

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Augusto Meireles Vargas

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN ALGÉBRICAS REGULARES ESPECIAIS NO
ESPAÇO EUCLIDIANO

Belo Horizonte
2024

Augusto Meireles Vargas

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN ALGÉBRICAS REGULARES ESPECIAIS NO
ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte
2024

Vargas, Augusto Meireles.

V297s

Superfícies de Weingarten algébricas regulares especiais no espaço euclidiano [recurso eletrônico] / Augusto Meireles Vargas. – 2024

1 recurso online (56 f. il.) : pdf.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 55-56.

1. Matemática - Teses. 2. Superfícies algébricas - Teses. 3. Curvas algébricas – Teses. I. Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

ATA DA QUATROCENTÉSIMA TERCEIRA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO AUGUSTO MEIRELES VARGAS, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 20 DE FEVEREIRO DE 2024.

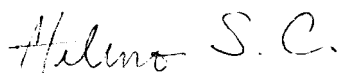
Aos vinte dias do mês de fevereiro de 2024, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link: <https://meet.google.com/hoy-crnj-uas> reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação do aluno **Augusto Meireles Vargas**, intitulada: "*Superfícies de weingarten algébricas regulares especiais no espaço euclidiano*", requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2024.


PROF. DR. EZEQUIEL RODRIGUES BARBOSA
Orientador (UFMG)

g v.b

Documento assinado digitalmente
EDNO ALAN PEREIRA
Data: 26/11/2024 17:27:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

PROF. DR. EDNO ALAN PEREIRA
Examinador (UFSJ)


PROF. DR. HELENO DA SILVA CUNHA
Examinador (UFMG)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Superfícies de weingarten algébricas regulares
especiais no espaço euclidiano*

AUGUSTO MEIRELES VARGAS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa
UFMG



Documento assinado digitalmente

EDNO ALAN PEREIRA

Data: 26/11/2024 17:50:15-0300

Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Edno Alan Pereira
UFSJ

Prof. Heleno da Silva Cunha
UFMG

Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2024.

"Hesitação é derrota"
Isshin Ashina

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho, em especial:

- ao meu orientador Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa, por sua disponibilidade, ensinamentos e compreensão,
- à Janaíne Mesquita pelo incentivo e paciência,
- à Cíntia Santos pelos ensinamentos e sessões de estudo,
- ao Caio Rates pela amizade e companheirismo,
- ao Bryant e a Isadora pelos conselhos,
- aos meus amigos: Luan, Henrique, José, Julian, Leandro, Daniel e Gabriel que tornaram essa jornada mais divertida.

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em classificar as superfícies de Weingarten algébricas especiais em $\mathbb{R}^3$. A classificação das superfícies de Weingarten no cenário geral permanece, na maioria, em aberto até hoje. Após trabalhos iniciais nas décadas de cinquenta, liderados por Chern, Hopf, Voss, Hartman, Winter, entre outros, houve progresso recente nesta teoria, especialmente quando a relação de Weingarten assume a forma $H = f(H^2 - K)$, onde f é uma função C^1 definida em $[0, +\infty)$. A atenção é direcionada para funções que satisfazem a condição $4t(f'(t))^2 < 1$ no intervalo $t \in [0, +\infty)$, que, por sua vez, é chamada de condição de elipticidade.

Manfredo do Carmo e João Lucas Barbosa, mostraram em [3] que as únicas superfícies regulares algébricas de curvatura média constante são:

- Esferas, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $H = \frac{1}{r}$;
- Cilindros, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $H = \frac{1}{2r}$;
- Planos, $ax + by + cz + d = 0$, $H = 0$.

A descoberta de que existem apenas três tipos de superfícies algébricas regulares de curvatura média constante — planos, esferas e cilindros retos — é um resultado surpreendente e significativo. Como a família de superfícies de Weingarten engloba a família de superfícies de curvatura média constante, uma pergunta natural que surge é “se ao analisarmos as Weingarten existem outras algébricas regulares além destas três?”

Neste contexto, apresentamos os seguintes resultados autorais.

Teorema Seja Σ uma superfície algébrica regular em $\mathbb{R}^3$. Suponha que Σ seja uma Weingarten especial e satisfaça $aH + bK = 1$, $a > 0, b \geq 0$. Então Σ é uma esfera ou um cilindro.

Teorema. A única superfície Weingarten especial do tipo mínimo algébrica regular é o plano

Esses resultados são essenciais para a compreensão da geometria e classificação das superfícies de Weingarten em $\mathbb{R}^3$ contribuindo significativamente para o avanço do conhecimento sobre as propriedades geométricas dessas superfícies especiais.

Palavras-chave: superfícies de Weingarten; superfícies de curvatura média contante; superfícies algébricas regulares.

Abstract

In this dissertation we will be interested on the classification of special algebraic Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$. The classification of Weingarten surfaces in the general setting remains mostly open to this day. After initial work in the 1950s, led by Chern, Hopf, Voss, Hartman, Winter, among others, there has been recent progress in this theory, especially when the Weingarten relation takes the form $H = f(H^2 - K)$, where f is a function C^1 defined on $[0, +\infty)$. Attention is directed to functions that satisfy the condition $4t(f'(t))^2 < 1$ on the interval $t \in [0, +\infty)$ called the elliptic condition.

Manfredo do Carmo and João Lucas Barbosa, showed in [3] that the only regular algebraic surfaces with constant mean curvature are:

- Spheres, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $H = \frac{1}{r}$;
- Cylinders, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $H = \frac{1}{2r}$;
- Planes, $ax + by + cz + d = 0$, $H = 0$.

The first two cases being when the mean curvature H differs from zero and the last when it is identically zero.

The discovery that there are only three types of regular algebraic surfaces of constant mean curvature—planes, spheres, and right cylinders—is a surprising and significant result. As the family of Weingarten surfaces encompasses the family of surfaces with constant mean curvature, it is natural to ask whether when analyzing the Weingarten there are other regular algebraic besides these three.

In this context, we present the following original results.

Theorem. Let Σ be a regular algebraic surface in $\mathbb{R}^3$. Suppose that Σ is a special Weingarten surface satisfying the relation $aH + bK = 1$, with $a > 0$ and $b \geq 0$. Then Σ is either a sphere or a cylinder.

Theorem. The only regular algebraic special Weingarten surface of minimal type is the plane.

These results are fundamental for understanding the geometry and classification of Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$, significantly contributing to the advancement of knowledge regarding the geometric properties of these special surfaces.

Keywords: Weingarten surfaces; surfaces of constant medium curvature; regular algebraic surfaces.

Lista de Figuras

2.1	Superfície regular	15
2.2	Esfera parametrização polar	17
2.3	Plano tangente	19
2.4	Vetor normal da esfera	20
2.5	Tractriz	26
2.6	Pseudoesfera	26
2.7	Cilindro	27
2.8	Esfera	27
2.9	Plano	29
2.10	Catenoide	30
2.11	Helicoide	30
2.12	Superfície de Enneper	31
3.1	Pseudoesfera	32
3.2	Trefoil knot	32
3.3	Helicoide	32
3.4	Esfera	32
3.5	Cilindro	32
3.6	Lema de separação de planos	38
3.7	Vizinhança tubular	38
3.8	Superfície paralela — Cilindro	39
3.9	Superfície paralela — Onduloide 1	40
3.10	Superfície paralela — Onduloide 2	40
3.11	Superfície paralela — Onduloide 3	40
4.1	Diagrama Teorema 4.0.1	42
4.2	Onduloide	45
4.3	Nodoide	45
4.4	Cilindro	45
4.5	Infinitas interseções	45
4.6	Superfície convergindo para o cilindro	46
5.1	Diagrama de resultados	50
A.1	Curva de Delaunay	51
A.2	Curva de Delaunay — Reta	52
A.3	Curva de Delaunay — Aproximando de um semicírculo	52
B.1	Caso 1	54
B.2	Caso 2	54

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos Iniciais	14
3	Superfícies especiais	32
4	Resultado principal	42
5	Conclusões	50
A	Delaunay	51
B	Alexandrov	53
	Referências	55

Capítulo 1

Introdução

A investigação das superfícies de Weingarten deu-se início no século XIX, quando foram apresentadas por Weingarten em [19] e [18]. Weingarten estava interessado em encontrar todas as superfícies isométricas para uma dada superfície de revolução, o que atraiu a atenção de diversos geômetras ao longo da história.

A classificação geral das superfícies de Weingarten permanece praticamente em aberto. Após avanços nas décadas de 50, especialmente para relações de Weingarten do tipo $H = f(H^2 - K)$ com f sendo uma função que satisfaz a condição $4t(f'(t))^2 < 1$ no intervalo $t \in [0, +\infty)$, a teoria progrediu, permitindo um melhor entendimento da forma dessas superfícies. A condição $4t(f'(t))^2 < 1$ é chamada de condição de elipticidade, quando uma superfície satisfaz uma relação de Weingarten e a condição de elipticidade ela é chamada de superfície especial.

Esta dissertação se dedica à classificação de superfícies de Weingarten algébricas que satisfazem a condição de elipticidade, chamadas de superfícies especiais, em $\mathbb{R}^3$. Embora a classificação geral das superfícies de Weingarten permaneça na maioria em aberto, há um interesse crescente na compreensão dessas superfícies com características particulares. Especificamente, este trabalho visa estender o Teorema que caracteriza superfícies algébricas regulares em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante. Esse Teorema, inicialmente proposto por do Carmo e Barbosa em [3], estabelece que, para $H \neq 0$, tais superfícies são esferas ou cilindros, enquanto, para $H = 0$, a única possibilidade é um plano.

Um conjunto algébrico em $\mathbb{R}^3$ é essencialmente um conjunto de pontos representados pelas soluções de uma equação polinomial. Mais especificamente, é o conjunto Σ definido da seguinte forma:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$$

Onde $f(x, y, z)$ é uma função polinomial, com três variáveis reais (x, y, z) como entradas que retorna um número real. O conjunto Σ consiste em todos os pontos (x, y, z) onde o polinômio f é avaliado como zero.

Um conjunto algébrico é considerado regular se o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ nunca se anula no conjunto Σ . Nesse contexto a condição de regularidade desempenha um papel fundamental, pois com ela podemos parametrizar Σ localmente por funções $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Escolhemos um ponto $p \in f^{-1}(a)$, onde a é um valor regular. Como a é um valor regular, podemos, se necessário, trocar os eixos a fim de tornar $f_z \neq 0$. Defina a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Como p é um ponto arbitrário, conseguimos cobrir todos os pontos como este por uma vizinhança e aplicando o Teorema da Função Inversa, mostramos que Σ é uma superfície regular, mais ainda aplicando o Teorema da Função Inversa temos que, se uma superfície Σ é algébrica, ela será mergulhada.

Temos que Σ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^3$, ou seja, tomando uma sequência de pontos (x_n, y_n, z_n) em Σ que converge para algum ponto (x, y, z) no espaço, então (x, y, z) também deve satisfazer a equação polinomial $f(x, y, z) = 0$.

Esta propriedade decorre do fato de que Σ é definido como o conjunto de zeros do polinômio $f(x, y, z)$, e por definição, qualquer ponto em Σ satisfaz a equação. Portanto, Σ é fechada, pois contém todos os seus pontos limites, e qualquer sequência de pontos dentro de Σ que converge terá seu limite dentro de Σ .

Como as superfícies de Weingarten englobam as superfícies de curvatura média constante, uma pergunta natural a se fazer é: Quais são as superfícies de Weingarten algébricas regulares no $\mathbb{R}^3$? Como classificar tais superfícies ainda é um trabalho árduo, vamos nos limitar a responder à pergunta quando as superfícies são especiais. Se a superfície for do tipo CMC e satisfazer a equação $aH + K = b$, com $a \geq 0, b > 0$, então ela deve ser uma esfera ou um cilindro e para o caso especial mínimo a única possibilidade é o plano. Note que se $b = 0$ então a equação se torna $aH = 1$, e, portanto, a superfície é do tipo CMC e o resultado segue.

Portanto, esta dissertação visa contribuir para o avanço do conhecimento em geometria diferencial, explorando a riqueza das superfícies algébricas regulares e suas curvaturas, com implicações profundas para a compreensão da geometria do espaço tridimensional.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Para o entendimento desta dissertação, o leitor deve estar familiarizado com os conceitos do cálculo diferencial e integral além de ter noções de álgebra linear e conhecimento de equações diferenciais ordinárias. Nesse primeiro capítulo será introduzido os conceitos básicos de superfícies, um leitor experiente pode pular esse capítulo sem prejuízo para a compreensão dos demais

Curvas

Definição 2.0.1 (Curva parametrizada diferenciável). Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t), t \in I$, é o traço da curva. $\square$

Os exemplos mais simples de curvas são as retas e as circunferências, a caracterizada pela aplicação:

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R}$$

com a, b e c todos não nulos simultaneamente, com isso temos uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a reta que passa pelo ponto x_0, y_0, z_0 e é paralela ao vetor (a, b, c) .

Algumas outras definições são importantes para o estudo e serão introduzidas sem muitos comentários.

Definição 2.0.2 (Vetor tangente). Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é dito vetor tangente de α em t . $\square$

Definição 2.0.3 (Curva regular). A curva α é dita regular se $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$. $\square$

Superfícies

Para trabalhar utilizando as ferramentas de cálculo, precisamos que as superfícies sejam suficientemente suaves, não queremos arestas, além disso, queremos que ela não apresente pontas ou auto intersecções. Desse modo, todo ponto tem um único plano tangente.

Superfícies regulares

Sem grande rigor, podemos definir intuitivamente que uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é uma deformação de pedaços do plano, sendo colados sem que resulte em pontas, arestas ou auto interseções. Não se percebe de imediato, mas de fato a definição que segue é uma boa definição para superfícies regulares.

Definição 2.0.4 (Superfície regular). Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x}: U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\mathbf{x}$ é diferenciável. Isto significa que se escrevermos,

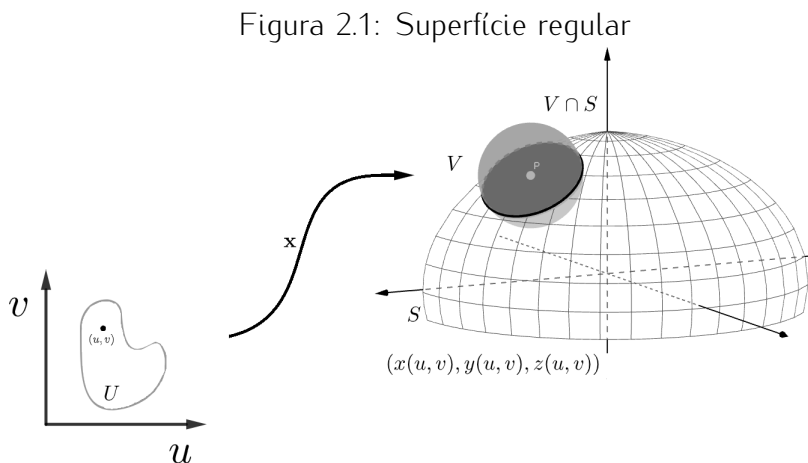
$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

as funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

2. $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo. Como $\mathbf{x}$ é contínua pela condição 1, isto significa que $\mathbf{x}$ tem inversa $\mathbf{x}^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

□

A primeira condição é habitual já que queremos trabalhar com ferramentas de cálculo na superfície. O fato da segunda definição fornecer uma injetividade elimina os casos de auto intersecções além de que como sua inversa é contínua os casos de arestas e pontas também arestas. Mais adiante ficará claro que a terceira condição garante a existência do plano tangente em todos os pontos da superfície.



Criada pelo autor.

Reestruturação da condição 3

A condição 3 da definição de superfícies regulares, inicialmente, é estranha. De modo a expressar ela de forma mais habitual, calcularemos a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$. Assim, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ com coordenadas (u, v) e $f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Seja $q = (u_0, v_0)$. O

vetor e_1 é tangente a curva $u : (u, v_0)$, construída variando o parâmetro u e fazendo constante V_0 , cuja imagem por $\mathbf{x}$ é a curva:

$$u \longrightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

Esta curva está contida em S e tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e um vetor é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Pela definição de diferencial,

$$d\mathbf{x}_q(e_1) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

Usando o mesmo raciocínio, a curva $v : (u_0, v)$ tem vetor tangente e_2 , a imagem em S é dada por,

$$v \longrightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)),$$

e a diferencial é dada por,

$$d\mathbf{x}_q(e_2) \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Portanto, a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases canônicas é:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

A condição 3 pode então ser expressa exigindo que os vetores colunas desta matriz sejam linearmente independentes, ou que o produto vetorial $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$, ou ainda de outra forma, exigindo que um dos determinantes Jacobianos,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

seja não nulo em q .

Exemplo 2.0.5. Intuitivamente temos que o plano é uma superfície regular, pois ele não possui arestas, pontas e nem auto interseções. O plano xy pode ser facilmente verificado como superfície regular com a aplicação:

$$\mathbf{x} = (x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

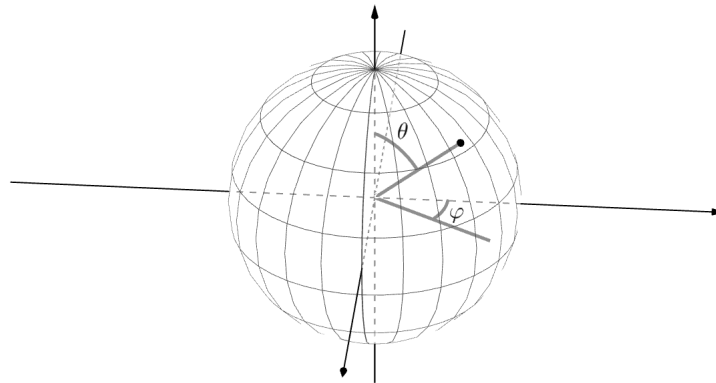
Exemplo 2.0.6. Com um pouco mais de esforço é possível mostrar que a esfera unitária, $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, é uma superfície regular. Essa superfície pode ser coberta por 6 aplicações:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(x, z) &= \left(x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, z \right), \\ \mathbf{x}_2(x, z) &= \left(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, z \right), \\ \mathbf{x}_3(x, z) &= \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \\ \mathbf{x}_4(x, z) &= \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \\ \mathbf{x}_5(y, z) &= \left(+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right), \\ \mathbf{x}_6(y, z) &= \left(-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Assim como as curvas, uma superfície pode ter várias parametrizações. Uma parametrização para a esfera muito utilizada é chamada de parametrização polar dada por $\mathbf{x} \rightarrow V$ com $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Figura 2.2: Esfera parametrização polar



Criada pelo autor.

Proposição 2.0.7 (Superfície como gráfico de f). Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , ou seja, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Demonstração: Basta mostrar que a aplicação $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

que é uma parametrização do gráfico cuja vizinhança coordenada, cobre todos os pontos do gráfico satisfaz todas as condições de superfície regular segundo a definição 2.0.4. A condição

1 é claramente satisfeita, já que exigimos f diferenciável e a reestruturada condição 3 também é cumprida, visto que $\partial(x, y)/\partial(u, v) \equiv 1$.

Por fim, a condição 2 é satisfeita, pois, cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem sob $\mathbf{x}$ do ponto único $(u, v) = (x, y) \in U$. $\mathbf{x}$ é, portanto, um-para-um, e como $\mathbf{x}^{-1}$ é a restrição ao gráfico de f da projeção (contínua) de $\mathbb{R}^3$ no plano xy , $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua. ■

Definição 2.0.8. Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se o diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamada de valor crítico de F . Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado de valor regular de F . □

Proposição 2.0.9. Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular.

Demonstração: Seja $p = (x, y, z)$ ponto de $f^{-1}(a)$. Do fato de a ser um valor regular de f podemos intercambiar os eixos, possivelmente trocando seus nomes, de modo que $f_z \neq 0$ em p . Definimos então uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

indiquemos por (u, v, t) as coordenadas de $\mathbb{R}^3$ onde F toma seus valores. A diferencial de F no ponto p é dada por:

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Utilizando o teorema da função inversa, temos a garantia da existência de vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \rightarrow W$ é invertível e a inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável. Assim, as funções coordenadas de F^{-1} ,

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

são diferenciáveis. Em particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy . Como,

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

então o gráfico de h é $f^{-1}(a) \cap V$. Pela proposição 2.0.7

$$f^{-1}(a) \cap V,$$

é uma vizinhança coordenada do ponto p . Deste mesmo modo, todo ponto $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada e assim concluímos que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular. ■

Plano tangente

Nesta seção discutiremos como a condição 3 da definição de superfície regular 2.0.4 garante a existência de um plano tangente para todo $p \in S$. Mais que isso, será mostrado que o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas que passam pelo ponto p formam um plano nesse ponto.

Ou seja, para toda curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ existe um plano que contém todos os vetores $\alpha'(0)$.

Antes precisaremos da definição de função diferencial em uma superfície regular.

Definição 2.0.10. Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então f é dito diferenciável em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ com $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$, a composição $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se é diferenciável em todos os pontos de V .

□

Proposição 2.0.11. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja q um ponto do aberto U . O subespaço vetorial de dimensão 2.

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

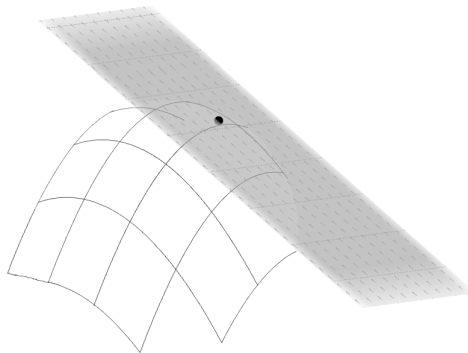
coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q)$.

Podemos concluir que o plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ onde $\mathbf{x}(q) = p$ é independente da parametrização da superfície. Sempre que o instrumento analisado depender somente da superfície, diremos que esse objeto de estudo é intrínseco à superfície.

Definição 2.0.12 (Plano tangente). O plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ passando por $\mathbf{x}(q) = p$ é chamado plano tangente a S passando por p é denotado por $T_p(S)$.

□

Figura 2.3: Plano tangente



Criada pelo autor.

Embora mudando as parametrizações continuemos com o mesmo plano, duas parametrizações diferentes determinam duas bases diferentes para $T_p S$. A base do plano tangente dada por $\{(\partial \mathbf{x} / \partial u)(q), (\partial \mathbf{x} / \partial v)(q)\}$ é chamada de base associada a $\mathbf{x}$ que diversas vezes será escrita da seguinte forma $\partial \mathbf{x} / \partial u = \mathbf{x}_u$ e $\partial \mathbf{x} / \partial v = \mathbf{x}_v$.

Em uma superfície regular S , dado um ponto p existem dois vetores normais ao plano $T_p S$, se fixarmos uma base temos que $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ pertencem ao plano tangente, podemos então definir um vetor normal unitário em cada ponto $q \in \mathbf{x}(U)$, onde $p = \mathbf{x}(q)$ da seguinte forma,

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q).$$

Exemplo 2.0.13 (Plano tangente e vetor normal na esfera). Como os vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ são vetores linearmente independentes, o plano $T_p S^2 \in \mathbb{R}^3$ é gerado por $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Uma parametrização da esfera é dada por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

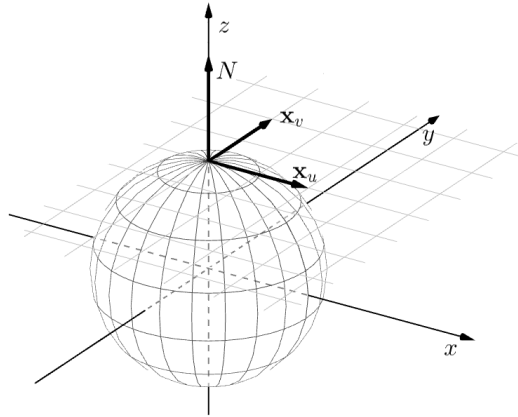
portanto, o plano tangente a S^2 em (u, v) é definido por:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u) \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, 2v).$$

Usando a expressão encontrada anteriormente para o vetor normal, obtemos:

$$N(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Figura 2.4: Vetor normal da esfera



Criada pelo autor.

Primeira forma fundamental

Queremos cada vez mais ferramentas que estejam ligadas diretamente à superfície e não ao espaço do $\mathbb{R}^3$. Talvez a estrutura mais importante associada a uma superfície seja a primeira forma fundamental. A superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ herda o produto interno natural de $\mathbb{R}^3$, dado que se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, o produto interno induzido em cada plano tangente $T_p S$, (indicado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$) é igual ao produto interno $\langle w_1, w_2 \rangle$ como vetores de $\mathbb{R}^3$.

Esse produto interno é uma aplicação bilinear e simétrica já que $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ e $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é linear em w_1 e w_2 podemos então associar uma única forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

Definição 2.0.14 (Primeira forma fundamental). A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida acima é chamada, a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$. $\square$

Como uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ define uma base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ para o plano tangente em um ponto p , podemos expressar a primeira forma fundamental em tal base. Seja w um vetor tangente a S no ponto p , pela Prop. 2.0.7 existe uma curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ que w é vetor tangente. Tomando a primeira forma fundamental de w obtemos:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E (u')^2 + 2F u' v' + G (v')^2, \end{aligned}$$

com as funções calculadas em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p. \end{aligned}$$

Aplicação de Gauss

Definição 2.0.15. Uma superfície regular S é dita orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal forma que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças coordenadas desta família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de tal família é chamada de orientação de S , e S , neste caso, é chamada de orientada. Se tal escolha não for possível, a superfície é chamada de não orientável. $\square$

Deste momento em diante, S denotará uma superfície regular orientável, em outras palavras temos que S admite um campo diferenciável de vetores normais unitários em toda a extensão de S , a escolha de um tal campo N é dita orientação de S .

Definição 2.0.16 (Aplicação de Gauss). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ assume seus valores na esfera unitária,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada de aplicação de Gauss de S . $\square$

A aplicação de Gauss é usada para calcular a variação do vetor normal restrito a uma curva. Temos que a aplicação de Gauss é diferenciável e que a diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $T_{N(p)} S^2$. Visto que $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p S$.

A aplicação $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ opera da seguinte forma, para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, restringimos o vetor N à curva $\alpha(t)$ tomando em consideração a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 . Dessa forma, o vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_p S$, que mede a taxa de variação do vetor normal N restrito a curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Deste modo, dN_p mede o quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p .

Definição 2.0.17 (Curvatura normal). Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal para C e N é o vetor normal para S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é então chamado de curvatura normal de $C \subset S$ em p . $\square$

Definição 2.0.18. A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são chamadas de curvaturas principais em p . As direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1, e_2 , são chamadas direções principais em p . $\square$

Curvatura Gaussiana e curvatura média

Definição 2.0.19. Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ seja o diferencial do mapa de Gauss. O determinante de dN_p é a curvatura gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado de curvatura média H de S em p . Em termos das curvaturas principais podemos escrever:

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

$\square$

Exemplo 2.0.20 (Curvatura gaussiana e média - cilindro).

$$K = k_1 k_2 = 1 \cdot 0 = 0, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2.0.21 (Curvatura gaussiana e média - esfera).

$$K = k_1 k_2 = 1 \cdot 1 = 1, \quad H = \frac{k_1 + k_1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

A aplicação de Gauss em coordenadas locais

Esta seção tem como finalidade obter expressões para o cálculo da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de gauss com o uso de coordenadas locais. Deste modo teremos um método sistemático para o cálculo de exemplos mais complexos que dificilmente seriam resolvidos com o uso direto da definição.

Seja $\alpha = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , de modo que $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, todas as funções abaixo serão calculadas no ponto p , mas esse ficará oculto.

Dado p , o vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ assim:

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

$\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ são base de $T_p S$, como N_u e N_v pertencem a $T_p S$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v. \end{aligned} \tag{2.2}$$

dessa forma,

$$dN(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') \mathbf{x}_u + (a_{21} u' + a_{22} v') \mathbf{x}_v;$$

portanto,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Com isso, temos que na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN é dada pela matriz a_{ij} , $i, j = 1, 2$.

Observação: A matriz a_{ij} só é simétrica se $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ for uma base ortonormal.

Já a segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é dada por:

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle = e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2.$$

Como temos $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Os termos e, f e g são chamados de coeficientes da segunda forma fundamental.

A partir da equação 2.2 obtemos,

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde E, F e G são coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. As relações 2.3 podem ser expressas como matrizes por:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

donde,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Sabemos que se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ desde que $ad-bc \neq 0$ então:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Obtemos daí os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Pela definição 2.0.19 e da Eq.2.2, temos imediatamente o valor da curvatura gaussiana,

$$\begin{aligned}
 K &= \det(a_{ij}) \\
 &= \det \left(- \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right) \\
 &= \det \left(- \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \right) \det \left(\begin{pmatrix} \frac{G}{EG - F^2} & -\frac{F}{EG - F^2} \\ -\frac{F}{EG - F^2} & \frac{E}{EG - F^2} \end{pmatrix} \right) \\
 &= eg - f^2 \cdot \frac{1}{EG - F^2} \\
 &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.
 \end{aligned}$$

Decorre do fato que $-k_1, -k_2$ são autovalores de dN que k_1 e k_2 satisfazem,

$$dN(v) = -kv = -kIv \quad \text{para algum } v \in T_p(S), v \neq 0.$$

Onde I é a matriz identidade. Sendo assim, temos que a aplicação linear $dN + kI$ é não invertível; sendo assim, possui determinante igual a zero,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

ou,

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Sabemos que k_1 e k_2 são as raízes da equação acima e concluímos que:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

donde,

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Dessa forma,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Algumas classes de superfícies

As superfícies regulares se dividem em classes, alguns casos são: superfícies de revolução, superfícies regradas, superfícies focais, superfícies mínimas, entre outras. Nesse capítulo teremos como foco as superfícies de curvatura média constante, entre elas as mínimas. Será apresentado alguns exemplos. Em verdade, é fácil mostrar se uma certa superfície é de fato mínima ou não, entretanto encontrar tais superfícies é uma tarefa árdua e por isso classificá-las é de extrema importância.

Superfícies de revolução

Dada uma curva C rotacionando ela em torno de um eixo que não encontra a curva podemos obter superfícies, vamos tomar a curva no plano xy e o eixo de rotação como sendo o eixo z . Tome

$$x = \varphi(v), \quad z = \psi(v), \quad a < v < b, \quad \varphi(v) > 0$$

como sendo uma parametrização para a curva C e $0 < u < 2\pi$ como sendo o ângulo de rotação, assim obtemos a aplicação

$$\mathbf{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$$

de um aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b \text{ em } S\}$. Tais superfícies são chamadas de superfícies de revolução.

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2$$

Se supormos que C está parametrizada pelo comprimento de arco teremos $G = 1$, assim os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = -\varphi\psi', \quad f = 0, \quad g = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'$$

Conseguimos calcular as curvaturas gaussiana e média, além disso, utilizando o fato que $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$ podemos simplificar a curvatura gaussiana.

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad H = \frac{1 - \psi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}.$$

Exemplo 2.0.22 (Pseudoesfera). A pseudoesfera é uma superfície que se destaca por sua curvatura constante negativa. Esta notável superfície foi introduzida por Eugenio Beltrami no século XIX como uma solução para as equações diferenciais que descrevem superfícies com curvatura gaussiana constante e igual a -1 .

Obtida pela rotação da tractriz, dada por $\alpha(t) = \left(\sin(t), \cos(t) + \log \tan \frac{t}{2} \right)$

A rotação da tractriz em torno do eixo z , é dada por:

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \log \tan \frac{u}{2} + \cos(u) \right), \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi$$

A superfície gerada pela rotação da tractriz é regular, pois é uma rotação de uma curva regular que não intersecta o eixo.

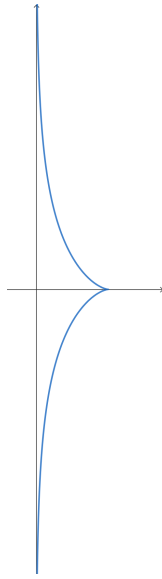


Figura 2.5: Tractriz

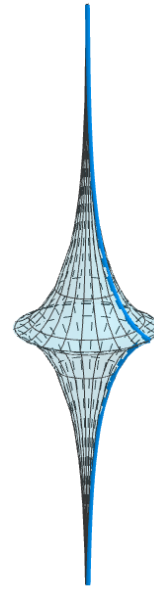


Figura 2.6: Pseudoesfera

Superfícies de curvatura média constante (CMC)

Uma superfície com curvatura média constante é uma superfície tridimensional cuja curvatura média (H) é constante em todos os pontos. A curvatura média é uma medida da curvatura total de uma superfície em um ponto específico e é calculada como a média das curvaturas principais naquele ponto. Uma superfície com curvatura média constante pode aparecer de várias maneiras, dependendo do valor da constante de curvatura média. Alguns exemplos notáveis incluem:

Exemplo 2.0.23 (Cilindro). O cilindro vertical centrado no eixo z ,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

admite parametrização:

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

Para encontrarmos a primeira forma fundamental, precisamos encontrar:

$$\mathbf{X}_u = (-\sin u, \cos u, 0); \quad \mathbf{X}_v = (0, 0, 1);$$

$$\mathbf{X}_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0); \quad \mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vv} = (0, 0, 0).$$

e daí:

$$E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = 1.$$

$$\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

E a norma desse vetor é $\|(\cos u, \sin u, 0)\| = 1$. Portanto, o vetor normal $\mathbf{N}$ é:

$$\mathbf{N} = \frac{(\cos u, \sin u, 0)}{1} = (\cos u, \sin u, 0)$$

Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental:

Os coeficientes da segunda forma fundamental do cilindro $\mathbf{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ são:

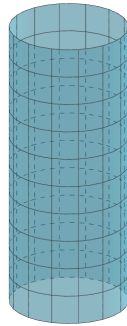
$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (-\cos u, -\sin u, 0) \rangle = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1$$

$$f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0$$

$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0$$

$$K = \frac{-1 \cdot 0 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = 0 \quad H = \frac{1 \cdot -1 \cdot 1 - 20 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot 1 - 0^2} = \frac{-1}{2}$$

Figura 2.7: Cilindro



Criada pelo autor.

Exemplo 2.0.24 (Esfera). Como os vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ são vetores linearmente independentes, o plano $T_p S^2 \in \mathbb{R}^3$ é gerado por $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Uma parametrização da esfera é dada por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

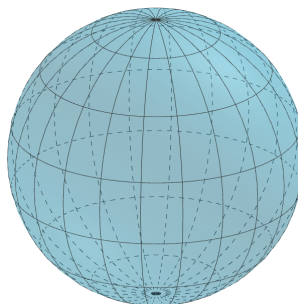
portanto, o plano tangente a S^2 em (u, v) é definido por:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u) \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, 2v).$$

Usando a expressão encontrada anteriormente para o vetor normal, obtemos:

$$N(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Figura 2.8: Esfera



Criada pelo autor.

Utilizando a simetria da esfera, notamos que dado um ponto e uma direção temos sempre um grande círculo e como se sabe uma circunferência tem curvatura igual à $\frac{1}{r}$, dessa forma:

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{r}.$$

Superfícies mínimas

O Problema de Plateau, assim denominado em homenagem ao físico belga Joseph Plateau, é um desafio matemático fundamental que consiste em encontrar a superfície de menor área que limita uma curva predefinida. Plateau conduziu experimentos pioneiros com películas de sabão para estudar essas superfícies mínimas. Em tais experimentos, ao mergulhar um contorno de arame em uma solução de água e sabão, a película de sabão resultante forma a superfície mínima que delimita o contorno.

Matematicamente, uma superfície mínima é definida como um ponto crítico do funcional de área. Isso implica que, se a superfície for alterada infinitesimalmente, a área da superfície aumentará ou permanecerá constante. Além dessa definição, outras abordagens, como uma definição geométrica baseada em curvatura média nula, ou uma relacionada à menor área entre todas as superfícies que limitam a mesma curva, são igualmente válidas.

Exemplos notáveis de superfícies mínimas incluem a catenoide, obtido pela rotação de uma catenária em torno de seu eixo, e o helicoides, formado pela rotação de uma hélice. Estas superfícies ilustram a diversidade e complexidade das soluções para o Problema de Plateau.

Definição 2.0.25 (Superfícies Mínimas). Uma parametrização é dita mínima se a curvatura média é identicamente nula. Uma superfície é dita mínima se cada uma de suas parametrizações é mínima. $\square$

Atualmente temos conhecimento de diversas superfícies mínimas, o exemplo mais simples é o plano. Meusnier descobriu em 1776 que a catenoide e o helicoides faziam parte dessa categoria. As próximas superfícies foram descobertas por Scherk. Alfred Enneper também descobriu uma superfície mínima que leva seu nome. Outras superfícies mínimas foram descobertas por H. A. Schwarz e B. Riemann, seguidos de K. Weierstrass, e mais recente em 1982, Celso José da Costa descobriu a superfície que também leva seu nome [5].

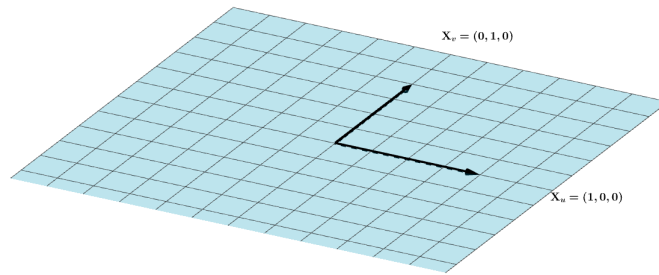
Exemplo 2.0.26 (Plano). O plano pode ser parametrizado por,

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, 0)$$

Dessa forma, temos,

$$\mathbf{X}_u = (1, 0, 0); \quad \mathbf{X}_v = (0, 1, 0); \quad \mathbf{X}_{uu} = \mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vv} = (0, 0, 0).$$

Figura 2.9: Plano



Criada pelo autor.

O vetor normal pode ser facilmente calculado em cada ponto $q \in \mathbf{X}(U)$, onde $p = \mathbf{X}(q)$ da seguinte forma,

$$N(p) = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}(q).$$

Como resultado obtemos o mesmo vetor normal para todo ponto, logo $N = (0, 0, 1)$

Como,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle & E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle & F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle & G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

$$e = f = g = 0.$$

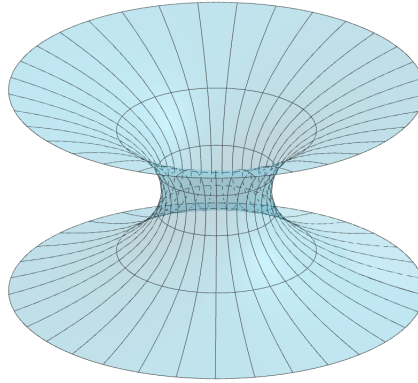
Podemos agora calcular as curvaturas gaussiana e média.

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0$$

Exemplo 2.0.27 (Catenoide). A catenoide é gerado pela rotação de uma catenária em torno de um eixo, evidenciando sua natureza minimal através da equação paramétrica:

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \cosh(v) \cos u, a \cosh(v) \sin(v), av) \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

Figura 2.10: Catenoide



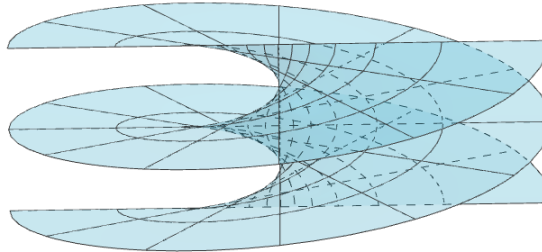
Criada pelo autor.

Exemplo 2.0.28 (Helicoide). O helicoide é dado pela parametrização:

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \sinh(v) \cos u, a \sinh(v) \sin(v), av) \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

Um fato curioso é que o helicoide é a única superfície regrada, exceto o plano que é mínima.

Figura 2.11: Helicoide



Criada pelo autor.

Exemplo 2.0.29 (Superfície de Enneper).

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

$$\mathbf{X}_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \quad \mathbf{X}_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v),$$

$$\mathbf{X}_{uu} = (1 - 2u, 2u, 2), \quad \mathbf{X}_{vv} = (2u, -2v, -2), \quad \mathbf{X}_{uv} = (1 + 2v, 2u, 0),$$

$$E = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0, \quad G = (1 + u^2 + v^2)^2.$$

Podemos calcular o vetor normal:

$$N = \frac{1}{1 + \mu^2 + N^2} (-2\mu, 2v, 1 - (\mu^2 + v^2))$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são,

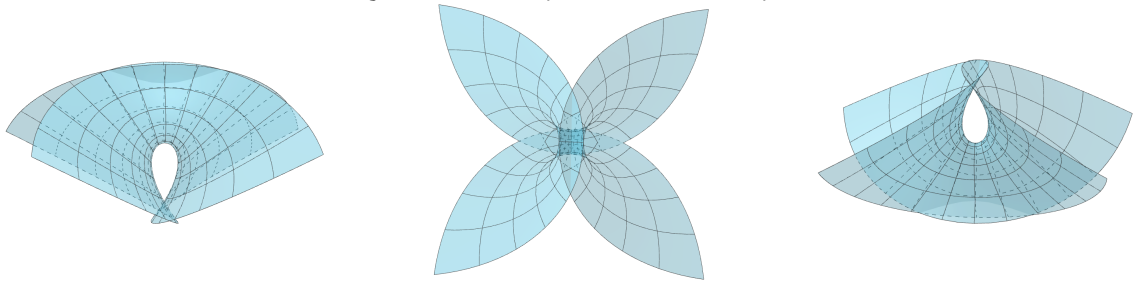
$$e = 2, \quad f = 0, \quad g = -2$$

Assim temos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2(1 + u^2 + v^2)^2 - 2(1 + u^2 + v^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)^4} \right) = 0$$

Figura 2.12: Superfície de Enneper



Criada pelo autor.

Capítulo 3

Superfícies especiais

As superfícies de Weingarten foram inicialmente propostas por Julius Weingarten por volta de 1861, conforme referenciado em [19] e [18]. Desde então, essas superfícies têm sido objeto de estudo por diversos pesquisadores como Rosenberg e Sa Earp, em [15]. Esse capítulo planeja apresentar essas superfícies além dos resultados obtidos por Rosenberg e Sa Earp, buscando uma compreensão geométrica de tais superfícies.

Definição 3.0.1 (Superfície de Weingarten). Dizemos que uma superfície é de Weingarten se sua curvatura média H está conectada com sua curvatura gaussiana K por uma relação funcional:

$$f(H, K) = 0.$$

□

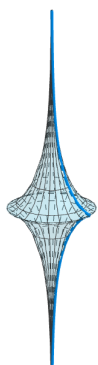


Figura 3.1: Pseudoesfera

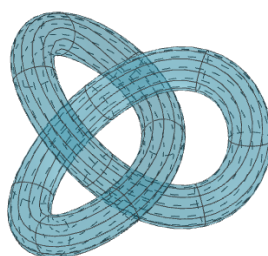


Figura 3.2: Trefoil knot

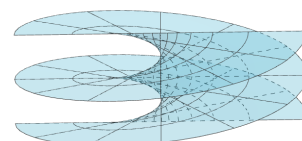


Figura 3.3: Helicoide

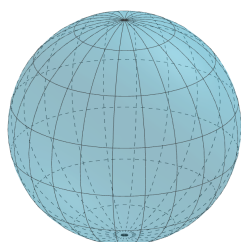


Figura 3.4: Esfera

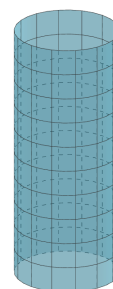


Figura 3.5: Cilindro

Localmente, existem cinco classes principais de superfícies Weingarten.

- Superfícies de rotação;
- Tubos em torno de uma curva onde uma das curvaturas principais é constante;
- Superfícies helicoidais;
- Superfícies de curvatura gaussiana K constante;
- Superfícies de curvatura média H constante.

Claro, esta lista está incompleta. Superfícies Weingarten regulares e fechadas não são difíceis de obter colando pedaços de superfícies listados acima [17].

A vasta gama de possibilidades na criação de superfícies de Weingarten motiva a análise de casos particulares. Com base nos estudos de Harold Rosenberg e Ricardo Sa Earp [15] que estudaram as chamadas superfícies especiais, temos uma restrição específica no amplo espectro de configurações possíveis. Notavelmente, ao se debruçarem sobre esses casos especiais, Rosenberg e Sa Earp demonstraram que os fundamentos da teoria de Meeks [13] e Korevaar, Kusner e Solomon [10] continuam aplicáveis.

Os resultados de Korevaar, Kusner e Solomon podem ser combinados com o trabalho de Meeks da seguinte forma:

Teorema 3.0.2 (Resultado Meeks, Korevaar, Kusner e Solomon [13] [10]). Seja M uma superfície completa, não compacta e propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não nula. Suponha que M seja finitamente conexa. Então, as extremidades de M são limitadas cilindricamente. Além disso, para cada extremidade E de M , existe uma superfície de Delaunay $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tal que E e Σ podem ser expressas como gráficos cilíndricos ρ_E e ρ_Σ de modo que, tendendo ao infinito, $|\rho_E - \rho_\Sigma| < Ce^{-\lambda x}$ onde $C \geq 0$ e $\lambda > 0$ são constantes.

Em particular, ao analisarmos as superfícies especiais, concluiremos que essas apresentam fins limitados por um cilindro. Esta característica distintiva limita as possibilidades, o que nos permitirá utilizar as técnicas utilizadas pelo Manfredo e Barbosa [3].

Definição 3.0.3 (Superfície especial). Consideraremos superfícies Σ mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, orientadas e cuja curvatura média H e a curvatura gaussiana K , satisfazem uma relação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$ onde f é uma função C^1 definida no intervalo $[0, +\infty)$.

Consideraremos em especial as funções que satisfazem a seguinte relação

$$4t(f'(t))^2 < 1,$$

para $t \in [0, +\infty)$. Dizemos que f é elíptica. Definimos Σ como sendo especial se H e K satisfazem a relação de Weingarten para f elíptica. $\square$

Podemos dividir tais superfícies em duas classes:

- Se existe um plano na classe de f , ou seja, $f(0) = 0$, então a teoria é do “tipo mínimo”.
- Se houver uma esfera na classe de f , ou seja, $f(0) \neq 0$, então a teoria é do “tipo CMC” com curvatura média não nula.

Definição 3.0.4 (Superfície Weingarten especial do tipo mínimo). Dizemos que uma superfície orientada imersa conexa Σ é uma superfície de Weingarten especial em $\mathbb{R}^3$ se a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K satisfazem uma relação de Weingarten da forma $H = f(H^2 - K)$, onde $f \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty))$ satisfazendo¹:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ e } 4t(f'(t))^2 < 1 \text{ para todo } t \in (0, +\infty), \\ f \text{ é não negativa,} \\ f \text{ é Lipschitz em } t = 0, \\ \liminf_{t \rightarrow 0^+} 4t(f'(t))^2 < 1, \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} 4t(f'(t))^2 < 1 \end{cases}$$

□

Nas duas teorias temos que a elipticidade da função f garante que Σ satisfaça um princípio de máximo.

Suponha que Σ seja uma hipersuperfície compacta e imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$, com sua fronteira $\partial\Sigma$ não vazia e contida em um hiperplano geodésico P . Se S_{r+1} for uma constante positiva não nula em Σ , então podemos determinar que a distância máxima de um ponto de Σ até P é $2/H_{r+1}^{1/(r+1)}$ em $\mathbb{R}^{m+1}$. Agora, exploraremos um resultado semelhante para algumas superfícies elípticas em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.0.5 ([15] Teorema 2.1). Seja Σ uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$, Σ compacta, $\partial\Sigma \neq \emptyset$ e $\partial\Sigma$ contidos no plano $P = \{x_3 = 0\}$. Suponha que Σ satisfaça $H = f(H^2 - K)$ com f elíptico. Se λ é uma constante positiva tal que $f \geq \lambda$ em Σ , e se $f'(1 - 2ff') \geq 0$ em Σ , então $|x_3| \leq 2/\lambda$ em Σ . Em particular, se $f' > 0$ e $F(F + \lambda) \geq 0$, então $|x_3| \leq 2/(f(0))$ em Σ , onde $F = 1/(2f') - f$.

Estimativas de altura para uma superfície envolvem determinar a distância vertical máxima ou elevação da superfície a partir de um plano de referência, considerando certas restrições geométricas.

A investigação das estimativas de altura para superfícies de curvatura média constante iniciou-se com Serrin. Onde em [16] Serrin notou que uma superfície compacta de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, com curvatura $H > 0$ e fronteira planar, apresenta altura máxima de $\frac{1}{H}$ em relação ao plano. Utilizando a técnica de reflexão de Alexandrov, também se conclui que uma superfície compacta de curvatura média constante com fronteira planar não pode se estender além de $\frac{2}{H}$. Vale ressaltar que essa estimativa é ótima, pois é alcançada pelo hemisfério de raio $\frac{1}{H}$.

Isso permite utilizar as técnicas usadas no Teorema de Alexandrov B. O Teorema pode ser estendido da seguinte forma,

Teorema 3.0.6. Seja $\mathcal{F}$ uma família que satisfaz o princípio de máximo e $\Sigma \in \mathcal{F}$ uma superfície compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Então Σ é uma esfera.

Usando a elipticidade obtemos algumas afirmações para ambos os tipos de superfícies especiais:

- Tipo mínimo $f(0) = 0$

A curvatura gaussiana K de Σ não é positiva;

¹As condições sobre f ser Lipschitz e os $\liminf$ e $\limsup$ serão necessárias para a prova do Teorema do tipo R. Schoen 4.0.11.

Os zeros de K são isolados;

Se Σ for completo com $K \equiv 0$, então Σ é um plano.

- Tipo CMC $f(0) \neq 0$

O Teorema de Alexandrov é válido;

O Teorema de Hopf: Se Σ é fechada, imersa e de gênero zero então Σ é uma esfera;

Se Σ for completo com curvatura gaussiana zero então Σ é um cilindro reto;

Diversas vezes a condição $aH + bK = 1$ é escrita da forma $aH + K = b$, ambas maneiras são equivalentes se $b \neq 0$. A representação dependerá do caso a fim de simplificar a notação.

Veremos que superfícies $\Sigma(a, b)$ mergulhadas que satisfazem $aH + K = b$ são de fato superfícies especiais quando $a > 0, b > 0$.

Proposição 3.0.7. As superfícies satisfazendo $aH + K = b, a > 0, b > 0$ são superfícies especiais.

Lema 3.0.8. $H^2 - K$ é sempre não negativo

Demonstração:[Demonstração do Lema] Seja k_1 e k_2 as curvaturas principais de uma superfície em um ponto. A curvatura média H é dada por:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

E a curvatura gaussiana K é dada pelo produto das curvaturas principais:

$$K = k_1 \cdot k_2$$

Vamos agora mostrar que $H^2 \geq K$:

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 = \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} \\ H^2 - K &= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} - k_1k_2 = \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \end{aligned}$$

Da última igualdade temos $H^2 - K \geq 0$. ■

Demonstração:

Suponha que Σ seja uma superfície imersa que satisfaça $aH + K = b$. Começamos com a equação dada, $aH + K = b$.

Podemos rearranjá-la para encontrar uma expressão para $H = \frac{b - K}{a}$

Substituindo H na expressão $a^2(H^2 - K)$ temos,

$$a^2 \left(\left(\frac{b - K}{a} \right)^2 - K \right) = (b - K)^2 - a^2 K = b^2 - 2bK + K^2 - a^2 K = K^2 - (2b + a^2)K + b^2$$

Dessa forma temos,

$$a^2 (H^2 - K) = K^2 - (2b + a^2) K + b^2$$

em Σ .

Podemos encontrar as raízes do polinômio $K^2 - (2b + a^2)K + b^2$. O polinômio é uma equação quadrática na forma geral $ax^2 + bx + c$, onde $a = 1, b = -(2b + a^2)$, e $c = b^2$.

Assim, suas raízes são:

$$\rho_{1,2} = \frac{2b + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4ba^2}}{2}, \quad \rho_1 < \rho_2$$

Podemos concluir que $0 < \rho_1$ e como $K > H^2$ segue que $K > \rho_2$ ou $K < \rho_1$

Agora suponha que haja algum ponto $p \in \Sigma$ onde $K(p) \geq \rho_2$. Então Σ é compacto, como $aH = b - K \leq b - \rho_2 \leq 0$. Sendo Σ compacta, então existe um ponto de Σ onde $H > 0$, portanto $a = 0$ e $K = b$ e consequentemente Σ é uma esfera.

Portanto, podemos assumir $K \leq \rho_1$ em Σ .

Então $aH = b - K \geq b - \rho_1 = (\sqrt{a^4 + 4ba^2} - a^2)/2 > 0$, e $H \geq \lambda$ em Σ onde $\lambda = (-a + \sqrt{a^2 + 4b})/2 > 0$.

Seja $f(t) = (-a + \sqrt{a^2 + 4(b+t)})/2, \quad t \in [0, \infty)$. Então Σ satisfaz $H = f(H^2 - K)$, e f é elíptico com $f(0) > 0$. Portanto, Σ é uma superfície especial.

De fato,

$$\begin{aligned} f(H^2 - K) &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(b + H^2 - K)}}{2} \\ &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(aH + K + H^2 - K)}}{2} \\ &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(aH + H^2)}}{2} \\ &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4aH + 4H^2}}{2} \\ &= \frac{-a + \sqrt{(2H + a)^2}}{2} \\ &= \frac{-a + 2H + a}{2} \\ &= \frac{2H}{2} \\ &= H \end{aligned}$$

Derivando a função obtemos,

$$f(t) = \frac{(-a + \sqrt{a^2 + 4(b+t)})}{2} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4(b+t)}}$$

Assim,

$$4t(f'(t))^2 = \frac{4t}{a^2 + 4b + 4t} < 1$$

■

Proposição 3.0.9. As superfícies satisfazendo $aH^2 + bH + cK = 1, a > 0, b > 0, c > 0$ são superfícies especiais.

Demonstração: Seja $f(t) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4(a+c)(ct+1)}}{2(a+c)}$

$$\begin{aligned}
f(H^2 - K) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4(a+c)(c(H^2 - K) + 1)}}{2(a+c)} \\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4(a+c)(c(H^2 - K) + aH^2 + bH + cK)}}{2(a+c)} \\
&= \frac{-b + \sqrt{(2(a+c)H + b)^2}}{2(a+c)} \\
&= \frac{2(a+c)H}{2(a+c)} \\
&= H
\end{aligned}$$

$$f'(t) = \frac{c}{\sqrt{b^2 + 4(a+c)(1+ct)}}$$

Assim,

$$4t(f'(t))^2 = \frac{4tc^2}{b^2 + 4(a+c)(1+ct)} < 1$$

■

Mostraremos que os fins de superfícies do tipo CMC são limitadas cilindricamente, de agora em diante A denotará um fim anelar.

Definição 3.0.10. Um fim anular de Σ é uma coroa circular mergulhada A em Σ que é homeomorfa a $S^1 \times [0, 1)$, onde S^1 é um círculo. $\square$

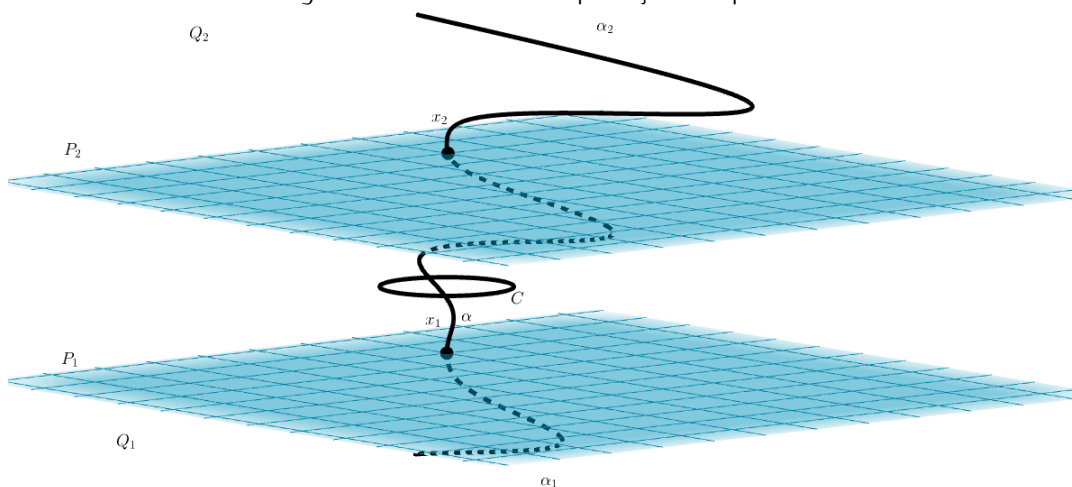
Teorema 3.0.11 (Fins especiais limitados cilindricamente [15] Teorema 3.1). Suponha que A satisfaça $H = f(H^2 - K)$, com f elíptica e $f(0) > 0$. Se A satisfaz as estimativas de altura, então A é cilindricamente limitado.

Precisamos do seguinte lema:

Lema 3.0.12 (Lema de separação de planos [15] Lema 3.2). Seja A um anel mergulhado que satisfaça $H = f(H^2 - K)$, com f elíptica e $f(0) > 0$. Sejam P_1, P_2 planos paralelos com $d(P_1, P_2) > 2/f(0)$. Seja Q_1 o meio espaço de $\mathbb{R}^3 - P_1$ que é disjunto de P_2 , e defina Q_2 semelhantemente. Então todos os componentes conexos de $Q_1 \cap A$ ou $Q_2 \cap A$ são compactos.

Demonstração:[Demonstração do lema] Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Isso implica a existência de arcos não compactos próprios, denotados como $\alpha_1 \subset A \cap Q_1$ e $\alpha_2 \subset A \cap Q_2$, originados dos pontos x_1 e x_2 respectivamente. Considere um arco α em A conectando x_1 a x_2 e defina β como a união dos arcos α , α_1 e α_2 .

Figura 3.6: Lema de separação de planos

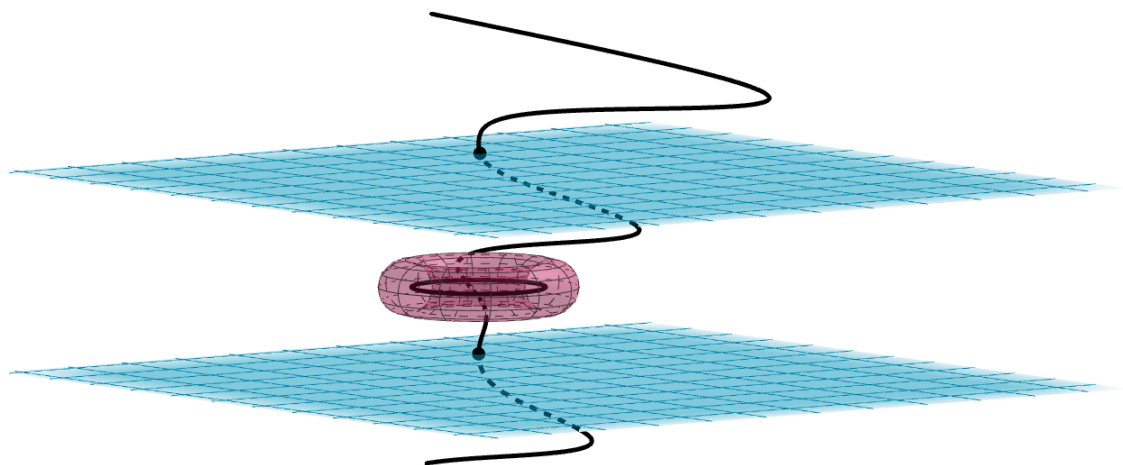


Criada pelo autor.

A seguir, escolha um círculo C em um plano P entre P_1 e P_2 , a escolha de tal C depende de β . Seja T uma vizinhança tubular de C com raio $1/(f(0))$. Certifique-se de que T seja disjunto de β e observe que o raio de C deve ser escolhido suficientemente grande para que T seja mergulhado.

Agora, β está em um domínio simplesmente conexo Δ em A . Por razões topológicas, $\Delta \cap T$ contém um disco embutido D com $\partial D \subset \partial T$, onde ∂D representa um gerador de $\pi_1(\partial T)$.

Figura 3.7: Vizinhança tubular



Criada pelo autor.

Considere o espaço de cobertura Riemanniano $\tilde{T}$ de T , onde $\tilde{T} = D^2 \times \mathbf{R}$, e levante D para um disco $\tilde{D} \subset \tilde{T}$. Certifique-se de que $\partial \tilde{D} \subset \partial \tilde{T}$ e $\partial \tilde{D}$ atue como um gerador de $\pi_1(\partial \tilde{T})$. Em $\tilde{T}$, é possível aproximar $\tilde{D}$ do infinito em cada lado e tocá-lo com uma esfera de raio $1/(f(0))$. No entanto, isto contradiz o Princípio do Máximo, estabelecendo uma contradição e provando assim o resultado. ■

Demonstração:[Demonstração 3.0.11] Seja $x_n \in A$ escolhido de modo que $|x_n| \rightarrow \infty$ e $x_n/|x_n| \rightarrow a$, como $n \rightarrow \infty$ (a é um vetor de eixo). Seja B uma bola de raio maior que

$2/(f(0))$ tal que $\partial A \subset B$.

Seja P um plano disjunto de B e paralelo ao eixo a . Sejam $P(\varepsilon)$ planos inclinados ε com $B \cap P(\varepsilon) = \emptyset$, e $P(\varepsilon) \rightarrow P$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como os pontos $x_n \in A$ têm a propriedade que $\text{dist}(x_n, P(\varepsilon)) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, o lema da separação de planos e a estimativas de altura implicam que todas as componentes conexas de A que estão acima de $P(\varepsilon)$ (ou seja, no lado de $P(\varepsilon)$ disjunto de B) são compactos. Novamente, pelas estimativas de altura, esses componentes compactos (acima de $P(\varepsilon)$) estão a uma distância limitada de $P(\varepsilon)$. Deixando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que os componentes também estão a uma distância uniformemente limitada de P . Portanto, movendo P para cima nesta altura fixa, concluímos que A está inteiramente abaixo do P transladado. ■

Rosenberg e Earp em [15] também estudaram as superfícies de revolução com a seguinte propriedade $\Sigma(a, b) = \{\Sigma \mid 2aH + K = b \text{ em } \Sigma\}$.

Note que se $b \neq 0$ então $2aH + K = b$ é equivalente à condição $aH + bK = 1$

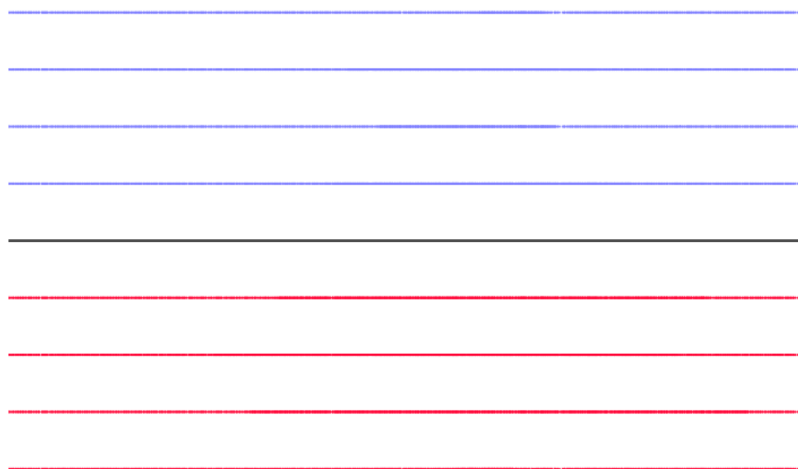
Definição 3.0.13 (Superfície paralela). Denotamos por $\bar{\Sigma} = \Sigma + \lambda N$ uma superfície paralela a Σ , onde N é o campo vetorial normal unitário. □

Teorema 3.0.14 ([15] Seção IV). As superfícies $\Sigma(a, b)$ são superfícies paralelas às superfícies de curvatura média constante mergulhadas (mínima quando $b = 0$).

Como as superfícies $\Sigma(a, b)$ são paralelas às superfícies imersas com curvatura média constante (sendo mínima quando $b = 0$), podemos analisar as superfícies que são paralelas às superfícies de Delaunay, chamaremos essas superfícies de superfícies do tipo Delaunay.

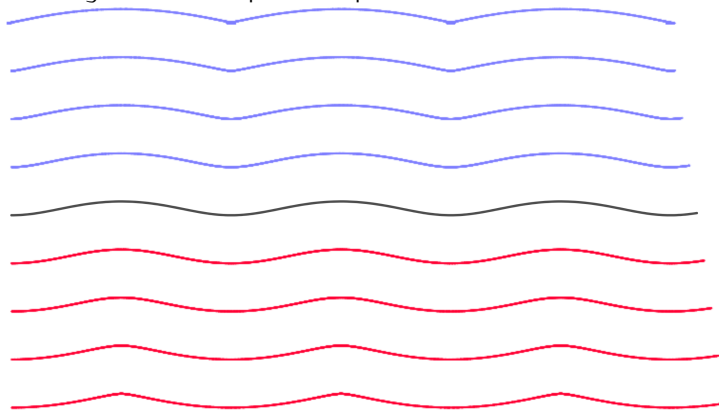
Precisamente, se H é constante e se a curvatura Gaussiana de Σ é limitada inferiormente, então $\bar{\Sigma}$ está mergulhado para λ suficientemente pequeno, para detalhes consulte [6]

Figura 3.8: Superfície paralela — Cilindro



Como esperado, as paralelas à geratriz do cilindro são retas e, portanto, a superfície paralela é um cilindro.

Figura 3.9: Superfície paralela — Onduloide 1



No onduloide temos que para λ suficientemente pequenos a curva paralela tem uma estrutura parecida, entretanto quando λ aumenta notamos auto-interseção, e, portanto, a superfície deixa de ser mergulhada.

Figura 3.10: Superfície paralela — Onduloide 2

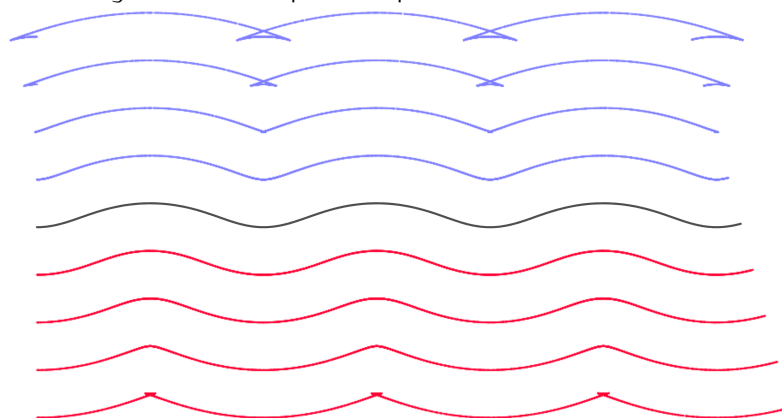
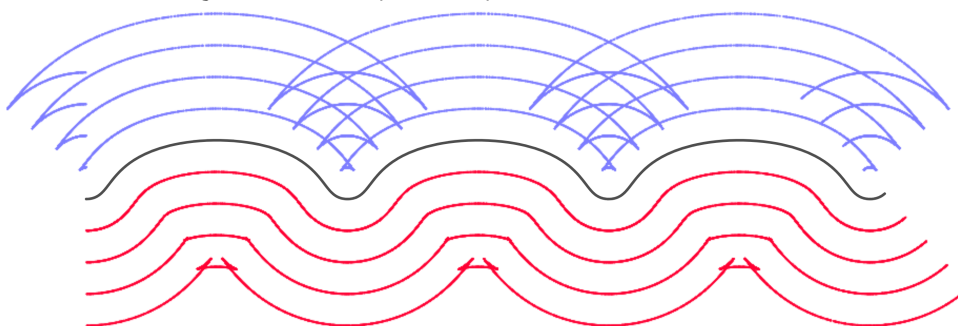


Figura 3.11: Superfície paralela — Onduloide 3



Note que quanto maior a excentricidade da elipse que gera o onduloide menor o λ que faz a curva paralela ter auto-interseção. Consulte [A](#) para mais informações sobre o onduloide.

Mostremos que uma superfície $\Sigma(a, b)$ arbitrária é especial para $a > 0, b \geq 0$. Basta tomar $f(t) = -a + \sqrt{a^2 + b + t}$. Observe que H nunca é zero em $\Sigma(a, b)$.

$$\begin{aligned}
f(H^2 - K) &= -a + \sqrt{a^2 + b + H^2 - K} \\
&= -a + \sqrt{a^2 + 2aH + K + H^2 - K} \\
&= -a + \sqrt{a^2 + 2aH + H^2} \\
&= -a + \sqrt{(H + a)^2} \\
&= -a + H + a \\
&= H
\end{aligned}$$

Verifiquemos que f é elíptica.

$$f(t) = -a + \sqrt{a^2 + b + t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b + t}}$$

Assim,

$$4t(f'(t))^2 = 4t \frac{1}{4(a^2 + b + t)} = \frac{t}{a^2 + b + t} < 1.$$

Portanto concluímos que $\Sigma(a, b)$ é especial.

Se $\bar{\Sigma}(a, b)$ é uma superfície paralela a uma superfície $\Sigma(a, b)$ (λ pequeno o suficiente) com $a > 0$ e $b \geq 0$, então $\bar{\Sigma}$ preserva o tipo mínimo se $b = 0$ e o tipo de curvatura média constante (diferente de zero) se $b \neq 0$.

Se fizermos

$$\alpha = \frac{2a}{b}, \beta = \frac{1}{b}$$

podemos assumir que Σ satisfaz $\alpha H + \beta K = 1$. Tomando $\lambda = (-a + \sqrt{a^2 + 4b})/2$ e seja $\Sigma(-t)$ a superfície paralela à Σ obtida indo $-t$ ao longo dos normais.

Então $\bar{\Sigma}$ tem curvatura média constante

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}.$$

Como $1 - 2H\lambda + \lambda^2 K \neq 0$ para $(-a + \sqrt{a^2 + 4b})/2 \leq \lambda \leq 0$. Todas as superfícies paralelas $\bar{\Sigma}$ no intervalo mencionado estão imersas e delimitam imersões de um domínio em $\mathbb{R}^3$ que constitui uma das componentes de $\mathbb{R}^3 - \Sigma$. Assim, a reflexão de Alexandrov se aplica a cada $\bar{\Sigma}$ então utilizando a teoria de Korevaar, Kusner e Solomon [10] cada um de seus fins anelares converge exponencialmente para um fim paralelo de uma superfície de Delaunay.

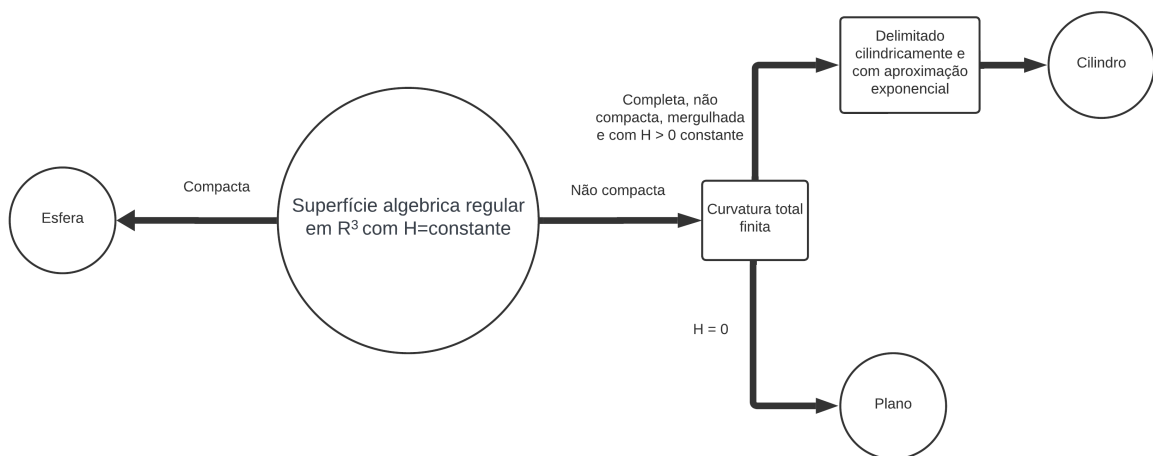
Capítulo 4

Resultado principal

É fundamental estabelecer o Teorema que originou a ideia desse trabalho. Esse resultado foi provado por João Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo [3], onde estabelecem que:

Teorema 4.0.1 ([3] Teorema 1.1 & Proposição 4.1). Seja Σ uma superfície algébrica regular em $\mathbb{R}^3$. Suponha que tenha curvatura média constante $H \neq 0$. Então Σ é uma esfera ou um cilindro. Para o caso $H = 0$ a única possibilidade é o plano.

Figura 4.1: Diagrama Teorema 4.0.1



Criada pelo autor.

As superfícies de Weingarten do tipo linear são uma extensão natural das superfícies de curvatura constante.

Teorema 4.0.2. Seja Σ uma superfície algébrica regular em $\mathbb{R}^3$. Suponha que Σ seja uma Weingarten especial e satisfaça $aH + K = b$, $a \geq 0, b > 0$. Então Σ é uma esfera ou um cilindro.

Antes de provarmos o Teorema precisamos de mais algumas ferramentas para entendermos a estrutura das superfícies.

Teorema 4.0.3 (Rigidez da esfera [5] Capítulo 5). Seja Σ uma superfície regular, conexa e compacta com curvatura Gaussiana constante K . Então Σ é uma esfera.

Teorema 4.0.4 (Bezout [8] Seção 5.3). Sejam C_1 e D_1 são curvas de grau m e n sem componentes em comum então:

$$\sum_{P \in C \cap D} I_P(C, D) = m \cdot n.$$

Onde $\sum_{P \in C \cap D} I_P(C, D)$ representa a quantidade de vezes que a curva C_1 e C_2 se intersectam.

Proposição 4.0.5 ([4] Proposição 1). Considere Σ uma superfície algébrica regular em $\mathbb{R}^3$. Suponha que Σ seja completa e não compacta. Nesse caso, a curvatura total de Σ é finita. De maneira mais precisa,

$$\int_{\Sigma} |K| d\Sigma \leq 4\pi C(d),$$

onde K é a curvatura gaussiana de Σ e $C(d)$ é uma constante que depende exclusivamente do grau d do polinômio que define Σ .

Demonstração: Seja $g : \Sigma \rightarrow S^2(1)$ o mapa de Gauss de Σ . A curvatura de Gauss é conhecida como $K = \det(dg)$, onde dg representa o diferencial do mapa g .

Os casos em que Σ é um plano ou é um cilindro são imediatos, em ambos os casos temos que a curvatura gaussiana é identicamente nula, logo é claro que a curvatura total de Σ é finita.

Defina Σ^* como o conjunto de pontos em Σ onde $K \neq 0$. Estamos focando na região da superfície onde a curvatura é significativa e, portanto, irá contribuir com o valor da integral.

Assim, restrito a Σ^* , g é um difeomorfismo local. Isso significa que para cada ponto m em Σ^* , existe uma vizinhança em Σ^* e uma vizinhança correspondente em $S^2(1)$ tal que g estabelece uma correspondência um a um de maneira suave e bijetiva entre essas vizinhanças.

Isso significa que, dados $q \in g(\Sigma^*)$ e $m_\alpha \in \{g^{-1}(q)\}$, α pertencente a um conjunto de índices A , existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de q e $\mathcal{V}_\alpha$ de m_α tais que, para cada α , g mapeia $\mathcal{V}_\alpha$ difeomorficamente em $\mathcal{U}$. De fato, g restrito a Σ^* é uma cobertura de $N(\Sigma^*)$ sem pontos de ramificação.

Isso é fundamental para garantir a continuidade e suavidade das operações realizadas na prova da proposição, contribuindo para estabelecer uma estrutura local bem definida na região de Σ^* .

Uma vez que

$$\int_{\Sigma} |K| d\Sigma = \int_{\Sigma^*} |K| d\Sigma$$

o Teorema fica provado se mostrarmos que a cobertura mencionada possui apenas um número finito de folhas.

Agora, considere um plano P que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$, e sobre P , estabeleça uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$. Então, existe um ponto m pertencente a Σ tal que, a menos de translações temos, $P = T_m(\Sigma)$ se e somente se

$$\frac{\nabla p}{|\nabla p|}(m) \perp P,$$

o que é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\nabla p}{|\nabla p|}(m), e_1 \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\nabla p}{|\nabla p|}(m), e_2 \right\rangle = 0. \end{cases}$$

- $\left\langle \frac{\nabla p}{|\nabla p|}(m), e_1 \right\rangle = 0$. Esta equação implica que o vetor gradiente normalizado de p em m é ortogonal ao vetor unitário e_1 na base do plano P .
- $\left\langle \frac{\nabla p}{|\nabla p|}(m), e_2 \right\rangle = 0$. Esta equação significa que o vetor gradiente normalizado de p em m é também ortogonal ao vetor unitário e_2 da base do plano P .

Assim, quando ambos esses produtos internos são nulos, o vetor gradiente normalizado aponta em uma direção perpendicular ao plano P , indicando que P é um plano paralelo ao tangente da superfície no ponto m .

Defina $e_1 = \sum a_i U_i$ e $e_2 = \sum b_i U_i$, onde $U_1 = (1, 0, 0)$, $U_2 = (0, 1, 0)$, e $U_3 = (0, 0, 1)$ compõem a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Com a garantia de que $|\nabla p| \neq 0$, o sistema assume a forma

$$\begin{cases} p_x a_1 + p_y a_2 + p_z a_3 = 0 \\ p_x b_1 + p_y b_2 + p_z b_3 = 0 \end{cases}$$

onde $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$ são números reais.

Cada equação neste sistema descreve uma superfície algébrica no espaço tridimensional. Definimos essas superfícies como Σ_1 e Σ_2 , associando-as aos coeficientes a_i e b_i , respectivamente. A forma geral de uma equação algébrica determina uma superfície, e as equações acima estão relacionadas aos coeficientes da base do plano P .

Suponha que o polinômio original p seja dado por:

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-i} c_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}$$

onde os c_{ij} são coeficientes constantes, e d é o grau do polinômio p .

Na demonstração, estamos interessados nas seguintes expressões:

Quando falamos sobre o “grau máximo” que podemos atingir nessas combinações lineares, estamos considerando a máxima potência de x , y , ou z que aparece em cada termo da combinação. A expressão geral para cada termo da combinação é da forma $x^i y^j z^{d-i-j}$, logo a maior potência é d e, portanto, os graus destas superfícies são $\leq (d-1)$, onde d é o grau de p .

As superfícies Σ_1 e Σ_2 , juntamente com a superfície original Σ , determinam pontos $m \in \Sigma$ da seguinte maneira: Σ_j intersecta Σ em uma curva C_j , para $j = 1, 2$. Se a interseção $C_1 \cap C_2$ contiver um ponto $m \in \Sigma^*$, uma vez que $K(m) \neq 0$, tal interseção será única em uma vizinhança de m . Pelo Teorema de Bezout, o número total de interseções é limitado acima por $(d-1)^2$, conforme desejado. Para cada interseção temos uma cota de 4π pois é a área total de $S^2(1)$, a constante $C(d)$ pode ser definida contando quantas interseções teremos, com isso fica provado o resultado. ■

Dessa forma concluímos que toda superfície algébrica possui curvatura total finita. Aplicando o Teorema de Huber encontrado em [9], toda superfície de curvatura total finita possui uma quantidade finita de fins. Podemos resumir no seguinte diagrama.

$$\text{Algébrica} \Rightarrow \text{Curvatura total finita} \Rightarrow \text{Número finito de fins.}$$

Teorema 4.0.6 (Huber [9] Teorema 13). Se Σ tem curvatura total finita, então Σ é topologicamente finita, mais ainda, Σ é conformemente equivalente a $\overline{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, onde $\overline{\Sigma}$ é uma superfície de Riemann compacta.

O cilindro é uma superfície algébrica, que possui curvatura total finita e que é topologicamente uma esfera menos dois pontos. Observe que não conseguimos informações sobre a característica de Euler da superfície.

Com isso estamos prontos para demonstrar o Teorema 4.0.2.

Demonstração:[Demonstração do Teorema 4.0.2]

Podemos assumir que $a > 0$, pois caso $a = 0$ teríamos que a equação $aH + K = b$ se tornaria $K = b$ e uma vez que a superfície é completa, pelo Teorema da Rigidez da Esfera 4.0.3, o único caso possível é uma esfera.

Caso Σ seja compacta, temos pelo Teorema de Alexandrov B que Σ é uma esfera, sendo assim podemos considerar que Σ é não compacta.

Utilizando o Teorema de Huber 4.0.6, concluímos que Σ possui topologia finita, ou seja, Σ é não compacta com um número finito de fins.

Como as superfícies do tipo $aH + bK = 1$ satisfazem uma estimativa de altura 3.0.5, utilizando o Teorema 3.0.11, cada uma desses fins é limitado cilindricamente, portanto, deve convergir para uma das três superfícies do tipo Delaunay. As paralelas ao onduloide, as paralelas ao nodoide ou as paralelas do cilindro (que são outros cilindros) A.

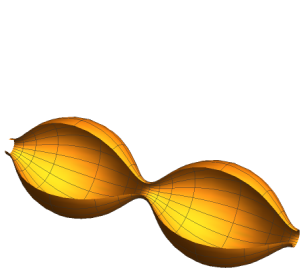


Figura 4.2: Onduloide

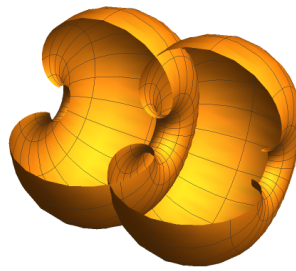


Figura 4.3: Nodoide

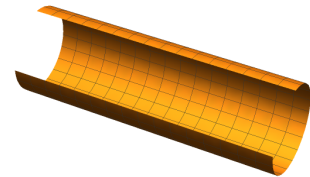


Figura 4.4: Cilindro

Como o nodoide possui auto-interseção o descartamos, pois sua superfície paralela não é uma superfície mergulhada.

Sendo assim, temos duas opções para os fins, descartaremos o caso onde o fim é do tipo onduloide:

Suponha que o fim E se aproxime do onduloide. Com um movimento rígido, podemos considerar que o eixo de Σ é paralelo ao eixo y e intersecta o eixo z .

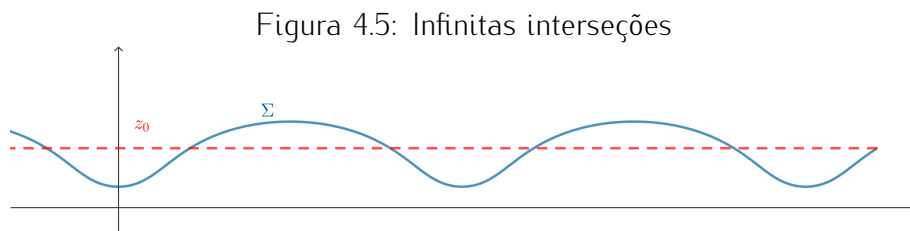


Figura 4.5: Infinitas interseções

Criada pelo autor.

Então, existe um z_0 de z tal que a reta $y \rightarrow (0, y, z_0)$ intersecta Σ infinitas vezes. Como E se aproxima de Σ no infinito, a equação algébrica $p(0, y, z_0) = 0$ tem infinitas soluções. Isto é impossível, já que o Teorema de Bezout nos diz que temos no máximo o grau de p como raízes.

Sendo assim o fim Σ é assíntótico um cilindro Σ_c .

Afirmamos agora que E contém um conjunto aberto do cilindro Σ_c .

Por meio de um movimento rígido fazemos com que uma das retas do cilindro Σ_c esteja no eixo y . Assim, uma das curvas de intersecção de E com o plano $x = 0$ é uma curva β que converge para o eixo y .

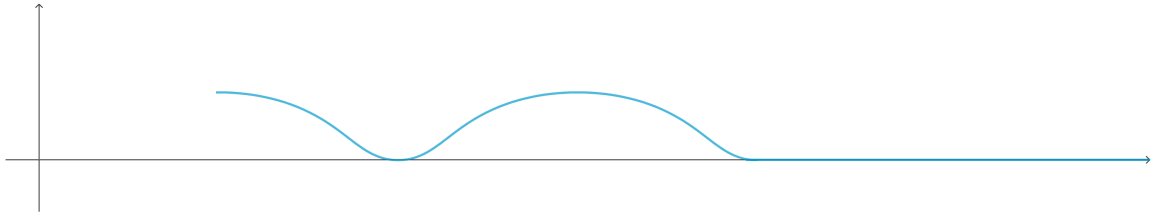
Se y for grande o suficiente, β é dado, por:

$$\beta(y) = (0, y, z(y)),$$

onde $z(y)$ é uma função que satisfaz

$$\lim_{y \rightarrow \infty} z(y) = 0$$

Figura 4.6: Superfície convergindo para o cilindro



Criada pelo autor.

Como a curva β pertence ao fim E , temos:

$$p(0, y, z(y)) = 0$$

Observe que o polinômio p pode ser escrito como

$$p(x, y, z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

onde $a_k = a_k(x, y)$ é um polinômio em x e y de grau $\leq n$.

Como a aproximação é exponencial [15]

$$\lim_{y \rightarrow \infty} z(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} C e^{-\lambda y} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Devido a um resultado estabelecido em cálculo, podemos afirmar que, para qualquer número inteiro k , a seguinte expressão converge para zero à medida que y se aproxima do infinito

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^k e^{-\lambda y} = 0$$

Esse resultado é válido para todos os inteiros k . Dessa forma, ao calcular o limite na equação $p(0, y, z(y)) = 0$ quando y tende ao infinito ao longo da curva β , concluímos que a_0 é independente de y e assume o valor de zero. Isso implica que, para qualquer valor de y , a equação $p(0, y, z) = 0$ possui $z = 0$ como raiz, indicando que a reta $y \rightarrow (0, y, 0)$ está contida em E .

Esse raciocínio é aplicável a qualquer reta de Σ_c . Consequentemente, um conjunto aberto em E é, de fato, um cilindro.

Portanto, existe um conjunto aberto U em Σ com a característica de que a curvatura gaussiana K é identicamente nula em Σ . Dado que Σ é analítico, K é nula em toda superfície Σ . Isso implica que Σ é um cilindro. ■

Proposição 4.0.7 ([15]). Se Σ satisfaz $H(x) = -aK(x)$, $a > 0$, então a superfície paralela $\Sigma(-a)$ é mínima.

Demonstração:

De fato, como

$$\overline{H} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

então

$$\frac{-aK + aK}{1 + 2aH + a^2K} = 0$$

Para ver que está imerso, é necessário mostrar $\Delta = 1 + 2H(x)a + K(x)a^2 \neq 0$.

Sabemos que $H(x)^2 \geq K(x)$, substituindo temos, $a^2K(x)^2 \geq K(x)$. Portanto, se $K(x) > 0$ em um ponto de Σ , então $K(y) > 1/a$ em Σ e Σ é uma esfera, pois é compacta e elíptica. Então suponha que $K(x) \leq 0$ em Σ .

Dessa forma

$$2H(x)a = -2a^2K(x), \Delta = 1 - a^2K(x) \geq 1$$

e terminamos. ■

Dessa forma podemos aplicar o seguinte Teorema:

Teorema 4.0.8 (Resultado do tipo Klotz-Osserman [1] Teorema 7). Seja Σ uma superfície especial de Weingarten do tipo elíptico em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo $H = f(H^2 - K)$. Suponhamos que a sua curvatura K não mude de sinal.

1. Se Σ for completa e $K \geq 0$ em todos os pontos, então Σ é uma esfera totalmente umbílica, um plano ou um cilindro circular reto.
2. Se Σ for mergulhada e $K \leq 0$ em todos os pontos, então Σ é um cilindro circular reto ou uma superfície de tipo mínimo (ou seja, $f(0) = 0$).

Queremos uma aproximação para as superfícies do tipo mínimo, Schoen mostrou que as superfícies mínimas possuem um comportamento assintótico para cada fim a uma função da forma:

$$\psi_i(x) = \beta \log r + a_0 + \frac{a_1 x_1}{r^2} + \frac{a_2 x_2}{r^2} + O(r^{-2}),$$

Ele também relacionou o crescimento logarítmico de cada fim com a curvatura total finita. Para o caso de superfícies especiais do tipo mínimo, precisaremos da seguinte definição:

Definição 4.0.9 (Segunda forma fundamental total finita). Dizemos que a segunda forma fundamental total é finita, se a norma, $|II|$, de uma superfície mergulhada Σ em $\mathbb{R}^3$, é L^2 na superfície, ou seja,

$$\int_{\Sigma} |II|^2 dA < \infty.$$

□

Ter segunda forma fundamental total finita é mais forte que ter curvatura total finita White provou em [20] que a primeira implica na segunda e também que o mapa de Gauss se estende continuamente até o infinito.

Em verdade, quando se tem a condição de elipticidade, ter curvatura total finita implica em ter segunda forma total finita.

Proposição 4.0.10 ([7] Lema 2). Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de Weingarten do tipo mínimo completa que satisfaz a condição elíptica e com curvatura total finita; então tem segunda forma fundamental total finita.

Demonstração:

Como a função f é Lipschitziana em $t = 0$ para c suficientemente pequeno. Isso implica a existência de $\delta > 0$ e $C > 0$ de modo que $f(t) - f(0) \leq C(t - 0)$ para todo $t \in [0, \delta]$. Tomando $\epsilon < \min \{\delta/2, C^{-2}/2\}$, podemos escolher $0 < c(\epsilon) < 1$ tal que $f(t) \leq c_1 \sqrt{t}$ para todos $t \in [0, \epsilon]$, e $c(\epsilon)$ tende a 0 conforme ϵ se aproxima de 0.

Dado que $4t(f'(t))^2 < 1$ para todos $t \in \mathbb{R}^+$ e $\limsup_{t \rightarrow +\infty} 4t(f'(t))^2 < 1$, existe uma constante $c(\bar{t}) < 1$ tal que $f(t) \leq f(\epsilon) - c(\bar{t})\sqrt{\epsilon} + c(\bar{t})\sqrt{t}$ para todos $t \in [\epsilon, +\infty]$. Por fim, podemos escolher $\max\{c(\epsilon), c(\bar{t})\} < \bar{c} < 1$ de modo que $f(t) \leq \bar{c}\sqrt{t}$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Seja $E \subset \Sigma$ um fim. Pelo Teorema de Huber 4.0.6 é conformemente equivalente a um disco perfurado $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Então,

$$\int_{\mathbb{D}^*} H^2 dA \stackrel{H=f^2(H^2-K)}{=} \int_{\mathbb{D}^*} f^2 (H^2 - K) dA \underset{f(t) \leq \bar{c}\sqrt{t}}{\leq} \bar{c}^2 \int_{\mathbb{D}^*} (H^2 - K) dA,$$

assim,

$$(1 - \bar{c}^2) \int_{\mathbb{D}^*} H^2 dA \leq -\bar{c}^2 \int_{\mathbb{D}^*} K dA \underset{\text{curvatura total finita}}{<} +\infty;$$

o que implica que

$$\int_{\Sigma} |II|^2 dA < +\infty$$

■

Nessa proposição a definição dada por José M. Espinar e Héber Mesa em [7] se torna crucial, a condição da função ser Lipschitz, nos permite limitar a segunda forma total finita, e por consequência conseguimos entender o comportamento dos ends.

Teorema 4.0.11 (Resultado do tipo R. Schoen [14] Teorema 3.21). Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de Weingarten especial completa de tipo mínimo de segunda forma fundamental total finita e fins mergulhados. Então cada fim E_i é o gráfico de uma função ψ_i sobre o exterior de uma região limitada em algum plano Π_i . Além disso, se x_1, x_2 são as coordenadas em Π_i , então a função ψ_i tem o seguinte comportamento assintótico para $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ suficientemente grande

$$\psi_i(x_1, x_2) = \beta \log r + a_0 + \frac{a_1 x_1}{r^2} + \frac{a_2 x_2}{r^2} + O(r^{-2}) + o(\log r),$$

onde β, a_0, a_1, a_2 são constantes reais dependendo de i .

Teorema 4.0.12 (Resultado do tipo “half space” [6] Capítulo I). Seja Σ uma superfície de tipo mínimo especial completa, conexa e imersa. Se Σ estiver contido em um meio espaço de $\mathbb{R}^3$, então Σ é plano.

Teorema 4.0.13. A única superfície Weingarten especial do tipo mínimo algébrica regular é o plano

Demonstração: Seja Σ uma superfície em $\mathbb{R}^3$ que satisfaça as hipóteses. Como vimos, tal superfície é finitamente conexa, ou seja, é uma superfície não compacta com um número finito de fins. Também sabemos que Σ está mergulhada.

Seja E um de seus fins. Parametricamente E pode ser descrito por um mapa $x : D - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde D é um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ centrado na origem e O é a origem.

Podemos assumir, após uma rotação se necessário, que o mapa de Gauss, que se estende até O , assume o valor $(0, 0, 1)$ em O .

$$x_3(x_1, x_2) = \beta \log r + a_0 + \frac{a_1 x_1}{r^2} + \frac{a_2 x_2}{r^2} + O(r^{-2}) + o(\log r),$$

Quando β não é igual a zero, a configuração assume uma estrutura semelhante à catenóide. Por outro lado, quando β é igual a zero, a configuração assume uma forma planar. Especificamente, se β não for igual a zero, a função x_3 aproxima-se assintoticamente do gráfico de $\log r$; quando a é igual a zero, tende para o gráfico de uma função constante, denotada como a_0 .

Suponhamos que a configuração que E assumiu é a estrutura catenóide. Considere a curva α formada pela intersecção de E com o plano $x_2 = 0$ na região onde $x_1 > 0$. Dado que Σ é descrito pela equação $p(x_1, x_2, x_3) = 0$, a curva α é algébrica e pode ser expressa como $p(x_1, 0, x_3) = 0$. Esta curva deve ser assintótica ao gráfico da função $x_3 = \beta \log x_1$. No entanto, este cenário é considerado impossível, pois a função $\log$ não pode ser aproximada por polinômios. Consequentemente, Σ não pode possuir um fim semelhante a uma catenóide.

Como resultado, todos os fins de Σ assumem o tipo planar e seu número é finito. Dado que Σ é mergulhado, os planos assintóticos a Σ devem ser paralelos. Isto implica a existência de dois planos paralelos tais que Σ está incluído na região que eles limitam. Ao empregar o Teorema Half Space pode-se concluir que Σ deve ser um plano.

■

Capítulo 5

Conclusões

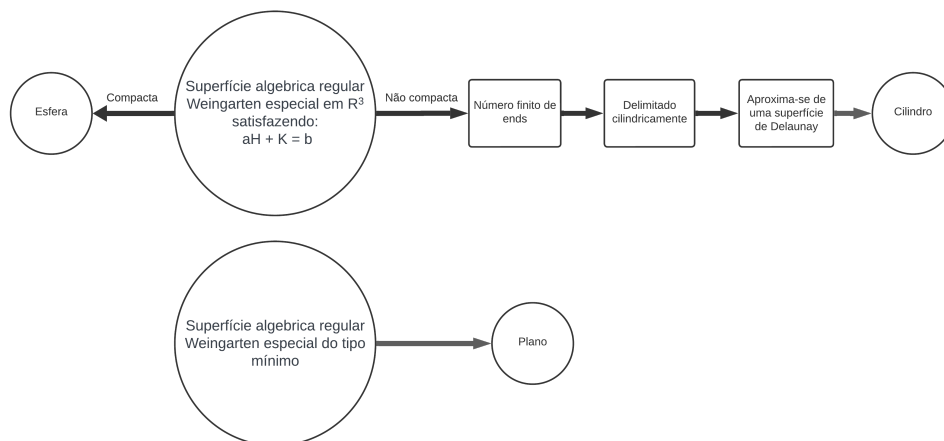
Nesta dissertação, nosso objetivo foi entender como se comporta a geometria das superfícies de Weingarten especiais. Utilizando a teoria de Meeks concluímos que os ends devem ser cilindricamente limitados, com os estudos de Korevaar, Kusner e Solomon eles devem se aproximar de superfícies de Delaunay e por fim com o trabalho de Rosemberg e Earp juntamente com Mesa e nos inspirando no trabalho de Barbosa e do Carmo chegamos aos resultados:

Teorema: Seja Σ uma superfície algébrica regular em $\mathbb{R}^3$. Suponha que Σ seja uma Weingarten especial e satisfaça $aH + K = b$, $a \geq 0, b > 0$. Então Σ é uma esfera ou um cilindro.

Teorema: A única superfície Weingarten especial do tipo mínimo algébrica regular é o plano

Com os resultados provados e alguns exemplos, construímos o seguinte diagrama.

Figura 5.1: Diagrama de resultados



Fonte: Elaborada pelo autor.

O presente trabalho possibilitou o desenvolvimento e aprofundamento nos tópicos de geometria diferencial, em especial em superfícies de Weingarten. Finalmente, espero que esta pesquisa ajude a inspirar outros estudiosos em suas pesquisas e que de alguma forma eu contribua em seus conhecimentos.

Apêndice A

Delaunay

Um roulette de Delaunay é o lugar geométrico de um dos focos de uma cônica que rola sem escorregar em uma reta. Ela pode ser classificada em três casos: elíptica, parabólica ou hiperbólica, dependendo se a cônica é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

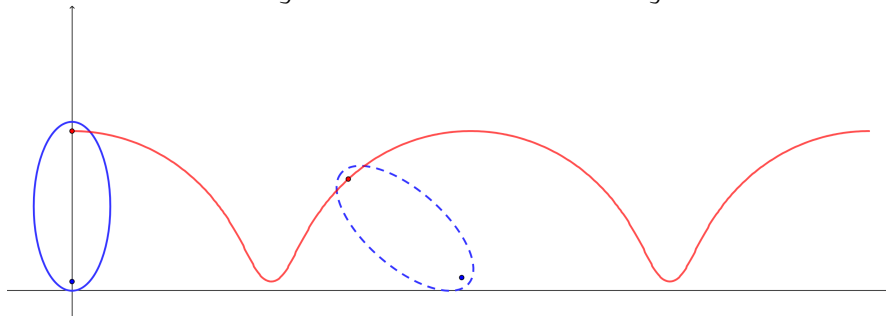
Estaremos interessados naquelas que são elípticas já que as parabólicas são catenoides e as hiperbólicas são nodoides.

Teorema A.0.1 ([12] capítulo II). Uma curva plana descrita por um dos focos da elipse rolando em uma reta sem escorregar, cria uma superfície de revolução com curvatura média constante.

Além disso, qualquer superfície completa de revolução com curvatura média constante pode ser obtida dessa forma.

Definição A.0.2. A curva descrita pelo foco da elipse ao rolar na reta é chamada de curva de Delaunay. A superfície de revolução gerada por essa curva é chamada de superfície de Delaunay $\square$

Figura A.1: Curva de Delaunay



Criada pelo autor.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [12], a ideia da demonstração consiste em primeiro mostrar que a curva de Delaunay gera uma superfície de revolução com curvatura média constante, para isso é usado o lema:

Lema A.0.3 (HSIANG [12] capítulo II). Se $y = y(x)$, com $y(x) > 0 \forall x \in R$, satisfaz a EDO.

$$y'^2 + 1 = \left(\frac{y}{c + dy^2} \right)^2, \text{ com } c \text{ e } d \text{ constantes, sendo } y' = \frac{dy}{dx},$$

então o gráfico de $y = y(x)$ gera, por revolução em torno do eixo x , uma superfície com curvatura média constante igual a d .

Uma prova alternativa para o teorema de Delaunay pode ser encontrada em [21].

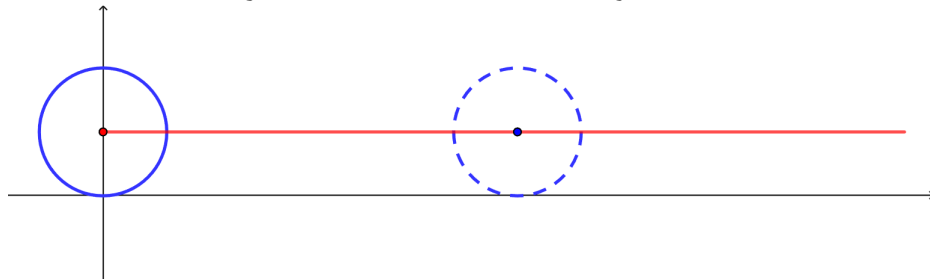
Como as curvas de Delaunay satisfazem os critérios da EDO, temos que as superfícies possuem curvatura média constante.

E por fim, com mais equações diferenciais se prova que toda superfície completa de revolução com curvatura média constante é gerada por uma curva de Delaunay.

Alguns casos merecem atenção especial

- **Círculo:** Quando a elipse tem excentricidade 0, a curva de Delaunay é uma reta e a superfície gerada é um cilindro.

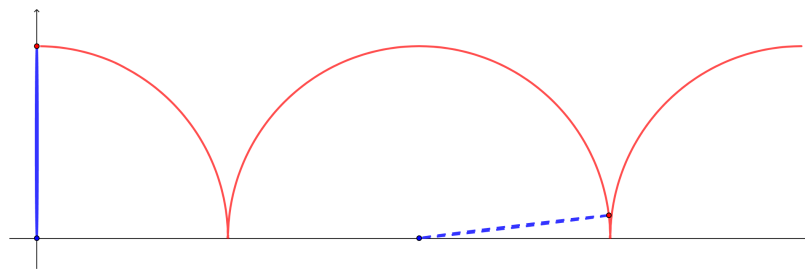
Figura A.2: Curva de Delaunay — Reta



Criada pelo autor.

- **Reta:** Quando a elipse tem excentricidade 1, a curva de Delaunay é um semicírculo e, portanto, a superfície é uma esfera

Figura A.3: Curva de Delaunay — Aproximando de um semicírculo



Criada pelo autor.

Apêndice B

Alexandrov

Teorema B.0.1 (Princípio da tangência [12] capítulo III). Considere S_1 e S_2 como superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante H , e seja $p \in S_1 \cap S_2$ um ponto de tangência.

Se S_1 e S_2 possuírem a mesma orientação em p , e S_2 estiver acima de S_1 em uma vizinhança conexa V de p , então S_1 e S_2 coincidirão em V .

O princípio da tangência para superfícies com curvatura média constante também é válido quando o ponto de tangência p está no bordo.

Teorema B.0.2 (Alexandrov [12] capítulo III). Seja S uma superfície do $\mathbb{R}^3$ mergulhada, conexa e compacta com curvatura média H constante, então S é uma esfera.

Demonstração:[Demonstração:]

Dado um plano, dizemos que a direção do plano é a direção dada pelo vetor normal a ele. Se mostrarmos que S satisfazendo as condições acima possui um plano de simetria em cada direção, ou seja, em qualquer direção existe um plano que S é invariante por reflexão, teremos que S é uma esfera.

Tome P um plano em que toda a superfície se encontre em um dos subespaços e que seja tangente a superfície em um ponto p . Mostremos que para a direção de P , a superfície S tem um plano de simetria nessa direção, devemos mostrar que a superfície possui um plano de simetria paralelo a P .

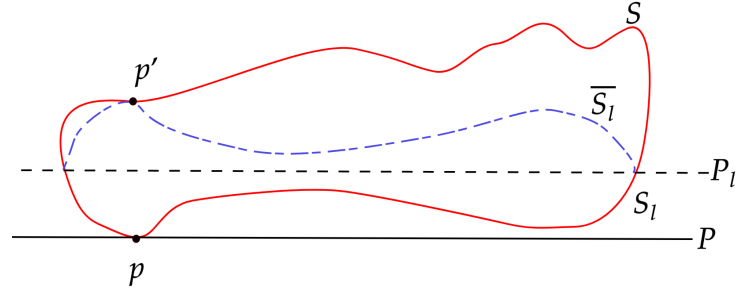
Agora, tomemos planos P_λ paralelos a P que interseccionam S , de tal maneira que a reflexão o refletido da parte que esteja entre os planos P_λ e P ainda caia dentro de S .

Dentre os P_λ escolhemos o plano P_l como sendo o plano mais afastado de P , defina S_l a parte da superfície entre P_l e P e $\bar{S}_l$ a reflexão por P_l

Dois casos podem acontecer:

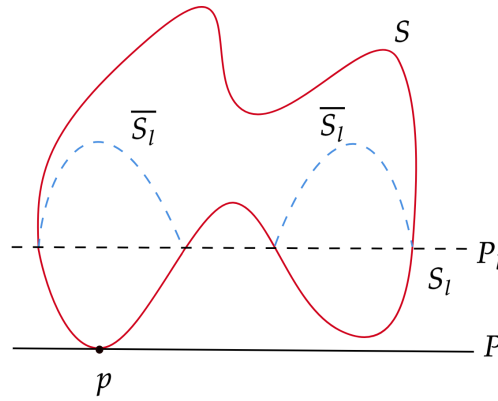
- Existe ponto de interseção de $\bar{S}_l$ com S , excluindo os do eixo de rotação.
- Não existem tais pontos.

Figura B.1: Caso 1



Adaptada de [12]

Figura B.2: Caso 2



Adaptada de [12]

Em qualquer um dos casos pode se aplicar o princípio de tangência para se provar que $\bar{S}_l = S$ localmente. Com isso podemos mostrar que P_l é um plano de simetria para S

De fato,

Denotemos por $\bar{X}^*$ a componente conexa de $\bar{S}_l$ que contém o ponto p , e por X a parte de S_l da qual $\bar{X}^*$ é refletida.

Consideremos

$$A = \{q \in \bar{X}^* \mid \bar{X}^* = S \text{ em uma vizinhança de } q\}$$

e observemos que A é não vazio ($p \in A$), aberto e fechado em $\bar{X}^*$.

Como A é conexo, e A é não vazio, aberto e fechado em S , inferimos que $A = \bar{X}^*$. E uma vez que $A \subset S$, temos $\bar{X}^* \subset S$.

Visto que $X \cup \bar{X}^*$ é uma superfície conexa e compacta (pois cada uma já é conexa e compacta), e como S é conexa e compacta, concluímos que $X \cup \bar{X}^* = S$.

Assim, P_l é um plano de simetria na direção de P .

Finalmente, a escolha da direção inicial do plano P é arbitrária. Assim mostramos que a superfície S possui um plano de simetria em todas as direções, sendo o plano P_C mencionado acima. Então S é uma esfera.

■

Referências

- [1] Aledo, Juan A., Espinar, José M. e Gálvez, José A. "The Codazzi equation for surfaces". Em: *Adv. Math.* 224.6 (2010), pp. 2511–2530. ISSN: 0001-8708,1090-2082. DOI: [10.1016/j.aim.2010.02.007](https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.02.007). URL: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.02.007>.
- [2] Alexandrov, A. D. "A characteristic property of spheres". Em: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 58 (1962), pp. 303–315. ISSN: 0003-4622. DOI: [10.1007/BF02413056](https://doi.org/10.1007/BF02413056). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02413056>.
- [3] Barbosa, J. Lucas M. e Carmo, Manfredo P. do. "On regular algebraic surfaces of $\mathbb{R}^3$ with constant mean curvature". Em: *J. Differential Geom.* 102.2 (2016), pp. 173–178. ISSN: 0022-040X,1945-743X. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1453910452>.
- [4] Barbosa, João Lucas Marques e Carmo, Manfredo Perdigão do. "On regular algebraic surfaces of $\mathbb{R}^3$ with constant mean curvature". Em: *arXiv 1403.7029* (2014).
- [5] Carmo, M.P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciencias médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. ISBN: 9788585818265. URL: <https://books.google.com.br/books?id=52pAQgAACAAJ>.
- [6] Earp, Ricardo Sá e Toubiana, Éric. "A note on special surfaces in $\mathbb{R}^3$ ". Em: vol. 4. VIII School on Differential Geometry (Portuguese) (Campinas, 1992). 1993, pp. 109–118.
- [7] Espinar, José M. e Mesa, Héber. "Elliptic special Weingarten surfaces of minimal type in $\mathbb{R}^3$ of finite total curvature". Em: 2019. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:198233154>.
- [8] Fulton, William. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*. Mathematics Lecture Note Series. Notes written with the collaboration of Richard Weiss. W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1969, pp. xiii+226.
- [9] Huber, Alfred. "On subharmonic functions and differential geometry in the large". Em: *Comment. Math. Helv.* 32 (1957), pp. 13–72. ISSN: 0010-2571,1420-8946. DOI: [10.1007/BF02564570](https://doi.org/10.1007/BF02564570). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02564570>.
- [10] Korevaar, Nicholas J., Kusner, Rob e Solomon, Bruce. "The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature". Em: *J. Differential Geom.* 30.2 (1989), pp. 465–503. ISSN: 0022-040X,1945-743X. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214443598>.
- [11] Leandro, Claudemir Silvino. "Some results for constant mean curvature surfaces". Tese de dout. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2010.
- [12] Medeiros, Nubem Airton Cabral. "Superfícies com curvatura média constante não nula. Dissertação de mestrado". Em: *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (1988).
- [13] Meeks III, William H. "The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature". Em: *J. Differential Geom.* 27.3 (1988), pp. 539–552. ISSN: 0022-040X,1945-743X. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214442008>.

- [14] Palomino, H. M. "Elliptic Special Weingarten Surfaces of Minimal Type with Finite Total Second Fundamental Form". Tese de dout. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2019.
- [15] Rosenberg, Harold e Sa Earp, Ricardo. "The geometry of properly embedded special surfaces in $\mathbb{R}^3$, e.g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive". Em: *Duke Math. J.* 73.2 (1994), pp. 291–306. ISSN: 0012-7094,1547-7398. doi: [10.1215/S0012-7094-94-07314-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-94-07314-6). URL: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-94-07314-6>.
- [16] Serrin, James. "On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve". Em: *Math. Z.* 112 (1969), pp. 77–88. ISSN: 0025-5874,1432-1823. doi: [10.1007/BF01115033](https://doi.org/10.1007/BF01115033). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01115033>.
- [17] van-Brunt, B. e Grant, K. "Hyperbolic Weingarten surfaces". Em: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 116.3 (1994), pp. 489–504. ISSN: 0305-0041,1469-8064. doi: [10.1017/S0305004100072765](https://doi.org/10.1017/S0305004100072765). URL: <https://doi.org/10.1017/S0305004100072765>.
- [18] Weingarten, J. "Ueber die Flächen deren Normalen eine gegebene Fläche berühren". Em: *J. Reine Angew. Math.* 62 (1863), pp. 61–63. ISSN: 0075-4102,1435-5345. doi: [10.1515/crll.1863.62.61](https://doi.org/10.1515/crll.1863.62.61). URL: <https://doi.org/10.1515/crll.1863.62.61>.
- [19] Weingarten, J. "Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen". Em: *J. Reine Angew. Math.* 59 (1861), pp. 382–393. ISSN: 0075-4102,1435-5345. doi: [10.1515/crll.1861.59.382](https://doi.org/10.1515/crll.1861.59.382). URL: <https://doi.org/10.1515/crll.1861.59.382>.
- [20] White, Brian. "Complete surfaces of finite total curvature". Em: *J. Differential Geom.* 26.2 (1987), pp. 315–326. ISSN: 0022-040X,1945-743X. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214441372>.
- [21] Yamada, Kotaro. "Lecture notes in Delaunay Surfaces". Em: *Departamento de Matemática Faculdade de Ciências Instituto de Tecnologia de Tóquio* (2018).