra de um dos pilares. Dois vãos da ponte caíram no riacho levando junto cinco veículos e ocasionando um total de 10 mortes. Imagens desta ponte após o acidente podem ser vistas através da figura 1.13.

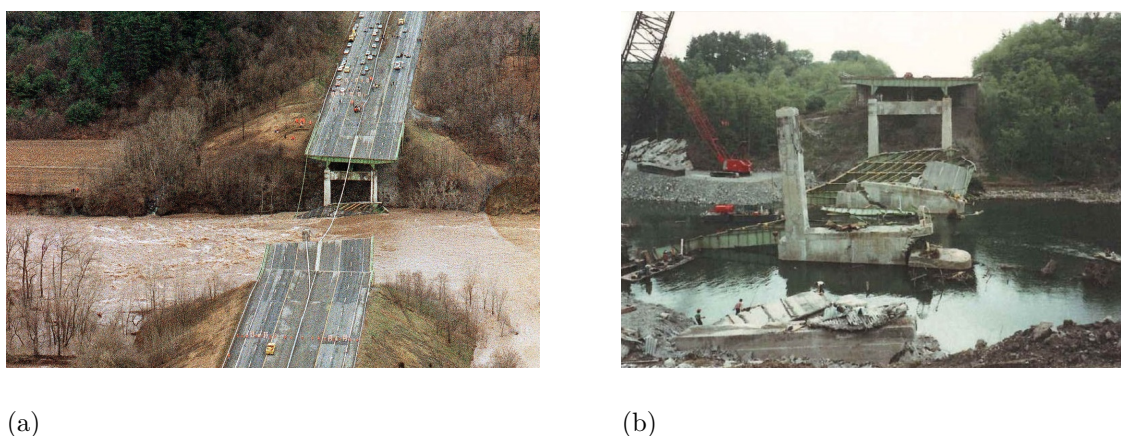


Figura 1.13: Imagens da ponte Schoharie Creek após o acidente (The New York Times, 2021; UNC Charlotte, 2021).

O colapso da ponte não aconteceu em um dia. Consistiu em uma série de eventos que levaram ao incidente. No entanto, a causa raiz do acidente foi a extensa abrasão, devido à ação da água, sob uma das bases de concreto que sustentava a ponte. Esse processo continuou até que tanto material foi removido que houve uma perda de capacidade de suporte levando ao surgimento de uma rachadura instável no pedestal e o consequente colapso da ponte. Imagens da rachadura no pedestal da ponte podem ser vistas na figura 1.14.

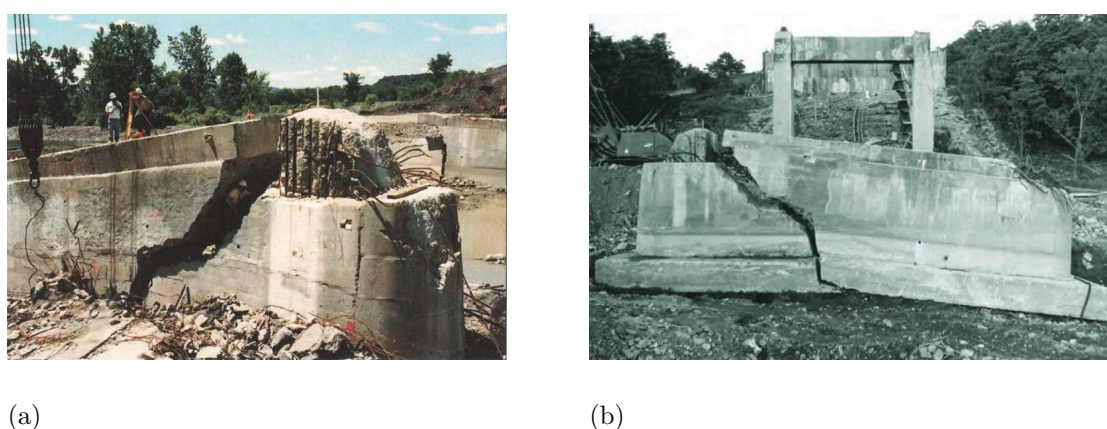


Figura 1.14: Imagens da ponte Schoharie Creek após o acidente: detalhes da rachadura no pedestal (UNC Charlotte, 2021; WJE, 2021).

Um outro incidente de destaque foi o ocorrido com a Ponte dos Remédios localizada

na cidade de São Paulo no Brasil. A sua construção começou em 1967 e sua abertura ocorreu em 1969 até que, em 03 de junho de 1997, um funcionário da Prefeitura de São Paulo notou uma pronunciada abertura entre as juntas de dilatação em uma das pistas da ponte, que liga os municípios de Osasco e São Paulo. Além disto, também foi observado um repentino crescimento de uma fissura no tabuleiro, junto a um dos pilares, que chegou a atingir 15 cm de abertura (figura 1.15a). Acionados os órgãos competentes, a ponte foi interditada, originando o grande drama que afetou o cotidiano da Cidade de São Paulo. O acidente repercutiu em todo sistema viário da região Centro/Sul, por se tratar da interligação das principais rodovias do Brasil. Sem manutenção desde sua construção, a Ponte dos Remédios se encontrava em péssimo estado de conservação (figura 1.15b), com cabos de protensão rompidos, diversas fissuras pronunciadas e falhas em juntas de dilatação, com séria possibilidade de colapso iminente.



(a)



(b)

Figura 1.15: Ponte dos Remédios: (a) rachadura no tabuleiro (Cozza, 1997), (b) deterioração da estrutura devido à falta de manutenção (de Assis, 2007).

Os acidentes estruturais apresentados mostram a importância de se considerar a

ocorrência e propagação de fissuras no projeto de diversos tipos de estruturas. Tomando como base a teoria da elasticidade e a mecânica da fratura, foram desenvolvidas soluções analíticas capazes de estimar o estado de tensões e deformações em elementos estruturais contendo falhas. Tais soluções são capazes de estabelecer a concentração de tensões em regiões próximas à ponta da trinca contribuindo para uma melhor estimativa da vida útil do componente. Contudo, estas soluções são limitadas a geometrias e carregamentos simples o que tornou necessário o emprego de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas dos parâmetros de solicitação para casos mais genéricos. Deste modo, com o aumento da tecnologia computacional disponível ocorreu um crescente avanço na pesquisa e desenvolvimento de técnicas numéricas para a análise de falhas materiais dentre as quais, as principais são apresentadas a seguir. Este desenvolvimento, por sua vez, está tornando possível a inclusão de considerações cada vez mais próximas da realidade e a obtenção de resultados cada vez mais satisfatórios na descrição do comportamento de estruturas com a presença de falhas materiais.

1.1 Algumas Técnicas Numéricas para Simulação de Falhas Materiais

Nesta seção são apresentadas as principais técnicas numéricas utilizadas na análise de falhas materiais. Contudo, deve-se notar que a fronteira entre tais técnicas não é bem definida, uma vez que diversos trabalhos disponíveis na literatura empregam conceitos de metodologias distintas.

1.1.1 Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)

Pode-se dizer que a mecânica da fratura foi a metodologia precursora na análise de falhas materiais. Esta metodologia foi incentivada, inicialmente, pelo trabalho de Kirsch (1898) que determinou, de forma analítica, a concentração de tensões em torno de um furo circular contido em uma placa infinita, de material linear elástico, solicitada uniaxialmente. Estas mesmas soluções também foram obtidas por Inglis (1913) considerando, no entanto, um furo elíptico. Neste caso, fazendo-se um dos eixos da elipse muito maior que o outro, Inglis (1913) chegou a uma configuração geométrica próxima a de uma fina trinca retilínea obtendo, desta forma, resultados aproximados para os campos de tensão na análise de fratura. Posteriormente, Griffith (1921) utilizou os resultados de Inglis (1913), adotando um critério baseado na energia de fratura, para determinar a tensão crítica de propagação de trinca. Os conceitos apresentados por Griffith (1921) serviram de base para a mecânica da fratura elástica linear onde se considera pequena a zona plástica na ponta da trinca e cujo estado de tensões é representado pelo fator de intensidade de tensões que, ao atingir o valor da tenacidade à fratura, desencadeia a propagação da fissura. Com relação ao efeito de fadiga destaca-se o trabalho de Paris et al. (1961) que desenvolveu uma teoria analítica deste fenômeno demonstrando que propagações subcríticas podem ser desencadeadas por carregamentos cíclicos, mesmo que a tenacidade não seja atingida, dada a variabilidade do fator de intensidade de tensão ao longo do processo. Já em Rice (1968) o fator de intensidade de tensão é calculado de uma forma alternativa utilizando a integral J . Neste caso, empregando o conceito de densidade de energia de deformação foi estabelecida uma integral de linha (integral J), em torno da ponta da trinca ou entalhe em estudo, que é independente do caminho de integração. Além disto, na avaliação desta integral, Rice (1968) demonstrou que a escolha de um caminho extremamente próximo ao do contorno (suave) de um entalhe

resulta uma relação direta entre a integral J e a concentração de deformações.

No âmbito da MFEL torna-se importante definir os modos de fratura em que um corpo sólido, na presença de uma trinca, pode ser solicitado. Estes modos podem ser classificados em três tipos e são apresentados através da figura 1.16. No modo I (ou modo de abertura) a solicitação ocorre na direção normal ao plano da trinca com os deslocamentos das pontas das faces da trinca também perpendiculares a este plano. Já no modo II (ou modo de deslizamento) a solicitação ocorre na direção paralela ao plano da trinca com os deslocamentos relativos na direção perpendicular à frente de trinca. E por fim, no modo III (ou modo de rasgamento) a solicitação é paralela ao plano da trinca, porém normal ao plano da chapa, com os deslocamentos relativos na direção paralela à frente de trinca. O modo I é o mais estudado devido à sua grande ocorrência em diversas aplicações práticas nos projetos de engenharia. Contudo, comumente é empregada a superposição dos três modos na análise dos chamados modos mistos que são caracterizados pela presença de solicitações mais complexas.

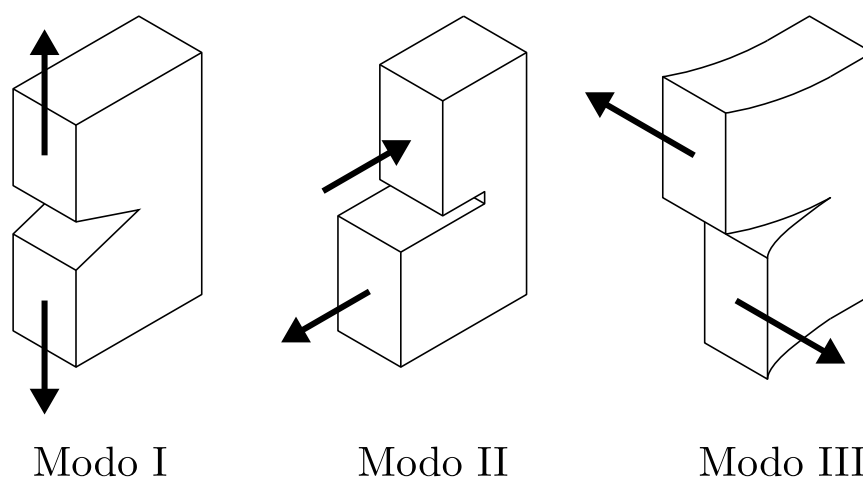


Figura 1.16: Modos de fratura.

No contexto das simulações numéricas, normalmente é utilizada a integral J para o

cálculo do fator de intensidade de tensão, tratando as superfícies de descontinuidades como fronteiras entre duas regiões elásticas. No entanto, ao serem empregados métodos numéricos baseados na discretização do domínio, como o método dos elementos finitos (MEF), devem ser considerados recursos adicionais na análise devido ao desconhecimento prévio da trajetória da trinca. Portanto, para contornar este problema, são adotados algoritmos de reconstrução de malha. Neste caso, podem-se destacar os trabalhos de Shephard et al. (1985) e Swenson e Ingraffea (1988) que empregam este tipo de algoritmo no traçado da trajetória de trincas em problemas de geometria bidimensional e na análise dinâmica de fratura para o traçado de trajetória de trincas em modo misto, respectivamente.

Também poderia ser citado o emprego do método dos elementos finitos estendidos (XFEM) no âmbito da MFEL (Belytschko e Black, 1999; Moës et al., 1999). Este método, que foi desenvolvido a partir do MEF, dispensa algoritmos de reconstrução de malha permitindo que a descontinuidade fique arbitrariamente alinhada no interior do domínio sólido. Deste modo, não há a necessidade de projeção de resultados entre diferentes malhas. Além disto, resultados mais precisos são obtidos com este método quando comparado ao MEF, mesmo com o emprego de malhas mais grosseiras, o que contribui ainda mais para um menor custo computacional. Nesta formulação, funções de enriquecimento são adicionadas localmente aos nós próximos à ponta da trinca e ao longo de sua trajetória de modo a representar o comportamento assintótico do campo de tensões nestas regiões. Neste caso, são considerados graus de liberdade extras nos respectivos nós para que seja possível a incorporação destas funções ao modelo numérico.

Com relação ao método dos elementos de contorno (MEC), destaca-se o trabalho pioneiro de Hong e Chen (1988) que apresentam equações integrais duais para a solução geral de problemas lineares elásticos em domínios finitos ou infinitos com

a presença de trincas. Nesta formulação é aplicada a equação integral dos deslocamentos em uma das faces da trinca e a equação integral das forças de superfície na outra face resolvendo, portanto, o problema de singularidade do sistema de equações algébricas que ocorre quando o MEC é aplicado diretamente. Posteriormente, Portela et al. (1992) aplicam estas equações duais no âmbito do MEC realizando uma implementação numérica efetiva para análise de propagação de trincas em problemas bidimensionais. Neste caso, à medida que ocorre a propagação, o contorno do problema vai sendo ampliado resultando, portanto, em um aumento das matrizes que compõem o sistema de equações algébricas. Deste modo, esta metodologia dispensa o uso de algoritmos de reconstrução de malha como os adotados no MEF, porém, com a desvantagem da necessidade de solução de integrais com núcleos hipersingulares.

Por fim, poderia ser citado o emprego do método dos elementos de contorno estendidos (XBEM) (Alatawi e Trevelyan, 2015). Neste método, funções de enriquecimento são incorporadas ao modelo empregando-se graus de liberdade adicionais de modo análogo ao realizado no XFEM. Neste caso, são empregadas as mesmas equações integrais do método dos elementos de contorno dual podendo-se obter, contudo, valores mais precisos para os fatores de intensidade de tensão mesmo com o uso de malhas mais grosseiras. Além disto, pode-se considerar o emprego de um enriquecimento implícito através deste método, isto é, as funções de enriquecimento podem ser embutidas na formulação do problema permitindo o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão sem a necessidade do cálculo da integral J em etapas de pós-processamento (Andrade e Leonel, 2020, 2019; Hattori et al., 2017). Esta forma implícita de enriquecimento se torna apropriada em problemas de larga escala, uma vez que permite a obtenção de resultados precisos sem a necessidade do emprego de um número elevado de graus de liberdades adicionais.

1.1.2 Modelos Discretos ou Coesivos

Nos modelos discretos ou coesivos o sólido é analisado separadamente através de duas relações constitutivas. Na interface descontínua, representada pela trinca, utiliza-se uma relação entre forças de superfície e o salto no campo de deslocamentos (separação da interface) enquanto que no restante do domínio é adotada uma relação constitutiva contínua convencional. Esta formulação foi empregada por Hillerborg et al. (1976) na análise de fratura em modo I do concreto onde foi introduzido o conceito de “modelo com trinca fictícia”. Neste caso, a zona fraturada é analisada considerando sua divisão em duas regiões distintas: uma região caracterizada pela trinca real que é incapaz de transferir tensões através de suas superfícies e uma região caracterizada por uma trinca “fictícia”, fisicamente associada à zona de processo de fratura, em que as tensões ainda podem ser transferidas. Este modelo se mostrou bastante eficiente na análise de formação e propagação de trincas empregando-se o MEF onde obteve-se resultados bastantes satisfatórios mesmo empregando malhas mais grosseiras.

Com relação a uma abordagem numérica mais geral via MEF, observa-se que resultados precisos utilizando malha fixa apenas são possíveis quando se conhece à priori a direção de propagação da trinca, com os elementos possuindo a mesma orientação da fissura. Portanto, em problemas mais complexos, com direção de propagação desconhecida, torna-se necessário a utilização de algoritmos de reconstrução de malha assim como em Ingraffea e Saouma (1985) onde foi realizada uma análise de falha em estruturas de concreto. Contudo, tal artifício é dispensável ao serem adotados elementos com descontinuidade embutida (Klisinski et al., 1991; Sancho et al., 2006; Zhang et al., 2015). Neste sentido, destaca-se o trabalho de Dvorkin et al. (1990) onde é desenvolvida uma metodologia para a solução de problemas de localização de

deformações empregando-se malhas fixas e partindo-se das ideias básicas das formulações baseadas nos modelos discretos e nos modelos de fissuração distribuída que serão discutidos adiante. Com relação ao MEC, no trabalho de Saleh e Aliabadi (1995) é utilizada a formulação dual para análise de propagação de trincas em modo I e em modo misto. Neste caso, o modelo com trinca fictícia desenvolvido por Hillerborg et al. (1976) é adotado na simulação do comportamento não-linear da zona de fratura.

1.1.3 Modelos de Fissuração Distribuída

Nos modelos de fissuração distribuída, adotados inicialmente por Rashid (1968), e mais recentemente empregados por Pirooznia e Moradloo (2020), Rimkus et al. (2020) e Costa et al. (2018), é assumido um conjunto de micro-trincas paralelas, com aberturas infinitesimais, distribuídas uniformemente ao longo dos elementos de discretização do domínio. Numericamente falando, as micro-trincas presentes nestes elementos estão associadas à deterioração das propriedades físicas do material que, após o início da fissuração, resultam em perda total de rigidez. Além disto, nestes tipos de modelos os dois comportamentos do material, contínuo e descontínuo, são tratados da mesma forma considerando, neste caso, uma abordagem contínua unificada.

Com relação à análise de fratura do concreto os modelos de fissuração distribuída podem ser classificados em 2 tipos: modelos com fissuração de direção fixa e modelos com fissuração de direção variável. No primeiro deles a trinca é formada perpendicularmente à tensão principal máxima com a orientação da fissura invariável ao longo do processo de carga. Já no segundo tipo, que foi proposto por Cope et al. (1980), admite-se a rotação das micro-trincas de acordo com a direção das deformações principais ao longo do processo de carregamento. Contudo, para este último

caso, constata-se em fases posteriores da análise o surgimento do fenômeno de travamento de tensões devido à transferência irreal de tensões entre as superfícies das trincas. Portanto, para contornar este problema, Jirásek e Zimmermann (1998) sugeriu a consideração de um modelo de dano escalar nas fases em que a abertura das trincas atingem um valor crítico, uma vez que tais modelos são isentos do fenômeno de travamento, não transmitindo, desta forma, tensões espúrias entre as superfícies das trincas.

Além dos modelos mencionados anteriormente, também foram desenvolvidos os chamados modelos com distribuição em banda com o intuito de superar as instabilidades causadas pela presença da localização de deformações à qual os modelos de fissuração distribuída estão sujeitos. Neste caso, pode-se destacar o trabalho de Bažant e Oh (1983) onde se emprega tal modelo na análise de fratura em modo I do concreto e o trabalho de Rots et al. (1985) que considera também o modo de fratura misto.

1.1.4 Meios Contínuos Enriquecidos

Assim como descrito por Pijaudier-Cabot e Benallal (1993), a análise de falhas materiais descritas por modelos constitutivos independentes do tempo é dificultada devido ao caráter não-associativo das equações que descrevem a evolução do processo de fratura e também em consequência da perda de positividade do operador tangente. Esta perda de positividade, em particular, está associada ao surgimento das bandas de localização de deformações que induzem amolecimento na resposta estrutural que, por sua vez, contribui para um mal condicionamento do problema de valor de contorno. No contexto da mecânica do contínuo, pode-se dizer que estas bandas são delimitadas por duas superfícies paralelas que apresentam descontinuidade no campo de deformações. O surgimento destas descontinuidades, neste caso, se devem à perda de elipticidade das equações diferenciais parciais de equilíbrio caracterizada pela

singularidade do tensor acústico. Tal acontecimento acarreta em uma representação insatisfatória da banda de localização de deformações devido à ausência de um fator de escala representativo da largura de banda. Deste modo, para regularizar estas equações, foram propostos os modelos contínuos enriquecidos que são caracterizados pela introdução de modificações aos meios contínuos clássicos além da inserção de um fator de escala que define o tamanho da banda de localização de deformações. Deste modo, vários tipos de enriquecimento foram propostos, dentre os quais, os principais são esboçados a seguir.

O primeiro tipo de enriquecimento a se destacar seriam os meios contínuos de Cosserat (Hageman et al., 2021; Tang, Zhu, Yang, e Papazafeiropoulos, 2021; Tang, Wei, Song, e Liu, 2021). Neste caso, são considerados graus de liberdade de rotação que são incorporados localmente aos pontos materiais complementando, desta maneira, os graus de liberdade de translação já existentes nos meios contínuos clássicos. Neste sentido, destacam-se os trabalhos de Muhlhaus e Vadoulakis (1987) e de Borst (1991). Em Muhlhaus e Vadoulakis (1987) é desenvolvida uma teoria baseada nos meios contínuos de Cosserat para a investigação da formação de bandas de cisalhamento em materiais granulares solicitados em estado plano de deformação (EPD). Já em de Borst (1991) é analisado um sólido elastoplástico onde é mostrada a independência da solução com relação ao tamanho e orientação da malha de elementos finitos na simulação de amolecimento de deformações em sólidos.

Outra forma de enriquecimento ou regularização seriam os chamados modelos constitutivos não-locais (Leclerc et al., 2020; Peixoto et al., 2019; Farahani et al., 2017), nos quais o tensor de tensões em um determinado ponto material depende não apenas do estado de deformações naquele ponto, levando-se também em conta os valores das deformações em pontos vizinhos, tomados de forma ponderada. Neste sentido, destaca-se o trabalho de Bažant et al. (1984) onde o fenômeno de amolecimento de

deformações é tratado através de um novo tipo de contínuo não-local. Neste caso, nas equações de movimento também é considerada, além da média das deformações, a média do gradiente das tensões tornando possível a obtenção de matrizes de rigidez simétricas diferentemente do que ocorre na teoria do contínuo não-local clássica. Contudo, em tal formulação todo o comportamento material é considerado como não-local, incluindo a parte elástica das deformações e, além do mais, também deve ser feita uma sobreposição com um contínuo local de forma a suprimir certos modos periódicos de energia nula. Portanto, para contornar este obstáculo, Pijaudier-Cabot e Bažant (1987) desenvolveram uma formulação não-local que é aplicada apenas às variáveis causadoras de amolecimento de deformações sendo que, o comportamento elástico, é abordado de modo local. Tal formulação foi baseada em um modelo de dano, uma vez que nestes modelos o amolecimento é controlado por apenas uma variável.

Por fim, destaca-se o enriquecimento por adição de gradientes das variáveis do modelo constitutivo convencional (Abdallah et al., 2020; Lyu et al., 2016). Neste sentido, deve-se enfatizar o trabalho de de Borst e Muhlhaus (1992) que propõe uma teoria baseada na plasticidade onde a função de escoamento depende não apenas da deformação plástica equivalente mas, também, do seu Laplaciano. Como consequência, as equação de campo preservam a sua elipticidade após o surgimento do amolecimento de deformações eliminando, deste modo, a dependência de malha comumente encontrada em modelos contínuos convencionais.

1.1.5 Descontinuidades Fracas e Fortes

Em Simo et al. (1993) foi introduzido o conceito de descontinuidade forte onde demonstrou-se a consistência de soluções apresentando saltos no campo de deslocamentos com modelos contínuos equipados com uma lei de amolecimento. Tal consistência foi verificada através da análise de um modelo de plasticidade associado unidimensional, independente do tempo, e com a presença de amolecimento linear. Além disto, foi mostrado que modelos constitutivos contínuos são compatíveis com campos de deslocamentos descontínuos, mediante regularização do módulo de amolecimento. Portanto, através desta consideração foi levado em conta a condição de consistência para mostrar que o módulo de amolecimento deve ser interpretado em um formato distribucional para que a solução possua sentido matemático chegando, deste modo, a uma equação constitutiva discreta que relaciona a taxa do salto nos deslocamentos com a taxa das tensões. Neste trabalho também foi proposta uma formulação numérica, inspirada no MEF, capaz de representar satisfatoriamente as características da solução descontínua desenvolvida. Nesta formulação a interpolação no campo dos deslocamentos foi capaz de representar adequadamente as possíveis descontinuidades e a discretização representou de forma apropriada o caráter distribucional da lei de amolecimento de modo que os resultados apresentaram uma independência da malha adotada. Por fim, a análise foi estendida a modelos de dano anisotrópicos mostrando que a formulação proposta é facilmente estendida a outros modelos constitutivos inelásticos dotados de amolecimento.

Dando continuidade a este trabalho, Simo e Oliver (1994) desenvolveram uma nova forma de derivação das leis de equilíbrio locais que se deu através da forma fraca das equações de equilíbrio, obtida através do princípio dos trabalhos virtuais. Além disto, também foram estabelecidas as condições necessárias para o surgimento de

descontinuidades fortes em modelos constitutivos de plasticidade associada e modelos constitutivos de dano isotrópico. Deste modo, foi proposta uma formulação bidimensional através do MEF que possibilitou a ativação dos requisitos necessários ao surgimento de saltos no campo de deslocamento via um enriquecimento local do campo de deformações. E por fim, para ilustrar a metodologia desenvolvida, foi analisado um problema de tração uniaxial considerando um modelo de dano isotrópico onde foi mostrado que a direção da linha de descontinuidade é consistente com os resultados teóricos. Além disso, foi verificada uma independência de tamanho e orientação da malha empregada nas simulações numéricas.

Na mesma linha dos trabalhos anteriores destaca-se o trabalho de Oliver (1995). Neste trabalho, foram extraídas as principais características qualitativas que fazem com que o modelo constitutivo em estudo seja consistente com o surgimento de descontinuidades fortes (descontinuidades no campo de deslocamentos). Além disto, foi apresentada uma cinemática mais adequada à análise proposta, isto é, o campo de deslocamentos foi descrito através de uma função composta de duas parcelas: uma parcela contínua ao longo de todo o corpo e outra parcela descontínua. Neste caso, a parcela descontínua é não-nula apenas em um pequeno subdomínio que contém a linha de descontinuidade e seu valor nesta linha é igual ao valor do salto no campo de deslocamentos. A partir de então, foi realizada a análise de descontinuidade forte em um modelo constitutivo de dano isotrópico contínuo onde foram impostas as seguintes condições: campo de tensão finito em todo o domínio da análise, continuidade do vetor de forças de superfície através da interface descontínua e determinação da normal à linha de descontinuidade, em um determinado ponto, a partir do campo de tensão no momento em que se inicia a descontinuidade. Em seguida, a análise foi estendida ao MEF considerando apenas problemas bidimensionais e elementos finitos triangulares. E por fim, foram realizadas simulações numéricas que mostraram

a eficácia da abordagem proposta.

Posteriormente, Oliver (1996*a*) e Oliver (1996*b*) utilizaram o conceito de descontinuidade forte para mostrar, de uma forma mais geral, a ligação entre as abordagens contínuas e discretas utilizadas na análise do fenômeno de localização de deformações. Deste modo, foi realizado um detalhamento mais rigoroso no que se refere ao processo de identificação das características que fazem com que os modelos constitutivos contínuos clássicos sejam compatíveis com o regime de descontinuidade forte. Desta forma, para demonstrar a generalidade da formulação desenvolvida, foi aplicada a análise de descontinuidade forte, assim como em Oliver (1995), a um modelo constitutivo de dano isotrópico e a um modelo constitutivo elastoplástico. Esta análise, por sua vez, implicou no caráter distribucional do módulo de amolecimento, na obtenção de uma relação constitutiva discreta na interface descontínua, na obtenção do salto dos deslocamentos e na obtenção do vetor normal à descontinuidade. Além disto, foi desenvolvida uma formulação numérica para problemas bidimensionais através do MEF onde campos de deslocamentos descontínuos foram adicionados aos elementos convencionais, além de ser realizada uma reformulação da cinemática do campo de deslocamentos para que as condições de contorno essenciais ficassem impostas exclusivamente à parcela contínua do campo de deslocamentos.

Nos trabalhos mencionados anteriormente o regime de descontinuidade forte foi imposto diretamente após o fim do regime elástico. Contudo, em diversos tipos de materiais, a formação da trinca macroscópica é precedida pela geração e agregação de micro-trincas que evoluem de um estado macroscopicamente contínuo até um estado descontínuo dando origem, portanto, ao conceito de zona de processo de fratura. A zona de processo de fratura, esboçada através da figura 1.17, é composta por três regiões que podem ser descritas da seguinte forma:

- i. *Zona de Falha Difusa*: região onde tem início os processos dissipativos sem,

contudo, a presença de descontinuidades no campo de deslocamentos ou deformações;

- ii. *Zona de Descontinuidade Fraca*: região de localização de deformações delimitada por superfícies de descontinuidade. Os deslocamentos, entretanto, permanecem contínuos. Esta região também é designada por banda de localização de deformações e sua espessura (dimensão ao longo da direção horizontal na figura 1.17) varia ao longo do processo de carregamento;
- iii. *Zona de Descontinuidade Forte*: região caracterizada pela presença de descontinuidades macroscópicas. Ou seja, neste caso o campo de deslocamentos é descontínuo e as deformações são ilimitadas.

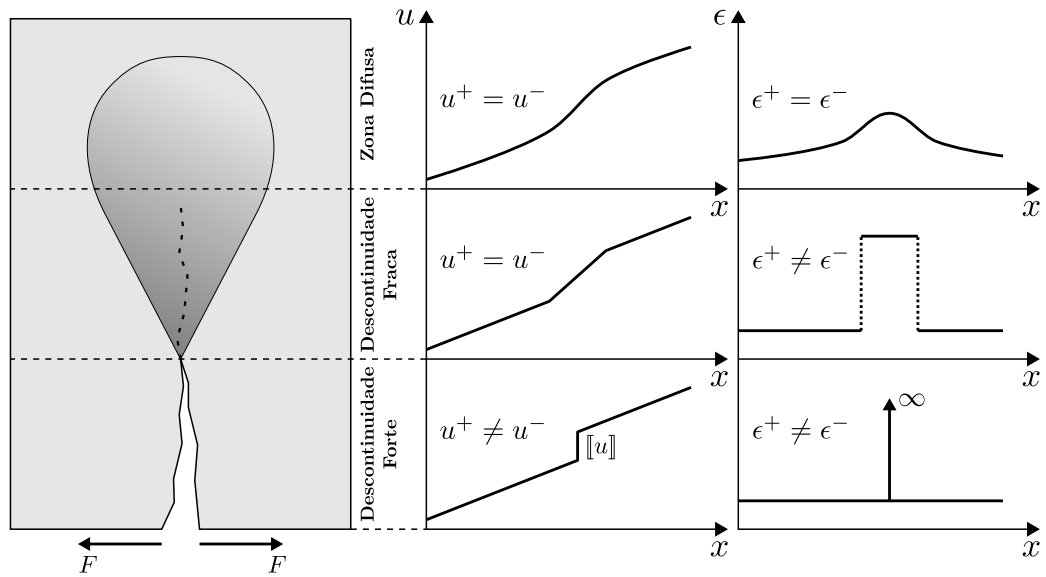


Figura 1.17: Regiões da zona de processo de fratura (u : deslocamento, ϵ : deformação).

Isto é, para uma melhor representação da zona de processo de fratura deve ser considerada uma fase transitória, anterior ao regime de descontinuidade forte, além de ser estabelecido um procedimento eficaz que permita prever a origem e direção da banda de localização de deformações. Neste sentido, destacam-se os trabalhos de Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1998) e Oliver et al. (1999) que adotaram a

singularidade do tensor acústico como condição necessária para a bifurcação descontínua dos campos de tensão e deformação. Neste caso, a bifurcação descontínua é caracterizada pela presença de carregamento com amolecimento, dentro da banda de localização, e a ocorrência de descarregamento elástico (ou carregamento neutro) na região adjacente. A singularidade do tensor acústico está associada à minimização de um funcional que envolve o módulo de amolecimento do modelo constitutivo e as possíveis orientações da banda de localização. Desta forma, em Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1998) e Oliver et al. (1999) este problema foi resolvido obtendo-se expressões analíticas, restritas a modelos constitutivos específicos e bidimensionais, para o módulo de amolecimento crítico, bem como para a direção da banda de localização. Já com relação à problemas tridimensionais (3D) vale destacar o trabalho de Oliver e Huespe (2004b) onde tais expressões foram obtidas para modelos constitutivos elastoplásticos e de dano isotrópico a partir de uma interpretação geométrica do problema. Portanto, neste momento podem ser enfatizadas as duas principais metodologias associadas à determinação da origem da descontinuidade:

- i. A origem da descontinuidade é determinada pelo fim do regime elástico através da consideração de um critério de escoamento ou dano. Neste caso, a direção da descontinuidade é obtida a partir do estado de tensões ou deformações neste instante, ou seja, no caso de materiais frágeis adota-se, usualmente, a direção ortogonal à tensão principal máxima;
- ii. A análise de bifurcação descontínua é empregada na determinação da origem e direção da descontinuidade.

Deste modo, ressalta-se neste ponto que a metodologia aqui descrita possui mais meios de dissipação de energia quando comparada, por exemplo, à MFEL. Isto é, além de descrever os mecanismos de dissipação na formação da trinca propriamente

dita (zona de descontinuidade forte) ela também é capaz de representar a formação da zona de falha difusa e zona de descontinuidade fraca que também dissipam energia durante o processo de carregamento. No caso da MFEL, o único meio de dissipação de energia ocorre através da separação das superfícies que dão origem à trinca. Neste caso, não são consideradas perdas de energia na formação da zona plástica que surge na ponta da trinca, tornando esta técnica limitada a casos em que esta zona é pequena. Para casos onde a consideração de análise linear-elástica não é válida, pode-se empregar o conceito da integral J que permite estender a teoria da mecânica da fratura. No entanto, uma das limitações do emprego da integral J é que ela foi desenvolvida considerando a hipótese de material elástico não-linear, o que a torna válida apenas para carregamentos monotônicos. Para demonstrar essa hipótese, a figura 1.18 apresenta o comportamento à tração de um material elástico não-linear, um material parcialmente frágil e um material elastoplástico. Como pode ser observado, para o caso de carregamento monotônico crescente, os três materiais seguem a mesma curva tensão-deformação ($\sigma \times \epsilon$). Porém, caso ocorra descarregamento, o material elástico não-linear irá retornar pela mesma curva enquanto que o material parcialmente frágil seguirá uma curva de descarregamento linear em direção à origem do eixo de coordenadas e o material elastoplástico seguirá uma curva de descarregamento também linear, porém com inclinação igual ao seu módulo de elasticidade. Neste caso, uma análise que pressuponha comportamento elástico não-linear permanece válida para carregamentos em meios elastoplásticos e/ou meios parcialmente frágeis caso não ocorra descarregamento.

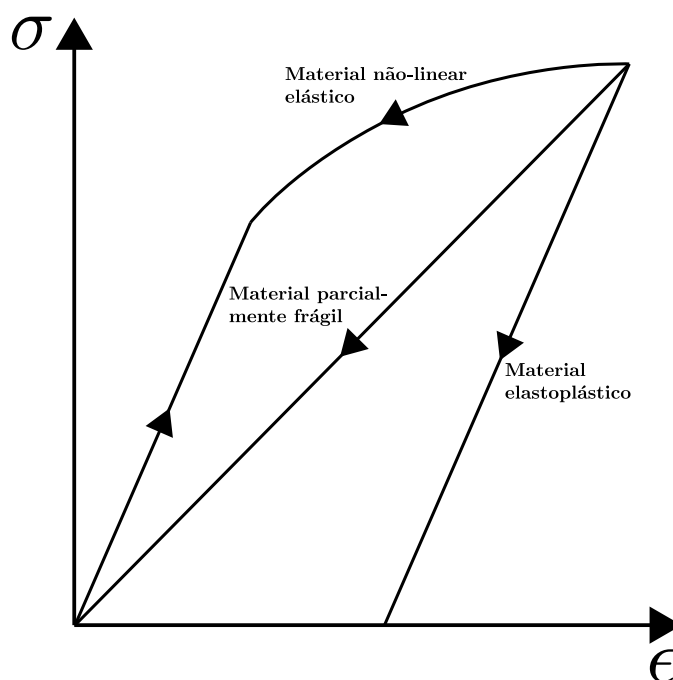


Figura 1.18: Comparação do comportamento ($\sigma \times \epsilon$) de materiais elásticos não-lineares, materiais parcialmente frágeis e materiais elastoplásticos.

Nos trabalhos de Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1998) e Oliver et al. (1999) também foi demonstrado que, em geral, as chamadas condições de descontinuidade forte não são satisfeitas no momento da bifurcação necessitando, desta maneira, de uma fase transitória representada pelo regime de descontinuidade fraca. Tais condições são obtidas através da análise de descontinuidade forte que resulta em equações de compatibilidade necessárias para o surgimento de saltos no campo de deslocamentos. Já o regime de descontinuidade fraca, como especificado anteriormente, é caracterizado por saltos no campo de deformações, porém, com o campo de deslocamentos permanecendo contínuo. Deste modo, para uma melhor representação dos diversos estágios em que um ponto material é submetido até chegar ao regime de descontinuidade forte, foi proposto nestes trabalhos um modelo de banda variável com a banda de localização tratada através de uma cinemática regularizada. Nesta cinemática a espessura da banda fica determinada por uma fator escalar, h , de modo

que, quando $h \rightarrow 0$, a cinemática de descontinuidade forte é naturalmente obtida.

Posteriormente, nos trabalhos de Oliver (2000) e Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002) foi aplicada a análise de descontinuidade forte, assim como em trabalhos anteriores, considerando modelos constitutivos elastoplásticos e de dano isotrópico. Contudo, através dessa análise foi desenvolvida uma metodologia sistemática capaz de obter não apenas a equação constitutiva discreta, mas um modelo constitutivo discreto completo composto por um conjunto de equações que descrevem o comportamento da interface descontínua. Deste modo, a metodologia proposta mostrou-se como um possível meio de unificação das técnicas contínuas, baseadas no fenômeno de localização de deformações, com as técnicas discretas (ou coesivas) que são baseadas na mecânica da fratura não-linear.

Diferentemente dos trabalhos anteriores, onde foi considerado o regime de deformações infinitesimais, em Armero e Garikipati (1996) e Oliver, Huespe, Pulido, e Samaniego (2003) o conceito de descontinuidades fortes foi aplicado a regimes de grandes deformações. Particularmente no primeiro, foi desenvolvida uma metodologia através do MEF, utilizando modelos constitutivos de plasticidade e considerando a inserção do regime de descontinuidade forte diretamente após a bifurcação do campo de tensões e deformações. Para demonstrar sua metodologia foi realizada a análise numérica de um corpo bidimensional (adotando-se estado plano de deformações) sob tração, utilizando o critério de escoamento J2. Os resultados obtidos apresentaram uma ótima representação das descontinuidades fortes além de apresentarem uma não dependência de orientação e tamanho da malha. Já em Oliver, Huespe, Pulido, e Samaniego (2003) foi aplicada a análise de descontinuidade forte em um modelo constitutivo de dano isotrópico contínuo que, por sua vez, é uma extensão do modelo em regime de pequenas deformações apresentado por Oliver (2000). Neste caso, a cinemática de descontinuidades foi desenvolvida considerando

a decomposição multiplicativa do gradiente do campo de deformações como proposto por Armero e Garikipati (1996). Além disto, foi realizada uma análise de bifurcação e foi adotado um modelo de banda variável para contemplar a transição entre as descontinuidades fracas e fortes.

O conceito de descontinuidades fortes também foi considerado em outros tipos de aplicações. Neste sentido, destaca-se o trabalho de Larsson et al. (1996) que emprega a cinemática de descontinuidades desenvolvida em trabalhos anteriores para a determinação das condições necessárias ao surgimento de uma banda de localização em um solo poroso não-drenado. O solo foi considerado como sendo a mistura de duas fases: uma fase sólida, de comportamento elastoplástico, e uma segunda fase que representa os poros do solo preenchidos de fluido. Já com relação às simulações numéricas, que foram realizadas através do MEF utilizando elementos triangulares, foi desenvolvida uma formulação variacional mista baseada no enriquecimento do campo de deformações de modo a captar descontinuidades neste campo, bem como no campo de pressão exercido pelo fluido.

Uma vez estabelecida a geração e a direção da descontinuidade, deve ser determinado um critério que estabeleça a trajetória de propagação ao longo do domínio sólido. Neste sentido, destacam-se os trabalhos de Oliver e Huespe (2004a) e Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves (2002) que classificaram estes critérios em dois grupos:

- i. Propagação local;
- ii. Propagação global.

Na propagação local uma única linha de descontinuidade (ou superfície de descontinuidade para o caso tridimensional) é determinada ao longo do domínio sólido. Isto é, considerando o caso bidimensional, a descontinuidade assume a forma de uma linha reta dentro do elemento e se propaga ao longo da malha à medida que o

critério de falha vai sendo atingido nos elementos finitos adjacentes. Desta forma, a trajetória de descontinuidade assume um formato poligonal ao longo da malha. Além disto, também é considerado o caráter material da linha de descontinuidade, isto é, uma vez que tal linha é estabelecida sua direção permanece fixa ao longo da análise. Assim sendo, elementos finitos com descontinuidade embutida necessitam ser considerados apenas ao longo da trajetória da linha de descontinuidade contribuindo, desta forma, para um menor tempo de processamento numérico, uma vez que tais elementos são dotados de graus de liberdade adicionais para captar o salto no campo de deslocamentos. No entanto, apesar de ser uma estratégia simples e intuitiva, a aplicação a problemas com múltiplas linhas de descontinuidades e problemas tridimensionais se torna complexa e menos apropriada, resultando em perda de grande parte da robustez numérica (Oliver, Huespe, Blanco, e Linero, 2006).

Na estratégia global são determinadas de uma só vez todas as candidatas a linhas de descontinuidade (no caso bidimensional) ou superfícies (no caso tridimensional) e posteriormente, através de um critério de falha, são definidas quais destas linhas ou superfícies estão ativas. Deste modo, as possíveis direções das linhas e superfícies de descontinuidades são determinadas através das iso-linhas de um função potencial escalar que é definida ao longo de todo o domínio. Além disto, neste tipo de estratégia o algoritmo não necessita de informações dos elementos vizinhos tornando-o, desta forma, mais robusto para o tratamento de múltiplas linhas de descontinuidades.

Diferentes formulações podem ser empregadas na obtenção de elementos finitos com descontinuidade embutida. Neste sentido, uma revisão detelhada foi apresentada por Jirásek (2000) que, levando em consideração o tipo de enriquecimento empregado nas equações cinemáticas e a forma de imposição da condição de equilíbrio interno na interface descontínua, classificou as formulações em três tipos: formulação simétrica estaticamente consistente, formulação simétrica cinematicamente consistente

e formulação não-simétrica estaticamente e cinematicamente consistente. Na primeira formulação, a relação cinemática é relaxada para garantir simetria da matriz de rigidez. Neste caso, não se consegue representar adequadamente a cinemática de uma trinca completamente aberta, porém, a condição de continuidade na interface descontínua é satisfatoriamente reproduzida. Já na segunda formulação, a condição de equilíbrio é relaxada para a obtenção da simetria da matriz de rigidez. Deste modo, a cinemática é descrita adequadamente, contudo, a condição de continuidade não é rigorosamente atendida. E por fim, na terceira formulação, a equação de continuidade das forças de superfície na interface descontínua é introduzida em sua forma forte nas equações variacionais do problema resultando, portanto, em uma matriz de rigidez tangente não-simétrica que consegue reunir as vantagens das duas formulações anteriores além da não necessidade de especificação da largura da banda de localização de deformações. Contudo, a principal desvantagem desta formulação seria a perda de simetria da matriz de rigidez tangente.

Neste sentido, pode-se destacar ainda o trabalho de Oliver, Huespe, e Samaniego (2003) que apresentou um estudo comparativo entre as formulações não-simétrica estaticamente e cinematicamente consistente e a formulação simétrica estaticamente consistente. Neste trabalho foi constatado que em análises numéricas utilizando elementos finitos baseados na formulação simétrica estaticamente consistente ocorre o fenômeno de travamento de tensões caracterizado pelo surgimento de um ramo de endurecimento após o pico teórico na curva tensão x deslocamento. Este fenômeno ocorre devido à ausência do esperado descarregamento elástico nas regiões próximas à interface descontínua após a bifurcação. Os autores associaram este fenômeno aos polinômios de aproximação das deformações contínuas e descontínuas dentro do elemento que, por apresentarem ordens diferentes, raramente se cancelam gerando, deste modo, um aumento irreal das tensões. Para contornar este problema foram

desenvolvidos dois novos elementos baseados na formulação simétrica estaticamente consistente. No primeiro elemento o termo regular do campo de deformações assumiu a forma de um polinômio de grau zero, ou seja, uma parcela constante. Já o segundo elemento foi desenvolvido considerando a inclusão de uma componente adicional ao campo de deformações de modo que a parcela irregular deste campo assumisse a forma de um polinômio de grau um, ou seja, uma parcela linear. Desta forma, nas análises numéricas empregando os novos elementos foi constatada uma significativa redução do travamento de tensões além de uma boa proximidade com os resultados obtidos com o elemento baseado na formulação não-simétrica estaticamente e cinematicamente consistente. Além disto, os resultados para os dois novos elementos se mostraram bastante próximos indicando que o não cancelamento dos termos regulares e irregulares do campo de deformações está realmente associado ao travamento de tensões.

Já em Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006) foi realizado um estudo quanto à estabilidade e robustez numérica destas diferentes formulações. Em vista disso, foi constatado que a falta de robustez nas formulações de elementos finitos na análise de falhas materiais não é oriunda apenas do mal condicionamento do problema de valor de contorno e da instabilidade estrutural global. Isto é, mesmo que o problema seja matematicamente bem posto e apresente solução única, ainda é observada perda de robustez devido ao surgimento de auto-valores nulos nas matrizes de rigidez tangencial dos elementos finitos com descontinuidade embutida fazendo com que o condicionamento da matriz global seja afetado à medida que a descontinuidade se propague no meio. Neste sentido, foram identificadas as possíveis causas para o surgimento destes auto-valores nulos, isto é:

- i. A falta de simetria na formulação de elementos finitos;
- ii. A presença de amolecimento de deformações nos modelos constitutivos.

Ou seja, mesmo que a formulação de elementos finitos seja simétrica, o amolecimento de deformações no modelo constitutivo pode ser responsável pelo surgimento de auto-valores negativos nos operadores constitutivos da interface descontínua ou do meio contínuo. Portanto, essa fonte de instabilidade numérica seria removida se o caráter positivo-definido dos operadores constitutivos fosse assegurado em qualquer ponto do domínio. Os autores propuseram uma formulação simétrica, combinada com um procedimento de integração que torna o operador constitutivo tangencial positivo-definido, removendo assim as fontes responsáveis pela falta de robustez da aproximação por descontinuidades fortes. Foram realizadas simulações numéricas em problemas bidimensionais e tridimensionais que mostraram a eficácia da metodologia proposta, além de uma diminuição do custo computacional mesmo nos problemas que poderiam ser resolvidos com esquemas de integração padrão implícitos.

Além do MEF também foram considerados outros métodos numéricos na aproximação contínua de descontinuidades fortes. Destacam-se aqui os trabalhos de Oliver, Huespe, e Sánchez (2006), Mariani e Perego (2003), Belytschko et al. (2001) e Wells e Sluys (2001) que empregam o XFEM e os trabalhos de Manzoli e Venturini (2004, 2007) que adotam a formulação implícita do MEC na análise de fratura em estruturas de concreto. Nestes dois últimos trabalhos foram empregados modelos constitutivos elastoplásticos associativos, juntamente com uma lei de amolecimento exponencial, para representar o comportamento não-linear da interface descontínua. Foram tratados problemas bidimensionais cujos domínios foram discretizados em células triangulares com aproximações constantes para o salto no campo de deslocamentos. Neste caso, apenas as células interceptadas pela linha de descontinuidade são acionadas e, por conseguinte, contabilizadas nas equações do problema. Também é importante ressaltar que nestes trabalhos o regime de descontinuidade forte

foi imposto diretamente ao fim do regime elástico com a direção da linha de descontinuidade sendo perpendicular à tensão principal máxima.

Já em Pedrini (2008) foi constatado que em análises numéricas utilizando a formulação implícita do MEC, com malhas de células triangulares pré-definidas, podem ocorrer problemas de instabilidades na solução da equação não-linear que dá origem às componentes dos saltos no campo de deslocamentos. Esta formulação foi adotada nos trabalhos de Manzoli e Venturini (2004, 2007). Deste modo, foi proposta a utilização de um algoritmo automático de geração de células triangulares que acompanham a propagação da fissura. Neste caso, a célula triangular gerada possui orientação tal que o vetor normal ao lado não interceptado pela fissura é paralelo ao vetor normal à linha de descontinuidade resolvendo, portanto, os problemas citados.

O mesmo algoritmo desenvolvido por Pedrini (2008) foi empregado também no trabalho de Manzoli et al. (2009) na análise de estruturas de concreto. Contudo, vale destacar que Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009) utilizaram um modelo constitutivo de dano isotrópico ao invés dos modelos elastoplásticos empregados por Manzoli e Venturini (2004, 2007). Além disto, da mesma forma que em Manzoli e Venturini (2004, 2007), nos trabalhos de Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009) foram empregadas células com saltos constantes para o campo de deslocamento com a introdução direta do regime de descontinuidade forte ao fim do regime elástico.

Posteriormente, Peixoto et al. (2018) e Peixoto et al. (2017) analisaram problemas de fratura bidimensionais em estruturas de concreto utilizando um algoritmo de geração automática de células, semelhante, porém não idêntico, ao apresentado por Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009). No entanto, diferentemente dos trabalhos de Manzoli e Venturini (2004, 2007), Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009), foi considerada a análise de bifurcação como critério para definir a origem da localização de deformações além da adoção de uma fase transitória com descontinuidades fracas precedendo

ao regime de descontinuidades fortes. Neste caso, também foram adotadas células com saltos de deslocamentos uniformes em seu interior, porém, diferentemente de Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009), foi considerada uma geometria quadrilateral para o formato das células.

O MEC apresenta uma série de vantagens na análise de problemas de fratura quando comparado a métodos de domínio. Neste caso, pode-se destacar uma maior precisão na avaliação dos campos internos, a eliminação dos efeitos de bordas em problemas cujos domínios possam ser aproximados por regiões infinitas ou semi-infinitas e a necessidade de discretização apenas do contorno do problema caso, por exemplo, a formulação dual seja empregada. Deste modo, o custo computacional se torna bastante reduzido contribuindo para um menor tempo de processamento numérico. No caso de serem empregadas células internas esta última vantagem ainda se torna válida, uma vez que apenas as regiões que apresentam efeitos dissipativos (região fissurada) necessitam de ser discretizadas.

Dentre as desvantagens no emprego do MEC pode-se destacar a necessidade do cálculo de soluções fundamentais para cada caso (2D/3D) e a necessidade de solução de integrais com núcleos apresentando diversos graus de singularidades. Este último fato é uma das grandes dificuldades do método, uma vez que integrais com diferentes graus de singularidade necessitam de diferentes técnicas para sua integração.

1.2 O Programa INSANE

As implementações numéricas desta tese foram realizadas no programa Insane (*Interactive Structural ANalysis Environment*). Este programa é desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas

Gerais (UFMG) empregando-se a linguagem *Java* segundo o paradigma de programação orientado a objetos (POO). Ele é vinculado ao grupo de pesquisa de *Simulação Numérica e Computacional na Mecânica dos Sólidos e das Estruturas* e é composto de diversos métodos numéricos, dentre os quais se encontra o Método dos Elementos de Contorno. Este método foi inicialmente implementado segundo os trabalhos de Anacleto, T. S. A. Ribeiro, G. O. Ribeiro, Pitangueira, e Penna (2013), Anacleto, Peixoto, Pena, G. O. Ribeiro, Pitangueira, e T. S. A. Ribeiro (2013), Anacleto et al. (2012) e Anacleto et al. (2011). Posteriormente o método foi estendido ao estudo de falhas materiais empregando a análise de descontinuidades fortes (Peixoto et al., 2018, 2017) através do uso de células com descontinuidade forte embutida. Em vista disso, o presente trabalho tem a intenção de seguir esta mesma linha de pesquisa aperfeiçoando estas células com o intuito de alcançar uma representação mais fidedigna da resposta estrutural na simulação de propagação de fissuras em meios que apresentem comportamento frágil ou parcialmente frágil.

1.3 Objetivos

Nesta tese será empregado o MEC juntamente com a metodologia conhecida como *Continuum Strong Discontinuity Approach* (CSDA) ou, em português, *Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes*, na análise de propagação de fissuras em meios frágeis e/ou parcialmente frágeis. Comparativamente ao emprego da formulação dual, na utilização do MEC com a CSDA a malha do contorno é fixa não necessitando ser refeita à medida que a fissura progride no interior do domínio sólido. Além disto, o enriquecimento de células convencionais em programas comerciais pode ser realizado de forma mais eficaz, uma vez que existe um desacoplamento entre a discretização do contorno e a do domínio, tornando a expansão e reutilização de códigos pré-existentes mais simples e direta. Porém, no caso de meios heterogêneos

ainda dificilmente será possível evitar a discretização de todo o domínio, visto que é necessário considerar no modelo as diferentes propriedades do material. Contudo, pode-se pensar posteriormente em utilizar técnicas de sub-regiões para a modelagem de meios não-homogêneos de modo a evitar este tipo de discretização.

Deste modo, a presente tese tem como objetivo dar continuidade aos trabalhos de Peixoto et al. (2018) e Peixoto et al. (2017) cujas implementações numéricas se encontram no programa Insane descrito previamente (seção 1.2). Assim como nestes trabalhos, será empregada a formulação implícita do MEC, bem como um algoritmo automático de geração de células que acompanha a trajetória da fissura ao longo do domínio sólido. Nos trabalhos de Peixoto et al. (2018) e Peixoto et al. (2017) foram empregadas células com descontinuidade embutida, capazes de representar apenas saltos uniformes para o campo de deslocamentos em seu interior. Análises empregando este tipo de célula apresentam o fenômeno de travamento de tensões que está associado a uma rigidez irreal na resposta estrutural devido à inabilidade das células uniformes em representar o movimento rotacional relativo entre suas partes divididas pela linha de descontinuidade. Portanto, a grande contribuição desta tese é o desenvolvimento de células com descontinuidade embutida, capazes de representar saltos não-uniformes para o campo de deslocamentos em seu interior. Células não-uniformes não apresentam o fenômeno de travamento de tensões, o que as tornam mais adequadas na representação do movimento de abertura da fissura que ocorre durante o processo de carregamento ao longo da análise não-linear.

Deste modo, a célula desenvolvida neste trabalho tem aplicação em problemas de fratura bidimensional cujos meios sejam homogêneos, considerando os modos de abertura I , II e/ou modo misto. Além disto, a presente formulação permite a análise de problemas com múltiplas linhas de descontinuidade, além de ser facilmente expansível a outros modelos constitutivos.

Capítulo 2

Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes

2.1 Introdução

Neste capítulo é desenvolvida a fundamentação teórica necessária para a consideração de descontinuidades em modelos constitutivos contínuos, independentes do tempo e em regime de deformações infinitesimais. Inicialmente é considerado um problema unidimensional com o intuito de ilustrar a falta de unicidade na solução de problemas de fratura quando empregados modelos constitutivos contínuos dotados de amolecimento na representação de bandas de localização de deformações. Em seguida, para o caso bidimensional são desenvolvidas as cinemáticas de descontinuidades fracas e fortes e uma cinemática regularizada capaz de representar os dois regimes de descontinuidades através de um único conjunto de equações.

Posteriormente, são apresentadas as equações de governo do problema de valor de contorno além de ser realizada a análise de bifurcação descontínua caracterizada pelo surgimento de uma banda de localização de deformações. Desta forma, também é realizada a análise de descontinuidade forte onde são determinadas as condições necessárias para a compatibilidade do modelo constitutivo com as cinemáticas de descontinuidades desenvolvidas. Por fim, é apresentado o modelo de banda variável

onde é estabelecida a transição entre os dois regimes de descontinuidades, além de ser calculada a energia consumida no regime de descontinuidade forte, ou seja, a energia consumida no processo de formação da trinca.

2.2 Exemplo Unidimensional Ilustrativo

O emprego de modelos constitutivos contínuos dotados de amolecimento na representação de bandas de localização de deformações em problemas de fratura, resulta em falta de objetividade quanto ao refino de malha nas soluções numéricas. Para ilustrar este comportamento emprega-se aqui um exemplo unidimensional ilustrativo, como apresentado por Jirásek (2007).

Considera-se inicialmente uma barra de comprimento L e seção transversal constante de área A , tal que L seja muito maior que as outras duas dimensões da barra. Esta barra é tensionada uniaxialmente conforme ilustrado na figura 2.1. O material da barra é homogêneo e obedece a uma relação constitutiva linear elástica até atingir a tensão de pico, f_t . Após este ponto uma lei de amolecimento linear é considerada. A deformação da barra ao atingir a tensão de pico é de $\epsilon_o = \frac{f_t}{E}$, sendo E o módulo de elasticidade. Já a deformação atingida pela barra no ponto em que a mesma se torna incapaz de transferir tensões é denominada por ϵ_f .

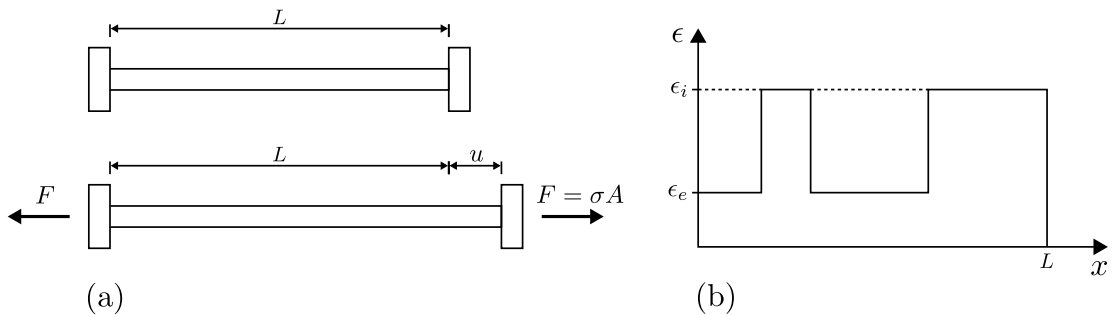


Figura 2.1: (a) Barra sob tração, (b) distribuição de deformações, contínuas por partes.

Considera-se agora que a barra seja tracionada uniaxialmente através da imposição

de um deslocamento crescente, u , em sua extremidade direita. O comportamento da barra permanecerá linear elástico até que o deslocamento $u_o = L\epsilon_o$ seja atingido. Neste instante a força transmitida pela barra ao seu suporte atinge o valor máximo de $F_o = Af_t$. A partir deste ponto a resistência da barra começa a decrescer sendo que, a cada seção transversal, a tensão pode decrescer acompanhada de um decréscimo na deformação (descarregamento elástico) ou a tensão pode decrescer acompanhada de um aumento na deformação (amolecimento linear). A imposição da condição de equilíbrio estático implica que a tensão deve permanecer uniforme ao longo de toda a barra. Contudo, para um determinado estado de tensão $\bar{\sigma}$, entre 0 e f_t , existem dois valores possíveis de deformações que atendem a relação constitutiva (figura 2.2). Neste caso, a distribuição de deformações não precisa necessariamente manter-se uniforme, podendo assumir uma configuração arbitrária, contínua por partes variando entre ϵ_e e ϵ_i , conforme ilustrado na figura 2.1b.

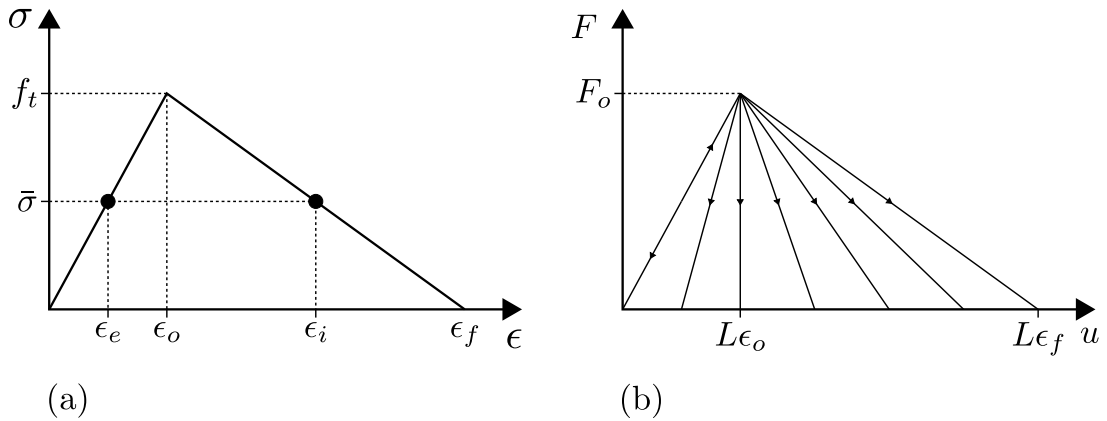


Figura 2.2: (a) Diagrama tensão-deformação com amolecimento linear, (b) diagrama força-deslocamento com diferentes comportamentos pós-pico admissíveis.

À medida que o deslocamento é imposto na barra a tensão decai até 0 fazendo com que a deformação na região inelástica seja $\epsilon_i = \epsilon_f$ e a deformação na região com descarregamento elástico atinja valor nulo, $\epsilon_e = 0$. Denotando-se por L_i e

$L_e = L - L_i$ os comprimentos relativos às regiões com amolecimento e com descarregamento elástico, respectivamente, tem-se que o alongamento total da barra neste instante será dado por $u_f = L_i\epsilon_i + L_e\epsilon_e = L_i\epsilon_f$. Contudo, o comprimento L_i pode assumir qualquer valor entre 0 e L sendo, portanto, indeterminado. No caso das soluções numéricas, este comprimento pode ser associado ao tamanho dos elementos de discretização adotados. Desta forma, o problema apresenta infinitas soluções possíveis fazendo com que o comportamento pós-pico da curva carga $\times$ deslocamento assuma o aspecto apresentado na figura 2.2b. As soluções limítrofes são representadas pelo caso de amolecimento total ($L_i = L$, $u_f = L\epsilon_f$) e pelo caso de descarregamento elástico ($L_e = L$, $u_f = 0$). Este último caso representa a situação onde o descarregamento ocorre imediatamente antes do surgimento de qualquer amolecimento de modo que não haja nenhuma dissipação de energia. Neste caso, todas as outras soluções apresentam um processo de degradação estrutural onde parte da barra apresenta dano em algum grau.

2.3 Problema Bidimensional

2.3.1 Cinemática com Descontinuidades

Nesta seção são desenvolvidas as cinemáticas de descontinuidades fracas e fortes para o caso bidimensional. Deste modo, tendo em vista a figura 2.3, admite-se inicialmente um sólido bidimensional de domínio Ω interceptado por uma linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ cuja orientação é definida através do vetor normal unitário n_i . Esta linha divide o sólido nos subdomínios Ω^+ e Ω^- , tal que n_i aponta para Ω^+ . Além disto, a linha de descontinuidade está contida em uma banda de localização de deformações Ω_b que, por sua vez, é delimitada pelas linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$. Em vista disto, e para uma melhor compreensão da geometria da banda de localização de

deformações Ω_b e da orientação das linhas $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$, também é considerado um sistema de coordenadas curvilíneas definido por $\{\chi, \zeta\}$. Este sistema de coordenadas, de base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_\chi, \hat{\mathbf{e}}_\zeta\}$, possui fatores de escala $r_\chi(\chi, \zeta)$ e $r_\zeta(\chi, \zeta)$, de modo que $ds_\chi = r_\chi d\chi$ e $ds_\zeta = r_\zeta d\zeta$. Neste caso, os valores de ds_χ e ds_ζ correspondem aos comprimentos infinitesimais ao longo das coordenadas χ e ζ , respectivamente.

Com base na figura 2.3, e no sistema de coordenadas definido anteriormente, as linhas $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ são definidas, respectivamente, por:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{X}(\chi, \zeta) \in \Omega \mid \zeta = 0\} \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{S}^+ := \{\mathbf{X}(\chi, \zeta) \in \Omega \mid \zeta = \zeta^+\} \quad (2.1b)$$

$$\mathcal{S}^- := \{\mathbf{X}(\chi, \zeta) \in \Omega \mid \zeta = \zeta^-\} \quad (2.1c)$$

onde o vetor $\mathbf{X}$, presente nas equações 2.1, representa o conjunto de pontos pertencentes a Ω .

Já o domínio da banda de localização de deformações, Ω_b , é definido como:

$$\Omega_b := \{\mathbf{X}(\chi, \zeta) \mid \zeta \in [\zeta^-, \zeta^+]\} \quad (2.2)$$

Além disto, adota-se um parâmetro $h(\chi)$ que define a largura representativa de Ω_b e que é comumente chamado de largura de banda. Portanto, a magnitude da largura de banda é dada por:

$$h(\chi) = r_\chi(\chi, 0)(\zeta^+ - \zeta^-) \quad (2.3)$$

Por fim, o domínio Ω é definido através da união dos domínios Ω^+ , Ω^- e Ω_b , ou seja, $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega_b$.

2.3.1.1 Descontinuidade Fraca

O regime de descontinuidade fraca, esboçado na figura 2.3, é caracterizado pela presença de um campo de deslocamentos contínuo e um campo de deformações

descontínuo, porém finito, ao longo do domínio Ω . Além disto, os saltos no campo de deformações ocorrem nas linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ que delimitam a banda de localização de deformações Ω_b .

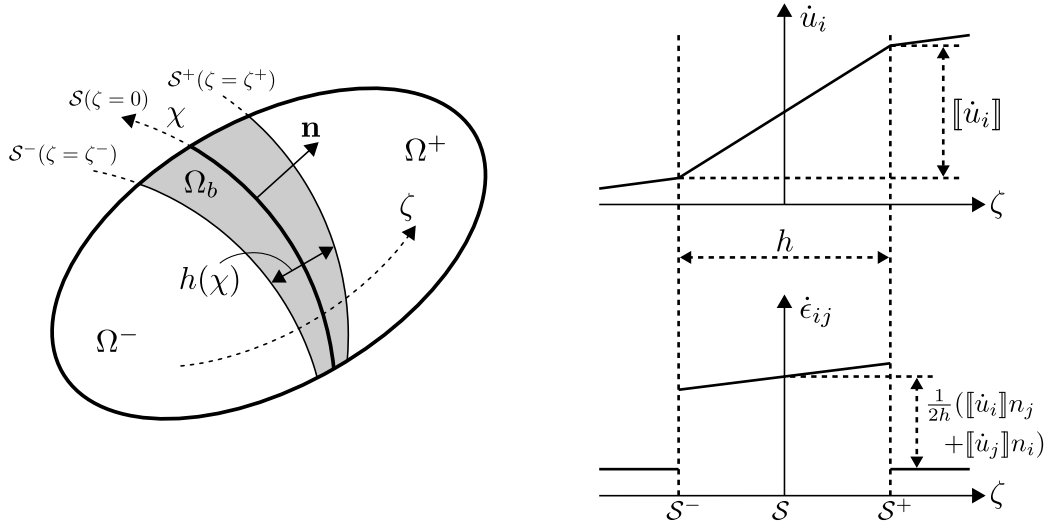


Figura 2.3: Cinemática de descontinuidade fraca.

Desta forma, admite-se o seguinte campo de deslocamentos u_i , em termos de taxa, ao longo do domínio Ω :

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\Omega_b}(\mathbf{X}, t) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

Na equação 2.4 a variável t representa o tempo, o termo $(\dot{\cdot})$ representa a derivada temporal de $(\cdot)$, as funções $\dot{\bar{u}}_i$ e $\llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t)$ representam funções contínuas de deslocamentos do tipo $\mathcal{C}^0$ e, por fim, a função $\mathcal{H}_{\Omega_b}$ representa a função rampa, contínua no domínio Ω , e definida como:

$$\mathcal{H}_{\Omega_b} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^- \setminus \Omega_b \\ 1, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^+ \setminus \Omega_b \\ \frac{\zeta - \zeta^-}{\zeta^+ - \zeta^-}, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega_b \end{cases} \quad (2.5)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$\Omega^- \setminus \Omega_b = \Omega^- - (\Omega^- \cap \Omega_b) \quad (2.6a)$$

$$\Omega^+ \setminus \Omega_b = \Omega^+ - (\Omega^+ \cap \Omega_b) \quad (2.6b)$$

Além disto, observa-se que a função rampa apresenta um salto unitário entre as linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$, ou seja, para uma mesma coordenada χ , tem-se que:

$$[\mathcal{H}_{\Omega_b}] = \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta^+, t) - \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta^-, t) = 1 \quad \forall \chi \quad (2.7)$$

Deste modo, pode-se definir o gradiente da função rampa, em sua forma estendida, conforme a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Omega_b, i} &= \frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega_b}}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{e}}_\zeta + \frac{1}{r_\chi} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega_b}}{\partial \chi} \hat{\mathbf{e}}_\chi = \mu_{\Omega_b} \frac{1}{h_\zeta} \hat{\mathbf{e}}_\zeta \\ h_\zeta(\chi, \zeta) &= r_\zeta(\chi, \zeta)(\zeta^+ - \zeta^-) \\ h_\zeta(\chi, 0) &= r_\zeta(\chi, 0)(\zeta^+ - \zeta^-) = h(\chi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na equação 2.8 o termo μ_{Ω_b} representa uma função de colocação definida sobre o domínio Ω_b , tal que as seguintes relações são válidas:

$$\mu_{\Omega_b} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega_b \\ 0, & \text{se } \mathbf{X} \notin \Omega_b \end{cases} \quad (2.9)$$

Considerando o regime de deformações infinitesimais, em conjunto com a equação 2.8, pode-se definir o campo de deformações levando-se em conta a parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos $\dot{u}_i$ (equação 2.4), isto é:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\Omega_b}}{2}([\dot{u}_{i,j}] + [\dot{u}_{j,i}]) + \frac{\mu_{\Omega_b}}{2h_\zeta}([\dot{u}_i] \hat{e}_j^\zeta + [\dot{u}_j] \hat{e}_i^\zeta) \quad (2.10)$$

Na equação 2.10 o termo $\hat{e}_i^\zeta$ refere-se às projeções de $\hat{\mathbf{e}}_\zeta$ no sistema de coordenadas cartesianas. Além disto, esta equação é caracterizada pela presença de uma parcela contínua e outra descontínua, ou seja, a parcela contínua é composta pelos dois primeiros termos à direita do sinal de igualdade e a parcela descontínua é composta

pelo último termo à direita do sinal de igualdade. Neste caso, esta última parcela representa descontinuidades de deformações nas linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$. Portanto, as equações 2.4 e 2.10 ($\dot{u}_i(\mathbf{X}, t)$ e $\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t)$) definem por completo a cinemática de descontinuidade fraca que é caracterizada por um campo de deformações descontínuo e finito no domínio Ω .

2.3.1.2 Descontinuidade Forte

A cinemática de descontinuidade forte é caracterizada como o caso limite da cinemática de descontinuidade fraca, ou seja, quando as linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ tendem para a linha de descontinuidade $\mathcal{S}$. Neste caso, a banda de localização de deformações Ω_b colapsa na linha $\mathcal{S}$ e a largura de banda $h(\chi)$ tende a zero juntamente com as coordenadas ζ^+ e ζ^- . Portanto, a cinemática de descontinuidade forte é representada através da figura 2.4.

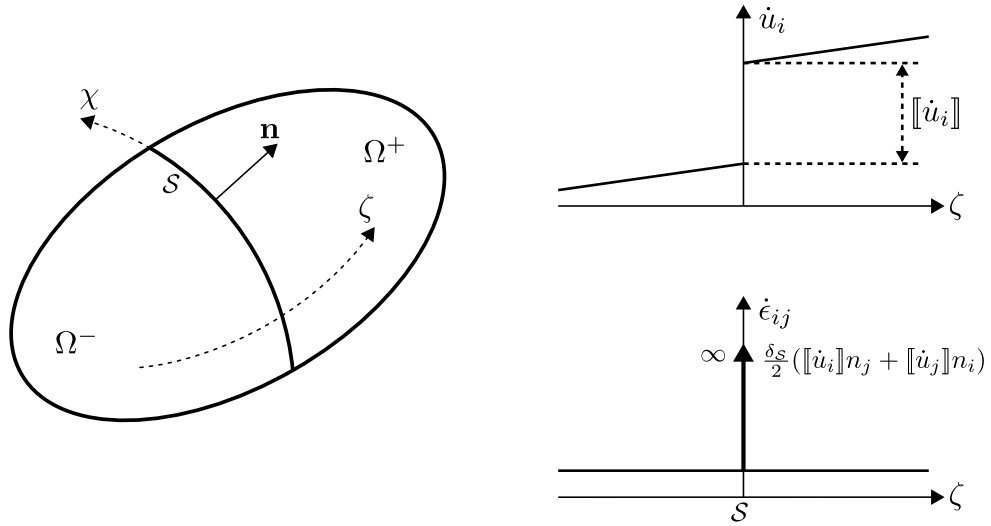


Figura 2.4: Cinemática de descontinuidade forte.

Deste modo, a função rampa $\mathcal{H}_{\Omega_b}$ assume a forma da função degrau unitário que também é chamada de função de Heaviside. Esta função é definida conforme a

seguinte expressão:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1, & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (2.11)$$

Portanto, a função que representa o campo de deslocamentos assume o seguinte formato:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (2.12)$$

Ou seja, analisando a equação 2.12, observa-se que agora o campo de deslocamentos é descontínuo ao longo da linha $\mathcal{S}$ e a magnitude da descontinuidade é dada por $\llbracket u_i \rrbracket(\mathbf{X}, t)$ que, por sua vez, representa o salto no campo dos deslocamentos. Desta forma, a partir da equação 2.12, encontra-se o campo de deformações ao longo do domínio Ω , isto é:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2}(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket) + \frac{\delta_{\mathcal{S}}}{2}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \quad (2.13)$$

Na equação 2.13 o termo $\delta_{\mathcal{S}}$ representa a função delta de Dirac ao longo da linha $\mathcal{S}$. Além disto, pode ser observado que esta equação é composta pela soma de três termos, ou seja, a soma dos dois primeiros termos representa uma parcela descontínua e finita enquanto que o último termo representa uma parcela que é infinita ao longo da linha $\mathcal{S}$.

2.3.1.3 Cinemática Regularizada

A partir de agora, define-se uma cinemática regularizada capaz de representar os dois regimes de descontinuidades em um único conjunto de equações.

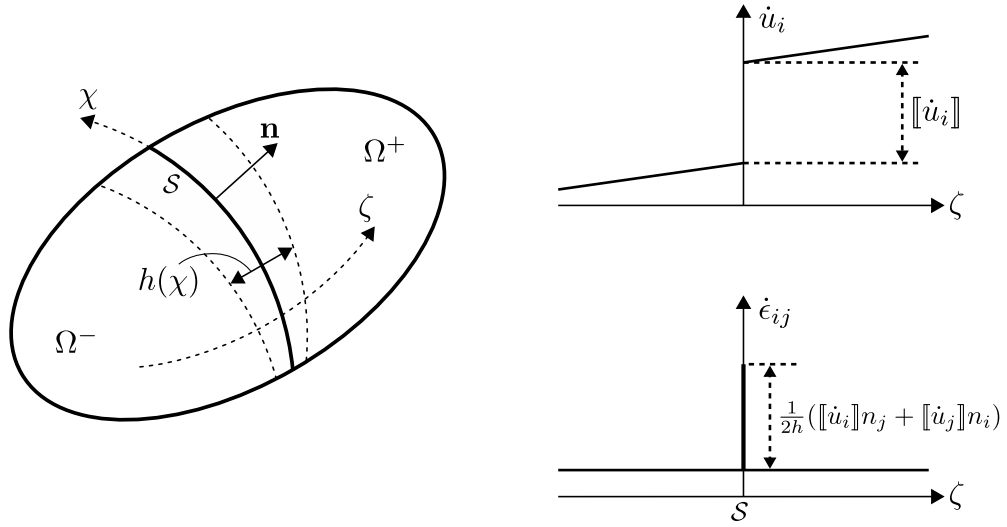


Figura 2.5: Cinemática regularizada.

Esta cinemática é esboçada através da figura 2.5, sendo definida através do seguinte conjunto de equações:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_S(\mathbf{X}) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (2.14)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_S}{2}(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket)}_{\dot{\epsilon}_{ij} \text{ (finito)}} + \underbrace{\frac{\mu_S}{2h(\zeta)}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i)}_{\llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket \text{ (infinito quando } h(\zeta) \rightarrow 0)} \quad (2.15)$$

Na equação 2.15 o termo μ_S representa uma função de colocação sobre a linha $\mathcal{S}$ onde tem-se que:

$$\mu_S = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{X} \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{se } \mathbf{X} \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.16)$$

A partir de uma análise das equações 2.14 e 2.15 é observado que estas expressões podem representar, a partir de algumas considerações, a cinemática de descontinuidade fraca. Ou seja, considerando inicialmente o campo de deslocamentos, nota-se que, se a largura de banda $h(\zeta)$ for suficientemente pequena, a equação 2.14 será compatível com a equação 2.4, uma vez que as linhas $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ estarão suficiente próximas da linha $\mathcal{S}$. Portanto, o salto no campo de deslocamentos ocorrerá ao longo de uma largura de banda extremamente pequena podendo, desta maneira,

considerar a equação 2.14 como equivalente à equação 2.4. Com relação ao campo de deformações, observa-se que a parcela $\dot{\epsilon}_{ij}$ na equação 2.15 difere da mesma parcela na equação 2.10 apenas pelo fato desta primeira apresentar a função degrau e esta última apresentar a função rampa. Além disto, o termo $\llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket$ na equação 2.15 coincide com o termo respectivo na equação 2.10. Desta forma, para uma largura de banda suficientemente pequena, a função rampa pode ser aproximada pela função degrau e, portanto, a equação 2.10 pode ser representada através da equação 2.15. Pode-se notar ainda que quando a largura de banda tende a zero ($h(\zeta) \rightarrow 0$) a cinemática definida pelas equações 2.14 e 2.15 se aproxima da cinemática de descontinuidade forte definida pelas equações 2.12 e 2.13, uma vez que o termo $\frac{\mu_S}{2h(\zeta)}$ tende à função delta de Dirac ($\frac{\mu_S}{2h(\zeta)} \rightarrow \delta_S$). No entanto, deve ser observado que a equação 2.15 não é compatível com a equação 2.14, uma vez que $\dot{\epsilon}_{ij} \neq \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$. Deste modo, a compatibilidade é alcançada apenas quando a largura de banda tende a zero ($h(\zeta) \rightarrow 0$).

Neste trabalho serão empregadas as equações 2.14 e 2.15 para descrever as cinemáticas de descontinuidade fraca e forte e, além disto, também será considerado um modelo de banda variável que é caracterizado pela evolução da banda de localização a partir de uma espessura finita h_B , no instante em que ocorre a bifurcação, até atingir valor nulo no início do regime de descontinuidade forte.

2.3.2 Equações de Governo

Serão apresentadas as equações de governo do problema de valor de contorno para meios bidimensionais que apresentam descontinuidades. Inicialmente é considerada a figura 2.6 onde é mostrado um sólido bidimensional de domínio Ω e contorno Γ . Este contorno possui orientação definida através do vetor normal ν_i que aponta para fora do domínio.

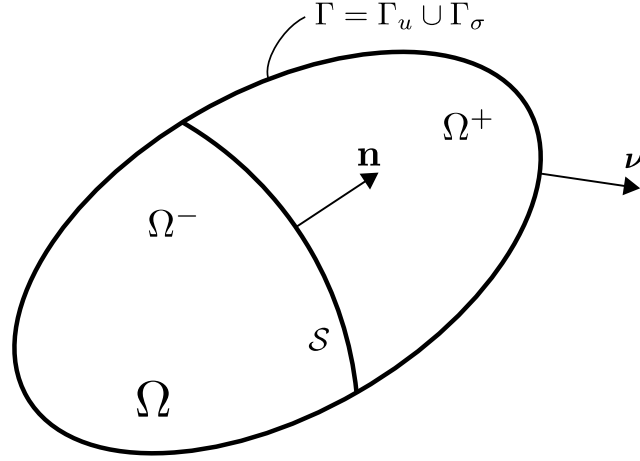


Figura 2.6: Problema de valor de contorno bidimensional.

Deste modo, as equações de governo do problema são dadas por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.17a)$$

$$u_i = \mathfrak{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.17b)$$

$$\sigma_{ij}\nu_j = \mathfrak{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.17c)$$

Na equação 2.17a, o termo b_i representa as forças de corpo atuantes no sólido e, nas equações 2.17b e 2.17c, os termos $\mathfrak{u}_i$ e $\mathfrak{t}_i$ representam, respectivamente, os deslocamentos e as forças de superfície prescritos. Já a equação 2.17b representa as condições de contorno essenciais e a equação 2.17c representa as condições de contorno naturais. Além destas equações, devem ser consideradas também as condições de equilíbrio na interface descontínua, isto é:

$$\sigma_{ij}^+ n_j = \sigma_{ij}^- n_j \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (2.18a)$$

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = \sigma_{ij}^+ n_j \quad (\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = \sigma_{ij}^- n_j) \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (2.18b)$$

As condições apresentadas pelas equações 2.18 podem ser visualizadas através da figura 2.6, onde o termo $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$ representa a tensão nos pontos pertencentes à linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ e os termos σ_{ij}^+ e σ_{ij}^- representam as tensões em Ω^+ e Ω^- , respectivamente.

Deste modo, levando-se em conta a equação 2.15, é encontrada uma equação constitutiva válida ao longo de todo o domínio Ω , ou seja:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{ij} = E_{ijkl}^t \left[(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2} (\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket) \right] \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}} &= E_{ijkl}^t (\dot{\epsilon}_{ij} + \llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket) = \\ E_{ijkl}^t &\left[\frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2} (\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket) + \frac{\mu_{\mathcal{S}}}{2h(\zeta)} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \right] \end{aligned} \quad (2.19b)$$

A equação 2.19a é válida na parte contínua do domínio ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) enquanto que a equação 2.19b é válida apenas na linha de descontinuidade ($\mathcal{S}$). Além disto, o termo E_{ijkl}^t representa o tensor constitutivo tangente que, normalmente, é dependente do campo de tensões e deformações no ponto material considerado.

2.3.3 Análise de Bifurcação Descontínua

Serão estabelecidas as condições necessárias para a ocorrência de bifurcação descontínua em meios cujo comportamento é independente do tempo considerando o regime de deformações infinitesimais. Neste caso, a bifurcação descontínua é caracterizada pelo surgimento de uma banda de localização de deformações de largura finita e é associada à perda de estabilidade do meio material. Desta forma, esta banda é delimitada por duas superfícies que apresentam descontinuidades na taxa do campo de deformações enquanto que a taxa do campo de deslocamentos permanece contínua caracterizando, portanto, o início do regime de descontinuidade fraca. Assim sendo, ao longo da análise, à medida que a largura da banda de localização se aproxima de zero, as duas superfícies se colapsam em uma linha de descontinuidade dando início ao regime de descontinuidade forte.

As condições para ocorrência de localização de deformações são apresentadas com o auxílio da figura 2.7 onde é mostrado um sólido homogêneo bidimensional de domínio Ω . Deste modo, denotando-se por ϵ_{ij} o campo de deformações ao longo

deste domínio, determinam-se as condições necessárias para que a taxa do campo de deformações ($\dot{\epsilon}_{ij}$) se torne descontínua ao longo de duas superfícies paralelas que delimitam uma banda Ω_b , tal que $\Omega_b \subset \Omega$. Portanto, inicialmente é definida uma base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ como mostrado através da figura 2.7.

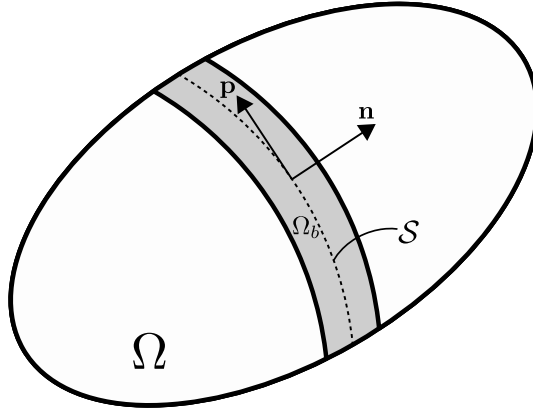


Figura 2.7: Banda de localização de deformações em um domínio sólido.

Sabendo-se que a descontinuidade no campo de deformações ocorre apenas ao longo da direção do vetor normal unitário $\mathbf{n}$, e sabendo-se ainda que a taxa do campo de deslocamentos ($\dot{u}_i$) permanece contínua, tem-se que as derivadas direcionais de $\dot{u}_i$, ao longo de $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, devem permanecer uniformes, isto é:

$$(\partial_{\mathbf{q}} \dot{u}_i)^{\Omega_b} - (\partial_{\mathbf{q}} \dot{u}_i)^{\Omega \setminus \Omega_b} = \llbracket \partial_{\mathbf{q}} \dot{u}_i \rrbracket = \llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket q_j = 0 \quad (2.20a)$$

$$(\partial_{\mathbf{p}} \dot{u}_i)^{\Omega_b} - (\partial_{\mathbf{p}} \dot{u}_i)^{\Omega \setminus \Omega_b} = \llbracket \partial_{\mathbf{p}} \dot{u}_i \rrbracket = \llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket p_j = 0 \quad (2.20b)$$

Nas equações 2.20, o termo $\llbracket \cdot \rrbracket$ representa a diferença entre os valores de $(\cdot)$ dentro (Ω_b) e fora ($\Omega \setminus \Omega_b$) da banda de localização. Além disto, os termos $\partial_{\mathbf{q}}(\cdot)$ e $\partial_{\mathbf{p}}(\cdot)$ representam as derivadas direcionais de $(\cdot)$ ao longo de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$, respectivamente. Ou seja, estas equações esboçam a uniformidade da taxa do campo de deformações ao longo das direções $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Portanto, baseado nestas equações, a não-uniformidade deste campo ao longo da direção de $\mathbf{n}$ pode ser caracterizada através da seguinte

expressão:

$$[\dot{u}_{i,j}]n_j = \dot{\alpha}^m m_i^d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [\dot{u}_{i,j}] = \dot{\alpha}^m m_i^d n_j \quad (2.21)$$

Neste caso, a equação 2.21 define uma restrição cinemática à qual a taxa de deformações está sujeita para que o surgimento do salto neste campo seja possível. Além disto, nesta equação, o termo m_i^d representa um vetor unitário associado à direção do salto no campo de deslocamentos e o termo $\dot{\alpha}^m$ está associado à magnitude deste salto. Portanto, aplicando a relação entre deslocamento e deformação à equação 2.21, encontra-se a condição de compatibilidade cinemática dada através da seguinte expressão:

$$[\dot{\epsilon}_{ij}] = \frac{1}{2}([\dot{u}_{i,j}] + [\dot{u}_{j,i}]) = \frac{1}{2}(m_i^d n_j + m_j^d n_i) \dot{\alpha}^m \quad (2.22)$$

Além da condição de compatibilidade cinemática (equação 2.22), a condição de equilíbrio também deve ser satisfeita na interface descontínua. Esta condição está relacionada à continuidade do vetor de forças de superfície ao longo da descontinuidade, ou seja:

$$[\dot{\sigma}_{ij}n_j] = [\dot{\sigma}_{ij}]n_j = 0 \quad (2.23)$$

Isto é, as equações 2.22 e 2.23 são condições necessárias para o surgimento de localização de deformações no meio material. Deste modo, considerando a relação constitutiva incremental para modelos constitutivos independentes do tempo, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.24)$$

Assume-se que um único tensor constitutivo tangente, representado por E_{ijkl}^t , descreve o comportamento do material dentro e fora da banda de localização (bifurcação

contínua). Ou seja, utilizando a relação constitutiva incremental (equação 2.24), juntamente com a equação de compatibilidade cinemática (equação 2.22), encontra-se:

$$\llbracket \dot{\sigma}_{ij} \rrbracket = E_{ijkl}^t \llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket = \frac{E_{ijkl}^t}{2} (m_i^d n_j + m_j^d n_i) \dot{\alpha}^m \quad (2.25)$$

Ou seja, a equação 2.25 representa a diferença da taxa das tensões dentro e fora da banda de localização.

Deste modo, substituindo agora a equação 2.25 na equação de equilíbrio da interface descontínua (equação 2.23), obtém-se:

$$\llbracket \dot{\sigma}_{ij} \rrbracket n_j = (n_i E_{ijkl}^t n_l) m_k^d = Q_{jk} m_k^d = 0 \quad (2.26)$$

onde o termo Q_{jk} representa o tensor de localização que também é conhecido como tensor acústico por estar associado à velocidade de propagação de ondas em meios sólidos.

Portanto, com base na equação 2.26, observa-se que o sistema de equações terá solução não-trivial ($m_k^d \neq 0$) apenas quando o determinante do tensor de localização for nulo, ou seja:

$$\det(Q_{jk}) = \det(n_i E_{ijkl}^t n_l) = 0 \quad (2.27)$$

Isto é, a equação 2.27 deve ser satisfeita para que haja bifurcação no campo de tensões e deformações.

Além da condição de bifurcação contínua (equação 2.27) também poderia ser obtida uma condição para bifurcação descontínua onde tensores constitutivos tangentes distintos descreveriam o comportamento do material dentro e fora da banda de localização. Contudo, neste trabalho, adota-se apenas a condição de bifurcação contínua, uma vez que esta corresponde a um caso limite da bifurcação descontínua e, portanto, pode ser entendida como o caso mais desfavorável para a ocorrência deste tipo de bifurcação (Rice e Rudnicki, 1980).

2.3.4 Modelo Constitutivo de Dano Isotrópico

Neste trabalho é adotado o modelo constitutivo de dano isotrópico assim como descrito em Peixoto et al. (2018). As equações que descrevem este modelo podem ser sintetizadas através das seguintes expressões:

$$\text{Energia livre: } \psi(\epsilon_{ij}, r) = [1 - D(r)]\psi_o(\epsilon_{ij}), \quad \psi_o(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} \quad (2.28a)$$

$$\text{Equação constitutiva: } \sigma_{ij} = \frac{\partial\psi(\epsilon_{ij}, r)}{\partial\epsilon_{ij}} = (1 - D)E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.28b)$$

$$\text{Variável de dano: } D \equiv D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r}, \quad D \in [0, 1] \quad (2.28c)$$

$$\text{Lei de evolução da variável interna: } \dot{r} = \dot{\lambda}, \quad \begin{cases} r \in [r_o, \infty), \\ r_o = r|_{t=0} = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \end{cases} \quad (2.28d)$$

$$\text{Critério de dano: } \bar{F}(\epsilon_{ij}, r) \equiv \tau_\epsilon - r = \sqrt{\epsilon_{ij}^+ E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}} - r \quad (\text{esp. def.}) \quad (2.28e)$$

$$\text{Condições de carreg.-descarreg.: } \bar{F} \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}\bar{F} = 0, \quad \dot{\lambda}\dot{\bar{F}} = 0 \quad (2.28f)$$

$$\text{Lei de amolecimento: } \dot{q} = H(r)\dot{r}, \quad (H = q'(r) \leq 0), \quad \begin{cases} q \in [0, r_o], \\ q|_{t=0} = r_o \end{cases} \quad (2.28g)$$

onde r é a variável interna escalar do tipo deformação ($r \in [r_o, \infty)$; $r_o = r|_{t=0}$), D é a variável de dano escalar ($D \in [0, 1]$), f_t é a tensão de resistência à tração do material, $\bar{F}$ é a função de dano definida no espaço das deformações e τ_ϵ é a chamada deformação equivalente. Neste caso, é adotado o mesmo critério de dano empregado por Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006) onde τ_ϵ é expresso como:

$$\tau_\epsilon = \sqrt{\epsilon_{ij}^+ E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}} \quad (2.29)$$

sendo:

$$\epsilon_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{n_{dim}} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.30)$$

onde o termo ϵ_k representa a k -ésima deformação principal, $\hat{\mathbf{e}}_k$ é um vetor unitário na direção principal correspondente, ou seja, o dano evolui com base apenas em alongamentos e $\langle \epsilon_k \rangle = (|\epsilon_k| + \epsilon_k)/2$.

E por fim, uma relação constitutiva incremental, para condição de carregamento inelástico ($\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon$), pode ser obtida a partir da equação 2.28b, isto é:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= (1 - D)E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{D}E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \\
 &= E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right) \dot{r} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \\
 &= \left[E_{ijkl} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon_{kl}} \right) E_{ijrs}^o \epsilon_{rs} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \\
 &= E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde E_{ijkl}^t , neste caso, é o tensor constitutivo tangente para modelos de dano isotrópico.

2.3.4.1 Análise de Bifurcação Descontínua

O módulo de amolecimento que resulta na singularidade do tensor acústico foi obtido por Peixoto et al. (2018) considerando o EPT e EPD. Para tal, pode-se escrever:

$$\check{H}(\theta) = \frac{q}{r} \left[1 - \frac{r^2}{r^2 - \gamma \epsilon_{pp}(\theta) \epsilon_{pp}^+(\theta)} \right]; \quad \gamma = \begin{cases} E & \text{para EPT} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{para EPD} \end{cases} \tag{2.32}$$

sendo:

$$\epsilon_{pp} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \text{sen}^2 \theta + \epsilon_2 \tag{2.33a}$$

$$\epsilon_{pp}^+ = (\langle \epsilon_1 \rangle - \langle \epsilon_2 \rangle) \text{sen}^2 \theta + \langle \epsilon_2 \rangle \tag{2.33b}$$

onde os termos ϵ_1 e ϵ_2 são as deformações principais no plano com $\epsilon_1 > \epsilon_2$ e, como mencionado anteriormente, $\langle \epsilon_k \rangle = (|\epsilon_k| + \epsilon_k)/2$.

Portanto, o ângulo crítico pode ser obtido, tanto para o EPT quanto para o EPD, através das seguintes expressões:

$$\text{sen}^2 \theta = \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) = - \left[\frac{\epsilon_2 (\langle \epsilon_1 \rangle - \langle \epsilon_2 \rangle) + \langle \epsilon_2 \rangle (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\langle \epsilon_1 \rangle - \langle \epsilon_2 \rangle)} \right] \tag{2.34}$$

onde:

$$sen^2\theta^{crit} = \begin{cases} \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) & \text{se } 0 \leq \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) \leq 1 \\ 1 & \text{se } \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) > 1 \\ 0 & \text{se } \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Ou seja, substituindo na equação 2.32 o ângulo crítico obtido a partir das equações 2.34 e 2.35, obtém-se o módulo de amolecimento crítico, isto é, $H^{crit} = \check{H}(\theta)$.

2.3.4.2 Análise de Descontinuidade Forte

A análise de descontinuidade forte também foi realizada para o modelo constitutivo de dano isotrópico descrito pelas equações 2.28. Esta análise segue a mesma metodologia apresentada por Oliver (2000). Desta forma, as equações obtidas para o modelo constitutivo discreto podem ser sintetizadas através das seguintes expressões (Peixoto et al., 2018):

$$\text{Energia livre: } \begin{cases} \hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega) = [1 - \omega(\Delta\alpha^*)]\hat{\psi}_o(\Delta[u_i]); \\ \hat{\psi}_o(\Delta[u_i]) = \frac{1}{2}\Delta[u_i]Q_{ij}^e\Delta[u_j] \end{cases} \quad (2.36a)$$

$$\text{Equação constitutiva: } t_i = \frac{\partial\hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega)}{\partial(\Delta[u_i])} = (1 - \omega)Q_{ij}^e\Delta[u_j] \quad (2.36b)$$

$$\text{Variável de dano: } \omega \equiv \omega(\Delta\alpha^*) = 1 - \frac{q^*(\Delta\alpha^*)}{\Delta\alpha^*}, \quad \omega \in (-\infty, 1] \quad (2.36c)$$

$$\text{Lei de evolução da variável interna: } \frac{\partial(\Delta\alpha^*)}{\partial t} = \dot{\alpha}^* = \dot{\lambda}^*, \quad \Delta\alpha^* \in [0, \infty) \quad (2.36d)$$

$$\text{Critério de dano: } \bar{G}(\Delta[u_i], \Delta\alpha^*) \equiv \tau_{\Delta[u]} - \Delta\alpha^* = \sqrt{\Delta[u_i]Q_{ij}^e\Delta[u_j]} - \Delta\alpha^* \quad (2.36e)$$

$$\text{Condições de carreg.-descarreg.: } \bar{G} \leq 0, \quad \dot{\lambda}^* \geq 0, \quad \dot{\lambda}^*\bar{G} = 0, \quad \dot{\lambda}^*\dot{\bar{G}} = 0 \quad (2.36f)$$

$$\text{Lei de amolecimento: } \dot{q}^* = \bar{H}\dot{\alpha}^*, \quad (\bar{H} = \frac{1}{h}H < 0), \quad \begin{cases} q^* \in [0, q_{SD}], \\ q^*|_{t=t_{SD}} = q_{SD} \end{cases} \quad (2.36g)$$

onde α^* , q^* e $\bar{H}$ representam a variável interna discreta, a variável interna discreta do tipo tensão e o módulo de amolecimento discreto, respectivamente. Já os termos λ^* , ω e $\bar{G}$, neste caso, constituem o multiplicador de dano discreto, a variável discreta

de dano e a função de escoamento discreta, respectivamente.

A partir das equações 2.15 e 2.28b chega-se à seguinte expressão para o campo de tensões sobre a linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ durante o regime de descontinuidade forte:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} &= \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{SD}} + \frac{1}{h} \Delta \alpha^*} E_{ijkl}^o \left[\bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2h} (\Delta \llbracket u_k \rrbracket n_l + \Delta \llbracket u_l \rrbracket n_k) \right] \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_{\mathcal{S}}}{hr_{\mathcal{SD}} + \Delta \alpha^*} E_{ijkl}^o \left[h \bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2} (\Delta \llbracket u_k \rrbracket n_l + \Delta \llbracket u_l \rrbracket n_k) \right] \right\} \quad (2.37) \\ &= \frac{q_{\mathcal{S}}}{\Delta \alpha^*} E_{ijkl}^o \left[\frac{1}{2} (\Delta \llbracket u_k \rrbracket n_l + \Delta \llbracket u_l \rrbracket n_k) \right]\end{aligned}$$

A partir desta equação, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2} (\Delta \llbracket u_i \rrbracket n_j + \Delta \llbracket u_j \rrbracket n_i) = \frac{\Delta \alpha^*}{q_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl}^{\mathcal{S}} = \frac{\Delta \alpha^*}{q_{\mathcal{S}}} \epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef} \quad (2.38)$$

onde $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef} = E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl}^{\mathcal{S}}$ é a chamada deformação efetiva em $\mathcal{S}$.

A equação 2.38 é denominada equação de descontinuidade forte e representa um conjunto de seis equações algébricas, relacionando as componentes de tensão, $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$, às componentes dos saltos nos deslocamentos, $\Delta \llbracket u_i \rrbracket$. Esta equação também pode ser reescrita no formato matricial como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \llbracket u_n \rrbracket & \frac{1}{2} \Delta \llbracket u_p \rrbracket & \frac{1}{2} \Delta \llbracket u_q \rrbracket \\ \frac{1}{2} \Delta \llbracket u_p \rrbracket & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta \llbracket u_q \rrbracket & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta \alpha^*}{q_{\mathcal{S}}} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{np}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{nq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{pn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{qn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qq}^{\mathcal{S},ef} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Considerando o EPT e EPD a equação 2.39 se resume à seguinte expressão:

$$\epsilon_{pp}^{ef} = \epsilon_{pp} = 0 \quad (2.40)$$

sendo $\epsilon_{ij}^{ef} = E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl} = (1 - D) \epsilon_{ij}$.

2.3.4.3 Energia Consumida no Regime de Descontinuidade Forte

A potência consumida durante um processo quase-estático de deformação em um domínio sólido Ω pode ser expressa como:

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (2.41)$$

Restringindo a análise ao regime de descontinuidade forte, pode-se substituir a equação 2.13 na equação 2.41, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left[\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\delta_{\mathcal{S}}}{2} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{2} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \right] d\mathcal{S}}_{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ representa a potência consumida no desenvolvimento do salto no campo de deslocamentos.

Considerando a continuidade das forças de superfície em $\mathcal{S}$ e a simetria do tensor de tensões, pode-se reescrever:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket d\mathcal{S} \quad (2.43)$$

Deste modo, a energia total consumida durante o regime de descontinuidade forte até o alívio total da tensões, fica expressa como:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{S}} = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \mathcal{P}_{\mathcal{S}} dt = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \int_{\mathcal{S}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket d\mathcal{S} dt = \int_{\mathcal{S}} \underbrace{\left[\int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket dt \right]}_{G_{SD}} d\mathcal{S} \quad (2.44)$$

onde G_{SD} é a energia liberada em $\mathcal{S}$, por unidade de área, durante o regime de descontinuidade forte. No caso de poder ser desprezada a parcela de energia liberada durante a transição em regime de descontinuidade fraca, pode-se considerar este termo como a energia de fratura, G_f , que, por sua vez, representa uma propriedade do material.

A partir do modelo de dano discreto definido através das equações 2.36, pode-se reescrever a expressão de G_{SD} , definida na equação 2.44, no seguinte formato:

$$G_{SD} = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} q_S \dot{\alpha}^* dt = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} q_S \frac{\dot{q}_S}{\dot{H}} dt = \int_{q_{SD}}^0 q \frac{1}{\dot{H}} dq \quad (2.45)$$

onde a lei de amolecimento esboçada através da equação 2.36g foi empregada. No caso de poder ser considerado $G_{SD} \approx G_f$, tem-se que $q_{SD} \approx q_o = r_o = \frac{f_t}{\sqrt{E}}$. Deste

modo, pode-se escrever:

$$G_f = \int_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 q \frac{1}{\bar{H}} dq \quad (2.46)$$

Por fim, a equação 2.46 é resolvida considerando amolecimento linear, $\bar{H}$ constante, e amolecimento exponencial, $\bar{H}(q) = A^*q$, onde A^* é uma constante. Deste modo, tem-se que:

i. Amolecimento linear:

$$G_f = \frac{1}{\bar{H}} \frac{q^2}{2} \Big|_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 = -\frac{1}{\bar{H}} \left[\frac{f_t^2}{2E} \right] \Rightarrow \bar{H} = -\frac{f_t^2}{2EG_f} \quad (2.47)$$

ii. Amolecimento exponencial:

$$G_f = \frac{1}{A^*} q \Big|_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 \Rightarrow A^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}; \quad \therefore \bar{H} = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q \quad (2.48)$$

2.3.5 Modelo de Banda Variável

A bifurcação descontínua nos modelos constitutivos empregados neste trabalho pode ocorrer, dependendo do estado de tensões no momento da bifurcação, em regime de descontinuidade fraca ou forte. Deste modo, no caso em que as condições de descontinuidade forte não são atendidas no instante da bifurcação, deve ser considerada uma cinemática apropriada que descreva a formação da banda de localização de deformações, cuja largura irá decrescer até atingir um valor muito pequeno, compatível com o regime de descontinuidade forte. Portanto, pode-se dividir o comportamento do material em três fases distintas durante o processo de carga: fase elástica, fase inelástica contínua e fase inelástica descontínua. Esta última fase, por sua vez, é subdividida nos regimes de descontinuidade fraca e forte.

Deste modo, para a fase elástica admite-se que $\sigma_{ij} = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}$. Já com relação à fase inelástica contínua, o modelo descrito na seção 2.3.4 é aplicado diretamente sendo que, a cada novo estado de deformações, a análise de bifurcação descrita na

seção 2.3.4.1 é realizada, isto é, quando $H^{crit} \geq H$ ocorre a bifurcação. Quanto ao regime de descontinuidade fraca, caracterizado pela presença de descontinuidades no campo de deformações, adota-se a cinemática regularizada descrita na seção 2.3.1.3, com valores finitos de h , que pode ser interpretado como a espessura da banda de localização. Assim, à medida que a análise progride, essa espessura diminui continuamente, desde um valor h_B no instante de bifurcação, até um valor nulo (numericamente falando, um parâmetro pequeno k), que marca o início do regime de descontinuidade forte. A lei que rege a variação desta banda é considerada pré-definida, ou seja, entende-se que ela seja uma propriedade do material. Uma representação destas ideias é apresentada na figura 2.8. E por fim, no regime de descontinuidade forte, caracterizado por descontinuidades no campo de deslocamentos e, conseqüentemente, pela presença de deformações ilimitadas, emprega-se a cinemática regularizada apresentada na seção 2.3.1.3, com $h = k \approx 0$.

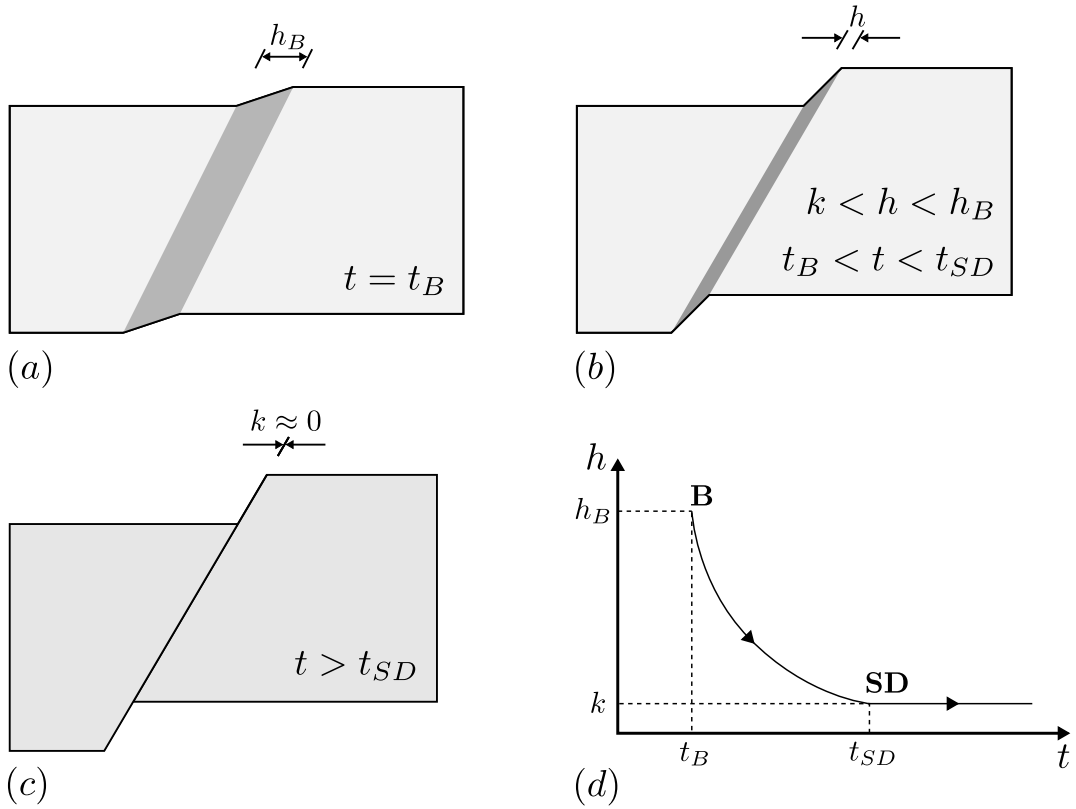


Figura 2.8: Modelo de banda de variável: (a) instante da bifurcação, (b) evolução da banda sob regime de descontinuidade fraca, (c) início do regime de descontinuidade forte, (d) variação da espessura da banda de localização em relação ao tempo.

2.3.5.1 Regime Inelástico Contínuo

Com relação ao modelo constitutivo de dano isotrópico utilizam-se tanto leis de amolecimento linear quanto exponencial. Ou seja, no caso de amolecimento linear, tem-se (Peixoto et al., 2018):

$$q(r) = \begin{cases} r_o & \text{se } r \leq r_o \\ r_o + H(r - r_o) & \text{se } r_o < r < (r_o - \frac{r_o}{H}) \\ 0 & \text{se } r \geq (r_o - \frac{r_o}{H}) \end{cases} \quad (2.49a)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq r_o \\ 1 - \frac{r_o}{r} - H \left[1 - \frac{r_o}{r} \right] & \text{se } r_o < r < (r_o - \frac{r_o}{H}) \\ 1 & \text{se } r \geq (r_o - \frac{r_o}{H}) \end{cases} \quad (2.49b)$$

Já para amolecimento exponencial pode-se escrever:

$$q(r) = \begin{cases} r_o & \text{se } r \leq r_o \\ r_o e^{A^{cp}(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (2.50a)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq r_o \\ 1 - \frac{r_o}{r} e^{A^{cp}(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (2.50b)$$

onde A^{cp} é uma constante positiva e, neste caso, é adotada a expressão apresentada em Oliver et al. (1990) que é dada por:

$$A^{cp} = \left[\frac{G_f}{r^2 l^*} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \quad (2.51)$$

onde o termo l^* é um comprimento característico correspondente à média dos comprimentos dos lados de uma célula interna.

2.3.5.2 Regime com Descontinuidade Fraca

Para o regime de descontinuidade fraca é assumida a seguinte estrutura para o módulo de amolecimento:

$$H(q) = \bar{H}(q)h(q) \quad (2.52)$$

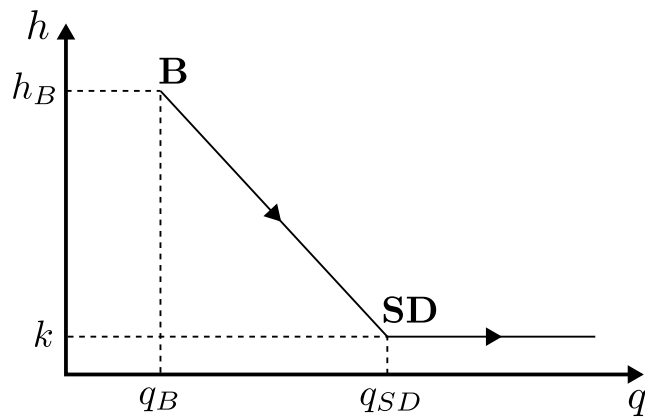


Figura 2.9: Variação da largura de banda.

Deste modo, deve-se estabelecer uma lei de evolução para a largura de banda h que irá variar do valor $h_B \neq 0$, no instante da bifurcação, até o valor $h = k$ ($k \rightarrow 0$)

quando tem início o regime de descontinuidade forte. Portanto, baseando-se na figura 2.9, define-se a variação de h através de uma função decrescente, em função da variável interna do tipo tensão q , de modo que $h = h_B$ em $q = q_B$ até atingir o valor $h = k$ em $q = q_{SD}$, ou seja:

$$h(q) = \left(\frac{k - h_B}{q_{SD} - q_B} \right) q + \left(\frac{h_B q_{SD} - k q_B}{q_{SD} - q_B} \right) \quad (2.53)$$

Deste modo, a partir da equação 2.52, pode-se escrever a seguinte expressão para h_B :

$$h_B = \left| \frac{H(q_B)}{\bar{H}(q_B)} \right| \quad (2.54)$$

No caso do modelo de dano isotrópico, também foi considerada uma variação linear de $h(q)$ com relação à q assim como mostrado na figura 2.9. Portanto, são encontradas as seguinte expressões para $q(r)$ e $D(r)$, isto é (Peixoto et al., 2018):

$$q(r) = q_{SD} - \frac{k}{R} + \left[q_B - q_{SD} + \frac{k}{R} \right] e^{\frac{f_t^2 R}{2EG_f}(r_B - r)} \quad (2.55a)$$

$$D(r) = 1 - \frac{1}{r} \left[q_{SD} - \frac{k}{R} + \left(q_B - q_{SD} + \frac{k}{R} \right) \right] e^{\frac{f_t^2 R}{2EG_f}(r_B - r)} \quad \text{se } r_B < r < r_{SD} \quad (2.55b)$$

$$r_{SD} = r_B - \frac{2EG_f}{f_t^2 R} \ln \left(\frac{k}{h_B} \right) \quad (2.55c)$$

e

$$q(r) = b^c \left[-a^c + \left(\frac{b^c + a^c q_B}{q_B} \right) e^{b^c(r_B - r)} \right]^{-1} \quad (2.56a)$$

$$D(r) = 1 - \frac{b^c}{r} \left[-a^c + \left(\frac{b^c + a^c q_B}{q_B} \right) e^{b^c(r_B - r)} \right]^{-1} \quad \text{se } r_B < r < r_{SD} \quad (2.56b)$$

$$r_{SD} = r_B - \frac{1}{b^c} \ln \left[\frac{q_B}{q_{SD}} \left(\frac{b^c + a^c q_{SD}}{b^c + a^c q_B} \right) \right] \quad (2.56c)$$

onde:

$$R = \frac{h_B - k}{q_B - q_{SD}}; \quad a^c = -\frac{f_t R}{G_f \sqrt{E}}; \quad b^c = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}(k - R q_{SD}) \quad (2.57)$$

Neste caso, as equações 2.55 e 2.56 são referentes ao amolecimento linear e ao amolecimento exponencial, respectivamente.

2.3.5.3 Regime com Descontinuidade Forte

No regime de descontinuidade forte, como destacada através da figura 2.9, tem-se que:

$$h = k \quad (2.58)$$

Com relação ao modelo de dano isotrópico, obtém-se para amolecimento linear (Peixoto et al., 2018):

$$q(r) = q_{SD} - \frac{f_t^2 k}{2EG_f}(r - r_{SD}) \quad (2.59a)$$

$$D(r) = 1 + \frac{f_t^2 k}{2EG_f} - \frac{1}{r} \left[q_{SD} + \frac{f_t^2 k}{2EG_f} r_{SD} \right] \quad \text{se } r > r_{SD} \quad (2.59b)$$

Já para amolecimento exponencial, encontra-se:

$$q(r) = q_{SD} e^{\frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}}(r_{SD} - r)} \quad (2.60a)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q_{SD}}{r} e^{\frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}}(r_{SD} - r)} \quad \text{se } r > r_{SD} \quad (2.60b)$$

Neste último caso, considerando a introdução direta do regime de descontinuidade forte após o fim do regime elástico, tem-se que $r_{SD} \equiv q_{SD} = r_o (= f_t/\sqrt{E})$ e, portanto:

$$D(r) = 1 - \frac{r_o}{r} e^{\frac{r_o^2 k}{G_f}(1 - \frac{r}{r_o})} \quad \text{se } r > r_o \quad (2.61)$$

Capítulo 3

Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades

Neste capítulo é apresentada a formulação implícita do MEC para problemas fisicamente não-lineares na presença de descontinuidades. A formulação implícita para problemas fisicamente não-lineares foi originalmente desenvolvida por Telles e Carrer (1991) e foi posteriormente aplicada a problemas de descontinuidade forte por Manzoli e Venturini (2004, 2007), Manzoli et al. (2009), Peixoto et al. (2017) e Peixoto et al. (2018). Portanto, inicialmente são obtidas as equações integrais para sólidos que apresentam comportamento fisicamente não-linear em regime de pequenas deformações onde leva-se em conta o teorema da reciprocidade de Betti (Aliabadi, 2002). Neste caso, primeiramente é apresentada a formulação integral para meios contínuos convencionais que, em seguida, é estendida a meios com a presença de descontinuidades. E por fim, através de um rearranjo matricial das equações obtidas chega-se a uma única equação não-linear, representada através de um vetor resíduo de deformações, típica da formulação implícita do MEC.

3.1 Meios Contínuos Convencionais

Inicialmente é considerado um sólido contínuo de domínio Ω e de contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ como apresentado pela figura 3.1. Neste caso, em Γ_u são prescritos os deslocamentos e em Γ_σ as forças de superfície. Além disto, também é considerado que um conjunto de forças externas por unidade de volume, b_i , age em Ω .

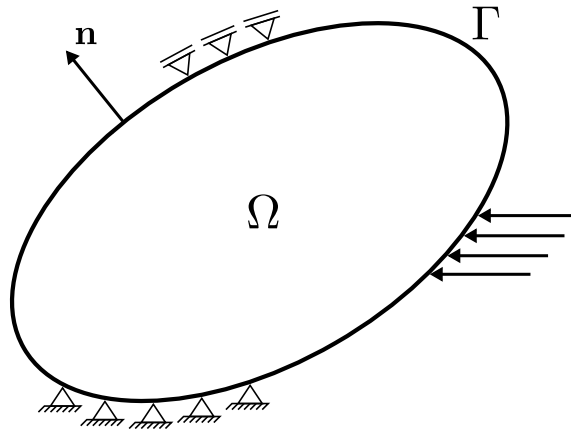


Figura 3.1: Domínio sólido contínuo.

Deste modo, este problema de valor de contorno pode ser descrito, em sua forma diferencial, através das seguintes equações:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equilíbrio interno}) \quad (3.1a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade cinemática}) \quad (3.1b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\bar{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade constitutiva}) \quad (3.1c)$$

$$\dot{u}_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{c. c. essenciais}) \quad (3.1d)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{c. c. naturais}) \quad (3.1e)$$

As equações 3.1 são válidas para o regime quase-estático com deformações infinitesimais e, além disto, na equação 3.1c o termo $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij})$ representa qualquer função constitutiva não-linear.

Portanto, para problemas inelásticos multi-axiais, o tensor de deformações totais pode ser expresso como:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^o \quad (3.2)$$

que, em termos de taxas, assume a seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^o \quad (3.3)$$

As componentes de deformação ϵ_{ij}^e e ϵ_{ij}^o , presentes na equação 3.2, podem ser melhor compreendidas através da figura 3.2.

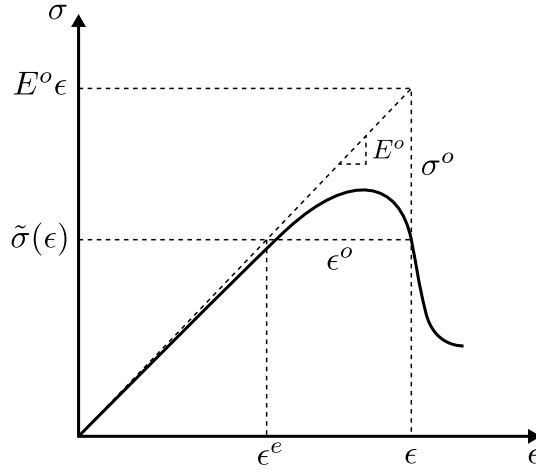


Figura 3.2: Trajetória de equilíbrio uni-axial arbitrária.

Esta figura representa a trajetória de equilíbrio não-linear de um problema unidimensional que, neste caso, é completamente definida pela combinação das componentes ϵ^e e ϵ^o . Ou seja, a tensão em um determinado ponto pode ser determinada através da subtração de uma componente de tensão obtida pela relação elástica linear ($E^o \epsilon$) e um resíduo ($E^o \epsilon^o$). Desta forma, considerando o caso mais geral possível, é encontrada a seguinte expressão para a tensão em um ponto da trajetória de equilíbrio:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon_{ij}) = E_{ijkl}^o(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^o) = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^o \quad (3.4)$$

onde $\sigma_{ij}^o = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^o$ representa a parcela referente ao resíduo.

Além disto, assim como para as deformações totais, a equação 3.4 pode ser escrita em termos de taxa, isto é:

$$\dot{\sigma}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^o) = E_{ijkl}^o\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^o \quad (3.5)$$

3.1.1 Teorema do Trabalho Recíproco de Betti

Para a derivação das equações integrais é utilizado o teorema do trabalho recíproco de Betti. Este teorema é obtido a partir da consideração de dois estados deformados e auto-equilibrados designados por (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) . Neste caso, os termos u_i e u_i^* são deslocamentos, t_i e t_i^* são forças de superfície e b_i e b_i^* são forças de corpo.

Portanto, considerando as equações 3.1a e 3.1c pode-se escrever a seguinte expressão para a equação de equilíbrio interno:

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo do lado direito da equação 3.6, encontra-se:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.7)$$

Aplicando agora o teorema da divergência ao primeiro termo do lado direito da equação 3.7, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma \quad (3.8)$$

Desta forma, substituindo a equação 3.8 na equação 3.7, encontra-se:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.9)$$

Substituindo agora a equação 3.9 na equação 3.6, chega-se à seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.10)$$

Além disto, o último termo presente na equação 3.10 pode ser reescrito através da consideração das equações 3.1b e 3.5 e das simetrias associadas ao regime de pequenas deformações em meios isotrópicos, ou seja:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega &= \int_{\Omega} E_{ijkl}^o \dot{u}_{k,l} u_{i,j}^* d\Omega - \int_{\Omega} E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl}^o u_{i,j}^* d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} (E_{kl ij}^o u_{i,j}^*) n_l \dot{u}_k d\Gamma - \int_{\Omega} (E_{kl ij}^o u_{i,j}^*)_{,l} \dot{u}_k d\Omega - \int_{\Omega} (E_{kl ij}^o u_{i,j}^*) \dot{\epsilon}_{kl}^o d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \sigma_{kl}^* n_l \dot{u}_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kl,l}^* \dot{u}_k d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kl}^* \dot{\epsilon}_{kl}^o d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^o d\Omega
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim sendo, substituindo a expressão 3.11 na expressão 3.10, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^o d\Omega \tag{3.12}$$

E por fim, levando-se em conta a condição de equilíbrio $\sigma_{ij,j}^* = -b_i^*$ na equação 3.12, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \dot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^o d\Omega \tag{3.13}$$

A equação 3.13 representa o teorema do trabalho recíproco de Betti para problemas fisicamente não-lineares. A partir desta expressão são obtidas as equações integrais que governam o problema de valor de contorno, isto é: equação integral para deslocamentos em pontos internos, equação integral para deslocamento no contorno e a equação integral para deformações em pontos internos.

3.1.2 Equação Integral para Deslocamentos em Pontos Internos: Identidade de Somigliana

Considera-se a partir de agora que os estados deformados e auto-equilibrados designados por (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) sejam definidos, respectivamente, no domínio

original e em um domínio infinito auxiliar. Deste modo, a equação integral para deslocamentos em pontos internos é obtida a partir da equação 3.13 considerando o problema fundamental de Kelvin. Ou seja, admite-se que a força de corpo b_i^* seja uma carga concentrada unitária atuando em um ponto $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}$ de um meio sólido de domínio infinito, sob regime elástico linear, tal que $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ e $\boldsymbol{\xi} \notin \Gamma$. Portanto, pode-se escrever:

$$b_i^* = \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})P_i \quad (3.14)$$

onde $P_i = 1$ e o termo $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$ corresponde à função delta de Dirac que possui a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{X})\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})d\Omega = \begin{cases} f(\boldsymbol{\xi}) & \text{se } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.15)$$

Desta forma, substituindo a equação 3.14 na equação 3.13, encontra-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})P_i &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{t}_j(\mathbf{X})P_i d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_j(\mathbf{X})P_i d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_j(\mathbf{X})P_i d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X})P_i d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$u_j^*(\mathbf{X}) = u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad t_j^*(\mathbf{X}) = t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad \sigma_{jk}^*(\mathbf{X}) = \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i \quad (3.17)$$

Os tensores $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ e $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$, presentes na equação 3.17, são as soluções fundamentais de Kelvin e representam, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície na direção j e componentes de tensão jk num ponto de campo $\mathbf{X}$ devido à uma carga concentrada no ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$ aplicada na direção i .

Finalmente, a equação 3.16 pode ser desmembrada para cada direção do espaço euclidiano a partir do princípio da superposição resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{t}_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_j(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Isto é, a equação 3.18 representa a equação integral para deslocamentos em pontos internos que também é conhecida como Identidade de Somigliana.

3.1.3 Equação Integral para Deslocamentos no Contorno (EIC)

A equação integral para deslocamentos em pontos internos (equação 3.18) é válida apenas para o caso onde $\xi \in \Omega$ e $\xi \notin \Gamma$. Deste modo, a fim de que esta equação seja aplicável a pontos do contorno, deve ser considerado o caso limite onde o ponto fonte ξ tende para o domínio Γ , isto é, $\xi \rightarrow \Gamma$.

Portanto, inicialmente é considerado um aumento do domínio do problema através do acréscimo de uma seção circular conforme mostrado na figura 3.3. O contorno acrescentado ao problema é centrado no ponto fonte ξ , possui raio ε e é designado por $\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Já o domínio aumentado é denominado por Ω_ε .

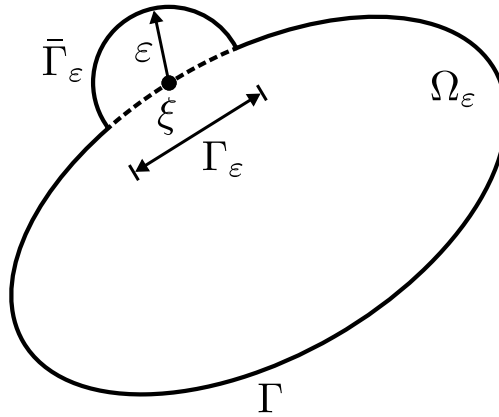


Figura 3.3: Ponto fonte no contorno: domínio expandido.

Deste modo, no caso limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o domínio original é recuperado e o ponto fonte, neste caso, pertencerá ao contorno. Portanto, levando-se em conta o domínio indicado através da figura 3.3, juntamente com a equação 3.18, pode-se

escrever a equação integral para deslocamentos no contorno da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Neste caso, a primeira equação integral à direita na equação 3.19 pode ser expandida resultando em:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde a segunda integral à direita na equação 3.20 tende à zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, uma vez que a singularidade em seu núcleo é da ordem de $O(\ln r)$. Já a primeira integral à direita pode ser integrada como uma integral imprópria e será a única parcela contabilizada na equação final. Desta forma, tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (3.21)$$

Com relação à segunda integral à direita na equação 3.19, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde as duas equações integrais à direita na equação 3.22 apresentam núcleos fortemente singulares da ordem de $O(r^{-1})$. Portanto, o limite da primeira integral existirá apenas no sentido do valor principal de Cauchy onde, neste caso, o campo $\dot{u}(\mathbf{X})$ deve atender à condição de continuidade de Hölder em $\boldsymbol{\xi}$. Já a segunda integral é regularizada considerando uma expansão dos deslocamentos em torno do ponto fonte através do primeiro termo da série de Taylor, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) [\dot{u}_j(\mathbf{X}) - \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi})] d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \dot{u}(\boldsymbol{\xi}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Neste caso, o primeiro termo à direita na equação 3.23 resulta em valor nulo devido à condição de continuidade para a taxa do campo de deslocamentos. Já o segundo termo é obtido através de uma integração analítica originando, desta forma, um tensor de termos livres que é função apenas da geometria do contorno em torno do ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$ e das propriedades constitutivas do material. Portanto, substituindo a equação 3.23, já com as devidas simplificações, na equação 3.22 é obtida a seguinte expressão:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) + \dot{u}(\boldsymbol{\xi}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right] \quad (3.24)$$

onde o traço na integral à direita do sinal de igualdade é empregado para designar que a integral existirá apenas no sentido do valor principal de Cauchy.

E por fim, com relação à última integral à direita na equação 3.19, é constatado que seu núcleo apresenta apenas singularidade fraca. Deste modo, substituindo as equações 3.21 e 3.24 na equação 3.19, encontra-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &\quad - \dot{u}(\boldsymbol{\xi}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \\ &\quad + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Rearranjando as integrais presentes na equação 3.25 e sabendo-se que $\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi})$, obtém-se:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &\quad + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

A equação 3.26 representa a equação integral para deslocamentos no contorno onde, neste caso, o termo $c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ é definido através da seguinte expressão:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (3.27)$$

Para pontos fontes em regiões suaves do contorno a solução da equação 3.27 resulta em $c_{ij} = (1/2)\delta_{ij}$. Já para o caso de quinas, os termos livres podem ser avaliados diretamente a partir da equação 3.27, em termos do ângulo formado pela quina, ou então a partir da consideração de movimento de corpo livre resultando, desta forma, em uma dependência explícita das constantes elásticas do material.

3.1.4 Equação Integral para Deformações Internas

A equação integral para deformações em pontos internos pode ser obtida a partir da equação integral para deslocamentos em pontos internos utilizando a seguinte relação cinemática:

$$\dot{e}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}[\dot{u}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) + \dot{u}_{j,i}(\boldsymbol{\xi})] \quad (3.28)$$

A derivação das três primeiras integrais à direita do sinal de igualdade na equação 3.18 pode ser realizada diretamente, já que as integrais de contorno não possuem singularidade e uma vez que a integral de domínio apresenta apenas singularidade fraca. Com isso, surgem dois novos tensores, ou seja:

$$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}[u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (3.29)$$

$$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}[t_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + t_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (3.30)$$

Contudo, a integral de domínio que contém o termo inelástico ($\dot{e}_{ij}^o$) deve receber um tratamento especial em virtude das derivações de $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ produzirem tensores de singularidade forte quando $\boldsymbol{\xi}$ e $\mathbf{X}$ coincidem. Em vista disto, é admitida a exclusão de um círculo de raio ε do domínio Ω de tal forma que o círculo esteja centrado no ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$ (figura 3.4). Assim sendo, o novo domínio é designado por Ω_ε .

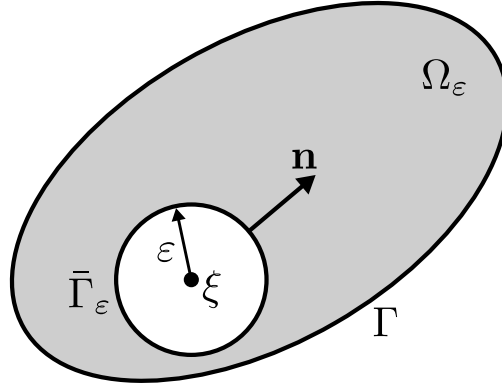


Figura 3.4: Subdomínio $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ considerando a exclusão de um círculo.

Deste modo, designando por V_i a última integral da equação 3.18, obtém-se a seguinte expressão para o gradiente de V_i com relação ao ponto fonte (Brebbia et al., 1984):

$$V_{i,l}|_{\xi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_l} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \right] \quad (3.31)$$

onde o domínio Ω_ε , neste caso, é função da posição do ponto fonte, ou seja, $\Omega_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon(\xi)$.

Desta forma, para tratar de forma adequada o termo entre colchetes na equação 3.31, pode-se utilizar a fórmula de Leibnitz:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{df}{d\alpha} dx - f(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha} + f(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} \quad (3.32)$$

Assim sendo, levando-se em conta a equação 3.31, tem-se que os termos α , $\phi_1(\alpha)$ e $\phi_2(\alpha)$ correspondem, respectivamente, às coordenadas de ξ , ao contorno $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ e ao contorno Γ . Neste caso, uma vez que Γ é fixo, deve-se ainda considerar que $\frac{d\phi_2}{d\alpha} = 0$. Portanto, aplicando a equação 3.32 à equação 3.31, obtém-se:

$$V_{i,l}|_{\xi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} [\sigma_{ijk,l}^*(\xi, \mathbf{X})|_{\xi}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right\} \quad (3.33)$$

onde $\bar{n}_i$ representa as componentes do vetor unitário ortogonal à $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ assim como apresentado através da figura 3.4. Além disto, também foi levado em conta a seguinte

relação:

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \bar{n}_i \quad \text{para} \quad \mathbf{X} \in \bar{\Gamma}_\varepsilon \quad (3.34)$$

onde $r_i = X_i - \xi_i$.

A primeira integral da equação 3.33 existe apenas no sentido do valor principal de Cauchy desde que o termo $\dot{\epsilon}_{ij}$ satisfaça à condição de continuidade de Holder em $\boldsymbol{\xi}$.

Portanto, pode-se escrever:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = \oint_{\Omega} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (3.35)$$

Assim sendo, uma vez que na equação para deformações a parte simétrica do gradiente é requerida, convém definir:

$$\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} [\sigma_{ikl,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + \sigma_{jkl,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (3.36)$$

Desta forma, no tratamento da segunda integral presente na equação 3.33 é considerada uma expansão em série de Taylor da taxa das deformações iniciais em torno de $\boldsymbol{\xi}$, ou seja:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^o(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{ij}^o(\boldsymbol{\xi}) + [X_k - \xi_k] \dot{\epsilon}_{ij,k}^o(\boldsymbol{\xi}) + \dots \quad (3.37)$$

Por conseguinte, aplicando a equação 3.37 à última integral da equação 3.33, encontra-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{jk}^o(\boldsymbol{\xi}) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X})}_{=-F_{ijkl}^\varepsilon} \quad (3.38)$$

Neste caso, os termos lineares e de ordens superiores presentes na equação 3.37, quando aplicados à última integral da equação 3.33, resultam em núcleos desprezíveis quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A integral em destaque na equação 3.38, designada por F_{ijkl}^ε , representa um termo livre que é obtido analiticamente. Além disto, uma vez que a parte simétrica do

gradiente definido na equação 3.31 é necessária à formulação da equação integral para deformações, deve-se definir um outro termo livre que é obtido através da seguinte expressão:

$$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} = \frac{1}{2}[F_{iklj}^{\epsilon} + F_{jkli}^{\epsilon}] \quad (3.39)$$

E por fim, considerando as equações 3.29, 3.30, 3.36 e 3.39, juntamente com as equações 3.18 e 3.28, obtém-se a equação integral para a taxa de deformações em pontos internos, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_k(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^o(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.2 Meios com Presença de Descontinuidades

3.2.1 Reformulação das Equações Cinemáticas

Por questões numéricas, inicialmente é realizada uma reformulação da cinemática regularizada, apresentada na seção 2.3.1.3, para permitir a distribuição dos efeitos da superfície descontínua sobre uma região finita e arbitrária do domínio (Manzoli e Venturini, 2004). Portanto, é definido um subdomínio Ω_{φ} , contido em Ω e ao redor de $\mathcal{S}$, assim como apresentado através da figura 3.5.

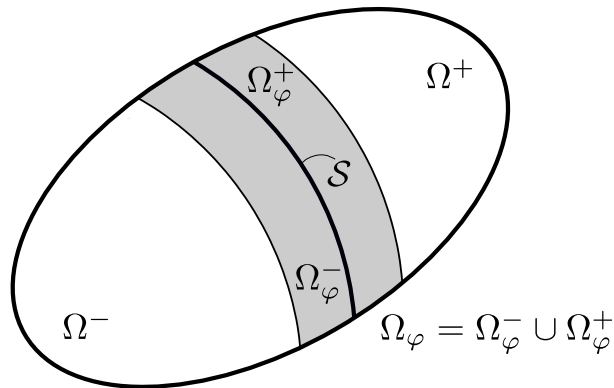


Figura 3.5: Subdomínio arbitrário Ω_{φ} em torno da superfície descontínua.

Também deve ser considerada uma função contínua $\varphi(\mathbf{X})$, e arbitrária em Ω_φ , que atende às seguintes condições:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{cases} \quad (3.41)$$

Portanto, levando-se em conta a equação 3.41 e a figura 3.5, pode-se escrever a equação 2.14 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\dot{\hat{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \varphi(\mathbf{X})[\![\dot{u}_i]\!](\mathbf{X}, t)}_{\dot{\hat{u}}_i(\mathbf{X}, t)} + \underbrace{[\mathcal{H}_\mathcal{S}(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})][\![\dot{u}_i]\!](\mathbf{X}, t)}_{\mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi(\mathbf{X})} \\ &= \dot{\hat{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi(\mathbf{X})[\![\dot{u}_i]\!](\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $\mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi(\mathbf{X})$ possui valor não-nulo apenas em Ω_φ e os termos $\dot{\hat{u}}_i(\mathbf{X}, t)$ representam funções contínuas.

Além disto, observa-se na equação 3.42 que a taxa do campo de deslocamentos é composta pela parcela regular $\dot{\hat{u}}_i(\mathbf{X}, t)$ e pela parcela $\mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi(\mathbf{X})[\![\dot{u}_i]\!](\mathbf{X}, t)$ que contém as componentes dos saltos e que, neste caso, é restringida ao domínio Ω_φ .

Desta forma, a partir da equação 3.42, obtém-se a seguinte expressão para a taxa do campo de deformações:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{\hat{u}}_{i,j} + \dot{\hat{u}}_{j,i})}_{\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}} + \underbrace{\frac{\mathcal{M}_\mathcal{S}^\varphi}{2}([\![\dot{u}_{i,j}]\!] + [\![\dot{u}_{j,i}]\!]) - \frac{1}{2}(\varphi_{,i}[\![\dot{u}_j]\!] + \varphi_{,j}[\![\dot{u}_i]\!])}_{-\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi} \\ &\quad + \frac{\mu_\mathcal{S}}{2h}([\![\dot{u}_i]\!]n_j + [\![\dot{u}_j]\!]n_i) \\ &= \dot{\hat{\epsilon}}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi + \frac{\mu_\mathcal{S}}{2h}([\![\dot{u}_i]\!]n_j + [\![\dot{u}_j]\!]n_i) \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$ possui valor não-nulo apenas no subdomínio Ω_φ , $\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}$ representa a parcela regular do campo de deformações e o último termo é restrito a pontos sobre a linha de descontinuidade. Vale ressaltar que neste último termo, o parâmetro $\mu_\mathcal{S}$ representa uma função de colocação sobre $\mathcal{S}$ que foi definida através da equação 2.16.

3.2.2 Formulações do Problema

Para a obtenção das equações integrais em meios com a presença de uma linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ deve-se inicialmente, assim como realizado para sólidos contínuos convencionais, definir as equações que descrevem o problema de valor de contorno. Estas equações são dadas por:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{equilíbrio interno}) \quad (3.44a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^- n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{cont. ext. forças de sup.}) \quad (3.44b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = \dot{\sigma}_{ij}^- n_j - \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{cont. int. forças de sup.}) \quad (3.44c)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade cinemática}) \quad (3.44d)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{compatib. constitutiva}) \quad (3.44e)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{compatib. constitutiva}) \quad (3.44f)$$

$$\dot{\hat{u}}_i = \dot{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{c. c. essenciais}) \quad (3.44g)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{c. c. naturais}) \quad (3.44h)$$

Nas equações acima os termos σ_{ij}^+ e σ_{ij}^- referem-se, respectivamente, às tensões em Ω^+ e Ω^- . Já o termo $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\epsilon_{ij})$ representa uma relação constitutiva contínua em $\mathcal{S}$ sendo que, para $\Omega \setminus \mathcal{S}$, é considerado regime elástico linear. Além disto, as equações 3.44b e 3.44c estão associadas, respectivamente, à continuidade externa e interna das forças de superfície na linha de descontinuidade $\mathcal{S}$.

Portanto, as relações constitutivas em $\mathcal{S}$ e $\Omega \setminus \mathcal{S}$ (equações 3.44e e 3.44f) podem ser reescritas, após aplicação da equação 3.43, da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}, \llbracket \dot{u}_i \rrbracket, \llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket) \quad (3.45)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} = E_{ijkl}^o [\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket, \llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket)] \quad (3.46)$$

Além disto, levando-se em conta as equações 3.43 e 3.46, pode-se escrever:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} = E_{ijkl}^o \dot{\hat{u}}_{k,l} - E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi \quad (3.47)$$

onde foram consideradas as simetrias associadas ao regime de pequenas deformações em meios isotrópicos.

Levando em consideração a figura 3.5, uma formulação integral deste problema pode ser obtida a partir da seguinte equação de resíduos ponderados:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (\dot{\sigma}_{ij,j}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \dot{b}_i) u_i^* d\Omega + \int_{\mathcal{S}} n_j (\dot{\sigma}_{ij}^+ - \dot{\sigma}_{ij}^-) u_i^* d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_\sigma} (\dot{\mathfrak{t}}_i - \dot{t}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\dot{u}_i - \dot{\mathfrak{u}}_i) t_i^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde, neste caso, os termos u_i^* e t_i^* representam campos ponderadores.

Assim sendo, tendo em vista as equações 3.47 e 3.48, é obtida a seguinte equação integral para meios que apresentam descontinuidades (Peixoto, 2016):

$$\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* \dot{\hat{u}}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \dot{\hat{u}}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi d\Omega \quad (3.49)$$

3.2.3 Equações Integrais com Descontinuidades

Devido à similaridade entre as equações 3.13 e 3.49, pode-se proceder de maneira análoga ao realizado na seção 3.1 para a obtenção das equações integrais com descontinuidades. Neste caso, se as soluções fundamentais de Kelvin foram adotadas como campos ponderadores, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{u}}_i(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\hat{u}}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \dot{\hat{u}}_i(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\hat{u}}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_k(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \oint_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\end{aligned}\quad (3.52)$$

Ou seja, as equações 3.50, 3.51 e 3.52 representam, respectivamente, a identidade de Somigliana, a equação integral para deslocamentos no contorno e a equação integral para deformações em pontos internos em meios com a presença de descontinuidades.

3.3 Formulação Implícita do MEC

3.4 Equações Discretas

Para a derivação das equações discretas do MEC deve-se primeiramente considerar a inserção de N pontos fontes no contorno Γ e M ponto fontes no interior do domínio Ω . Em seguida, é assumida uma discretização de modo que o contorno fique subdividido em N_e elementos de contorno e o domínio, onde ocorrem os efeitos dissipativos, fique subdividido em N_c células. Deste modo, desprezando-se as forças de corpo, pode-se escrever as equações integrais 3.50, 3.51 e 3.52 no seguinte formato:

$$\begin{aligned}\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^{\varphi}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X})\end{aligned}\quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi}^I) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^{\varphi}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X})\end{aligned}\quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \oint_{\Omega_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^J)\end{aligned}\quad (3.55)$$

onde os domínios dos elementos de contorno e das células são designados, respectivamente, por Γ_e e Ω_e . Além disto, tem-se ainda que $I = 1, \dots, N$ e $J = 1, \dots, M$.

3.4.1 Elementos de Contorno Isoparamétricos

Na formulação isoparamétrica as mesmas funções de forma utilizadas na aproximação da geometria são também empregadas na aproximação das incógnitas do problema. Deste modo, as coordenadas X_j , juntamente com as incógnitas $\hat{u}_j$ e t_j , podem ser expressas através das seguintes funções:

$$X_j(\eta) \approx N^\gamma(\eta)X_j^\gamma \quad (3.56a)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{X}(\eta)) \approx N^\gamma(\eta)\hat{u}_j^\gamma \quad (3.56b)$$

$$t_j(\mathbf{X}(\eta)) \approx N^\gamma(\eta)t_j^\gamma \quad (3.56c)$$

onde X_j^γ , $\hat{u}_j^\gamma$ e t_j^γ são os valores das funções no ponto de colocação γ . Além disto, $N^\gamma(\eta)$ são funções de forma e η é uma coordenada paramétrica adimensional tal que $\eta \in [-1, +1]$.

Portanto, a partir destas considerações, pode-se reescrever as equações 3.56b e 3.56c nas seguintes formas matriciais:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1(\mathbf{X}(\eta)) \\ \hat{u}_2(\mathbf{X}(\eta)) \end{Bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} N^1(\eta) & 0 & \dots & N^{n_e}(\eta) & 0 \\ 0 & N^1(\eta) & \dots & 0 & N^{n_e}(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_2^1 \\ \vdots \\ \hat{u}_1^{n_e} \\ \hat{u}_2^{n_e} \end{Bmatrix} \\ &= [N(\eta)]\{\hat{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \dot{t}_1(\mathbf{X}(\eta)) \\ \dot{t}_1(\mathbf{X}(\eta)) \end{Bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} N^1(\eta) & 0 & \cdots & N^{n_e}(\eta) & 0 \\ 0 & N^1(\eta) & \cdots & 0 & N^{n_e}(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{t}_1^1 \\ \dot{t}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{t}_1^{n_e} \\ \dot{t}_2^{n_e} \end{Bmatrix} \\
&= [N(\eta)] \{\dot{t}^e\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde n_e representa o número de pontos de interpolação do elementos de contorno e .

Neste caso, após a aplicação da formulação isoparamétrica às equações 3.53, 3.54 e 3.55, o comprimento infinitesimal $d\Gamma$ fica relacionado com o Jacobiano da transformação ($J(\eta)$) através da seguinte relação:

$$d\Gamma(\mathbf{X}(\eta)) = \sqrt{\left(\frac{dN^\gamma(\eta)}{d\gamma} X_1^\gamma\right)^2 + \left(\frac{dN^\gamma(\eta)}{d\gamma} X_2^\gamma\right)^2} d\eta = \mathcal{J}(\eta) d\eta \tag{3.59}$$

Além disto, o Jacobiano pode ser reescrito no formato matricial como:

$$\mathcal{J}(\eta) = ||\{J(\eta)\}|| \equiv \sqrt{\{J(\eta)\}^T \{J(\eta)\}} \tag{3.60}$$

onde o termo $\{J(\eta)\}$ é dado por:

$$\{J(\eta)\} = \left\{ \frac{dN^1(\eta)}{d\eta} \quad \cdots \quad \frac{dN^{n_e}(\eta)}{d\eta} \right\} \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ X_1^{n_e} & X_2^{n_e} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

3.4.2 Equações Matriciais

As integrais da identidade de Somigliana (equação 3.53) podem ser escritas para cada célula ou elemento de contorno, após a consideração das equações 3.57, 3.58 e 3.59, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\
&\approx \left(\int_{-1}^1 [u^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{t}^e\} = [G_e^J] \{\dot{t}^e\}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 [t^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [H_e^J] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\sigma^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^\varphi\} = [Q_c^J] \{\dot{\epsilon}^\varphi\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

sendo o vetor $\{\dot{\epsilon}^\varphi\}$ constituído pelas componentes de deformações iniciais provenientes das células com descontinuidade embutida. Contudo, no caso de células em regime inelástico contínuo o vetor $\{\dot{\epsilon}^{\varphi, e}\}$ é substituído por $\{\dot{\epsilon}^o\}$. Além disto, na equação 3.64 também foi empregada a seguinte relação:

$$d\Omega(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2)) = \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \quad (3.65)$$

onde

$$\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) = \det[J(\eta_1, \eta_2)] \quad (3.66)$$

e

$$[J(\eta_1, \eta_2)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M^1(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial M^{n_c}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial M^1(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial M^{n_c}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ X_1^{n_c} & X_2^{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

sendo que n_c representa o número de pontos de interpolação da geometria da célula e η_i são coordenadas naturais de modo que $\eta_i \in [-1, +1]$.

Já o termo presente à esquerda na equação 3.53 pode ser escrito como:

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{u}_2(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = \{\dot{u}^J\} \quad (3.68)$$

Portanto, aplicando a equação 3.53 ao conjunto completo de pontos de colocação e considerando também as equações 3.62, 3.63, 3.64 e 3.68, chega-se à seguinte equação matricial:

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [G^u] \{\dot{t}\} - [H^u] \{\dot{u}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^u] \{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.69)$$

onde adota-se o sobrescrito Ω em $\{\dot{u}^\Omega\}$ para indicar que o vetor em questão é formado por componentes relacionadas a pontos internos.

Com relação à equação integral para deslocamento no contorno são empregadas as equações determinadas anteriormente (equações 3.62, 3.63 e 3.64), porém substituindo o índice J por I , uma vez que, agora, o ponto fonte se encontra sobre o contorno. Deste modo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 [u^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{t}^e\} = [G_e^I] \{\dot{t}^e\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 [t^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [H_e^I] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\sigma^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} = [Q_c^I] \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Neste caso, o termo livre à esquerda na equação 3.54 assume o seguinte formato:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) = \begin{bmatrix} c_{11}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{12}(\boldsymbol{\xi}^I) \\ c_{21}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{22}(\boldsymbol{\xi}^I) \end{bmatrix} = [C^I] \quad (3.73)$$

Sendo assim, aplicando a equação 3.54 ao conjunto completo de pontos de colocação no contorno e levando-se em conta, também, as equações 3.70 à 3.73, encontra-se:

$$[H] \{\dot{u}\} = [G] \{\dot{t}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}] \{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.74)$$

E por fim, introduzindo as equações 3.57, 3.58 e 3.59 na equação 3.55, encontram-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{t}^e\} = [\bar{G}_e^J] \{\dot{t}^e\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} t^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [\bar{H}_e^J] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \sigma^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^{\varphi, c}\} = [\bar{Q}_c^J] \{\dot{\epsilon}^{\varphi, c}\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde as formas matriciais do vetor à esquerda e do último termo à direita na equação 3.55 são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{22}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{12}(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = \{\dot{\epsilon}^J\} \quad (3.78)$$

e

$$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{bmatrix} F_{1111}^{\epsilon\epsilon} & F_{1122}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1112}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{2211}^{\epsilon\epsilon} & F_{2222}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2212}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{1211}^{\epsilon\epsilon} & F_{1222}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1212}^{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{22}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{12}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = [F^{\epsilon\epsilon, J}] \{\dot{\epsilon}^{\varphi, J}\} \quad (3.79)$$

Portanto, aplicando a equação 3.55 ao conjunto completo de pontos de colocação internos e considerando, também, as equações 3.75 à 3.79, chega-se à seguinte equação matricial:

$$\{\dot{\epsilon}\} = [G^e] \{t\} - [H^e] \{\dot{u}\} + [Q_{\epsilon^{\varphi}}^e] \{\dot{\epsilon}^{\varphi}\} \quad (3.80)$$

3.4.2.1 Tratamento Numérico das Integrais

As integrais apresentadas na seção anterior são resolvidas numericamente. Entretanto, em função da estrutura dos tensores provenientes da solução do problema fundamental de Kelvin, algumas dessas integrais apresentam núcleos de singularidade fraca ou forte, quando o elemento de contorno ou a célula interna contém o ponto fonte. Na tabela 3.1, são apresentados os graus de singularidade de cada uma delas.

Tabela 3.1: Grau de singularidade das integrais.

Integrais	Grau de singularidade
Equações 3.62, 3.63, 3.75 e 3.76	Regular
Equações 3.64, 3.70 e 3.72	Fraca
Equações 3.71 e 3.77	Forte

As integrais regulares são resolvidas por quadratura de Gauss convencional. As integrais fracamente singulares contendo os termos u_{ij}^* (equação 3.70) e σ_{ijk}^* (equações 3.64 e 3.72) são resolvidas, respectivamente, pelos métodos apresentados por Huang e Cruse (1993) e Lachat e Watson (1976). As integrais fortemente singulares do contorno (equação 3.71) e do domínio (equação 3.77) são, por sua vez, resolvidas respectivamente pelas metodologias descritas em Guiggiani e Casalini (1987) e Gao e Davies (2000).

3.5 Estratégia de Solução

A partir da consideração das condições de contorno essenciais e naturais, as equações 3.69, 3.74 e 3.80 podem ser reescritas como:

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [A^u]\{\dot{x}\} + [B^u]\{\dot{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^u]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.81)$$

$$[A]\{\dot{x}\} = [B]\{\dot{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.82)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [A^\epsilon]\{\dot{x}\} + [B^\epsilon]\{\dot{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.83)$$

onde as matrizes $[A]$ e $[B]$ são compostas por coeficientes advindos das matrizes $[H]$ e $[G]$ e os vetores $\{\dot{y}\}$ e $\{\dot{x}\}$ são constituídos, respectivamente, dos valores prescritos e incógnitos provenientes de $\{\dot{u}\}$ e $\{\dot{t}\}$.

Isolando o vetor $\{\dot{x}\}$ na equação 3.82, encontra-se:

$$\{\dot{x}\} = [N]\{\dot{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.84)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$[N] = [A]^{-1}[B]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}] = [A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] \quad (3.85)$$

Substituindo agora a equação 3.84 nas equações 3.81 e 3.83, obtém-se:

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [N^u]\{\dot{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.86)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [N^\epsilon]\{\dot{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (3.87)$$

onde os termos $[N^u]$, $[M_{\epsilon^\varphi}^u]$, $[N^\epsilon]$ e $[M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]$ são dados por:

$$[N^u] = [A^u][A]^{-1}[B] + [B^u]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}^u] = [A^u][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [Q_{\epsilon^\varphi}^u] \quad (3.88)$$

$$[N^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[B] + [B^\epsilon]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] \quad (3.89)$$

No presente tabalho as taxas podem ser substituídas por incrementos finitos, $(\dot{\cdot}) = \Delta(\cdot) \equiv (\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}$, uma vez que são considerados apenas modelos constitutivos independentes do tempo. Desta forma, as equações 3.84, 3.86 e 3.87 podem ser reescritas, para o i -ésimo incremento das cargas prescritas (vetor $\{y\}$), da seguinte forma:

$$\{x\}^i = \lambda^i [N]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (3.90)$$

$$\{\hat{u}^\Omega\}^i = \lambda^i [N^u]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (3.91)$$

$$\{\hat{\epsilon}\}^i = \lambda^i [N^\epsilon]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (3.92)$$

onde o termo λ^i , presente nas equações 3.90, 3.91 e 3.92, representa o fator de carga.

Deste modo, a partir da equação 3.92 pode-se definir um vetor resíduo de deformações ($\{Q\}^i \equiv \{Q(\hat{\epsilon}^i, \lambda^i)\}$) em função das deformações regulares e do fator de carga, ou seja:

$$\{Q\}^i = \lambda^i [N^\epsilon]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon](\{\hat{\epsilon}\}^i - [E^o]^{-1}\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon})\}^i) - \{\hat{\epsilon}\}^i = \{0\} \quad (3.93)$$

onde também foi considerada a equação constitutiva regularizada (equação 4.4) em sua forma matricial aplicada ao conjunto completo de células internas. Esta equação é obtida no capítulo 4 onde apresenta-se o conceito de célula com descontinuidade embutida. Além disto, na equação 3.93 o tensor $[E^o]$ representa agora, a matriz quase-diagonal elástica linear, referente ao conjunto dos pontos de colocação internos.

Neste caso, a equação 3.93 é resolvida utilizando a estratégia de solução empregada por Peixoto et al. (2016) onde o fator de carga é tratado como uma variável adicional de $\{Q^i\}$. Portanto, inicialmente reescreve-se a equação 3.93 como:

$$\{Q\}^i = \lambda^i \{P\} - \{F\}^i = \{0\} \quad (3.94)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$\{P\} = [N^e] \{y\} \quad (3.95)$$

$$\{F\}^i = \{\hat{\epsilon}\}^i - [M_{\epsilon^o}^e] (\{\hat{\epsilon}\}^i - [E^o]^{-1} \{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon})\}^i) \quad (3.96)$$

A equação 3.94 é agora linearizada utilizando a seguinte expressão:

$$\{Q\}_{j-1}^i + \left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \{\hat{\epsilon}\}} \right]_{j-1}^i \{\delta \hat{\epsilon}\}_j^i + \left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \lambda} \right]_{j-1}^i \delta \lambda_j^i \approx \{0\} \quad (3.97)$$

sendo j um índice iterativo e $\delta(\cdot)_j^i = (\cdot)_j^i - (\cdot)_{j-1}^i$.

Portanto, após aplicação da equação 3.97 à 3.94, chega-se ao seguinte resultado:

$$[D]_{j-1}^i \{\delta \hat{\epsilon}\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (3.98)$$

sendo:

$$[D]_{j-1}^i = \left[[I] - [M_{\epsilon^o}^e] [E^o]^{-1} \left([E^o] - \left[\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \hat{\epsilon}} \right]_{j-1}^i \right) \right] \quad (3.99)$$

Na equação 3.99 o termo $[I]$ representa uma matriz identidade e o termo $\left[\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \hat{\epsilon}} \right]$ representa o operador tangente da equação constitutiva regularizada.

Em vista disto, pode-se agora decompor o vetor de correção iterativa das deformações regulares (vetor $\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i$), presente na equação 3.98, da seguinte forma:

$$\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i + \{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (3.100)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$[D]_{j-1}^i \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i = \{P\} \quad (3.101)$$

$$[D]_{j-1}^i \{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i = \{Q\}_{j-1}^i \quad (3.102)$$

Ou seja, o vetor $\{\hat{\epsilon}^P\}_j^i$, presente na equação 3.101, representa a solução devido à carga externa $\{P\}$ enquanto que o vetor $\{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i$, presente na equação 3.102, está associado ao resíduo da condição de equilíbrio global (vetor $(\{Q\}_{j-1}^i)$).

Desta forma, também podem ser escritas expressões para as correções iterativas dos vetores contendo as incógnitas do contorno (vetor $(\{\delta x\}_j^i)$) e os deslocamentos internos (vetor $(\{\delta\hat{u}^\Omega\}_j^i)$). Portanto, considerando as equações 3.90 e 3.92, tem-se que:

$$\{\delta x\}_j^i = \{x\}_j^i - \{x\}_{j-1}^i = \delta\lambda_j^i [N] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}] \{\delta\epsilon^\varphi\}_j^i \quad (3.103)$$

$$\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i = \{\hat{\epsilon}\}_j^i - \{\hat{\epsilon}\}_{j-1}^i = \delta\lambda_j^i [N^\epsilon] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] \{\delta\epsilon^\varphi\}_j^i \quad (3.104)$$

Isolando o vetor $\{\delta\epsilon^\varphi\}_j^i$ na equação 3.104 e substituindo o resultado no último termo da equação 3.103, obtém-se:

$$\{\delta x\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{x^P\}_j^i + \{\delta x^Q\}_j^i \quad (3.105)$$

onde também foram consideradas as equações 3.95, 3.100 e 3.101. Além disto, na equação 3.105 as seguintes relações são válidas:

$$\{x^P\}_j^i = [N] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}] [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1} ([I] - [D]_{j-1}^i) \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i \quad (3.106)$$

$$\{\delta x^Q\}_j^i = [M_{\epsilon^\varphi}][M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1}\{\delta \hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (3.107)$$

E por fim, partindo-se da equação 3.91, pode-se mostrar que:

$$\{\delta \hat{u}^\Omega\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\hat{u}^{\Omega,P}\}_j^i + \{\delta \hat{u}^{\Omega,Q}\}_j^i \quad (3.108)$$

onde:

$$\{\hat{u}^{\Omega,P}\}_j^i = [N^u]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u][M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1}([I] - [D]_{j-1}^i)\{\hat{\epsilon}^P\}_j^i \quad (3.109)$$

$$\{\delta \hat{u}^{\Omega,Q}\}_j^i = [M_{\epsilon^\varphi}^u][M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1}\{\delta \hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (3.110)$$

Esta estratégia de solução é empregada nas análises numéricas apresentadas no capítulo 5. O algoritmo completo desta estratégia de solução é descrito no apêndice A.

Capítulo 4

Células com Campo de Deslocamentos Não-Uniformes

Neste capítulo é apresentada a nova classe de células com descontinuidade forte embutida desenvolvida neste trabalho. Estas células apresentam saltos não-uniformes para o campo de deslocamento em seu interior o que, até o presente momento, não havia sido considerado no âmbito do MEC. Apesar de serem levados em conta saltos lineares para o campo de deslocamentos, a metodologia aqui empregada é facilmente estendida a funções de ordem superior na representação destes saltos contribuindo também, neste caso, para uma generalização do conceito de células com descontinuidade forte embutida.

4.1 Equação de Equilíbrio da Interface Descontínua

As equações integrais 3.50, 3.51 e 3.52 não definem por completo o problema de valor de contorno em meios com a presença de descontinuidades, uma vez que a equação de continuidade interna das forças de superfície (equação 3.44c) não é atendida por estas equações. Deste modo, assim como em Oliver, Huespe, e Samaniego (2003), esta condição é imposta à parte adotando-se a forma forte da equação. Neste sentido,

inicialmente reescreve-se a equação 3.44c da seguinte forma:

$$t_i(\mathbf{X}, t) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) = \sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) \quad (4.1)$$

Aplicando as equações 3.45 e 3.46 à equação 4.1, chega-se à seguinte expressão:

$$f_i = \{ E_{ijkl}^o [\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^\varphi(\llbracket u_i \rrbracket, \llbracket u_{i,j} \rrbracket)] - \sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\epsilon_{ij}) \} n_j = 0 \quad (4.2)$$

onde ϵ_{ij} é obtido através da equação 3.43 considerando pontos sobre $\mathcal{S}$, isto é:

$$\epsilon_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^\varphi + \frac{1}{2h} (\llbracket u_i \rrbracket n_j + \llbracket u_j \rrbracket n_i) \quad (4.3)$$

A equação 4.2 é intitulada equação de equilíbrio da interface descontínua. No contexto do MEC, esta equação é resolvida numericamente empregando células com descontinuidade embutida, cuja solução fornece as componentes dos saltos nos deslocamentos. Estas componentes são necessárias para o cálculo do campo de deformações iniciais, ϵ_{ij}^φ , e são consideradas variando linearmente ao longo de $\mathcal{S}$ no interior das células. Além disto, estas componentes são obtidas adotando-se 2 pontos de colocação em oposição a trabalhos anteriores com o MEC onde apenas saltos uniformes foram considerados no interior das células. Neste caso, a consideração de saltos uniformes simplificava bastante a formulação, uma vez que seus gradientes se tornavam nulos. No entanto, problemas de travamento de tensões eram frequentemente observados (Mendonça et al., 2020). Deste modo, para um dado estado de deformação regular $\hat{\epsilon}_{ij}$ em cada um dos pontos de colocação, e considerando também a equação 4.3, tem-se que a equação 4.2 pode ser escrita como $f_i \equiv f_i(\llbracket u_i \rrbracket, \llbracket u_{i,j} \rrbracket) = 0$. Portanto, após a linearização desta equação, sua solução pode ser obtida através do método iterativo de Newton.

A partir destas considerações pode-se então definir uma equação constitutiva regularizada, que relaciona tensões com as deformações regulares $\hat{\epsilon}_{ij}$, utilizando a

equação 3.46, isto é:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\hat{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} \left(\hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij}), \llbracket u_{i,j} \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij})) \right) = E_{ijkl}^o (\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^{\varphi}) \quad (4.4)$$

onde os termos $\llbracket u_i \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij})$ e $\llbracket u_{i,j} \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij})$ são fornecidos através da solução da equação 4.2.

4.2 Descrição das Células com Saltos de Deslocamento Não-Uniformes

A partir da definição da função $\varphi(\mathbf{X})$ (equação 3.41), percebe-se que os efeitos dissipativos são restritos ao sub-domínio Ω_{φ} . Portanto, apenas esta região necessita ser discretizada por células como ilustrado através da figura 4.1a.

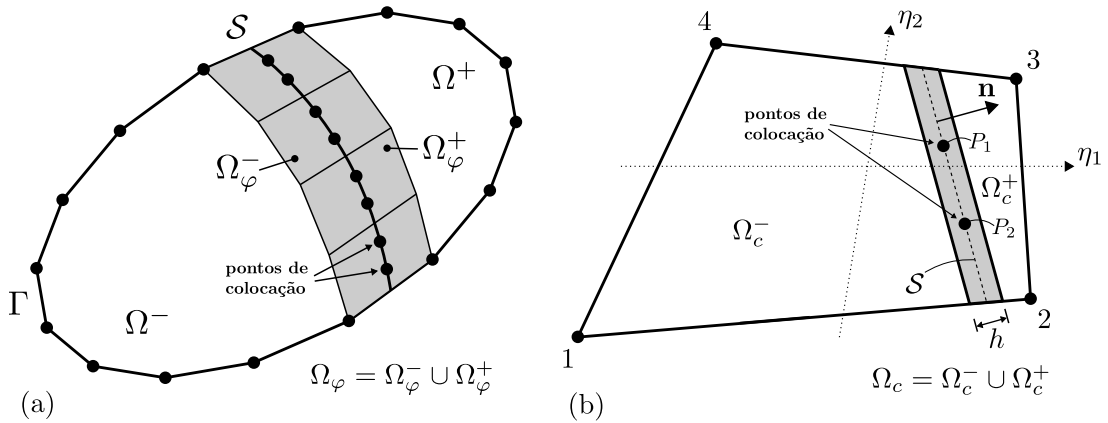


Figura 4.1: Discretização através do MEC de um sólido com superfície de descontinuidade: (a) domínio e contorno discretizados, (b) célula com descontinuidade embutida.

As células adotadas neste trabalho possuem inicialmente, durante o regime contínuo, apenas um ponto de colocação em seu interior, localizado em seu centróide. Considerando este único ponto, o início do regime de descontinuidades no interior das células é detectado de duas formas. Na primeira o regime de descontinuidades fortes é imposto diretamente ao fim do regime elástico com a direção da linha de descontinuidade sendo perpendicular à tensão principal máxima. No segundo caso

é empregado o modelo de banda variável descrito na seção 2.3.5 do capítulo 2, onde é realizada uma análise de bifurcação para detectar o instante de ativação deste regime, bem como para definir a direção da linha de descontinuidade. Posteriormente, após o início de um regime com descontinuidade, o ponto de colocação localizado no centróide é excluído do modelo numérico e outros dois pontos são inseridos ao longo de $\mathcal{S}$, assim como ilustrado através da figura 4.1b. Este processo é melhor detalhado mais adiante, na seção 4.5.

Os saltos no campo de deslocamentos no interior das células são obtidos através da solução numérica da equação de equilíbrio da interface descontínua (equação 4.2). Deste modo, considera-se que os saltos no campo de deslocamentos possuem uma variação linear no interior das células e são aproximados através da seguinte expressão:

$$\llbracket u_i \rrbracket(\bar{\xi}) \approx N_1(\bar{\xi})\llbracket u_i \rrbracket^1 + N_2(\bar{\xi})\llbracket u_i \rrbracket^2 \quad (4.5)$$

onde $\llbracket u_i \rrbracket^1$ e $\llbracket u_i \rrbracket^2$ representam os saltos no campo de deslocamentos nos pontos de colocação P_1 e P_2 , respectivamente (figura 4.1b).

Portanto, tomando como base a equação 4.5, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket(\bar{\xi}) \\ \llbracket u_2 \rrbracket(\bar{\xi}) \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} N_1(\bar{\xi}) & 0 & N_2(\bar{\xi}) & 0 \\ 0 & N_1(\bar{\xi}) & 0 & N_2(\bar{\xi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde os termos N_1 e N_2 são funções de interpolação dadas por:

$$N_1 = (1 - \bar{\xi})/2; \quad N_2 = (1 + \bar{\xi})/2 \quad (4.7)$$

Além disto, o termo $\bar{\xi}$ representa um eixo de coordenada adimensional definido ao longo da linha de descontinuidade como mostrado através da figura 4.2, e que pode ser expresso como:

$$\bar{\xi}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c \quad (4.8)$$

Já os parâmetros a , b e c na equação 4.8 são constantes escalares obtidas através das seguintes condições:

$$\bar{\xi}(x_1^1, x_2^1) = -1; \quad \bar{\xi}(x_1^2, x_2^2) = +1; \quad \bar{\xi}(x_1^n, x_2^n) = -1 \quad (4.9)$$

onde (x_1^1, x_2^1) e (x_1^2, x_2^2) representam as coordenadas dos pontos de colocação P_1 e P_2 , respectivamente, e (x_1^n, x_2^n) representa a coordenada cartesiana de um ponto fictício, P_N , posicionado ortogonalmente a partir da linha de descontinuidade e a uma distância unitária de P_1 . Esse esquema é detalhado na figura 4.2.

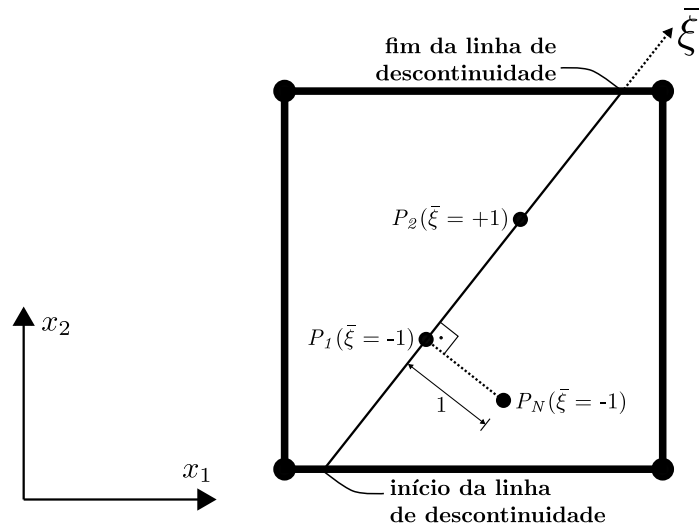


Figura 4.2: Condições para definição da coordenada adimensional $\bar{\xi}(x, y)$.

Além disto, a partir da equação 3.43, é considerada uma interpolação similar para $\epsilon_{ij}^\varphi(\mathbf{X})$ no interior da célula, isto é:

$$\{\epsilon^\varphi\} = N_1(\bar{\xi})\{\epsilon^{\varphi,1}\} + N_2(\bar{\xi})\{\epsilon^{\varphi,2}\} \quad (4.10)$$

onde $\{\epsilon^{\varphi,1}\}$ e $\{\epsilon^{\varphi,2}\}$ representam as três componentes de ϵ_{ij}^φ , respectivamente, nos pontos P_1 e P_2 .

Deste modo, a equação 4.10 é então considerada durante a avaliação das últimas integrais presentes nas equações 3.50, 3.51 e 3.52.

Por outro lado, a geometria das células é parametrizada por funções de forma lineares convencionais $M^\alpha(\eta_1, \eta_2)$ definidas pelas coordenadas naturais η_i , isto é:

$$X_j(\eta_1, \eta_2) \approx M^\alpha(\eta_1, \eta_2) X_j^\alpha \quad (4.11)$$

onde o índice α refere-se aos pontos de interpolação da geometria numerados de 1 a 4 na figura 4.1b.

Deste modo, em uma célula com descontinuidade forte embutida, um conjunto de pontos de colocação internos e um conjunto de pontos de interpolação da geometria devem ser distinguidos. Além disto, as funções de forma de interpolação da geometria também podem ser utilizadas para definir a função $\varphi(\mathbf{X})$ no interior das células, uma vez que as condições, $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ em $\Omega^- \setminus \Omega_\varphi^-$ e $\varphi(\mathbf{X}) = 1$ em $\Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+$, são satisfeitas pela escolha:

$$\varphi(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2)) = \sum_{\alpha^+} M^{\alpha^+}(\eta_1, \eta_2) \quad (4.12)$$

Neste caso, o somatório é realizado considerando as funções de interpolação associadas aos pontos localizados em Ω_c^+ . Por exemplo, os pontos 2 e 3 na figura 4.1b.

4.3 Cálculo dos Saltos no Campo de Deslocamentos

A partir da equação 3.43, com o objetivo de resolver a equação 4.2, pode-se escrever o vetor $\{\epsilon^\varphi\}$ em um ponto de colocação no interior de uma célula da seguinte forma:

$$\{\epsilon^\varphi\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^\varphi \\ \epsilon_{22}^\varphi \\ \epsilon_{12}^\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1} & 0 \\ 0 & \varphi_{,2} \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2} & \frac{1}{2}\varphi_{,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket \\ \llbracket u_2 \rrbracket \end{Bmatrix} - \mathcal{M}_S^\varphi \begin{Bmatrix} \llbracket u_{1,1} \rrbracket \\ \llbracket u_{2,2} \rrbracket \\ \frac{1}{2}\llbracket u_{1,2} \rrbracket + \frac{1}{2}\llbracket u_{2,1} \rrbracket \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde, levando-se em conta as equações 4.11 e 4.12, tem-se que:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial M^\alpha}{\partial \eta_k} X_i^\alpha \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_k} \left[\sum_{\alpha^+} M^{\alpha^+} \right] \right) \quad (4.14)$$

A equação 4.13 é avaliada separadamente nos pontos de colocação P_1 e P_2 . Além disto, expressões iguais a $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\varphi}(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\varphi}(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ podem ser consideradas para o parâmetro $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\varphi}$. Isto significa, a partir da equação 3.42, que ambos pontos de colocação podem estar localizados tanto em Ω_{φ}^{+} como em Ω_{φ}^{-} , adjacentes a $\mathcal{S}$. Uma melhor avaliação da influência deste parâmetro nos resultados é considerada nos exemplos numéricos presentes na seção 5.1 do capítulo 5.

O primeiro termo presente no lado direito da equação 4.13, após introdução da equação 4.6, é reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{,1}(\bar{\xi}) & 0 \\ 0 & \varphi_{,2}(\bar{\xi}) \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2} & \frac{1}{2}\varphi_{,1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket \\ \llbracket u_2 \rrbracket \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1} & 0 \\ 0 & \varphi_{,2} \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2} & \frac{1}{2}\varphi_{,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\bar{\xi}) & 0 & N_2(\bar{\xi}) & 0 \\ 0 & N_1(\bar{\xi}) & 0 & N_2(\bar{\xi}) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.15)$$

Por outro lado, para obter o segundo termo presente no lado direito da equação 4.13, deve ser determinada uma expressão genérica para o gradiente dos saltos no campo de deslocamentos. Deste modo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \llbracket u_{i,j} \rrbracket = \frac{\partial}{\partial X_j} \llbracket u_i \rrbracket &\approx \frac{\partial}{\partial X_j} \left(N_{\alpha}(\bar{\xi}) \llbracket u_i \rrbracket^{\alpha} \right) = \frac{\partial N_{\alpha}(\bar{\xi})}{\partial X_j} \llbracket u_i \rrbracket^{\alpha} = \left(\frac{\partial N_{\alpha}(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial X_j} \right) \llbracket u_i \rrbracket^{\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial N_1(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial X_j} \right) \llbracket u_i \rrbracket^1 + \left(\frac{\partial N_2(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial X_j} \right) \llbracket u_i \rrbracket^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Com isso, após a introdução das equações 4.7 e 4.8 na equação 4.16, as seguintes expressões são obtidas:

$$\llbracket u_{1,1} \rrbracket = \left(-\frac{1}{2}a \right) \llbracket u_1 \rrbracket^1 + \left(\frac{1}{2}a \right) \llbracket u_1 \rrbracket^2 \quad (4.17)$$

$$\llbracket u_{2,2} \rrbracket = \left(-\frac{1}{2}b \right) \llbracket u_2 \rrbracket^1 + \left(\frac{1}{2}b \right) \llbracket u_2 \rrbracket^2 \quad (4.18)$$

$$\llbracket u_{1,2} \rrbracket = \left(-\frac{1}{2}b \right) \llbracket u_1 \rrbracket^1 + \left(\frac{1}{2}b \right) \llbracket u_1 \rrbracket^2 \quad (4.19)$$

$$\llbracket u_{2,1} \rrbracket = \left(-\frac{1}{2}a \right) \llbracket u_2 \rrbracket^1 + \left(\frac{1}{2}a \right) \llbracket u_2 \rrbracket^2 \quad (4.20)$$

As equações 4.17 à 4.20 podem ser então agrupadas, gerando a seguinte expressão matricial para o vetor do gradiente dos saltos no campo de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} \llbracket u_{1,1} \rrbracket \\ \llbracket u_{2,2} \rrbracket \\ \frac{1}{2}\llbracket u_{1,2} \rrbracket + \frac{1}{2}\llbracket u_{2,1} \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{4}a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Aplicando agora as equações 4.15 e 4.21 na equação 4.13, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\epsilon^\varphi\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^\varphi \\ \epsilon_{22}^\varphi \\ \epsilon_{12}^\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1} & 0 \\ 0 & \varphi_{,2} \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2} & \frac{1}{2}\varphi_{,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{Bmatrix} - \mathcal{M}_S^\varphi \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{4}a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{Bmatrix} \\ &= [\nabla^s \varphi][N]\{\llbracket u \rrbracket\} - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}]\{\llbracket u \rrbracket\} \\ &= ([\nabla^s \varphi][N] - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}])\{\llbracket u \rrbracket\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Além disto, considerando as equações 4.3, 4.6 e 4.22, é encontrada a seguinte expressão para a equação de equilíbrio da interface descontínua (equação 4.2), para cada ponto de colocação:

$$\begin{aligned} \{f_k\} &= [\bar{N}^c]^T ([E^o]\{\hat{\epsilon}^k\} - [E^o][[\nabla^s \varphi][N] - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}]]\{\llbracket u \rrbracket\} \\ &\quad - \{\sigma_k^S(\{\hat{\epsilon}^k\} - [[\nabla^s \varphi][N] - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}]]\{\llbracket u \rrbracket\} + \frac{1}{h}[N^c][N]\{\llbracket u \rrbracket\})) = \{0\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $k = 1, 2$ (respectivamente, para P_1 e P_2) e:

$$[\bar{N}^c] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}; \quad [N^c] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ \frac{1}{2}n_2 & \frac{1}{2}n_1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Deste modo, para um dado estado de deformação regular em cada ponto de colocação, $\{\hat{\epsilon}^k\}$, a equação 4.23 pode ser resolvida pelo método de Newton após sua linearização, isto é:

$$\{f_k\}_{j-1} + \left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]_{j-1} \{\delta \llbracket u \rrbracket\}_j \approx 0 \quad (4.25)$$

onde j é um índice iterativo, $\{\delta \llbracket u \rrbracket\}_j = \{\llbracket u \rrbracket\}_j - \{\llbracket u \rrbracket\}_{j-1}$, e:

$$\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]_{j-1} = [\bar{N}^c]^T \left\{ -[E^o] \left([\nabla^s \varphi][N] - \mathcal{M}_S^c[\bar{J}] \right) - \left[\frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right]_{j-1} \left[-[\nabla^s \varphi][N] + \mathcal{M}_S^c[\bar{J}] + \frac{1}{h}[N^c][N] \right] \right\} \quad (4.26)$$

onde o termo $\left[\frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right]$ representa o operador tangente do modelo constitutivo contínuo, presente na equação 2.31, utilizado para representar os efeitos dissipativos sobre a linha de descontinuidade $\mathcal{S}$.

Desta forma, as equações 4.23, 4.25 e 4.26 são aplicadas simultaneamente aos dois pontos de colocação situados sobre a linha de descontinuidade resultando em um sistema de equações 4×4 , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{j-1} + \left[\left[\frac{\partial \{f_1\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right] \right]_{j-1} \begin{Bmatrix} \delta \llbracket u_1 \rrbracket^1 \\ \delta \llbracket u_2 \rrbracket^1 \\ \delta \llbracket u_1 \rrbracket^2 \\ \delta \llbracket u_2 \rrbracket^2 \end{Bmatrix}_j \approx \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Portanto, através da solução da equação 4.27 pelo método iterativo de Newton, são obtidas as componentes dos saltos no campo de deslocamentos no interior das células com descontinuidade embutida.

O algoritmo completo para o cálculo dos saltos nos deslocamentos dentro de uma célula com descontinuidade embutida é apresentado no apêndice B.

4.4 Modelo Constitutivo Regularizado e seu Operador Tangente

Baseado na formulação apresentada anteriormente, a relação constitutiva regularizada da equação 4.4 assume a seguinte forma para um ponto de colocação individual

no interior de uma célula:

$$\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon}^k)\} = [E^o](\{\hat{\epsilon}^k\} - \{\epsilon^{\varphi,k}\}) = [E^o] \left[\{\hat{\epsilon}^k\} - \left([\nabla^s \varphi][N(\bar{\xi}^k)] - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}] \right) \{\llbracket u \rrbracket\} \right] \quad (4.28)$$

Além disto, a estratégia de solução não-linear requer um operador tangente associado a essa equação constitutiva regularizada (Peixoto et al., 2018). Para tal, pode-se fazer:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \hat{\epsilon}^k} \right] = [E^o] \left([I] - \left[\frac{\partial \{\epsilon^\varphi\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^k\}} \right] \right) = [E^o] \left([I] - \underbrace{\left[\frac{\partial \{\epsilon^\varphi\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]}_{1^\circ \text{ termo}} \underbrace{\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]}_{2^\circ \text{ termo}}^{-1} \underbrace{\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^k\}} \right]}_{3^\circ \text{ termo}} \right) \quad (4.29)$$

O primeiro termo destacado na equação 4.29 é dado por:

$$\left[\frac{\partial \{\epsilon^\varphi\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right] = \left([\nabla^s \varphi][N(\bar{\xi}^k)] - \mathcal{M}_S^\varphi[\bar{J}] \right) \quad (4.30)$$

onde a equação 4.22 foi considerada.

O segundo termo destacado é obtido empregando o conceito de matriz pseudo-inversa (Ben-Israel e Greville, 2003), uma vez que $\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]$ é uma matriz não-quadrada. Neste caso, tem-se que:

$$\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]^T \left(\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right] \left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]^T \right)^{-1} \quad (4.31)$$

E por fim, o último termo destacado é obtido a partir da equação 4.23, isto é:

$$\left[\frac{\partial \{f_k\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^k\}} \right] = [\bar{N}^c]^T \left([E^o] - \left[\frac{\partial \{\sigma_k^S\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^k\}} \right] \right) \quad (4.32)$$

4.5 Algoritmo Automático de Geração de Células

Nas análises numéricas será empregado um algoritmo de geração de células similar ao adotado por Peixoto et al. (2018). As mesmas modificações nas matrizes da formulação implícita, quando uma nova célula em regime elástico for gerada, são realizadas.

No entanto, no trabalho de Peixoto et al. (2018) são consideradas células com saltos uniformes e, portanto, com o ponto de colocação fixo no interior da célula ao longo de toda a análise. Deste modo, modificações adicionais devem ser consideradas de modo a possibilitar a exclusão deste ponto, bem como a inserção dos 2 novos pontos de colocação que se encontrarão agora sobre a linha de descontinuidade. Um esquema destas modificações é apresentado através da figura 4.3.

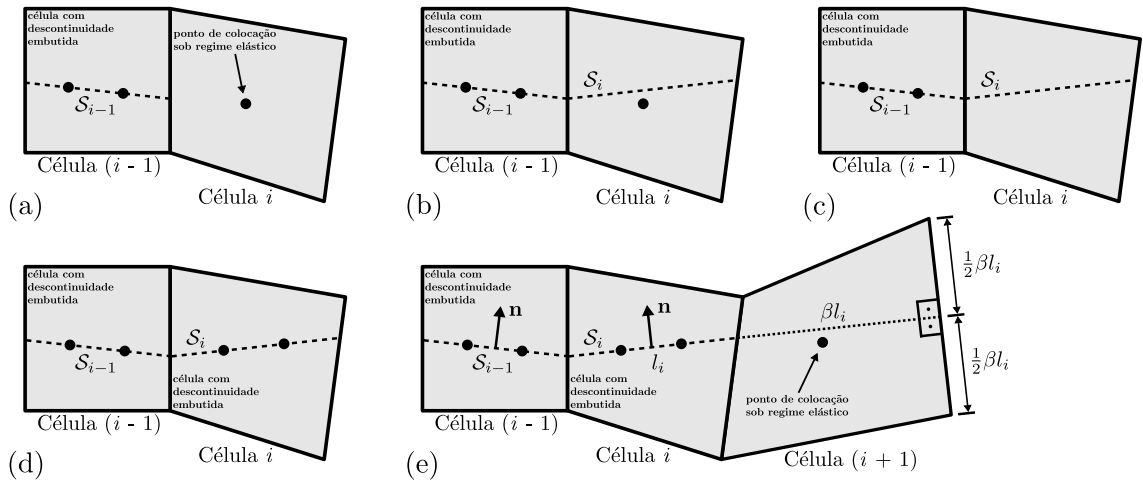


Figura 4.3: Algoritmo automático de geração de células: (a) célula i em regime elástico, (b) traçado da linha de descontinuidade na célula i , (c) eliminação do ponto de colocação na célula i , (d) inserção dos 2 novos pontos de colocação na célula i , (e) geração de uma nova célula em regime elástico (célula $(i + 1)$).

Em frente à última célula em regime de descontinuidades (fracas ou fortes) (célula $(i - 1)$ na figura 4.3a) há sempre uma célula em regime elástico (célula i , também apresentada na figura 4.3a). Quando o regime de descontinuidades é acionado nesta última célula, uma linha de descontinuidade retilínea é introduzida (figura 4.3b), garantindo a continuidade desta linha (linhas S_{i-1} e S_i). Então, o ponto de colocação localizado no centróide da célula i é excluído do modelo numérico (figura 4.3c) e outros dois pontos de colocação são inseridos sobre a linha de descontinuidade (figura 4.3d). Neste caso, os pontos são inseridos simetricamente ao longo de S_i ,

ou seja, a $1/3$ e $2/3$ do comprimento da linha de descontinuidade, l_i . Finalmente, com referência à figura 4.3e, uma nova célula $(i + 1)$ é gerada segundo os seguintes passos:

- i. O lado da célula i interceptado pela extremidade final da linha de descontinuidade é assumido como sendo o lado inicial da nova célula (célula $(i + 1)$);
- ii. Um segmento de reta é desenhado a partir da extremidade final da linha de descontinuidade da célula anterior (célula i) seguindo a mesma orientação, porém, com o seu comprimento multiplicado por um fator de escala, β ;
- iii. O lado oposto da nova célula é criado perpendicularmente à linha de descontinuidade e possui o mesmo comprimento que este segmento. Além disto, o ponto final deste segmento intercepta o ponto médio do lado oposto recém criado;
- iv. Os outros dois lados da nova célula são criados conectando as extremidades do lado inicial e final da nova célula.

Neste caso, o uso do parâmetro β se torna importante em alguns casos de modo a prevenir instabilidades numéricas e também na redução do tempo de processamento numérico (Mendonça et al., 2018). Uma descrição das modificações realizadas nas matrizes da formulação implícita associadas à exclusão do ponto de colocação localizado no centróide e à inserção dos 2 novos pontos localizados sobre a linha de descontinuidade é apresentada no apêndice C.

Vale ressaltar ainda que, no caso da introdução direta do regime de descontinuidades fortes, os 2 novos pontos criados se encontrarão no início do regime não-linear. Contudo, no caso do emprego do modelo de banda variável esta condição não é necessariamente verdadeira, sendo possível que o ponto de colocação inicial já se encontre em regime inelástico contínuo quando for detectada bifurcação no campo de deformações. Deste modo, para este caso, as variáveis constitutivas deste ponto são

”herdadas” pelos 2 novos pontos criados de modo que não haja perda de informação constitutiva. Além disto, no algoritmo empregado é garantido que estes pontos se encontrem sempre no mesmo regime de descontinuidades, isto é, uma vez que um dos pontos entre em regime de descontinuidade forte o outro ponto é automaticamente ”forçado” a entrar neste mesmo regime.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos obtidos empregando a nova classe de células desenvolvida neste trabalho. São analisados numericamente uma série de problemas envolvendo fratura em meios parcialmente frágeis, sendo muitos deles com resultados experimentais disponíveis na literatura. Também são apresentados resultados obtidos com células contendo saltos uniformes no campo de deslocamentos, de modo a comparar as diferentes formulações.

Todas as análises foram realizadas considerando o estado plano de tensões e o modelo de dano isotrópico, descrito no capítulo 2, foi empregado para representar os efeitos dissipativos que ocorrem nas linhas de descontinuidades no interior das células com descontinuidade embutida. Neste caso, foram consideradas leis de amolecimento exponencial com deformação equivalente calculada assim como em Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006).

A detecção e a orientação da linha de descontinuidade no interior das células foi determinada de duas formas. Na primeira foram consideradas análises onde o regime de descontinuidade forte é introduzido diretamente após o término do regime elástico. Para este caso, a linha de descontinuidade é orientada perpendicularmente à direção da tensão principal máxima. Além disto, uma largura de banda igual a $k = 0.01$ mm

é considerada para a lei de evolução da variável escalar de dano expressa através da equação 2.61. No segundo caso, foram consideradas análises com o modelo de banda variável descrito na seção 2.3.5 do capítulo 2, com uma lei de variação linear de banda assim como descrito através da figura 2.9. Neste caso, também foi considerado $k = 0.01$ mm e um valor igual a $q_{SD} = 0.9q_B$ foi assumido para a variável interna do tipo tensão no instante em que se inicia o regime de descontinuidade forte. Uma tolerância de convergência igual a 1×10^{-4} foi empregada nos algoritmos apresentados nos apêndices A e B. Além disto, nos exemplos com propagação, as células são geradas apenas após a convergência do passo da análise não-linear.

5.1 Tração e Flexão Simples

5.1.1 Tração e Flexão Simples com o Emprego de Uma Célula Interna

Os primeiros exemplos analisados numericamente correspondem a um problema de tração simples e a um problema de flexão simples, com o emprego de apenas uma célula interna. Neste caso, apenas análises com descontinuidade forte direta foram consideradas. Um desenho esquemático destes dois problemas é apresentado através da figura 5.1 onde geometria, carregamento e propriedades do material são apresentadas.

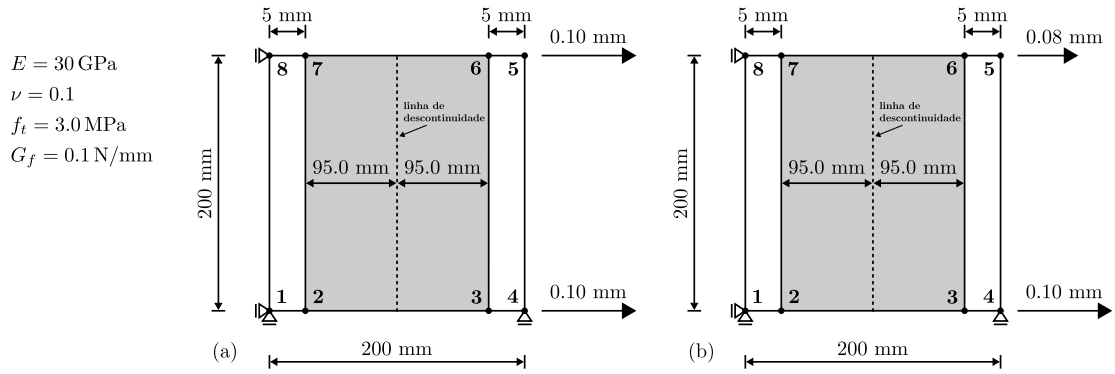


Figura 5.1: Tração e flexão simples com uma célula interna: (a) tração simples, (b) flexão simples.

O contorno foi dividido em 8 elementos lineares com os pontos de colocação numerados assim como mostrado na figura 5.1. No exemplo envolvendo tração simples, um deslocamento horizontal prescrito de 0.10 mm foi imposto nos pontos de colocação 4 e 5 e, no exemplo envolvendo flexão simples, deslocamentos horizontais prescritos de 0.10 mm e 0.08 mm foram impostos nos pontos de colocação 4 e 5, respectivamente. Análises foram realizadas considerando células com um ponto de colocação, isto é, com saltos uniformes para o campo de deslocamentos, assim como nos trabalhos de Peixoto et al. (2017, 2018), e com a célula desenvolvida neste trabalho com dois pontos de colocação, ou seja, com saltos não-uniformes para o campo de deslocamentos. Foram adotados 150 passos durante o processo incremental-iterativo da análise não-linear e empregado o método de controle de carregamento (que neste caso seriam os deslocamentos prescritos). A linha de descontinuidade foi imposta iniciando no meio do segmento composto pelos nós 2 e 3 e com orientação ortogonal a este mesmo segmento.

Inicialmente, para as células não-uniformes, foram realizadas simulações considerando uma expressão igual a $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ presente na equação 4.13. No problema envolvendo tração simples, os valores das

forças de superfície horizontais obtidas nos pontos de colocação 4 e 5 foram traçados em função do deslocamento horizontal imposto na aresta formada pelos nós 4 e 5. Estes resultados são apresentados através da figura 5.2.

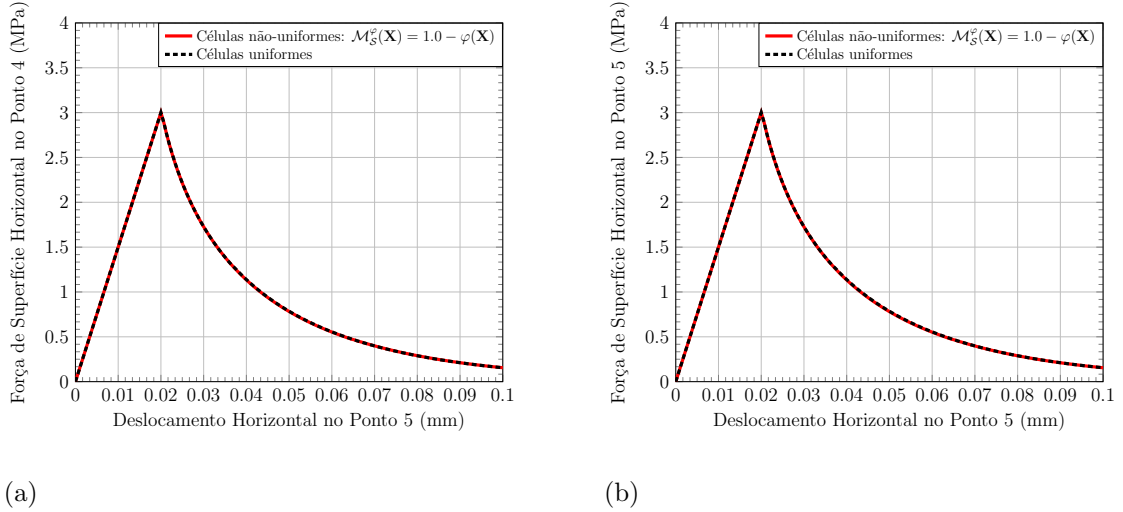


Figura 5.2: Tração simples com uma célula: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 4, (b) força de superfície horizontal no ponto de colocação 5.

Já nos resultados envolvendo flexão simples, os valores das forças de superfície horizontais nos pontos de colocação 4 e 5 foram plotados em função do deslocamento horizontal imposto ao nó 5. Estes resultados são apresentados na figura 5.3.

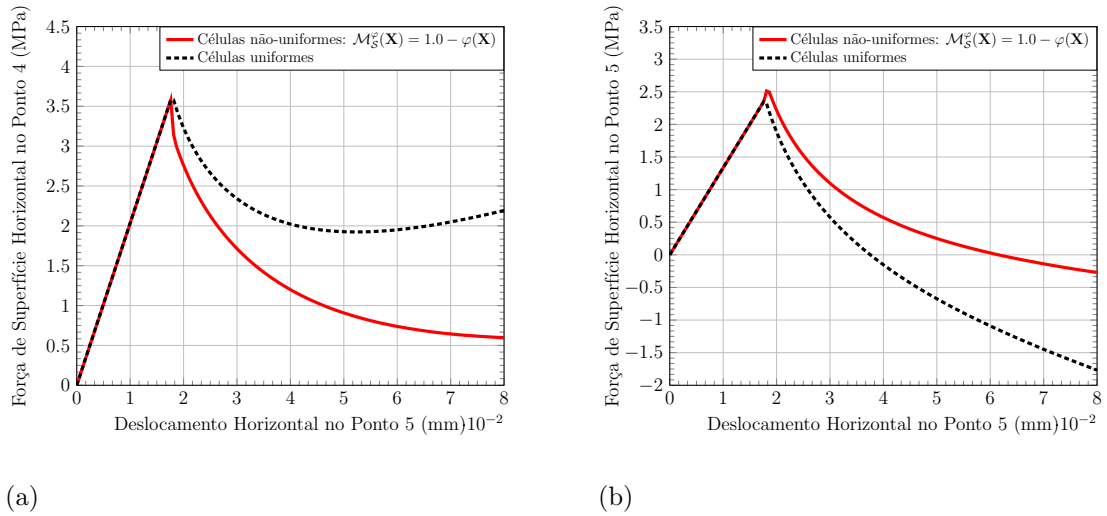


Figura 5.3: Flexão simples com uma célula: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 4, (b) força de superfície horizontal no pontos de colocação 5.

Como pode ser observado através da figura 5.2, os resultados obtidos com o emprego de células uniformes e não-uniformes foram similares para o problema de tração simples. Este comportamento já era esperado uma vez que ambas as células são capazes de representar adequadamente o movimento de translação entre as duas partes da célula que ocorre durante a abertura. Neste caso, é necessário o emprego de apenas um ponto de colocação para capturar de forma adequada este tipo de movimento. Neste problema as componentes dos saltos $\llbracket u_1 \rrbracket$ são constantes no interior da célula e as componentes $\llbracket u_2 \rrbracket$ são nulas, fazendo com que o vetor dos gradientes dos saltos, presente na equação 4.13, seja nulo. Além disso, o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ se torna o fator de multiplicação de um vetor nulo e, portanto, não possuirá influência nos resultados obtidos.

Com relação ao problema de flexão simples pode-se observar através da figura 5.3 comportamentos bastantes distintos entre os resultados provenientes das análises com células uniformes e não-uniformes. Células uniformes não são capazes de representar o movimento rotacional relativo entre suas partes divididas pela linha de descontinuidade induzindo, deste modo, um elevado travamento de tensão na resposta estrutural. Este fenômeno pode ser observado através da acentuada força de superfície positiva obtida para o nó 4 na parte final da curva de equilíbrio (figura 5.5a) e da acentuada (e irreal) força de superfície negativa obtida para o nó 5 (figura 5.5b). Já as células não-uniformes apresentam um comportamento mais realístico devido aos valores das forças de superfície nos nós 4 e 5 se aproximarem mais de zero (tendendo assintoticamente) nos estágios finais da análise. Isto é, estas células conseguiram acomodar melhor as tensões provenientes dos diferentes deslocamento impostos aos nós 4 e 5, tornando-as mais adequadas nas análise de problemas que envolvem modos mistos de fratura.

Para avaliar a influência do parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$, também foram realizadas simulações

empregando-se expressões iguais a $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.5 - \varphi(\mathbf{X})$. Ou seja, assim como discutido na seção 4.3 do capítulo 4, os pontos de colocação no interior das células em regime com descontinuidades se encontram sobre a linha de descontinuidade sendo possível, portanto, a escolha tanto de $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ como de $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para este parâmetro. Neste caso, dada esta indefinição, a expressão $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.5 - \varphi(\mathbf{X})$ também foi considerada, uma vez que equivale à média entre as outras duas.

Os resultados obtidos para o problema envolvendo tração simples são apresentados através da figura 5.4 considerando as análises empregando diferentes expressões para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$.

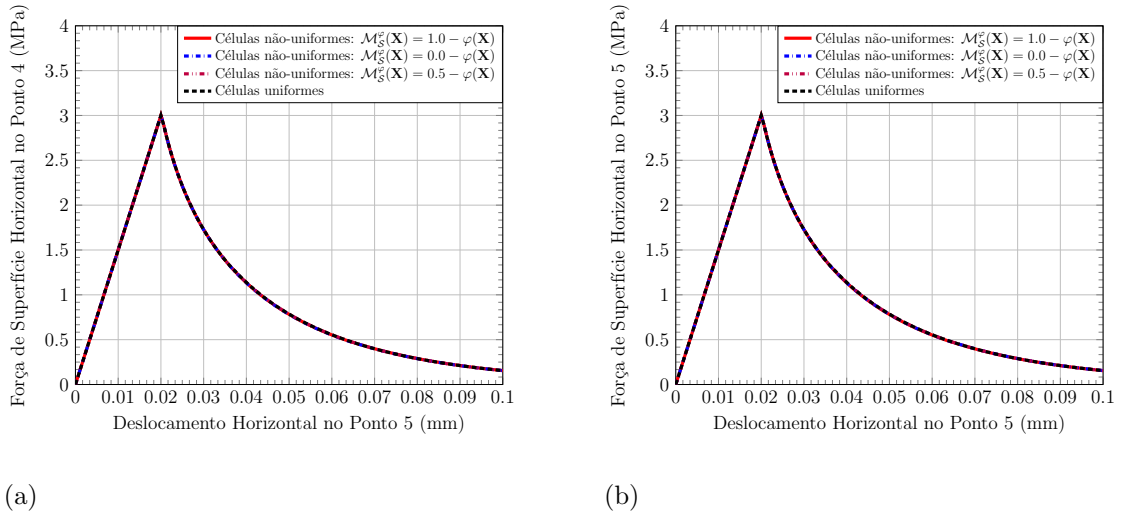


Figura 5.4: Tração simples com uma célula considerando diferentes expressões para $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 4, (b) força de superfície horizontal no ponto de colocação 5.

Já os resultados envolvendo flexão simples são apresentados na figura 5.5.

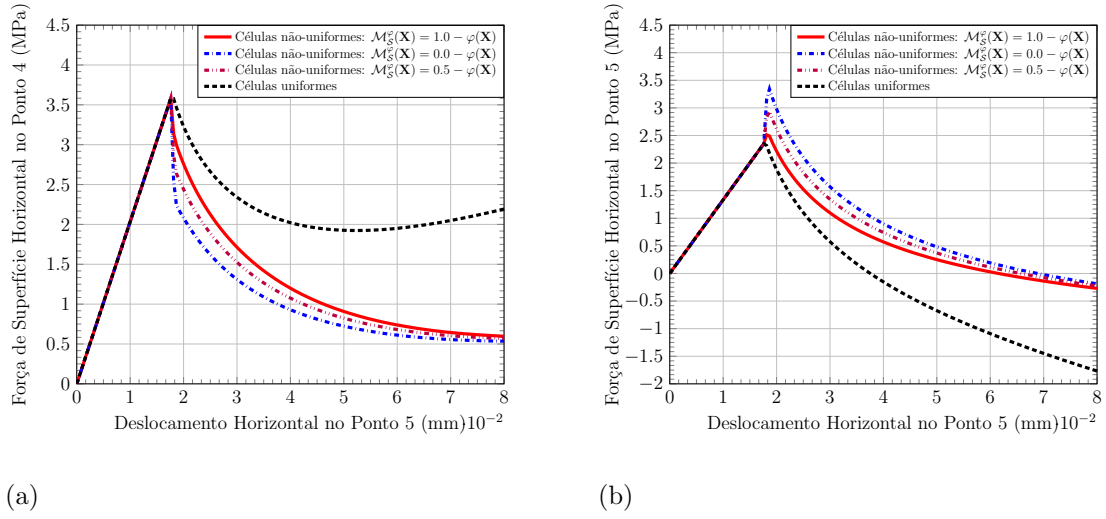


Figura 5.5: Flexão simples com uma célula considerando diferentes expressões para $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 4, (b) força de superfície horizontal no pontos de colocação 5.

Pode ser observado através da figura 5.4 que o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ não possui influência nos resultados obtidos para o ensaio de tração simples, assim como já mencionado anteriormente. Contudo, com relação ao problema de flexão simples, pode-se observar através da figura 5.5 que o valor considerado para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ passa agora a ter influência sobre os resultados obtidos. Conforme observado através da equação 4.13, verifica-se que a influência deste parâmetro está associada exclusivamente ao vetor dos gradientes dos saltos. Este vetor, por sua vez, está relacionado à magnitude e direção de abertura que a célula experimenta durante os regimes de descontinuidades. Deste modo, é de se esperar que o emprego de diferentes valores para $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ possa resultar na obtenção de diferentes trajetórias de equilíbrio, bem como influenciar na direção de propagação das células.

5.1.2 Tração e Flexão Simples com o Emprego de Oito Células Internas

Para se ter uma melhor ideia da influência do parâmetro $\mathcal{M}_S^{\varphi}(\mathbf{X})$ em modelos compostos por múltiplas células, foram analisados novamente os problemas de tração e flexão simples apresentados na seção anterior considerando, no entanto, 8 células internas pré-fixadas. Um desenho esquemático deste novo modelo é mostrado através da figura 5.6. As análises foram realizadas considerando descontinuidade forte direta e a linha de descontinuidade foi fixada ortogonalmente ao segmento composto pelos nós 3 e 4. Foram considerados 100 passos durante o processo incremental-iterativo da análise não-linear e o mesmo deslocamento prescrito de 0.10 mm foi adotado no problema de tração simples. Contudo, foram adotados agora 14 elementos lineares na discretização do contorno e, no problema de flexão simples, deslocamentos de 0.30 mm e 0.05 mm foram impostos nos pontos de colocação 6 e 7, respectivamente, de modo a representar uma solicitação de flexão ainda mais acentuada.

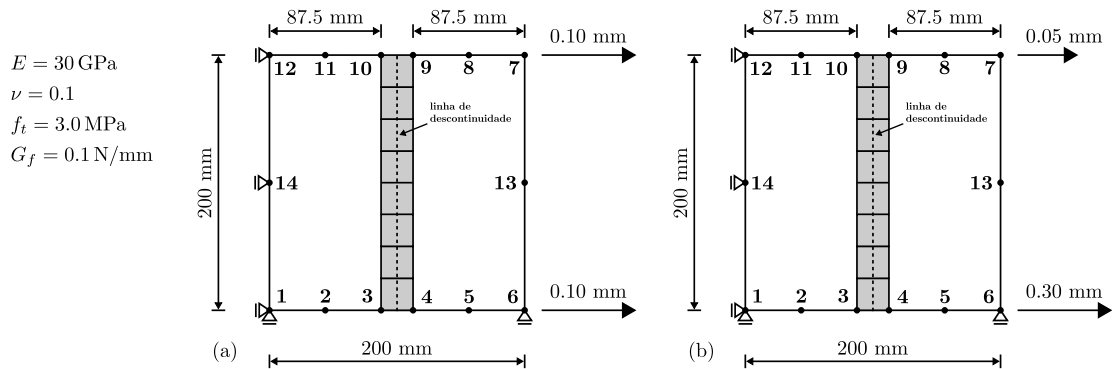


Figura 5.6: Tração e flexão simples com oito células internas: (a) tração simples, (b) flexão simples.

Um desenho esquemático das malhas empregadas, considerando os dois tipos de células, é apresentado através da figura 5.7.

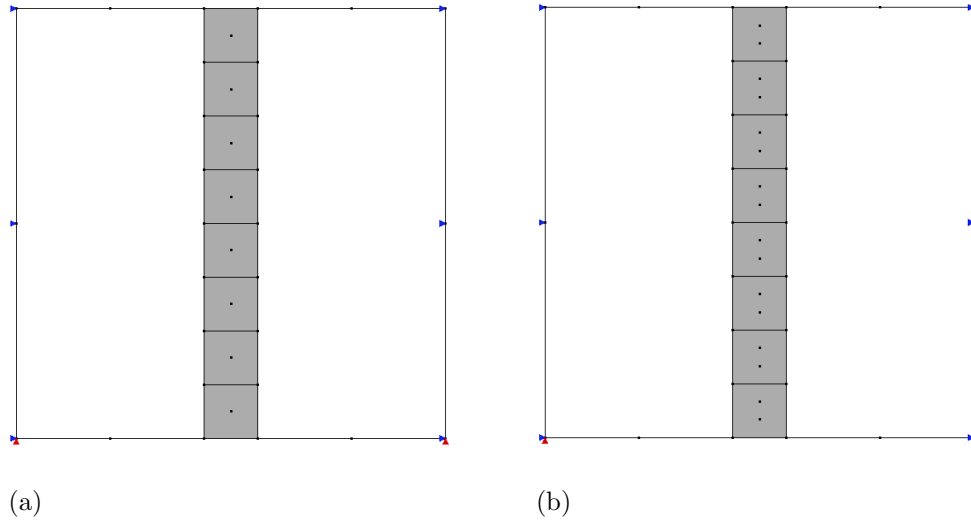


Figura 5.7: Malha adotada nos ensaios de tração e flexão simples empregando oito células internas: (a) malha com células uniformes, (b) malha com células não-uniformes.

Nas análises com células não-uniformes foram realizadas 3 simulações considerando expressões distintas para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$. Nas duas primeiras análises foram consideradas expressões iguais a $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para todas as células. Na última simulação, este parâmetro foi intercalado entre os valores $1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ ao longo da linha de células começando por $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ na célula inferior e terminando com $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ na célula superior. Os resultados obtidos para o problema de tração simples são apresentados na figura 5.8.

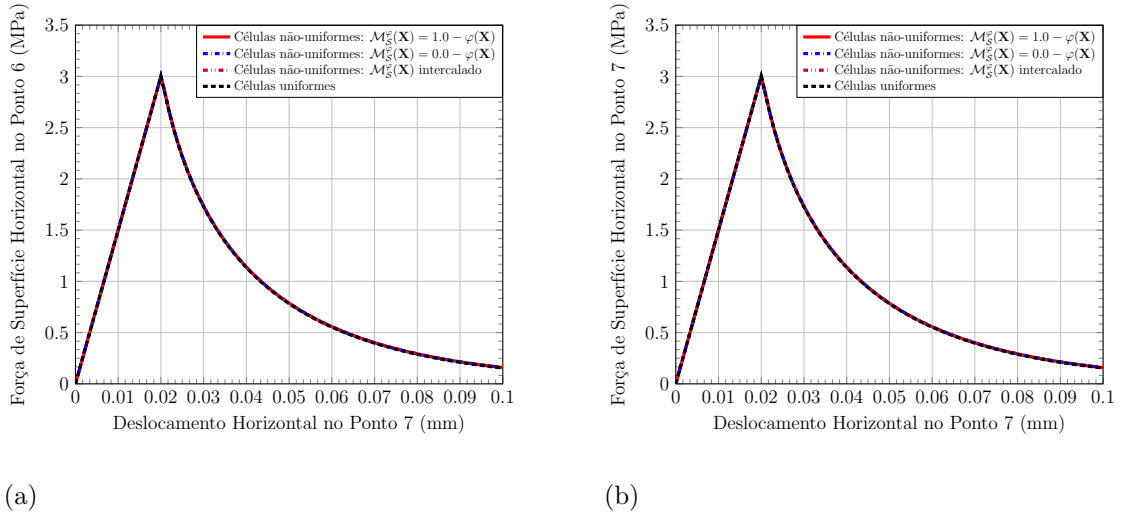


Figura 5.8: Tração simples com oito células: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 6, (b) força de superfície horizontal no ponto de colocação 7.

Já os resultados obtidos para o problema de flexão simples são apresentados na figura 5.9. Nesta figura, assim como na figura 5.8, também são apresentados os resultados obtidos na análise empregando células uniformes.

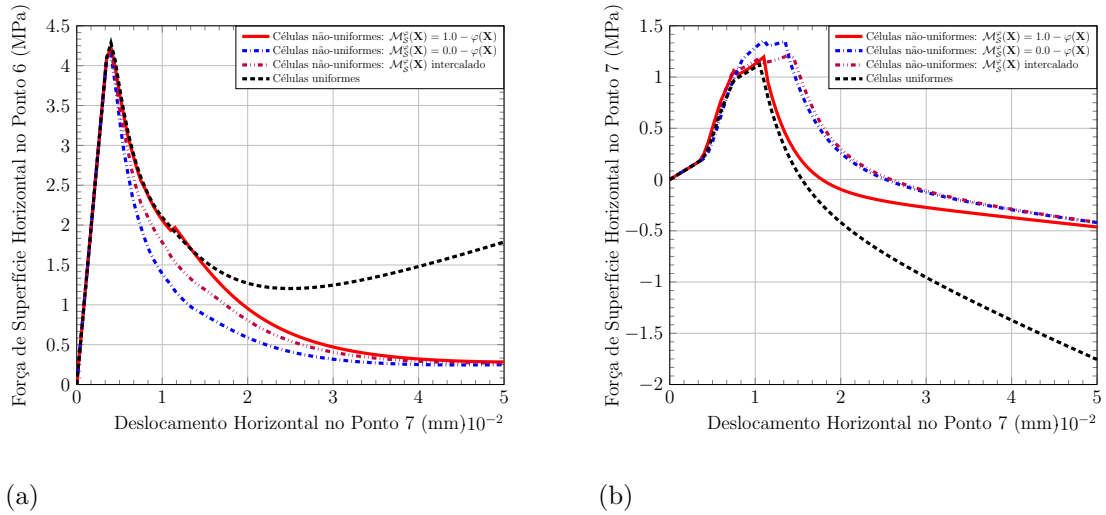


Figura 5.9: Flexão simples com oito células: (a) força de superfície horizontal no ponto de colocação 6, (b) força de superfície horizontal no ponto de colocação 7.

Como observado através da figura 5.8 os resultados obtidos nas análises com células uniformes e não-uniformes foram coincidentes no problema de tração simples

assim como no exemplo da seção anterior empregando apenas uma célula interna. Já no problema de flexão simples, pode ser observado através da figura 5.9 que as análises com células uniformes apresentaram um elevado travamento de tensões na resposta estrutural mesmo com o emprego de 8 células internas. Contudo, a utilização de células não-uniformes mostrou-se novamente eficaz na redução deste fenômeno independente da expressão empregada para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$. Neste caso, as curvas obtidas na figura 5.9b, adotando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ intercalado, apresentaram uma maior concordância. Já a curva obtida utilizando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ divergiu ligeiramente destas duas curvas logo após o pico sem influenciar, contudo, no alívio esperado para o campo de tensões que também é observado nos estágios finais da análise para este caso.

Observa-se através da figura 5.9a que a curva obtida considerando valores intercalados de $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ representa um caso intermediário entre aquelas obtidas empregando expressões iguais a $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$. Baseado nestes resultados, considera-se nas análises que se seguem valores intercalados para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ ao longo da linha de células. Tal escolha também é justificada, dada a indefinição deste parâmetro sobre pontos situados ao longo da linha de descontinuidade.

5.2 Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982)

O segundo exemplo a ser analisado é o cisalhamento com força em quatro pontos em vigas de concreto que foi estudado experimentalmente por Arrea e Ingraffea (1982). Este ensaio é mostrado através da figura 5.10 onde geometria, carregamento e propriedades do material são apresentadas.

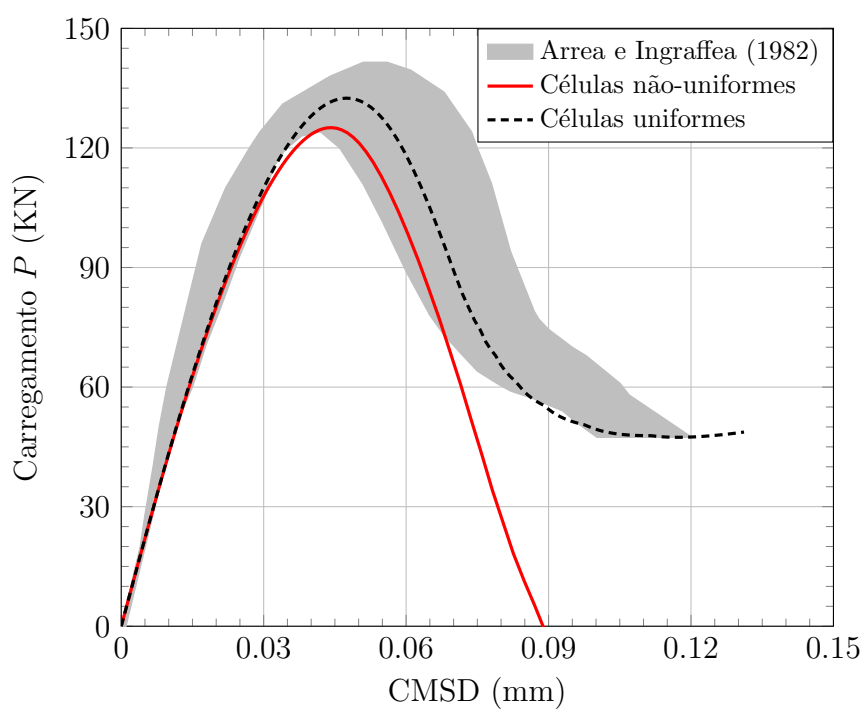


Figura 5.11: Resultados para a carga P versus CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*) para o ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) considerando descontinuidade forte direta.

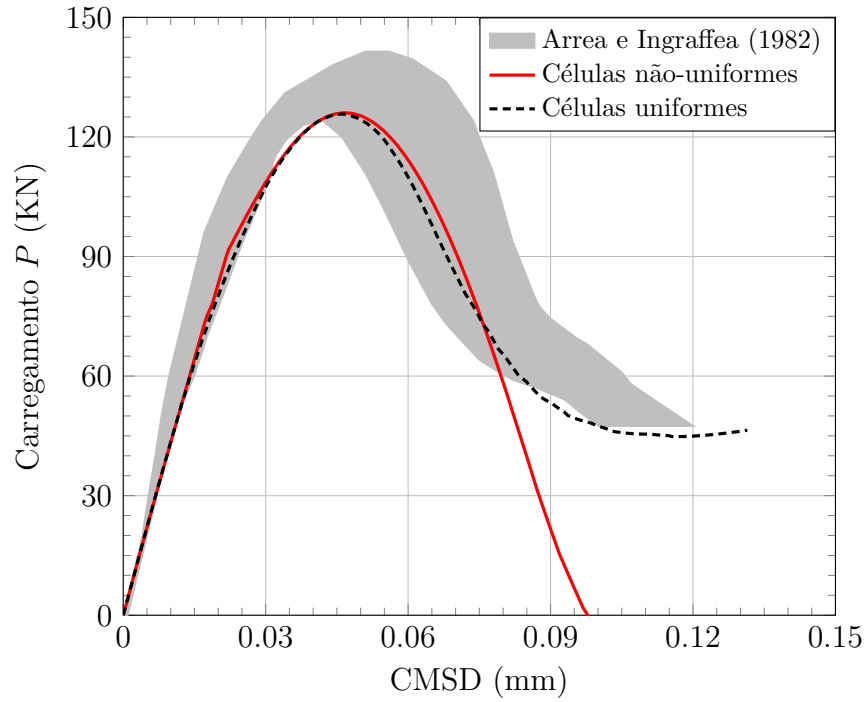


Figura 5.12: Resultados para a carga P versus CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*) para o ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) considerando o modelo de banda variável.

As malhas finais obtidas para as simulações com células não-uniformes são apresentadas através das figuras 5.13 e 5.14 considerando descontinuidade forte direta e o modelo de banda variável, respectivamente.

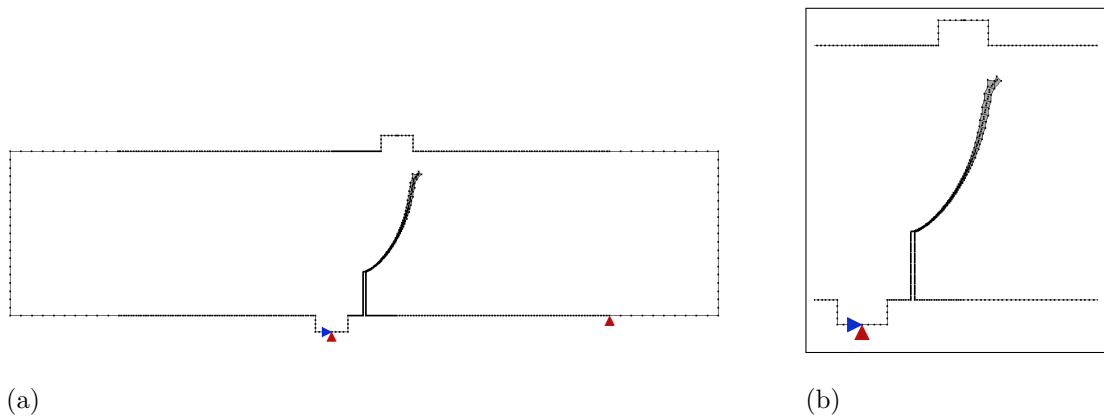


Figura 5.13: Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.

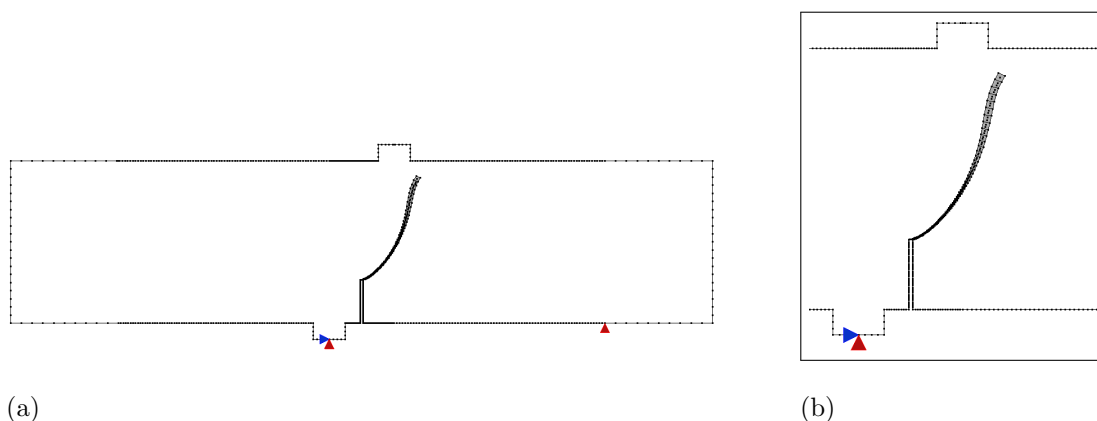


Figura 5.14: Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com o modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

Pode-se observar através das figuras 5.11 e 5.12 que as análises empregando células uniformes apresentaram, em algum grau, o fenômeno de travamento de tensões impedindo o alívio total das tensões associado ao colapso final da estrutura. Por outro lado, o descarregamento total esperado é observado nos resultados empregando a nova classe de células tanto nas análises com descontinuidade forte direta quanto nas análises utilizando o modelo de banda variável.

5.3 Viga Simétrica com Flexão em Três Pontos: Petersson (1981)

Este exemplo trata-se de uma viga simétrica pré-entalhada feita de concreto e submetida à flexão em três pontos que foi estudada por Petersson (1981). O desenho esquemático deste problema é apresentado através da figura 5.15 onde propriedades, carregamento e geometria são apresentadas.

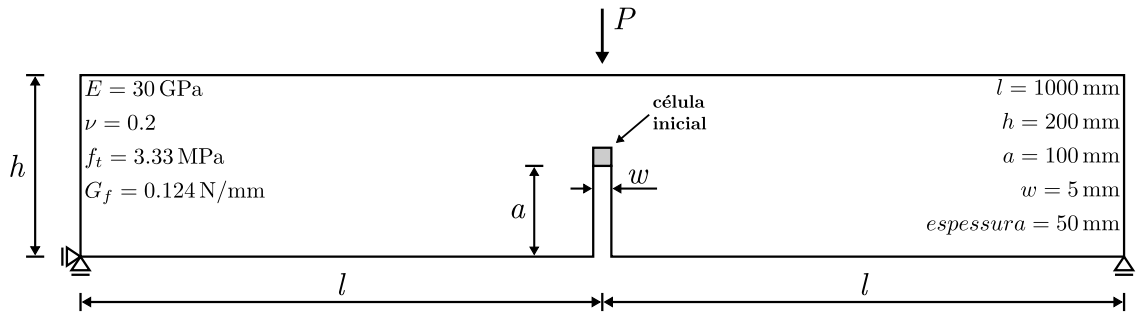


Figura 5.15: Desenho esquemático do ensaio de flexão em três pontos em uma viga simétrica.

Na discretização do contorno foram adotados 699 elementos lineares e uma célula quadrada foi introduzida na ponta do entalhe. No algoritmo automático de geração de células foi empregado $\beta = 1.0$ sendo o lado da célula inicial igual à largura do entalhe. Já no processo incremental-iterativo foram utilizados 170 passos e o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga foi controlado durante a análise não-linear. Vale ressaltar que, para este problema, foram observados comportamentos bastantes distintos entre as análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável. Deste modo, estes dois casos são analisados separadamente como mostrado à seguir.

5.3.1 Análises com Descontinuidade Forte Direta

Nas análises com descontinuidade forte direta foram constatadas instabilidades numéricas devido à não captura adequada da trajetória da fissura. Fato este foi observado tanto no emprego das células não-uniformes quanto no emprego das células uniformes. As malhas finais obtidas para estes dois casos são apresentadas, respectivamente, através das figuras 5.16 e 5.17.

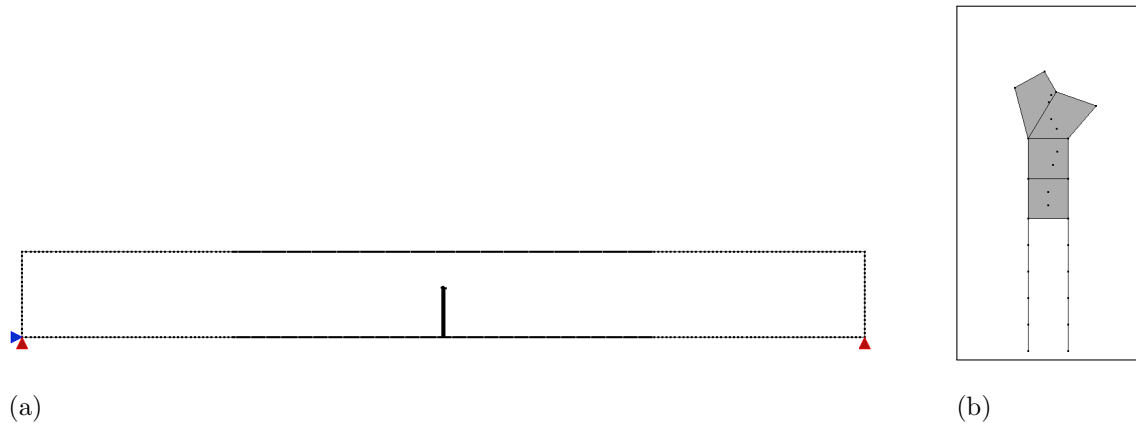


Figura 5.16: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com descontinuidade forte direta empregando células não-uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

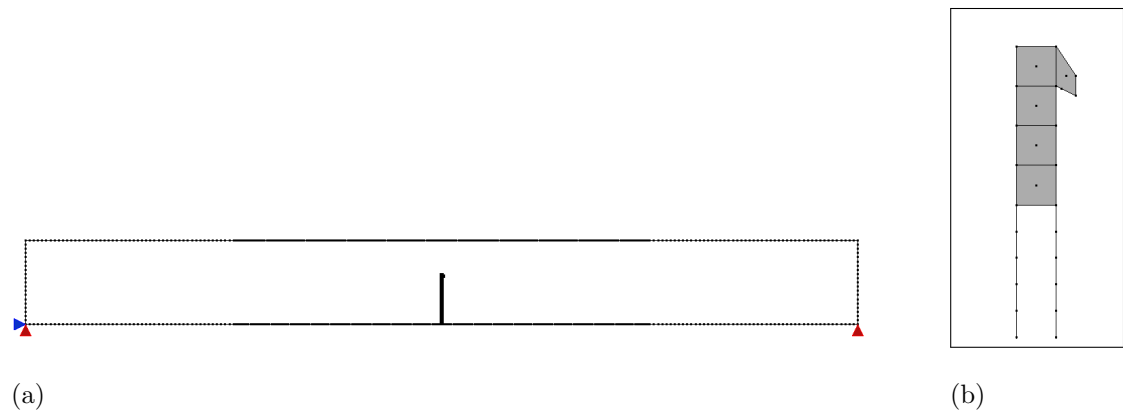


Figura 5.17: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com descontinuidade forte direta empregando células uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

Deste modo, devido à simetria do problema, a orientação da linha de descontinuidade foi pré-definida no interior das células de modo que a trajetória de trinca obtida fosse um segmento de reta vertical. As malhas finais obtidas nestas novas análises são apresentadas nas figuras 5.18 e 5.19 para as células não-uniformes e células uniformes, respectivamente.

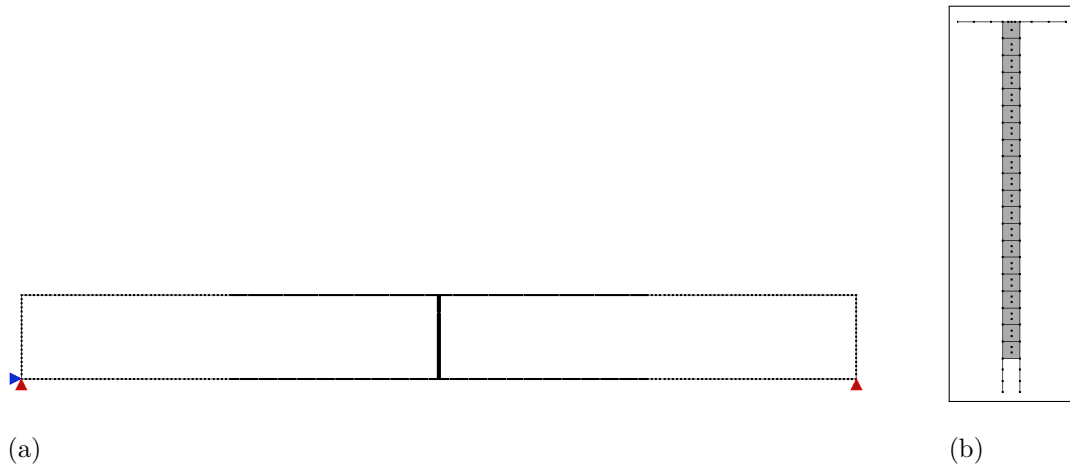


Figura 5.18: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com descontinuidade forte direta e orientação pré-definida empregando células não-uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

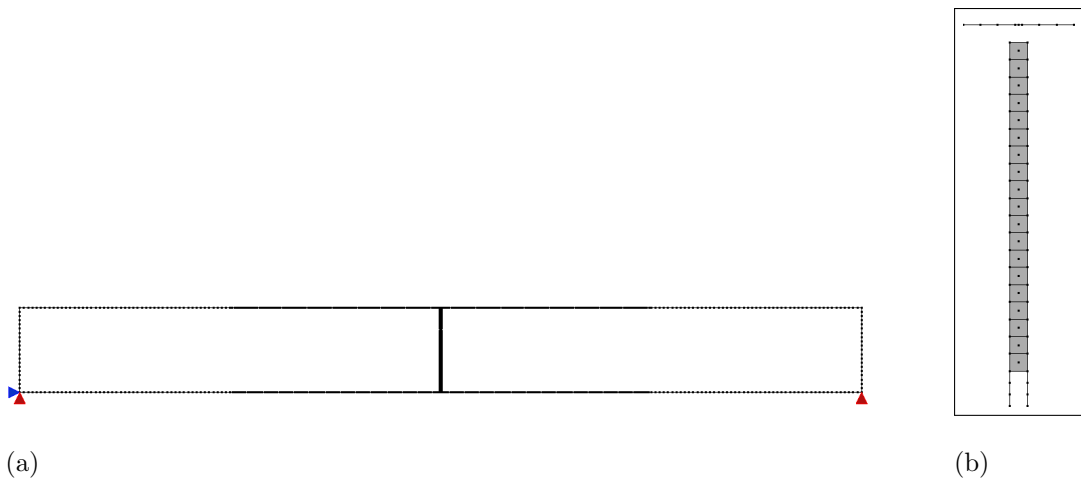


Figura 5.19: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com descontinuidade forte direta e orientação pré-definida empregando células uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

Os resultados obtidos para o carregamento P versus o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga são apresentados através da figura 5.20 considerando os dois tipos de células com a orientação da linha de descontinuidade pré-definida. Nesta figura também é plotada a envoltória experimental obtida por Petersson (1981).

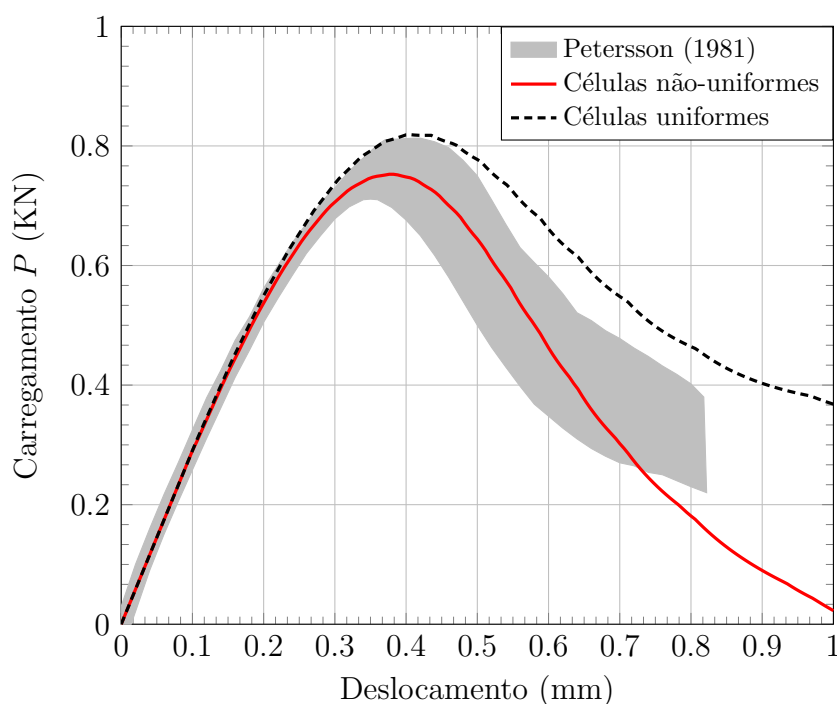


Figura 5.20: Resultados para carga P versus deslocamento vertical relativo do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): descontinuidade forte direta com orientação pré-definida.

Como pode ser observado, novamente as análises empregando células não-uniformes apresentaram um comportamento mais frágil que as análises empregando células uniformes mesmo em um problema com predominância do modo-I de fratura. Este acontecimento pode ser explicado devido a uma maior suavização na abertura da fissura quando empregadas as células não-uniformes embora a rotação relativa entre as duas partes da célula não influencie neste caso.

5.3.2 Análises com Modelo de Banda Variável

Nas análises considerando o modelo de banda variável não foi necessário adotar uma orientação pré-definida para uma correta captura da direção de propagação. A malhas finais obtidas nas análises empregando células não-uniformes e células uniformes são apresentadas nas figuras 5.21 e 5.22, respectivamente.

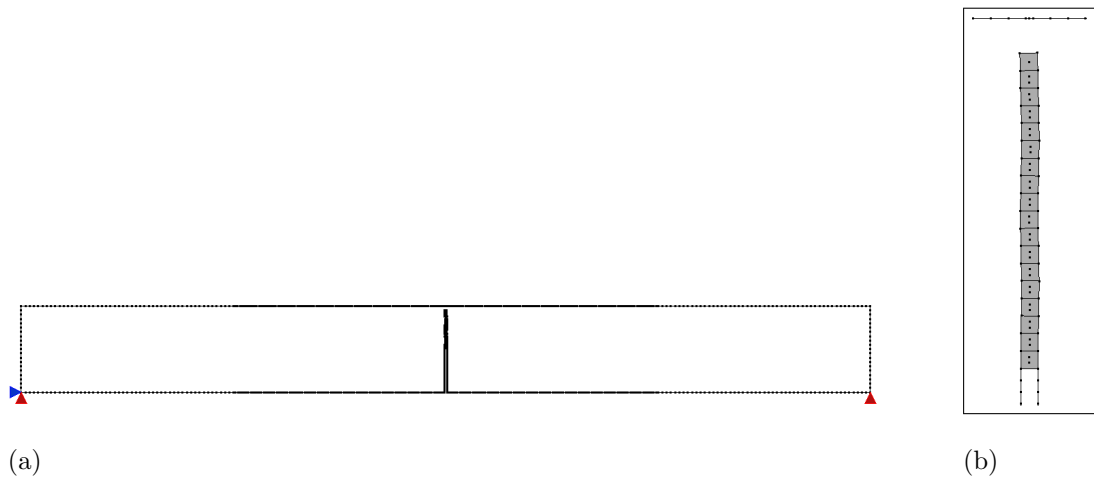


Figura 5.21: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com o modelo de banda variável empregando células não-uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

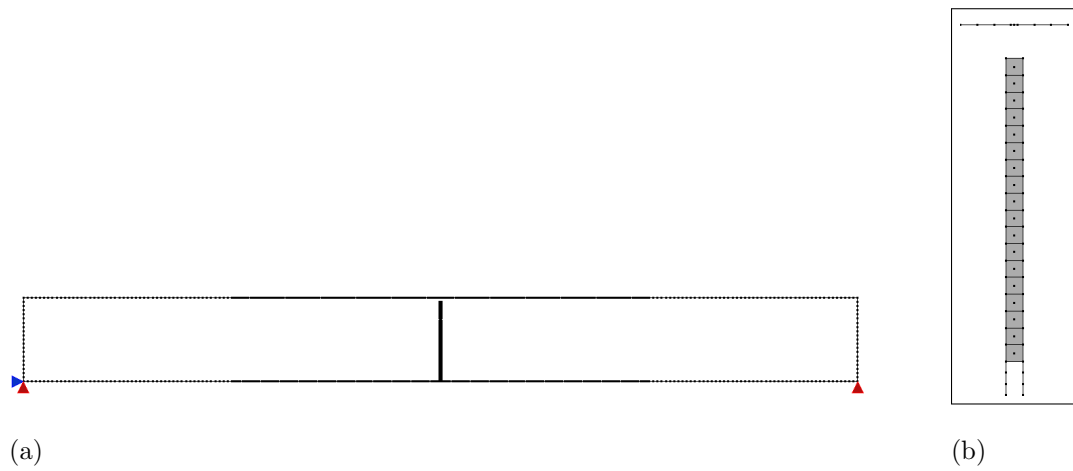


Figura 5.22: Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com o modelo de banda variável empregando células uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

Os resultados obtidos para o carregamento P versus deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga são apresentados na figura 5.23 considerando os três casos.

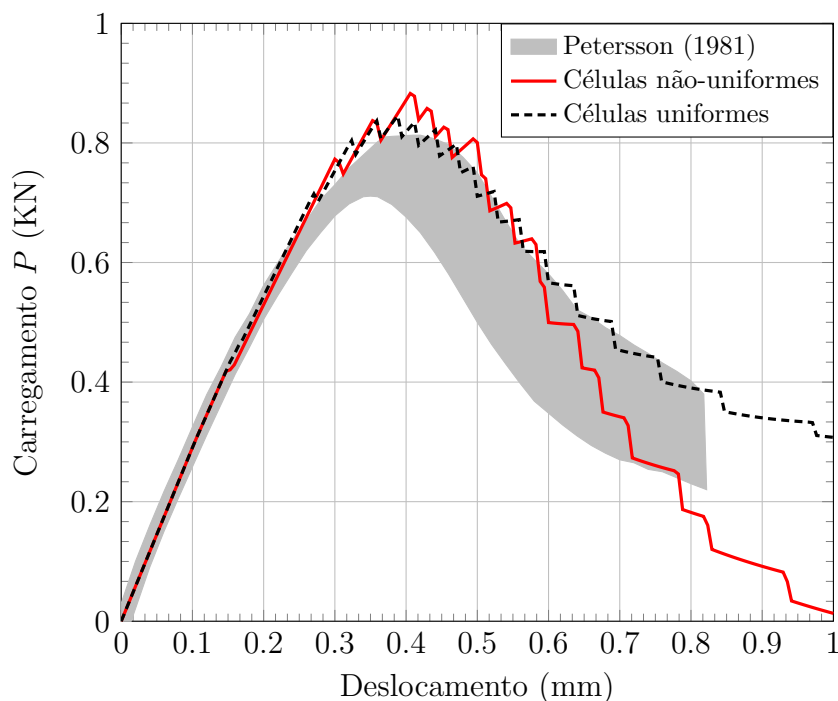


Figura 5.23: Resultados para carga P versus deslocamento vertical relativo do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): modelo de banda variável.

Observa-se através da figura 5.23 que nas análises empregando o modelo de banda variável, ocorreram oscilações no traçado da trajetória de equilíbrio para os dois tipos de células. Este acontecimento foi observado em trabalhos anteriores (Peixoto, 2016) e está relacionado possivelmente ao tamanho excessivamente grande das células. Ou seja, neste caso o processo de geração de descontinuidades é retardado, visto que o ponto de aferição das deformações encontra-se mais distante da extremidade momentânea da fissura. Contudo, pode-se observar novamente um descarregamento mais acentuado nas curvas obtidas com o emprego das células não-uniformes evidenciando sua melhor eficiência na descrição do colapso final esperado nos estágios finais da análise à medida que a fissura se aproxima do contorno superior do modelo estrutural.

5.4 Viga Assimétrica com Flexão em Três Pontos: Ingraffea e Grigoriu (1990)

O próximo exemplo trata-se de uma viga assimétrica com flexão em três pontos estudada por Ingraffea e Grigoriu (1990). Esta viga é feita de acrílico e um desenho esquemático deste teste é apresentado na figura 5.24. Nesta figura também são apresentadas geometria, carregamento e propriedades do material. As propriedades empregadas nas simulações numéricas foram as mesmas que as adotadas por Wu e Nguyen (2018).

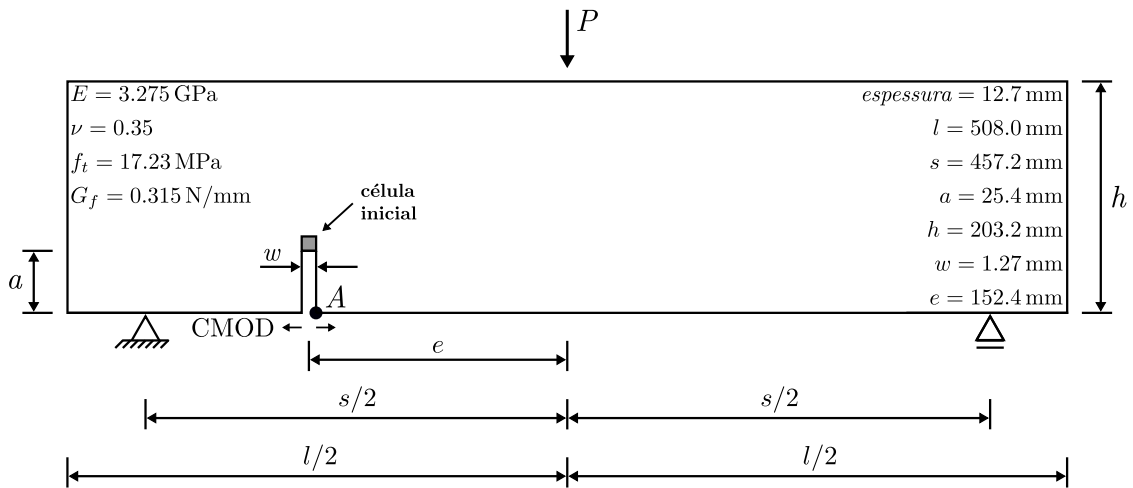
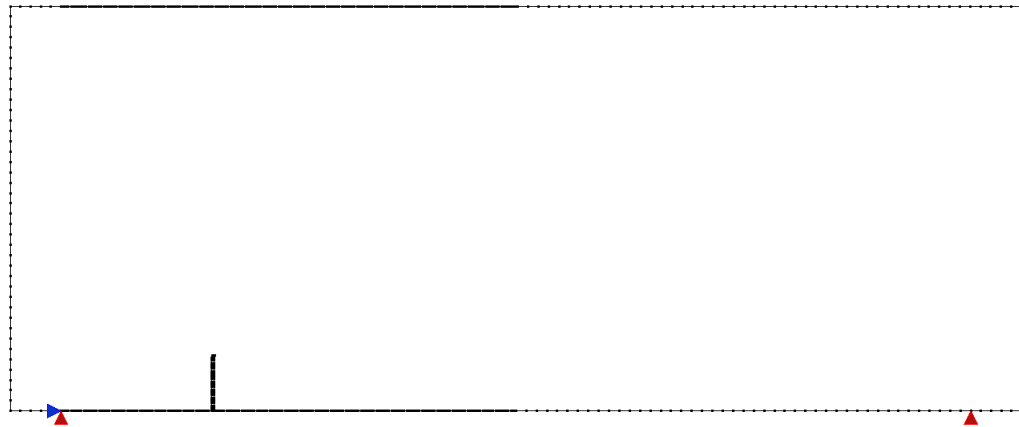


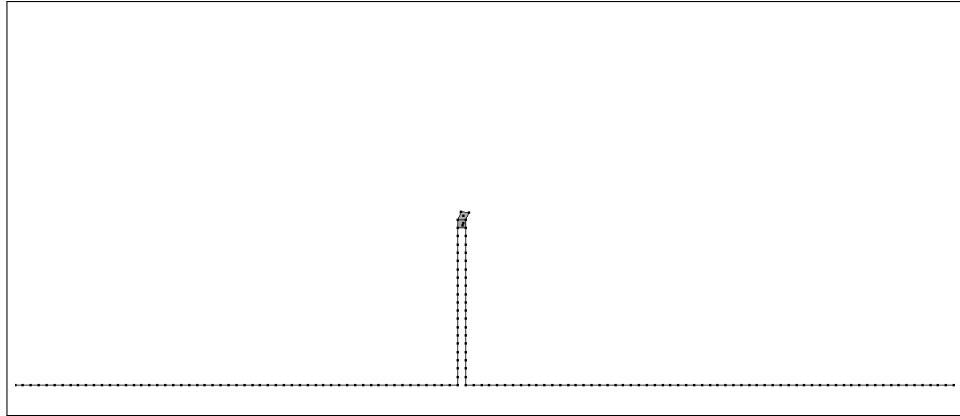
Figura 5.24: Desenho esquemático do ensaio de flexão em três pontos em uma viga assimétrica.

Foram utilizados 584 elementos lineares na discretização do contorno e uma célula inicial quadrada foi introduzida na ponta do entalhe. No algoritmo automático de geração de células foi empregado $\beta = 1.0$ e, assim como no exemplo da seção 5.3, foi considerado o lado da célula inicial como sendo igual à largura do entalhe. Um total de 350 passos foi empregado na processo incremental-iterativo e o deslocamento horizontal do ponto A (figura 5.24) foi controlado durante a análise não-linear.

Nas análises numéricas considerando descontinuidade forte direta e células não-uniformes, foram constatadas instabilidades numéricas devido a não correta captura da trajetória de propagação quando o parâmetro $\mathcal{M}_S^{\varphi}(\mathbf{X})$ é intercalado entre as células geradas. Neste caso, foi necessário considerar o modelo de banda variável de modo a prevenir tais instabilidades e conseguir uma correta captura da trajetória da fissura. As malhas finais obtidas para estes dois casos são apresentadas através das figuras 5.25 e 5.26.



(a)



(b)

Figura 5.25: Malha final para simulação do ensaio de Ingraffea e Grigoriu (1990) com descontinuidade forte direta e considerando valores intercalados para o parâmetro $\mathcal{M}_S^{\varphi}(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe.

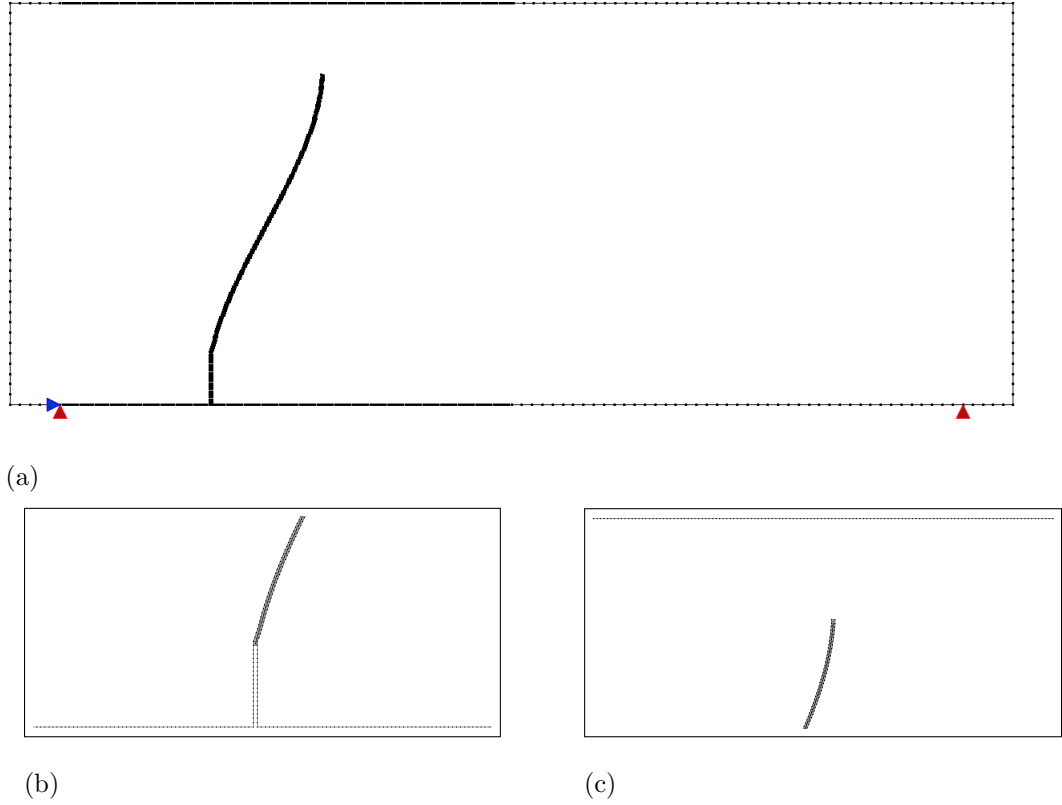
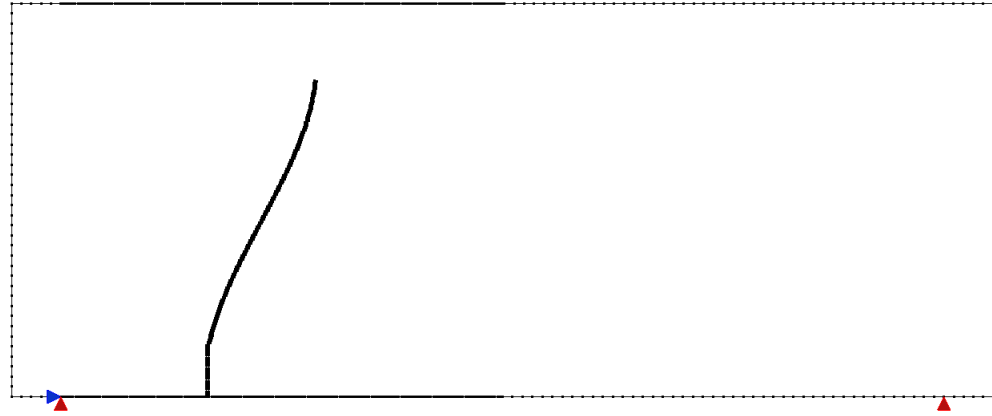
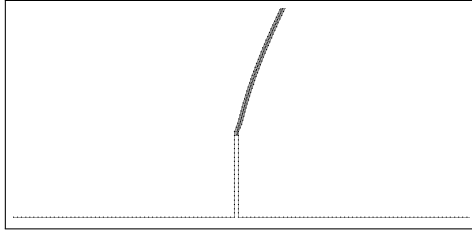


Figura 5.26: Malha final para simulação do ensaio de Ingrassia e Grigoriu (1990) com o modelo de banda variável e considerando valores intercalados para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe inferior, (c) detalhe superior.

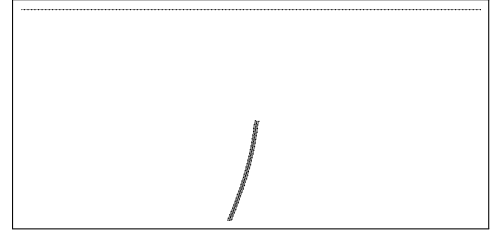
Análises também foram realizadas fixando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para todas as células geradas. Neste caso, diferentemente das análises anteriores considerando o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ intercalado, não foram constatadas instabilidades numéricas nas análises com descontinuidade forte direta. As malhas finais obtidas são apresentadas nas figuras 5.27 e 5.28 considerando análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.27: Malha final para simulação do ensaio de Ingraffea e Grigoriu (1990) com descontinuidade forte direta e considerando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe inferior, (c) detalhe superior.

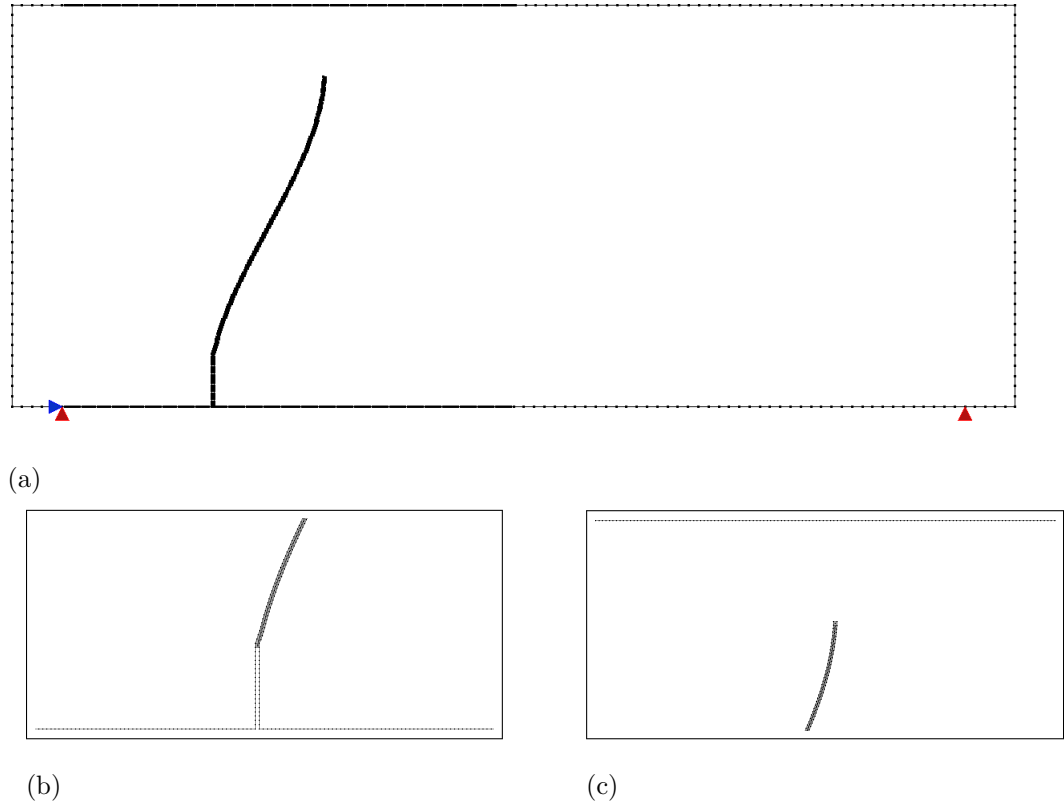


Figura 5.28: Malha final para simulação do ensaio de Ingrassia e Grigoriu (1990) com o modelo de banda variável e considerando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe inferior, (c) detalhe superior.

Resultados para o carregamento total P em função do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e em função do deslocamento horizontal relativo entre os pontos localizados nas extremidades iniciais do entalhe (*Crack Mouth Opening Displacement* - CMOD) foram considerados. Estes resultados são apresentados nas figuras 5.29 e 5.31 para as análises com descontinuidade forte direta e nas figuras 5.30 e 5.32 considerando o modelo de banda variável. Nestas figuras também são apresentados os resultados experimentais e numéricos obtidos por Ingrassia e Grigoriu (1990).

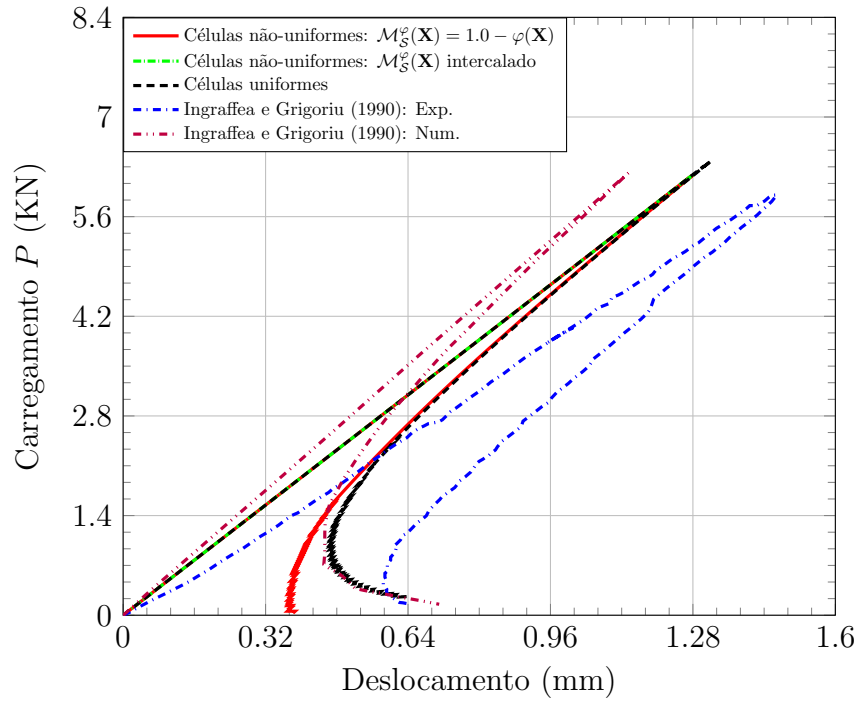


Figura 5.29: Resultados para carga P versus deslocamento vertical do ponto carregado para o ensaio de Ingraffea e Grigoriu (1990) considerando descontinuidade forte direta.

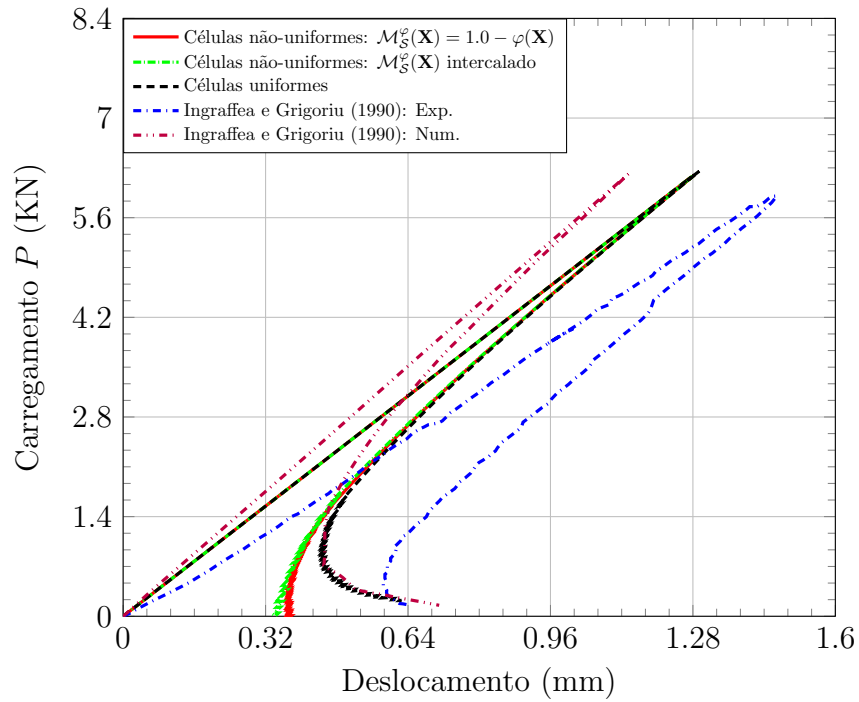


Figura 5.30: Resultados para carga P versus deslocamento vertical do ponto carregado para o ensaio de Ingraffea e Grigoriu (1990) considerando o modelo de banda variável.

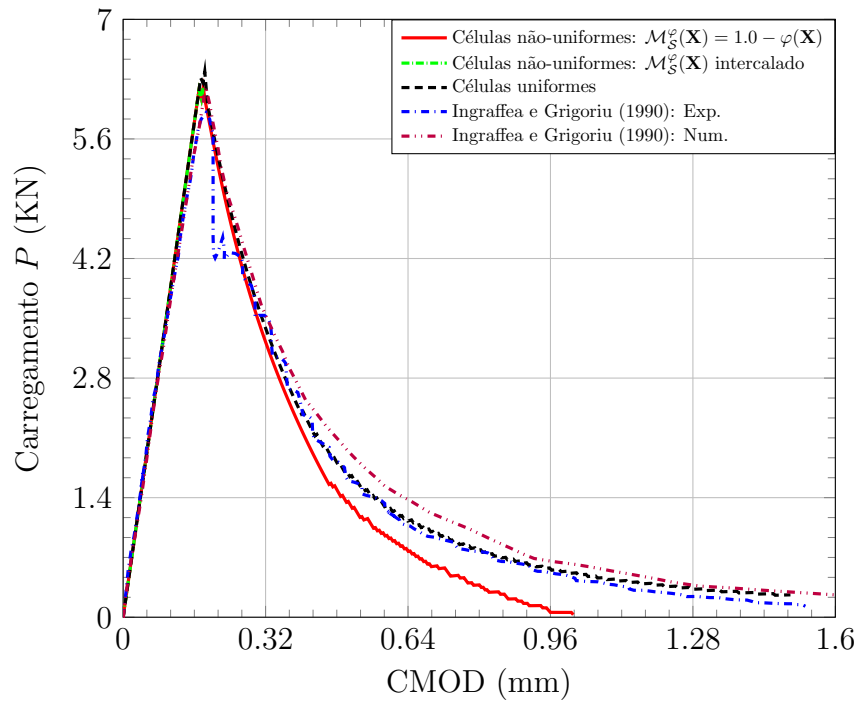


Figura 5.31: Resultados para a carga P versus CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) para o ensaio de Ingraffea e Grigoriu (1990) considerando descontinuidade forte direta.

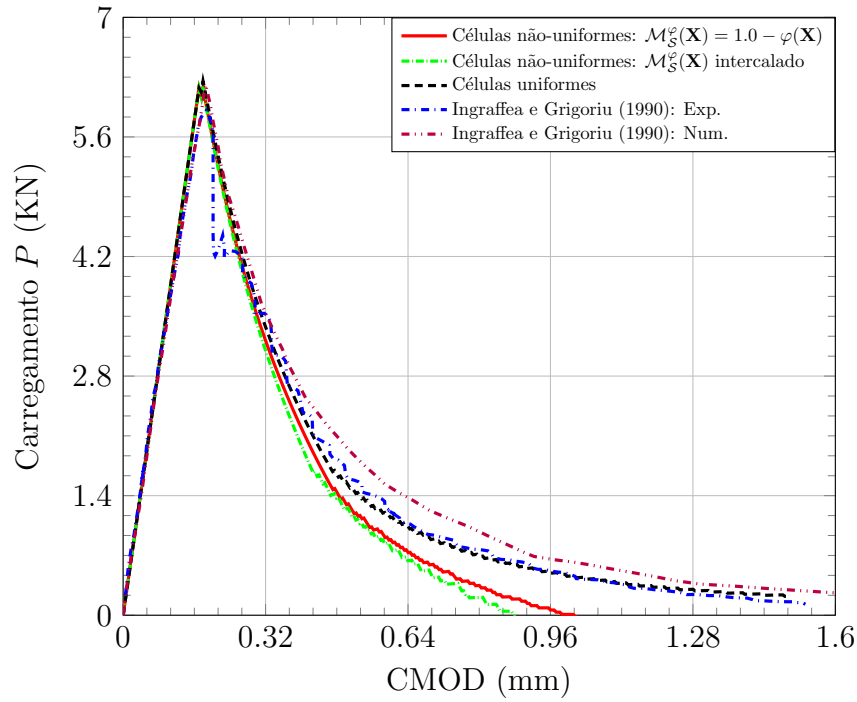


Figura 5.32: Resultados para a carga P versus CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) para o ensaio de Ingrassia e Grigoriu (1990) considerando o modelo de banda variável.

Como mencionado anteriormente, a análise considerando o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ intercalado com descontinuidade forte direta, apresentou instabilidades numéricas nos estágios iniciais da análise não-linear logo após o pico das curvas apresentadas nas figuras 5.29 e 5.31. No caso das análises com o modelo de banda variável, pode-se notar perfis de curva bastante similares obtidos com células não-uniformes considerando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ intercalado e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$. Já para o caso específico adotando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$, verificam-se comportamentos similares para as curvas obtidas nas análises com descontinuidade forte direta e nas análises com o modelo de banda variável. Este comportamento pode estar relacionado ao fato do acrílico ser um material muito frágil não formando, diferentemente do concreto, a zona de microfissuração associada à banda de localização de deformações. Neste caso, após o regime elástico, a tendência é a entrada direta do regime com descontinuidade forte.

Esta mesma similaridade também é constatada nas análises com células uniformes. Em todos os casos, as curvas obtidas para os dois tipos de células foram coincidentes, exceto nos estágios finais das análises onde uma perda total de capacidade resistente ao carregamento é capturada apenas pelas células não-uniformes assim como o ocorrido no exemplo da seção 5.2.

Através das figuras 5.29 e 5.30 pode-se notar que todas as curvas numéricas obtidas, incluindo a da referência original, apresentaram uma inclinação mais acentuada quando comparadas à curva experimental. Esta diferença está associada à não consideração das não-linearidades dos suportes e do ponto de aplicação da carga, bem como a não consideração da deformação da mesa onde o experimento foi realizado (Ingraffea e Grigoriu, 1990).

Por fim, pode-se observar através da figura 5.33 uma comparação entre as trajetórias obtidas experimentalmente (Ingraffea e Grigoriu, 1990) com as obtidas numericamente empregando células não-uniformes onde uma boa concordância entre as curvas é verificada.

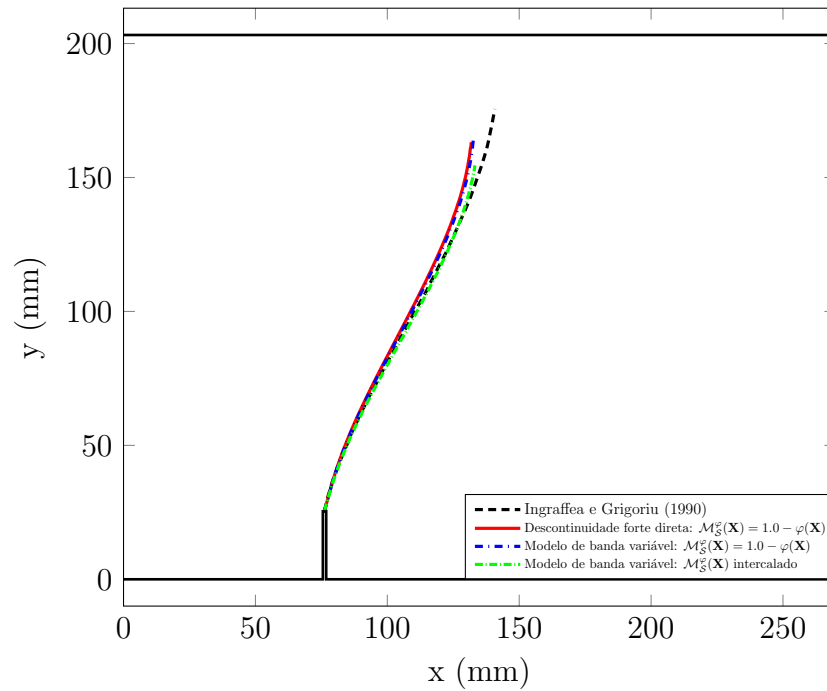


Figura 5.33: Trajetória da trinca para o ensaio de Ingraftea e Grigoriu (1990) empregando células não-uniformes.

5.5 Chapa com Dois Entalhes Tensionada Uniaxialmente: Shi et al. (2000)

O próximo exemplo trata-se de uma chapa com 2 entalhes tensionada uniaxialmente estudada experimentalmente por Shi et al. (2000). Um desenho esquemático deste problema é ilustrada na figura 5.34, onde podem ser observadas também informações acerca da geometria, carregamentos e propriedades. Como condições de contorno esta chapa foi engastada em sua extremidade inferior e um deslocamento vertical prescrito, δ , foi incrementalmente imposto em sua extremidade superior. As propriedades utilizadas nas simulações numéricas foram as mesmas adotadas por Nguyen e Korsunsky (2008).

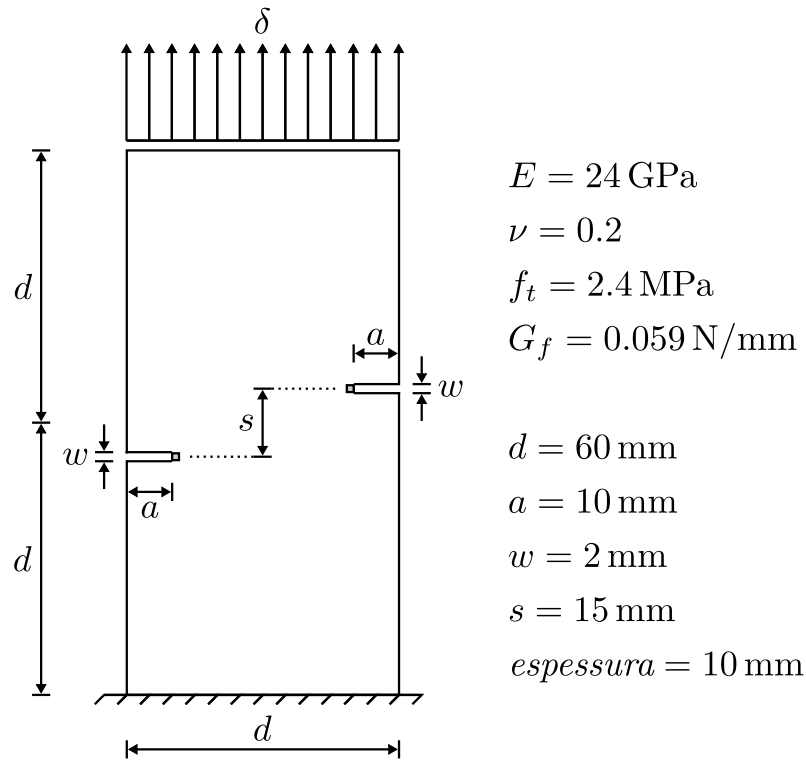


Figura 5.34: Desenho esquemático do ensaio de tensão uniaxial em uma chapa com dois entalhes.

Foram utilizados 176 elementos lineares na discretização do contorno e duas células iniciais quadradas de lados iguais a 1.5 mm foram introduzidas nas pontas dos entalhes. Células de mesmo tamanho foram geradas ($\beta = 1.0$) e 1000 passos foram considerados durante a análise não-linear. Assim como no exemplo da seção 5.3, foram constatadas instabilidades numéricas devido à não captura adequada da trajetória da fissura nas análises com descontinuidade forte direta. Deste modo, as análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável são consideradas separadamente nas seções seguintes.

5.5.1 Análises com Descontinuidade Forte Direta

As análises com descontinuidade forte direta reportaram instabilidades numéricas tanto empregando células não-uniformes quanto empregando células uniformes.

As malhas finais obtidas para estes dois casos são apresentadas através das figuras 5.35 e 5.36.

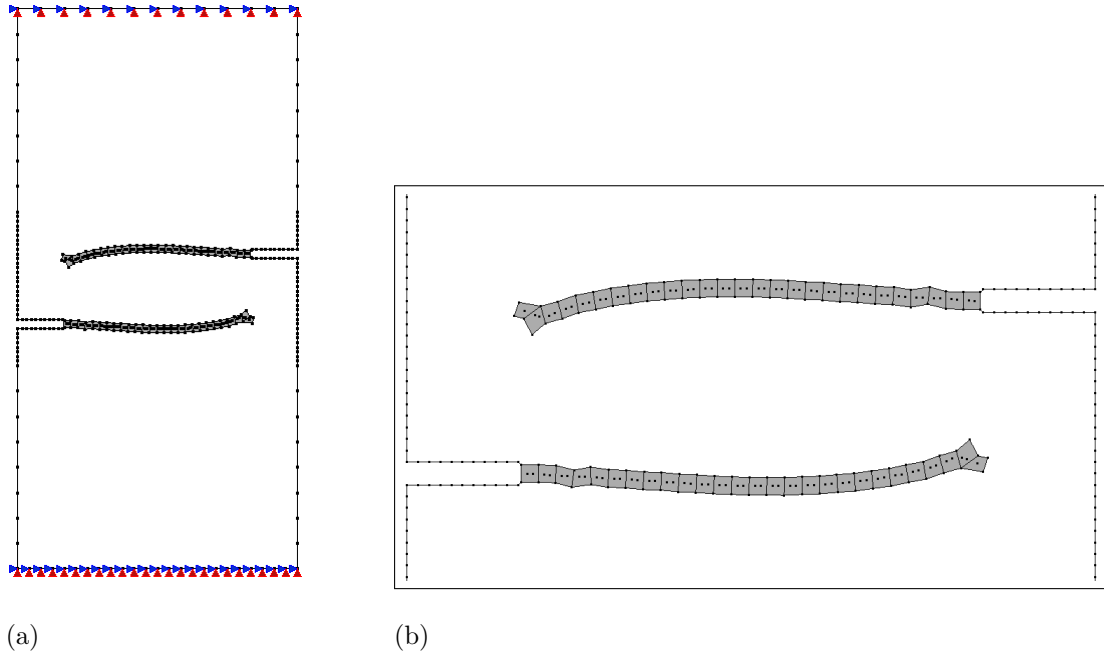


Figura 5.35: Malha final para simulação do ensaio de Shi et al. (2000) com descontinuidade forte direta empregando células não-uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

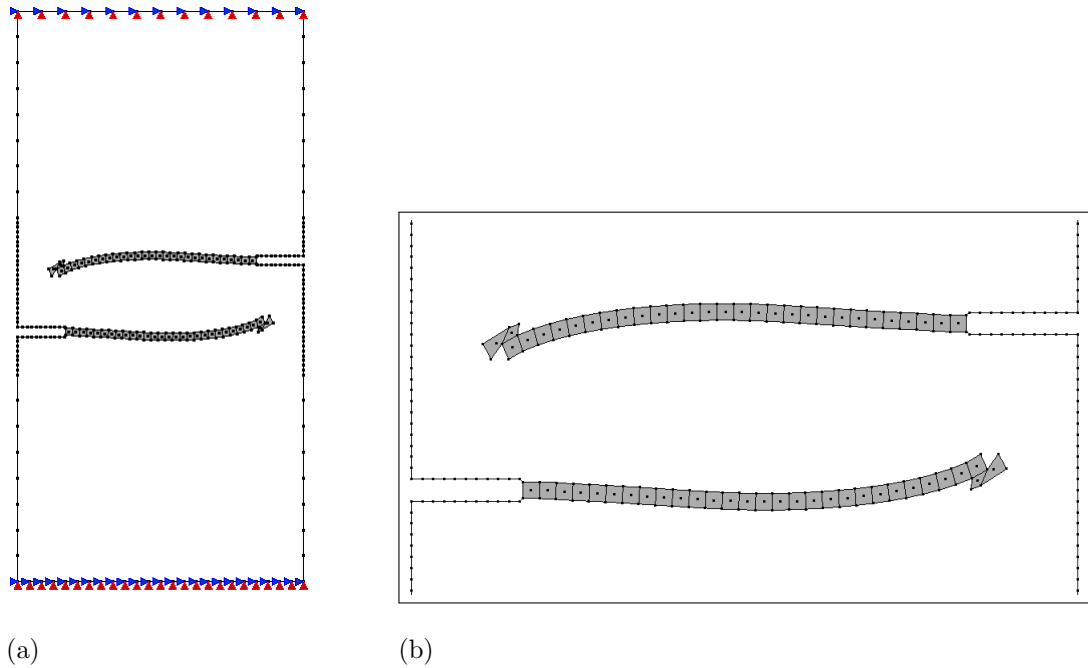


Figura 5.36: Malha final para simulação do ensaio de Shi et al. (2000) com descontinuidade forte direta empregando células uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

Como observado nas figuras 5.35 e 5.36, as malhas finais obtidas para os dois tipos de células apresentaram trajetórias simétricas e bastante similares. Já na figura 5.37 são apresentados os resultados para a carga total aplicada versus o deslocamento vertical da extremidade superior considerando os dois tipos de células. Nesta figura também é plotada a curva experimental obtida por Shi et al. (2000).

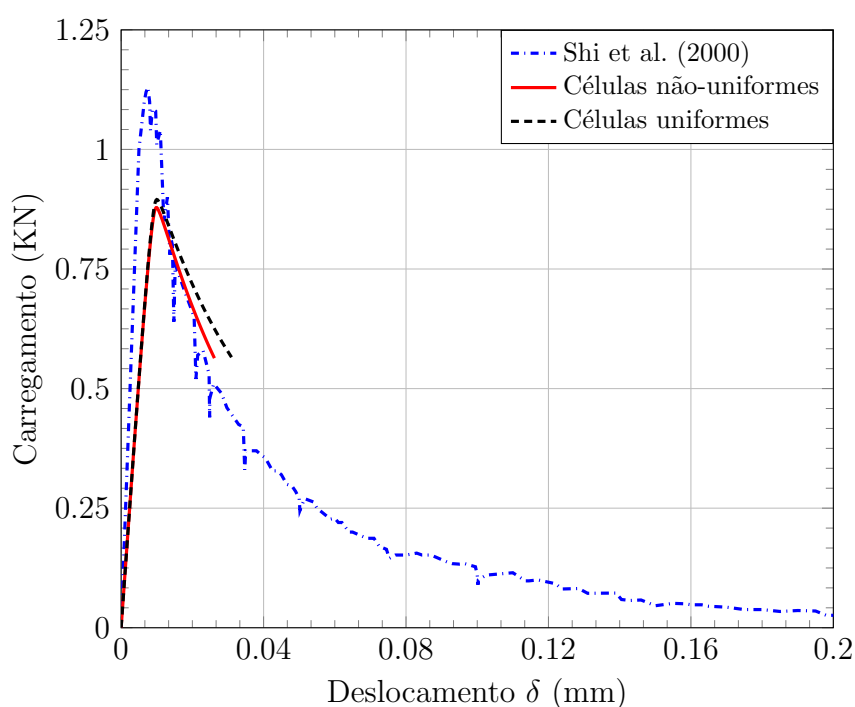


Figura 5.37: Resultados para carga total aplicada versus deslocamento vertical da extremidade superior no ensaio de Shi et al. (2000): descontinuidade forte direta.

Como observado na figura 5.37, as curvas obtidas para os dois tipos de células apresentaram perfis bastante próximos até o instante em que ocorreram as instabilidades.

5.5.2 Análises com Modelo de Banda Variável

As malhas finais obtidas nas análises com o modelo de banda variável são apresentadas nas figuras 5.38 e 5.39.

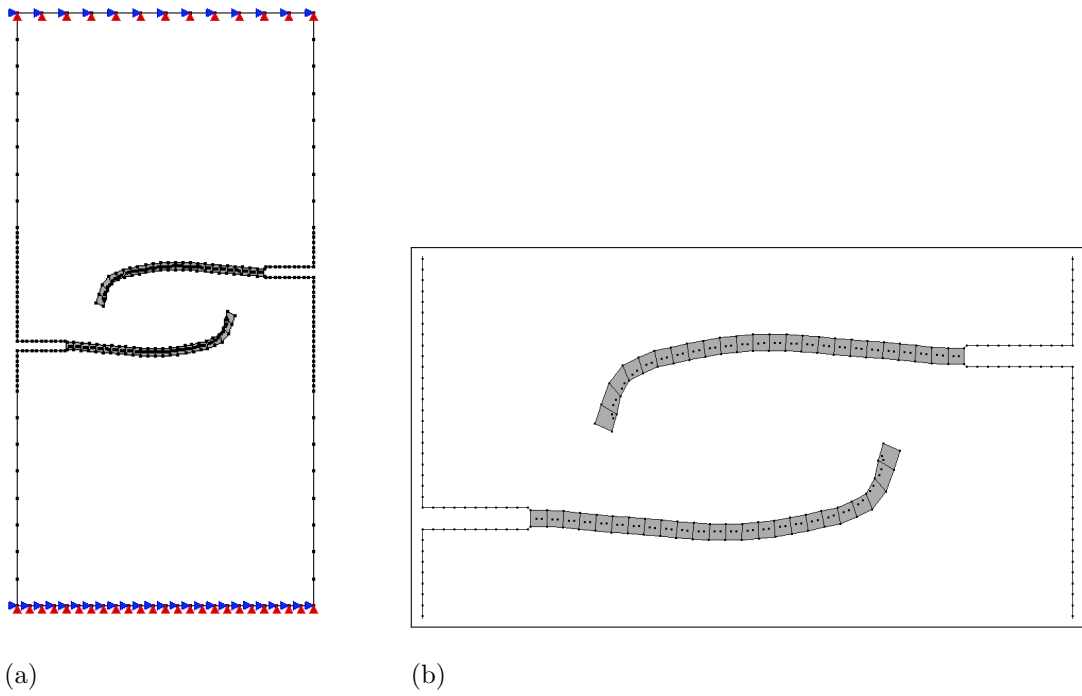


Figura 5.38: Malha final para simulação do ensaio de Shi et al. (2000) com o modelo de banda variável empregando células não-uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

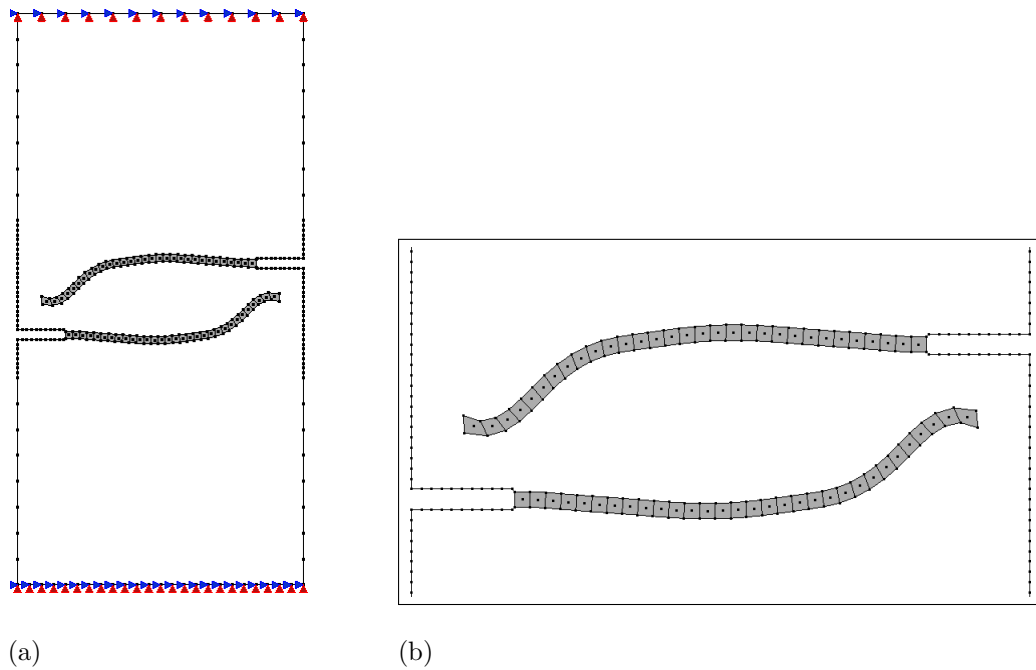


Figura 5.39: Malha final para simulação do ensaio de Shi et al. (2000) com o modelo de banda variável empregando células uniformes: (a) malha completa, (b) detalhe.

Como observado nas figuras 5.38 e 5.39, novamente foram observadas simetrias nas

trajetórias de trincas obtidas nas análises empregando os dois tipos de células.

Na figura 5.40 são apresentados os resultados para a carga total aplicada versus o deslocamento vertical da extremidade superior.

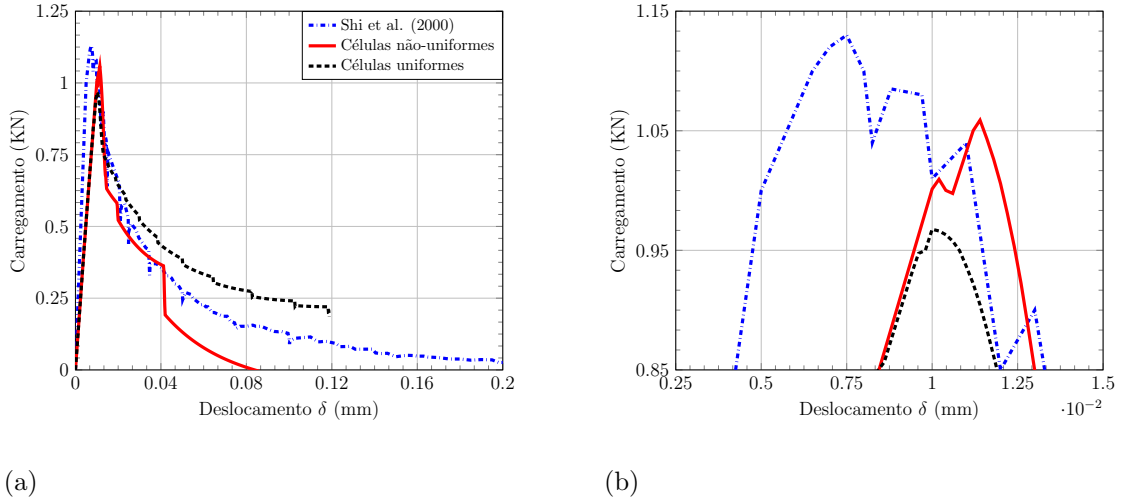


Figura 5.40: Resultados para carga total aplicada versus deslocamento vertical da extremidade superior no ensaio de Shi et al. (2000) considerando o modelo de banda variável: (a) curva completa, (b) detalhe dos picos atingidos.

Como observado através da figura 5.40, a curva obtida na análise com células uniformes apresentou travamento de tensões. Já na análise com células não-uniformes este fenômeno é eliminado como observado através do descarregamento completo da resposta estrutural. Além disto, como verificado na figura 5.40b, o pico apresentado pela curva obtida empregando células não-uniformes se aproximou de forma mais satisfatória com o pico da curva experimental. Deste modo, a formulação proposta também se mostra eficiente na eliminação do fenômeno de travamento de tensões na análise de problemas envolvendo a propagação de múltiplas linhas de descontinuidade.

5.6 Cisalhamento com forças em quatro pontos em uma viga com dois entalhes: Bocca et al. (1990)

O último exemplo analisado trata-se do ensaio de cisalhamento com forças em quatro pontos em uma viga com dois entalhes que foi estudado experimentalmente por Bocca et al. (1990). Um desenho esquemático deste ensaio é mostrado na figura 5.41 onde propriedades, carregamentos e geometria são apresentadas.

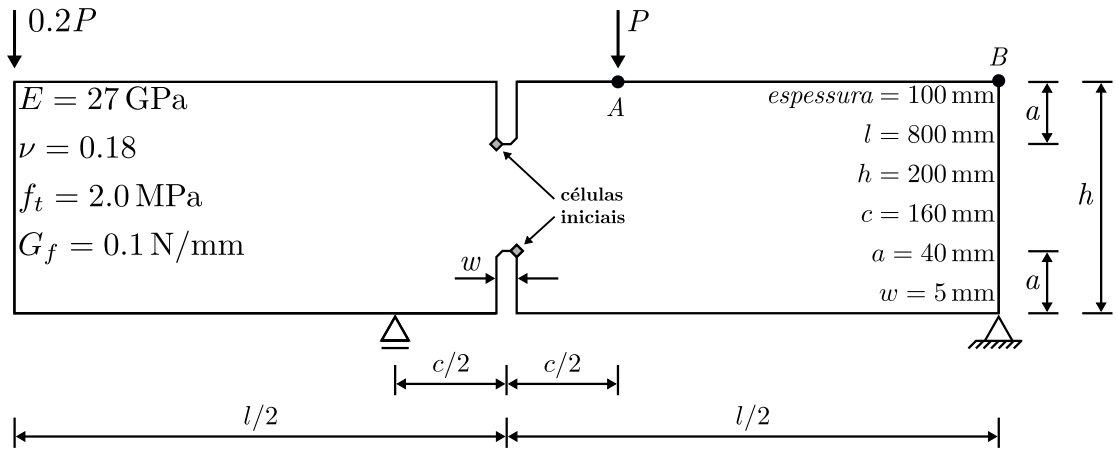


Figura 5.41: Desenho esquemático do ensaio de cisalhamento com forças em quatro pontos em uma viga com dois entalhes.

Na discretização do contorno foram empregados 234 elementos lineares e duas células quadradas de diagonais iguais a 4 mm foram pré-introduzidas nas pontas dos entalhes conforme apresentado na figura 5.41. Um fator de crescimento igual a $\beta = 1.003$ foi adotado para cada uma das frentes de células cujo tamanho máximo foi limitado em 5.0 mm. Foram empregados 500 passos durante o processo incremental iterativo e o deslocamento horizontal do ponto B foi controlado durante a análise não-linear.

Nas análises empregando células não-uniformes com o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$ intercalado foram constatadas instabilidades numéricas quando utilizado o modelo de banda variável. As malhas finais obtidas para este caso, bem como para a análise considerando descontinuidade forte direta são apresentadas através das figuras 5.42 e 5.43.

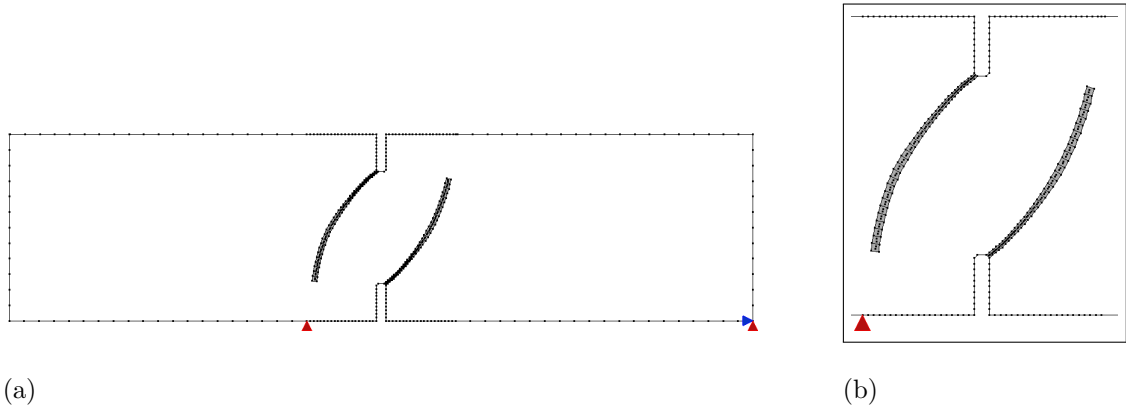


Figura 5.42: Malha final para simulação do ensaio de Bocca et al. (1990) com descontinuidade forte direta e considerando valores intercalados para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe.

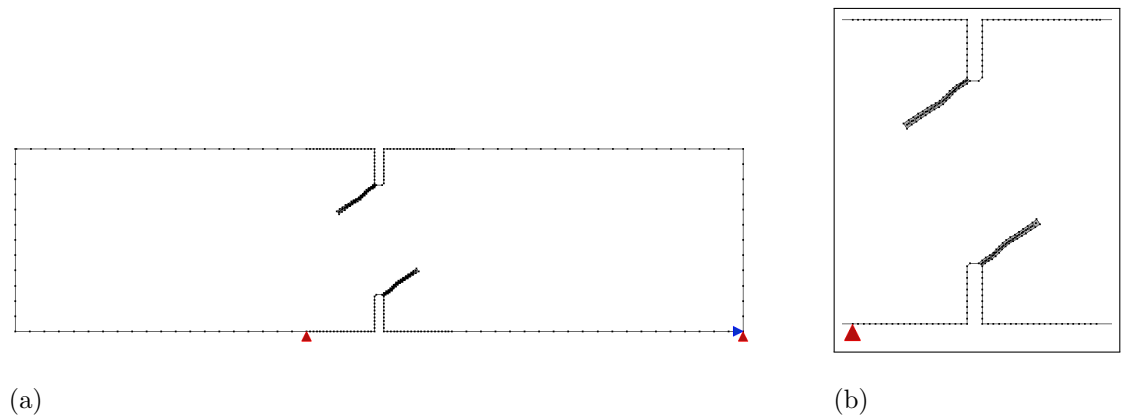


Figura 5.43: Malha final para simulação do ensaio de Bocca et al. (1990) com o modelo de banda variável e considerando valores intercalados para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$: (a) malha completa, (b) detalhe.

Análises numéricas foram realizadas considerando outros valores para o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$. Neste caso, dentre diversos testes realizados, resultados satisfatórios foram obtidos adotando $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para as células provenientes do entalhe

inferior e $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$ para as células provenientes do entalhe superior. As malhas finais obtidas para este caso são apresentadas nas figuras 5.44 e 5.45 considerando análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável, respectivamente.

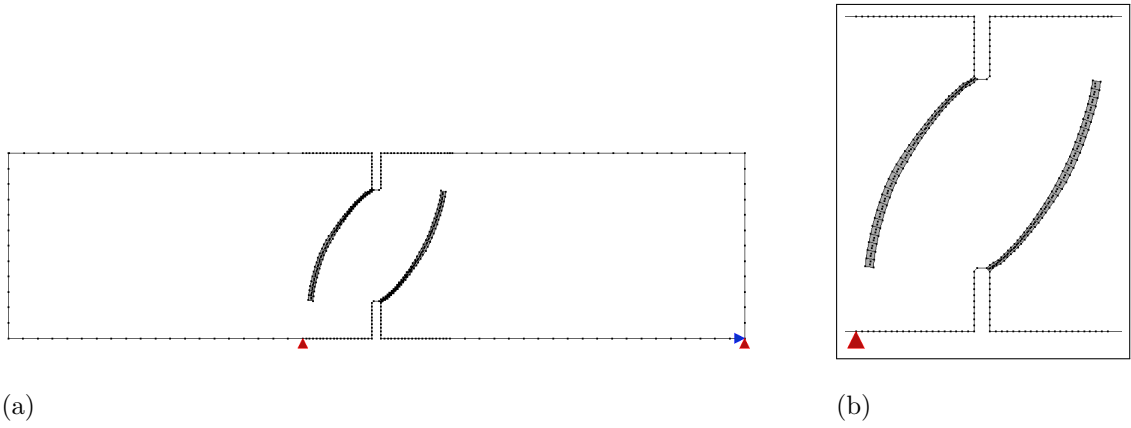


Figura 5.44: Malha final para simulação do ensaio de Bocca et al. (1990) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.

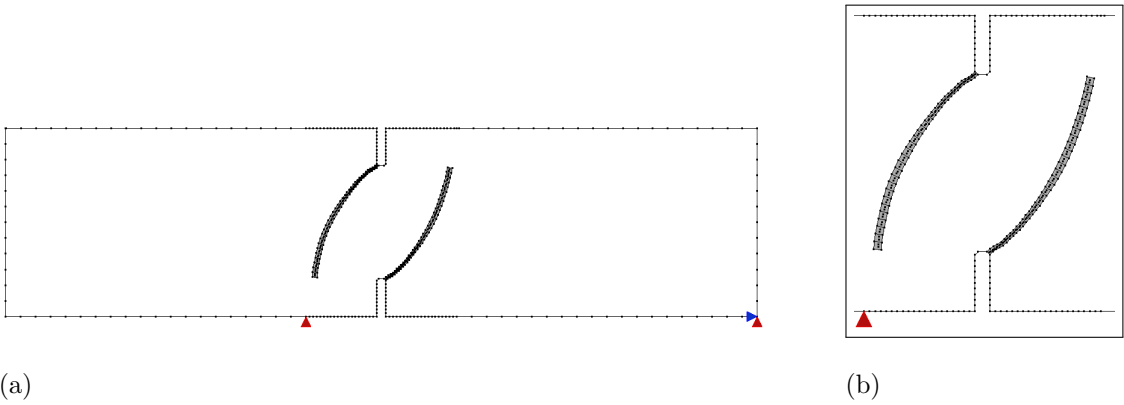


Figura 5.45: Malha final para simulação do ensaio de Bocca et al. (1990) com o modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

Resultados para o carregamento total aplicado ($1.2P$) em função do deslocamento vertical do ponto A (figura 5.41) foram considerados. Estes resultados são apresentados na figura 5.46 para as análises com descontinuidade forte direta e na figura 5.47 considerando o modelo de banda variável. Nestas figuras também são apresentados

os resultados experimentais obtidos por Bocca et al. (1990).

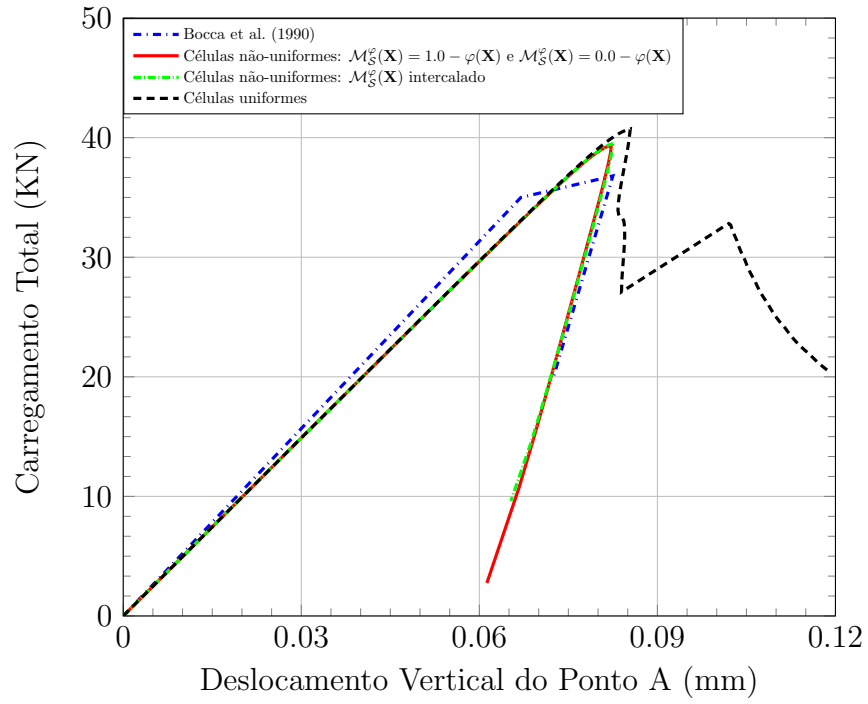


Figura 5.46: Resultados para carga total aplicada versus deslocamento vertical do ponto A no ensaio de Bocca et al. (1990): descontinuidade forte direta.

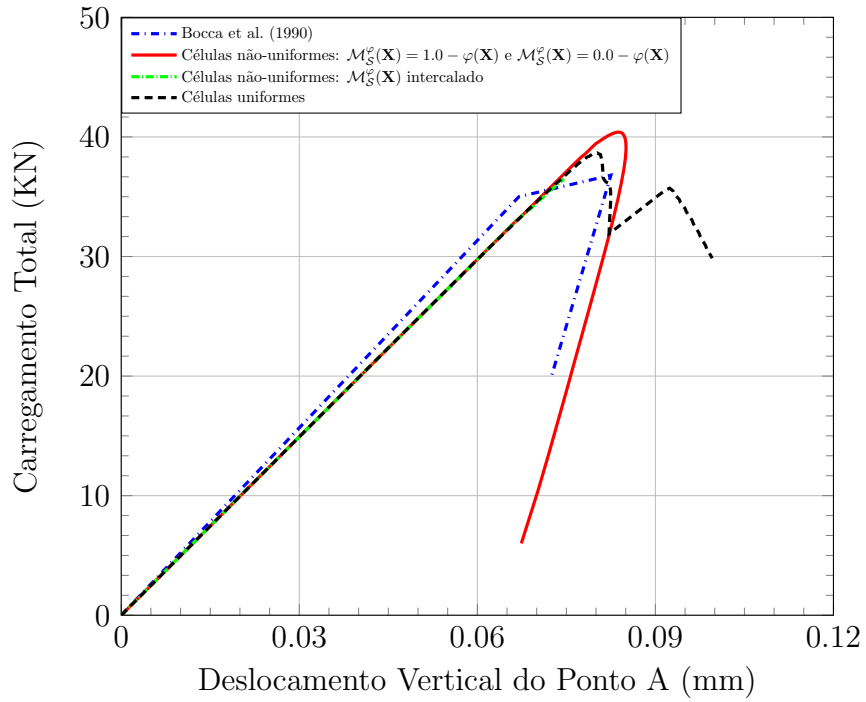


Figura 5.47: Resultados para carga total aplicada versus deslocamento vertical do ponto A no ensaio de Bocca et al. (1990): modelo de banda variável.

Como pode ser observado nas figuras 5.46 e 5.47, os resultados obtidos empregando células não-uniformes apresentaram uma concordância bastante satisfatória para com os resultados experimentais. Fato este só não é averiguado para a análise considerando o parâmetro $\mathcal{M}_S^{\varphi}(\mathbf{X})$ intercalado com o modelo de banda variável, uma vez que, para este caso, a análise não progrediu o suficiente devido ao surgimento de instabilidades numéricas. Já os resultados obtidos com células uniformes não conseguiram acompanhar os resultados experimentais de forma satisfatória após o pico da curva apresentando, neste caso, um elevado travamento de tensões na resposta estrutural.

As trajetórias de trinca obtidas numericamente nas análises empregando células não-uniformes são apresentadas através da figura 5.48. Nesta figura também é apresentada a envoltória experimental que foi extraída do trabalho de Cervera et al.

(2017).

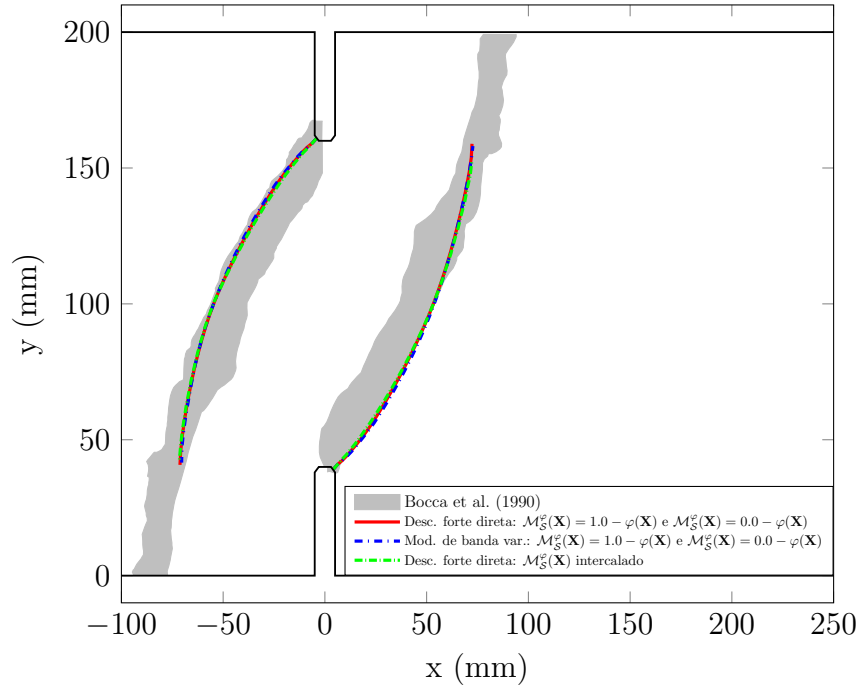


Figura 5.48: Trajetória da trinca para o ensaio de Bocca et al. (1990) empregando células não-uniformes.

Uma vez que o problema estrutural apresenta uma simetria polar em torno do centro geométrico do modelo, é esperado que duas trincas surjam a partir dos dois entalhes e propaguem simetricamente em direção às extremidades opostas da viga. E é isto o que realmente ocorre como observado através da figura 5.48 nas análises empregando células não-uniformes. Além disto, uma boa concordância para com os resultados experimentais é obtida tanto nas análises com descontinuidade forte direta quanto nas análises empregando o modelo de banda variável.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvida uma nova classe de células com descontinuidade forte embutida para análise de propagação de falhas materiais em meios homogêneos frágeis ou parcialmente frágeis. Foi empregada a formulação implícita do método dos elementos de contorno juntamente com um algoritmo automático de geração de células que acompanha a propagação da fissura à medida que o carregamento é imposto ao sólido. Neste caso, foram considerados problemas bidimensionais onde apenas a região fissurada é discretizada por células sendo o restante do domínio considerado sob regime linear elástico. Neste contexto, apenas células quadrilaterais com saltos uniformes para o campo de deslocamentos em seu interior haviam sido consideradas na literatura pregressa. Estas células possuem apenas um ponto de colocação localizado em seu centróide que permanece fixo em toda a análise, de forma que apenas saltos constantes no campo de deslocamentos podem ser representados em seu interior. Tal limitação faz com que apenas o movimento de translação relativo entre as duas partes da célula possa ser devidamente capturado pela análise numérica. Nesta nova abordagem, aqui apresentada, adota-se uma adequação da célula com descontinuidade embutida ao longo da análise não-linear, de forma a permitir a representação não somente do movimento de translação relativa entre as partes da célula mas, também, a representação do movimento de rotação relativo entre

elas. As etapas que compõem esta adaptação da célula, podem ser sintetizadas da seguinte forma:

- i. Inicialmente a célula, ainda sem descontinuidade, possui um único ponto de colocação localizado em seu centróide;
- ii. Uma vez estabelecidos os critérios necessários ao surgimento de superfícies de descontinuidades (fracas ou fortes), este ponto inicial é eliminado (não somente da célula, mas de todo o modelo numérico) e dois novos pontos são inseridos ao longo da linha de descontinuidade.

A partir desses dois novos pontos, é possível obter uma interpolação não-uniforme para o salto no campo de deslocamentos. Tal possibilidade se demonstra favorável na análise de problemas que envolvem modos mistos de fratura, pois possibilita a eliminação do fenômeno de travamento de tensões comumente presente em análises com células uniformes. Análises com estas células induzem uma rigidez irreal na resposta estrutural devido à sua inabilidade em representar o movimento rotacional relativo entre suas partes divididas pela linha de descontinuidade. Neste caso, as células não-uniformes não apresentam este inconveniente, o que as tornam mais adequadas na representação do movimento de abertura que ocorre durante o processo de carregamento ao longo da análise não-linear.

No modelo numérico é pré-fixada uma célula inicial com descontinuidade forte embutida de modo a capturar o surgimento da linha de descontinuidade no interior do corpo sólido. Deste modo, uma vez detectado o regime de descontinuidade no interior desta célula, o ponto de colocação localizado em seu centróide é excluído e os dois novos pontos de colocação são criados ao longo da linha de descontinuidade. Além disto, adjacente a esta célula, uma nova é criada, em regime elástico, tornando possível a propagação da linha de descontinuidade no interior do sólido.

Com esse processo, esquematizado na seção 4.5, torna-se necessária a realização de modificações nas matrizes da formulação implícita.

Análises numéricas foram realizadas considerando duas formas distintas de detecção do início do regime de descontinuidades. Na primeira delas foi considerado a introdução direta do regime de descontinuidades fortes ao término do regime elástico com a direção da linha de descontinuidade no interior da célula sendo perpendicular à tensão principal máxima. Na segunda forma foi adotado um modelo de banda variável fazendo-se uso da análise de bifurcação como critério desencadeador do processo de localização de deformações. Para os dois casos, foi averiguado que a nova classe de células consegue representar de forma mais satisfatória a resposta estrutural em problemas envolvendo modos mistos de fratura. Além disto, mesmo em situações restritas ao modo I de fratura, também foi constatado um descarregamento mais acentuado na resposta estrutural, indicando que uma maior suavização na abertura da trinca também contribui na redução do travamento de tensões.

Algumas características adicionais da nova formulação aqui proposta podem ser analisadas de forma mais rigorosa em trabalhos posteriores. Por exemplo, como esboçado na seção 4.3, o parâmetro $\mathcal{M}_S^\varphi$ é mal definido para os pontos de colocação situados sobre a linha de descontinuidade, sendo perfeitamente possível a escolha da expressão $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 1.0 - \varphi(\mathbf{X})$ ou $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X}) = 0.0 - \varphi(\mathbf{X})$. Dada esta indefinição, optou-se por adotar valores intercalados, entre as duas opções, para células adjacentes ao longo do processo de propagação. Na maioria dos casos, tal escolha mostrou-se adequada. Por outro lado, em alguns casos, essa ideia de intercalar os valores conduziu à instabilidades numéricas, como reportado no último exemplo numérico na simulação envolvendo as etapas transitórias desde a dissipação energética em meio contínuo até o surgimento das descontinuidades fortes. Estudos acerca da posição dos pontos de colocação sobre a linha de descontinuidade poderiam também

ser considerados, uma vez que no presente trabalho estes pontos foram pré-fixados e igualmente espaçados entre si e entre os extremos da linha de descontinuidade. Além disto, a formulação desenvolvida é perfeitamente aplicável a outros modelos constitutivos, podendo ser considerados outros tipos de perfis de falhas como, por exemplo, bandas de cisalhamento em materiais dúcteis ou superfícies de deslizamento na geomecânica. Vale destacar ainda que a metodologia aqui empregada é facilmente estendida a células com um grau maior de aproximação para o campo de deslocamentos, contribuindo também, neste caso, para uma generalização do conceito de células com descontinuidade forte embutida.

Referências Bibliográficas

- Abdallah, Y., Sulem, J. e Stefanou, I., 2020. ‘Compaction banding in high-porosity carbonate rocks: 2. a gradient-dependent plasticity model’. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 125(12), pp. e2020JB020610.
- Alatawi, I. A. e Trevelyan, J., 2015. ‘A direct evaluation of stress intensity factors using the extended dual boundary element method’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 52, pp. 56–63.
- Aliabadi, M. H., 2002. *The boundary element method: volume 2 - applications in solids and structures*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Anacleto, F. E. S., G. O. Ribeiro e T. S. A. Ribeiro, (2011), Implementation of viscoplastic analysis for multi-region problems using the boundary element method, in ‘12th BETEQ - International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques’, Brasília, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., T. S. A. Ribeiro, G. O. Ribeiro e Pitangueira, R. L. S., (2012), Object-oriented self-regular boundary element method implementation, in ‘10th SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional’, Belo Horizonte, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., T. S. A. Ribeiro, G. O. Ribeiro, Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2013. ‘An object-oriented tridimensional self-regular boundary element method implementation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 37, pp. 1276–1284.

- Anacleto, F. E. S., Peixoto, R. G., Pena, S. S., G. O. Ribeiro, Pitangueira, R. L. S. e T. S. A. Ribeiro, (2013), Non-linear solution algorithm for the implicit boundary element method concerning various control methods, *in* ‘34th CILAMCE - Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering’, Pirenópolis, Brasil.
- Andrade, H. e Leonel, E., (2019), Stress intensity factors evaluation using an enriched dual boundary element method formulation, *in* ‘MECSOL 2019 - Proceedings of the 7th International Symposium on Solid Mechanics’, São Carlos, Brazil.
- Andrade, H. e Leonel, E., 2020. ‘An enriched dual boundary element method formulation for linear elastic crack propagation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 121, pp. 158–179.
- Armero, F. e Garikipati, K., 1996. ‘An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, pp. 2863–2885.
- Arrea, M. e Ingraffea, A. R., (1982), Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete, Technical report, 81-13, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, USA.
- Bažant, Z. P., Belytschko, T. B. e Chang, T.-P., 1984. ‘Continuum theory for strain-softening’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 1666–1692.
- Bažant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16, pp. 155–177.
- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601–620.

- Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. e Parimi, C., 2001. ‘Arbitrary discontinuities in finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 993–1013.
- Ben-Israel, A. e Greville, T. N. E., (2003), Existence and construction of generalized inverses, *in* J. Borwein e P. Borwein, eds, ‘Generalized inverses: Theory and applications’, Springer, New York, pp. 40–51.
- Bocca, T., Carpinteri, A. e Valente, S., 1990. ‘Size effects in the mixed mode crack propagation: softening and snap-back analysis’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 35, pp. 159–170.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., 1984. *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- Cervera, M., Barbat, G. B. e Chiumenti, M., 2017. ‘Finite element modeling of quasi-brittle cracks in 2d and 3d with enhanced strain accuracy’. *Computational Mechanics*, vol. 60, pp. 767–796.
- Chaves, E. A., 2003. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Cope, R. J., Rao, P. V., Clark, L. A. e Norris, P., (1980), Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridgeslabs, *in* C. Taylor, E. Hinton e D. R. J. Oden, eds, ‘Numerical Methods for Nonlinear Problems 1’, Pineridge Press, Swansea, pp. 457–470. Citado por Chaves (2003).
- Costa, D. D., Cervenka, V. e Costa, R. G., 2018. ‘Model uncertainty in discrete and smeared crack prediction in rc beams under flexural loads’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 199, pp. 532–543.

- Cozza, E., 1997. ‘Faltou remédio’. *Construção São Paulo*, (2576), pp. 4–9. Citado por de Assis (2007).
- de Assis, W. S., 2007. Sistemas computacionais de apoio à monitoração de estruturas de engenharia civil. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- de Borst, R., 1991. ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’. *Engineering Computations*, vol. 8, pp. 317–332.
- de Borst, R. e Muhlhaus, H.-B., 1992. ‘Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 521–539.
- Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M. e Gioia, G., 1990. ‘Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh sizes and distortions’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 541–564.
- Farahani, B. V., Belinha, J., Pires, F. A., Ferreira, A. J. e Moreira, P., 2017. ‘A meshless approach to non-local damage modelling of concrete’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 79, pp. 62–74.
- Ferreira, C. C., 2020a, ‘Caso 050: Fratura fragil dos navios classe liberty (1941/1945)’. Acessado em 27/03/2020.
URL: <https://www.inspecaoequipto.blogspot.com/2013/11/caso-050-fratura-fragil-dos-navios.html>
- Ferreira, C. C., 2020b, ‘Caso 060: Aviões comet - falhas por fadiga (1952/1954)’. Acessado em 28/03/2020.
URL: <https://www.inspecaoequipto.blogspot.com/2014/02/caso-060-avioes-comet-falhas-por-fadiga.html>

- Gao, X. W. e Davies, T. G., 2000. ‘An effective boundary element algorithm for 2D and 3D elastoplastic problems’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 4987–5008.
- Griffith, A. A., 1921. ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 221, pp. 163–198.
- Guiggiani, M. e Casalini, P., 1987. ‘Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 1711–1720.
- Hageman, T., Sabet, S. A. e de Borst, R., 2021. ‘Convergence in non-associated plasticity and fracture propagation for standard, rate-dependent, and cosserat continua’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 122(3), pp. 777–795.
- Hattori, G., Alatawi, I. A. e Trevelyan, J., 2017. ‘An extended boundary element method formulation for the direct calculation of the stress intensity factors in fully anisotropic materials’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 109(7), pp. 965–981.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- History by Day, 2021, ‘The tragic story of the malpasset dam disaster’. Acessado em 27/07/2021.
URL: https://www.historybyday.com/human-stories/the-tragic-story-of-the-malpasset-dam-disaster/2.html?br_t=ch
- Hong, H. e Chen, J., 1988. ‘Derivations of integral equations of elasticity’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114, pp. 1028–1044.
- Huang, Q. e Cruse, T. A., 1993. ‘Some notes on singular integral techniques in

- boundary element analysis'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 2643–2659.
- Inglis, C. E., 1913. 'The phenomena of rupture and flow in solids'. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 55, pp. 219–241.
- Ingraffea, A. R. e Grigoriu, M., (1990), Probabilistic fracture mechanics: a validation of predictive capability, Technical report, Report 90-8, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, USA.
- Ingraffea, A. R. e Saouma, V., (1985), Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete, *in* G. C. Sih e A. D. Tommaso, eds, 'Fracture Mechanics of Concrete. Structural Application and Numerical Calculation', Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 171–225.
- Jirásek, M., 2000. 'Comparative study on finite elements with embedded discontinuities'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, pp. 307–330.
- Jirásek, M., 2007. 'Mathematical analysis of strain localization'. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 11(7-8), pp. 977–991.
- Jirásek, M. e Zimmermann, T., 1998. 'Analysis of rotating crack model'. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, vol. 124, pp. 842–851.
- Kirsch, E., 1898. 'Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre'. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, vol. 42, pp. 797–807.
- Klisinski, M., Runesson, K. e Sture, S., 1991. 'Finite element with inner softening band'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 117, pp. 575–587.
- Lachat, J. C. e Watson, J. O., 1976. 'Effective numerical treatment of boundary integral equations - a formulation for three dimensional elastostatics'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, pp. 991–1005.

- Larsson, R., Runesson, K. e Sture, S., 1996. ‘Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and FE-analysis’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, pp. 3081–3101.
- Leclerc, J., Nguyen, V. D., Pardoën, T. e Noels, L., 2020. ‘A micromechanics-based non-local damage to crack transition framework for porous elastoplastic solids’. *International Journal of Plasticity*, vol. 127, pp. 102631.
- Lessons Learned From Dam Incidents and Failures, 2021, ‘Case study: Malpasset dam (france, 1959)’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.damfailures.org/case-study/malpasset-dam-france-1959/>
- Lyu, H., Taheri-Nassaj, N. e Zbib, H. M., 2016. ‘A multiscale gradient-dependent plasticity model for size effects’. *Philosophical Magazine*, vol. 96(18), pp. 1883–1908.
- Magnus Mundi, 2021a, ‘A barragem que veio abaixo’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.magnusmundi.com/a-barragem-que-veio-abaixo/>
- Magnus Mundi, 2021b, ‘A ruptura da barragem de malpasset e o casamento de mortos’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.magnusmundi.com/a-ruptura-da-barragem-de-malpasset-e-o-casamento-de-mortos/>
- Manzoli, O. L., Pedrini, R. A. e Venturini, W. S., (2009), Strong discontinuity analysis in solid mechanics using boundary element method, *in* E. J. Spoultzakis e M. H. Aliabadi, eds, ‘Avances in Boundary Element Techniques X’, Atenas, Grécia, pp. 323–329.
- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2004. ‘Uma formulação do MEC para simulação numerica de descontinuidades fortes’. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseño en Ingenieria*, vol. 20(3), pp. 215–234.

- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2007. ‘An implicit BEM formulation to model strong discontinuities’. *Computational Mechanics*, vol. 40, pp. 901–909.
- Manzoli, O., Oliver, J. e Cervera, M., 1998, ‘Localización de deformación: Análisis y simulación numérica de discontinuidades en mecánica de sólidos’. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE). Monografía n. 44. Barcelona.
- Mariani, S. e Perego, U., 2003. ‘Extended finite element method for quasi-brittle fracture’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, pp. 103–126.
- McGinty, B., 2020, ‘Historical background’. Acessado em 28/03/2020.
URL: <https://www.fracturemechanics.org/history.html>
- Mendonça, T. S., Peixoto, R. G. e Ribeiro, G. O., 2018. ‘Crack propagation using the continuum strong discontinuity approach by the bem: some numerical remarks’. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 40, pp. 520.
- Mendonça, T. S., Peixoto, R. G. e Ribeiro, G. O., 2020. ‘A new class of cells with embedded discontinuity for fracture analysis by the boundary element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 121, pp. 3869–3892.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150.
- Muhlhaus, H. B. e Vadoulakis, I., 1987. ‘The thickness of shear bands in granular materials’. *Geotechnique*, vol. 37, pp. 271–283.

- Nguyen, G. D. e Korsunsky, A. M., 2008. ‘Development of an approach to constitutive modelling of concrete: Isotropic damage coupled with plasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 5483–5501.
- Oliver, J., 1995. ‘Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models’. *Computational Mechanics*, vol. 17, pp. 49–61.
- Oliver, J., 1996a. ‘Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3575–3600.
- Oliver, J., 1996b. ‘Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3601–3623.
- Oliver, J., 2000. ‘On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207–7229.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., (1998), On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids, *in* R. de Borst e E. van der Giessen, eds, ‘Material instabilities in solids’, John Wiley & Sons, Chichester, chapter 8, pp. 107–123.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., 1999. ‘Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach’. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, pp. 319–351.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. e Lubliner, J., (1990), Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete, *in* N. Bicanic, ed., ‘SCI-C Computer aided analysis and design of concrete structures’, pp. 945–957.

- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004*a*. ‘Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 3195–3220.
- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004*b*. ‘Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2987–3014.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. e Linero, D. L., 2006. ‘Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 7093–7114.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. e Chaves, E., 2002. ‘From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 113–136.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. e Samaniego, E., 2003. ‘On the strong discontinuity approach in finite deformation settings’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 1051–1082.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Samaniego, E., 2003. ‘A study on finite elements for capturing strong discontinuities’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 2135–2161.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Sánchez, P. J., 2006. ‘A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4732–4752.
- Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E. e Chaves, E., (2002), On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics, *in* ‘WCCM V. Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics’, Vienna University of Technology.

- Paris, P., Gomez, M. e Anderson, W., 1961. 'A rational analytic theory of fatigue'. *The Trend in Engineering*, vol. 13, pp. 9–14.
- Pedrini, R. A. A., 2008. Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Peixoto, R. G., 2016. Análise de degradação material, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes através do método dos elementos de contorno. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Peixoto, R. G., Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2016. 'A solution strategy for non-linear implicit BEM formulation using a unified constitutive modelling framework'. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 64, pp. 295–310.
- Peixoto, R. G., Ribeiro, G. O. e Pitangueira, R. L. S., 2018. 'A boundary element method formulation for quasi-brittle material fracture analysis using the continuum strong discontinuity approach'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 202, pp. 47–74.
- Peixoto, R. G., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2017. 'The strong discontinuity approach as a limit case of strain localization in the implicit bem formulation'. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 80, pp. 127–141.
- Peixoto, R., Penna, S., Pitangueira, R. e Ribeiro, G., 2019. 'A non-local damage approach for the boundary element method'. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 69, pp. 63–76.
- Petersson, P. E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Technical report, TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.

- Pijaudier-Cabot, G. e Bazant, Z. P., 1987. ‘Nonlocal damage theory’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, pp. 1512–1533.
- Pijaudier-Cabot, G. e Benallal, A., 1993. ‘Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, pp. 1761–1775.
- Pirooznia, A. e Moradloo, A., 2020. ‘Investigation of size effect and smeared crack models in ordinary and dam concrete fracture tests’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 226, pp. 106863.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992. ‘The dual boundary element method: effective implementation for cracked problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Rashid, Y. R., 1968. ‘Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Rice, J., 1968. ‘A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- Rice, J. R. e Rudnicki, J. W., 1980. ‘A note on some features of the theory of localization of deformation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 16, pp. 597–605.
- Rimkus, A., Cervenka, V., Gribniak, V. e Cervenka, J., 2020. ‘Uncertainty of the smeared crack model applied to rc beams’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 233, pp. 107088.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. e Blaauwendraad, J., 1985. ‘Smeared crack approach and fracture localization in concrete’. *HERON*, vol. 30, pp. 1–48.

- Saleh, A. L. e Aliabadi, M. H., 1995. ‘Crack growth analysis in concrete using boundary element method’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, pp. 533–545.
- Sancho, J. M., Planas, J., Gálvez, J. C., Reyes, E. e Cendón, D. A., 2006. ‘An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete*’. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 29(12), pp. 1056–1065.
- Shephard, M. S., Yehia, N. A. B., Burd, G. S. e Weidner, T. J., 1985. ‘Computational strategies for nonlinear and fracture mechanics problems: automatic crack propagation tracking’. *Computers & Structures*, vol. 20, pp. 211–223.
- Shi, C., van Dam, A. G., van Mier, J. G. e Sluys, B., (2000), Crack interaction in concrete, *in* F. H. Wittmann, ed., ‘Materials for buildings and structures’, Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, Germany, pp. 125–131.
- Simo, J. C. e Oliver, J., (1994), Strong discontinuity analysis in solid mechanics using boundary element method, *in* Z. P. Bažant, Bittnar, M. Jirásek e J. Mazars, eds, ‘Fracture and damage in quasibrittle structures: experiment, modelling and computer analysis’, pp. 25–39.
- Simo, J. C., Oliver, J. e Armero, F., 1993. ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids’. *Computational Mechanics*, vol. 12, pp. 277–296.
- Swenson, D. V. e Ingraffea, A. R., 1988. ‘Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theoty and applications’. *Computational Mechanics*, vol. 3, pp. 381–397.
- Swopes, B. R., 2020, ‘This day in aviation: Boeing 737-200 archives’. Acessado em 28/03/2020.
- URL:** <https://www.thisdayinaviation.com/tag/boeing-737-200/>

- Tang, H., Wei, W., Song, X. e Liu, F., 2021. ‘An anisotropic elastoplastic cosserat continuum model for shear failure in stratified geomaterials’. *Engineering Geology*, vol. 293, pp. 106304.
- Tang, H., Zhu, F., Yang, D. e Papazafeiropoulos, G., 2021. ‘Numerical simulation of strain localization based on cosserat continuum theory and isogeometric analysis’. *Computers and Geotechnics*, vol. 129, pp. 103874.
- Telles, J. C. F. e Carrer, J. A. M., 1991. ‘Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method’. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 15, pp. 303–311.
- The New York Times, 2021, ‘Seven of the deadliest infrastructure failures throughout history’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.nytimes.com/2018/08/14/world/bridge-collapses-history.html>
- UNC Charlotte, 2021, ‘The collapse of the schoharie creek bridge’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.eng-resources.uncc.edu/failurecasestudies/bridge-failure-cases/the-collapse-of-the-schoharie-creek-bridge/>
- Wells, G. N. e Sluys, L. J., 2001. ‘A new method for modelling cohesive cracks using finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 2667–2682.
- WJE, 2021, ‘Schoharie creek bridge: Collapse investigation’. Acessado em 27/07/2021.
URL: <https://www.wje.com/assets/flipbook/history/files/assets/seo/page79.html>
- Wu, J. Y. e Nguyen, V. P., 2018. ‘A length scale insensitive phase-field damage model for brittle fracture’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 119, pp. 20–42.

Zhang, Y., Lackner, R., Zeiml, M. e Mang, H. A., 2015. ‘Strong discontinuity embedded approach with standard sos formulation: Element formulation, energy-based crack-tracking strategy, and validations’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 287, pp. 335–366.

Apêndice A

Algoritmo Completo da Estratégia de Solução

ALGORITMO COMPLETO DA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO:

- i. Calcula-se o vetor $\{P\}$ através da equação 3.95 e inicializa-se $i = 0$;
- ii. $i = i + 1, j = 0$;
- iii. Se $i >$ número máximo de incrementos especificado $\Rightarrow$ FIM;
- iv. $\{Q\}_j^i = \{0\}, \{F\}_j^i = \{0\}$;
- v. $j = j + 1$;
- vi. Se j for maior que o número máximo de iterações especificado, interrompe-se o processamento;
- vii. Monta-se a matriz $[D]_{j-1}^i$, da equação 3.99;
- viii. As equações 3.101 e 3.102 são resolvidas para obtenção de $\{\hat{\epsilon}^P\}_j^i$ e $\{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i$;
- ix. São calculados $\{x^P\}_j^i, \{\delta x^Q\}_j^i, \{\hat{u}^{\Omega,P}\}_j^i$ e $\{\delta\hat{u}^{\Omega,Q}\}_j^i$, utilizando as equações 3.106, 3.107, 3.109 e 3.110;

- x. Calcula-se $\delta\lambda_j^i$, através de um método de controle;
- xi. Os vetores $\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i$, $\{\delta x\}_j^i$ e $\{\delta\hat{u}^\Omega\}_j^i$, são montados a partir das equações 3.100, 3.105 e 3.108;
- xii. Atualizam-se λ_j^i , $\{\hat{\epsilon}\}_j^i$, $\{x\}_j^i$ e $\{\hat{u}^\Omega\}_j^i$, fazendo $(\cdot)_j^i = (\cdot)_{j-1}^i + \delta(\cdot)_j^i$;
- xiii. Monta-se $\{F\}_j^i$, empregando-se a equação 3.96;
- xiv. Calcula-se $\{Q\}_j^i = \lambda_j^i\{P\} - \{F\}_j^i$ (equação 3.94);
- xv. Teste de convergência:
 Se $\frac{\|\{Q\}_j^i\|}{\|\lambda_j^i\{P\}\|} < \text{TOL}$, retorna-se ao passo (ii) para o próximo incremento de carga, caso contrário, retorna-se ao passo (v) para nova iteração.

Apêndice B

Algoritmo Completo para o Cálculo do Salto no Campo de Deslocamentos

ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DA INTERFACE:

- i. Inicializa-se:

 $j = 0$ e $\{\llbracket u \rrbracket\}_0$ com o valor acumulado até a última avaliação das componentes do salto nos deslocamentos;
- ii. $j = j + 1$;
- iii. Se $j >$ número máximo de iterações especificado, interrompe-se o processamento;
- iv. Calculam-se $\{f_1\}_{j-1}$ e $\{f_2\}_{j-1}$ nos pontos de colocação P_1 e P_2 , respectivamente, a partir da equação 4.23;
- v. Calculam-se $\left[\frac{\partial \{f_1\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]_{j-1}$ e $\left[\frac{\partial \{f_2\}}{\partial \{\llbracket u \rrbracket\}} \right]_{j-1}$ nos pontos de colocação P_1 e P_2 , respectivamente, a partir da equação 4.26;
- vi. Resolve-se o sistema de equações 4.27;

- vii. Atualiza-se: $\{\llbracket u \rrbracket\}_j = \{\llbracket u \rrbracket\}_{j-1} + \{\delta \llbracket u \rrbracket\}_j$;
- viii. Se $\frac{\|\{\delta \llbracket u \rrbracket\}_j\|}{\|\{\llbracket u \rrbracket\}_j\|} > \text{TOL}$, onde TOL é uma tolerância especificada, volta-se ao passo (ii). Caso contrário:
- ix. Retorna-se o resultado $\{\llbracket u \rrbracket\} = \{\llbracket u \rrbracket\}_j$.

Apêndice C

Modificações nas Matrizes da Formulação Implícita Associadas à Exclusão e Geração de Novos Pontos de Colocação no Interior das Células

Quando o ponto de colocação localizado no centróide da célula é excluído do modelo numérico, os vetores referentes às taxas de deformações e aos campos iniciais associados a pontos internos devem ser excluídos das respectivas matrizes. Portanto, as equações 3.82 e 3.83 assumem a seguinte forma:

$$\{\dot{x}\} = [B]\{\dot{y}\} + \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (\text{C.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} A^\epsilon \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \{\dot{x}\} + \left[\begin{array}{c} B^\epsilon \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \{\dot{y}\} + \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (\text{C.2})$$

onde $\mathbf{0}$ refere-se às linhas e colunas excluídas.

Já quando os dois novos pontos de colocação são adicionados à célula, vetores referentes às taxas de deformações e aos campos iniciais associados a pontos internos são amplificados através da introdução dos respectivos sub-vetores: $\{\dot{\epsilon}_N\}$ e $\{\dot{\epsilon}_N^\varphi\}$.

Deste modo, as equações 3.82 e 3.83 assumem a forma:

$$[A]\{\dot{x}\} = [B]\{\dot{y}\} + \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi} & q_{\epsilon^\varphi} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \dot{\epsilon}_N^\varphi \end{array} \right\} \quad (\text{C.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon}_N \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{array} \right] \{\dot{x}\} + \left[\begin{array}{c} B^\epsilon \\ b^\epsilon \end{array} \right] \{\dot{y}\} + \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & q_C^\epsilon \\ \hline q_R^\epsilon & q_{RC}^\epsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \dot{\epsilon}_N^\varphi \end{array} \right\} \quad (\text{C.4})$$

onde os coeficientes das novas sub-matrizes são obtidos assim como descrito na tabela C.1.

Tabela C.1: Construção das submatrizes.

Submatriz	Ponto fonte	Região de integração
$[q_{\epsilon^\varphi}]$	Pontos do contorno	Células modificadas
$[q_C^\epsilon]$	Pontos internos antigos	Células modificadas
$[q_R^\epsilon]$	Pontos internos novos	Células antigas
$[q_{RC}^\epsilon]$	Pontos internos novos	Células modificadas
$[a^\epsilon], [b^\epsilon]$	Pontos internos novos	Elementos do contorno

Deste modo, as matrizes presentes na equação 3.89 também são expandidas, assim como detalhado abaixo.

$$\left[\begin{array}{c} N^\epsilon \\ n^\epsilon \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{array} \right] [A]^{-1} [B] + \left[\begin{array}{c} B^\epsilon \\ b^\epsilon \end{array} \right] \Rightarrow [n^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[B] + [b^\epsilon] \quad (\text{C.5})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & m_C^\epsilon \\ \hline m_R^\epsilon & m_{RC}^\epsilon \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{array} \right] [A]^{-1} \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi} & q_{\epsilon^\varphi} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & q_C^\epsilon \\ \hline q_R^\epsilon & q_{RC}^\epsilon \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} [m_C^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_C^\epsilon] \\ [m_R^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [q_R^\epsilon] \\ [m_{RC}^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_{RC}^\epsilon] \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Nas implementações numéricas, os coeficientes pré-existentis destas matrizes não necessitam ser recalculados. Neste caso, quando novos pontos internos são gerados, basta que estas matrizes sejam expandidas com a inserção das submatrizes presentes nas equações C.5 e C.6.