

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Átila Felipe de Souza Figueredo

**SOBRE INVARIANTES RELACIONADOS À
CONJECTURA DE GREEN PARA CURVAS
SINGULARES**

Belo Horizonte
2025

Átila Felipe de Souza Figueredo

**SOBRE INVARIANTES RELACIONADOS À
CONJECTURA DE GREEN PARA CURVAS
SINGULARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Renato Vidal da Silva Martins
Coorientadora: Profa. Lia Feital Fusaro Abrantes

Belo Horizonte

2025

Figueredo, Átila Felipe de Souza.

F475s Sobre invariantes relacionados à conjectura de green para curvas singulares [recurso eletrônico] / Átila Felipe de Souza Figueredo. Belo Horizonte — 2025.
1 recurso online (70 f. il.): pdf.

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins.
Coorientadora: Lia Feital Fusaro Abrantes.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 64-66

1. Matemática – Teses. 2. Curvas algébricas - Teses. 3. Invariantes – Teses. 4. Conjectura de Green – Teses. 5. Clifford, álgebras de - Teses. I. Martins, Renato Vidal da Silva. II. Abrantes, Lia Feital Fusaro. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Sobre Invariantes relacionados à Conjectura de Green para
Curvas Singulares*

ÁTILA FELIPE DE SOUZA FIGUEREDO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Documento assinado digitalmente
gov.br RENATO VIDAL DA SILVA MARTINS
Data: 08/04/2025 10:54:00-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Renato Vidal da Silva Martins
Orientador - UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br LIA FEITAL FUSARO ABRANTES
Data: 02/04/2025 11:01:21-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Profa. Lia Feital Fusaro Abrantes
Coorientadora - UFV

Prof. Ethan Guy Cotterill
UNICAMP

Prof. Marcos Benevenuto Jardim
UNICAMP

Prof. Naama Galdino da Silva Neris
IFG

Documento assinado digitalmente
gov.br RODRIGO SALOMÃO
Data: 04/04/2025 21:11:58-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Rodrigo Salomão
UFF

Belo Horizonte, 21 de março de 2025.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: <http://www.mat.ufmg.br/pgmat>

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe pela vida, por toda dedicação e por sempre apoiar os meus sonhos. Agradeço às minhas avós e às minhas tias por sempre auxiliarem na minha criação e por me incentivarem a estudar. Agradeço à minha irmã Larissa por todo suporte e compreensão. Conviver com você nesses últimos anos de doutorado com certeza me tornou uma pessoa melhor.

Agradeço aos meu orientador Prof. Renato Vidal Martins pelo grande apoio e por ter confiado em mim mesmo quando eu mesmo não era capaz. Obrigado também por me mostrar que a pesquisa em matemática pode ser leve e fascinante. Agradeço também à minha coorientadora Prof. Lia Feital Fusaro Abrantes ao Prof. Naamã Galdino por toda disponibilidade e ajuda.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFMG pela contribuição com minha formação acadêmica. Em especial, aos de Geometria Algébrica, Aline, André, Charles e Israel. Agradeço a todos alunos do mestrado e do doutorado com quem tive a oportunidade de conviver. Vocês são as pessoas mais dedicadas que eu conheço.

Eu agradeço aos professores Ethan Cotterill, Marcos Jardim e Rodrigo Salomão por terem aceitado o convite de participação para a banca. Obrigado por enriquecerem este trabalho.

Eu gostaria de agradecer à OBMEP, ao PIC-Jr e ao PICME. Tais programas despertaram o meu interesse em Matemática e foram essenciais para a concretização dessa conquista.

Agradeço também às funcionárias do Departamento de Pós-Graduação Andréa e Kelli por toda contribuição ao longo desses anos.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Estudamos alguns invariantes relacionados à Conjectura de Green para o caso onde a curva é singular, a saber: Índice de Clifford, dimensão de Clifford, gonalidade, dimensão de Scroll de um pencil, Cohomologia de Koszul e syzygies do modelo canônico. Apresentamos alguns resultados que são generalizações de: (a) a caracterização de curvas com dimensão de Clifford 2; (b) o Teorema de Enriques Babagge; (c) a descrição do ideal de uma curva canônica.

Palavras-chave: índice de Clifford; gonalidade; conjectura de Green.

ABSTRACT

We study some invariants related to Green's Conjecture for the case the curve is singular, namely: Clifford index, Clifford dimension, gonality, scrollar dimension of a pencil, Koszul cohomology and syzygies of the canonical model. We get results generalizing: (a) the characterization of curves with Clifford dimension 2; (b) the Enriques-Babbage-Theorem; (c) the description of the ideal of a canonical curve.

Keywords: Clifford index; gonality; Green's conjecture.

Sumário

1	Introdução	8
2	Preliminares	14
2.1	Definições e resultados básicos	14
2.2	Sistemas Lineares	15
2.3	Modelo Canônico	16
2.4	Semigrupo de Valores	18
2.5	Scrolls	19
3	Índice de Clifford	21
3.1	Resultados Gerais	21
3.2	Resultados para Curvas Monomiais	27
4	Dimensão de Clifford de Curvas Monomiais	35
4.1	Curvas Monomiais de Dimensão de Clifford 2	35
4.2	Curvas monomiais de dimensão de Clifford 3	38
5	Cohomologia de Koszul e Conjectura de Green	41
5.1	Cohomologia de Koszul	41
5.2	Teorema de Enriques-Babbage	43
5.3	Contas Dimensionais para o Ideal do Modelo Canônico	45
6	O Ideal do Modelo Canônico de Curvas Monomiais	47
6.1	Triplas Excepcionais	47
6.2	O ideal do Modelo Canônico de Curvas Nearly Gorenstein	49
6.3	Teorema de Enriques-Babbage para Curvas Monomiais	58
7	Considerações Finais	62
	Referências	64
A	Código para o cálculo do Índice de Clifford	67

Capítulo 1

Introdução

Seja C uma curva integral e completa sobre um corpo algebricamente fechado de característica arbitrária. Primeiro, suponha que C é suave. No final do século XIX, Max Noether provou em [36] um resultado celebrado estabelecendo que toda curva canônica é projetivamente normal. De um ponto de vista intrínseco, a afirmação pode ser posta nos seguintes termos: seja ω o feixe dualizante de C e suponha que esta é não-hiperelítica, então os morfismos naturais

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \omega^n) \quad (1.1)$$

são sobrejetivos para todo $n \geq 1$. Conseqüentemente, pode-se computar a dimensão do espaço de quádricas contendo a curva canônica como sendo $(g - 2)(g - 3)/2$ onde g é o seu gênero, que é uma das maneiras de como o resultado é conhecido.

O resultado de Noether serviu de base para trabalhos progressivos e subsequentes de Enriques [19] (veja também [20, V. III, pp. 97-108]), Babbage [6] e Petri [38]. O resultado principal de tais artigos, ao qual foi dado um tratamento mais moderno por Saint-Donat [42, Thm. p. 157; (4.11), p. 174], pode ser enunciado da seguinte forma: se C é uma curva canônica então vale uma e, apenas uma, das três afirmações abaixo:

- (i) C é interseção de quádricas; ou
- (ii) C é isomorfa a uma quártica plana; ou
- (iii) C é trigonal

conhecido posteriormente como Teorema de Enriques-Babbage.

Em 1984, Green propôs em [24, Conj. (5.1)] uma conjectura que generaliza ambos os resultados acima. Ele a nomeou *Conjectura de Noether-Enriques-Petri*, atualmente conhecida como *Conjectura de Green* que será descrita a seguir. Para isso, introduziremos o *índice de Clifford* de C , definido como:

$$\text{Cliff}(C) = \min \left\{ \deg(\mathcal{F}) - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1) \mid \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ é um feixe livre de torção de posto } 1 \\ h^0(\mathcal{F}) \geq 2 \text{ e } h^1(\mathcal{F}) \geq 2 \end{array} \right\}.$$

Por outro lado, dado um feixe coerente \mathcal{F} em C , considere o complexo

$$\bigwedge^{p+1} H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^{q-1}) \xrightarrow{\phi_{p,q}^1} \bigwedge^p H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^q) \xrightarrow{\phi_{p,q}^2} \bigwedge^{p-1} H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^{q+1}).$$

O quociente

$$K_{p,q}(C, \mathcal{F}) := \ker(\phi_{p,q}^2) / \text{im}(\phi_{p,q}^1)$$

é a (p,q) -ésima cohomologia de Koszul de \mathcal{F} . Isto posto temos o seguinte.

Conjectura de Green. Se C é uma curva suave, então:

$$K_{p,2}(C, \omega) = 0 \iff p < \text{Cliff}(C)$$

para todo $p \geq 0$.

Pode-se encontrar um estudo aprofundado de todo este problema, por exemplo, em [3]. A conjectura foi provada para uma curva geral suave por C. Voisin em [46,47].

A conexão com o que dissemos acima é clara. Se $p = 0$, então a conjectura equivale ao Teorema de Max Noether. De fato, note que $K_{0,2}(C, \omega) = 0$ equivale a dizer que o morfismo (1.1) é sobrejetor para $n = 2$, o que é suficiente para obter as sobrejeções de ordem superior. Por outro lado, $\text{Cliff}(C) > 0$ equivale a dizer que C é não-hiperelítica e, portanto, é isomorfa a uma curva canônica.

Se $p = 1$, então a conjectura equivale ao Teorema de Enriques-Babbage. De fato, suponha que C é não-hiperelítica. Então, $K_{1,2}(C, \omega) = 0$ se, e somente se, C , vista como curva canônica, é a interseção de quádricas. Por outro lado, $\text{Cliff}(C) = 1$ se, e somente se, C é trigonal ou isomorfa a uma quártica plana.

O que fazemos neste trabalho é estudar os problemas levantados acima no caso em que C é singular. A conjectura em si não é nossa principal preocupação, mas sim os invariantes relacionados à ela (e as relações entre eles), sendo eles: índice

de Clifford, dimensão de Clifford, gonalidade, cohomologia de Koszul, Syzygies do modelo canônico e a dimensão de scroll de um pencil, um conceito que introduzimos em (3.1.6).

No Capítulo (3) estudamos o índice de Clifford como foi introduzido acima. Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 em C . Dizemos que ele *computa* o índice de Clifford se $\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{Cliff}(C)$. Então, a *dimensão de Clifford* de C é definida como

$$\text{Cld}(C) := \min\{h^0(\mathcal{F}) - 1 \mid \mathcal{F} \text{ computa } \text{Cliff}(C)\}.$$

Primeiro, assumamos que C é suave. Sabe-se que $\text{Cld}(C) = 1$ se, e somente se, $\text{Cliff}(C) = \text{gon}(C) - 2$ e, portanto, índice de Clifford e gonalidade são conceitos essencialmente indistintos, se tal. Ao invés disso, se $r := \text{Cld}(C) \geq 2$, então C admite uma imersão fechada $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. O caso $r = 2$ é clássico: as curvas de dimensão de Clifford igual a 2 são exatamente as curvas planas suaves de grau $d \geq 5$ [18, p. 174; Lem. (1.1)].

Nosso primeiro resultado estende justamente isto. Provamos o seguinte.

Teorema 1. *Seja C uma curva completa e integral sobre um corpo algebricamente fechado. Assuma que $r := \text{Cld}(C) \geq 2$. Temos o seguinte:*

(I) *Se $\text{Cliff}(C)$ é computado por um feixe invertível, então:*

- (i) *existe uma imersão fechada $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$; em particular, se $r = 2$, então C é (isomorfa a) uma curva plana;*
- (ii) *se C é uma curva plana de grau $d \geq 5$, então:*
 - (a) $\text{Cliff}(C) \leq d - 4$;
 - (b) $\text{gon}(C) \leq d - 1$. *Nesse caso, vale a igualdade se a gonalidade é computada por um pencil livre de pontos de base;*

(II) *Se C é uma curva plana, monomial e unicuspidal de grau $d \geq 5$, então:*

- (a) $\text{Cld}(C) = 2$;
- (b) $\text{Cliff}(C) = d - 4$ e é computado por um feixe invertível;
- (c) $\text{gon}(C) = d - 1$ e é computada por um pencil que é livre de pontos de base e, também, por um pencil com um ponto de base não-removível.

O resultado acima é provado nos Teoremas (3.1.5) e (4.1.1). Para isso, desenvolvemos no Lema (4.1.1) um método combinatorial para computar o índice de Clifford para um feixe \mathcal{F} sobre uma curva monomial. Previamente, no Lema (3.2.2),

nós construímos uma forma de calcular $h^1(\mathcal{F})$ neste caso. Em particular, mostrando se o feixe é elegível ou não para calcular o índice de Clifford. Por conseguinte, os Lemas (3.2.2) e (4.1.1) proporciona um algoritmo para o cálculo do índice de Clifford de uma curva monomial, que fomos capazes de implementar usando Python (veja o Apêndice).

No entanto, o resultado esperado de que curvas planas (de grau $d \geq 5$) são precisamente aquelas que têm dimensão de Clifford igual a 2, como no caso suave, não vale em geral. De fato, no Teorema (4.1.1) nós exibimos uma família de curvas de dimensão de Clifford 2 que não são (isomorfas à) curvas planas. Além disso, calculamos os seus índices de Clifford e, como previsto pelo Teorema 1.(I), eles não são computados por um feixe inversível.

Na sequência, no Capítulo (5), nós abordamos a Conjectura de Green no nível $p = 1$ para curvas singulares, ou seja, nós procuramos o que seria uma versão do Teorema de Enriques-Babbage em tal caso. Trata-se de uma continuação natural do caso $p = 0$, isto é, o Teorema de Max Noether para curvas singulares, que foi estudado sucessivamente em [11, 23, 31]. Nosso ingrediente-chave para conseguirmos resultados em concordância com os resultados clássicos é por meio da troca de C (vista como uma curva canônica) por seu *modelo canônico* C' (veja a Seção (2.3)). Começamos introduzindo alguns resultados sobre a cohomologia de Koszul e, em seguida, nos restringimos ao caso em que C é nearly Gorenstein (veja a Definição (2.3.2)). Posteriormente, na Seção (6.3), nós retornamos a tal problema para o caso em que C é monomial. Nós sintetizamos abaixo os resultados que obtivemos:

Teorema 2. *Seja C uma curva integral e completa sobre um corpo algebricamente fechado. Assuma que o modelo canônico C' é linearmente normal. Então:*

(I) *Se C é não-Gorenstein, então:*

- (i) $K_{1,2}(C, \omega) = 0$ se, e somente se, C' é interseção de quádricas;
- (ii) C' é interseção de quádricas e cúbicas;
- (iii) se C não é Kunz, então C' é interseção de quádricas.

(II) *Se C é unicuspidal e monomial, então uma e, apenas uma, das seguintes afirmações é válida:*

- (i) C' é interseção de quádricas; ou
- (ii) C é isomorfa a uma quártica plana; ou

(iii) C é trigonal e Gorenstein; ou

(iv) C é Kunz,

Além disso, se C é não-Gorenstein e trigonal, então se o g_3^1 é livre de pontos de base, então C satisfaz (iv); caso contrário, a curva deverá ser incluída nos casos (i) ou (iv).

O resultado acima é provado na Proposição (5.2.2) e no Teorema (6.3.2). Nós discutimos na Observação (6.3.3), uma afirmação geral para (II) devido ao fato de conjecturamos que (II) vale em geral. Isso se deve à (a) teoria clássica de curvas suaves; (b) ao que foi feito no caso Gorenstein singular nessa direção (veja, por exemplo, [12, 37, 43, 45]); e (c) o item (I) acima. Note também que, se excluirmos (iv), o resultado em (II) vale para qualquer curva suave, incluindo curvas hiperelíticas, portanto estendendo o resultado clássico. Isso vale porque se C é hiperelítica, então C' é uma curva racional normal de grau $g - 1$ em \mathbb{P}^{g-1} por [27, Thm. 3.4], então vale (i).

Por fim, no Capítulo (6), computamos o ideal do modelo canônico de curvas monomiais unicuspidais nearly Gorenstein. Para tal, introduzimos algumas notações. Sejam C uma tal curva e $G = \{\ell_1 = 1, \ell_2, \dots, \ell_{g-1}, \ell_g = \gamma\}$ o conjunto das lacunas do semigrupo de valores de sua singularidade. Para cada $2 \leq s \leq \gamma$, considere todas as partições de s como soma de duas lacunas, digamos

$$s = a_{s_i} + b_{s_i}, \text{ para } i = 0, \dots, \nu_s$$

com $a_{s_i} \leq b_{s_i}$ e $a_{s_0} < a_{s_1} < \dots < a_{s_{\nu_s}}$. Defina $a_s := a_{s_0}$ e $b_s := b_{s_0}$. Neste caso, dizemos que $a_s + b_s = s$ é uma *partição minimal* (de s). Com isto em mente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja C uma curva monomial unicuspidal e nearly Gorenstein. Então podemos escrever $\mathbb{P}^{g-1} = \{(X_{\ell_1} : \dots : X_{\ell_g})\}$ de tal forma que valem as afirmações:*

(I) *Se C não é Kunz, então o ideal de C' é dado por*

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}} \rangle$$

para $s \in \{2, \dots, \gamma\}$ e $i \in \{1, \dots, \nu_s\}$.

(II) *Se C é Kunz, mas não trigonal com g_3^1 livre de pontos de base, então o ideal de C' é dado por*

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_{\gamma} \rangle$$

onde $a + b = \gamma/2 - 1$ e $a' + b' = \gamma/2$ são partições minimais.

(III) Se C é trigonal com g_3^1 livre de pontos de base, então o ideal de C' é dado por

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_\gamma, \\ X_2 X_{\gamma/2}^2 - X_1^2 X_\gamma, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_1 X_c X_d, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_{c'} X_{d'} X_\gamma \rangle$$

para $1 \leq k \leq m - 1$, $0 < r < 3$, $\gamma = 2(3m + r)$ e, onde $c + d = 3k + r + \gamma - 1$ e $c' + d' = 3k + r$ são partições minimais.

O resultado acima é provado no Teorema (6.2.2). As técnicas que utilizamos são inspiradas pelas desenvolvidas por Stöhr em [45] ao lidar com monômios excepcionais. Entretanto, nossa abordagem apresenta algumas diferenças, que nós ressaltamos na Observação (6.2.3). Nós finalizamos este trabalho listando alguns problemas que buscamos investigar em um futuro próximo. Esse é o conteúdo do Capítulo (7).

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Definições e resultados básicos

Neste capítulo, há uma breve introdução aos principais conceitos e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Definição 2.1.1. Se X é um esquema, denotaremos por \mathcal{O}_X seu feixe estrutural.

- (i) Um feixe \mathcal{F} é dito *livre de torção* se para todo $x \in X$ e todas as seções $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\}$, o automorfismo de multiplicação é injetivo;
- (ii) é *localmente livre* se existe uma cobertura $\{U_i\}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ é um $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -módulo livre;
- (iii) Além disso, dizemos que \mathcal{F} é *invertível* se é localmente livre de posto 1.

Seja C uma curva integral e projetiva de gênero aritmético g definida sobre um corpo algebricamente fechado k com feixe estrutural \mathcal{O}_C ou, simplesmente, \mathcal{O} . Seja ω o feixe dualizante de C . Relembre que um ponto $P \in C$ é *Gorenstein*, se o talo ω_P é um \mathcal{O}_P -módulo livre. Uma curva C é dita *Gorenstein* se todos seus pontos são Gorenstein, ou, equivalentemente, se ω é invertível. Nesse contexto, vale enunciarmos o seguinte resultado clássico:

Teorema 2.1.2 (Riemann-Roch para curvas). [4, Cap. 1, p. 7] *Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 sobre uma curva C suave de gênero g . Então,*

$$h^0(C, \mathcal{F}) - h^1(C, \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + 1 - g. \quad (2.1)$$

Ainda nesta subseção, enunciamos um importante resultado de anulamento que será utilizado na demonstração da Proposição 5.2.2. É comumente chamado na literatura de *Regularidade de Castelnuovo-Mumford*. Considere \mathcal{F} um feixe coerente em \mathbb{P}^n .

Definição 2.1.3. Dizemos que \mathcal{F} é *m-regular* se $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$ para todo $i > 0$.

Proposição 2.1.4 (Castelnuovo). [35, Lecture 14, p. 99] *Seja \mathcal{F} um feixe coerente m-regular em \mathbb{P}^n . Então:*

(i) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(k))$ é gerado por

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(k-1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$$

se $k > m$;

(ii) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(k)) = 0$ quando $i > 0, k+i \geq m$.

Dessa forma, $\mathcal{F}(k)$ é gerado como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -módulo por suas seções globais se $k \geq m$.

2.2 Sistemas Lineares

De acordo com [2], um *sistema linear de grau d e dimensão r* em C , denotado como um g_d^r é um conjunto de sequências exatas, identificado por um par

$$(\mathcal{F}, V) = \{0 \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\iota_\lambda} \omega \rightarrow \mathcal{Q}_\lambda \rightarrow 0\}_{\lambda \in V},$$

onde \mathcal{F} é um feixe livre de torção de posto 1 em C com $\deg \mathcal{F} := \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}) = d$ e, V é um subespaço não vazio de $H^0(\mathcal{F})$ de dimensão $r+1$. Além disso, $\mathcal{I} := \text{Hom}(\mathcal{F}, \omega)$ e $\iota_\lambda := \text{Hom}(\lambda, \omega)$. Note que se $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$, então

$$\deg \mathcal{F} = \sum_{P \in C} \dim(\mathcal{F}_P / \mathcal{O}_P). \quad (2.2)$$

Definição 2.2.1. A *gonalidade de C* é o menor d para o qual C admite um g_d^1 , ou, equivalentemente, para o qual existe um feixe livre de torção \mathcal{F} de posto 1 em C com grau d e $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Dizemos que \mathcal{F} *contribui para $\text{gon}(C)$* se $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Se, além disso, $\deg(\mathcal{F}) = \text{gon}(C)$, dizemos que \mathcal{F} *computa $\text{gon}(C)$* .

Além disso, dizemos que um ponto $P \in C$ é um ponto de base de (\mathcal{F}, V) se para todo $\lambda \in V$, o mapa injetivo $\lambda : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{F}_P$ não é um isomorfismo. Um ponto de base é dito *removível* se não há um ponto de base de $(\mathcal{O}_C \langle V \rangle, V)$, onde $\mathcal{O}_C \langle V \rangle$ é o \mathcal{O} -submódulo de \mathcal{F} gerado por V . O sistema linear (\mathcal{F}, V) é dito *livre de ponto de base* se não possui pontos de base.

2.3 Modelo Canônico

Dado um feixe \mathcal{G} em C , se $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow C$ é um morfismo de um esquema \mathcal{X} para C , definimos

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \mathcal{G} := \varphi^* \mathcal{G} / \text{Torsion}(\varphi^* \mathcal{G})$$

e, para cada feixe coerente \mathcal{F} em C , definimos

$$\mathcal{F}^n := \text{Sym}^n \mathcal{F} / \text{Torsion}(\text{Sym}^n \mathcal{F}).$$

Dado um espaço vetorial $V \subset k(C)$, utilizaremos a notação

$$V^n := \left\{ \sum_{i=1}^m f_{i,1} \cdots f_{i,n} \mid f_{i,j} \in V, m \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad (2.3)$$

Definição 2.3.1. *Considere o mapa de normalização $\pi : \bar{C} \rightarrow C$. Em [41, p. 188 top], Rosenlicht mostrou que existe um sistema linear $(\mathcal{O}_{\bar{C}} \omega, H^0(\omega))$ que é livre de pontos de base. Então, ele considerou o morfismo induzido $\psi : \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ e chamou sua imagem de $C' := \psi(\bar{C})$ o modelo canônico de C .*

Rosenlicht também provou que [41, Thm. 17] se C é não-hiperelítica, então o mapa $\pi : \bar{C} \rightarrow C$ se fatora por meio de um mapa $\pi' : C' \rightarrow C$. Seja $\mathcal{O}' := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'})$ nesse caso. Seja $\hat{C} := \text{Proj}(\oplus !^n)$ o blowup de C ao longo de ω e $\hat{\pi} : \hat{C} \rightarrow C$ o morfismo natural. Seja $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\hat{C}})$ e $\hat{\mathcal{O}}\omega := \hat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega)$. Em [27, Dfn. 4.9], é possível encontrar outra caracterização do modelo canônico, denotado por C' , que é definido como a imagem do morfismo $\hat{\psi} : \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ definido pelo sistema linear $(\hat{\mathcal{O}}\omega, H^0(\omega))$. Pelo Teorema de Rosenlicht, uma vez que ω é gerado por seções globais, é possível deduzir que $\hat{\psi} : \hat{C} \rightarrow C'$ é um isomorfismo se C é não-hiperelítica [27, Thm. 6.4].

O feixe $\bar{\mathcal{O}}\omega := \pi_*(\mathcal{O}_{\bar{C}}\omega)$ pode ser gerado por seções globais de ω [41, p. 188 top]. Uma vez que há apenas um número finito de pontos singulares em C e o corpo base é infinito, existe uma diferencial $\zeta \in H^0(\omega)$ tal que $(\bar{\mathcal{O}}\omega)_P = \zeta \cdot \bar{\mathcal{O}}_P$ para cada

ponto singular $P \in C$, onde $\overline{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}})$. Dessa forma, consideremos o quociente

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\zeta := \omega / \zeta,$$

que é um mergulho apropriado de ω no feixe constante \mathcal{K} de funções racionais tal que $\mathcal{O} \subset \mathcal{W}$. Agora, seja $\mathcal{C} := \text{Hom}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$ o condutor de $\overline{\mathcal{O}}$ em \mathcal{O} . Então, existe uma cadeia de inclusões

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \mathcal{W}_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$$

para cada ponto singular $P \in C$, onde a igualdade faz sentido se, e somente se, C é não-hiperelítica.

Definição 2.3.2. *Seja $P \in C$ um ponto. Tome*

$$\eta_P := \dim(\mathcal{W}_P / \mathcal{O}_P) \quad \mu_P := \dim(\widehat{\mathcal{O}}_P / \mathcal{W}_P)$$

e, também,

$$\eta := \sum_{P \in C} \eta_P \quad \mu := \sum_{P \in C} \mu_P$$

De acordo com [9, pp. 418, 433, Prps. 21, 28], dizemos que P é Kunz se $\eta_P = 1$ e, em conformidade, dizemos que C é Kunz se todos os seus pontos não-Gorenstein são Kunz. Segundo [27, Dfn. 5.7], dizemos que C é nearly Gorenstein se $\mu = 1$. Finalmente, seguindo [27, Dfn. 2.15] dizemos que C é nearly normal se $h^0(\mathcal{O}/\mathcal{C}) = 1$.

Nesse contexto, ainda é possível citar as seguintes definições.

Definição 2.3.3. Dizemos que o modelo canônico $C' \subset \mathbb{P}^{g-1}$ é *linearmente normal* se o sistema linear de seções hiperplanas é completo. Equivalentemente, se $h^0(\mathcal{O}_{C'}(1)) = g$.

Além disso, dizemos que C' é *projetivamente normal* se o sistema linear de seções de hipersuperfície de grau n é completo para todo $n \geq 1$. Em outras palavras, se os mapas naturais

$$\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'}(n))$$

são sobrejetivos para todo $n \geq 1$.

A importância dos conceitos acima está destacada a seguir:

Observação 2.3.4.

- (i) C é nearly Gorenstein se, e somente se, é não-Gorenstein e C' é projetivamente normal [27, Thm. 6.5];

- (ii) C é *nearly normal* se, e somente se, C' é aritmeticamente normal [27, Thm. 5.10];
- (iii) P é Gorenstein se, e somente se, $\eta_P = \mu_P = 0$ e, P é não-Gorenstein se, e somente se, $\eta_P, \mu_P > 0$ [9, p. 438 top]. Além disso, se $\eta_P = 1$, então $\mu_P = 1$ [9, Prp. 21]. Em particular, uma curva Kunz com apenas um ponto não-Gorenstein é a mais próxima possível de ser Gorenstein.

2.4 Semigrupo de Valores

Agora, iremos fixar algumas notações sobre valorizações. Dado um ponto uniramificado $P \in C$ e uma função $x \in k(C)^*$, denotamos

$$v(x) = v_P(x) := v_{\bar{P}}(x) \in \mathbb{Z}$$

onde $\bar{P} \in \bar{C}$ é mapeado em P . O *semigrupo de valores* de P é

$$S = S_P := v_P(\mathcal{O}_P).$$

O conjunto de *lacunas* de S é

$$G := \mathbb{N} \setminus S = \{\ell_1, \dots, \ell_g\}.$$

Temos que $\gamma := \ell_g$ é o *número de Frobenius* de S . Além disso, destacamos dois elementos especiais de S , a *multiplicidade* de S , definida por

$$\alpha := \min(S \setminus \{0\}) \tag{2.4}$$

e o *condutor* de S , definido por:

$$\beta := \gamma + 1.$$

Temos que

$$v(\mathcal{L}_P) = \{s \in S \mid s \geq \beta\}.$$

Similarmente, o invariante

$$\delta := \#(G)$$

coincide com o grau de singularidade de $P \in C$, isto é,

$$\delta = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P / \mathcal{O}_P). \quad (2.5)$$

Definimos o conjunto

$$K := \{a \in \mathbb{Z} \mid \gamma - a \notin S\} \quad (2.6)$$

cuja importância ficará clara mais adiante. Finalmente, dados $I, J \subset \mathbb{Z}$, seja

$$I - J := \{a \in \mathbb{Z} \mid a + J \subset I\}. \quad (2.7)$$

Agora, veremos algumas classes especiais de semigrupos numéricos.

Definição 2.4.1. Sejam S um semigrupo numérico e ℓ uma lacuna. Então:

- (i) Dizemos que S é simétrico se dada $\ell \in G$, $\gamma - \ell \in S$;
- (ii) Dizemos que S é pseudo-simétrico se dada $\ell \in G$, ou $\gamma - \ell \in S$ ou $\ell = \gamma/2$.

Tais definições, assim como os principais resultados relacionados podem ser encontrados em [9]. Tais tipos de semigrupos devem ser destacados por estarem intimamente ligados a classes de curvas monomiais unicuspidais, que serão o principal ambiente de estudo dos capítulos posteriores.

2.5 Scrolls

Um *scroll racional normal* $S := S_{m_1, \dots, m_d} \subset \mathbb{P}^N$ com $m_1 \leq \dots \leq m_d$, é uma variedade projetiva de dimensão d que, após uma mudança apropriada de coordenadas, é o conjunto dos pontos $(x_0 : \dots : x_N) \subset \mathbb{P}^N$ tal que o posto de

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} x_0 & x_1 & \dots & x_{m_1-1} & x_{m_1+1} & \dots & x_{m_1+m_2} & \dots & \dots & x_{N-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{m_1} & x_{m_1+2} & \dots & x_{m_1+m_2+1} & \dots & \dots & x_N \end{array} \right) \quad (2.8)$$

é menor que 2. Em particular,

$$N = e + d - 1 \quad (2.9)$$

onde $e := m_1 + \dots + m_d$. Note que S é união disjunta de $(d-1)$ -planos determinados por uma escolha (parametrizada) de pontos em cada uma das d curvas racionais

normais de grau m_i contidas em espaços complementares em \mathbb{P}^N . Iremos nos referir a cada um destes $(d - 1)$ -planos como uma *fibra*. Então, S é suave se $m_1 > 0$. Por meio desta descrição geométrica podemos ver que:

$$\deg(S) = e. \tag{2.10}$$

O scroll S pode ser visto também naturalmente como a imagem de um fibrado projetivo. De fato, tomando $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_d)$, que tem um morfismo birracional

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^N$$

definido por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. O morfismo é tal que qualquer fibra de $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ é levada a uma fibra de S . O morfismo é um isomorfismo se S é suave. Para mais detalhes, [16, 39].

Capítulo 3

Índice de Clifford

Nesse capítulo, estudaremos o índice de Clifford de uma curva. Se C é suave, tal definição é enunciada em termos de fibrados de posto 1. Mas há uma grande relação de tal definição com a gonalidade, o que nos faz ajustá-la para a seguinte:

Definição 3.0.1. *Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 em C . Definimos o índice de Clifford associado a \mathcal{F} como*

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) =: \deg(\mathcal{F}) - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1).$$

O índice de Clifford de C , por sua vez, é dado por

$$\text{Cliff}(C) =: \min \left\{ \text{Cliff}(\mathcal{F}) \mid h^0(\mathcal{F}) \geq 2 \text{ and } h^1(\mathcal{F}) \geq 2 \right\}.$$

Dizemos que \mathcal{F} contribui para $\text{Cliff}(C)$ se $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$ e $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$. Se, além disso, $\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{Cliff}(C)$, dizemos que \mathcal{F} computa $\text{Cliff}(C)$. A dimensão de Clifford de C é dada por

$$\text{Cld}(C) := \min \{ h^0(\mathcal{F}) - 1 \mid \mathcal{F} \text{ computa } \text{Cliff}(C) \}.$$

3.1 Resultados Gerais

Para um estudo do índice de Clifford para curvas integrais, devemos começar enunciando a versão singular da desigualdade de Clifford provada em [17, App.] por Eisenbud, Harris, Koh e Stillman. Veja também [27, Lem. 3.1]. Nós a enunciaremos em termos da Observação (2.3.4).(ii).

Teorema 3.1.1 (Teorema de Clifford). *Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 em C tal que $h^0(\mathcal{F}) \geq 1$ e $h^1(\mathcal{F}) \geq 1$. Então,*

(i) *Vale a seguinte desigualdade*

$$h^0(\mathcal{F}) + h^1(\mathcal{F}) \leq g + 1 \quad (3.1)$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) \geq 0 \quad (3.2)$$

(ii) *A igualdade vale em (3.1) e (3.2) se, e somente se,*

(a) *$h^0(\mathcal{F}) = 1$ e $\mathcal{F} = \mathcal{O}$, ou $h^1(\mathcal{F}) = 1$ e $\mathcal{F} = \omega$, ou*

(b) *$h^0(\mathcal{F}) \geq 2$, $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$ e, vale exatamente uma das seguintes:*

(b.1) *C é hiperelítica e \mathcal{F} é múltiplo de um feixe que computa gonalidade, ou*

(b.2) *C é racional nearly normal e $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t, \dots, t^d \rangle$ para $d \leq g - 1$.*

Deste resultado, pode-se concluir que:

Proposição 3.1.2. *$\text{Cliff}(C) = 0$ se, e somente se, $\text{gon}(C) = 2$.*

Demonstração. Pelo Teorema (3.1.1).(ii), $\text{Cliff}(C) = 0$ se, e somente se, C é ou hiperelítica, ou racional nearly normal que vale se, e somente se, $\text{gon}(C) = 2$ por [28, Prps. 3.6 e 3.7]. \square

Dessa forma, o índice de Clifford faz sentido para curvas com gênero pelo menos 3, por (3.1). Mas o seguinte resultado mostra que mesmo o caso $g = 3$ pode ser desconsiderado. Para isso, utilizaremos, por [28, Lem. 3.1], que se $g \geq 2$, então $\text{gon}(C) \leq g$.

Proposição 3.1.3. *Assuma $g = 3$. Então, existe um feixe em C que contribui para o índice de Clifford se, e somente se, $\text{gon}(C) = 2$.*

Demonstração. A suficiência é consequência de (3.1.2). Para a necessidade, seja \mathcal{F} um feixe em C que contribui para o índice de Clifford. Então,

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(C) &= g + 1 - (h^0(\mathcal{F}) + h^1(\mathcal{F})) \\ &= 4 - (h^0(\mathcal{F}) + h^1(\mathcal{F})) \leq 0 \end{aligned}$$

Assim, $\text{Cliff}(C) = 0$. Logo, $\text{gon}(C) = 2$ por (3.1.2). \square

O problema é que, por [28, Lem. 5.13], para qualquer família de curvas de um gênero fixado, sempre existe um conjunto aberto onde a gonalidade é maximal. Então, as curvas trigonais são a "maioria" dentre as de gênero 3. Mas, o resultado acima mostra que para tais curvas, não é possível definir o índice de Clifford. Portanto, de agora em diante, ao considerarmos $\text{Cliff}(C)$, implicitamente iremos nos restringir ao caso $g \geq 4$.

Proposição 3.1.4. *Valem as seguintes afirmações:*

- (i) se $\text{gon}(C) < g$, então $\text{Cliff}(C) \leq \text{gon}(C) - 2$;
- (ii) se $\text{gon}(C) = g$, então $\text{Cld}(C) \geq 2$;
- (iii) se $\text{gon}(C) = 3$ e $g \geq 4$, então $\text{Cliff}(C) = 1$;
- (iv) se $\text{Cld}(C) = 1$, então $\text{gon}(C) = \text{Cliff}(C) + 2$;
- (v) assumamos $\text{gon}(C) < g$; se $\text{gon}(C) = \text{Cliff}(C) + 2$, então $\text{Cld}(C) = 1$.

Demonstração. Assumamos que \mathcal{F} computa $\text{Cliff}(C)$ e \mathcal{G} computa $\text{gon}(C)$. Uma vez que $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$, então: (b.1) \mathcal{F} contribui para $\text{gon}(C)$. Por outro lado, $h^0(\mathcal{G}) = 2$ por [28, Lem. 3.1]. Portanto,

$$h^1(\mathcal{G}) = h^0(\mathcal{G}) + (g - \text{deg}(\mathcal{G})) - 1 = 1 + (g - \text{gon}(C)) \quad (3.3)$$

e também: (b.2) \mathcal{G} contribui para $\text{Cliff}(C)$ (i.e., $h^1(\mathcal{G}) \geq 2$) se, e somente se, $\text{gon}(C) < g$.

Então, para provar (i), por (b.2), temos

$$\text{Cliff}(C) \leq \text{deg}(\mathcal{G}) - 2 = \text{gon}(C) - 2.$$

Para provarmos (ii), por (b.1), $\text{deg}(\mathcal{F}) \geq \text{gon}(C) = g$. Dessa forma,

$$h^0(\mathcal{F}) = (\text{deg}(\mathcal{F}) - g) + 1 + h^1(\mathcal{F}) \geq 3$$

e assim, vale $\text{Cld}(C) \geq 2$.

Item (iii) segue diretamente de (3.1.2) e (i).

Para provarmos (iv), se $h^0(\mathcal{F}) = 2$, então $\deg(\mathcal{F}) = \text{Cliff}(C) + 2$. Agora, $\deg(\mathcal{F}) \geq \deg(\mathcal{G})$ por (b.1). Além disso, $\text{gon}(C) < g$ por (ii). Portanto, (b.2) implica que $\deg(\mathcal{G}) - 2 \geq \deg(\mathcal{F}) - 2$. Então, $\deg(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{G}) = \text{gon}(C)$. Assim, $\text{gon}(C) = \text{Cliff}(C) + 2$.

Para (v), temos que $\text{Cliff}(C) = \text{gon}(C) - 2 = \text{Cliff}(\mathcal{G})$. Então, $\text{Cld}(C) = 1$ por (b.2). \square

Teorema 3.1.5. *Assuma $\text{Cld}(C) = r \geq 2$ e, que o índice de Clifford e a gonalidade são computados por feixes inversíveis. Então:*

- (i) *existe uma imersão fechada $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$;*
- (ii) *se $\text{Cld}(C) = 2$, então C é (isomorfa a) uma curva plana;*
- (iii) *se C é uma curva plana de grau $d \geq 5$, então:*
 - (a) $\text{gon}(C) = d - 1$;
 - (b) $\text{Cliff}(C) \leq d - 4$.

Demonstração. **Para provarmos (i)**, assumamos que \mathcal{F} computa o índice de Clifford. Então, tal feixe é gerado por seções globais. De fato, caso contrário $\mathcal{U} := \mathcal{O}_C \langle H^0(\mathcal{F}) \rangle$ é tal que $\deg(\mathcal{U}) < \deg(\mathcal{F})$, $h^0(\mathcal{U}) = h^0(\mathcal{F})$ e, portanto, $h^1(\mathcal{U}) > h^1(\mathcal{F}) \geq 2$. Logo, $\text{Cliff}(C) \leq \text{Cliff}(\mathcal{U}) < \text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{Cliff}(C)$, o que é uma contradição. Assim, $|\mathcal{F}|$ induz um morfismo $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^r$.

Assumamos que \mathcal{F} não é muito amplo, ou, equivalentemente, φ não é uma imersão. Então: (1) φ não separa pontos, ou (2) φ não separa retas tangentes. Iremos mostrar que ambas as afirmações levam a contradições.

Para isso, seja $R \in C$ e considere o feixe $\mathcal{M}_{\{R\}}$ definida pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{\{R\}} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_R/\mathfrak{m}_R \longrightarrow 0.$$

Se (1) vale, existem pontos $P, Q \in C$, $P \neq Q$, com $H^0(\mathcal{M}_{\{Q\}}\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{M}_{\{Q\}}\mathcal{F})$. Então, considere o feixe $\mathcal{G}_1 := \mathcal{M}_{\{Q\}}\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F}$. Por outro lado, se vale (2), então o mapa natural $v : H^0(\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F} / \mathcal{M}_{\{P\}}^2\mathcal{F})$ não é sobrejetivo. Então, tome um subespaço vetorial V de $H^0(\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F} / \mathcal{M}_{\{P\}}^2\mathcal{F})$ tal que V contém a imagem de $H^0(\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F})$ e V é de codimensão 1. Então, tome um subfeixe \mathcal{H} de $\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F} / \mathcal{M}_{\{P\}}^2\mathcal{F}$ tal que $H^0(\mathcal{H}) = V$ e considere o feixe \mathcal{G}_2 para ser a pré-imagem de \mathcal{H} em $\mathcal{M}_{\{P\}}\mathcal{F}$.

Agora, (a prova de) [27, Lem. 4.10] implica que

$$h^0(\mathcal{G}_i) = h^0(\mathcal{F}) - 1 \text{ e } h^1(\mathcal{G}_i) = h^1(\mathcal{F}) + 1$$

para $i = 1, 2$. Mas, note que, uma vez que \mathcal{F} é inversível, ambos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são feixes livres de torção de posto 1. Além disso, $h^1(\mathcal{G}_i) \geq 3$ e $h^0(\mathcal{G}_i) = r \geq 2$. Em contrapartida, temos que $\text{Cliff}(\mathcal{G}_i) = \text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{Cliff}(C)$, o que implica que $\text{Cld}(C) \leq r - 1$, uma contradição. Portanto, \mathcal{F} é muito amplo e φ é uma imersão fechada.

Para provarmos (ii), apenas note que é uma consequência imediata de (i).

Para provarmos (iii).(a), tome um ponto simples $P \in C$ e considere o pencil de retas que passam por ele, que é um g_d^1 . Ao removermos P , obtemos um g_{d-1}^1 livre de pontos de base. Então, $\text{gon}(C) \leq d - 1$.

Agora, afirmamos que $\omega = \mathcal{O}_C(d - 3)$. Então, é suficiente mostrar que seu grau é $2g - 2$ e que possui pelo menos g seções globais independentes. Para curvas planas, lembre-se que vale a igualdade $g = (d - 1)(d - 2)/2$. Então, $\text{deg}(\mathcal{O}_C(d - 3)) = d(d - 3) = 2((d - 1)(d - 2)/2) - 2 = 2g - 2$. Por outro lado, considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(d - 3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d - 3) \rightarrow \mathcal{O}_C(d - 3) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Temos que $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d - 3)) = 0$ e $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d - 3)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = 0$. Então, a sequência exata longa na cohomologia de (3.4) implica que $H^1(\mathcal{O}_C(d - 3)) = H^2(\mathcal{I}_C(d - 3))$. Como C é um divisor em \mathbb{P}^2 , $\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)$; então $H^2(\mathcal{I}_C(d - 3)) = H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = k$. Dessa forma, $h^1(\mathcal{O}_C(d - 3)) = 1$. Portanto, $h^0(\mathcal{O}_C(d - 3)) = 2g - 2 + 1 - g + 1 = g$ e vale a afirmação.

Portanto, identificamos $\mathbb{P}^2 = \{(X : Y : Z)\}$ e tomamos $x = X/Z$, $y = Y/Z$. Dessa forma, o modelo canônico de C é dado por

$$C' = (1 : x : x^2 : \dots : x^{d-3} : xy : \dots : xy^{d-4} : y : \dots : y^{d-3}) \subset \mathbb{P}^{g-1} \quad (3.5)$$

para $(1 : x : y) \in C$. Agora, assuma que há um feixe inversível \mathcal{F} em C tal que $\text{deg}(\mathcal{F}) = m \leq d - 2$ e $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Considere o subespaço vetorial $V \subset H^0(\mathcal{F})$ tal que $\dim V = 2$. Então, por [28, Prp. 4.6.(1)], temos que (\mathcal{F}, V) implica em uma inclusão $C' \subset S$, onde S é um $(m - 1)$ -fold scroll. Além disso, as fibras de S são planos de dimensão $(m - 2)$ contendo m pontos de C' , que são genericamente distintos. Denote tais pontos por P_1, \dots, P_m correspondentes aos vetores $(1 : x_i : y_i) \in C \subset \mathbb{P}^2$.

Para uma fibra genérica, tais pontos são tais que $x_i \neq 0 \neq y_i$ para todo i . Então, $(x_i^{d-3}, x_i^{d-4}y_i, \dots, y_i^{d-3})$ são vetores distintos que formam uma matriz de Vandermonde $m \times (d-2)$. Assim, concluímos que os pontos P_i são linearmente independentes, o que é uma contradição.

Para provarmos (iii).(b) considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathcal{O}_C(1) \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Note que $H^0(\mathcal{I}_C(1)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d+1)) = 0$ e $H^1(\mathcal{I}_C(1)) = H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d+1)) = 0$. Portanto, pela sequência exata longa em cohomologia correspondente à (3.6), concluímos que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \cong H^0(\mathcal{O}_C(1))$. Logo, $h^0(\mathcal{O}_C(1)) = 3$. Além disso, $\deg(\mathcal{O}_C(1)) = d$. Portanto, $\text{Cliff}(\mathcal{O}_C(1)) = d - 2(3 - 1) = d - 4$. Assim, basta verificarmos se tal feixe contribui para o índice de Clifford. Portanto, por Riemann-Roch, temos

$$\begin{aligned} h^1(\mathcal{O}_C(1)) &= h^0(\mathcal{O}_C(1)) - \deg(\mathcal{O}_C(1)) - 1 + g \\ &= 3 - d - 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2} \\ &= \frac{(d-2)(d-3)}{2} \geq 2 \end{aligned}$$

se, e somente se, $d \geq 5$. Com efeito, $\text{Cliff}(C) \leq \text{Cliff}(\mathcal{O}_C(1)) = d - 4$. \square

Definição 3.1.6. Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 em C tal que $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Seja $V \subset H^0(\mathcal{F})$ um subespaço tal que $\dim(V) = 2$. Por [28, Lem. 4.5], o pencil (\mathcal{F}, V) induz uma inclusão $C' \subset S_{(\mathcal{F}, V)} \subset \mathbb{P}^{g-1}$, onde C' é o modelo canônico e $S_{(\mathcal{F}, V)}$ é um scroll racional normal. Além disso, $\dim(S_{(\mathcal{F}, V)}) = \deg(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}) + 1$ se $h^1(\mathcal{F}) > 0$, e g caso contrário. Em particular, o scroll $S_{(\mathcal{F}, V)}$ depende de V , mas sua dimensão não. Assim, definimos a *dimensão de scroll* de \mathcal{F} , denotada por $\text{scd}(\mathcal{F})$, como sendo $\dim(S_{(\mathcal{F}, V)})$, onde V varia dentre os subespaços vetoriais de dimensão 2 de $H^0(\mathcal{F})$. Assim, se $h^1(\mathcal{F}) > 0$, então

$$\text{scd}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}) + 1. \quad (3.7)$$

Proposição 3.1.7. *Temos a seguinte relação,*

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{scd}(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}) + 1. \quad (3.8)$$

Agora, introduziremos exemplos relacionados à definição e a proposição acima.

Para isso, mencionaremos um conceito que será amplamente explorado ao longo deste texto.

3.2 Resultados para Curvas Monomiais

Inicialmente estabelecemos os objetos que iremos estudar nesta seção. Uma curva é dita *unicuspidal*, se possui apenas uma singularidade que, por sua vez, é uma cúspide simples.

Definição 3.2.1. *Uma curva C é dita monomial, se é imagem de um mapa da forma*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^m \\ (s : t) &\longmapsto (s^{n_m} : s^{n_m-n_1}t^{n_1} : \dots : s^{n_m-n_{m-1}}t^{n_{m-1}} : t^{n_m}) \end{aligned}$$

que, por simplicidade, pode ser denotada localmente como

$$C = (1 : t^{n_1} : \dots : t^{n_{m-1}} : t^{n_m}).$$

Note que C é unicuspidal se, e somente se, $n_m = n_{m-1} + 1$. Nesse caso, a singularidade é $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ e, definimos o semigrupo de C como o de P . Para o restante, também definimos $Q := (0 : \dots : 1)$ como o ponto de C no infinito em relação à carta afim $(1 : x_1 : \dots : x_m) \subset \mathbb{P}^m$, que se restringe ao aberto afim $U := C \setminus P$. Denotamos por S o semigrupo de P e usamos uma notação similar para o conjunto de lacunas e o número de Frobenius. Por [30, Thm. 4.1], se C é unicuspidal, o feixe dualizante ω admite um mergulho no feixe constante de funções racionais \mathcal{K} , tal que

$$H^0(\omega) = \{t^i \mid i \in \gamma - G\}. \quad (3.9)$$

Assim, o modelo canônico de C é dado por

$$C' = (1 : t^{b_2} : \dots : t^{b_\delta}) \quad (3.10)$$

onde $\{0, b_2, \dots, b_\delta\} = \gamma - G$.

Lema 3.2.2. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com semigrupo de valores S . Considere o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_n} \rangle$ e defina o conjunto*

$$G' := \{\ell \in G \mid \ell > a_n \text{ e } \ell \notin v_{\bar{P}}(\mathcal{F}_P)\}.$$

Então,

$$H^1(\mathcal{F}) = \langle t^i \mid i \in \gamma - G' \rangle. \quad (3.11)$$

Demonstração. Tome $\mathcal{S} := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega)$. Então, $H^1(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{S})$. Note que $\mathcal{S}_R = (\omega_R : \mathcal{F}_R)$ para todo $R \in C$. Se $R \neq P, Q$, então $\mathcal{S}_R = (\mathcal{O}_R : \mathcal{O}_R) = \mathcal{O}_R$. Para Q , temos que $\mathcal{S}_Q = (t^{\gamma-1}\mathcal{O}_Q : t^{a_n}\mathcal{O}_Q) = t^{\gamma-1-a_n}\mathcal{O}_Q$. Para P , tome $F := v_{\bar{P}}(\mathcal{F}_P)$ e relembre (2.6) e (2.7). Por [44, Thm 2.11], $v_{\bar{P}}(\omega_P) = K$. Portanto,

$$\mathcal{S}_P = \mathcal{O}_P \langle t^i \mid i \in K - F \rangle.$$

Como $H^0(\mathcal{S}) = \bigcap_{R \in C} \mathcal{S}_R$, segue que

$$H^0(\mathcal{S}) = \langle t^i \mid i \in (K - F) \cap [0, \gamma - 1 - a_n] \rangle. \quad (3.12)$$

Então, temos que provar que

$$(K - F) \cap [0, \gamma - 1 - a_n] = \gamma - ((G \setminus F) \cap [a_n + 1, \gamma]).$$

Primeiramente, note que $[0, \gamma - 1 - a_n] = \gamma - [a_n + 1, \gamma]$. Agora, $G \setminus F = \mathbb{N} \setminus F$, pois $S \subset F$. Então, basta provar que $K - F = \gamma - (\mathbb{N} \setminus F)$. Para provarmos " \subset ", tome $\gamma - a \in K - F$. Temos que mostrar que $a \notin F$. Como $\gamma - a \in K - F$, temos que

$$\gamma - (\gamma - a) - f \notin S \quad \forall f \in F.$$

Se, caso contrário, $a \in F$, então $0 = a - a \notin S$, o que é uma contradição.

Para provarmos " \supset ", suponha que $a \notin F$. Temos que mostrar que $\gamma - a \in K - F$. Caso contrário, existe $f \in F$ tal que $\gamma - a + f \notin K$. Então, $\gamma - (\gamma - a + f) \in S$, o que implica $a - f \in S$ e, portanto, $a \in f + S \subset F$, uma contradição. \square

Exemplo 3.2.3. *Considere a curva*

$$C = (1 : t^5 : t^6 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{15} : t^{16} : t^{17} : t^{18}) \subset \mathbb{P}^9.$$

Trata-se de uma curva racional monomial unicuspidal. O semigrupo de valores de C é dado por

$$S = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}.$$

Então, seu gênero é $g = \delta_P = 10$. Note que $S = K$, então C é Gorenstein. Por (3.9),

$$H^0(\omega) = \langle 1, t^5, t^6, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18} \rangle.$$

Agora, considere o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\langle 1, t^4, t^5, t^6 \rangle$. Iremos descrever dois scrolls diferentes induzidos por (\mathcal{F}, V) para dois diferentes subespaços $V \subset H^0(\mathcal{F})$. Por (3.12),

$$H^1(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{I}) = \langle t^6, t^{11}, t^{12} \rangle.$$

Primeiramente, tome $V := \langle 1, t^5 \rangle \subset H^0(\mathcal{F})$ e, considere o mapa de multiplicação

$$\begin{aligned} \varphi : V \otimes H^0(\mathcal{I}) &\longrightarrow H^0(\omega) \\ t^i \otimes t^j &\longmapsto t^{i+j} \end{aligned}$$

O scroll definido por (\mathcal{F}, V) é dado por $\det_2(A_\varphi)$, onde A_φ é a matriz $2 \times h^1(\mathcal{F})$ definida por φ . Agora, escreva

$$\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(H^0(\omega)) = \{(1 : t^5 : \dots : t^{18})\} = \{(x_0 : \dots : x_9)\}.$$

Portanto, $S := S_{(\mathcal{F}, V)}$ é o scroll em \mathbb{P}^9 cortado pelos menores 2×2 de

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

Portanto, por (2.8), $S = S_{2,1,0,0,0,0,0}$ e $\dim S = 7$. Agora, considere $V = \langle t^4, t^6 \rangle$. Então,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} x_3 & x_6 & x_7 \\ x_4 & x_8 & x_9 \end{pmatrix},$$

$S = S_{1,1,1,0,0,0,0}$ e $\dim S = 7$. De fato, por (3.7), temos que

$$\text{scd}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}) + 1 = 10 - 4 + 1 = 7.$$

Agora, considere a curva

$$C = (1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{12} : t^{13} : t^{14}) \subset \mathbb{P}^7.$$

O semigrupo de valores de C é

$$S = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 14 \rightarrow\}.$$

Então, seu gênero é $g = \delta_P = 7$. Note que $S \neq K$, então C é não-Gorenstein. Por (3.9),

$$H^0(\omega) = \langle 1, t^3, t^4, t^6, t^7, t^9, t^{10} \rangle.$$

Agora, considere o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C \langle 1, t^3, t^4, t^6 \rangle$. Iremos descrever dois scrolls diferentes induzidos por (\mathcal{F}, V) para dois subespaços diferentes $V \subset H^0(\mathcal{F})$. Por (3.12),

$$H^1(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{S}) = \langle 1, t^3 \rangle.$$

Primeiramente, tome $V := \langle 1, t^4 \rangle \subset H^0(\mathcal{F})$. O scroll definido por (\mathcal{F}, V) é dado por $\det_2(A_\varphi)$, onde A_φ é a matriz $2 \times h^1(\mathcal{F})$ definida por φ . Agora escreva

$$\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}(H^0(\omega)) = \{(1 : t^3 : \dots : t^{10})\} = \{(x_0 : \dots : x_6)\}.$$

Portanto, $S := S_{(\mathcal{F}, V)}$ é o scroll em \mathbb{P}^9 cortado pelos menores 2×2 de

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

Portanto, por (2.8), $S = S_{1,1,0,0,0}$ e $\dim S = 5$.

Agora, considere $V = \langle t^3, t^6 \rangle$. Então,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_5 \end{pmatrix},$$

$S = S_{2,0,0,0,0}$ e $\dim S = 5$. De fato, por (3.7), temos que

$$\text{scd}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}) + 1 = 8 - 4 + 1 = 5.$$

Agora, estudaremos o índice de Clifford de curvas monomiais unicuspidais. Iniciaremos pelo seguinte resultado que busca caracterizar quais feixes podem computar tal invariante.

Lema 3.2.4. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com $\text{Cld}(C) = r$. Então:*

- (i) o índice de Clifford de C é computado por um feixe da forma $\mathcal{O}_C \langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_r} \rangle$ para algum $a_i \in \mathbb{N}^*$;
- (ii) a gonalgidade de C é computada por um feixe da forma $\mathcal{O}_C \langle 1, t^a \rangle$ para $a \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} computa a dimensão de Clifford de C . Em particular, \mathcal{F} computa o índice de Clifford de C . Isso implica que tal feixe é gerado por seções globais. De fato, tome $V = H^0(\mathcal{F})$. Suponha que a inclusão $\mathcal{O}_C\langle V \rangle \subseteq \mathcal{F}$ é própria. Então, temos que $\deg(\mathcal{O}_C\langle V \rangle) < \deg(\mathcal{F})$. Mas $h^0(\mathcal{O}_C\langle V \rangle) = h^0(\mathcal{F}) \geq 2$ e, além disso, $h^1(\mathcal{O}_C\langle V \rangle) \geq h^1(\mathcal{F}) \geq 2$. Portanto, $\mathcal{O}_C\langle V \rangle$ contribui para o índice de Clifford, o que é uma contradição.

Assim, assumimos que \mathcal{F} possui $r + 1$ seções globais independentes. No entanto, todo feixe livre de torção de posto 1 pode ser mergulhado no feixe constante de funções racionais K . Dessa forma, temos que

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{K}. \quad (3.13)$$

Da inclusão acima, podemos escrever $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, z_1, \dots, z_r \rangle$ com $z_i = t^{a_i} f_i / h_i$ e $f_i, h_i \in k[t]$ sem fatores em comum, nem zero como raiz. Primeiramente, suponhamos que $a_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, i.e, as funções z_i não possuem um polo em P . De fato, caso contrário, suponha que $v_{\bar{P}}(z_s) \leq v_{\bar{P}}(z_i)$. Uma vez que $\deg(x\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})$ para todo $x \in k(C)$, podemos substituir \mathcal{F} por $z_s^{-1}\mathcal{F}$. Além disso, podemos supor que $a_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, apenas por meio da substituição de z_i por $z_i - z_i(0)$, se necessário. Então, a dimensão de Clifford de C pode ser computada por um feixe da forma $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^{a_1} f_1 / h_1, \dots, t^{a_r} f_r / h_r \rangle$, com $f_i, h_i \in k[t]$, $\text{mdc}(f_i, h_i) = 1$, $f_i(0) \neq 0 \neq h_i(0)$ e $a_i > 0$. Tome $\mathcal{G} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_r} \rangle$. Iremos provar que $\deg(\mathcal{G}) \leq \deg(\mathcal{F})$. Seja P a singularidade, Q o ponto no infinito e $U = C \setminus \{P\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \deg_U(\mathcal{F}) &= \deg_{U \setminus \{Q\}}(\mathcal{F}) + \deg_Q(\mathcal{F}) \\ &= \sum_{i=1}^r \deg(h_i) + \max_{1 \leq i \leq r} \{0, a_i + \deg(f_i) - \deg(h_i)\}. \end{aligned}$$

Se o segundo termo do lado direito da igualdade se anula, então $\deg(h_i) \geq a_i$ para todo $1 \leq i \leq r$. Portanto, $\deg_U(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^r \deg(h_i) \geq \max_i \{a_i\} = \deg_U(\mathcal{G})$. Caso contrário, suponha que $a_s + \deg(f_s) - \deg(h_s) \geq a_j + \deg(f_j) - \deg(h_j)$ para todo j . Portanto, $a_s + \deg(f_s) + \deg(h_j) \geq a_j + \deg(f_j) + \deg(h_s)$. Fixe j . Então,

temos que

$$\begin{aligned}
\deg_U(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^r \deg(h_i) + a_s + \deg(f_s) - \deg(h_s) \\
&= \sum_{i \neq s} \deg(h_i) + a_s + \deg(f_s) \\
&= \sum_{i \neq s, j} \deg(h_i) + a_s + \deg(f_s) + \deg(h_j) \\
&\geq \sum_{i \neq s, j} \deg(h_i) + a_j + \deg(f_j) + \deg(h_s) \geq a_j.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\deg_U(\mathcal{F}) \geq \max_i \{a_i\} = \deg_U(\mathcal{G})$. Entretanto,

$$\begin{aligned}
\deg_P(\mathcal{F}) &= \#(v_{\overline{P}}(\mathcal{F}_P) \setminus S) \\
&\geq \# \left(\bigcup_{i=1}^r (S + a_i) \setminus S \right) = \#(v_{\overline{P}}(\mathcal{G}_P) \setminus S) = \deg_P(\mathcal{G})
\end{aligned}$$

onde o fato de C ser monomial foi usado na segunda desigualdade acima. Logo, por construção, $h^0(\mathcal{G}) \geq r + 1 = h^0(\mathcal{F})$. Por outro lado, provamos que $\deg(\mathcal{G}) \leq \deg(\mathcal{F})$; isso implica que $h^1(\mathcal{G}) \geq h^1(\mathcal{F}) \geq 2$. Portanto, \mathcal{G} contribui para o índice de Clifford. Mas $\text{Cliff}(\mathcal{G}) = \deg(\mathcal{G}) - 2(h^0(\mathcal{G}) - 1) \leq \text{Cliff}(\mathcal{F})$. Então, assim como \mathcal{F} , \mathcal{G} também computa o índice de Clifford. Então, vale (i). Para provarmos (ii), basta repetir o processo acima com $r = 1$. \square

Exemplo 3.2.5. Considere a curva não-monomial $C = (1 - t : t^2 : t^4 : t^5) \subset \mathbb{P}^3$ com uma única singularidade $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ que é uma cúspide, então C é unicuspidal. O anel local de P é dado por

$$\mathcal{O}_P = k \oplus k \frac{t^2}{1-t} \oplus k \frac{t^4}{1-t} \oplus t^5 \overline{\mathcal{O}}_P$$

e seu semigrupo é $S = \{0, 2, 4, \dots\}$. Defina $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C \langle 1, z \rangle$ onde $z = t^2/(1-t)$. Temos que $\deg_P(\mathcal{F}) = 0$ já que $z \in \mathcal{O}_P$; enquanto, seguindo a demonstração do lema acima, $\deg_U(\mathcal{F}) = 1 + (2 - 1) = 2$, logo $\deg(\mathcal{F}) = 2$.

Agora defina $\mathcal{G} := \mathcal{O} \langle 1, t^2 \rangle$. Note que podemos escrever $z = t^2 + t^3 + \dots$ utilizando sua série de potências. Agora, tanto t^2 quanto z estão em \mathcal{G}_P . Assim, como $t^2 - z = t^3 + \dots$, temos que $v_{\overline{P}}(\mathcal{G}) \setminus S = \{3\}$, então $\deg_P(\mathcal{G}) = 1$. Por outro lado, $\deg_U(\mathcal{G}) = 2$ e, portanto, $\deg(\mathcal{G}) = 3$. Assim, $\deg \mathcal{F} < \deg \mathcal{G}$ e isso constitui um contraexemplo para a prova de (3.2.4). Vamos provar que também é um contraexemplo para a afirmação de (3.2.4). De fato, por [28, Prop. 3.2.(1)] temos que $\text{gon}(C) = 1$ se, e somente se, $g = 0$. Mas aqui $g = 2$, então $\text{gon}(C) \geq 2$. Agora, $\deg(\mathcal{F}) = 2$, então $\text{gon}(C) = 2$. Assim, basta

mostrar que $\deg(\mathcal{H}_r) \geq 3$, onde $\mathcal{H}_r = \mathcal{O}\langle 1, t^r \rangle$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Se $r = 1$, temos que $\deg_P(\mathcal{H}_1) = \#(v_{\overline{P}}(\mathcal{H}_1) \setminus S) = 2$; enquanto $\deg_Q(\mathcal{H}_1) = 1$, então $\deg(\mathcal{H}_1) \geq 3$. Se $r = 2$, $\deg(\mathcal{H}_2) = 3$, como visto acima. E, se $r \geq 3$, note que $\deg(\mathcal{H}_r) \geq \deg_Q(\mathcal{H}_r) = r \geq 3$.

Lema 3.2.6. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com semigrupo S . Então:*

(i) *Considere o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_n} \rangle$ e tome $F = v_{\overline{P}}(\mathcal{F}_P)$. Então:*

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \#((G \setminus F) \cap [1, a_n]) - \#(S \cap [1, a_n]) + \#((F \setminus S) \cap [a_n + 1, \gamma]). \quad (3.14)$$

(ii) *Se \mathcal{F} é inversível, então*

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \#(G \cap [1, a_n]) - \#(S \cap [1, a_n]). \quad (3.15)$$

Demonstração. **Para provarmos (i)**, seja G' como em (3.2.2). Note que $G' = (G \setminus F) \cap [a_{n+1}, \gamma]$. Também, por (3.11), temos que $\#(G') = h^1(\mathcal{F})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(\mathcal{F}) &= \deg(\mathcal{F}) - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1) \\ &= (g - h^1(\mathcal{F})) - (h^0(\mathcal{F}) - 1) \\ &= \#(G \setminus G') - \#(F \cap [1, a_n]). \end{aligned}$$

Agora,

$$G \setminus G' = \left(((G \setminus F) \cup (F \setminus S)) \cap [1, a_n] \right) \cup \left((F \setminus S) \cap [a_n + 1, \gamma] \right).$$

Logo,

$$\#(G \setminus G') = \#((G \setminus F) \cap [1, a_n]) + \#((F \setminus S) \cap [1, a_n]) + \#((F \setminus S) \cap [a_n + 1, \gamma]).$$

Por outro lado,

$$F \cap [1, a_n] = ((F \setminus S) \cup S) \cap [1, a_n],$$

e assim,

$$\#(F \cap [1, a_n]) = \#((F \setminus S) \cap [1, a_n]) + \#(S \cap [1, a_n])$$

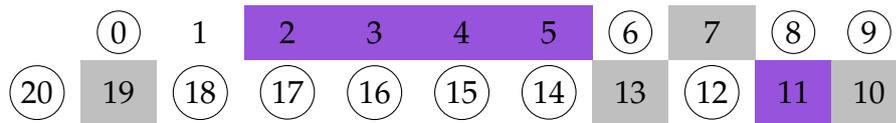
e vale (i). **Para provarmos (ii)**, primeiramente note que $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{F}_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$. Logo, $S \subset F \subset \mathbb{N}$. Mas, como \mathcal{F} é inversível, então F é uma translação de S . Porém, isso

não pode ocorrer, a não ser que $F = S$. Dessa forma, (3.14) pode ser reescrita como

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \#(G \cap [1, a_n]) - \#(S \cap [1, a_n])$$

e vale (ii). □

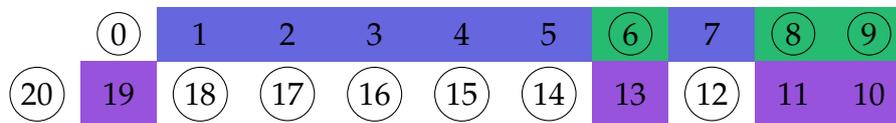
Exemplo 3.2.7. Considere a curva com $S = \langle 6, 8, 9 \rangle$ e o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$.



- (i) Os elementos de S estão circulados;
- (ii) Em azul, as células que contribuem para $((G \setminus F) \cap [1, a_n])$;
- (iii) Em verde, as células que contribuem para $(S \cap [1, a_n])$;
- (iv) Em roxo, as células que contribuem para $h^1(\mathcal{F})$;
- (v) Em cinza, as células que contribuem para $((F \setminus S) \cap [a_n + 1, \gamma])$

Temos que $\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 4$ e $h^1(\mathcal{F}) = 5$. É possível mostrar que tal feixe computa $\text{gon}(C)$.

Exemplo 3.2.8. Considere a curva com $S = \langle 6, 8, 9 \rangle$ e o feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^6, t^8, t^9 \rangle$. Neste caso, $\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 6 - 3 = 3$ e $h^1(\mathcal{F}) = 4$



É possível mostrar que tal feixe computa o índice de Clifford de C . Portanto, a igualdade $\text{Cliff}(C) = \text{gon}(C) - 2$ não é satisfeita.

Capítulo 4

Dimensão de Clifford de Curvas Monomiais

Em [18], são apresentados alguns resultados referentes à dimensão de Clifford de curvas suaves. Curvas cuja dimensão de Clifford é diferente de 1 são chamadas de curvas excepcionais por [29]. No mesmo trabalho, é provado que não há curvas de dimensão de Clifford maior ou igual que três em uma superfície de Enriques.

Os próximos resultados mostram que há resultados análogos para curvas de dimensão de Clifford até 3. Entretanto, não há curva monomial satisfazendo todas as hipóteses da conjectura principal [18, Conj. p.175].

4.1 Curvas Monomiais de Dimensão de Clifford 2

De acordo com [18], as curvas de dimensão de Clifford $r = 2$ são justamente as curvas suaves planas de grau pelo menos 5. O próximo resultado mostra uma direção para o caso de curvas monomiais.

Teorema 4.1.1. *Seja C uma curva monomial unicuspidal tal que o seu ponto singular possui multiplicidade $\alpha \geq 4$. Então, $\text{Cld}(C) = 2$ e $\text{Cliff}(C)$ é computado por feixes inversíveis se, e somente se, C é uma curva plana. Nesse caso, $\text{Cliff}(C) = \alpha - 3$.*

Demonstração. **Para provarmos (i)**, se C é plana e monomial, então $C = (1 : t^\alpha : t^b) \subset \mathbb{P}^2$, onde α é a multiplicidade de $P = (1 : 0 : 0)$. Mas, como C é unicuspidal, isto é, P é seu único ponto singular, temos que $b = \alpha + 1$. Assim, o semigrupo de C é $S = \langle \alpha, \alpha + 1 \rangle$. Vamos descrever a estrutura de S . Para isso, de forma abreviada, para

quaisquer inteiros a, b , definimos $[a, b] := [a, b] \cap \mathbb{N}$. Podemos então escrever

$$[1, \gamma] = G_1 \cup S_1 \cup G_2 \cup \dots \cup S_{\alpha-2} \cup G_{\alpha-1} \quad (4.1)$$

com $S_i = [i\alpha, i\alpha + i] \subset S$ e $G_i = [(i-1)\alpha + i, (i-1)\alpha + (\alpha-1)] \subset G$. Note, em particular, que $\#(S_i) = i + 1$ e $\#(G_i) = \alpha - i$.

Seja $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_n} \rangle$ um feixe que contribui para o índice de Clifford. Tome $F = v_{\overline{p}}(\mathcal{F})$. Suponha que o maior inteiro fora de F é um elemento de G_j e, denote $\#(G_j \setminus F) = e$. Então, note que $\#(G_{j-i} \setminus F) \geq i + e$ para $0 \leq i \leq j-1$. De fato, isto é consequência do seguinte fato: se $\ell \in G_i \setminus F$ então, claramente, $\ell - \alpha, \ell - \alpha - 1 \in G_{i-1} \setminus F$.

Note também que, se $\#(F \cap G_1) = k$, então $G_{\alpha-i} \subset F$ para $1 \leq i \leq k$. Caso contrário, suponha que exista um $\ell \in G_{\alpha-m} \setminus F$ para algum $1 \leq m \leq k$. Então, ajustando o que foi dito acima, temos que $\#(G_{(\alpha-m)-i} \setminus F) \geq i + 1$ para $0 \leq i \leq \alpha - m - 1$. Em particular, tomando $i = \alpha - m - 1$, temos que $\#(G_1 \setminus F) \geq \alpha - m - 1 + 1 = \alpha - m \geq \alpha - k$. Mas $\#(F \cap G_1) = (\alpha - 1) - \#(G_1 \setminus F) \leq (\alpha - 1) - (\alpha - k) = k - 1$, o que é uma contradição. Suponha primeiro que $a_n \in S_l$ para algum l . Assim, (3.14) implica que

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(\mathcal{F}) &= \#((G \setminus F) \cap [1, a_n]) - \#(S \cap [1, a_n]) + \#((F \setminus S) \cap [a_n + 1, \gamma]) \\ &= \sum_{i=1}^l (\#(G_i \setminus F) - \#S_i) + (l\alpha + l - a_n) + \sum_{i=l+1}^j \#(F \cap G_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-1} (\alpha - i) \\ &= ((\alpha - k - 1) - 2) + \sum_{i=2}^l (\#(G_i \setminus F) - \#S_i) + (l\alpha + l - a_n) \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^j \#(F \cap G_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-1} (\alpha - i) \\ &\geq (\alpha - 3 - k) + \sum_{i=2}^l ((j - i + e) - (i + 1)) + (l\alpha + l - a_n) \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^j \#(F \cap G_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-k-1} (\alpha - i) + \sum_{i=\alpha-k}^{\alpha-1} (\alpha - i) \\ &= (\alpha - 3 - k) + \sum_{i=2}^l (j + e - 1 - 2i) + (l\alpha + l - a_n) \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^j \#(F \cap G_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-k-1} (\alpha - i) + \sum_{i=\alpha-k}^{\alpha-1} (\alpha - i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha - 3 - k) + ((l - 1)(j + e - 1) - (l - 1)(l + 2)) + (l\alpha + l - a_n) \\
&\quad + \sum_{i=l+1}^j \#(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-k-1} (\alpha - i) + \sum_{i=\alpha-k}^{\alpha-1} (\alpha - i) \\
&= (\alpha - 3) + \left((l - 1)((j + e - 1) - (l + 2)) \right) + (l\alpha + l - a_n) \\
&\quad + \sum_{i=l+1}^j \#(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-k-1} (\alpha - i) + \left(\left(\sum_{i=\alpha-k}^{\alpha-1} (\alpha - i) \right) - k \right) \\
&\geq \alpha - 3.
\end{aligned}$$

De fato, os termos do segundo ao sexto na penúltima linha acima são todos não-negativos. Para o segundo termo, note que, por (3.2.2), $h^1(\mathcal{F}) = \#(\mathbf{G}') e h^1(\mathcal{F}) \geq 2$ já que \mathcal{F} contribui para o índice de Clifford; isso implica que $j \geq l + 1$ e, se $j = l + 1$, então $e \geq 2$, de modo que a afirmação segue. Os demais termos são claramente não-negativos.

Agora, suponha que a igualdade seja atingida. Assim, $\sum_{i=l+1}^j \#(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_i) = 0$, então $k = 0$. Além disso, $\sum_{i=j+1}^{\alpha-1} (\alpha - i)$ não pode aparecer. Portanto, $j = \alpha - 1$, de modo que \mathcal{F} é inversível. Ademais, $a_n = l\alpha + l$. Finalmente, ou $l = 1$ ou $((j + e - 1) - (l + 2)) = 0$, isto é, $l = \alpha + e - 4 = \alpha - 3$.

Assim, dentre tais feixes, o menor índice de Clifford é $\alpha - 3$ computado por $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_C\langle 1, t^{\alpha+1} \rangle$ e $\mathcal{F}_2 = \mathcal{O}_C\langle 1, t^{(\alpha-3)(\alpha+1)} \rangle$. Mas, note que $h^0(\mathcal{F}_1) = 3$ e $h^0(\mathcal{F}_2) = ((\alpha - 1)(\alpha - 4)/2) + (\alpha - 1) \geq 3$, então, por definição, a dimensão de Clifford é ≤ 2 .

Agora, suponha que $a_n \in \mathbf{G}_l$ para algum l e tome k, j como acima. Então, (3.14) implica que

$$\begin{aligned}
\text{Cliff}(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^{l-1} (\#\mathbf{G}_i \setminus \mathbf{F}) - \#\mathbf{S}_i + \#((\mathbf{G}_l \setminus \mathbf{F}) \cap [(l - 1)\alpha + l, a_n]) \\
&\quad + \#((\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_l) \cap [a_n + 1, (l - 1)\alpha + \alpha - 1]) + \sum_{i=l+1}^j \#(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_i) + \sum_{i=j+1}^{\alpha-1} (\alpha - i) \\
&\geq (\alpha - 2) + \left((l - 2)((j + e - 1) - (l + 1)) \right) + \#((\mathbf{G}_l \setminus \mathbf{F}) \cap [(l - 1)\alpha + l, a_n]) \\
&\quad + \#((\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_l) \cap [a_n + 1, (l - 1)\alpha + \alpha - 1]) + \sum_{i=l+1}^j \#(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}_i) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{\alpha-k-1} (\alpha - i) + \left(\left(\sum_{i=\alpha-k}^{\alpha-1} (\alpha - i) \right) - k \right)
\end{aligned}$$

$$\geq \alpha - 2,$$

onde na penúltima expressão, os termos do segundo ao quarto se anulam se $l = 1$, enquanto o quinto termo se anula se $j = l$. Para explicarmos a última desigualdade, mais uma vez afirmamos que do segundo ao sétimo termo na penúltima linha são não-negativos. Para o segundo termo, note que $j \geq l + 1$. Os termos restantes são claramente não-negativos.

Agora, suponha que a igualdade seja válida. Se $l = 1$, então $\sum_{i=l+1}^j \#(F \cap G_i) = 0$, o que implica que $k = 0$. Logo, a_n não pode estar em G_1 , uma contradição. Caso contrário, o terceiro e o quarto termos se anulam, o que significa que a_n também não pode estar em G_l , novamente uma contradição. Conclui-se que a última desigualdade é estrita e, o resultado está provado. □

Exemplo 4.1.2. Seja C a curva monomial unicuspidal associada ao semigrupo gerado por $\langle 4, 7, 10, 13 \rangle$. É fácil verificar que $\text{Cliff}(C) = 1$, $\text{Cld}(C) = 2$ e que tais invariantes são computados pelo feixe $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^4 \rangle$. No entanto, note que tal curva não é plana e que tal feixe não é localmente livre.

4.2 Curvas monomiais de dimensão de Clifford 3

Esta seção é dedicada à verificação da existência de curvas monomiais que satisfazem as condições da Conjectura clássica estabelecida e parcialmente provada em [18]. Antes de tudo, enunciaremos tal resultado:

Teorema 4.2.1. ([18], p. 175) *Seja C uma curva de dimensão de Clifford $r \geq 3$. uma curva suave não degenerada linearmente normal de gênero $g = 4r - 2$ e grau $g - 1$ em \mathbb{P}^r . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) C possui gênero $g = 4r - 2$, Índice de Clifford $2r - 3$ e, portanto, grau $g - 1$;
- (ii) C possui um único fibrado de linhas \mathcal{F} que computa o índice de Clifford;
- (iii) \mathcal{F}^2 é o fibrado canônico de C e \mathcal{F} induz um mergulho de C em \mathbb{P}^r como uma curva aritmeticamente Cohen-Macaulay;
- (iv) $\text{gon}(C) = 2r$ e existe uma família de pencils de dimensão 1 e de grau $2r$, todos da forma $|\mathcal{F}(-D)|$ onde D é o divisor de $2r - 3$ pontos de C .

Agora, mostraremos a existência de uma curva monomial de dimensão de Clifford 3.

Exemplo 4.2.2. Considere a curva $C = (1 : t^6 : t^8 : t^9)$. Iremos mostrar que $\text{Clid}(C) = 3$. O semigrupo numérico associado a C é dado por $\langle 6, 8, 9 \rangle$. É fácil ver que seu gênero é 10. Usando 3.2.4, concluímos que $\text{gon}(C) = 6$ e que pode ser computada (não de forma única) pelo feixe $\mathcal{O}_C\langle 1, t^6 \rangle$. Agora, mostraremos que seu índice de Clifford pode ser computado por um feixe localmente livre. Considerando 3.2.2, podemos supor que o índice de Clifford é computado por um feixe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_n} \rangle$, com $1 < a_1 < \dots < a_n$. Claramente, $a_n \leq 12$.

Se $h^0(\mathcal{F}) = 2$, então $\text{Cliff}\mathcal{F} = 4$ no melhor cenário. Por outro lado, para $\mathcal{G} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^6, t^8, t^9 \rangle$, temos que $\text{Cliff}(\mathcal{G}) = 9 - 2(3) = 3$. Assim, para determinar $\text{Cliff}(C)$ e $\text{Clid}(C)$, a partir de agora consideraremos apenas feixes \mathcal{F} tais que $h^0(\mathcal{F}) \geq 3$. Considerando apenas os feixes cujas seções globais são potências t^s , com $s \in S$, o mínimo para o índice de Clifford é atingido pelo mesmo feixe. Então, basta considerar feixes monomiais que tenham pelo menos uma seção global t^ℓ tal que $\ell \in G(C)$. É imediato que $a_1 \leq 6$.

Se $t \in \mathcal{F}$, temos que $\{1, 7, 10, 13, 19\} \subseteq v_{\bar{p}}(\mathcal{F})$, o que força $a_n \leq 4$, pois $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$ deve ser satisfeito. Se $a_n = 4$, então t^2 ou t^3 não podem pertencer a \mathcal{F} . Assim, o único caso possível é $\mathcal{O}_C\langle 1, t, t^4 \rangle$ e o índice de Clifford, nesse caso, é 6. Por outro lado, os feixes $\mathcal{O}_C\langle 1, t, t^2 \rangle$, $\mathcal{O}_C\langle 1, t, t^3 \rangle$ e $\mathcal{O}_C\langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ contribuem para o índice de Clifford com valores 5, 6 e 5, respectivamente.

Agora, suponha que $a_1 = 2$. Nesse caso, $\{2, 10, 11, 19\} \subseteq v_{\bar{p}}(\mathcal{F})$, o que implica que $a_n \leq 6$. Além disso, t^4 ou t^5 não podem ser seções globais de \mathcal{F} , pois a condição $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$ deve ser satisfeita. Neste caso, os feixes $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2, t^6 \rangle$ e $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2, t^3, t^6 \rangle$ contribuem para o índice de Clifford e os valores são 6 e 5, respectivamente. Note que $a_n \neq 5$. Caso contrário, isso implicaria que $13 \in v_{\bar{p}}(\mathcal{F})$, o que faria com que $h^1(\mathcal{F}) = 1$. Por outro lado, os feixes $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2, t^4 \rangle$ e $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2, t^3, t^4 \rangle$ contribuem para o índice de Clifford com valores 6 e 5, respectivamente. Para $a_n = 3$, o feixe $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2, t^3 \rangle$ contribui para o índice de Clifford com valor 4.

Agora suponha que $a_1 = 3$. Nesse caso, $a_n \leq 9$. Para a igualdade, apenas o feixe $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^6, t^8, t^9 \rangle$ contribui para o índice de Clifford com valor 4. Pela definição do índice de Clifford, é fácil ver que podemos ignorar o caso $a_n = 8$. Os casos restantes são $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^6 \rangle$, $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^5 \rangle$, $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^5, t^6 \rangle$, $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3, t^4 \rangle$, cujos índices de Clifford são, respectivamente, 5, 6, 5 e 6.

O único caso possível ainda não analisado para $a_1 = 4$ é $\mathcal{O}_C\langle 1, t^4, t^6 \rangle$, cujo índice

de Clifford é 6. Para $a_1 = 5$ temos o feixe $\mathcal{O}_C\langle 1, t^5, t^6 \rangle$, cujo índice de Clifford é 6.

Para o caso $a_1 = 6$, temos os seguintes feixes que computam o índice de Clifford, lembrando que não precisamos analisar o caso em que $a_n = t^8$: $\langle 1, t^6, t^7 \rangle$, $\langle 1, t^6, t^7, t^8, t^9 \rangle$ e $\langle 1, t^6, t^8, t^9, t^{10} \rangle$, cujos índices de Clifford são, respectivamente, 6, 4 e 4.

Acabamos de analisar todos os possíveis feixes que podem computar o índice de Clifford dessa curva. Assim, podemos concluir que $\text{Cliff}(C) = 3$.

Observação 4.2.3. No caso do exemplo anterior, verificamos a existência de uma curva de dimensão de Clifford 3. Note que tal invariante é computado por um feixe localmente livre. Entretanto, ao analisarmos o número finito de (semigrupos associados à) curvas que poderiam satisfazer tal Conjectura para $r = 4$, vemos que isto não ocorre, uma vez que os índices de Clifford de tais curvas serão computados pelo mesmos feixes que computam suas gonalgidades, o que implica que $\text{Cld}(C) = 1$. Isso nos leva a crer que possivelmente ela é válida em um contexto maior, desde que apenas feixes localmente livres sejam considerados. Assim, a busca por outras curvas monomiais unicuspidais com dimensão de Clifford maior ou igual que 3 permanece um problema interessante.

Capítulo 5

Cohomologia de Koszul e Conjectura de Green

5.1 Cohomologia de Koszul

Nesta seção, estudamos a cohomologia de Koszul de um feixe que está intimamente relacionada aos conceitos introduzidos na seção anterior por meio da Conjectura de Green, que abordaremos posteriormente.

Começamos seguindo [24, p. 126]. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre k . Seja também $S(V)$ a álgebra simétrica e, $B = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} B_q$ um $S(V)$ -módulo graduado. Considere o complexo de Koszul

$$\dots \rightarrow \bigwedge^{p+1} V \otimes B_{q-1} \xrightarrow{d_{p,q}} \bigwedge^p V \otimes B_q \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \bigwedge^{p-1} V \otimes B_{q+1} \rightarrow \dots \quad (5.1)$$

Os grupos de cohomologia de Koszul são definidos por

$$K_{p,q}(B,V) = \frac{\ker(d_{p,q})}{\operatorname{im}(d_{p+1,q-1})}. \quad (5.2)$$

Para uma resolução minimal livre

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{q \geq q_1} M_{1,q} \otimes S(V)(-q) \rightarrow \bigoplus_{q \geq q_0} M_{0,q} \otimes S(V)(-q) \rightarrow B \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

temos o *Teorema das Syzygies* [24, Thm. (1.b.4)]

$$K_{p,q}(B,V) \simeq M_{p,p+q}(B,V). \quad (5.4)$$

Os inteiros $\beta_{i,j} := \dim M_{i,j}$ são chamados de *números de Betti* da resolução [15, p. 8].

No nosso caso, tomaremos $V = H^0(\omega)$ e $B = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\omega^n)$ e, definimos

$$K_{p,q}(C,\omega) := K_{p,q}(B,V). \quad (5.5)$$

Em outras palavras, considerando o complexo

$$\left(\bigwedge^{p+1} H^0(\omega) \right) \otimes H^0(\omega^{q-1}) \xrightarrow{\phi_{p,q}^1} \left(\bigwedge^p H^0(\omega) \right) \otimes H^0(\omega^q) \xrightarrow{\phi_{p,q}^2} \left(\bigwedge^{p-1} H^0(\omega) \right) \otimes H^0(\omega^{q+1}) \quad (5.6)$$

temos então

$$K_{p,q}(C,\omega) := \ker(\phi_{p,q}^2) / \text{im}(\phi_{p,q}^1).$$

Se C é uma curva Gorenstein não-hiperelítica, então a igualdade acima possui um importante conteúdo geométrico. Definindo $\mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(\omega))$ e notando que $\omega^n = \mathcal{O}_C(n)$, então (5.3) fornece a resolução de C vista como uma curva canônica. Além disso, mesmo que C não seja Gorenstein, essa abordagem extrínseca pode ser preservada em alguns contextos. De fato, se C é nearly Gorenstein, então a demonstração de [31, Thm. 2.7] e [31, Rem. 2.8] resulta em $C' = \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\omega^n)$. Assim, (5.3) fornece a resolução de C' . Para uma curva arbitrária não-Gorenstein, (5.6) ainda faz sentido do ponto de vista algébrico e foi estudada em [11, 23]. Por exemplo, foi demonstrado em [23, Thm. 1.10] que se C é não-hiperelítica, então $K_{0,2}(C,\omega) = 0$, ou seja, o Teorema de Max Noether vale para qualquer curva integral. Isso completou [11, Thm. 1], onde o mesmo resultado foi provado para curvas cujos pontos não-Gorenstein possuem, no máximo, dois ramos.

Em [24, Conj. (5.1)], foi enunciada a *Conjectura de Noether-Enriques-Petri*, atualmente conhecida como *Conjectura de Green*: se C é suave, então

$$K_{p,1}(C,\omega) \neq 0 \iff C \text{ tem um } g_d^r \text{ com } d \leq g-1, r \geq 1, d-2r \leq g-2-p. \quad (5.7)$$

Usando a dualidade [24, Thm. (4.c.1)], podemos escrever (5.7) como

$$K_{p,2}(C,\omega) = 0 \iff C \text{ não tem } g_d^r \text{ com } d \leq g-1, r \geq 1, d-2r \leq p$$

o que pode ser reformulado como

$$K_{p,2}(C,\omega) = 0 \iff \text{Cliff}(C) > p \quad (5.8)$$

como é provavelmente a forma mais conhecida da Conjectura e, extensivamente explorada por Aprodu e Farkas em [3] e provado para curvas genéricas regulares por C. Voisin em [46,47]. A Conjectura recupera dois resultados celebrados e clássicos do estudo inicial de curvas algébricas, sendo eles: o Teorema de Max Noether, que foi mencionado acima, é equivalente a (5.8) para $p = 0$; enquanto o Teorema de Enriques-Babbage, que iremos visitar a seguir, que é equivalente a (5.8) para $p = 1$.

5.2 Teorema de Enriques-Babbage

Nesta seção, buscamos estender um resultado bem conhecido que iremos descrever a seguir. Ele foi obtido após trabalhos sucessivos de M. Noether [36], Enriques [19] (veja também [20, V.III, pp.97-108]), Babbage [6], Petri [38] e, posteriormente recebeu um tratamento moderno por Saint-Donat [42, Thm. p. 157; (4.11), p. 174] e pode ser enunciado da seguinte forma: seja C uma curva suave canônica, então ou C é interseção de quádricas, ou C é uma quártica plana, ou C é trigonal e está contida em um scroll racional normal de dimensão 2.

Tal resultado corresponde à Conjectura de Green ao nível 1 devido ao seguinte: por um lado, $K_{1,2}(C,\omega) = 0$ se, e somente se, C é interseção de quádricas. Por outro lado, $\text{Cliff}(C) > 1$ a menos que C não seja trigonal, nem isomorfa a uma quártica plana. O resultado foi estendido para curvas Gorenstein com semigrupo de Weierstrass simétrico por Stöhr [45, Thm. 2.6]. Aqui, apresentamos um estudo deste problema quando C é uma curva nearly Gorenstein, isto é, uma curva com um único ponto não-Gorenstein, cujo anel local é quase-Gorenstein, ou, equivalentemente, uma curva cujo modelo cônico C' é projetivamente normal (veja (2.3.2), (2.3.4)). Esta propriedade nos permite investigar sob um ponto de vista extrínseco um problema que, no caso não Gorenstein, é essencialmente intrínseco.

Lema 5.2.1. [11, Thm. 3, p. 115] *Se C é nearly Gorenstein, então $\deg(C') = 2g' + \eta$.*

Demonstração. Temos o seguinte

$$\begin{aligned}\deg(C') &= 2g - 2 - \eta = 2(g' + \mu + \eta) - 2 - \eta \\ &= 2(g' + 1 + \eta) - 2 - \eta = 2g' + \eta\end{aligned}$$

o que implica na afirmação. \square

Proposição 5.2.2. *Seja C uma curva nearly Gorenstein. Então:*

- (i) $K_{1,2}(C, \omega) = 0$ se, e somente se, C' é interseção de quádricas;
- (ii) C' é interseção de quádricas e cúbicas;
- (iii) se C não é Kunz, então C' é interseção de quádricas.

Demonstração. **Para provarmos (i)**, tome a identificação $\mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(\omega))$. Uma vez que C é nearly Gorenstein, então a prova de [31, Thm. 2.7] e [31, Rem. 2.8] implica que $H^0(\omega^n) = H^0(\mathcal{O}_{C'}(n))$ e também implica que $C' = \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\omega^n)$. Então, primeiramente, $K_{p,q}(C, \omega) = K_{p,q}(C', \mathcal{O}_{C'}(1))$ e, também, (5.3) nos dá uma resolução de C' . Portanto, $K_{1,2}(C, \omega) = 0$ se, e somente se, $K_{1,2}(C', \mathcal{O}_{C'}(1)) = 0$. Contudo, por definição, $K_{1,2}(C', \mathcal{O}_{C'}(1)) = K_{1,2}(B, V)$, onde $B = H^0(\mathcal{O}_{C'}(1))$ e $V = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_{C'}(n))$. Agora, $K_{1,2}(B, V) = M_{1,3}(B, V)$, por (5.4). Mas $M_{1,3}(B, V) = 0$ implica que não são necessárias cúbicas para cortar C' . Então, se provarmos (ii), vale (i) como consequência.

Para provarmos (ii), seja \mathcal{I} o feixe ideal de C' em \mathbb{P}^{g-1} . Mostraremos que a regularidade de Castelnuovo-Mumford [35, Prop. p. 99] de \mathcal{I} é no máximo 3, isto é, $H^q(\mathcal{I}(3-q)) = 0$ para $q \geq 1$. Seguimos o argumento presente na prova de [27, Thm. 6.5]. Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}} \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Para $q = 1$, tome a seguinte sequência exata longa em cohomologia induzida por (5.9),

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1)) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathcal{O}_{C'}(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(1)) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1)).$$

Uma vez que C é nearly Gorenstein, C' é projetivamente normal (2.3.4)(i). Portanto, α é um morfismo sobrejetivo, o que implica que β é injetivo. Mas $g \geq 3$, assim $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1)) = 0$. Portanto, $H^1(\mathcal{I}(1)) = 0$. Para $q \geq 2$, considere a sequência exata

longa em cohomologia induzida por (5.9),

$$H^{q-1}(\mathcal{O}_{C'}(3-q)) \rightarrow H^q(\mathcal{I}(3-q)) \rightarrow H^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(3-q)).$$

Para $q = 2$, temos que $H^1(\mathcal{O}_{C'}(1)) = 0$, pois $\deg(\mathcal{O}_{C'}(1)) = 2g' + \eta > 2g' - 2$, onde a última igualdade vale por (5.2.1). Para $q \geq 3$, temos que $H^{q-1}(\mathcal{O}_{C'}(3-q)) = 0$, uma vez que C' é uma curva. Por outro lado, se $q \neq g$, então facilmente é possível concluir que $H^{q-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(3-q)) = 0$. Caso contrário, $H^{q-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(3-q)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(-3)) = 0$. Portanto, $H^q(\mathcal{I}(3-q)) = 0$ para $q \geq 2$ também, o que prova (ii).

Para provarmos (iii), se C não é Kunz, então $\eta \geq 2$. Portanto, $\deg(C') \geq 2g' + 2$ por (5.2.1) e (iii) segue por [22, Cor. 1.14]. \square

5.3 Contas Dimensionais para o Ideal do Modelo Canônico

Para começar, fixamos um parâmetro que será útil para o restante. Para qualquer $P \in C$, definimos

$$\sigma_{n,P} := \begin{cases} \dim(\mathcal{W}_P^n / \mathcal{W}_P) & \text{se } P \text{ é não-Gorenstein,} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e seja $\sigma_n := \sum_{P \in C} \sigma_{n,P}$. Definimos também

$$I_n(C') := \{\text{hipersuperfícies de grau } n \text{ em } \mathbb{P}^{g-1} \text{ que contêm } C'\}.$$

Com isso em mente, provamos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1. *Se C é não-hiperelítica e $n \geq 2$, então*

$$\dim(I_n(C')) = \binom{g+n-1}{n} - n(2g-2) + (n-1)\eta - \sigma_n - 1 + g.$$

Demonstração. Observe que C' é definido da seguinte forma: o sistema linear $(\mathcal{O}_{\bar{C}}\omega, H^0(\omega))$ fornece um morfismo $\psi : \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(\omega))$ e $C' := \psi(\bar{C})$. Agora, considere os morfismos naturais

$$\varphi_n : \text{Sym}^n H^0(\omega) \longrightarrow H^0(\omega^n)$$

para $n \geq 1$. Como C é não-hiperelítica, então C' é birracionalmente equivalente a C .

Assim, a própria definição de C' implica que $I_n(C') = \ker(\varphi_n)$ para $n \geq 1$.

Agora, pela versão singular do Teorema de Noether, provada em [23], temos que φ_n é sobrejetivo para todo $n \geq 1$. Portanto, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \dim(I_n(C')) &= \dim(\text{Sym}^n H^0(\omega)) - h^0(\omega^n) \\ &= \dim(\text{Sym}^n H^0(\omega)) - (\deg(\omega^n) + 1 - g) \\ &= \dim(\text{Sym}^n H^0(\omega)) - (n(2g - 2 - \eta) + \eta + \sigma_n + 1 - g) \\ &= \binom{g + n - 1}{n} - n(2g - 2) + (n - 1)\eta - \sigma_n - 1 + g \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é consequência de Riemann-Roch e pelo fato de $h^1(\omega^n) = 0$ para $n \geq 2$, uma vez que $\deg(\omega^n) > 2g - 2 = \deg(\omega)$. Para a terceira igualdade, seja U o maior conjunto aberto onde ω é um fibrado, isto é, onde os pontos de C são Gorenstein. Então, note que $\deg_{C \setminus U}(\omega) = \eta$ e, portanto, $\deg_U(\omega) = 2g - 2 - \eta$. Assim, é imediato que $\deg_{C \setminus U}(\omega^n) = \eta + \sigma_n$, enquanto $\deg_U(\omega^n) = n(2g - 2 - \eta)$. \square

Capítulo 6

O Ideal do Modelo Canônico de Curvas Monomiais

6.1 Triplas Excepcionais

Definição 6.1.1. Seja $A \subset \mathbb{N}^*$. Dizemos que $(b_1, \dots, b_n) \subset A^n$ é *minimal* com respeito a A se for a menor partição na ordem lexicográfica de $b_1 + \dots + b_n$ por elementos de A . Agora, sejam S um semigrupo e G o seu conjunto de lacunas. Se $n \geq 3$, dizemos que uma n -upla ordenada de forma crescente $(b_1, \dots, b_n) \subset G^n$ é *excepcional* se, para todo $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, temos que (b_i, b_j) é minimal com respeito a G e $b_i \neq 1, \gamma$.

Lema 6.1.2. Seja $S = \{s_0 = 0 < s_1 = \alpha < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$ um semigrupo. Sejam também τ o maior inteiro tal que $s_\tau = \tau\alpha$ e m o maior inteiro tal que $S_m := [\gamma - m\alpha + 1, \gamma - 1 - (m - 1)\alpha] \subset S$. Além disso, considere r o menor inteiro tal que $\gamma - m\alpha - r$ é uma lacuna. Então, as triplas excepcionais são:

$$(i) (a_1, \alpha - 1, a_3) \text{ com } a_1 \geq 2, [\alpha + 1, \alpha + a_1 - 2] \subset S,$$

$$[a_3 + 1, a_3 + \alpha - 2] \subset S \text{ e } [a_3 + 1, a_3 + a_1 - 1] \subset S;$$

$$(ii) (2, k\alpha - 1, \gamma - (m + 1)\alpha + 1) \text{ com } m \geq 1, k \in [2, m + 1];$$

$$[\gamma - (m + 1)\alpha + 2, \gamma - (m + 1)\alpha + \alpha - 1] \subset S;$$

$$(iii) (a_1, a_2, a_3) \text{ com } a_1 < \alpha, a_2 > \tau\alpha, a_3 = \gamma - a_2 \in G,$$

$$a_2 \text{ é a menor lacuna tal que } \gamma - a_2 \in G \text{ e,}$$

$$[a_i + 1, a_i + a_1 - 1] \subset S, i = 2, 3;$$

(iv) $(k\alpha + r, \gamma/2, \gamma/2)$ com $m \geq 2, k \in [1, m-1]$,

S é pseudo-simétrico e $\gamma/2 = m\alpha + r$.

(v) $(\gamma/2, \gamma/2, \gamma/2)$ e S é pseudo-simétrico.

Demonstração. Seja $(b_1, b_2) \in G^2$ um par. Note que

$$(b_1, b_2) \text{ é minimal} \iff (b_1 - i \in G \iff b_2 + i \notin G, \forall 1 \leq i \leq b_1 - 1). \quad (6.1)$$

Além disso, assuma que (a_1, a_2, a_3) é excepcional.

caso 1: $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \alpha - 1$.

Uma vez que (a_1, a_2) é minimal, então (6.1) implica que $a_2 = \alpha - 1$ e $[\alpha, \alpha + a_1 - 2] \subset S$. Além disso, (a_1, a_3) e $(\alpha - 1, a_3)$ também são minimais. Então, segue que $[a_3 + 1, a_3 + a_1 - 1] \subset S$ e $[a_3 + 1, a_3 + \alpha - 2] \subset S$, respectivamente, por (6.1). Assim, vale (i).

caso 2: $2 \leq a_1 < \alpha$ e $\alpha < a_2 < \tau\alpha$.

Uma vez que (a_1, a_2) é minimal, (6.1) implica que $a_1 = 2$ e $a_2 = k\alpha - 1$ para algum $k \leq \tau$. Agora, note que, se um bloco B de $\alpha - 1$ inteiros está em S , então $B + n\alpha$ também está, para todo $n \geq 1$. Assim, como $(k\alpha - 1, a_3)$ é minimal, devemos ter $a_3 = \gamma - (m+1)\alpha + 1$. Além disso, necessariamente $k \leq m+1, k \in [2, m+1]$ e $[\gamma - (m+1)\alpha + 2, \gamma - (m+1)\alpha + \alpha - 1] \subset S$. Isso implica em (ii).

caso 3: $2 \leq a_1 < \alpha$ e $a_2 > \tau\alpha$.

Note que se (a_2, a_3) é minimal, não há outra possibilidade a não ser $m = \tau$ e $a_3 = \gamma - a_2$. Para todo $n \in \{1, \dots, a_3 - \tau\alpha\}$, temos que $a_3 + i \in S$ se, e somente se, $a_2 - i \in G$. Em particular, a_2 é a menor lacuna tal que $\gamma - a_2 \in G$. Note também que (a_1, a_2) e (a_1, a_3) também são minimais. Logo, $[a_i + 1, a_i + a_1 - 1] \subset S$ para $i = 2, 3$. Isso implica (iii).

caso 4: $\alpha < a_1 < \tau\alpha$

Suponha que $a_2 < \tau\alpha$. Como (a_1, a_2) é minimal, (6.1) implica em uma das seguintes opções: (a) $a_1 = k\alpha + 1$ e $a_2 = \tau\alpha - 2$ ou, alternativamente, (b) $a_2 = \tau\alpha - 1$. Suponha (a). Então, como (a_1, a_3) é minimal, obtemos $a_3 + 1 \in G$. Por outro lado, como (a_2, a_3) é minimal, obtemos $a_3 + 1 \in S$. Portanto, (a) é descartada. Agora, suponha (b). Nesse caso, como (a_2, a_3) é minimal, obtemos $a_3 = \gamma - (m+1)\alpha + 1$ e $[\gamma - (m+1)\alpha + 2, \gamma - m\alpha - 1] \subset S$. Além disso, como (a_1, a_3) é minimal, segue que $a_1 = k\alpha - 1$. Ademais, como (a_1, a_2) é minimal, não resta outra possibilidade a não ser $a_3 = a_2 = \gamma/2$ e, S é

pseudo-simétrico.

Caso contrário, assuma que $a_2 > \tau\alpha$. Uma vez que (a_2, a_3) é minimal, o caso 3 implica que $m = \tau$ e $a_3 = \gamma - a_2$. Além disso, para todo $n \in \{1, \dots, a_3 - \tau\alpha\}$ temos que $a_3 + i \in S$ se, e somente se, $a_2 - i \in G$. Agora, escreva $a_1 = k\alpha + r$, com $0 < r < \alpha$. Como (a_1, a_3) é minimal, então $a_3 = \gamma - m\alpha - r$. Como (a_1, a_2) é minimal, mais uma vez temos que não resta outra possibilidade a não ser $a_3 = a_2 = \gamma/2$ e S é pseudo-simétrico. Isso implica (iv).

caso 5: $a_1 > \tau\alpha$

Ao substituírmos (a_2, a_3) por (a_1, a_2) no caso 3, obtemos $m = \tau$, $a_2 = \gamma - a_1$ e, a_1 é a menor lacuna tal que $\gamma - a_1 \in G$. Mas, como $a_2 + a_3 \leq \gamma$, isso implica $a_1 = a_2 = a_3 = \gamma/2$ e, S é pseudo-simétrico. Isso implica em (v). □

6.2 O ideal do Modelo Canônico de Curvas Nearly Gorenstein

Agora, iremos caracterizar curvas monomiais unicuspidais por meio de seus semigrupos de valores.

Lema 6.2.1. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com semigrupo S . Seja K como em (2.6) e número de Frobenius γ . Então, C é nearly Gorenstein se, e somente se, $\langle K \rangle = K \cup \{\gamma\}$, onde $\langle K \rangle$ é o semigrupo gerado por K .*

Demonstração. Suponha que C é nearly Gorenstein. Observe que, por (2.3.2), isso é equivalente a dizer que $\mu = 1$. No nosso caso, isso corresponde à igualdade $\dim(\widehat{\mathcal{O}}_P/\omega_P) = 1$, ou seja, $\#(v_{\overline{P}}(\widehat{\mathcal{O}}_P) \setminus v_{\overline{P}}(\omega_P)) = 1$. Agora, $v_{\overline{P}}(\omega_P) = K$; por outro lado, pela própria definição, $\widehat{C} = \mathcal{B}\ell_{\omega}C$. Portanto, $\widehat{\mathcal{O}}_P$ é o menor subanel de $\overline{\mathcal{O}}_P$ que contém ω_P . Como C é monomial, $v_{\overline{P}}(\widehat{\mathcal{O}}_P) = \langle K \rangle$. Mas, $\gamma \in \langle K \rangle$. Logo, C é nearly Gorenstein se, e somente se, $\langle K \rangle = K \cup \{\gamma\}$. □

Teorema 6.2.2. *Seja C uma curva monomial unicuspidal nearly Gorenstein. Então:*

(i) *Se C não é Kunz, então o ideal de C' é dado por*

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}} \rangle$$

para $s \in \{2, \dots, \gamma\}$ e $i \in \{1, \dots, \nu_s\}$;

(ii) Se C é Kunz e não trigonal, cuja gonalidade é computada por um pencil livre de pontos de base, então o ideal de C' é dado por

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_\gamma \rangle,$$

onde (a, b) é a decomposição minimal de $3\gamma/2 - 1$ e (a', b') é a decomposição minimal de $\gamma/2$;

(iii) Se C é trigonal com gonalidade computada por um pencil livre de pontos de base, então o ideal de C' é dado por

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_\gamma, \\ X_2 X_{\gamma/2}^2 - X_1^2 X_\gamma, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_1 X_c X_d, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_{c'} X_{d'} X_\gamma \rangle,$$

com $1 \leq k \leq m - 1$, $0 < r < 3$, $\gamma = 2(3m + r)$ e, (c, d) é a decomposição minimal de $3k + r + \gamma - 1$ e (c', d') é a decomposição minimal de $3k + r$.

Demonstração. Tome $\Gamma_n = \{a_1 + \dots + a_n \mid a_i \in \gamma - G\}$ e suponha que C é não-Gorenstein. Afirmamos que, para $n \geq 2$

$$H^0(\omega^n) = V_n := \left\langle t^i \mid i \in \Gamma_n \cap [0, \gamma - 1] \right\rangle \cup \left\langle t^i \mid i \in [\gamma, n(\gamma - 1)] \cap \mathbb{N} \right\rangle. \quad (6.2)$$

A hipótese de que C é não-Gorenstein é usada pelo fato de que $t^\gamma \in H^0(\omega^n)$ para todo $n \geq 2$, já que existem ℓ_i e ℓ_j com $\ell_i + \ell_j = \gamma$. Nesse caso, $t^\gamma = t^{\gamma - \ell_i} \times t^{\gamma - \ell_j} \times 1^{n-2}$, o que veremos imediatamente que está em $H^0(\omega^n)$.

Para provarmos a afirmação, note que $t^i \in H^0(\omega^n)$ se, e somente se, $t^i \in \omega_R^n$ para todo $R \in C$. Agora, $\omega_Q^n = t^{-n(\gamma-1)}$, então $V_n \subset \omega_R^n$, uma vez que todos os elementos em V_n possuem ordem no máximo $n(\gamma - 1)$. Se $R \neq P, Q$, então $\omega_R^n = \mathcal{O}_R$. Logo, $V_n \subset \omega_R^n$ também vale. Além disso, $V_n \subset \omega_P^n$ é consequência da seguinte igualdade

$$\omega_P^n = H^0(\omega)^n + \mathcal{C}_P$$

que pode ser facilmente deduzida da prova de [27, Lem. 6.1]. Também, relembremos a notação dada por (2.3) para o primeiro somando do lado direito da igualdade. Logo, $V_n \subset H^0(\omega^n)$. Reciprocamente, por (5.3.1), $h^0(\omega^n) = n(2g - 2) - (n - 1)\eta +$

$\sigma_n + 1 - g$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \dim V_n &= \#\{\Gamma_n \cap [0, \gamma - 1]\} + \#([\gamma, n(\gamma - 1)] \cap \mathbb{N}) \\ &= (g + \sigma_n - 1) + ((n - 1)\gamma - n + 1) \\ &= (g + \sigma_n - 1) + ((n - 1)(2(g - \eta) + \eta - 1) - n + 1) \\ &= n(2g - 2) - (n - 1)\eta + \sigma_n + 1 - g \end{aligned}$$

como esperado. Então, $H^0(\omega^n) = V_n$. Agora, considere os morfismos $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^n)$. Em particular, também vale que

$$\{\gamma, \dots, 2(\gamma - 1)\} \subset \Gamma_2 \quad (6.3)$$

para $n \geq 3$. Além disso,

$$\{(n - 1)(\gamma - 1) + 1, \dots, n(\gamma - 1)\} = \{\gamma, \dots, 2\gamma - 1\} + (n - 2)(\gamma - 1) \subset \Gamma_n \quad (6.4)$$

porque claramente $\gamma - 1 \in \gamma - G$.

Pela inclusão (6.3), para todo $i \in \{\gamma, \dots, 2(\gamma - 1)\}$ temos que $i = (\gamma - \ell_j) + (\gamma - \ell_k)$ para alguns $1 \leq j, k \leq g$. Equivalentemente, para cada $2 \leq s \leq \gamma$ podemos escrever $s = a + b$, onde $a, b \in G$.

Agora consideramos todas as partições de s como uma soma de dois elementos de G , ou seja,

$$s = a_{s_i} + b_{s_i}, \quad \text{para } i = 0, \dots, \nu_s,$$

com $a_{s_i} \leq b_{s_i}$ e $a_{s_0} < a_{s_1} < \dots < a_{s_{\nu_s}}$. Defina $a_s := a_{s_0}$ e $b_s := b_{s_0}$. Note que (a_s, b_s) é minimal para todo $2 \leq s \leq \gamma$. Defina também

$$A_n := (\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}) \cap [0, \gamma - 1].$$

Agora, para cada $\ell \in G$, tome $x_\ell := t^{\gamma - \ell} \in k(C)$. Temos que (6.2), (6.3) e (6.4) implica que podemos escrever uma base de $H^0(\omega^n)$ como

$$\begin{cases} x_{\ell_j} x_\gamma^{n-1} & \text{para } 1 \leq j \leq g, \\ x_{i_1} \dots x_{i_k} x_\gamma^{n-k} & \text{para } 2 \leq k \leq n, k\gamma - \sum_{j=1}^k i_j \in A_k, \text{ com } (i_1, \dots, i_k) \text{ minimal,} \\ x_1^i x_{a_s} x_{b_s} x_\gamma^{n-2-i} & \text{para } 0 \leq i \leq n-2, 2 \leq s \leq \gamma \end{cases}$$

onde a primeira linha nos dá uma base para $H^0(\omega)$. A terceira linha corresponde

à segunda componente da união em (6.2) e a segunda linha são os componentes restantes da primeira componente da união em (6.2).

Seja $\Lambda_n \subset k[X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_g}]_n$ o espaço vetorial gerado por

$$\begin{cases} X_{\ell_j} X_{\gamma}^{n-1} & \text{para } 1 \leq j \leq g, \\ X_{i_1} \dots X_{i_k} X_{\gamma}^{n-k} & \text{para } 2 \leq k \leq n, k\gamma - \sum_{j=1}^k i_j \in A_k, \text{ com } (i_1, \dots, i_k) \text{ minimal,} \\ X_1^i X_{a_s} X_{b_s} X_{\gamma}^{n-2-i} & \text{para } 0 \leq i \leq n-2, 2 \leq s \leq \gamma. \end{cases} \quad (6.5)$$

Afirmamos que

$$k[X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_g}]_n = I_n \oplus \Lambda_n \quad (6.6)$$

onde $I_n := I_n(C')$. De fato, note que $\text{Sym}^n H^0(\omega) = k[X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_g}]_n$. Além disso, os morfismos $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^n)$, se restritos a Λ_n , fornecem por construção isomorfismos lineares $\Lambda_n \simeq H^0(\omega^n)$. Como os φ_n são sobrejetivos e $I_n(C') = \ker(\varphi_n)$, a afirmação segue.

Agora, assumiremos que C é nearly Gorenstein. Isso significa, no nosso caso, que $\dim(\widehat{\mathcal{O}}_P/\omega_P) = 1$. Mas temos que

$$\mathcal{O}_P \subset \omega_P \subset \omega_P^2 \subset \dots \subset \omega_P^n \subset \dots \subset \widehat{\mathcal{O}}_P \quad (6.7)$$

e, também, que $t^\gamma \in \widehat{\mathcal{O}}_P \setminus \omega_P$. Portanto, $\omega_P^n = \langle t^\gamma, \gamma - G \rangle$ para todo $n \geq 2$. Em particular, $A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 2$ e, a segunda linha em (6.5) não existe.

Para provarmos nosso resultado, por (5.2.2), é suficiente mostrar que I_3 está contido no ideal, que por simplicidade denotaremos por I , descrito em (i) e (ii).

Sejam $(i, j, k), (i', j', k') \in G^3$ duas decomposições de um mesmo número em Γ_3 . Para simplificar, usamos $(i, j, k) \sim (i', j', k')$ quando isso ocorre. Se as triplas possuem uma coordenada comum, digamos $k = k'$, então $X_i X_j X_k \equiv X_{i'} X_{j'} X_k \pmod{I}$. De fato, escreva $s = i + j$. Então,

$$\begin{aligned} X_i X_j X_k - X_{i'} X_{j'} X_k &= X_{a_s} X_{b_s} X_k - X_{i'} X_{j'} X_k - (X_{a_s} X_{b_s} X_k - X_i X_j X_k) \\ &= (X_{a_s} X_{b_s} - X_{i'} X_{j'}) X_k - (X_{a_s} X_{b_s} - X_i X_j) X_k \end{aligned}$$

que é um elemento de I .

Então, dados $F = X_i X_j X_k \in k[X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_g}]_3$, é suficiente mostrar que (i, j, k) é equivalente à ou $(1, a_s, b_s)$ ou (a_s, b_s, γ) para algum $s \in \{2, \dots, \gamma\}$, por (6.5) e (6.6). Se $i = 1$ (resp. $k = \gamma$), então $(i, j, k) \sim (1, a_s, b_s)$ onde $s = j + k$ (resp. $(i, j, k) \sim (a_s, b_s, \gamma)$)

onde $s = i + j$) e, terminamos. Caso contrário, suponha primeiramente que (i, j, k) não é excepcional no sentido de (6.1.1). Então, um dos pares (i, j) , (i, k) ou (j, k) não é minimal. Suponha, sem perda de generalidade, que é o último e escreva $j + k = s$. Então, $(i, j, k) \sim (i, a_s, b_s)$ para $s = j + k$. Se (i, a_s, b_s) não é excepcional, repita o procedimento. Após um número finito de passos obtemos que $(i, j, k) \sim (i', j', k')$, onde ou $i' = 1$, ou $k' = \gamma$, ou (i', j', k') é excepcional. Agora, as triplas excepcionais são descritas no Lema (6.1.2). Vamos abordar seus cinco casos.

Passo 1: $(a_1, \alpha - 1, a_3)$ como no caso (i).

Tome $a_3 = \gamma - s\alpha + p$ para algum $s \geq 1$ e $p \in \{0, 1\}$. Tome também $n_{\tau+1} = \tau\alpha + r$.

Se $\tau \geq 2$ ou $r \neq 1$, temos que $a_1 = 2$. Se $p = 1$, então

$$(2, \alpha - 1, a_3) = (2, \alpha - 1, \gamma - s\alpha + 1) \sim (3, \alpha - 1, \gamma - s\alpha) \sim (1, \alpha + 1, \gamma - s\alpha)$$

ou, no outro caso, se $p = 0$, então $s \leq \tau$. Se, além disso, $s \geq 2$, então

$$\begin{aligned} (2, \alpha - 1, a_3) &\sim (2, \alpha - 1 + a_3 - (\gamma - n_{\tau+1}), \gamma - n_{\tau+1}) \\ &= (2, \alpha - 1 + \gamma - s\alpha - \gamma + \tau\alpha + r, \gamma - n_{\tau+1}) \\ &= (2, (\tau + 1 - s)\alpha + r - 1, \gamma - n_{\tau+1}) \\ &\sim (1, (\tau + 1 - s)\alpha + r, \gamma - n_{\tau+1}) \end{aligned}$$

e vale o resultado, uma vez que $1 \leq \tau + 1 - s < \tau$ implica que a segunda componente é uma lacuna.

Se $r = \tau = 1$, então $a_3 = \gamma - b\alpha$ para $b = 1$ ou 2 . Se $b = 2$, então $[\alpha + 2, 2\alpha - 1] \subset G$. Logo, concluímos que $a_1 = 2$ ou 3 . Além disso, também vale $[\gamma - 2\alpha - 2, \gamma - 2\alpha] \subset G$. Portanto,

$$(a_1, \alpha - 1, \gamma - 2\alpha) \sim (4, \alpha - 1, \gamma - 2\alpha - (4 - a_1)) \sim (1, \alpha + 2, \gamma - 2\alpha - (4 - a_1)).$$

Se $a_3 = \gamma - \alpha$, seja e o maior inteiro tal que $[\alpha, \alpha + e] \subset S$. Então, trivialmente, $[\gamma - \alpha - e, \gamma - \alpha] \in G$ e, também $a_1 \leq e + 2$ pois $(a_1, \alpha - 1)$ é minimal. Suponha que $e < \alpha - 3$. Então, $e + 3 \in G$. Se $a_1 \geq 3$, então

$$\begin{aligned} (a_1, \alpha - 1, \gamma - \alpha) &\sim (e + 3, \alpha - 1, \gamma - \alpha - (e + 3 - a_1)) \\ &\sim (1, \alpha + e + 1, \gamma - \alpha - (e + 3 - a_1)). \end{aligned}$$

Então, basta analisarmos o caso $(a_1, \alpha - 1, \gamma - \alpha)$ onde ou $a_1 = 2$ ou, no outro

caso, $\tau = 1$ e $e \geq \alpha - 3$.

Assuma $a_1 = 2$. Como C é não-Gorenstein, então S não é simétrico. Assim, podemos escolher $(a, b) \in G^2$ tal que $a + b = \gamma$. Assuma também que (a, b) é minimal. Note que $a > \alpha$. De fato, a minimalidade de $(\alpha - 1, \gamma - \alpha)$ implica que $[\gamma - \alpha + 1, \gamma - 2] \subset S$. Portanto, se $a < \alpha$, então $a = 1$. Porém, como C é nearly Gorenstein, S é quase simétrico. Assim, $2 \in K$ e, se for o caso, $\gamma - 2 \in G$, uma contradição.

Agora, seja $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $b - c$ é a maior lacuna menor que b . Claramente, $c < \alpha$, caso contrário $[a, a + \alpha - 1] \subset G$, o que não pode ocorrer pois não há α inteiros consecutivos em G . Assim, primeiramente, suponha $c < \alpha - 1$. Se for o caso,

$$\begin{aligned} (2, \alpha - 1, \gamma - \alpha) &\sim (2, \alpha - 1 + (a - \alpha + c), \gamma - \alpha - (a - \alpha + c)) \\ &= (2, a + c - 1, b - c) \sim (1 + c, a, b - c) \sim (1, a, b). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Note que $a + c - 1 \in G$ pois $\gamma - (a + c - 1) = b - c + 1 \in S$. Além disso, $1 + c \in G$ pois $c < \alpha - 1$.

Agora, suponha que $c = \alpha - 1$. Então, claramente, $a = m\alpha + 1$ e $b = \gamma - m\alpha - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} (2, \alpha - 1, \gamma - \alpha) &\sim (2, \alpha - 1 + (m - 1)\alpha, \gamma - \alpha - (m - 1)\alpha) = (2, m\alpha - 1, \gamma - m\alpha) \\ &\sim (3, m\alpha - 1, \gamma - m\alpha - 1) \sim (1, m\alpha + 1, \gamma - m\alpha - 1). \end{aligned}$$

Se $e \geq \alpha - 3$ e $\tau = 1$, suponha primeiro que $\alpha \geq 5$. Então, ou $\gamma = 2\alpha - 1$ ou $\gamma = 2\alpha - 2$. Se $\gamma = 2\alpha - 1$, então $G \setminus ([1, \alpha - 1] \cup \{\gamma\}) \subset \{\gamma - 1\}$. Se $\gamma - 1 \in G$, então S não é quase simétrico e, se $\gamma - 1 \notin G$, então S é simétrico ambos excluídos por nossa hipótese de C ser nearly Gorenstein. Por outro lado, se $\gamma = 2\alpha - 2$, então C é Kunz para o qual o modelo canônico C' não é interseção de quádras, como veremos em seguida.

Passo 2: $(2, k\alpha - 1, \gamma - (m + 1)\alpha + 1)$ como no caso (ii).

Primeiramente, note que o caso $3 \in S$ é equivalente a dizer que C é trigonal, cuja gonalidade é computada por um pencil livre de pontos de base, por (6.3.1). Além disso, C é Kunz nesse caso pelo mesmo resultado. Então, iremos analisar tal possibilidade

ao fim desta demonstração. Assim, por enquanto, assumimos $3 \in G$. Então,

$$\begin{aligned} (2, k\alpha - 1, \gamma - (m + 1)\alpha + 1) &\sim (3, k\alpha - 2, \gamma - (m + 1)\alpha + 1) \\ &\sim (3, \alpha - 1, \gamma - (m + 1)\alpha + 1 + (k - 1)\alpha - 1) \\ &= (3, \alpha - 1, \gamma - (m + 2 - k)\alpha) \\ &\sim (1, \alpha + 1, \gamma - (m + 2 - k)\alpha). \end{aligned}$$

Passo 3: $(a_1, a_2, \gamma - a_2)$ com $a_1 < \alpha$, $a_2 > \tau\alpha$ como no caso (iii).

Se $a_1 = \alpha - 1$, então $a_2 = k\alpha - 1$ e $a_3 = \gamma - k\alpha + 1$ para $k \geq 2$, pois $a_2 > \tau\alpha$. Além disso, $[\gamma - s\alpha - \alpha + 1, \gamma - s\alpha - 1] \subset S$ para $s \leq k$, pois $(\alpha - 1, a_3)$ é minimal. Assim,

$$\begin{aligned} (\alpha - 1, k\alpha - 1, \gamma - k\alpha + 1) &\sim (\alpha + 1, k\alpha - 3, \gamma - k\alpha + 1) \\ &\sim (\alpha + 1, \alpha - 2, \gamma - \alpha) \sim (1, \alpha - 2, \gamma). \end{aligned}$$

Se $a_3 < \alpha - 1$, suponha $\tau \geq 2$, então

$$(a_1, a_2, \gamma - a_2) \sim (a_1 + 1, a_2 - 1, \gamma - a_2) \sim (a_1 + 1, \alpha - 1, \gamma - \alpha) \sim (1, a_1 + \alpha - 1, \gamma - \alpha).$$

Caso contrário, lembre-se da definição de e . Suponha $e \leq \alpha - 4$ e $a_1 \leq e + 1$. Então

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \gamma - a_2) &\sim (a_1 + 1, a_2 - 1, \gamma - a_2) \sim (a_1 + 1, \alpha - 1, \gamma - \alpha) \\ &\sim (e + 3, \alpha - 1, \gamma - \alpha - (e + 2 - a_1)) \\ &\sim (1, \alpha + e + 1, \gamma - \alpha - (e + 2 - a_1)). \end{aligned}$$

Agora, o caso $e \geq \alpha - 3$ já foi abordado. Além disso, se $a_1 \geq e + 2$, então

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \gamma - a_2) &\sim (a_1 + 1, a_2 - 1, \gamma - a_2) \sim (a_1 + 1, \alpha - 1, \gamma - \alpha) \\ &\sim (a_1 - (e + 1), \alpha + e + 1, \gamma - \alpha) \sim (a_1 - (e + 1), e + 1, \gamma). \end{aligned}$$

Agora, note que nos dois últimos casos de (6.1.2), C é Kunz. Como já foi provado, caso contrário, o ideal de C' é dado por

$$I(C') = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}} \rangle$$

para $s \in \{2, \dots, \gamma\}$ e $i \in \{1, \dots, \nu_s\}$.

Passo 4: $(k\alpha + r, \gamma/2, \gamma/2)$ como no caso (iv).

Mais uma vez, aqui iremos supor que $3 \in G$. Caso contrário, como foi dito anteriormente, iremos discutir no fim.

Suponha que $1 < r < \alpha - 1$. Então,

$$(k\alpha + r, \gamma/2, \gamma/2) \sim (k\alpha + r + 1, \gamma/2 - 1, \gamma/2) \sim (1, \gamma/2 - 1, \gamma/2 + k\alpha + r).$$

Suponha que $r = 1$. Então,

$$\begin{aligned} (k\alpha + 1, \gamma/2, \gamma/2) &\sim (k\alpha + 3, \gamma/2 - 2, \gamma/2) \sim (k\alpha + 3, \gamma/2 - \alpha - 3, \gamma/2 + \alpha + 1) \\ &\sim ((k - 1)\alpha + 3, \gamma/2 - \alpha - 3, \gamma). \end{aligned}$$

Suponha agora que $r = \alpha - 1$. Então,

$$\begin{aligned} (k\alpha + \alpha - 1, \gamma/2, \gamma/2) &= ((k + 1)\alpha - 1, (m + 1)\alpha - 1, (m + 1)\alpha - 1) \\ &\sim ((k + 1)\alpha + 1, (m + 1)\alpha - 3, (m + 1)\alpha - 1) \\ &\sim ((k + 1)\alpha + 1, m\alpha - 2, (m + 2)\alpha - 2) \\ &\sim (1, m\alpha - 2, (m + k + 3)\alpha - 2). \end{aligned}$$

Passo 5: $(\gamma/2, \gamma/2, \gamma/2)$ e S é pseudo-simétrico como no caso (v).

Para o restante, dizemos que uma tripla excepcional é *irredutível* se não é equivalente a $(1, a_s, b_s)$, ou (a_s, b_s, γ) , ou outra tripla excepcional. É fácil ver que $(\gamma/2, \gamma/2, \gamma/2)$ é irredutível. Portanto, se $3 \in G$, pelo o que foi dito acima (6.6) implica que

$$I = \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_\gamma \rangle,$$

onde (a, b) é a decomposição minimal de $3\gamma/2 - 1$ e (a', b') é a decomposição minimal de $\gamma/2$. Segue que C' é cortada por quádricas e cúbicas.

Agora abordamos o caso $3 \in S$. Note que, se for o caso, $(2, \gamma/2, \gamma/2)$ e $(3k + r, \gamma/2, \gamma/2)$ com $1 \leq k \leq m - 1$, $0 < r < 3$ e $\gamma = 2(3m + r)$ são irredutíveis. Assim, (6.6) nos dá

$$\begin{aligned} I(C') &= \langle X_{a_s} X_{b_s} - X_{a_{s_i}} X_{b_{s_i}}, X_{\gamma/2}^3 - X_1 X_a X_b, X_{\gamma/2}^3 - X_{a'} X_{b'} X_\gamma, \\ &\quad X_2 X_{\gamma/2}^2 - X_1^2 X_\gamma, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_1 X_c X_d, X_{3k+r} X_{\gamma/2}^2 - X_{c'} X_{d'} X_\gamma \rangle, \end{aligned}$$

onde (c, d) é a decomposição minimal de $3k + r + \gamma - 1$ e (c', d') é a decomposição minimal de $3k + r$. \square

Observação 6.2.3. Como foi mencionado na introdução, a prova acima foi fortemente inspirada por Stöhr, [45]. Há algumas diferenças que iremos descrever a seguir:

- (a) Aqui, consideramos o semigrupo da singularidade, ao invés do semigrupo de Weierstrass de um ponto simples; de fato, se C é monomial, então aquele pode ser recuperado deste, onde o ponto simples é o ponto no infinito;
- (b) Optamos por colocar a teoria dos *monômios excepcionais* de uma forma puramente combinatorial e reduzir ao caso das triplas, que é o que realmente conta para a prova;
- (c) A Equação (6.6) é crucial para todo o argumento. Em [45], ele é consequência da projetividade normal da curva canônica, enquanto aqui é consequência da versão intrínseca do Teorema de Max Noether, provado em [23] e algumas contas dimensionais desenvolvidas em (5.3.1); dessa forma, C' não precisa ser projetivamente normal para que a prova seja válida; por exemplo, notamos que C é nearly Gorenstein apenas após a prova de (6.6); a razão por trás disso é que é mais fácil lidar com triplas excepcionais nesse caso, mas almejamos trabalhar em direção ao problema geral em um trabalho posterior;
- (d) [45] vai mais além na descrição de Syzygies, como pode ser visto no aparecimento dos coeficientes c_{sir} [45, pg. 193] cujas relações posteriormente descrevem o moduli de curvas Gorenstein com um ponto de Weierstrass fixado; no entanto, tais coeficientes não aparecem aqui, uma vez que assumimos que as curvas são monomiais; caso eles tivessem sido considerados, então estaríamos descrevendo o moduli de curvas racionais (não necessariamente monomiais) com um semigrupo preescrito em uma dada cúspide, o que também parece ser um problema interessante para ser investigado em um trabalho futuro;
- (e) Nossos semigrupos *pseudo-simétricos*, (baseados em Barucci-Fröberg [9, pg. 420, top], que caracterizam curvas Kunz correspondem aos semigrupos *quasi-symmetric* de Oliveira e Stöhr, abordados por eles em [37]; mas, nesse caso, a correspondência é falsa; de fato, em [37] as curvas são Gorenstein, porém com um semigrupo de Weierstrass não-simétrico, enquanto aqui as curvas são sempre não-Gorenstein.

6.3 Teorema de Enriques-Babbage para Curvas Monomiais

Agora, iremos caracterizar as curvas trigonais monomiais unicuspidais e verificaremos quando elas são nearly Gorenstein.

Teorema 6.3.1. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com semigrupo S . Então, C é trigonal se, e somente se, ou*

- (i) $S = \{0, \alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + k, \alpha + k + \ell, \rightarrow\}$ para $\alpha \geq 3, k \geq 0, e \ell \geq 2$. Nesse caso, C é nearly Gorenstein se, e somente se, $C' \not\cong \mathbb{P}^1$;
- (ii) $S = \{0, \alpha, \alpha + 2, \dots, \alpha + 2k, \rightarrow\}$ para $\alpha \geq 3, e k \geq 1$. Nesse caso, C é nearly Gorenstein;
- (iii) $\alpha = 3 e \alpha \neq \beta$. Nesse caso, C é nearly Gorenstein se, e somente se, C é Kunz.

Demonstração. Por (3.2.4), a gonalidade de C pode ser computada por um feixe $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^r \rangle$ com $r > 0$. Para todo $R \in C$, temos que

$$\mathcal{F}_R = \mathcal{O}_R + t^r \mathcal{O}_R.$$

Se $R \in C \setminus \{P, Q\}$, então $\mathcal{F}_R = \mathcal{O}_R$ e, portanto, $\deg_R(\mathcal{F}) = 0$. Por outro lado, $\mathcal{F}_Q = t^r \mathcal{O}_Q$. Logo, $\deg_Q(\mathcal{F}) = r$. Além disso, $\deg_P(\mathcal{F}) = \#D$, onde $D := v_{\bar{P}}(\mathcal{F}_P) \setminus S$. Então,

$$\deg(\mathcal{F}) = r + \#D. \quad (6.9)$$

Agora, uma vez que C é monomial, $v_{\bar{P}}(\mathcal{F}_P) = S + r$, então $D = (S + r) \setminus S$.

Note que se $\alpha = 1$, então $\text{gon}(C) = 1$; se $\alpha = 2$, então $\text{gon}(C) = 2$ computada por $\mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle$ e, se $\alpha = \beta$, então $\text{gon}(C) = 2$ computada por $\mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$. Assim, podemos assumir ainda que $\alpha \geq 3; \alpha \neq \beta$ e, por (6.9), $r \leq 3$ se \mathcal{F} computa a gonalidade.

caso (i): $r = 1$.

Suponha que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$ computa a trigonalidade. Note que

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F}) = 3 &\iff \#D = 2 \\ &\iff S = \{0, \alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + k, \alpha + k + \ell, \rightarrow\} \end{aligned}$$

para $k \geq 0$ e $\ell \geq 2$. Assim, S está de acordo com (i) na afirmação do teorema. Por outro lado, vamos mostrar que uma curva com tal S não pode ter gonalidade menor.

Primeiro, note que $\deg(\mathcal{O}_C\langle 1, t^r \rangle) \geq 3$ para $r \geq 3$. Assim, só precisamos testar $r = 2$. Mas $\deg(\mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle) = 2$ se, e somente se, $S = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$, o que é excluído, pois $\alpha \geq 3$.

Agora, note que $K = \{0, \dots, \gamma - (\alpha + k + 1)\} \cup \{\gamma - \alpha + 1, \dots, \gamma - 1\} \cup \{\gamma + 1, \rightarrow\}$. Então, por (6.2.1), é facilmente visto que C é nearly Gorenstein se, e somente se, $\gamma - (\alpha + k + 1) = 0$. De fato, caso contrário $1 \in K$ e, portanto, $\gamma - (\alpha + k) \in \langle K \rangle$. Mas $\gamma - (\alpha + k) \notin K \cup \{\gamma\}$. Agora, $\gamma - (\alpha + k + 1) = 0$ se, e somente se, $\alpha + k = \gamma - 1$ se, e somente se, $\gamma - 1 \in S$ se, e somente se, $1 \notin K$ se, e somente se, $C' \not\cong \mathbb{P}^1$.

caso (ii): $r = 2$.

Suponha que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^2 \rangle$ computa a trigonalidade. Note que

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F}) = 3 &\iff \#D = 1 \\ &\iff S = \{0, \alpha, \alpha + 2, \dots, \alpha + 2k, \rightarrow\} \end{aligned}$$

para $k \geq 1$. Logo, S está de acordo com (ii). Para mostrar que C , com S de tal forma, é trigonal, devemos testar apenas o caso $r = 1$. Mas é fácil ver que é $\deg(\mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle) \geq 3$.

Agora, note que $K = \{0, 2, 4, 6, \dots, \gamma - \alpha - 1\} \cup \{\gamma - \alpha + 1, \dots, \gamma - 1\} \cup \{\gamma + 1, \rightarrow\}$. Então, claramente $\langle K \rangle = K \cup \{\gamma\}$ e, portanto, C é nearly Gorenstein por (6.2.1).

caso (iii): $r = 3$.

Suponha que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, t^3 \rangle$ computa a trigonalidade. Note que

$$\deg(\mathcal{F}) = 3 \iff \#D = 0 \iff \alpha = 3.$$

Assim, S coincide com (iii). Para obter a recíproca, basta notar que é fácil verificar que $\deg(\mathcal{O}_C\langle 1, t^r \rangle) \geq 3$ se $r \geq 1, 2$ para qualquer C com tal S .

Se C é nearly Gorenstein, não é Gorenstein, então existem $a \leq b \in G$ tais que $a + b = \gamma$. Diga que $\gamma \equiv i \pmod{3}$ e $a \equiv j \pmod{3}$. Claramente, $i, j \in \{1, 2\}$, já que γ e a não estão em S . Além disso, $i \neq j$, pois $\gamma - a \notin S$. Portanto, $2a \equiv \gamma \pmod{3}$ e, consequentemente, $\gamma - 2a \in S$, o que implica que $2a \notin K$. Por (6.2.1), temos $2a = \gamma$, ou seja, $a = b = \gamma/2$. Como a e b são arbitrários, conclui-se que C é Kunz. A recíproca é um fato geral. \square

Por fim, nossos resultados podem ser agrupados da seguinte forma:

Teorema 6.3.2. *Seja C uma curva monomial unicuspidal com gênero $g \geq 3$ cujo modelo*

canônico C' é linearmente normal. Então uma e, apenas uma, das seguintes afirmações é válida

- (i) C' é cortada por quádricas; ou
- (ii) C é trigonal e Gorenstein; ou
- (iii) C é isomorfa a uma quártica plana; ou
- (iv) C é Kunz.

Além disso, suponha que C é trigonal e não-Gorenstein. Se o g_3^1 que computa a gonalidade é livre de pontos de base, então C satisfaz o caso (iv). Caso contrário, pode ser incluída ou no caso (i) ou (iv).

Demonstração. Primeiramente, assuma que C é hiperelítica. Então, C' é uma curva racional normal de grau $g - 1$ em \mathbb{P}^{g-1} , por [27, Prp. 2.6]. Então, C' é interseção de quádricas e vale (i). Mas se C é hiperelítica, então $\text{gon}(C) = 2$, então $\text{gon}(C) \leq 3, 4$. Logo, não valem (ii) e (iii). Além disso, C é Gorenstein, então não vale (iv).

Assuma que C é não hiperelítica e Gorenstein. Suponha também que o semi-grupo associado ao ponto singular é diferente de $\langle 2, 2g + 1 \rangle$, $\langle 3, g + 1 \rangle$, $\{0, g, g + 1, \dots, 2g - 2, 2g, \rightarrow\}$ e $\langle 4, 5 \rangle$. Então, [12, Lem. 2.2] implica que o mergulho canônico de C , que é isomorfo a C' é interseção de quádricas, então vale (i). Ademais, note que, por (6.3.1), C é trigonal e Gorenstein se, e somente se, $S = \{0, g, g + 1, \dots, 2g - 2, 2g, \rightarrow\}$ ou $S = \langle 3, g + 1 \rangle$. De fato, estes casos correspondem respectivamente ao primeiro e ao terceiro item de (6.3.1) se nos restringirmos ao caso em que S é simétrico). Uma vez que o segundo item de (6.3.1) contém apenas semigrupos não-simétricos. Então, não vale (ii). Como $S \neq \langle 4, 5 \rangle$, logo (iii) não vale também. Uma vez que C é Gorenstein, o caso (iv) não é considerado.

Se $\langle 2, 2g + 1 \rangle$, então C é hiperelítica e repetimos o primeiro parágrafo desta demonstração.

Se $S = \{0, g, g + 1, \dots, 2g - 2, 2g, \rightarrow\}$ ou $S = \langle 3, g + 1 \rangle$, como dito acima, então C é Gorenstein e trigonal. Então, vale (ii), mas (iii) e (iv) claramente não. Então, basta provarmos que C' não é interseção de quádricas. Para isso, recorreremos à [40, Prop. 3.3]: se C é uma curva trigonal não-Gorenstein, então a interseção de todas as quádricas que a contém é um scroll racional normal de dimensão 2, então não vale (i).

Se $S = \langle 4, 5 \rangle$, então vale (iii). Além disso, (i) claramente não vale; (ii) não vale uma vez que $\text{gon}(C) = 4 \geq 3$ e o caso (iv) é excluído, uma vez que C é plana e, portanto, Gorenstein.

Finalmente, se C é não Gorenstein, então C' é linearmente normal se, e somente se, C é nearly Gorenstein, por [27, Thm. 6.5]. Logo, podemos utilizar (6.2.2).

Agora, assumamos que C é trigonal e não-Gorenstein, cuja gonalidade é computada por um pencil livre de pontos de base. Portanto, a prova de (6.3.1)(iii) implica que $3 \in S$ e o g_3^1 é $\mathcal{O}_C\langle 1, t^3 \rangle$. Como consequência, vale (iv), uma vez que C é nearly Gorenstein. Se a gonalidade é computada por um pencil com um ponto de base não-removível, então a prova de (6.3.1) claramente implica que vale (i) ou (iv). \square

Observação 6.3.3. Conforme foi mencionado na Introdução, nós conjecturamos que este resultado deve valer em geral. De fato, o argumento acima para uma curva hiperelítica é geral. Se a curva é Gorenstein e não-hiperelítica com um ponto de Weierstrass com semigrupo simétrico, então é possível aplicar [12, 37, 40, 45]. Para a remoção de tal hipótese, seria necessário considerar a abordagem de Schreyer referente à análise de Petri em [43], como foi mencionado em [37, p. 56, bot]. Além disso, se C é uma curva não-Gorenstein, então (5.2.2) chega perto: curvas não-Kunz nearly Gorenstein são interseção de quádricas, então basta mostrar que curvas Kunz não são.

Capítulo 7

Considerações Finais

Finalizamos este trabalho ressaltando algumas questões que podem ser investigadas em um futuro próximo. Note que iniciamos enunciando resultados da forma mais gerais que eles poderiam ser, então nos restringimos à curvas monomiais como se elas fossem um teste inicial. Então, há uma similaridade com [30], onde foi provado para curvas monomiais que se C é d -gonal, então C' está contido em um scroll de dimensão $(d - 1)$, mas não menor. Este resultado foi comprovado posteriormente em [28]. As questões naturais que surgiram do que foi provado aqui:

- (1) Suponha que C é uma curva plana e o índice de Clifford é computado por um feixe invertível. Então, é verdade que $\text{Clf}(C) = 2$?
- (2) Há um resultado bastante conhecido que relaciona o índice de Clifford e a gonalidade, a saber, $\text{gon}(C) - 3 \leq \text{Cliff}(C) \leq \text{gon}(C) - 2$. Tal resultado vale para qualquer curva integral? Com a hipótese de que o índice de Clifford é computado por um feixe invertível, acreditamos que a teoria desenvolvida em [18] é válida, especialmente por meio do estudo do invariante de Castelnuovo $C(d, g, r)$ que conta o número de $(r - 2)$ -planos $(2r - 2)$ -secantes no mergulho de Clifford $C \subset \mathbb{P}^r$ de uma curva de gênero g e grau d . Tal estudo claramente implicaria na desigualdade desejada;
- (3) Suponha que $\text{Cliff}(C)$ é computado por um feixe não-invertível e que $\text{Clf}(C) = r$. Então, aplique um pullback para \bar{C} e use o pencil para obter uma curva, sendo ela, $\hat{C} \subset \mathbb{P}^r$. Assim, teríamos, de certa forma, um *Modelo de Clifford* de C , cuja construção remete àquela feita para o modelo canônico; Que informação a respeito de C pode ser obtida por meio de \tilde{C} ?

- (4) O Teorema 2.(II) vale em geral como foi explicado na Observação (6.3.3)?;
- (5) É possível descrever o moduli de curvas racionais nearly Gorenstein com um semigrupo prescrito de uma singularidade como foi explicado em (6.2.3)?
- (6) Para curvas canônicas suaves, o Teorema de Enriques-Babbage pode ser enunciado como na Conjectura de Green, i.e., $K_{1,2}(C, \omega) = 0$ iff $\text{Cliff}(C) > 2$. O Teorema 2.(II) mostra que isso é falso para curvas não-Gorenstein. Facilmente, é possível construir curvas Kunz com índices de Clifford arbitrariamente altos. De qualquer forma, seria interessante a caracterizar $\text{Cliff}(C) = 1$, isto é, a menos de curvas trigonais, possivelmente não-Gorenstein e quínticas planas, quais curvas satisfazem tal propriedade?

Referências

- [1] L. Feital and R. Vidal Martins, *Gonality of non-Gorenstein curves of genus five*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **45** (2014), no. 4, 649–670, DOI 10.1007/s00574-014-0067-5. MR3296185
- [2] A. B. Altman and S. L. Kleiman, *Compactifying the Jacobian*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), no. 6, 947–949, DOI 10.1090/S0002-9904-1976-14229-2. MR429908
- [3] M. Aprodu and G. Farkas, *Koszul cohomology eapplications to moduli*, Grassmannians, moduli spaces evector bundles, Clay Math. Proc., vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 25–50. MR2807847
- [4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985. MR0770932
- [5] E. Arbarello and E. Sernesi, *Petri’s approach to the study of the ideal associated to a special divisor*, Invent. Math. **49** (1978), no. 2, 99–119, DOI 10.1007/BF01403081. MR0511185
- [6] D. W. Babbage, *A note on the quádricas through a canonical curve*, J. London Math. Soc. **14** (1939), 310–315, DOI 10.1112/jlms/s1-14.4.310. MR0000496
- [7] E. Ballico, *Brill-Noether theory for rank 1 torsion free sheaves on singular projective curves*, J. Korean Math. Soc. **37** (2000), no. 3, 359–369. MR1760368
- [8] V. Barucci, M. D’Anna, and R. Fröberg, *Analytically unramified one-dimensional semilocal rings etheir value semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **147** (2000), no. 3, 215–254, DOI 10.1016/S0022-4049(98)00160-1. MR1747441
- [9] V. Barucci and R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra **188** (1997), no. 2, 418–442, DOI 10.1006/jabr.1996.6837. MR1435367
- [10] F. Catanese, *Pluricanonical-Gorenstein-curves*, Enumerative geometry eclassical algebraic geometry (Nice, 1981), Progr. Math., vol. 24, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1982, pp. 51–95. MR0685764
- [11] A. Contiero, L. Feital, and R. V. Martins, *Max Noether’s theorem for integral curves*, J. Algebra **494** (2018), 111–136, DOI 10.1016/j.jalgebra.2017.10.009. MR3723173
- [12] A. Contiero and K.-O. Stöhr, *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. Lond. Math. Soc. (2) **88** (2013), no. 2, 580–598, DOI 10.1112/jlms/jdt034. MR3106737

- [13] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 75–109. MR0262240
- [14] M. Coppens, *Free linear systems on integral Gorenstein curves*, J. Algebra **145** (1992), no. 1, 209–218, DOI 10.1016/0021-8693(92)90186-P. MR1144668
- [15] D. Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 229, Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra ealgebraic geometry. MR2103875
- [16] D. Eisenbud and J. Harris, *On varieties of minimal degree (a centennial account)*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 3–13, DOI 10.1090/pspum/046.1/927946. MR0927946
- [17] D. Eisenbud, J. Koh, and M. Stillman, *Determinantal equations for curves of high degree*, Amer. J. Math. **110** (1988), no. 3, 513–539, DOI 10.2307/2374621. MR0944326
- [18] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens, and F.-O. Schreyer, *The Clifford dimension of a projective curve*, Compositio Math. **72** (1989), no. 2, 173–204. MR1030141
- [19] F. Enriques, *Sulle curve canoniche di genera p cello spazio a $p - 1$ dimensioni*, Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna **23** (1919), 80–82.
- [20] F. Enriques and O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. 2. Vol. III, IV*, Collana di Matematica [Mathematics Collection], vol. 5, Zanichelli Editore S.p.A., Bologna, 1985 (Italian). Reprint of the 1924 e1934 editions. MR966665
- [21] T. Fujita, *On hyperelliptic polarized varieties*, Tohoku Math. J. (2) **35** (1983), no. 1, 1–44, DOI 10.2748/tmj/1178229099. MR0695657
- [22] T. Fujita, *Defining equations for certain types of polarized varieties*, Complex analysis ealgebraic geometry, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, 1977, pp. 165–173. MR0437533
- [23] R. V. Martins and E. M. Gagliardi, *Max Noether theorem for singular curves*, Manuscripta Math. **173** (2024), no. 3-4, 1217–1232, DOI 10.1007/s00229-023-01478-3. MR4704774
- [24] M. L. Green, *Koszul cohomology ethe geometry of projective varieties*, J. Differential Geom. **19** (1984), no. 1, 125–171. MR0739785
- [25] N. Galdino, R. V. Martins, and D. Nicolau, *On gonality ecanonical models of unicuspidal rational curves*, Semigroup Forum **107** (2023), no. 1, 79–108, DOI 10.1007/s00233-023-10354-1. MR4631080
- [26] R. Hartshorne, *Generalized divisors on Gorenstein curves ea theorem of Noether*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), no. 3, 375–386, DOI 10.1215/kjm/1250520873. MR0857224
- [27] S. L. Kleiman and R. V. Martins, *The canonical model of a singular curve*, Geom. Dedicata **139** (2009), 139–166, DOI 10.1007/s10711-008-9331-4. MR2481842
- [28] ———, *The gonality of an integral curve*, work in progress.
- [29] A. L. Knutsen and A. F. Lopez, *Brill-Noether theory of curves on Enriques surfaces II: the Clifford index*, Manuscripta Math. **147** (2015), no. 1-2, 193–237, DOI 10.1007/s00229-014-0720-8. MR3336944
- [30] R. V. Martins, D. Lara, and J. M. Souza, *On gonality, scrolls, ecanonical models of non-Gorenstein curves*, Geom. Dedicata **203** (2019), 111–133, DOI 10.1007/s10711-019-00428-2. MR4027587

- [31] R. Vidal Martins, *A generalization of Max Noether's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 2, 377–391, DOI 10.1090/S0002-9939-2011-10904-3. MR2846308
- [32] R. V. Martins, *Trigonal non-Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Algebra **209** (2007), no. 3, 873–882, DOI 10.1016/j.jpaa.2006.08.010. MR2298864
- [33] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. MR0335518
- [34] D. Mumford, *Curves etheir Jacobians*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975. MR0419430
- [35] ———, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Mathematics Studies, vol. No. 59, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966. With a section por G. M. Bergman. MR0209285
- [36] M. Noether, *Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen*, Math. Ann. **17** (1880), no. 2, 263–284, DOI 10.1007/BF01443474 (German). MR1510067
- [37] G. Oliveira and K.-O. Stöhr, *Gorenstein curves with quasi-symmetric Weierstrass semigroups*, Geom. Dedicata **67** (1997), no. 1, 45–63, DOI 10.1023/A:1004995513658. MR1468860
- [38] K. Petri, *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen*, Math. Ann. **88** (1923), no. 3-4, 242–289, DOI 10.1007/BF01579181 (German). MR1512130
- [39] M. Reid, *Chapters on Algebraic Surfaces*, arXiv:alg-geom/9602006v1 (1996).
- [40] R. Rosa and K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Algebra **174** (2002), no. 2, 187–205, DOI 10.1016/S0022-4049(02)00122-6. MR1921820
- [41] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 169–191, DOI 10.2307/1969773. MR0048856
- [42] B. Saint-Donat, *On Petri's analysis of the linear system of quádricas through a canonical curve*, Math. Ann. **206** (1973), 157–175, DOI 10.1007/BF01430982. MR0337983
- [43] F.-O. Schreyer, *A standard basis approach to syzygies of canonical curves*, J. Reine Angew. Math. **421** (1991), 83–123, DOI 10.1515/crll.1991.421.83. MR1129577
- [44] K.-O. Stöhr, *On the poles of regular differentials of singular curves*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **24** (1993), no. 1, 105–136, DOI 10.1007/BF01231698. MR1224302
- [45] ———, *On the moduli spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. Reine Angew. Math. **441** (1993), 189–213. MR1228616
- [46] C. Voisin, *Green's generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a K3 surface*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **4** (2002), no. 4, 363–404, DOI 10.1007/s100970200042. MR1941089
- [47] ———, *Green's canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus*, Compos. Math. **141** (2005), no. 5, 1163–1190, DOI 10.1112/S0010437X05001387. MR2157134

Anexo A

Código para o cálculo do Índice de Clifford

Neste apêndice, apresentamos um código em Python que pode ser utilizado para calcular o índice de Clifford de um feixe monomial sobre uma curva monomial unicuspidal. Como entradas, temos os geradores de um semigrupo e as potências das seções globais que definem o feixe. Note que, com poucos ajustes, tal código pode computar outros invariantes simples de um semigrupo, tal como o condutor e o gênero.

```

from math import gcd
from itertools import product

def calculate_genus(generators):
    """
    Calcula o gênero de um semigrupo numérico dado um conjunto de
    → geradores.

    Args:
        generators (list): Lista de geradores do semigrupo.

    Returns:
        int: 0 gênero do semigrupo (número de inteiros não
        → alcançáveis).
        None: Se o MDC dos geradores não for 1.
    """

```

```

# Verifica se o MDC dos geradores é 1
if gcd(*generators) != 1:
    return None # Sem gênero bem definido

# Determinar o limite superior para checar valores não
↪ alcançáveis
limit = max(generators) * max(generators)
reachables = set()

# Gera todas as combinações lineares não negativas
for coef in product(range(limit // min(generators) + 1),
↪ repeat=len(generators)):
    reachable = sum(c * g for c, g in zip(coef, generators))
    if reachable <= limit:
        reachables.add(reachable)

def calculate_custom_output(generators, sheaf):
    """
    Calcula a soma da cardinalidade dos novos elementos gerados
    por somas de F com S e o maior elemento de F.

    Args:
        generators (list): Lista de geradores do semigrupo S.
        sheaf (list): Subconjunto dos números inteiros F.

    Returns:
        int: Resultado calculado pela fórmula descrita
        ou None se o semigrupo não for bem definido.
    """
# Verifica se o semigrupo está bem definido
if gcd(*generators) != 1:
    return None # Semigrupo não está bem definido

# Determinar o limite superior para o cálculo

```

```

limit = max(generators) * max(generators)
reachables = set()

# Gera todos os elementos do semigrupo S
for coef in product(range(limit // min(generators) + 1),
    ↪ repeat=len(generators)):
    reachable = sum(c * g for c, g in zip(coef, generators))
    reachables.add(reachable)

# Calcula novos elementos ao somar F com S, excluindo os que já
    ↪ estão em S
new_elements = set()
for f in sheaf:
    for s in reachables:
        candidate = f + s
        if candidate not in reachables and candidate <= limit:
            ↪ # Apenas elementos novos
                new_elements.add(candidate)

# Conjunto de valores não alcançáveis (gaps)
not_in_semigroup = set(range(limit)) - reachables

# Determina h1(f)

b = range(1, max(sheaf))

a = set()
for x in not_in_semigroup:
    if x not in b:
        if x not in new_elements:
            a.add(x)

# Soma da cardinalidade dos novos elementos e o maior elemento
    ↪ de F

```

```
result = [len(new_elements) + max(sheaf) - 2 * len(sheaf),  
         ↪ len(a)]  
  
return result  
  
# Exemplo de uso  
generators = [6, 8, 9] # Geradores do semigrupo S  
sheaf = [6, 8] # Subconjunto F  
  
result = calculate_custom_output(generators, sheaf)  
if result is None:  
    print("0 semigrupo não está bem definido, pois o MDC dos  
         ↪ geradores não é 1.")  
else:  
    print(f"Cliff(F) para S = {generators} e F = {sheaf} é  
         ↪ {result[0]} e  $h^1(f)$  é {result[1]}.")
```