

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Átila Felipe de Souza Figueredo

**DISTRIBUIÇÕES DE CODIMENSÃO 1 NO ESPAÇO
PROJETIVO TRIDIMENSIONAL**

Belo Horizonte

2020

Átila Felipe de Souza Figueredo

**DISTRIBUIÇÕES DE CODIMENSÃO 1 NO ESPAÇO
PROJETIVO TRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Belo Horizonte

2020

Figueredo, Átila Felipe de Souza.

F475d Distribuições de codimensão 1 no espaço projetivo
tridimensional [recurso eletrônico] / Átila Felipe de
Souza Figueredo. Belo Horizonte — 2020.
1 recurso online (59 f. il.): pdf.

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins.

Disertação (mestrado) - Universidade Federal de
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Matemática.
Referências: f. 58-59

1. Matemática – Teses. 2. Variedades algébricas –
Teses. 3. Teoria das distribuições (Análise funcional) –
Teses. 4. Folheações (Matemática) – Teses. 5. Módulos
projetivos (Álgebra) – Teses. I. Martins, Renato Vidal da
Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto
de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
III. Título.

CDU 51(043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*Distribuições de Codimensão 1 no Espaço
Projetivo Tridimensional*

ÁTILA FELIPE DE SOUZA FIGUEREDO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:



Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG



Prof. Charles Aparecido de Almeida
UFMG



Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFMG

Belo Horizonte, 28 de agosto de 2020.

Agradecimentos

Eu agradeço, primeiramente, à minha mãe por todo amor depositado em mim ao longo da vida. Agradeço também à minha família, especialmente às minhas avós, minhas tias, meus primos e irmãs pelo imenso suporte.

Agradeço ao meu orientador Renato pelo apoio, e também aos membros da banca Maurício Correa e Charles Almeida. E aos professores pelo conhecimento compartilhado e aos demais funcionários do departamento de matemática da UFMG pela resolução dos processos burocráticos.

Por fim, aos meus amigos pelos momentos que tornaram meus dias mais alegre e aos meus colegas de curso por passarem por todo este período ao meu lado.

À CAPES e ao CNPq, gratidão pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Nesse trabalho, apresentaremos resultados recentes de Omegar, Correa e M. Jardim que classificam distribuições no espaço projetivo tridimensional em codimensão zero e um e determinam seu conjunto singular. Para este último caso, é provado por tais autores que o feixe tangente é estável quando não se decompõe como uma soma de fibrados de linha. Para tais resultados, são necessários alguns invariantes de geometria algébrica, como as classes de Chern. Assim, será feita uma breve introdução à Teoria das variedades algébricas, dos esquemas e de feixes sobre estes. Em particular, são apresentadas noções referentes à feixes reflexivos que são discutidas em [8].

Além disso, apresentaremos alguns resultados referentes aos espaços de Moduli de distribuições presentes no mesmo trabalho, por meio do esquema Quot de Grothendieck para o fibrado tangente. Tais espaços serão construídos detalhadamente por meio da abordagem estabelecida por [9], na qual estes são vistos como uma generalização das variedades de Grassmann.

Palavras chave: distribuições; folheações; espaços de moduli.

ABSTRACT

In this work, we present recent results by Omegar, Corrêa and M. Jardim that classify distributions on the three-dimensional projective space on codimensions zero or one. For the last case, these authors have shown that the tangent bundle is stable whenever it does not split as a sum of line bundles. For those results, some algebraic geometric invariants like Chern classes are necessary. Hence, we will briefly introduce the Theory of algebraic varieties, schemes and sheaves over them. In particular, some notions regarding reflexive sheaves present in [8] will be shown.

Moreover, we present some results concerning the Moduli spaces of distributions that are part of the same work, in terms of the Grothendieck's Quot-Scheme for the tangent bundle. Such spaces will be carefully constructed following the approach in [9], where these are seen as a generalization of Grassmann varieties.

Keywords: distributions; foliations; moduli spaces.

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	10
2.1	Variedades Diferenciáveis	10
2.2	Variedades algébricas e projetivas	12
2.2.1	Genêro aritmético de uma curva	15
2.3	Teoria dos Esquemas	16
2.3.1	Feixes	16
2.4	Espectro de um anel	19
2.5	Espaços anelados e esquemas	20
2.6	Feixes de Módulos	21
2.6.1	Feixe dual e reflexibilidade	23
2.6.2	Feixe Tangente	25
2.7	Cohomologia	25
2.7.1	Cohomologia de feixes	28
2.7.2	Cohomologia de Čech	29
2.8	Grupos Ext e feixes	29
2.9	Teoria de Interseção	30
2.9.1	Divisores	31
2.9.2	Anel de Chow	31
2.9.3	Classes de Chern	33

3	Distribuições e seus espaços de moduli	37
3.1	O esquema de quocientes de TX	40
3.2	Espaços de moduli de distribuições	44
4	Classificação das distribuições de grau zero	47
5	Classificação das distribuições de grau um	51
5.0.1	Distribuições com singularidades isoladas	53
5.0.2	Distribuições com conjunto singular sendo uma reta e dois pontos	55
5.0.3	Distribuições cujo conjunto singular é uma cônica e um ponto .	55
5.0.4	Distribuições com feixe tangente localmente livre	57
	Referências	58

Capítulo 1

Introdução

Nesse trabalho, utilizaremos técnicas de geometria algébrica para o estudo de distribuições holomorfas em $\mathbb{P}^3$. Em particular, Jouanolou classificou as folheações em codimensão um em $\mathbb{P}^3$ de graus zero e um em sua monografia. Os resultados principais a serem discutidos aqui são referentes à classificação das distribuições de grau zero e um em codimensão um em $\mathbb{P}^3$. Dessa forma, temos uma generalização dos resultados de Jouanolou. A referência-mestra para este trabalho é o artigo de O. Calvo-Andrade, M. Corrêa e M. Jardim [2], que contém tais resultados.

No primeiro capítulo, são apresentadas definições e resultados da geometria algébrica clássica. Tal teoria que começou a ser desenvolvida no fim do século XIX por meio de trabalhos de Hilbert, Noether, Krull, foi finalmente estabelecida por Weil, que introduziu a Teoria das Variedades Abstratas. Além disso, há tópicos referentes à geometria algébrica moderna, principalmente referentes à teoria dos feixes e esquemas, que foram desenvolvidas no início da segunda metade do século XX. Para tais áreas, deve-se ressaltar a contribuição de Serre e Grothendieck. Tal capítulo é finalizado com alguns conceitos referentes à cohomologia de feixes e a teoria da interseção. Ambas serão ferramentas essenciais para os capítulos posteriores.

No segundo capítulo, são apresentadas as definições de distribuições e folheações, que são o tema principal da dissertação. Além disso, é feita a construção da Grassmaniana e do esquema de quocientes, além de uma breve abordagem dos esquemas de quocientes do feixe tangente. Também há a descrição dos espaços de moduli de distribuições. No terceiro capítulo, há a classificação das distribuições de grau zero em codimensão 1, tanto do caso integrável, quanto do caso não integrável. No quarto capítulo, o mesmo tratamento é dado às distribuições de grau um, além de alguns exemplos que ilustram os resultados.

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar as definições e resultados básicos que serão utilizados nos próximos. Primeiramente, definimos o que é uma variedade diferenciável para, em seguida, introduzimos o conceito de variedade algébrica. Estas foram, durante bastante tempo, a base das geometrias diferencial e algébrica, respectivamente, e, também, são um ponto de partida deste trabalho. Além disso, apresentamos algumas noções básicas de geometria algébrica moderna referentes às teorias dos feixes e esquemas, além de uma breve introdução à Teoria da cohomologia e à Teoria da Interseção, que são os pré-requisitos essenciais para a compreensão dos resultados principais. As principais referências adotadas são [3, 7, 11].

2.1 Variedades Diferenciáveis

A seguir, assumimos o conhecimento prévio da definição de aplicação holomorfa.

Definição 2.1.1. Seja M um espaço topológico.

- (i) Definimos um **sistema de coordenadas** como um par (U, ϕ) , onde U é um aberto de M e $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ é um homeomorfismo de U para um aberto $\phi(U) \subset \mathbb{C}^m$. Tal par ordenado também pode ser chamado de uma **carta local**;
- (ii) Um **atlas** A de dimensão m é uma coleção de sistemas de coordenadas cujos abertos U formam uma cobertura para M e tal que se (U, ϕ) e (V, ψ) pertencem a A e $U \cap V \neq \emptyset$, então o mapa

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é um difeomorfismo de classe C^r entre abertos de $\mathbb{C}^m$. Podemos obter definições análogas ao substituírmos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$;

- (iii) Dizemos que um atlas é **maximal** se ele não está estritamente contido em outro. Um atlas maximal de dimensão m e classe C^r em M é denominado uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r ;
- (iv) Uma variedade diferenciável de classe C^r e dimensão m é um espaço topológico Hausdorff M , com base enumerável com uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r .

Os exemplos mais básicos de variedades diferenciáveis são $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ com a topologia usual e cujos difeomorfismos são as restrições da identidade a cada aberto.

Exemplo 2.1.2. Outros exemplos clássicos são as esferas n -dimensionais sobre $\mathbb{R}$. Consideremos o conjunto de vetores

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

com a topologia usual. Para vermos que tal variedade possui uma estrutura diferenciável de classe C^∞ , precisamos, primeiramente, definir uma cobertura de S^n para, em seguida, definirmos um sistema de coordenadas para tal conjunto. Basta considerarmos os abertos da forma $U_i^j = \{x \in S^n \mid (-1)^j x_i > 0\}$, $1 \leq i \leq n+1$, $j = 0, 1$. Tais abertos claramente cobrem S^n . Para os homeomorfismos locais, consideremos as projeções $\phi_i^j : U_i^j \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ que são difeomorfismos C^∞ .

Dada uma variedade diferenciável M , é possível definir uma subvariedade diferenciável $N \subseteq M$. Tal definição pode ser encontrada em, por exemplo, [12]. Nesse contexto, também podemos definir uma **variedade complexa analítica** como sendo o conjunto definido pelo anulamento de um número finito de funções holomorfas.

É possível mostrar que a dimensão m é localmente constante em M .

Definição 2.1.3. Definamos o **germe** de uma função f em um ponto P como o conjunto dos pares (g, V) tais que $f = g$ em alguma vizinhança de P .

Agora, definamos um vetor tangente. Tal vetor tangente induz uma derivação em M .

Definição 2.1.4. Se M é uma variedade diferenciável e p um ponto de M . Um mapa linear $F : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é denominado uma **derivação** em p se satisfaz

$$F(fg) = f(p)F(g) + g(p)F(f)$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$. É fácil verificar que o conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ é um espaço vetorial chamado espaço tangente a M em p . Um elemento de $T_p M$ é denominado um vetor tangente em p .

Definição 2.1.5. Para cada variedade diferenciável M definimos o **fibrado tangente** de M , denotado por TM , para ser a união disjunta de espaços tangentes de todos os pontos de M . Em outras palavras,

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Deixemos temporariamente de lado a teoria das variedades diferenciáveis. Agora, destaquemos as noções de variedades algébricas e projetivas. As variedades diferenciáveis podem ser vistas, inicialmente, como conjuntos de pontos que se anulam em uma certa função diferenciável. No caso das variedades algébricas e projetivas, é necessário que tais funções sejam um conjunto de polinômios, em uma ou mais variáveis. Além disso, existem variedades algébricas que não podem ser consideradas variedades diferenciáveis, uma vez que podem possuir singularidades, o que será explicitado por meio de um exemplo mais adiante. Também há variedades diferenciáveis que não podem ser escritas algebricamente no sentido acima como veremos exemplos a seguir.

2.2 Variedades algébricas e projetivas

Ao longo dessa seção, consideremos apenas anéis comutativos com unidade. Um homomorfismo de anéis deve associar a identidade de um anel à identidade de outro anel. Um domínio é um anel com pelo menos dois elementos tal que se $ab = 0$, $a = 0$, ou $b = 0$. Além disso, a menos de exceções, lidaremos especificamente com corpos algebricamente fechados e estes sempre serão denotados por k

Definição 2.2.1. Definimos o n -espaço afim sobre k , denotado por $\mathbb{A}_k^n$, como o conjunto das n -uplas de elementos de k . Um elemento de tal conjunto é um ponto. Se $P = (a_1, \dots, a_n)$ é um elemento de $\mathbb{A}_k^n$, a_i é uma coordenada de P .

Seja $Q = k[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre o corpo k . Dado um polinômio f , definimos o **conjunto dos zeros de f** como $Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$. De forma mais geral, se T é um subconjunto de A , definimos o conjunto de zeros de T por

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in T\}.$$

Um subconjunto Y de $\mathbb{A}^n$ é denominado um subconjunto algébrico se existe $T \subseteq Q$ tal que $Y = Z(T)$. Se $T = \{1\}$, $Z(T) = \emptyset$ e se $T = \{0\}$, $Z(T) = k^n$. Estes são os exemplos mais básicos de conjuntos de zeros associados a conjuntos de polinômios.

Por outro lado, dado um subconjunto qualquer Y de $\mathbb{A}^n$, podemos definir o **ideal associado** a Y , denotado por $I(Y)$ por

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(P) = 0 \forall P \in Y\}.$$

Pela definição, é fácil ver que I associa um subconjunto do espaço afim aos polinômios que se anulam nele.

Dado um ideal associado a Y , é possível definir o **anel de coordenadas** de Y , denotado por $A(Y)$, pelo anel quociente $k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$. Agora, seja $Y_1 = Z(x_1)$ e $Y_2 = Z(x_1^2)$. É possível ver que tais conjuntos são iguais. No entanto, $A(Y_1)$ e $A(Y_2)$ não são isomorfos como anéis, uma vez que o primeiro é um domínio de integridade e o segundo não. Assim, nas próximas seções será abordada uma breve introdução à Geometria Algébrica moderna, que pode ser considerada mais refinada, uma vez que seus principais objetos detectam a nilpotência dos elementos envolvidos.

É possível mostrar que, ao definirmos os conjuntos algébricos de $\mathbb{A}^n$ como os fechados, obtém-se uma topologia no espaço afim. Esta é denominada **Topologia de Zariski** em $\mathbb{A}^n$ e é fácil ver que os axiomas necessários são satisfeitos.

Definição 2.2.2. Um conjunto não vazio Y de um espaço topológico X é dito **irreduzível** se não pode ser expresso como uma união $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dois subconjuntos próprios e fechados de Y .

O conjunto vazio não é considerado irreduzível. Alguns dos fatos seguintes são de simples verificação. Listemos alguns deles por meio da seguinte proposição:

Proposição 2.2.3. *Seja V um subconjunto algébrico do espaço afim.*

- (i) *Todo subconjunto não vazio de um espaço irredutível é irredutível e denso;*
- (ii) *V é irredutível se, e somente se, o ideal $I(V)$ é primo. Disso, concluímos que $I(V)$ é primo se, e somente se, $A(V)$ é um domínio de integridade.*

Agora, temos ferramentas suficientes para definir uma variedade algébrica afim. As demonstrações de tais resultados podem ser encontradas em [7].

Definição 2.2.4. Uma **variedade algébrica afim** é um subconjunto fechado e irredutível de $\mathbb{A}^n$. Um subconjunto de uma variedade algébrica afim é uma **variedade quasi-afim**.

É necessário destacar que nem todo conjunto algébrico é uma variedade. Se $k = \mathbb{C}$, e $\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^2$, basta olharmos para o conjunto de zeros de um ideal gerado por um polinômio não irredutível em $\mathbb{C}[x, y]$, por exemplo, xy .

Relembremos rapidamente que dado um anel A e um ideal $I \subseteq A$, temos que o **Ideal radical associado** a I , denotado por $\sqrt{I}$ é definido por

$$\sqrt{I} = \{f \in A \mid f^r \in I \text{ para algum } r > 0\}.$$

Agora, é possível enunciar um teorema essencial da geometria algébrica.

Teorema 2.2.5. (Teorema dos zeros de Hilbert) *Se J é um ideal em $A = k[x_1, \dots, x_n]$ e $f \in A$ um polinômio que se anula em $Z(J)$. Então, $f \in \sqrt{J}$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [14], p. 16. Há inúmeros exemplos que mostram que a hipótese de k ser um corpo algébricamente fechado é essencial para a validade de tal teorema. Por exemplo, consideremos o conjunto algébrico associado ao ideal $x^2 + y^2 = 1$ em $\mathbb{R}[x, y]$. Agora, enunciemos algumas noções básicas de Geometria Algébrica projetiva, assunto que servirá de base para os capítulos seguintes. Para isso, inicialmente, iremos definir um polinômio homogêneo.

Definição 2.2.6. Um polinômio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ é dito **homogêneo** de grau m se para todo $\lambda \in k - \{0\}$, $f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda^m f(a_1, \dots, a_n)$.

Definição 2.2.7. Definimos uma **variedade algébrica projetiva** como um conjunto algébrico irredutível em $\mathbb{P}^n$, com a topologia induzida. Um subconjunto aberto de uma variedade projetiva é uma **variedade quasi-projetiva**. A **dimensão** de uma variedade projetiva, ou quasi-projetiva, é a sua dimensão como espaço topológico.

Se Y é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$, definimos o ideal homogêneo de Y em S , denotado por $I(Y)$, por $\{f \in S \mid f \text{ é homogêneo e } f(P) = 0 \forall P \in Y\}$. Se Y é um conjunto algébrico, definimos o anel de coordenadas de Y para ser $S(Y) = S/I(Y)$.

Definição 2.2.8. Dizemos que uma variedade sobre um corpo algebricamente fechado k , nesse contexto, é **não singular** se todos os seus anéis locais são anéis locais regulares, isto é, o número mínimo de geradores do ideal maximal de um anel local é maior ou igual que a sua dimensão de Krull.

2.2.1 Gênero aritmético de uma curva

Definição 2.2.9. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Seja $\Gamma(X) = k[x_0, \dots, x_n]/I(X)$ seu anel homogêneo de coordenadas. Definimos uma **função de Hilbert** de uma variedade projetiva X . $h_X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$h_X(m) = \dim_k(\Gamma(X)_m)$$

Nesse caso, m denota a m -ésima graduação do módulo.

A partir de tal definição, precisamos de um teorema adicional para definirmos o polinômio de Hilbert. Tal noção define um importante invariante geométrico em uma variedade projetiva.

Teorema 2.2.10. *Seja X uma variedade projetiva de dimensão r . Então, existe um polinômio p_X tal que $p_X = h_X$ para todo m suficientemente grande. Além disso, o grau de p_X é igual a r . O polinômio p_X estabelecido por tal teorema é denominado o polinômio de Hilbert de X .*

A prova de tal teorema pode ser encontrada em [7]. Agora, listemos um importante invariante de variedades algébricas.

Definição 2.2.11. Seja X uma variedade projetiva de dimensão r . Definimos o **gênero aritmético** de X como $p_a(X) = (-1)^r(p_X(0) - 1)$.

Exemplo 2.2.12. Seja X uma curva plana de grau d . Temos que $p_a(X) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. De fato, tal fórmula é consequência do teorema de Riemann-Roch.

Exemplo 2.2.13. Seja $\mathbb{P}_k^n$ o espaço projetivo n -dimensional. Temos que $p_a(\mathbb{P}_k^n) = 0$.

2.3 Teoria dos Esquemas

Deixemos brevemente de lado àquela que é denominada por alguns autores como *Geometria Algébrica Clássica* e agora introduziremos a *Geometria Algébrica Moderna*. A principal motivação para tal mudança, conforme ressaltado em [14], está em uma das principais diferenças entre os espaços afins e projetivos. Em geral, temos que um elemento de um anel de coordenadas associado a um ideal homogêneo, não é função. Portanto, é necessário atualizar a teoria de forma que seja possível definir uma função globalmente a partir de funções definidas em uma cobertura de abertos.

Da seção anterior, é possível notar que há uma associação natural entre espaços topológicos, no caso, os subconjuntos algébricos, e anéis, no caso, os anéis de coordenadas associados. Agora, o objetivo é estabelecer uma generalização de tal correspondência no caso de um anel arbitrário e, a partir deste, definimos um espaço topológico relacionado. Primeiramente, enunciemos algumas definições básicas relacionadas à teoria dos feixes para que, a partir disso, seja possível definir um esquema.

Para essa seção, admitimos certa familiaridade com a teoria das categorias.

2.3.1 Feixes

Para definirmos um esquema é necessário que, primeiramente, definamos um feixe.

Definição 2.3.1. Seja X um espaço topológico. Um **prefeixe** $\mathcal{F}$ em grupos abelianos em X consiste em:

- a) para todo aberto $U \subseteq X$, um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$. Em alguns casos, também podemos denotar tal grupo abeliano por $\Gamma(U, \mathcal{F})$;
- b) para toda inclusão $V \subseteq U$ de conjuntos abertos, há um morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$.

com as condições

- 1) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
- 2) ρ_{uu} é a identidade $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$
- 3) $W \subseteq V \subseteq U$ são três conjuntos abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Um prefeixe $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X é um **feixe** se satisfaz as seguintes condições adicionais 4 e 5:

- 4) Se U é um aberto e V_i é uma cobertura aberta de tal conjunto e se $s \in \mathcal{F}(U)$ é um elemento tal que $s|_{V_i} = 0 \forall i$, então $s = 0$;
- 5) Axioma de colagem: Se U é um aberto, V_i é uma cobertura aberta de tal conjunto e se temos $s_i \in \mathcal{F}(V_i) \forall i$ com a propriedade $\forall i, j, s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe um elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = s|_{V_i}$ para cada i .

Dados dois subconjuntos abertos $U \subseteq V \subseteq X$, consideremos o morfismo de inclusão correspondente $i : U \rightarrow V$. Dessa forma, obtemos uma categoria C em X . É fácil ver que um feixe $\mathcal{F}$ em X é um funtor contravariante de C para a categoria de grupos abelianos, uma vez que para cada inclusão como acima há um morfismo de grupos abelianos na direção contrária.

Nas definições apresentadas nesta seção até o momento, assumimos que há a associação entre conjuntos abertos e grupos abelianos. Entretanto, é possível substituir estes por outras classes de objetos, como anéis, conjuntos e módulos, conforme veremos a seguir. Além disso, dado um feixe $\mathcal{F}$ também é possível definir um **subfeixe** $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ de forma bastante intuitiva. A seguir, faremos uma descrição breve de um dos exemplos mais clássicos de feixe.

Exemplo 2.3.2. Seja X uma variedade diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $U \subseteq X$ um aberto. É fácil ver que se associarmos a cada aberto U o conjunto das funções holomorfas em U , teremos um pré-feixe de anéis em X . De fato, dados dois abertos $V \subseteq U$, para uma função diferenciável $f \in \mathcal{O}(U)$, basta associarmos a $f|_V \in \mathcal{O}(V)$. De fato, tal mapa nos permite definir uma estrutura de feixe em X

Definição 2.3.3. Se $\mathcal{F}$ é um feixe em X e se $p \in X$, definimos o **talo** $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ em p como o limite direto dos grupos $\mathcal{F}(U)$ para todos abertos U contendo p , por meio dos mapas de restrição ρ .

Um elemento de $\mathcal{F}_p$ é representado por um par $\langle U, s \rangle$. Nesse caso, U é uma vizinhança de p e s é um elemento de $\mathcal{F}(U)$.

Um exemplo bastante natural pode ser retirado da seção anterior. Se X é uma variedade algébrica, consideremos o anel de coordenadas de X . Dado um ponto $P \in X$, definimos o anel local como o anel de coordenadas de X localizado no ideal maximal associado ponto P , ou, equivalentemente, o conjunto de funções regulares no ponto p [7], p. 17.

Exemplo 2.3.4. Agora, veremos que não é tão difícil encontrar um pré-feixe que não é um feixe. Consideremos as funções limitadas em $\mathbb{C}$ com a topologia usual. É fácil ver que, sob tais hipóteses, temos que as condições de pré-feixes são satisfeitas ao considerarmos as restrições usuais. Entretanto, o axioma de colagem não é satisfeito e, portanto, não é um feixe.

Exemplo 2.3.5. Considere um espaço topológico X e o pré-feixe que associa cada aberto $U \subseteq X$ não vazio a um grupo abeliano fixo A e o subconjunto vazio ao grupo trivial. Se U não é conexo, podemos supor que tal aberto pode ser escrito da forma $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dessa forma, temos que o aberto associado a U deveria ser $A \times A$ para que o axioma de colagem seja satisfeito.

Definição 2.3.6. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são prefeixes em X , um morfismo $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste em um morfismo de grupos abelianos $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada aberto U . Se $V \subseteq U$ é uma relação de inclusão, o diagrama referente aos mapas de restrição é comutativo. Mais precisamente:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes em X , a mesma definição é válida. Um **isomorfismo de feixes** é um morfismo com inversa.

Lembrete 2.3.7. Dado um pré-feixe $\mathcal{F}$ qualquer, é possível encontrarmos sempre o **feixe associado** ao pré-feixe $\mathcal{F}$, denotado usualmente por $\mathcal{F}^+$. Tal feixe possui a propriedade universal, isto é, único a menos de isomorfismo. De acordo com [17], tal construção é importante pois, dado um prefeixe, é possível obter o feixe que melhor o aproxima, com uma propriedade universal análoga.

Seja $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes em um espaço topológico X e U um aberto de X . Há três exemplos básicos de pré-feixes que podem ser definidos em X :

- (i) O pré-feixe núcleo: $U \mapsto \ker f(U)$
- (ii) O pré-feixe conúcleo: $U \mapsto \operatorname{coker} f(U)$
- (iii) O pré-feixe imagem: $U \mapsto \operatorname{im} f(U)$

Se f , em particular, é um morfismo de feixes, temos que o pré-feixe núcleo é um feixe. O mesmo não vale para o pré-feixe conúcleo e o pré-feixe imagem. Porém, é possível definir o feixe conúcleo e o feixe imagem conforme a construção enunciada no lembrete 2.3.7. Agora, adicionemos mais uma definição:

Definição 2.3.8. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Para cada aberto $V \subseteq X$ e feixe $\mathcal{F}$ em X , definimos o **feixe imagem direta** $f_*\mathcal{F}$ em Y por

$$f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

2.4 Espectro de um anel

Agora veremos como, a partir de um anel arbitrário, como definir um espaço topológico a partir deste.

Definição 2.4.1. Seja A um anel. Definimos o conjunto **Spec** A como o conjunto de todos os ideais primos de A . Se I é um ideal de A , definimos o conjunto $V(I) \subseteq \text{Spec } A$ como o conjunto de todos os ideais primos que contém I .

Lema 2.4.2. (i) Se a e b são dois ideais de A , então $V(ab) = V(a) \cup V(b)$.

(ii) Se a_i é um conjunto de ideais de A , então $V(\sum a_i) = \cap V(a_i)$.

(iii) Se a e b são dois ideais, $V(a) \subseteq V(b)$ se e somente se $\sqrt{a} \supseteq \sqrt{b}$.

Para definirmos uma topologia em $\text{Spec } A$, definimos que $V(a)$ são os conjuntos fechados. Nesse caso, $V(A) = \emptyset$; $V((0)) = \text{Spec } A$.

Se A é um anel, denotamos $\text{Spec } A = X$. Definiremos agora um feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ em $\text{Spec } A$. Em alguns casos, se $\text{Spec } A$ estiver definido sem ambiguidade, denotemos o feixe de anéis apenas por $\mathcal{O}$. Seja P um ideal primo de A e A_P a localização de A em P . Para cada aberto $U \subseteq \text{Spec } A$, definimos $\mathcal{O}_X(U)$ para ser o conjunto das funções

$$s : U \rightarrow \coprod_{P \in U} A_P,$$

tal que $s(p) \in A_P$ para cada P . Além disso, para cada $P \in U$, existe uma vizinhança V de P contida em U e elementos $a, f \in A$ tal que para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ e $s(Q) = \frac{a}{f}$ em A_Q .

Definição 2.4.3. Seja A um anel. O **espectro** de A é o par consistindo no espaço topológico $\text{Spec } A$ com o feixe de anéis $\mathcal{O}$ definido acima.

Para todo elemento $f \in A$, $D(f)$ denota o complemento de $V((f))$. Tais conjuntos formam uma base para a topologia de $\text{Spec } A$. Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em [7], p. 71.

Por meio do próximo teorema será possível visualizar como as variedades algébricas e projetivas são casos particulares dessas definições.

Teorema 2.4.4. ([7], proposição 2.2, p. 71) *Seja A um anel e $\text{Spec } (A, \mathcal{O})$ seu espectro.*

- (i) *Para todo $p \in \text{Spec } A$, o stalk $\mathcal{O}_p$ associado ao feixe $\mathcal{O}$ é isomorfo ao anel local A_p .*
- (ii) *Para todo elemento $f \in A$, o anel $\mathcal{O}(D(f))$ é isomorfo ao anel localizado A_f .*
- (iii) *Em particular, $\Gamma(\text{Spec } (A, \mathcal{O})) \cong A$.*

2.5 Espaços anelados e esquemas

Agora, estamos próximos de definir uma classe de espaços geométricos essenciais na geometria algébrica atualmente. Estes são os esquemas.

Definição 2.5.1. Um **espaço anelado** $(X, \mathcal{O}_X)$ é um par consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ em X . Um espaço anelado, por sua vez, é dito localmente anelado, se para cada $P \in X$, o talo $\mathcal{O}_{X,P}$ é um anel local. Um morfismo de espaços anelados de $(X, \mathcal{O}_X)$ para $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um par $(f, f^\#)$ de um mapa contínuo $f : X \rightarrow Y$ e um mapa $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em Y .

Exemplo 2.5.2. Se A é um anel, então $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ é um espaço localmente anelado.

Definição 2.5.3. Um **esquema afim** é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ que é isomorfo ao espectro de um anel. Um **esquema** é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ em que todo ponto possui uma vizinhança aberta U , com o feixe restrito $\mathcal{O}_X|_U$ um esquema afim. Dizemos que $\mathcal{O}_X$ é o feixe estrutural associado a X . Por simplicidade, em alguns momentos denotaremos um esquema apenas por X e $sp(X)$ denota o espaço topológico associado ao esquema X .

Uma definição de morfismo de esquemas é consequência imediata da definição de morfismo de espaços anelados. Agora, enunciaremos as propriedades mais básicas referentes aos esquemas.

Definição 2.5.4. Um esquema é dito **conexo** se o espaço topológico associado é conexo. Analogamente, é dito **irredutível** se o espaço topológico associado é irredutível.

Definição 2.5.5. Dizemos que um esquema é **integral** se para todo aberto $U \subseteq X$, o anel $\mathcal{O}_X(U)$ é um domínio de integridade.

Definição 2.5.6. Um esquema X é **localmente noetheriano** se pode ser coberto com subconjuntos abertos $\text{afinsSpec} A_i$, onde cada A_i é um anel noetheriano. X é **noetheriano** se pode ser coberto por um número finito de abertos afins com tal propriedade.

Definição 2.5.7. Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo de esquemas, o **morfismo diagonal** é um único morfismo $X \rightarrow X \times_Y X$ cuja composição com ambos os mapas de projeção $\rho_1, \rho_2 : X \times_Y X \rightarrow X$ é a identidade $X \rightarrow X$. Tal definição pode ser esquematizada por meio do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \Delta : X & \longrightarrow & X \times_Y X \xrightarrow{\rho_1} X \\ & & \downarrow \rho_2 \\ & & X \end{array}$$

Dizemos que o morfismo f é separado se o morfismo diagonal Δ é uma imersão fechada, isto é, um morfismo $f : Y \rightarrow X$ de esquemas tal que f induz um homeomorfismo de $sp(Y)$, o espaço topológico associado ao esquema Y , em um subconjunto fechado de $sp(X)$. Nesse caso, dizemos que X é separado sobre Y . Um esquema X é separado, se é separado sobre $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

O produto fibrado, aqui, é definido para a categoria dos esquemas. Mas é possível defini-lo para categorias arbitrárias.

2.6 Feixes de Módulos

Relembrando o que foi mencionado anteriormente, é possível obtermos mais classes de feixes ao substituírmos a categoria de grupos abelianos da definição inicial de feixes por outras categorias existentes.

Definição 2.6.1. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço anelado, dizemos que um **feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos** $\mathcal{F}$ é um feixe $\mathcal{F}$ em X tal que há uma correspondência entre os conjuntos abertos $U \subseteq X$ e $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos, isto é, cada aberto não está associado apenas a um grupo abeliano, mas sim a um módulo.

Mais fortemente, é possível mostrar que se $X = \text{Spec} A$ e M é um A -módulo, é possível construir um feixe de módulos $\tilde{M}$ e tal construção é única a menos de isomorfismo. Um **morfismo** $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de feixes de $\mathcal{O}_X$ -módulos é um morfismo de feixes tal que para cada subconjunto $U \subseteq X$, o mapa $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos de forma a ser compatível com o morfismo de anéis estabelecido pelo espaço anelado inicial $(X, \mathcal{O}_X)$.

Agora, é necessário definirmos o *pullback*. Tal definição será essencial, sobretudo, no próximo capítulo, pois nos permite a construção de um novo feixe a partir de um primeiro. Mais precisamente, seja $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços anelados e $\mathcal{G}$ um $\mathcal{O}_Y$ -módulo. Definimos o $\mathcal{O}_X$ -módulo

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Dizemos que um feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ é **livre** se é isomorfo a soma direta de cópias de $\mathcal{O}_X$. Ele é **localmente livre** se X pode ser coberto por subconjuntos abertos U tal que $\mathcal{F}|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo livre. Nesse caso, o posto de $\mathcal{F}$ é o número, finito ou infinito, de cópias necessárias da estrutura de feixe. Caso o número de cópias r seja finito e constante, dizemos que $\mathcal{F}$ é **localmente livre de posto constante** r .

Além disso, um **feixe de ideais** em X é um feixe de módulos $\mathcal{I}$ que é um subfeixe de $\mathcal{O}_X$. Mais precisamente, $\mathcal{I}(U)$ é um ideal de $\mathcal{O}_X(U)$ para todo aberto $U \subseteq X$. Por fim, utilizando a notação da definição 2.5.7, se $\mathcal{I}$ é o feixe de ideais $\Delta(X)$, em que Δ é o morfismo diagonal definido em 2.5.7, definimos brevemente o **feixe de diferenciais relativas** de X sobre Y para ser o *pullback* $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$. Agora, introduzimos um caso particular dos conceitos já definidos que será utilizado posteriormente.

Definição 2.6.2. Dizemos que N é um *null correlation bundle* se é um feixe localmente livre de posto 2 definido pela sequência exata.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow N \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Como exemplo, $\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$ denota o feixe de diferenciais relativas de $\mathbb{P}^3$ torcido por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$.

Definição 2.6.3. Seja A um anel e M um A -módulo. Definimos o feixe associado a M em $\text{Spec } A$, denotado por $\tilde{M}$ como se segue: Seja $I \subset A$ um ideal primo e M_I é a localização de M em I . Para cada aberto $U \subset \text{Spec } A$, definimos o grupo $M(U)$ por:

$$s : U \rightarrow \coprod_{I \in U} M_I$$

tal que para cada $I \in U$, $s(I) \in M_I$ e tal que s é localmente uma fração. Os mapas são os usuais de restrição.

Agora, vamos às definições de feixes coerentes e quasi-coerentes.

Definição 2.6.4. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ é um esquema, dizemos que o feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos F é **quasi-coerente** se X pode ser coberto por abertos afins $U_i = \text{Spec } A_i$, com a codição de que para cada i existe um A_i -módulo M_i com $F|_{U_i} \cong M_i$. Dizemos que F é **coerente** se cada M_i é finitamente gerado como A_i -módulo. Além disso, dado um feixe qualquer $\mathcal{F}$, dizemos que ele possui **dimensão pura** d se para todo feixe não trivial $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\dim(\mathcal{G}) = d$.

Definição 2.6.5. Se Y é uma subvariedade não singular de uma variedade não singular X sobre k , o feixe localmente livre $\mathcal{I} / \mathcal{I}^2$ é denominado feixe **conormal** de Y em X . É possível mostrar que este feixe é localmente livre ([7], Teorema 8.17). Seu dual, $\mathcal{N}_{Y/X}$ é definido como o feixe **normal** de Y em X . É um feixe localmente livre de posto $r = \text{codim}(Y, X)$.

Por fim, adicionemos uma definição que será fortemente utilizada no próximo capítulo.

Definição 2.6.6. Seja A um anel comutativo com identidade e M um A -módulo. Dado outro A -módulo qualquer N , dizemos que M é **plano** sobre A se o funtor $N \mapsto M \otimes_A N$ é um funtor exato.

Dado $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$ -módulo e $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo de esquemas, dizemos que $\mathcal{F}$ é plano sobre o Y em um ponto $x \in X$ tal que $y = f(x)$ se o talo $\mathcal{F}_x$ é um $\mathcal{O}_{y,Y}$ -módulo plano por meio do mapa natural $f^* : \mathcal{O}_{y,Y} \rightarrow \mathcal{O}_{x,X}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é plano sobre Y se é plano em todo ponto de Y , assim como X é plano sobre Y se $\mathcal{O}_X$ o é.

2.6.1 Feixe dual e reflexibilidade

Agora, é necessário definir a noção de feixe dual, pois a partir desta, é possível definir um feixe reflexivo. As n -ésimas classes de Chern, denotadas por c_n serão definidas a posteriori. Esta seção é baseada em [8].

Definição 2.6.7. Dado um feixe coerente $\mathcal{F}$ em um esquema X , definimos o **feixe dual** de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{F}^\vee = \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Dizemos que o feixe é **reflexivo** se o mapa natural entre o feixe e o seu bidual, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$, é um isomorfismo.

Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente em X , pode ser feita a associação

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{\deg c_1(\mathcal{F})}{\text{posto}(\mathcal{F})}$$

Além disso, dizemos que um feixe livre de torção coerente $\mathcal{F}$ é **estável** se para cada subfeixe coerente $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ com $0 < \text{posto}(\mathcal{F}') < \text{posto}(\mathcal{F})$, vale a desigualdade $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$. Se vale apenas, $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$, dizemos que $\mathcal{F}$, com as mesmas hipóteses, é **semi-estável**.

O seguinte teorema apresenta um critério que permite a verificação da reflexibilidade de um feixe coerente. Dada a sua importância, a prova será incluída no texto.

Teorema 2.6.8. ([8], proposição 1.1) *Um feixe coerente $\mathcal{F}$ em um esquema integral noetheriano X é reflexivo se, e somente se, pelo menos localmente, pode ser incluído em uma sequência exata*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$$

Nesse caso, $\mathcal{E}$ é localmente livre e $\mathcal{G}$ é livre de torção.

Demonstração. Primeiramente, assumiremos que $\mathcal{F}$ é reflexivo. Então, é possível encontrar uma resolução do feixe dual $\mathcal{F}^\vee$ por feixes localmente livres

$$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F}^\vee \rightarrow 0$$

O funtor dualizante $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ é exato a esquerda. Então, tomando o dual de cada termo da sequência exata anterior, obtemos

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{L}_0^\vee \rightarrow \mathcal{L}_1^\vee$$

Por hipótese, $\mathcal{F}$ é reflexivo. Portanto, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^{\vee\vee}$. O feixe do meio $\mathcal{L}_0^\vee$ é localmente livre. Tomando $\mathcal{G}$ para ser a imagem do mapa $\mathcal{L}_0^\vee \rightarrow \mathcal{L}_1^\vee$, temos uma sequência exata da forma proposta pelo enunciado com $\mathcal{G}$ livre de torção.

Por outro lado, suponhamos que temos uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$$

onde $\mathcal{E}$ é localmente livre, $\mathcal{G}$ é livre de torção. Uma vez que $\mathcal{F}$ é livre de torção, temos que o mapa $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ é injetivo. Além disso, uma vez que $\mathcal{E}$ é localmente livre, portanto é reflexivo. Logo, $\mathcal{F}^{\vee\vee} \subseteq \mathcal{E}$. Portanto, o quociente $\mathcal{F}^{\vee\vee} / \mathcal{F}$ que é um feixe de torção, é um subfeixe de $\mathcal{G}$. Uma vez que $\mathcal{G}$ é livre de torção, é nulo. Logo, $\mathcal{F}$ é reflexivo. $\square$

Agora, enunciemos um resultado que será utilizado no Capítulo 3. Uma referência para a demonstração é [8].

Proposição 2.6.9. *Seja X um esquema integral e localmente fatorial, isto é, todos os seus anéis locais são domínios de fatoração única. Seja $\mathcal{F}$ um feixe reflexivo de posto 2 em X . Então, $\mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{F} \otimes (\det \mathcal{F})^{-1}$.*

Durante o próximo capítulo, tais resultados serão fortemente usados.

2.6.2 Feixe Tangente

A seguir, uma definição que será indispensável no próximo capítulo.

Definição 2.6.10. Seja X uma variedade não singular sobre um corpo k . Definimos o **feixe tangente** de X como $\mathcal{T}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. É um feixe localmente livre de posto $n = \dim X$.

2.7 Cohomologia

O intuito dessa seção é apresentar uma breve introdução à teoria das cohomologias, principalmente referentes à cohomologia de feixes de grupos abelianos. Para isso, inicialmente, revisemos algumas noções de álgebra homológica. Conceitos básicos referentes à teoria das categorias podem ser encontradas em [17] ou em [18]. Além da definição, são necessárias algumas noções como funtores covariantes e contravariantes, que são, basicamente, funtores que mantêm e invertem o sentido de morfismos, respectivamente. Além disso, é necessária uma revisão da noção de morfismo de esquecimento, além das definições de um produto e um coproduto.

Definição 2.7.1. Uma categoria abeliana $\mathcal{U}$ é uma categoria que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se A, B são dois objetos quaisquer de $\mathcal{U}$, $\text{Hom}(A, B)$ possui a estrutura de grupo abeliano. É necessário que a lei de composição de morfismos seja bilinear.
- (ii) Existe um objeto 0 que é um objeto terminal e inicial.
- (iii) Produtos e coprodutos de uma coleção finita de objetos sempre existem.
- (iv) Núcleos e conúcleos sempre existem
- (v) Seja $f : A \rightarrow B$ um morfismo cujo núcleo é zero. Então, f é núcleo de seu conúcleo. Por outro lado, se $f : A \rightarrow B$ um morfismo cujo conúcleo é zero, f é conúcleo de seu núcleo.

Há inúmeros exemplos de categorias abelianas. Podemos citar a categoria de grupos abelianos e a categoria de feixes de grupos abelianos. É fácil verificar que tais categorias obedecem às condições acima. Agora, apresentamos uma definição adicional.

Definição 2.7.2. Um complexo $A^\bullet$ em um categoria abeliana $\mathcal{U}$ é uma coleção de objetos A^i , $i \in \mathbb{Z}$ e morfismos $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$ tais que $d^{i+1} \circ d^i = 0 \forall i$. Caso os objetos A^i sejam especificados apenas em um subconjunto limitado de $\mathbb{Z}$, dizemos que $A^i = 0$ caso i não pertença a tal conjunto. Um morfismo de complexos $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ é um conjunto de morfismos $f : A^i \rightarrow B^i$ tal que para todo i é comutativo com os mapas da cofronteira d^i . Tal definição pode ser esquematizada por meio do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow{d_a^i} & A^{i+1} & \xrightarrow{d_a^{i+1}} & A^{i+2} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \downarrow f^{i+2} \\
 \dots & \longrightarrow & B^i & \xrightarrow{d_b^i} & B^{i+1} & \xrightarrow{d_b^{i+1}} & B^{i+2} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Exemplo 2.7.3. Se R é um anel comutativo, consideremos a categoria abeliana dos R -módulos. Tomemos $A^i = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, se $i > 0$ e $A^i = 0$, se $i < 0$. Se definirmos o mapa $d^i : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ por $x \bmod 8 \mapsto 4x \bmod 8$, é fácil ver que $d^{i+1} \circ d^i = 0 \forall i$ [18].

Agora, é possível definir o i -ésimo objeto cohomológico.

$$h^i(A^\bullet) := \ker d^i / \text{im } d^{i-1}$$

Se $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ é um morfismo de complexos, há o morfismo associado $h^i(f) : h^i(A^\bullet) \rightarrow h^i(B^\bullet)$. Se $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos, há mapas naturais $\delta^i : h^i(C^\bullet) \rightarrow h^{i+1}(A^\bullet)$. Assim, obtemos a sequência exata

$$\dots \rightarrow h^i(A^\bullet) \rightarrow h^i(B^\bullet) \rightarrow h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{B}$ categorias abelianas. Um funtor $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ é aditivo se dados dois objetos A, A' em $\mathcal{U}$, temos que cada $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(A, A') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FA')$ é um homomorfismo de grupos.

A seguinte definição apresenta um resumo referente à exatidão de funtores F aditivos entre duas categorias abelianas.

Definição 2.7.4. Seja $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata em uma categoria abeliana.

- (i) Um funtor covariante é **exato à esquerda** se a sequência curta $0 \rightarrow FA' \rightarrow FA \rightarrow FA''$ é exata;
- (ii) Um funtor covariante é **exato à direita** se a sequência curta $FA' \rightarrow FA \rightarrow FA'' \rightarrow 0$ é exata;
- (iii) Um funtor covariante é **exato ao meio** se a sequência curta $FA' \rightarrow FA \rightarrow FA''$ é exata;
- (iv) Um funtor contravariante é **exato à esquerda** se a sequência curta $0 \rightarrow FA'' \rightarrow FA \rightarrow FA'$ é exata;
- (v) Um funtor contravariante é **exato à direita** se a sequência curta $FA'' \rightarrow FA \rightarrow FA' \rightarrow 0$ é exata;
- (vi) Um funtor contravariante é **exato ao meio** se a sequência curta $FA'' \rightarrow FA \rightarrow FA'$ é exata.

Definição 2.7.5. Se $\mathcal{U}$ é uma categoria abeliana, dizemos que um objeto I é injetivo se satisfaz a seguinte propriedade universal de levantamento. Dado um morfismo injetivo $f : A \rightarrow B$ e um mapa $\alpha : A \rightarrow I$, existe pelo menos um mapa $\beta : B \rightarrow I$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow \alpha & \nearrow \exists \beta & \\ & & I & & \end{array}$$

Analogamente, podemos dizer que um objeto I de U é injetivo se o funtor $\text{Hom}(,I)$ é exato.

Definição 2.7.6. Uma resolução injetiva de um objeto A de U é um complexo I definido em graus maiores ou iguais que zero com um morfismo $e : A \rightarrow I^0$ tal que I^i é um objeto injetivo de U para cada i maior ou igual que zero e tal que a sequência

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

é exata.

Se todo objeto de U é isomorfo a um subobjeto de um objeto injetivo de U , dizemos que U possui suficiência injetiva. Se U possui suficiência injetiva, todo objeto possui uma resolução injetiva.

Definição 2.7.7. Analogamente, agora definimos um objeto projetivo. Dizemos que um objeto I de u é projetivo se o funtor $\text{Hom}(I,)$ é exato. Uma resolução projetiva de um objeto B de U é um complexo I definido em graus menores ou iguais que zero com um morfismo $e : I^0 \rightarrow B$ tal que I^i é um objeto projetivo de U para cada i menor ou igual que zero e tal que a sequência

$$\dots \rightarrow I^{-1} \rightarrow I^0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

é exata.

2.7.1 Cohomologia de feixes

Definição 2.7.8. Se X é um espaço topológico e $\Gamma(X,.)$ o funtor seção global de $\mathcal{U}\mathcal{b}(X)$, a categoria dos feixes de grupos abelianos sobre X para $\mathcal{U}\mathcal{b}$, a categoria dos grupos abelianos. Definimos os **funtores cohomológicos** $H^i(X,.)$ para ser os funtores derivados à direita de $\Gamma(X,.)$.

Para cada feixe $\mathcal{F}$, os grupos $H^i(X, \mathcal{F})$ são os grupos cohomológicos de $\mathcal{F}$. Além disso, se $h^i(X, \mathcal{F}) = \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$, a **característica de Euler** de um feixe é dada por

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i h^i(X, \mathcal{F})$$

2.7.2 Cohomologia de Čech

Seja X um espaço topológico e tomemos uma cobertura aberta de X . Considere uma boa ordenação em tal cobertura aberta. Para cada subconjunto finito de índices, denotemos.

Agora, seja $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos em X . Definimos um complexo de grupos abelianos como se segue:

Fixe uma boa ordenação do conjunto de índices I . Para cada conjunto finito de índices, $i_0, \dots, i_p \in I$, denotamos a interseção de abertos $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ por $U_{i_0, \dots, i_p}$. A partir disso, definimos um complexo $C(U, \mathcal{F})$ como se segue. Para cada $p \geq 0$, seja

$$C(U, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}).$$

Portanto, para todo $\alpha \in C(U, \mathcal{F})$ é determinado ao se dar um elemento

$$\alpha_{i_0, \dots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$$

para cada $(p+1)$ -upla $i_0 < \dots < i_{p+1}$ de elementos de I . Nós definimos o mapa das co-fronteiras $d : C^p \rightarrow C^{p+1}$ ao estabelecermos

$$(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}$$

Aqui, a notação $\hat{i}_k$ significa a omissão i_k . Uma vez que $\alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}$ denota um elemento de $\mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_{p+1}})$, nos restringimos ao aberto $U_{i_0, \dots, i_{p+1}}$ para conseguirmos um elemento de $\mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_{p+1}})$. É fácil verificar que $d^2 = 0$. Então, de fato, temos um complexo de grupos abelianos.

Os grupos de cohomologia de Čech são aqueles associados ao complexo acima. O resultado importante é que eles não dependem da cobertura e coincidem com os grupos de cohomologia recém-apresentados.

2.8 Grupos Ext e feixes

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são $\mathcal{O}_X$ -módulos, denotemos por $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o grupo de homomorfismos de $\mathcal{O}_X$ -módulos e $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o feixe. Fixado, $\mathcal{F}$, $\text{Hom}(\mathcal{F}, \bullet)$ é um funtor covariante exato à esquerda de $\text{Mod}(X)$ para Ub e $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \bullet)$ é um funtor covariante exato à esquerda de $\text{Mod}(X)$ para $\text{Mod}(X)$. Uma vez que $\text{Mod}(X)$ possui suficiência injetiva, é possível estabelecer a seguinte definição.

Definição 2.8.1. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$ -módulo. Definamos os funtores $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \bullet)$ como os funtores derivados a direita de $\text{Hom}(\mathcal{F}, \bullet)$ e como $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \bullet)$ os funtores derivados a direita de $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \bullet)$.

Proposição 2.8.2. Para cada $\mathcal{G} \in \text{Mod}(X)$, nós temos:

- (i) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$;
- (ii) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ para $i > 0$;
- (iii) $\text{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G})$ para cada $i \geq 0$.

Demonstração. O funtor $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \bullet)$ é o funtor identidade. Então, para $i > 0$, seus funtores derivados são 0. Isso prova (1) e (2). Os funtores $\text{Hom}(\mathcal{O}_X, \bullet)$ e $\Gamma(X, \bullet)$ são iguais, então seus funtores derivados são os mesmos. $\square$

O seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], nos diz que a partir de uma sequência curta de feixes de $\mathcal{O}_X$ -módulos é possível obtermos uma sequência exata longa de grupos abelianos. Mais precisamente:

Proposição 2.8.3. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta em $\text{Mod}(X)$, então para cada $\mathcal{G}$, nós temos a sequência exata longa

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \dots$$

e similarmente para feixes $\mathcal{E}xt$.

Dado um espaço projetivo, ou, mais geralmente, um esquema projetivo de dimensão n e feixes com certas hipóteses adicionais definidos em tais espaços, é possível estabelecer uma relação entre Ext^i e H^{n-i} por meio da dualidade de Serre. Para mais detalhes, veja ([7], teorema 3.7.1 e teorema 3.7.4).

2.9 Teoria de Interseção

A teoria da interseção busca descrever a interseção de duas subvariedades de uma variedade. Trata-se, de certa forma, da generalização do Teorema de Bezout, cujo enunciado em demonstração podem ser encontrados em [7], para objetos geométricos mais gerais. Sua abordagem na Geometria Algébrica moderna é por meio das Classes de Chern, que serão essenciais nos capítulos posteriores. Para que estas sejam introduzidas, é necessário, inicialmente, que apresentemos uma breve introdução à teoria dos divisores.

2.9.1 Divisores

Agora, enunciemos brevemente a definição de divisores para que, a partir disso, possamos definir uma classe de Chern. Um exemplo bastante comum que será explicitado mais adiante são os divisores em curvas.

Definição 2.9.1. Dizemos que um esquema X é **regular em codimensão 1**, ou não singular em codimensão 1, se todo anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ de dimensão 1 é regular, isto é, se m_x é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\dim_k m_x / m_x^2 = \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

Definição 2.9.2. Durante essa seção, X denotará um esquema noetheriano integral e separável que é regular em codimensão 1. Seja X com as hipóteses acima. Um **divisor primo** em X é um, subesquema integral fechado Y em codimensão 1. Um divisor é, por definição, representado pela seguinte soma.

$$D = \sum n_i Y_i$$

onde cada Y_i é um divisor primo e n_i é um inteiro e apenas uma quantidade finita deles é diferente de zero. Se $n_i \geq 0 \forall i$, dizemos que o divisor D é efetivo. Dado um esquema X com tais propriedades, é possível definir a soma de divisores. Basta somarmos os coeficientes de cada Y_i . Dessa forma, o conjunto de divisores de X forma um grupo abeliano livre em X gerado pelos divisores primos Y_i .

O **grau** de um divisor D é dado por

$$\deg D = \sum n_i.$$

Agora, enunciemos a definição de Divisor de Cartier.

Definição 2.9.3. Se X é um espaço anelado, um feixe inversível é um $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente livre de posto 1.

É possível estabelecer uma relação entre divisores de Weil e classes de isomorfismos de feixes inversíveis. Para cada D denotamos o feixe inversível (classe) associado como $\mathcal{O}_X(D)$.

2.9.2 Anel de Chow

A noção de Anel de Chow é essencial ao estudarmos a Teoria de Interseção. Consiste, basicamente, em associarmos a uma variedade algébrica um anel em que

seus elementos são classes de subvariedades fechadas. A operação de produto entre tais elementos reflete informações geométricas entre as classes de subvariedades envolvidas.

Definição 2.9.4. Se X é uma variedade sobre k , um **ciclo** Y de codimensão r em X é um elemento do grupo livre abeliano gerado pelas subvariedades fechadas irreduzíveis de X de codimensão r , denotadas por Y_i , isto é, $Y = \sum n_i Y_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$. Podemos definir a noção de ciclo associada a um subesquema fechado Z em codimensão r . Se Y_i são as componentes irreduzíveis de Z em codimensão r , definimos o ciclo associado a Z como $Y = \sum n_i Y_i$, onde n_i é o comprimento do anel local $\mathcal{O}_{y_i, Z}$ de ponto genérico y_i de Y_i em Z .

Seja $f : X \rightarrow X'$ um morfismo de variedades e seja Y uma subvariedade de X . Se $\dim f(Y) < \dim Y$, definimos $f_*(Y) = 0$. Se $\dim f(Y) = \dim Y$, então o corpo de funções $K(Y)$ é uma extensão finita de $K(f(Y))$ e definimos

$$f_*(Y) = [K(Y) : K(f(Y))]$$

Seja $A^r(X)$ o grupo de ciclos de codimensão r módulo equivalência racional. O anel de Chow é $A(X) = \bigoplus_r A^r(X)$ com uma aplicação

$$A^r(X) \times A^s(X) \longrightarrow A^{r+s}(X) \quad (2.2)$$

que satisfaz os seguintes axiomas.

- (i) O pareamento em (2.2) proporciona à $A(X)$ a estrutura de anel comutativo com unidade.
- (ii) Para cada morfismo $f : X \rightarrow X'$ de variedades em B , $f^* : A(X') \rightarrow A(X)$ é um homomorfismo de anéis. Se $g : X' \rightarrow X''$ é outro morfismo, então $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.
- (iii) Para cada morfismo próprio $f : X \rightarrow X'$ de variedades em B , $f_* : A(X) \rightarrow A(X')$ é um homomorfismo de grupos graduados que preserva graus. Se $g : X' \rightarrow X''$ é outro morfismo, então $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.
- (iv) Fórmula da projeção: Se $f : X \rightarrow X'$ é um morfismo próprio de variedades em B , se $x \in A(X)$ e $y \in A(X')$, então

$$f_*(x, f^*y) = f_*(x)y.$$

- (v) Redução à diagonal: Se Y e Z são ciclos em X e se $\Delta : X \rightarrow X \times X$ é o morfismo diagonal, então

$$Y.Z = \Delta^*(Y \times Z).$$

- (vi) Natureza local: Se Y e Z são subvariedades de X com interseção própria, isto é, $\text{cod}(Y \cap Z) = \text{cod} X + \text{cod} Y$, então, vale a seguinte igualdade

$$Y.Z = \sum i(Y, Z; W_j) W_j.$$

Nesse caso, as somas são tomadas sobre todas as componentes irredutíveis W_j de $Y \cap Z$. O inteiro $i(Y, Z; W_j)$ depende apenas de uma vizinhança do ponto genérico de W_j em X . $i(Y, Z; W_j)$ é denominado a multiplicidade de interseção local de Y e Z ao longo de W_j .

- (vii) Normalização: Seja Y uma subvariedade de X e Z um divisor de Cartier efetivo que intersecta Y propriamente. Então, $Y.Z$ é o ciclo associado ao divisor de Cartier $Y \cap Z$ em Y , que é definido ao restringirmos a equação local de Z para Y .

2.9.3 Classes de Chern

As classes de Chern são importantes invariantes topológicos que são a base da Teoria da Interseção moderna.

Definição 2.9.5. Seja $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r definido em uma variedade projetiva não singular X . Para cada $i = 0, 1, \dots, r$, definimos a i -ésima classe de Chern $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$ com as seguintes condições:

- (i) $c_0(\mathcal{E}) = 1$;
- (ii) $\sum_{i=0}^r (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}) \xi^{r-1} = 0$.

onde ξ é a classe do divisor correspondente a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ em $A^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$.

Abaixo, listamos algumas propriedades das classes de Chern. Definimos a **classe de Chern total** como

$$c(\mathcal{E}) := c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) + \dots + c_r(\mathcal{E})$$

e o polinômio de Chern como

$$c_t(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})t + \dots + c_r(\mathcal{E})t^r.$$

- (i) Se $\mathcal{E} \cong \mathcal{L}(D)$ para algum divisor D , $c_t(\mathcal{E}) = 1 + Dt$. De fato, nesse caso, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = X$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{L}(D)$. Portanto, $\mathcal{E} = D$, então, por definição, $1^{\mathcal{E}} - c_1(\mathcal{E}).1 = 0$. Dessa forma, $c_1(\mathcal{E}) = D$.
- (ii) Se $f : X' \rightarrow X$ é um morfismo e $\mathcal{E}$ é um feixe localmente livre em X , então para cada i

$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E})$$

Isso segue imediatamente da functorialidade das propriedades da construção de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ e f^* .

- (iii) Se $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata de feixes localmente livres em X , então

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}').c_t(\mathcal{E}'')$$

De fato, esquecendo a definição por um momento, é possível mostrar que há uma única teoria das classes de Chern tal que para cada feixe localmente livre $\mathcal{E}$ em X é associado um $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$ satisfazendo estas três primeiras condições. Para a prova desta última de da unicidade, é necessário utilizar o princípio da decomposição. Este afirma que para cada $\mathcal{E}$ em X , há um morfismo $f : X' \rightarrow X$ tal que $f^* : A(X) \rightarrow A(X')$ é injetivo.

- (iv) Se $\mathcal{E}$ se decompõe e a filtração possui feixes inversíveis $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ como quocientes, então

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_t(\mathcal{L}_i)$$

Usando o princípio da decomposição, também é possível calcular as classes de Chern de produtos tensoriais, produtos exteriores e de feixes duais localmente livres. Se $\mathcal{E}$ possui posto r e $\mathcal{F}$ possui posto s . Usando a notação,

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_t(1 + a_i t)$$

e

$$c_t(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^s c_t(1 + b_i t).$$

onde $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ são apenas símbolos formais, temos

(v) Valem as seguintes igualdades

$$c_t(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \prod_{i,j} (1 + (a_i + b_j)t)$$

$$c_t(\wedge^P \mathcal{E}) = \prod_{i \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} (1 + (a_{i_1} + b_{i_p})t)$$

$$c_t(\mathcal{E}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{E}).$$

Essas expressões fazem sentido porque quando são multiplicadas, os coeficientes de cada potência de t são funções simétricas nos a_i -s e nos b_j -s. Portanto, por um resultado bem conhecido de funções simétricas, eles podem ser expressados por polinômios nas funções simétricas elementares dos a_i -s e b_j -s. Estes, por sua vez, são as classes de Chern de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

(vi) Seja a seção global de um feixe localmente livre E de posto r em X . Então, s define um homomorfismo mapeando o 1 ao s . Definimos o esquema de zeros de s para ser o subesquema fechado Y de X definido pela sequência exata.

$$\mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

Isso generaliza o fato de uma seção de um feixe inversível nos dar o divisor correspondente.

(vii) Fórmula da autointerseção. Seja Y uma variedade não singular X em codimensão r e seja $\mathcal{N}$ o feixe normal. Seja $i : Y \rightarrow X$ o mapa de inclusão. Então.

$$i^* i_*(1_Y) = c_r(\mathcal{N})$$

Portanto, aplicando a fórmula da projeção para o Anel de Chow, temos

$$i^* i_*(1_Y) = c_r(\mathcal{N})$$

em X .

A seguir, enunciemos o seguinte teorema que nos informa desigualdades referentes às classes de Chern no caso em que $\mathcal{F}$ é um feixe reflexivo de posto 2, com $X = \mathbb{P}^3$ sob determinadas condições. Para a sua demonstração, confira [8].

Teorema 2.9.6. ([8], teorema 8.2) *Seja $\mathcal{F}$ um feixe reflexivo de posto 2 em $\mathbb{P}^3$.*

1. *Assuma $c_1 = 0$ e $\mathcal{F}$ semiestável. Então, $H^2(\mathcal{F}(l)) = 0$ para $l \geq c_2 - 2$. Além disso, $c_3 \leq c_2^2 + c_2$.*
2. *Assuma $c_1 = 0$ e $\mathcal{F}$ semiestável. Então, $H^2(\mathcal{F}(l)) = 0$ para $l \geq c_2 - 3$. Além disso, $c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2$.*
3. *Assuma $c_1 = -1$ e $H^0(\mathcal{F}(-1)) = 0$. Então, $H^2(\mathcal{F}(l)) = 0$ para $l \geq c_2 - 1$. Além disso, $c_3 \leq c_2^2 + 2c_2$.*
4. *Assuma $c_1 = -1$ e $\mathcal{F}$ semiestável. Então, $H^2(\mathcal{F}(l)) = 0$ para $l \geq c_2 - 2$. Além disso, $c_3 \leq c_2^2$.*

Capítulo 3

Distribuições e seus espaços de moduli

O objetivo desse capítulo é apresentar as definições, além de alguns resultados básicos referentes às distribuições, além de seus espaços de moduli. A ideia mais básica possível por trás de uma distribuição é associar a cada ponto de uma variedade um subespaço vetorial do seu espaço tangente. Um caso particular de distribuição é uma folheação.

Uma distribuição $\mathcal{F}$ em codimensão r é uma variedade diferenciável complexa X é dada pela sequência exata:

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\phi} TX \xrightarrow{\pi} N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

Nesse caso $T_{\mathcal{F}}$, denominado feixe tangente de $\mathcal{F}$, é um feixe coerente de posto $s := \dim(X) - r$. $N_{\mathcal{F}}$, por sua vez, é denominado feixe normal de $\mathcal{F}$ e é um feixe livre de torção. O teorema 2.6.8 implica que $T_{\mathcal{F}}$ é reflexivo.

Dadas duas distribuições definidas em uma mesma variedade complexa diferenciável X , é possível definir a noção de isomorfismo. $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são distribuições isomorfas se existe um morfismo $\beta : T_{\mathcal{F}} \rightarrow T_{\mathcal{F}'}$ tal que $\phi' \circ \beta = \phi$, em outras palavras, β torna o diagrama formado por tais morfismos comutativo.

Dada a sequência exata 3.1, tomemos o $n - r$ -ésimo produto exterior e obtemos $\wedge^{n-r} \phi : \det(T_{\mathcal{F}}) \rightarrow \wedge^{n-r} TX$. Nesse caso, $\det(T_{\mathcal{F}}) := \wedge^{n-r}(T_{\mathcal{F}})$. Disso, concluímos que toda distribuição em codimensão r induz uma seção de

$$H^0(X, \wedge^{n-r} TX) \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^{\vee}.$$

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são distribuições isomorfas, é possível concluir que $\det(\beta) = \lambda$, $\lambda \in$

$\mathbb{C}^*$. Isso ocorre porque há um isomorfismo entre $\det(T_{\mathcal{F}})$ e $\det(T_{\mathcal{F}'})$. Em outras palavras, $\wedge^{n-r}\phi' = \lambda \wedge^{n-r}\phi$. Portanto, toda classe de isomorfismos de distribuições em codimensão r em X induz um elemento do espaço projetivo

$$\mathbb{P}H^0(\wedge^{n-r}TX \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^\vee) = \mathbb{P}H^0(\Omega_X^r \otimes \det(TX) \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^\vee).$$

Definição 3.0.1. O **esquema singular** é definido tomando a potência exterior maximal do morfismo dual $\phi^\vee : \Omega_X^1 \rightarrow T_{\mathcal{F}'}^\vee$, obtemos o morfismo $\Omega_X^s \rightarrow \det(T_{\mathcal{F}'})^\vee$. A imagem de tal morfismo é o feixe ideal $I_{Z/X}$ de um subesquema $Z \subset X$, o esquema singular de $\mathcal{F}$ torcido por $\det(T_{\mathcal{F}'})^\vee$.

Se o feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre, Z coincide, como conjunto, com o conjunto singular do feixe normal. De fato, por definição:

$$\text{Sing}(N_{\mathcal{F}}) := \bigcup_{p=1}^{\dim(X)-1} \text{Supp}(\mathcal{E}xt^p(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X))$$

Nesse caso, $\text{Supp}(-)$ denota o suporte conjuntista de um feixe. Mais especificamente, se X é um esquema noetheriano e dado um feixe coerente $\mathcal{F}$ em X , definimos $\text{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$. Quando $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre, então $\mathcal{E}xt^p(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) = 0$ para $p \geq 2$ e

$$\text{Sing}(N_{\mathcal{F}}) := \text{Supp}(\mathcal{E}xt^1(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X)) = \{x \in X \mid \phi(x) \text{ não é injetiva}\} = \text{Supp}\mathcal{O}_Z$$

Agora, adicionemos a definição de subdistribuição.

Definição 3.0.2. Dada uma distribuição $\mathcal{F}$, uma **subdistribuição** em $\mathcal{F}$ é uma distribuição

$$\mathcal{G} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\phi} TX \rightarrow N_{\mathcal{G}} \rightarrow 0$$

cujo feixe tangente $T_{\mathcal{G}}$ é um subfeixe de $T_{\mathcal{F}}$.

O quociente $N_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} := T_{\mathcal{F}}/T_{\mathcal{G}}$ é denominado feixe normal relativo. Além disso, a seguinte sequência exata é satisfeita:

$$0 \rightarrow N_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} \rightarrow N_{\mathcal{G}} \rightarrow N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

Dessa forma, temos que $N_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ é livre de torção.

Quando $r = 1$, o feixe normal, sendo livre de torção de posto 1, deve ser o feixe ideal de torção $I_{Z/X} \otimes \det(TX) \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^\vee$ de um subesquema $Z \subset X$ de codimensão pelo menos 2 o que é, precisamente, o esquema singular de $T_{\mathcal{F}}$.

Definição 3.0.3. Uma filtração de torção de um feixe coerente $\mathcal{F}$ é a única filtração:

$$0 \subset T_0(\mathcal{F}) \subset \dots \subset T_d(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

onde $d = \dim(\mathcal{F})$ e $T_i(\mathcal{F})$ é o subfeixe maximal de $\mathcal{F}$ de dimensão $\leq i$.

Assim, seja $T_{\mathcal{U}}$ o subfeixe maximal de $\mathcal{O}_Z$ de codimensão > 2 . Disso, obtemos uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

onde $C \subset X$ é um subesquema, possivelmente vazio, de codimensão pura igual a 2. Além disso, segue que $\text{Ext}^p(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_X)$ para $p > 2$. Também é necessário ressaltar que $\mathcal{U} \simeq I_{C/Z}$.

seja $p \geq 1$ e tomando $\mathcal{L} := \det(TX) \otimes \det(T_{\mathcal{F}}^\vee)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^p(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) &\simeq \mathcal{E}xt^{p+1}(I_{Z/X}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}^\vee \\ &\simeq \mathcal{E}xt^{p+2}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}^\vee \\ &\simeq \mathcal{E}xt^{p+2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}^\vee. \end{aligned}$$

Como uma consequência imediata, o seguinte Lema apresenta uma generalização de ([6], Teorema 3.2, página 6), uma vez que este se restringia ao caso em que $X = \mathbb{P}^3$.

Lema 3.0.4. *O feixe tangente de uma distribuição em codimensão 1 é localmente livre se, e somente se, seu "locus" singular possui codimensão pura igual a 2.*

Demonstração. Por um lado, $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre se, e somente se, vale $\mathcal{E}xt^p(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) = 0$ para cada $p \geq 1$.

Por outro lado, uma vez que $\mathcal{U}$ é um feixe de codimensão maior ou igual que 3, vale $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = 0$ para $q \geq 3$. O que é equivalente a dizer que Z possui codimensão pura igual a 2. $\square$

Lembrete 3.0.5. O esquema singular de uma distribuição integrável em codimensão 1 em $X = \mathbb{P}^n$ é sempre não vazio e possui componentes de codimensão igual a 2. Se $X = \mathbb{P}^3$, (3.0.4) é provado por meio de um método alternativo.

3.1 O esquema de quocientes de TX

Agora, enunciamos a definição do esquema de quocientes de um feixe estabelecida por Grothendieck. Aqui, iremos nos restringir ao esquema de quocientes do fibrado tangente TX , além de algumas propriedades básicas relacionadas. Tal objeto geométrico, denotado por $\text{Quot}_X(\mathcal{F}, P)$, é importante porque parametriza feixes coerentes de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ com polinômios de Hilbert P . A principal referência para essa seção é [9]. Inicialmente, apresentaremos mais algumas definições referentes à Teoria de Categorias.

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer. Denotemos por $\mathcal{C}^\circ$ a **categoria oposta**, isto é, a mesma categoria com os mesmos objetos e os morfismos invertidos. Além disso, seja $\mathcal{C}'$ a categoria cujos objetos são funtores $\mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathfrak{Sets}$ e cujos morfismos são as transformações naturais entre funtores. Pelo lema de Yoneda, é possível afirmar que o funtor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mapsto \underline{x} : y \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x)$ mergulha $\mathcal{C}$ como uma subcategoria completa de $\mathcal{C}'$. Um funtor em $\mathcal{C}'$ da forma $\underline{x}$ é dito ser **representado** pelo objeto x .

Definição 3.1.2. Um funtor $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ é dito **corepresentado** por $F \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ se existe um $\mathcal{C}'$ -morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \underline{F}$ tal que para cada morfismo $\alpha' : \mathcal{F} \rightarrow \underline{F}'$ se fatora universalmente por um funtor $\beta : \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$. $\mathcal{F}$ é **universalmente corepresentado** por $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \underline{F}$ se para cada morfismo $\phi : \underline{T} \rightarrow \underline{F}$, o produto fibrado $\tau : \underline{T} \times_F \mathcal{F}$ é corepresentado por T .

Se F representa $\mathcal{F}$, então também corepresenta universalmente $\mathcal{F}$. Se F corepresenta $\mathcal{F}$, então é único a menos de único isomorfismo. Isso segue diretamente da definição.

Agora, apresentaremos a construção da variedade de Grassmann para, em seguida, apresentarmos a construção do esquema de quocientes.

Construção da Variedade Grassmanniana

Nós esboçamos a construção da variedade de Grassmann. Seja k um corpo, V um espaço vetorial de dimensão finita e r tal que $0 \leq r \leq \dim(V)$. Consideremos o funtor

$$\text{Grass}_k(V, r) : (\mathfrak{Sch}/k)^\circ \rightarrow (\mathfrak{Sets}), S \mapsto K$$

onde S denota um k -esquema de tipo finito e K um subfeixe do conjunto $\mathcal{O}_S \times_k V$ com quociente localmente livre $\mathcal{O}_S \times_k V/K$ de posto constante r .

Para cada subespaço vetorial $W \subset V$ de dimensão r , consideremos o funtor $\mathcal{G}_W \subset \underline{\text{Grass}}_k(V, r)$ que para cada k -esquema S consiste naqueles de quocientes localmente livres $\varphi : \mathcal{O}_S \times_k V \rightarrow F$ tal que a composição $\mathcal{O}_S \times_k W \rightarrow \mathcal{O}_S \times_k V \rightarrow F$ é um isomorfismo. Nesse caso, o inverso desse isomorfismo implica na existência de um homomorfismo $g : \mathcal{O}_S \times_k V \rightarrow \mathcal{O}_S \times_k W$ que se decompõe na inclusão de W em V . Disso, é possível concluir que $\mathcal{G}_W$ é representado pelo subespaço afim $G_W \subset \mathbb{H}\text{om}(V, W) = \text{Spec } S^*\text{Hom}(V, W)^\vee$ correspondente aos homomorfismos que se decompõem no mapa de inclusão. Agora, para cada elemento $[\varphi : \mathcal{O}_S \times_k V \rightarrow F] \in \underline{\text{Grass}}_k(V, r)(S)$, existe um subconjunto aberto maximal $S_W \subset S$ tal que $[\varphi|_{S_W}]$ pertence ao subconjunto $\mathcal{G}_W(S_W) \subset \underline{\text{Grass}}_k(V, r)(S_W)$. Além disso, se W percorre o conjunto de todos os subespaços r -dimensionais de V , então o S_W correspondente forma uma cobertura aberta de S . Apliquemos isso às famílias universais parametrizadas por G_W e $G_{W'}$ para dois subespaços $W, W' \subset V$: por causa da propriedade universal de $G_{W'}$ existe um morfismo canônico $\alpha_{W, W'} : G_{W, W'} \rightarrow G_{W'}$. É possível verificar que $\alpha_{W, W'}$ é um isomorfismo sobre o subconjunto aberto $G_{W, W'}$ e que a condição de cociclo para os três subespaços $\alpha_{W', W''} \alpha_{W, W'} = \alpha_{W, W''}$. Portanto, é possível colar os três espaços G_W para produzir um esquema $\text{Grass}(V, r) =: G$. Então, G representa o funtor $\underline{\text{Grass}}(V, r)$. Usando o Critério valuativo de morfismos próprios [7], p. 101, é possível verificar que G é próprio. O mergulho de Plucker

$$\begin{aligned} \underline{\text{Grass}}(V, r) &\rightarrow \mathbb{P}(\wedge^r V) \\ [\mathcal{O}_S \times_k V \rightarrow F] &\mapsto [\mathcal{O}_S \times_k \wedge^r V \rightarrow \det(F)] \end{aligned}$$

exibe G como um esquema projetivo. A descrição local mostra que G é uma variedade suave irreduzível.

Construção do Esquema de Quocientes

O exemplo anterior pode ser generalizado para o caso em que V é substituído por um feixe coerente $\mathcal{V}$ em um k -esquema S de tipo finito. Por definição, um **módulo quociente** de $\mathcal{V}$ é uma equivalência de classes de epimorfismos $q : \mathcal{V} \rightarrow F$ de $\mathcal{O}_S$ -feixes coerentes onde dois morfismos $q_i : \mathcal{V} \rightarrow F_i$, $i = 1, 2$ são equivalentes se $\ker(q_1) = \ker(q_2)$, ou, equivalentemente, se existe um isomorfismo $\phi : F_1 \rightarrow F_2$ com $q_2 = \phi \circ q_1$. Aqui e no que se segue, módulos quocientes são usados no lugar de

submódulos porque o produto tensorial é um funtor exato à direita: a sobrejetividade de um homomorfismo de feixes coerentes é preservado pela mudança de base, enquanto a injetividade não.

Seja $\underline{\text{Grass}}(\mathcal{V}, r) : (\mathfrak{Sch}/k)^\circ \rightarrow (\mathfrak{Sets})$ o funtor que associa a cada $[T \rightarrow S] \in \text{Ob}(\mathfrak{Sch}/S)$ o conjunto de todos os módulos quociente localmente livres $q : \mathcal{V}_T = \mathcal{O}_T \times_{\mathcal{O}_S} \mathcal{V} \rightarrow F$ de posto r . Então, $\underline{\text{Grass}}(\mathcal{V}, r)$ é representado pelo S -esquema projetivo $\pi : \text{Grass}(\mathcal{V}, r) \rightarrow S$. Nós reduzimos a prova dessa afirmação ao caso da variedade de Grassmann arbitrária do exemplo anterior. Primeiro, observemos que por causa da unicidade de Grass, se ele existe, o problema é local em S , então é possível afirmar que $S = \text{Spec } A$ e $\mathcal{V} = \tilde{M}$ para algum A -módulo finitamente gerado M . Agora, seja $A^{n'} \xrightarrow{a} A^n \xrightarrow{b} M$ uma representação finita. Qualquer módulo quociente $\mathcal{V}_T \rightarrow F$ por composição com b nos dá um quociente $\mathcal{O}_T^n \rightarrow F$. Portanto, b induz um mapa injetivo

$$b^\# : \underline{\text{Grass}}_S(\mathcal{V}, r) \rightarrow \underline{\text{Grass}}_S(\mathcal{O}^n, r) \simeq S \times \underline{\text{Grass}}(k^n, r)$$

Claramente, o funtor do lado esquerdo é representado por $S \times \text{Grass}(k^n, r)$. Devemos mostrar que $\text{Grass}_S(\mathcal{V}, r)$ é representado por um subesquema fechado de $\text{Grass}_S(\mathcal{O}^n, r)$. Isso é consequência da seguinte afirmação: se $q : \mathcal{O}^n \rightarrow F$ é um módulo de quociente localmente livre de posto r , então existe um subesquema fechado $T_0 \subset T$ tal que qualquer $g : T' \rightarrow T$ se fatora por T_0 se, e somente se, $g^*(q \circ a_T) = 0$. Novamente, tal afirmação é local em T . Ajustando tal esquema, se necessário, assumimos que $F \cong \mathcal{O}_T^r$. Então, $q \circ a_T$ é dado por uma matriz $r \times n'$ B com entradas em $\mathcal{O}_T$ e se anula se, e somente se, $g^*(q \circ a_T)$ se fatora por meio do subesquema fechado correspondente ao ideal que é gerado pelas entradas de B .

Agora, vamos ao esquema de quocientes por si mesmo. Seja k, S e $\mathcal{C} = (\mathfrak{Sch}/S)$ como no segundo exemplo. Seja $f : X \rightarrow S$ um morfismo projetivo e $\mathcal{O}_X(1)$ um fibrado de linha amplo em X . Seja $\mathcal{H}$ um $\mathcal{O}_X$ -módulo e $P \in \mathbb{Q}[z]$ um polinômio. Definimos um funtor

$$\mathcal{Q} : \underline{\text{Quot}}_{X/S} : \mathfrak{Sch}_{/S}^\circ \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

como se segue: se $T \rightarrow S$ é um objeto em $\mathcal{C}$, seja $\mathcal{Q}(T)$ o conjunto de todos os feixes coerentes T -planos com polinômio de Hilbert P . Se $g : T' \rightarrow T$ é um S -morfismo, seja $\mathcal{Q}(g) : \mathcal{Q}(T) \rightarrow \mathcal{Q}(T')$. Agora, X denota uma variedade projetiva, polarizada e não singular de dimensão n .

Seja $\mathcal{S}ch/\mathbb{C}$ a categoria de esquemas de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ e $\mathcal{S}ets$ a categoria de conjuntos. A princípio, pode-se tomar um esquema de tipo finito sobre um corpo k qualquer, porém, nos limitemos a tal caso. Fixemos um polinômio $P \in \mathbb{Q}[t]$ e consideremos o funtor:

$$\text{Quot}^P : \mathcal{S}ch/\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}ets, \text{Quot}^P(S) := \{(N, \eta)\} / \sim$$

Onde:

- (i) N é um feixe coerente de $\mathcal{O}_{X \times S}$ módulos, plano sobre S , tal que o polinômio de Hilbert de $N_S := N|_{X \times \{s\}}$ é igual a $P \forall s \in S$.
- (ii) $\eta : \pi_X^* TX \rightarrow N$ é um epimorfismo, onde $\pi_X : X \times S \rightarrow X$ é a projeção convencional sobre o primeiro fator.

Além disso, definimos a seguinte relação de equivalência: dizemos que $(N, \eta) \sim (N', \eta')$ se existe um isomorfismo $\gamma : N \rightarrow N'$, tal que $\gamma \circ \eta = \eta'$.

Finalmente, se $f : R \rightarrow S$ é um epimorfismo em $\mathcal{S}ch/\mathbb{C}$, definimos $\text{Quot}^P(f) : \text{Quot}^P(S) \rightarrow \text{Quot}^P(R)$ por $(N, \eta) \mapsto (f^*N, f^*\eta)$. Elementos de $\text{Quot}^P(S)$ serão denotados por $[N, \eta]$.

Teorema 3.1.3. *O funtor Quot^P é representado por um esquema projetivo Q^P de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, isto é, existe um isomorfismo de funtores $\text{Quot}^P \rightarrow \text{Hom}(\cdot, Q^P)$*

Para o que vem a seguir, é importante considerar o seguinte subconjunto do esquema de quocientes:

$$D^P := \{[N, \eta] \in Q^{P_{TX}-P} \mid N \text{ é livre de torção}\}. \quad (3.2)$$

Nesse caso, P_{TX} é o polinômio de Hilbert do fibrado tangente. Agora, enunciemos mais um teorema.

Teorema 3.1.4. ([9], teorema 2.3.1) *Seja X um esquema projetivo sobre um corpo k e $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X . As seguintes propriedades de feixes coerentes são abertas em famílias planas:*

- (i) *simples, isto é, $\text{End}(E) \cong k$;*
- (ii) *de dimensão pura;*

(iii) *semi-estável*;

(iv) *geometricamente estável*.

Portanto, pelo teorema anterior, D^P é um subconjunto aberto de $Q^{P_{TX}-P}$.

3.2 Espaços de moduli de distribuições

É possível, inicialmente, definir um funtor Moduli como um funtor da categoria de esquemas para a categoria de conjuntos. Primeiramente, fixemos um polinômio $P \in \mathbb{Q}[t]$ e consideremos o funtor:

$$Dist^P : \mathfrak{Sch}_{/\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Sets}, Dist^P(S) := \{(F, \phi)\} / \sim$$

Onde:

- (i) F é um feixe coerente de $\mathcal{O}_{X \times S}$ -módulos, plano sobre S , tal que o polinômio de Hilbert de $F_s := F|_{X \times \{s\}}$ é igual a $P \forall s \in S$;
- (ii) $\phi : F \rightarrow \pi_X^* TX$ é um morfismo de feixes tal que $\phi_s : F_s \rightarrow TX$ é injetivo. Seu conúcleo coker ϕ_s é livre de torção para todo $s \in S$.

Além disso, dizemos que $(F, \phi) \sim (F', \phi')$ se existe um isomorfismo $\beta : F \rightarrow F'$ tal que $\phi' \circ \beta = \phi$.

Por fim, se $f : R \rightarrow S$ é um morfismo em $\mathfrak{Sch}_{/\mathbb{C}}$, definimos

$$\begin{aligned} Dist^P(S) &\rightarrow Dist^P(R) \\ (F, \phi) &\mapsto (f^*F, f^*\phi) \end{aligned}$$

Classes de equivalência em $Dist^P$ serão denotadas por $[F, \phi]$.

Cada par (F, ϕ) deve ser tratado como uma família de distribuições em X parametrizada pelo esquema S : para cada $s \in S$, temos a distribuição dada pela sequência exata curta

$$\mathcal{F}_s : 0 \longrightarrow F_s \xrightarrow{\phi_s} TX \xrightarrow{\eta\phi_s} \text{coker } \phi_s \longrightarrow 0,$$

onde η_ϕ equivale a projeção canônica $\pi_X^* TX \rightarrow \text{coker } \phi$. Note que se (F, ϕ) e (F', ϕ') são S -famílias de distribuições em X , então para cada S as distribuições $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_s$ são isomorfas.

Proposição 3.2.1. *O funtor $Dist^P$ é representado pelo esquema quasi-projetivo D^P descrito em 3.2. Em outras palavras, existe um isomorfismo de funtores $Dist^P \rightarrow Hom(\bullet, D^P)$.*

Demonstração. Seja S um esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ e tomemos $[F, \phi] \in Dist^P(S)$. Disso, segue que $[coker \phi, \eta_\phi]$ é um elemento de $Quot^{P_{TX}-P}$. Uma vez que $Quot^{P_{TX}-P} \simeq Hom(S, Q^{P_{TX}-P})$, seja $g_{[F, \phi]} : S \rightarrow Q^{P_{TX}-P}$ o morfismo correspondente a S -família $[coker \phi, \eta_\phi]$. Note que $im\ g_{[F, \phi]} \subset D^P$ uma vez que $coker\ \phi_s$ é livre de torção para todo $s \in S$, é possível concluir que $g_{[F, \phi]} \in Hom(S, D^P)$:

Portanto, obtem-se um morfismo de conjuntos $Dist^P(S) \rightarrow Hom(S, D^P)$ para cada esquema S . Agora, checaremos que tais morfismos são bijeções. De fato, é possível compor um morfismo $g : S \rightarrow D^P$ com a inclusão de D^P em $Q^{P_{TX}-P}$ para obter um elemento de $Hom(S, Q^{P_{TX}-P})$, que corresponde a uma S -família $[N, \eta]$ em $Q^{P_{TX}-P}(S)$. Além disso, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Dist^P(D) & \xrightarrow{\sim} & Hom(S, D^P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Quot^{P_{TX}-P}(S) & \xrightarrow{\sim} & Hom(S, Q^{P_{TX}-P}) \end{array}$$

em que setas verticais são injetivas e setas horizontais são bijetivas.

Para concluirmos a prova, é necessário checar que a bijeção entre $Dist^P$ e $Hom(S, D^P)$ construída acima produz uma transformação natural entre os funtores $Dist^P$ e $Hom(\cdot, D^P)$. De fato, a representabilidade do funtor $Quot^{P_{TX}-P}$ implica, para cada morfismo $f \in Hom(R, S)$, no seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} Quot^{P_{TX}-P}(S) & \xrightarrow{\sim} & Hom(S, Q^{P_{TX}-P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Quot^{P_{TX}-P}(R) & \xrightarrow{\sim} & Hom(R, Q^{P_{TX}-P}) \end{array}$$

O último diagrama, juntamente com o primeiro diagrama acima, para os esquemas R e S resulta no diagrama desejado.

$$\begin{array}{ccc} Quot^{P_{TX}-P}(S) & \xrightarrow{\sim} & Hom(S, Q^{P_{TX}-P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Quot^{P_{TX}-P}(R) & \xrightarrow{\sim} & Hom(R, Q^{P_{TX}-P}) \end{array}$$



Capítulo 4

Classificação das distribuições de grau zero

Estudaremos o caso em que $\mathcal{F}$ é uma distribuição em codimensão 1 em $X = \mathbb{P}^3$. Definimos o **grau** da distribuição $\mathcal{F}$ como $d := 2 - c_1(T_{\mathcal{F}})$. Nesse caso, 3.1 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow T_{\mathbb{P}^3} \rightarrow I_Z(d+2) \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

onde $N_{\mathcal{F}} = I_{Z/\mathbb{P}^3}(d+2)$ é o subesquema singular de $\mathcal{F}$. A seguir, enunciemos o seguinte teorema que será essencial para os próximos resultados. Sua demonstração pode ser encontrada em [2] e utiliza as propriedades de classes de Chern listadas em 2.9.3.

Teorema 4.0.1. *Consideremos $\mathcal{F}$ uma distribuição em codimensão 1 e grau d em $\mathbb{P}^3$ com feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ e esquema singular Z . Seja $\mathcal{U}$ o subfeixe maximal de dimensão zero de $\mathcal{O}_Z$ de tal forma que o feixe quociente será o feixe estrutural do subesquema $C \subset Z \subset \mathbb{P}^3$ de dimensão pura 1. Então*

$$\begin{aligned} c_2(T_{\mathcal{F}}) &= d^2 + 2 - \deg(C) \\ c_3(T_{\mathcal{F}}) &= \ell(\mathcal{U}) = d^3 + 2d^2 + 2d - \deg(C)(3d - 2) + 2p_a(C) - 2 \end{aligned}$$

onde $p_a(C)$ denota o gênero aritmético de C e $\ell(\mathcal{U})$ o comprimento de $\mathcal{U}$.

Lembrete 4.0.2. C também pode ser vista como a componente de dimensão 1 de $\text{Sing}(\mathcal{F})$, enquanto $\mathcal{U}$ pode ser visto como a componente de dimensão zero de $\text{Supp}(\mathcal{F})$.

Agora, listemos alguns fatos referentes às cohomologias do feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ de codimensão 1 e grau d , onde $\mathcal{F}$ é da forma 4.1.

Lema 4.0.3. *O feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ de uma distribuição em codimensão 1 de grau d satisfaz.*

1. $T_{\mathcal{F}}^{\vee} = T_{\mathcal{F}}(d - 2)$;
2. $h^0(T_{\mathcal{F}}) = 0$ para $p \leq -2$;
3. $h^1(T_{\mathcal{F}}) = 0$ para $p \leq -d - 2$;
4. $h^2(T_{\mathcal{F}}) = 0$ para $p \geq d - 4$.

Demonstração. Temos que $T_{\mathcal{F}}$ é um feixe reflexivo de posto 2. Afirmamos, utilizando a proposição 2.6.9, que $T_{\mathcal{F}}^{\vee} = T_{\mathcal{F}} \otimes (\det T_{\mathcal{F}})^{\vee}$ e $(\det T_{\mathcal{F}})^{\vee} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c_1(T_{\mathcal{F}}))$. O segundo item segue imediatamente de 3.1, uma vez que $h^0(T\mathbb{P}^3(-2)) = 0$. Para a terceira, consideremos a seguinte sequência exata na cohomologia.

$$H^0(I_{Z/\mathbb{P}^3}(p + d + 2)) \rightarrow H^1(T_{\mathcal{F}}(p)) \rightarrow H^1(T\mathbb{P}^3(p))$$

O termo a esquerda se anula para $p + d + 2 \leq 0$. Por outro lado, o termo da direita se anula para todo p . A última afirmação é consequência imediata do Teorema da dualidade de Serre, cujo enunciado e demonstração podem ser encontradas em [7]. $\square$

A seguir, enunciemos o seguinte lembrete que será utilizado para a demonstração do próximo lema. Para mais detalhes, verifique [2].

Lembrete 4.0.4. ([2], lembrete 4.2) Se E é um feixe reflexivo de posto 2 em $\mathbb{P}^3$ e considerarmos

$$r := \min\{t \in \mathbb{Z} \mid h^0(E(t)) \neq 0\}$$

Dada uma seção não trivial $\sigma \in H^0(E(r))$, é possível notar que o conúcleo K associado ao morfismo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-r) \rightarrow E$ é um feixe livre de torção.

Antes de enunciar o resultado principal da seção, enunciemos o seguinte lema.

Lema 4.0.5. *Seja $T_{\mathcal{F}}$ o feixe tangente de um distribuição em codimensão 1 de grau d . Se $T_{\mathcal{F}}$ não se decompõe como a soma de fibrados de linha, então $h^0(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 0$.*

Demonstração. Dada uma seção não trivial $\sigma \in H^0(T_{\mathcal{F}}(-1))$, do lembrete anterior 4.0.4, temos que o conúcleo do morfismo associado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, pois $h^0(T_{\mathcal{F}}(p)) = 0$ para todo $p < -1$. Além disso, o seu lugar de zeros é não vazio, uma vez que $T_{\mathcal{F}}$ não se decompõe como soma de fibrados de linha. Portanto, obtemos a seguinte subfolheação

$$\mathcal{G} : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow T\mathbb{P}^3 \rightarrow N_{\mathcal{G}} \rightarrow 0$$

cujo lugar singular é constituído de apenas um ponto. Por outro lado, $\text{Sing}N_{\mathcal{G}}$ deve conter o lugar de zeros de σ , que possui dimensão 1. Portanto, temos que $h^0(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 0$. $\square$

Definição 4.0.6. Seja E um feixe livre de torção em $\mathbb{P}^3$. Sua **normalização**, denotada por E_{η} , é dada por

$$E_{\eta} := \begin{cases} E(-c_1(E)/2), & \text{se } c_1(E) \text{ é par,} \\ E(-(c_1(E) + 1)/2), & \text{se } c_1(E) \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.2)$$

A seguir, apresentemos o resultado principal do capítulo, a classificação das distribuições de grau zero em codimensão 1.

Proposição 4.0.7. *Se $\mathcal{F}$ é uma distribuição de grau zero em codimensão 1, então:*

- (i) *ou $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ e seu esquema singular é uma reta.*
- (ii) *ou $T_{\mathcal{F}} = N(1)$ para algum null correlation bundle N , como definido em (2.1), e seu esquema singular é vazio.*

Demonstração. Uma vez que $c_1(T_{\mathcal{F}}) = 2$, a normalização de $T_{\mathcal{F}}$ é, de acordo com a definição (4.0.6), $T_{\mathcal{F}}(-1)$. Se $h^0(T_{\mathcal{F}}(-1)) \neq 0$, então, como consequência imediata do lema (4.0.5), $T_{\mathcal{F}}$ se decompõe. Portanto, $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Assim, temos que o esquema singular possui dimensão pura 1, uma vez que $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre. Além disso, pelo teorema 4.0.1, tal esquema singular possui grau 1. Portanto, deve ser uma reta.

Por outro lado, se $h^0(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 0$, então $T_{\mathcal{F}}(-1)$ é um feixe estável com classes de Chern $c_1(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 0$ e $c_2(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 1 - \deg(C)$. A desigualdade de Bogomolov, que pode ser vista com mais detalhes em [1], garante que

$$0 < c_2(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 1 - \deg(C).$$

Portanto, $\deg(C) = 0$ e $c_2(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 1$. Por [4, Lem. 2.1], $T_{\mathcal{F}}(-1)$ é localmente livre. Por outro lado, todo feixe estável localmente livre N de posto 2 com $c_1(N) = 0$ e $c_2(N) = 1$ é um null correlation bundle. Segue daí que $T_{\mathcal{F}} = N(1)$ $\square$

Observe que ambos os exemplos podem ser verificados como distribuições em codimensão 1. Para o caso (i), uma vez que $h^0(T_{\mathcal{F}})(-1) = 4$, é possível escolher duas seções linearmente independentes de $H^0(T_{\mathcal{F}})(-1)$ para obter um morfismo injetivo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow T\mathbb{P}^3$. As distribuições do tipo (ii) podem ser descritas por meio da sequência exata abaixo.

$$0 \rightarrow N(1) \rightarrow T\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow 0$$

Capítulo 5

Classificação das distribuições de grau um

Finalmente, o objetivo desse capítulo é fornecer uma classificação completa para as distribuições holomorfas em codimensão 1 de grau 1 em $\mathbb{P}^3$. Para o resultado principal dessa seção, é necessário utilizar o seguinte lema:

Lema 5.0.1. *Se $T_{\mathcal{F}}$ é o feixe tangente de uma distribuição em codimensão 1 de grau $d \geq 2$, então $c_2(T_{\mathcal{F}}) \leq d^2 + 2$. Se, além disso, $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre e se seu esquema singular é reduzido, então:*

$$c_2(T_{\mathcal{F}}) \leq \frac{(2d-1)(2d-2)(d/3+2)}{3d}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.0.1, temos que $c_2(T_{\mathcal{F}}) = d^2 + 2 - \deg(C)$. Usando o fato de que $\deg(C) \geq 1$ quando $d \geq 2$, obtemos a primeira desigualdade.

Utilizando (iv) de 4.0.3, temos que $h^q(T_{\mathcal{F}}(p)) = 0$, para $p \geq d - 4$. Além disso, é mostrado no Lema 4.5 de [2], para $d \geq 2$, vale $h_1(T_{\mathcal{F}}(p)) = 0$ para $p \leq -d - 2$ e $p \geq 2d - 3$. Esses fatos, além da dualidade de Serre, implicam que vale $h^q(T_{\mathcal{F}})(p) = 0$, $q = 1, 2, 3$ e para $p \geq 2$. Disso segue que, a partir da definição de característica de Euler de um feixe, temos

$$\chi(T_{\mathcal{F}}(2d-3)) = h^0(T_{\mathcal{F}}(2d-3)) \geq 0.$$

É possível associarmos ao feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ o polinômio de Hilbert. Tal relação é dada por $P_{\mathcal{F}}(t) = \chi(T_{\mathcal{F}}(t))$. Assim, se $c = c_2(T_{\mathcal{F}})$ e $l = c_3(T_{\mathcal{F}})$, temos:

$$P_{\mathcal{F}}(t) = \frac{1}{3}(t+3)(t+2)(t+1) + \frac{1}{2}(t+2)(t+1)(2-d) - (t+2)c + \frac{1}{2}(l + (d-2)c).$$

Temos que $l \geq 0$ e $l = 0$ se, e somente se, $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre ([8], Proposição 2.6). Aplicando tais informações à fórmula anterior, para $t = 2p - 3$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$0 \leq \frac{1}{3} (2d(2d-1)(2d-2)) + \frac{1}{2} ((2d-1)(2d-2)(2-d)) - \frac{3dc}{2},$$

o que nos dá a estimativa desejada. $\square$

Além disso, enunciamos a seguinte desigualdade cuja demonstração pode ser encontrada em ([8], Teorema 8.2(d)).

Teorema 5.0.2. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe reflexivo de posto 2 em $\mathbb{P}^3$. Então, se $c_1(\mathcal{F}) = -1$ e $\mathcal{F}$ é estável, então $H^2(\mathcal{F}(l)) = 0$ se $l \geq c_2(\mathcal{F}) - 2$. Além disso, $c_3(\mathcal{F}) \leq (c_2(\mathcal{F}))^2$.*

Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de grau 1 em codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$ com singular esquema Z . Seja $\mathcal{U}$ o subfeixe maximal de dimensão zero de $\mathcal{F}$ e seja $C \subset Z$ o subesquema correspondente de codimensão pura 1. Da desigualdade ([16], Corolário 4.8),

$$\deg(C) \leq d^2 + d + 1$$

obtemos $\deg(C) \leq 3$. Consequentemente, usando a hipótese de que $d = 1$ e 4.0.1, obtemos:

$$c_2(T_{\mathcal{F}}) = 3 - \deg(C) \text{ e } c_3(T_{\mathcal{F}}) = 3 - \deg(C) + 2p_a(C).$$

Note que, mais uma vez, a normalização de $T_{\mathcal{F}}$ é, mais uma vez, $T_{\mathcal{F}}(-1)$. Disso, temos que:

- (i) ou $h^0(T_{\mathcal{F}})(-1) \neq 0$. Portanto o feixe tangente de $\mathcal{F}$ irá se decompor como soma de fibrados de linha, por 4.0.5, e, assim, vale a igualdade $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$.
- (ii) ou $h^0(T_{\mathcal{F}})(-1) = 0$ e $T_{\mathcal{F}}$ é um feixe estável e reflexivo.

No primeiro caso, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 0$ e Z possui dimensão pura 1, uma vez que $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre. Além disso, $\deg(Z) = 3$, $p_a(Z) = 0$ e

$$h^0(I_Z(1)) = h^0(T_{\mathcal{F}})(-2) = 0$$

Portanto, Z não pode estar contido em nenhum plano. Dessa forma, é uma curva cúbica torcida, possivelmente degenerada.

No segundo caso, utilizando a desigualdade de Bogomolov, $c_2(T_{\mathcal{F}}) \geq 1$. Então, vale $\deg(C) = 0, 1$ ou 2 . Analisemos cada possibilidade.

- (i) Se $\deg(C) = 0$, então $C = \emptyset$. Então, segue-se que $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 3$ e $c_3(T_{\mathcal{F}}) = 5$.
- (ii) Se $\deg(C) = 1$, então C é uma reta e, portanto, $p_a(C) = 0$. Assim, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 2$ e $c_3(T_{\mathcal{F}}) = 2$.
- (iii) Se $\deg(C) = 2$, como consequência, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 1$ e $c_3(T_{\mathcal{F}}) = 1 + 2p_a(C)$. Uma vez que $T_{\mathcal{F}}$ é reflexivo, devemos ter $c_3(T_{\mathcal{F}}) \geq 0$. Portanto, $p_a(C) \geq 0$. Por outro lado, uma vez que $T_{\mathcal{F}}$ é estável, devemos ter $c_1(T_{\mathcal{F}}) = -1$. Disso, utilizando a desigualdade, temos que $c_3 \leq 1$. Portanto, $p_a = 0$ e C é uma cônica possivelmente degenerada.

Abaixo, listemos os fatos obtidos na seguinte tabela.

5.0.1 Distribuições com singularidades isoladas

Proposição 5.0.3. *Se $T_{\mathcal{F}}$ é uma distribuição de grau um em codimensão 1 com singularidades isoladas. Então, seu feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ é dado pelo conúcleo do morfismo.*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \oplus T\mathbb{P}^3(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 6} \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow 0,$$

Além disso, existe um único morfismo. Em particular, F não admite subfolheações de grau < 2 e possui folheações de grau 2 singulares ao longo de uma curva Y de grau 5 e gênero aritmético -4.

Demonstração. No caso, temos $c_1(T_{\mathcal{F}}) = 1$, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 3$ e $c_3(T_{\mathcal{F}}) = 5$. O feixe normalizado $(T_{\mathcal{F}})_{\eta} = T_{\mathcal{F}}(-1)$ satisfaz $c_1((T_{\mathcal{F}})_{\eta}) = -1$, $c_2((T_{\mathcal{F}})_{\eta}) = 3$ e $c_3((T_{\mathcal{F}})_{\eta}) = 5$.

Observemos que $h^0((T_{\mathcal{F}})_{\eta}(1)) = h^0(T_{\mathcal{F}}) = 0$. Portanto, pelo lema 4.0.5, temos $h^0(T_{\mathcal{F}}(-1)) = 0$ uma vez que $T_{\mathcal{F}}$, por hipótese, não se decompõe como uma soma de fibrados de linha. Portanto, uma seção não nula de $T_{\mathcal{F}}$ induz uma subfolheação $\mathcal{G}$ de $T_{\mathcal{F}}$, de dimensão 1 e grau 1. Uma vez que $\text{Sing } \mathcal{F}$ possui dimensão 0, segue de que $\text{Sing } \mathcal{F}$ deve estar contido em um componente de dimensão zero de $S_0(\mathcal{G})$ de $\text{Sing}(\mathcal{G})$. Porém, é possível mostrar que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ possui comprimento 5 enquanto o comprimento de $S_0(\mathcal{G})$ é no máximo 4.

Isso mostra que $(T_{\mathcal{F}})_{\eta}$ corresponde a um ponto genérico do espaço de moduli de posto estável 2 e feixes reflexivos com classes de Chern $c_1 = -1$, $c_2 = 3$ e

$c_3 = 5$. Portanto, segue de um resultado anterior que $T_{\mathcal{F}}$ é dado pelo conúcleo de um morfismo de feixes localmente livres.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \bigoplus T\mathbb{P}^3(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 6} \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow 0,$$

É possível mostrar que $h^0(T_{\mathcal{F}}(1)) = 6$.

Agora, mostraremos que $h^0(T\mathbb{P}^3 \otimes T_{\mathcal{F}}^{\vee}) = 1$. Uma vez que $T_{\mathcal{F}}^{\vee} = T_{\mathcal{F}}(-1)$, torcendo a sequência anterior por $T\mathbb{P}^3(-1)$, temos:

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^3(-3) \bigoplus T\mathbb{P}^3 \otimes T\mathbb{P}^3(-4) \rightarrow T\mathbb{P}^3(-2)^{\oplus 6} \rightarrow T\mathbb{P}^3 \otimes T_{\mathcal{F}}^{\vee} \rightarrow 0.$$

Tabela 1: Distribuições de grau 1 em codimensão 1; todas as possibilidades listadas.

deg(C)	$c_2(T_{\mathcal{F}})$	$c_2(T_{\mathcal{F}})$	$T_{\mathcal{F}}$	Sing($T_{\mathcal{F}}$)
0	3	5	estável	5 pontos
1	2	2	estável	uma reta e 2 pontos
2	1	1	estável	uma cônica e um ponto
3	0	0	se decompõe	uma cúbica torcida

Tensorizando a sequência anterior por $T\mathbb{P}^3$, tomando a cohomologia e usando a fórmula de Bott, temos:

$$0 = H^0(T\mathbb{P}^3(-2))^6 \rightarrow H^0(T\mathbb{P}^3 \otimes T_{\mathcal{F}}^{\vee}) \rightarrow H^1(T\mathbb{P}^3(-3)) \oplus h^1(T\mathbb{P}^3 \otimes T\mathbb{P}^3(-4)) \rightarrow H^0(T\mathbb{P}^3(-2))^6 = 0.$$

Uma vez que $h^1(T\mathbb{P}^3(-3)) = 0$, concluímos que $h^0(T\mathbb{P}^3 \otimes T_{\mathcal{F}}^{\vee}) = h^1(T\mathbb{P}^3 \otimes T\mathbb{P}^3(-4))$. Agora, para calcularmos $h^1(T\mathbb{P}^3 \otimes T\mathbb{P}^3(-4))$, é necessário tomar a cohomologia e utilizar a fórmula de Bott. Dessa forma, concluímos que:

$$h^0(T\mathbb{P}^3 \otimes T_{\mathcal{F}}^{\vee}) = h^1(T\mathbb{P}^3 \otimes T\mathbb{P}^3(-4)) = 1.$$

□

Exemplo 5.0.4. Seja $\mathcal{F}$ a distribuição com $c_1(T_{\mathcal{F}}) = 1$, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 3$, $c_3(T_{\mathcal{F}}) = 5$ induzida por

$$\omega = (z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)dz_3 - (z_3z_0 + z_2z_1)dz_0 + (z_2z_0 - z_3z_1)dz_1 - z_3z_2dz_2$$

O esquema singular de $\mathcal{F}$ é $\{2[i : -1 : 0 : 0], 2[i : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\}$.

5.0.2 Distribuições com conjunto singular sendo uma reta e dois pontos

Proposição 5.0.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição em codimensão um de grau um cujo esquema singular é a união de uma linha com dois pontos. Então, seu feixe tangente é um feixe reflexivo estável com classes de Chern $c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 2$ e $\text{Sing}(\mathcal{F})$ não pode estar contido em um plano. Além disso, $\mathcal{F}$ possui uma única subfolheação de grau singular ao longo de linhas reversas, ou sua degeneração uma estrutura não plana de grau dois em uma reta.*

Demonstração. Nesse caso, $c_1(T_{\mathcal{F}}) = 1$ e $c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 2$. Além disso, o feixe normalizado $(T_{\mathcal{F}})_{\eta} = T_{\mathcal{F}}(-1)$ satisfaz $c_1((T_{\mathcal{F}})_{\eta}) = -1$ e $c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 2$.

$$h^0((I_{Z/\mathbb{P}^3})_{\eta}(1)) = h^0((T_{\mathcal{F}})_{\eta}(-1)) = 0,$$

Portanto, $\text{Sing}(\mathcal{F})$ não pode estar contido em um plano.

Além disso, $h^0(T_{\mathcal{F}}) = h^0((T_{\mathcal{F}})_{\eta}(1)) = 1$. É possível mostrar que uma seção não nula de $T_{\mathcal{F}}$ se anula a partir de linhas reversas. Essa seção induz uma subfolheação em codimensão um de grau 2. $\square$

A seguir, damos um exemplo onde isso ocorre.

Exemplo 5.0.6. Considere a distribuição não integrável $\mathcal{F}$ com $c_1(T_{\mathcal{F}}) = 1$, $c_2(T_{\mathcal{F}}) = 2$ induzida por

$$\omega = (z_0^2 + z_1^2)dz_3 - z_3(z_0dz_0 + z_1dz_1) + z_1(z_0dz_2 - z_2dz_0)$$

O esquema singular de $\mathcal{F}$ é $\{z_0 = z_1 = 0\} \cup \{2[0 : 0 : 1 : 0]\}$.

5.0.3 Distribuições cujo conjunto singular é uma cônica e um ponto

Inicialmente, enunciemos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada nas referências.

Proposição 5.0.7. *Seja E um feixe reflexivo globalmente gerado em $\mathbb{P}^3$. Então, $E(1 - c_1(E))$ é o feixe tangente de uma distribuição $\mathcal{F}$ em codimensão 1 de grau $d = c_1(E)$, com $c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_2(E) - c_1(E) + 1$ e $c_3(T_{\mathcal{F}}) = c_3(E)$*

Nesse caso, o feixe tangente deve ser um feixe estável reflexivo com $c_1(T_{\mathcal{F}}) = c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 1$. Além disso, pode-se afirmar mais

Teorema 5.0.8. *Seja E um feixe estável reflexivo de posto 2 com classes de Chern $c_1(E) = c_2(E) = c_3(E) = 1$. Então, tal feixe é feixe tangente de uma distribuição em codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$ cujo conjunto singular é a união de uma curva de grau 2 e de gênero zero com um ponto não contido no mesmo plano.*

Demonstração. Seja E um feixe estável reflexivo de posto 2 com classes de Chern $c_1(E) = c_2(E) = c_3(E) = 1$. Sua normalização é $E_\eta = E(-1) = E^\vee$. Dessa forma, $c_1(E_\eta) = -1$ e $c_2(E_\eta) = c_3(E_\eta) = 1$. E_η , por ([8], Prova do Lema 9.3, p. 166), é dada pelo conúcleo de um morfismo

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3} \rightarrow E_\eta \simeq E \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

Segue de 5.0.7 que $E^\vee(1) = [E(-1)](1) = E$ é o feixe tangente de uma distribuição em codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$.

De acordo com a mesma igualdade estabelecida por 4.0.1, conclui-se que $\deg(C) = 2$. Utilizando tal fato e a segunda igualdade provada no mesmo resultado, conclui-se que $p_a(C) = 0$. Além disso, por [13], Corolário 1.6 (b), p. 370), tais curvas serão planares. Por outro lado, por meio da análise da sequência exata longa induzida pela sequência exata

$$0 \rightarrow E \rightarrow T\mathbb{P}^3 \rightarrow I_{Z/\mathbb{P}^3}(3) \rightarrow 0$$

obtemos que $h^0(I_Z(1)) = h^1(E(-2))$. Além disso, a sequência exata longa associada a 5.1 implica que $h^1(E(-2)) = 0$. Disso, segue que Z não está contido em um plano, portanto C e o ponto adicional não podem estar contidos no mesmo plano. $\square$

Os dois próximos exemplos mostram duas distribuições diferentes com o mesmo esquema singular. Em ambos os casos, os feixes tangentes não são localmente livres. Isso é para ser contrastado com onde os autores fornecem condições para distribuições localmente livres serem determinadas por seus esquemas singulares.

Exemplo 5.0.9. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação genérica com $c_1(T_{\mathcal{F}}) = c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 1$ induzida por

$$\omega = (z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)dz_3 - z_3(z_0dz_0 + z_1dz_1 + z_2dz_2)$$

O esquema singular de $\mathcal{F}$ é $\{2[i : -1 : 0 : 0], 2[i : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\}$.

Exemplo 5.0.10. Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição não integrável com $c_1(T_{\mathcal{F}}) = c_2(T_{\mathcal{F}}) = c_3(T_{\mathcal{F}}) = 1$ induzida por

$$\omega = (z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)dz_3 - z_3(z_0dz_0 + z_1dz_1 + z_2dz_2) + z_3(z_0dz_1 - z_1dz_0)$$

O esquema singular de $\mathcal{F}$ é $\{2[i : -1 : 0 : 0], 2[i : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\}$.

Exemplo 5.0.11. Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição não integrável induzida por

$$\omega = z_0z_2dz_1 + z_2(z_1 - 2z_3)dz_0 + z_1z_2dz_3 + z_1(z_3 - 2z_0)dz_2$$

O esquema singular de $\mathcal{F}$ é $\{2[i : -1 : 0 : 0], 2[i : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\}$.

5.0.4 Distribuições com feixe tangente localmente livre

Corolário 5.0.12. Se $\mathcal{F}$ é uma distribuição de grau em codimensão um com feixe localmente livre, então $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$. Além disso, $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é uma curva cúbica torcida, possivelmente degenerada, não contida em um plano.

Exemplo 5.0.13. Como explicado anteriormente, toda distribuição com $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ é dada por coordenadas homogêneas por uma 1-forma do tipo:

$$\omega = A_0(z_0, z_0, z_0, z_0)dz_0 + A_1(z_0, z_0, z_0, z_0)dz_1 + A_2(z_0, z_0, z_0, z_0)dz_2$$

Onde cada A_j é homogênea de grau 2 e $\sum_{i=0}^2 z_i A_i = 0$. Em particular, consideremos a distribuição $\mathcal{F}$ não integrável induzida pela 1-forma:

$$\omega = z_0z_2dz_0 + z_2(z_3 - z_1)dz_1 + z_0z_3dz_2$$

Note que $A_0 = z_0z_2$, $A_1 = z_2(z_3 - z_1)$ e $A_2 = z_0z_3$ são os determinantes das submatrizes 2×2 da matriz 2×3

$$\begin{bmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \\ z_3 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

Mostrando que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é de fato uma curva cúbica torcida não degenerada.

Referências

- [1] Bomogolov, F., McQuillan, M. *Rational curves on foliated varieties* Preprint IHES M/01/07, 2001.
- [2] Calvo-Andrade, O., Corrêa, M., e Jardim, M. *Codimension One Holomorphic distributions on the projective three space* International Mathematics Research Notes, 2018.
- [3] Camacho, C. e A. Lins Neto. *Geometric Theory of Foliations* Boston: Birkhäuser, 1985.
- [4] Chang, M. C. *Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984): 57–84.
- [5] Esteves, E. *Construção de Espaços de Moduli* 21º Colóquio brasileiro de Matemática Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.
- [6] Giraldo, L., Pan-Collantes, A. J. *On the singular scheme of codimension one holomorphic foliations in $\mathbb{P}^3$* Internat. J. Math., Volume 21, 2010.
- [7] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry* New York: Springer-Verlag, 1977.
- [8] Hartshorne, R. *Stable Reflexive Sheaves* Mathematische Annalen: Springer-Verlag, 1980.
- [9] Huybrechts, D e M. Lehn *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves* 2º edição Cambridge University Press, 2010.
- [10] Jouanolou *Equations de Pfaff Algebriques* Cambridge University Press, 1994.
- [11] I. Kolář, P. W. Michor and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer, Berlin, 1993.
- [12] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2003.

- [13] Nollet, S., *The Hilbert schemes of degree three curves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), Volume 30, 1997.
- [14] Perrin, D. *Algebraic Geometry - An Introduction* Springer-Verlag London Limited, 2008.
- [15] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1* Moscow: Springer-Verlag, 1988.
- [16] Soares, M. G. *Holomorphic foliations and characteristic numbers* Commun. Contemp. Math. 7 (2005).
- [17] Vakil, R. *The Rising Sea - Foundations of Algebraic Geometry*, 2017 <https://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf>.
- [18] Weibel, C. A. *An introduction to homological Algebra* Cambridge University Press, 1994.