

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Lucas Mourão Vieira Montese

**PERTURBAÇÕES ESCALARES
PRÉ-INFLACIONÁRIAS EM UNIVERSOS
FECHADOS NA COSMOLOGIA QUÂNTICA
DE LAÇOS**

Belo Horizonte
2025

Lucas Mourão Vieira Montese

**PERTURBAÇÕES ESCALARES
PRÉ-INFLACIONÁRIAS EM UNIVERSOS FECHADOS
NA COSMOLOGIA QUÂNTICA DE LAÇOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo

Belo Horizonte

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M779p Montese, Lucas Mourão Vieira.

Perturbações escalares pré-inflacionárias em universos fechados na cosmologia quântica de laços / Lucas Mourão Vieira Montese. – 2025.
128 f. : il.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 111-120.

1. Cosmologia. 2. Radiação cósmica de fundo. I. Título. II. Yokomizo, Nelson de Oliveira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 523.11(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente tese, intitulada "**Perturbações escalares pré-inflacionárias em universos fechados na cosmologia quântica de laços**", de autoria de **LUCAS MOURÃO VIEIRA MONTESE** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOCTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**, em 09 de maio de 2025.

Belo Horizonte, 09 de maio de 2025.

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
Orientador do estudante
Departamento de Física /UFMG

Prof. Glauber Carvalho Dorsh
Departamento de Física /UFMG

Prof. Hermano Endlich Schneider Velten
Departamento de Física /UFOP

Prof. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física/UERJ

Prof. Humberto de Almeida Borges
Instituto de Física/UFBA



Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo, Professor do Magistério Superior**, em 12/05/2025, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rudnei de Oliveira Ramos, Usuário Externo**, em 12/05/2025, às 15:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 12/05/2025, às 20:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Humberto de Almeida Borges, Usuário Externo**, em 13/05/2025, às 09:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hermano Endlich Schneider Velten, Usuário Externo**, em 18/06/2025, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 4190157 e o código CRC **B2B78F8A**.

Agradecimentos

É com enorme satisfação que chego ao final de uma importante etapa da minha carreira. Embora a rotina de um pesquisador inclua momentos de solidão, ninguém trilha esse caminho sozinho. O apoio e incentivo de familiares e amigos foram essenciais para a realização desta tese, e a eles expresso minha profunda gratidão.

Inicio agradecendo à minha companheira, Taís, por compartilhar comigo não apenas o peso dos momentos difíceis, mas também as alegrias que a vida proporciona. Aos meus pais, que sempre demonstraram apoio incondicional e respeito pelas minhas escolhas. Aos tios, tias, primos e primas, pelo suporte e pelos momentos de descontração. Aos amigos que estiveram presentes ao longo desses anos, tornando a jornada mais leve. E aos meus gatos, Chico e Nut, que me fizeram companhia em várias madrugadas de estudos.

Faço uma menção especial aos familiares que partiram recentemente: meus avós, Antônio e Martha, que sempre se orgulharam até das minhas mais singelas conquistas; tio Lincão e tio Hélio, que, cada um à sua maneira, me serviram de inspiração. Ao Seu Zé e à Dona Zina, avós da Taís, que desde o início me acolheram como parte da família.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Nelson, não apenas pela excelente orientação, mas também pelo caráter humano, sempre demonstrado ao lidar com situações adversas, como a pandemia de Covid-19, que foi penosa para todos nós. Sua calma e compreensão foram determinantes para a continuidade do meu trabalho.

Agradeço também a todos que fizeram parte do GFT. Em especial, a José Roberto Pereira Júnior, que nos deixou precocemente. José foi um grande físico, um grande ser humano e um grande amigo. Nossos papos sobre física e sobre a vida, sempre acompanhados de uma ou duas cervejas, marcaram alguns dos momentos mais agradáveis do meu doutorado. Obrigado, amigo!

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais, ao Departamento de Física e aos docentes que fizeram parte desta jornada. Por fim, expresso minha gratidão ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, cuja contribuição foi fundamental para que essa pesquisa pudesse ser realizada.

Resumo

As perturbações no campo escalar do ínfaton no universo primordial são analisadas para o modelo de Starobinsky em um universo fechado com um plano de fundo descrito pela cosmologia quântica de laços (LQC), incluindo um regime inflacionário consistente com restrições impostas pelas observações da radiação cósmica de fundo (CMB). A dinâmica do plano de fundo, representada por uma hamiltoniana efetiva da LQC, elimina a singularidade inicial do *Big Bang* ao induzir um *bounce*. Análises numéricas demonstram que diferentes escolhas de condições iniciais e do valor de curvatura afetam a duração do regime inflacionário e podem produzir diferentes tipos de soluções, denominadas de soluções do tipo I, II, III. Soluções do tipo III são aquelas de maior interesse, já que representam um plano de fundo em que a curvatura espacial e efeitos da gravitação quântica são relevantes, enquanto soluções do tipo I caracterizam aproximações planas do plano de fundo e soluções do tipo II retratam um *bounce* clássico. As condições iniciais são determinadas através dos parâmetros cosmológicos inflacionários \mathcal{A}_s e n_s , estimados a partir das observações da missão PLANCK (2018). A evolução das perturbações lineares é descrita no formalismo ADM, através da determinação da expansão da hamiltoniana até a ordem quadrática nas perturbações no calibre espacialmente esférico, com coeficientes de evolução bem comportados no *bounce*. É adotado um vácuo adiabático de quarta ordem como estado inicial, fixado em um instante anterior ao *bounce*. As perturbações são evoluídas numericamente até o fim da inflação para diferentes modos k , onde são relacionadas com o escalar de curvatura comóvel $\mathcal{R}(k)$ para se obter o espectro de potência $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$, em que diferentes valores de curvatura Ω_K são utilizados. Efeitos de gravitação quântica e de curvatura espacial afetam as maiores escalas dos espectros. As correções incluem oscilações e uma amplificação da potência. Os resultados são comparados com as previsões inflacionárias usuais em um universo plano. Para valores do parâmetro de curvatura $|\Omega_K| > 10^{-8}$, a média das oscilações do espectro se desvia da previsão inflacionária, sendo incompatível com as observações. Os valores de curvatura que produzem correções no espectro consistentes com as observações se restringem ao intervalo $|\Omega_K| \lesssim 10^{-8}$.

Palavras-chave: cosmologia; perturbações escalares; universo fechado; cosmologia quântica de laços; dados observacionais; radiação cósmica de fundo; inflação cósmica; regime pré-inflacionário; formalismo ADM.

Abstract

The perturbations in the inflaton scalar field within the primordial universe are analyzed for the Starobinsky model, considering a closed universe with a background described by loop quantum cosmology (LQC), including an inflationary regime consistent with constraints imposed by cosmic microwave background (CMB) observations. The background dynamics, governed by an effective Hamiltonian in LQC, resolve the initial Big Bang singularity by inducing a bounce. Numerical analyses reveal that different choices of initial conditions and curvature values affect the duration of the inflationary regime, leading to different classes of solutions, referred to as type I, II, and III. Type III solutions are of greatest interest, as they represent a background where spatial curvature and quantum gravity effects play a significant role, whereas type I solutions characterize flat approximations of the background, and type II solutions depict a classical bounce. The initial conditions are set based on the inflationary cosmological parameters \mathcal{A}_s and n_s , inferred from PLANCK mission observations (2018). The evolution of linear perturbations is described within the ADM formalism by determining the expansion of the Hamiltonian up to quadratic order in the perturbations in the spatially spherical gauge, ensuring well-behaved evolution coefficients at the bounce. The initial state is chosen as a fourth-order adiabatic vacuum, fixed at a moment prior to the bounce. Perturbations are then numerically evolved through the inflationary period for different modes k , which are subsequently related to the comoving curvature perturbation $\mathcal{R}(k)$ to obtain the power spectrum $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$, with different values of curvature Ω_K considered. Quantum gravity and spatial curvature effects influence the largest scales of the spectra, introducing corrections such as oscillations and power amplification. The results are compared against standard inflationary predictions in a flat universe. For curvature parameter values $|\Omega_K| > 10^{-8}$, the average of the spectral oscillations deviates from the inflationary prediction, becoming incompatible with observations. The curvature values that yield spectrum corrections consistent with observations are constrained to $|\Omega_K| \lesssim 10^{-8}$.

Keywords: cosmology; scalar perturbations; closed universe; loop quantum cosmology; observational data; cosmic microwave background; cosmic inflation; preinflationary regime; ADM formalism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	RELATIVIDADE GERAL E TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	16
2.1	Princípios da relatividade	16
2.2	Teoria quântica de campos	20
2.2.1	Teoria clássica de campos	21
2.2.2	Quantização canônica do campo escalar	24
2.2.3	Teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo	25
3	CONSTRUÇÃO DE UM MODELO COSMOLÓGICO	29
3.1	O Universo hoje	31
3.2	Modelo ΛCDM	37
3.2.1	Perturbações da métrica	41
3.3	Inflação	44
3.3.1	Perturbações no campo escalar	47
3.3.2	Perturbação da curvatura comóvel (\mathcal{R})	49
3.4	A dinâmica quântica do período pré-inflacionário	52
4	TÉCNICAS UTILIZADAS PARA DESCREVER O PLANO DE FUNDO E AS PERTURBAÇÕES	57
4.1	Descrição do plano de fundo a partir das observações da missão PLANCK	57
4.2	Harmônicos hiperesféricos	62
4.3	Formalismo ADM: plano de fundo	64
4.4	Formalismo ADM: perturbações	68
4.5	Método numérico	73
5	ANÁLISES NUMÉRICAS E DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA	77
5.1	A dinâmica inflacionária e pré-inflacionária do plano de fundo	77
5.1.1	Evolução do plano de fundo com diferentes condições iniciais	77
5.1.2	Influência da curvatura espacial na evolução do plano de fundo	82
5.1.3	Investigação de parâmetros e condições iniciais no <i>bounce</i>	85
5.2	Análise das perturbações	92

5.2.1	Análise dos coeficientes da equação das perturbações escalares e a determinação das condições iniciais	92
5.2.2	Evolução numérica das perturbações escalares e o espectro de potência primordial	94
6	DISCUSSÃO	99
7	CONCLUSÕES	107
	REFERÊNCIAS	110
	ANEXOS	120
	ANEXO A – CÓDIGOS	121
A.1	Determinação de condições iniciais e parâmetros a partir dos dados do PLANCK	121
A.2	Evolução do plano de fundo e das perturbações	123

1 Introdução

A cosmologia é a ciência responsável por estudar o Universo como um todo, preocupando-se com a sua origem, sua evolução e com os processos que levaram à formação das estruturas observadas hoje. O ponto de partida para o estudo da cosmologia moderna é a teoria da relatividade geral, formulada por Albert Einstein em 1916 [1], que relaciona espaço, tempo e gravitação. De tal forma, a gravidade é uma manifestação da curvatura da malha espaço-temporal.

Dados observacionais forneceram informações importantes para o entendimento do comportamento do Universo, como por exemplo, as observações de Slipher. Em um trabalho publicado em 1917 [2], ele demonstrou que, em sua maioria, as galáxias então observadas estavam se afastando da Terra, sugerindo um universo em expansão. Também em 1917, o holandês Willem De Sitter demonstrou que a adição de uma constante cosmológica nas equações de Einstein poderia gerar uma força repulsiva, mesmo sem a presença de matéria, causando a expansão do espaço [3]. A relação entre a distância das galáxias e a velocidade com que elas se afastam foi estabelecida por Hubble, em 1929, através de novas observações [4].

Outra observação importante foi feita de forma acidental pelos astrônomos Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson em 1964, quando detectaram a radiação cósmica de fundo através de uma antena [5]. A radiação cósmica de fundo ou CMB (*cosmic microwave background*) representa o limite do universo observável através de radiação eletromagnética. Essa observação revelou um universo jovem, extremamente quente e homogêneo.

A CMB apresentou um novo desafio para a cosmologia, uma vez que o Universo era grande demais para estar em equilíbrio térmico, seguindo as teorias de expansão da época. Isto é, no momento em que a CMB foi emitida, duas regiões distintas não poderiam ter tido contato causal mesmo com a informação sendo transmitida à velocidade da luz, o que tornaria a termalização impossível. Esse problema viria a ser chamado de “problema do horizonte”. A solução surgiu quando Alan Guth formulou a teoria da inflação, em 1981 [6], propondo que o Universo teria passado por um período de expansão acelerada no seu surgimento, logo após o *Big Bang*.

Devido à expansão do espaço, o comprimento de onda da CMB é alongado, fazendo com que ela perca energia. Atualmente, sua temperatura é de aproximada-

mente 2,7 K. Após a detecção realizada por Penzias e Wilson, novas missões foram implementadas com o intuito de realizar observações mais precisas da CMB, onde foram detectadas anisotropias em sua temperatura da ordem de 10^{-5} K. Os dados mais recentes captados pela sonda espacial PLANCK, lançada em 2009 pela Agência Espacial Europeia (ESA), foram divulgados em 2018 (PLANCK 2018) e publicados em uma sequência de artigos em 2020 [7–10]. Essas pequenas variações da temperatura são, possivelmente, a origem dos processos que levaram à formação das estruturas atuais, como estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, etc. Além disso, são a principal fonte de informação do universo primordial [11].

Diversas observações e contribuições teóricas motivaram a formulação do modelo padrão da cosmologia, que é amparado pelo modelo Λ CDM, onde Λ representa a constante cosmológica e CDM é a sigla para *cold dark matter*, ou matéria escura fria. Em suma, ele considera a existência de energia escura e matéria escura, além dos componentes usuais da matéria e radiação. A proporção de cada um desses constituintes fornece parâmetros cosmológicos essenciais para a descrição do modelo [11]. No contexto inflacionário, dois parâmetros adicionais são necessários para caracterizar o modelo Λ CDM: A_s e n_s . Esses parâmetros estão associados, respectivamente, à amplitude e ao espectro das perturbações geradas durante a inflação [11].

A história do Universo contada pelo modelo padrão da cosmologia tem início na singularidade inicial do *Big Bang*, que logo em seguida passa pelo período de inflação cósmica [12]. As primeiras perturbações na homogeneidade do Universo surgiram de flutuações quânticas, que são amplificadas pela inflação, provocando as anisotropias na temperatura observadas na CMB [13]. Com o fim da inflação, inicia-se o reaquecimento, marcado pelo aumento da temperatura do Universo e por uma sequência de eventos descritos pelo modelo padrão de partículas, em que ocorre a formação dos primeiros núcleos atômicos por meio do processo de nucleossíntese cosmológica, conhecido como BBN (*Big Bang nucleosynthesis*). Nesse período, o Universo era dominado por radiação, mas permanecia opaco, pois a alta temperatura impedia que os fótons se propagassem livremente, interagindo constantemente com elétrons e núcleos atômicos [14]. Com a contínua expansão e consequente resfriamento do Universo, a radiação perdeu predominância e a matéria passou a dominar. Nesse estágio, aproximadamente 380 mil anos após o *Big Bang*, os fótons se desacoplaram dos átomos, originando a CMB [15]. Em uma fase posterior, com a diluição progressiva da matéria, a energia escura tornou-se o componente dominante da dinâmica cósmica, como ocorre até os dias atuais. Estima-se que a idade do Universo seja de aproximadamente 13,8 bilhões de anos [7].

Apesar do grande sucesso do modelo Λ CDM em se adequar às observações, existem discrepâncias na determinação de alguns parâmetros. Como ocorre com a definição do valor da constante de Hubble (H_0), a qual indica a taxa de expansão do Universo atualmente. Em geral, as determinações de H_0 baseadas em dados relacionados à CMB, como as missões WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [16] e PLANCK [9], entram em tensão com medidas locais, como as realizadas pelo projeto SH0ES (*Supernovae and H_0 for the Equation of State of dark energy*) [17, 18]. Essa discrepância é conhecida como tensão de Hubble. Sua causa é indeterminada, podendo ser uma evidência para uma nova física [19]. Os dados mais recentes do PLANCK (2018) confirmaram algumas outras tensões no modelo, além da tensão de Hubble, como a preferência por uma amplitude de lenteamento gravitacional aumentada, comparada ao valor previsto pelo modelo Λ CDM [20]. Há também uma tensão no conjunto de dados do PLANCK em relação aos valores dos parâmetros cosmológicos obtidos em diferentes escalas angulares [20].

O parâmetro de curvatura Ω_K é utilizado para determinar a curvatura espacial do Universo, de forma que $\Omega_K = 0$ representa um espaço plano e $\Omega_K < 0$ indica um espaço fechado. O modelo Λ CDM considera um universo espacialmente plano. Os dados do PLANCK 2018, no entanto, indicam uma preferência por um universo fechado, com $\Omega_K < 0$ em um nível de confiança de 99% [20, 21]. A presença de curvatura espacial também alivia algumas das tensões internas do PLANCK 2018, além de explicar a anomalia no efeito de lentes gravitacionais [20]. No entanto, a tensão em H_0 é aumentada [20].

Além das tensões detectadas pelo PLANCK, um outro problema do modelo Λ CDM são as anomalias de larga escala no espectro de potência da CMB [22]. Isto é, quando as anisotropias da temperatura da CMB são analisadas em ângulos grandes, a previsão do modelo não se adequa às observações. Diversos autores demonstraram que a presença de curvatura espacial pode produzir correções nas maiores escalas do espectro observável [23–29].

Nos primeiros instantes do Universo após o *Big Bang*, as escalas de comprimento eram bem menores do que são hoje e atingiam níveis quânticos. Esse período é conhecido como a Era de Planck [30]. Técnicas provenientes da gravitação quântica de laços aplicadas ao modelo cosmológico inauguraram uma área conhecida como cosmologia quântica de laços ou LQC (*loop quantum cosmology*) [31]. A aplicação dessas técnicas elimina a singularidade inicial do *Big Bang* e produz um ricochete do universo, no qual o espaço passa por um período de contração anterior à expansão. O instante em que o

ricochete ocorre é conhecido como *Big Bounce* ou simplesmente *bounce* [31]. Com uma escolha adequada de condições iniciais, em um período pré-*bounce*, as perturbações primordiais atravessam o *bounce*, que imprime efeitos de gravitação quântica nos maiores modos observáveis. Esses efeitos podem afetar as largas escalas do espectro de potência da CMB e, possivelmente, produzir correções nas regiões anômalas, como discutido em [32–42]. Em todos os casos, os trabalhos que estudam as implicações do modelo de LQC no espectro de potência da CMB consideram um universo plano. Logo, este trabalho se propõe a entender como os efeitos de LQC e de curvatura combinados afetam as perturbações primordiais.

O princípio cosmológico define o universo como homogêneo e isotrópico em larga escala [11]. A métrica FLRW é utilizada para descrever a geometria do espaço, que evolui através da variação do fator de escala $a(t)$ ao longo do tempo. Com curvatura positiva (o que implica em um parâmetro de curvatura Ω_K negativo), a métrica FLRW reproduz a geometria de uma 3-esfera [23], que representa a generalização de uma casca esférica em quatro dimensões. A descrição da dinâmica inflacionária e pré-inflacionária se completa ao associar um campo escalar ϕ ao conteúdo de matéria do universo. Portanto, as variáveis que descrevem a dinâmica se resumem ao fator de escala $a(t)$ e ao campo escalar $\phi(t)$. Em uma análise perturbativa, o campo escalar é representado como a soma de uma parcela homogênea $\bar{\phi}$ e uma parcela relacionada às perturbações $\delta\phi$, de forma que $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$. Analogamente, a métrica $g_{\mu\nu}$ é representada como $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, onde é realizada uma decomposição escalar, vetorial e tensorial da parcela relacionada às perturbações [43]. A parte homogênea do universo é chamada de plano de fundo.

Em modelos clássicos, a evolução do fator de escala é determinada pela equação de Friedmann e pela equação da aceleração (Raychaudhuri) [11]. Na representação quântica do plano de fundo, os trabalhos de [44, 45] apresentam uma descrição efetiva de um universo fechado em LQC, originalmente desenvolvida em [46]. Através da análise de valores médios da geometria para estados coerentes adequados, é produzida a hamiltoniana efetiva, que, através das equações de movimento, resulta em versões alternativas da equação de Friedmann e da equação da aceleração, que incluem contribuições quânticas.

O campo escalar, denominado ínflaton, evolui de acordo com a equação de Klein-Gordon. Ele é vinculado a um potencial $V(\phi)$ de natureza repulsiva [14]. Para que a inflação ocorra, é necessário que o potencial sustente um regime de rolamento lento, no qual sua variação ao longo da evolução do campo ϕ seja suficientemente

amena para induzir uma expansão acelerada do espaço. Diversos modelos para o potencial inflacionário são amplamente discutidos na literatura. No entanto, muitos foram desfavorecidos pelos dados do PLANCK 2018 [7]. Entre os modelos propostos, o potencial de Starobinsky [47–49], um dos pioneiros na formulação do regime inflacionário, se mantém consistente diante das observações realizadas pelo PLANCK 2018. Diante desse cenário, este trabalho adota o modelo de Starobinsky para descrever a inflação.

Em LQC, as perturbações são descritas através do formalismo ADM, que consiste em uma descrição hamiltoniana da relatividade geral. Seguindo os passos de [35], a hamiltoniana é descrita em termos das variáveis ϕ e a , de seus momentos conjugados, π_ϕ e π_a , respectivamente, e das variáveis de ADM. As perturbações são expandidas em séries de potências. Em ordem zero, as equações do plano de fundo são recuperadas. Em [35] é construída uma hamiltoniana com os termos de até a terceira ordem em universo plano, para se analisar as não-gaussianidades. Em um universo fechado, incorpora-se a geometria de uma 3-esfera às perturbações ao decompô-las em harmônicos hipersféricos [23, 43, 50, 51]. O calibre espacialmente esférico é utilizado como uma generalização do calibre espacialmente plano, para que as perturbações escalares sejam avaliadas somente em termos de $\delta\phi$. Os termos de segunda ordem nas perturbações são utilizados para determinar a hamiltoniana quadrática do sistema.

É possível obter uma equação de Klein-Gordon para as perturbações do campo escalar ao deduzir as equações de movimento a partir da hamiltoniana quadrática. Os coeficientes dessa equação dependem apenas de grandezas relacionadas ao plano de fundo. As condições iniciais são definidas em um regime adiabático, anterior ao *bounce*, utilizando as definições de vácuo adiabático de quarta ordem. Dessa forma, as perturbações são afetadas pelo regime de gravitação quântica e podem carregar seus efeitos até o fim da inflação. O espectro de potência primordial é determinado ao relacionar as perturbações escalares $\delta\phi$ com o escalar de curvatura comóvel \mathcal{R} , já que este é independente da escolha de calibre e se torna constante durante e após a inflação.

As condições iniciais do plano de fundo são deduzidas a partir dos parâmetros cosmológicos \mathcal{A}_s e n_s retirados do PLANCK [9] e dependem da escolha de um modo de referência k_* . A análise numérica demonstra que a variação das condições iniciais e dos valores de curvatura afetam a dinâmica do plano de fundo. Diferentes valores de k_* e Ω_K permitem estabelecer três tipos de solução, que são chamadas de soluções do tipo I, II e III. As soluções do tipo I representam aproximações planas, onde a

variação de Ω_K não afeta significativamente a dinâmica. Soluções do tipo II geram um plano de fundo em que os efeitos quânticos são desprezíveis e o *bounce* é provocado pela energia de curvatura, produzindo os chamados *bounce* clássicos. As soluções do tipo III são aquelas em que efeitos quânticos e de curvatura são importantes.

O espectro de potência do escalar de curvatura comóvel $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ é calculado a partir da função de dois pontos das perturbações, às quais são evoluídas numericamente para diferentes modos k e relacionadas a \mathcal{R} . Os valores selecionados para compor o espectro são determinados no fim da inflação, período em que \mathcal{R} é constante. O espectro de potência é gerado para diferentes valores de curvatura utilizando soluções para o plano de fundo do tipo III, para que se possa avaliar os efeitos da curvatura e do *bounce* em $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ para os modos observáveis na CMB. Os principais resultados alcançados neste trabalho motivaram a seguinte publicação em revista científica: [52].

Nos capítulos seguintes, são expostos os detalhes da formulação teórica e a análise dos resultados obtidos. No Capítulo 2, é realizada uma revisão da teoria em temas relacionados à relatividade geral e à teoria quântica de campos. O capítulo 3 apresenta o modelo cosmológico utilizado neste trabalho, traçando uma linha do tempo reversa, que vai dos dias de hoje, expondo como as observações recentes retratam o Universo e debatendo alguns dos principais problemas atuais da cosmologia, até o universo primordial, modelado pela cosmologia quântica de laços. Além disso, descreve-se o modelo Λ CDM e a inflação. No capítulo 4, são discutidas técnicas analíticas e numéricas utilizadas para a implementação do modelo e para a obtenção dos resultados. O Capítulo 5 exhibe os resultados numéricos obtidos relacionados ao plano de fundo (Seção 5.1) e às perturbações (Seção 5.2). O Capítulo 6 apresenta a discussão dos principais resultados e o Capítulo 7 contém as conclusões e perspectivas deste trabalho.

2 Relatividade geral e teoria quântica de campos

Neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais relacionados ao trabalho. Na Seção 2.1 discute-se a Teoria da Relatividade, a partir de uma breve introdução de relatividade restrita que, em seguida, introduz conceitos da relatividade geral, adotando como principais fontes as referências [53, 54]. A Seção 2.2 aborda as principais ideias da teoria quântica de campos, tendo em vista a formulação de um modelo cosmológico, começando com uma abordagem da teoria clássica de campos (Sec. 2.2.1), que utiliza as referências [55, 56]. Em seguida, é realizada a quantização canônica do campo escalar (Sec. 2.2.2), baseando-se em [56, 57]. Por fim, a teoria quântica de campos é levada a um nível mais geral, em que utiliza espaços-tempos curvos como plano de fundo (Sec. 2.2.3), empregando como principal referência o livro-texto [13] e como bibliografia auxiliar, [58, 59].

2.1 Princípios da relatividade

A relatividade restrita é uma formulação da mecânica invariante sob transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz agem de maneira análoga a rotações [56]. Dessa forma, em três dimensões, elas preservam a norma de um vetor, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. No entanto, a relatividade é descrita em quatro dimensões, sendo o tempo a quarta dimensão. Então, a norma do vetor posição, $x^\mu = (ct, x, y, z)$, converte-se em $s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. O sinal $-$ é utilizado na dimensão temporal e c é a constante que representa a velocidade da luz no vácuo. Por convenção, ao longo deste trabalho, são adotadas unidades nas quais $c = 1$.

Para formalizar as convenções utilizadas nesse trabalho, inicia-se pela representação de um vetor: $\mathbf{V} = (V^0, V^1, V^2, V^3)$, onde o índice 0 representa a componente temporal e os índices de 1 a 3 são as componentes espaciais. São utilizados índices gregos nas coordenadas para representar as quatro componentes de um vetor, enquanto índices romanos significam que só as três dimensões usuais do espaço estão incluídas, de tal forma que $V^\mu = (V^0, V^i)$. Também é utilizada a convenção da soma de Einstein, em que dois índices contraídos indicam uma soma das componentes: $V_\mu V^\mu = V_0V^0 + V_1V^1 + V_2V^2 + V_3V^3$.

Transformações de Lorentz são matrizes Λ que satisfazem:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde os espaços vazios são 0 e o símbolo $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica de Minkowski [56]. Portanto, as transformações de Lorentz preservam o produto interno:

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.2)$$

De forma geral, um vetor se transforma como $V^\mu \rightarrow \Lambda_\nu{}^\mu V^\nu$ [53].

A teoria da relatividade restrita descreve a dinâmica de corpos na ausência de campo gravitacional. A geometria do espaço-tempo é representada pela métrica de Minkowski, $\eta^{\mu\nu}$, que caracteriza um espaço-tempo sem curvatura [53].

Para descrever a teoria da relatividade geral, é necessário explicar a influência da gravidade na forma do espaço-tempo. A ideia é de que o campo gravitacional seja a própria manifestação da curvatura do espaço [54]. Dessa forma, descarta-se o conceito de força gravitacional, existente na mecânica newtoniana [54].

Em relatividade geral torna-se necessário diferenciar vetores com índice em cima V^μ (vetores contravariantes) e vetores com índice embaixo ω_μ (vetores covariantes ou 1-formas). Vetores contravariantes pertencem ao espaço vetorial \mathbb{V} , tangente ao espaço-tempo físico. Por sua vez, uma 1-forma é um funcional linear no espaço dual \mathbb{V}^* . Portanto, uma 1-forma atua mapeando vetores tangentes, pertencentes a \mathbb{V} , em números reais [54], de tal forma que:

$$\omega(a\mathbf{V} + b\mathbf{W}) = a\omega(\mathbf{V}) + b\omega(\mathbf{W}), \quad (2.3)$$

onde ω é uma 1-forma, a, b são escalares e \mathbf{V}, \mathbf{W} são vetores. Esses conceitos são generalizados com a definição de tensores. Um tensor do tipo (k, l) é um mapa multilinear que atua sobre uma coleção de l vetores e k 1-formas, descrito por uma lista de componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ [54].

A métrica é caracterizada por um tensor $(2, 0)$ simétrico de determinante não nulo. O símbolo que representa sua forma mais geral é $g_{\mu\nu}$. Logo, é possível determinar sua inversa

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu. \quad (2.4)$$

Ela também é utilizada para se obter o elemento de linha, que representa um intervalo infinitesimal entre dois pontos, definido como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.5)$$

As regras de transformação de um vetor sob uma mudança de coordenadas utilizam a matriz jacobiana $\partial x^{\mu'}/\partial x^\mu$ [53]. Na relatividade restrita, elas se resumem a transformações de Lorentz e descrevem mudanças de referencial inercial.

Na relatividade geral não se trabalha com um referencial inercial. Portanto, essas regras tornam-se mais gerais e podem incluir transformações que realizam mudanças arbitrárias de coordenadas [54]. A transformação das componentes de um vetor é descrita por:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu. \quad (2.6)$$

Enquanto a transformação das componentes de uma 1-forma é dada por:

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu, \quad (2.7)$$

e das componentes de um tensor, por:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k \nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l}, \quad (2.8)$$

representando a forma mais geral das transformações.

Uma outra manipulação possível a se fazer com tensores (estendendo-se para 1-formas e vetores) é a utilização da métrica para subir e descer índices:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T_\rho{}^\sigma. \quad (2.9)$$

Em espaços curvos, as derivadas também necessitam de definições especiais. Nesse contexto, em vez de derivadas parciais, utilizam-se derivadas covariantes, representadas pelo operador ∇ . É possível representar essas derivadas como a soma de uma derivada parcial e uma correção, que a torna covariante [54],

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (2.10)$$

O termo $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ é conhecido como símbolo de Christoffel [54]. Para uma conexão compatível com a métrica, ele é dado por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Em 1-formas, a derivada covariante age de forma semelhante, porém, com um sinal de menos acompanhando o símbolo de Christoffel [54]:

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\omega_{\nu}. \quad (2.12)$$

Também é possível definir uma derivada ao longo de uma curva. Em outras palavras, seria como estudar a variação de um vetor ao longo de um caminho. Para uma curva $x^{\mu}(\lambda)$ parametrizada por um parâmetro λ , a variação de um tensor sobre essa curva é descrita como uma derivada covariante direcional, definida como

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\nabla_{\mu}. \quad (2.13)$$

Diz-se que um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma curva quando sua derivada covariante direcional ao longo da curva se anula.

O transporte paralelo é utilizado para obter a equação das geodésicas, que descreve curvas de menor distância entre dois pontos dados [54]. Para isso, basta aplicar a Equação 2.13 em um vetor tangente a uma curva $x^{\mu}(\lambda)$. A condição para o transporte paralelo é, então,

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = 0. \quad (2.14)$$

Portanto, a equação das geodésicas torna-se:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (2.15)$$

A curvatura é quantificada pelo tensor de Riemann, definido em termos dos símbolos de Christoffel e suas derivadas [53]:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}, \quad (2.16)$$

onde as vírgulas indicam derivadas em relação às componentes que as seguem. O tensor de Ricci é definido como uma contração de dois índices específicos do tensor de Riemann [54],

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.17)$$

e o traço do tensor de Ricci é o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura [53]:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

O tensor de Ricci e o escalar de Ricci possuem toda a informação dos traços do tensor de Riemann. Ambos são utilizados para encontrar uma equação que descreva a geometria do espaço.

A partir desse momento, torna-se necessário determinar a fonte do campo gravitacional e entender como ela influencia a forma do espaço-tempo. Para isso, considera-se o análogo Newtoniano, que consiste em representar o potencial gravitacional Φ em termos da densidade de matéria ρ , descrito pela equação de Poisson [53]:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.19)$$

em que G é a constante gravitacional. A solução para um corpo pontual de massa M é $\Phi = -\frac{GM}{r}$.

A generalização relativística para ρ é o tensor energia-momento, representado por $T^{\mu\nu}$, tal que a componente T^{00} é a densidade de energia [54]. Assim sendo, a generalização da equação de Poisson é dada pela equação de Einstein [53]:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

onde o termo Λ representa a constante cosmológica. Essa constante pode ser interpretada como a representação da energia escura responsável por causar a aceleração da expansão do espaço [60, 61]. Na Equação 2.20 é possível observar que o lado direito refere-se à distribuição de matéria e energia, enquanto o lado esquerdo é função apenas da métrica e suas derivadas, definindo, portanto, a geometria do espaço.

Formalmente, é possível deduzir a equação de Einstein através do princípio da ação mínima, que envolve uma formulação lagrangiana da relatividade geral [54]. Utiliza-se uma ação do tipo $S = \frac{1}{16\pi G}S_H + S_M$, onde S_H é a ação de Einstein-Hilbert e S_M é a ação para a matéria. A ação de Einstein-Hilbert tem a forma $S_H = \int d^n x \sqrt{-g}R$, onde g é o determinante da métrica. A variação da ação δS produz o mesmo resultado descrito pela Equação 2.20.

2.2 Teoria quântica de campos

A teoria quântica de campos emerge da união de mecânica quântica e relatividade. Para traçar um caminho até a construção dos aspectos relevantes para este trabalho, discute-se em primeiro lugar a formulação clássica de campos, na Seção 2.2.1. Em seguida, na Seção 2.2.2, são discutidos os conceitos básicos da teoria, utilizando um espaço-tempo plano como plano de fundo. Por fim, a Seção 2.2.3 discute aspectos específicos da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos relevantes para o trabalho, como a definição do vácuo e o cálculo do espectro de potência dos campos quânticos.

2.2.1 Teoria clássica de campos

A teoria clássica de campos descreve a dinâmica de sistemas contínuos, que possuem infinitos graus de liberdade. A construção da teoria desfruta da possibilidade de formulá-la em termos da lagrangiana e da hamiltoniana [55, 56].

Em sistemas discretos, as funções lagrangiana, L , e hamiltoniana, H , envolvem somas sobre todos os graus de liberdade. Em sistemas contínuos, essas somas tornam-se integrais, em todo o espaço, de densidades lagrangiana, \mathcal{L} , e hamiltoniana, \mathcal{H} , respectivamente [55]:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (2.21)$$

A ação é a integral da Lagrangiana no tempo [55]:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Para uma lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ que seja um funcional apenas do campo ϕ e de suas primeiras derivadas, uma variação do tipo $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ provoca uma variação na ação. A notação ∂_μ indica derivada em relação a x^μ ,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z). \quad (2.23)$$

Desse modo, o princípio da ação mínima ($\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$) resulta em:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Essas são as equações de Euler-Lagrange, que são utilizadas para se obter as equações de movimento do sistema [56].

Por exemplo, dada a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2, \quad (2.25)$$

a aplicação das equações de movimento resulta em:

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (2.26)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano, definido como:

$$\square = \partial_\mu^2 = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (2.27)$$

A Equação 2.26 é a equação de Klein-Gordon. Ela descreve a dinâmica de um campo escalar livre [56].

No formalismo hamiltoniano, a dinâmica é descrita no espaço de fase. Para isso, é preciso definir o momento conjugado ao campo escalar [55]:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \dot{\phi}}, \quad (2.28)$$

onde $\dot{\phi} = \partial_t \phi$. A hamiltoniana é um funcional do campo e seu momento conjugado, $\mathcal{H}[\phi, \pi]$. Ela pode ser obtida através da transformada de Legendre da lagrangiana [56]:

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi \dot{\phi}(\phi, \pi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.29)$$

A transformação inversa é

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \pi(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} - \mathcal{H}(\phi, \pi(\phi, \dot{\phi})). \quad (2.30)$$

As equações de movimento na forma hamiltoniana são [55]

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}[\phi, \pi]}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}[\phi, \pi]}{\partial \phi}. \quad (2.31)$$

Campos que obedecem às equações de movimento e que estejam associados à alguma simetria, produzem uma quantidade conservada, de acordo com o teorema de Noether [55]. Um caso especial desse teorema leva a uma simetria da ação, que induz a um importante resultado, em que a corrente de Noether é o tensor energia-momento, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ [56].

O teorema de Noether pode ser aplicado a transformações nas coordenadas [56]. Esse tipo de transformação pode ser uma translação, que relaciona dois pontos por um simples deslocamento, da forma $y^\nu = x^\nu - \xi^\nu$, onde ξ^ν é um quadri vetor constante. Portanto, o campo escalar se transforma como:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \xi). \quad (2.32)$$

Considerando ξ^ν infinitesimal, pode-se dizer que:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \xi) = \phi(x) + \xi^\nu \partial_\nu \phi(x) + \dots, \quad (2.33)$$

onde termos de ordem superiores foram desprezados. Em outras palavras, pode-se dizer que o campo transformado sofre pequenas variações e pode ser descrito como: $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$. Isto é,

$$\frac{\delta\phi}{\delta\xi^\nu} = \partial_\nu \phi. \quad (2.34)$$

Essa relação também se aplica à lagrangiana [56]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi^\nu} = \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (2.35)$$

A simetria, neste caso, é em relação à ação [56]. Por isso, ao variar a ação, $\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}$, e utilizar a Equação 2.35, é obtido:

$$\frac{\delta S}{\delta \xi^\nu} = \int d^4x \partial_\nu \mathcal{L} = 0. \quad (2.36)$$

Tendo as equações de movimento obedecidas e utilizando as Equações 2.34 e 2.35 obtém-se

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \partial_\nu \phi_n \right), \quad (2.37)$$

Isto é,

$$\partial_\mu \left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \partial_\nu \phi_n - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0, \quad (2.38)$$

onde

$$J_\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \partial_\nu \phi_n - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.39)$$

são as correntes de Noether.

As quatro correntes de Noether produzidas pelo teorema compõem o tensor energia-momento [56]:

$$T_{\mu\nu} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \partial_\nu \phi_n - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.40)$$

A carga de Noether é uma quantidade conservada do sistema e é definida como [56]:

$$Q = \int d^3x J_0. \quad (2.41)$$

Logo,

$$\partial_t Q = 0. \quad (2.42)$$

Portanto, as cargas associadas ao tensor energia-momento são:

$$Q^\nu = \int d^3x \mathcal{T}^{0\nu} \quad (2.43)$$

A carga relativa às translações temporais representa a energia total do sistema e as cargas relativas às translações espaciais representam o momento [57].

2.2.2 Quantização canônica do campo escalar

Em mecânica quântica, um oscilador harmônico pode ser representado por um par de operadores a e a^\dagger , que são identificados como os operadores aniquilação e criação, respectivamente. A relação de comutação entre eles é $[a, a^\dagger] = 1$ e a hamiltoniana do sistema pode ser representada em termos desses operadores,

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.44)$$

onde ω é a frequência de oscilação.

Na teoria quântica de campos, o processo de criação e aniquilação de partículas é caracterizado por um campo quântico, descrito por um número infinito de osciladores harmônicos [56]. Dessa forma, é necessária a utilização da formulação clássica de campos para se abranger os infinitos graus de liberdade, para então promover as variáveis dinâmicas ϕ e π a operadores quânticos [56].

A equação de movimento, invariante sob transformações de Lorentz, mais simples que um campo pode satisfazer é [56]

$$\square\phi = 0. \quad (2.45)$$

A solução geral pode ser representada por uma decomposição do campo em modos de Fourier [56],

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^*(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \quad (2.46)$$

em que \vec{p} são momentos tridimensionais e as funções $a_{\vec{p}}(t)$ e $a_{\vec{p}}^*(t)$ satisfazem a equação $(\partial_t^2 + \vec{p}\cdot\vec{p})a_{\vec{p}}(t) = 0$ [56]. Essa é a solução exata de um oscilador harmônico [56].

Em analogia com o oscilador harmônico quântico, é possível promover o campo ϕ a um operador, que depende dos seus próprios operadores criação e aniquilação, $a_{\vec{p}}^\dagger$ e $a_{\vec{p}}$, respectivamente [57]:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad (2.47)$$

onde $\omega_p = |\vec{p}|$. A seguinte relação de comutação é válida:

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.48)$$

onde $\delta^{(3)}$ é o delta de Dirac [56].

A hamiltoniana do sistema torna-se [56]

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right). \quad (2.49)$$

A integral do termo proporcional a $\delta^{(3)}(0)$ diverge. Porém, a quantidade de interesse a ser calculada é a diferença de energia para o estado fundamental e não a energia absoluta do sistema [57]. Para isso, existem os métodos de renormalização, que são técnicas capazes de tornar essa energia finita. Contudo, por hora, é possível prosseguir apenas desconsiderando este termo [56].

O momento conjugado ao campo é dado por [56]:

$$\pi(\vec{x}, t) = \partial_t \phi(x)|_{t=0} = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right). \quad (2.50)$$

As relações de comutação do sistema tornam-se [56]:

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0, \quad (2.51)$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.52)$$

Com essas relações estabelecidas, é possível definir o estado fundamental ou estado de vácuo [57]:

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p}. \quad (2.53)$$

Nesse caso, a energia é igual a zero, desde que o termo infinito em 2.49 seja desconsiderado [57]. Todos os outros autoestados da energia podem ser construídos ao agir os operadores criação em $|0\rangle$ [57]. Isto é, o estado $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \cdots |0\rangle$ tem momento $\vec{p} + \vec{q} + \cdots$ e energia $\omega_p + \omega_q + \cdots$.

A amplitude de propagação de um campo ϕ de um ponto x a um ponto y é calculada através de [57]

$$D(x - y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad (2.54)$$

e o propagador de Feynman é definido por:

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle, \quad (2.55)$$

onde o símbolo T representa o operador de ordenação temporal, utilizado para se preservar a noção de causalidade [57]. O cálculo da amplitude de propagação do campo também é conhecido pelo nome de função de dois pontos.

2.2.3 Teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo

A descrição da dinâmica clássica de campos realizada na Seção 2.2.1 e a quantização do campo escalar realizada na Seção 2.2.2 utilizam a métrica de Minkowski

como plano de fundo. Para espaços-tempos genéricos, os efeitos da curvatura devem aparecer nas soluções. A primeira alteração a ser realizada é trocar as derivadas parciais por sua versão covariante, $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. Então, uma versão mais geral da densidade lagrangiana, representada pela Equação 2.25, torna-se [59]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2 \right], \quad (2.56)$$

onde ξ é a constante de acoplamento e R é o escalar de Ricci (Eq. 2.18). A Equação de Klein-Gordon obtida ao aplicar as equações de movimento (em analogia à Eq. 2.26) é,

$$\square \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0, \quad (2.57)$$

em que o símbolo \square , agora, denota a versão covariante do operador d'Alembertiano [59] (Eq. 2.27):

$$\square \phi \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left[g^{\mu\nu} \sqrt{g} \partial_\nu \phi \right]. \quad (2.58)$$

Importantes resultados podem ser obtidos ao considerar os efeitos de curvatura em campos quânticos. Em espaços-tempos cosmológicos, por exemplo, é possível observar o fenômeno da criação de partículas. Em modelos cosmológicos que satisfazem o princípio cosmológico, utiliza-se a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou simplesmente métrica FLRW, que tem a forma $ds^2 = -dt^2 + a(t)\Omega(x)$, onde $a(t)$ é o fator de escala e $\Omega(x)$ representa a parte espacial [11]. Com isso, é demonstrado que uma expansão rápida do fator de escala pode criar partículas. Este efeito não será abordado neste trabalho, mas pode ser estudado em [13, 58, 59]. A Equação 2.57, em que se utiliza a métrica FLRW, torna-se:

$$\partial_t^2 \phi + 3H \partial_t \phi - a(t)^{-2} \sum_i \partial_i^2 \phi + M^2 \phi = 0, \quad (2.59)$$

onde $M^2 = m^2 + 12\xi H^2$.

A teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos é extremamente ampla. O foco nesta seção será em um aspecto: a definição do vácuo, que pode ser ambígua. Em espaços-tempos curvos, não há um estado físico de vácuo único [13], como há em espaços-tempos de Minkowski, definido em 2.53.

É utilizado um método de regularização que considera as soluções dos campos dentro de uma caixa cúbica de comprimento L . Dessa forma, são estabelecidas condições de contorno espacialmente periódicas, do tipo:

$$\phi(\vec{x} + \vec{N}L, t) = \phi(\vec{x}, t), \quad (2.60)$$

onde $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$, em que cada n_i representa um número inteiro. Com isso, os momentos \vec{p} são substituídos por modos discretos \vec{k} (utilizando a notação de [13]). Após o cálculo, pode ser tomado o limite $L \rightarrow \infty$, tornando a inserção das soluções em uma caixa cúbica um artifício matemático [13]. Portanto, pode-se expandir o campo ϕ , que é solução de 2.59, no espaço de Fourier e representá-lo em termos de seus operadores aniquilação e criação ($A_{\vec{k}}$ e $A_{\vec{k}}^\dagger$), assim como foi feito em 2.47:

$$\phi = \sum_{\vec{k}} \left\{ A_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(x) + A_{\vec{k}}^\dagger f_{\vec{k}}^*(x) \right\}. \quad (2.61)$$

A função $f_{\vec{k}}(x)$, acompanhando o operador aniquilação $A_{\vec{k}}$, é denominada solução de frequência positiva, enquanto seu complexo conjugado, $f_{\vec{k}}^*$, que acompanha o operador criação $A_{\vec{k}}^\dagger$, é a solução de frequência negativa. A amplitude relacionada à solução de frequência positiva pode ser determinada como [13]:

$$f_{\vec{k}} = \left(2V a^3(t) \right)^{-1/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} h_k(t), \quad (2.62)$$

onde $V = L^3$ representa o volume da caixa cúbica de comprimento L . O termo $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ é função do espaço e o termo $h_k(t)$ representa uma função do tempo.

A solução dada pela Equação 2.62 pode ser substituída na Equação 2.59, se reduzindo a:

$$\ddot{h}_k + \Omega_k^2 h_k = 0, \quad (2.63)$$

onde

$$\Omega_k^2 = \left(-\frac{3}{4} H^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2} + M^2 \right). \quad (2.64)$$

O universo inflacionário, com $a(t) = \exp(Ht)$, possui as simetrias de um espaço de de Sitter [13]. Nesse caso, o fator de Hubble $H = \dot{a}/a$ é aproximadamente constante. Dessa forma, em um espaço minimamente acoplado ($\xi = 0$) e com o valor de massa desprezível em comparação às escalas de k , é possível realizar a seguinte aproximação [13]:

$$h_k \sim (Hv)^{-1/2} e^{iv}, \quad (2.65)$$

onde $v \equiv kH^{-1}e^{-Ht}$. A Equação 2.62, se valendo da aproximação realizada em 2.65, representa o vácuo de Bunch-Davies [62]. Esse vácuo é determinado ao especificar frequências altas dos modos k e requerendo invariâncias do grupo de de Sitter [13]. Algumas das aproximações realizadas ficarão mais claras na Seção 3.3, onde será abordada a inflação cósmica. Para soluções mais gerais do vácuo de Bunch-Davies, ver em [63].

Um outro método para encontrar soluções de $f_{\vec{k}}$ é através de uma aproximação adiabática, utilizada em regimes em que não há criação de partículas ou em que a taxa de produção de partículas seja baixa. Isso ocorre quando o fator de escala $a(t)$ varia lentamente e os modos k^2/a^2 são grandes em relação a $(\dot{a}/a)^2$ e \ddot{a}/a [13]. Tomando esse limite, a Equação 2.63 possui uma solução do tipo WKB:

$$h_k \sim (\omega_k(t))^{-1/2} \exp \left[-i \int^t \omega_k(t') dt' \right], \quad (2.66)$$

onde $\omega_k(t) = k/a(t)$, para um campo sem massa. Neste método, a ordem adiabática é contada a partir das derivadas temporais. Logo, o termo $\Omega_k^2 = \omega_k^2 + \sigma$ possui termos de ordem zero: ω_k^2 ; e de segunda ordem adiabática: $\sigma = -(3/4)(\dot{a}/a)^2 - (3/2)(\ddot{a}/a)$. Portanto, a Equação 2.66 representa uma solução para a ordem adiabática mais baixa. A solução geral para ordens mais altas é:

$$h_k = W_{2n}^{-1/2} \exp \left(\pm \int^t W_{2n} dt' \right) + O(T^{-2n-2}), \quad (2.67)$$

com

$$W_{2n} = \Omega_k (1 + \epsilon_2)^{1/2} (1 + \epsilon_4)^{1/2} \dots (1 + \epsilon_{2n})^{1/2}, \quad (2.68)$$

onde se estabelece a relação de recorrência:

$$\epsilon_{2j} = - (1 + \epsilon_{2j-2})^{-1/4} (W_{2j-2})^{-1} \frac{d}{dt} \left[(W_{2j-2})^{-1} \frac{d}{dt} (1 + \epsilon_{2j-2})^{1/4} \right], \quad (2.69)$$

em que

$$\epsilon_2 = -\Omega_k^{-3/2} \frac{d^2}{dt^2} \Omega_k^{1/2}. \quad (2.70)$$

Os índices n e j são inteiros. A solução, portanto, é para a ordem adiabática $2n$. O termo $O(T^{-2n-2})$ representa os termos de ordem $2n+2$ ou maior. Com isso, a Equação 2.67 define o estado de vácuo adiabático para ordem $2n$. A dedução completa das fórmulas se encontra em [13].

A função de dois pontos do campo, definida em 2.54 e 2.55, se relaciona com o seu espectro $\mathcal{P}_\phi(k, t)$, quando $x = y$ [13]. Isto é

$$\langle 0 | \phi(x)^2 | 0 \rangle = \int \mathcal{P}_\phi(k, t) k^{-1} dk. \quad (2.71)$$

Considerando a solução do campo 2.62, a expressão acima torna-se

$$\langle 0 | \phi(x)^2 | 0 \rangle = (4\pi^2 a(t)^3)^{-1} \int_0^\infty dk k^2 |h_k(t)|^2. \quad (2.72)$$

Dessa forma, é possível obter o espectro [13]:

$$\mathcal{P}_\phi(k, t) = (4\pi^2 a(t)^3)^{-1} k^3 |h_k(t)|^2. \quad (2.73)$$

Essa equação necessita de algum método de regularização e renormalização para que não haja divergência para k grande [13].

3 Construção de um modelo cosmológico

A construção de um modelo cosmológico busca o entendimento da evolução do Universo como um todo, desde sua origem até a formação das estruturas observadas atualmente. A base para este estudo é a relatividade geral, que relaciona espaço, tempo e gravitação [53, 54]. Outro pilar da cosmologia moderna é a concepção de que o Universo não é estático, mas está em expansão desde seu nascimento [64]. Estudos teóricos, como os trabalhos de De Sitter [3] e Friedmann [65], mostraram que a equação de Einstein pode descrever um universo em expansão. Tal previsão foi confirmada por observações de astrônomos, como as de Slipher, de 1917 [2], e de Hubble, de 1929 [4]. As observações mostraram que galáxias se afastam de nós com velocidade proporcional à distância, como demonstra a lei de Hubble:

$$v = H_0 r, \quad (3.1)$$

onde v é a velocidade de afastamento, r é a distância e H_0 é a constante de Hubble. A Equação 3.1 é válida apenas para galáxias próximas.

A medição das velocidades de afastamento é realizada considerando o quanto a luz emitida pelas estrelas e galáxias se desvia para o vermelho, efeito conhecido como efeito Doppler da luz [14]. O desvio para o vermelho z é definido como

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}, \quad (3.2)$$

onde λ_{obs} e λ_{emit} são os comprimentos de onda observados e emitidos, respectivamente. Ele satisfaz, para as galáxias mais próximas, a relação:

$$z = \frac{H_0}{c} r. \quad (3.3)$$

O valor de H_0 foi inicialmente determinado pelo próprio Hubble com um grande erro, $H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ [4]. Técnicas mais refinadas forneceram valores mais precisos. Medições realizadas pela sonda espacial PLANCK [9] ficaram em torno de $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. No entanto, existem outras expedições que realizaram a determinação de H_0 através de técnicas e fontes variadas, como, por exemplo, o projeto SH0ES (*Supernovae and H_0 for the Equation of State of dark energy*) [17, 18]. Eles utilizam medições das distâncias progressivas de Cefeidas e supernovas Ia para determinar o valor da constante de Hubble em $H_0 = 73,04 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Essa

discrepância entre os valores de H_0 é conhecida como a tensão de Hubble e o motivo para que ela ocorra ainda é desconhecido.

Os dados do PLANCK são baseados na observação de anisotropias da radiação cósmica de fundo ou CMB (*Cosmic Microwave Background*) [7]. Já a sonda SDSS-III (*Sloan Digital Sky Survey - III*) observa a distribuição de matéria em estruturas de larga escala para, entre outras coisas, detectar oscilações acústicas no plasma primordial [66, 67]. Essas oscilações também são chamadas de BAO (*baryon acoustic oscillations*). Todas essas observações e análises utilizam diferentes técnicas que podem se complementar, a depender de sua compatibilidade, para se chegar a resultados mais aprimorados de parâmetros cosmológicos.

O modelo Λ CDM é adotado como o modelo padrão da cosmologia [11]. Ele se baseia na existência de matéria escura fria (CDM, sigla para *cold dark matter*) e energia escura (Λ , para representar a constante cosmológica). Além disso, ele considera que o Universo teve início no *Big Bang* e, em seguida, passou por uma era de expansão acelerada, denominada de inflação cósmica. Ao todo, seis parâmetros são utilizados para descrever esse modelo. São eles: a constante cosmológica, parametrizada por Ω_Λ ; fração de matéria bariônica, Ω_b ; fração de matéria escura fria Ω_c ; desvio para o vermelho até a época da reionização, z_{ion} ; amplitude de flutuações escalares, A_s ; e índice espectral escalar, n_s [11]. Uma extensão do modelo, denominada de Λ CDM, considera a existência de curvatura espacial e adiciona um parâmetro extra, o parâmetro de curvatura espacial Ω_K [9].

Na sequência deste capítulo, são abordados os seguintes temas: Na Seção 3.1 discutem-se observações recentes que são confrontadas com modelos teóricos, com o objetivo de identificar concordâncias e divergências relevantes. Além disso, as questões que emergem dessa análise são debatidas, acompanhadas de uma revisão crítica da literatura relacionada. Na Seção 3.2, descreve-se o modelo Λ CDM, em que o universo é considerado homogêneo e isotrópico, determinando a evolução do que é chamado de plano de fundo. Em seguida, na Seção 3.2.1, realiza-se uma análise perturbativa da métrica. Na Seção 3.3, o mesmo é feito para se explicar a inflação: descreve-se, inicialmente, o plano de fundo e, em seguida, as perturbações na Seção 3.3.1. Ao final dessa seção, as perturbações são associadas a uma variável invariante sob transformações infinitesimais de calibre e que torna-se constante após a inflação (Sec 3.3.2). Por fim, na Seção 3.4, o regime pré-inflacionário é remodelado através da cosmologia quântica de laços, em que as singularidades do *Big Bang* são substituídas por um *bounce*, isto é, o universo passa por uma fase de contração anterior à expansão.

3.1 O Universo hoje

A sonda espacial PLANCK forneceu o mapa de temperatura da radiação cósmica de fundo (CMB) do Universo [7], que pode ser observado no painel da esquerda da Figura 1. A temperatura da CMB é extremamente homogênea, valendo aproximadamente $2,725\text{ K}$, com pequenas variações da ordem de 10^{-5} . As anisotropias presentes na CMB têm origem no Universo primordial e são causadas pelas perturbações cosmológicas. No período pré-inflacionário, assim como na inflação, essas perturbações são associadas a um campo escalar ϕ , que se relaciona com a variável perturbação de curvatura comóvel \mathcal{R} . Através da variável \mathcal{R} é possível associar o espectro de potência da CMB ao espectro de potência das perturbações primordiais $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ [11].

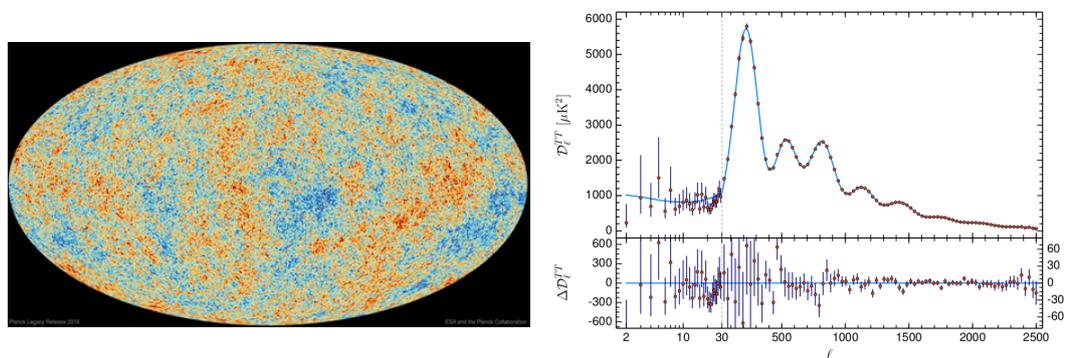


Figura 1 – Painel da esquerda: Mapa de temperatura da CMB obtido pela coleta de dados realizada pela sonda PLANCK, finalizada em 2018. Imagem retirada do site www.cosmos.esa.int. Painel da direita: Espectro de potência da temperatura da CMB. Figura retirada de [10].

O espectro de potência, representado pelo painel da direita da Figura 1, capta as anisotropias da temperatura da CMB, onde os pontos em vermelho representam os dados observacionais com suas respectivas barras de erro em roxo e a curva azul representa a previsão teórica [8, 10]. Este gráfico destaca o sucesso do modelo padrão da cosmologia em se adequar às observações, mas também exibe um problema histórico: as chamadas anomalias de larga escala [22]. Elas surgem da incapacidade do modelo teórico em prever o comportamento das observações quando o valor de multipolo ℓ é menor do que 30.

Diversos autores utilizam diferentes mecanismos para propor uma solução para esse problema. Muitos deles sugerem correções ao modelo padrão, como, por exemplo, a existência de curvatura espacial [23–29]. Em [23], as perturbações do campo escalar são analisadas em um universo fechado ($\Omega_K < 0$) para demonstrar a influência da curvatura espacial no espectro de temperatura. O resultado é comparado ao caso

plano, como é demonstrado na Figura 2. A curvatura espacial também pode provocar oscilações no espectro de potência primordial, como é demonstrado na Figura 3, à esquerda, que, conseqüentemente, afetam o espectro de temperatura, à direita, para diferentes valores de Ω_K .

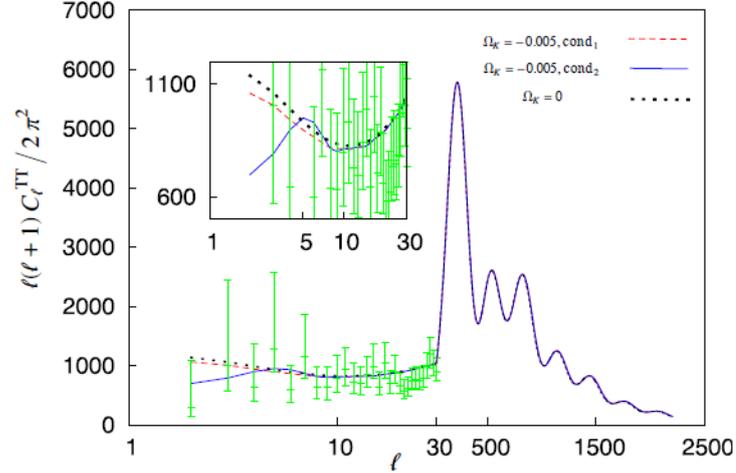


Figura 2 – Espectro de potência para casos de universos fechados ($\Omega_K < 0$) comparados ao modelo plano ($\Omega_K = 0$). Figura retirada de [23].

A presença de curvatura espacial é abordada nos resultados do PLANCK [9] ao estender o modelo base- Λ CDM para o $K\Lambda$ CDM [9]. O valor do parâmetro de curvatura encontrado, em seu melhor ajuste, foi de $\Omega_K = -0,056^{+0,044}_{-0,050}$. No entanto,

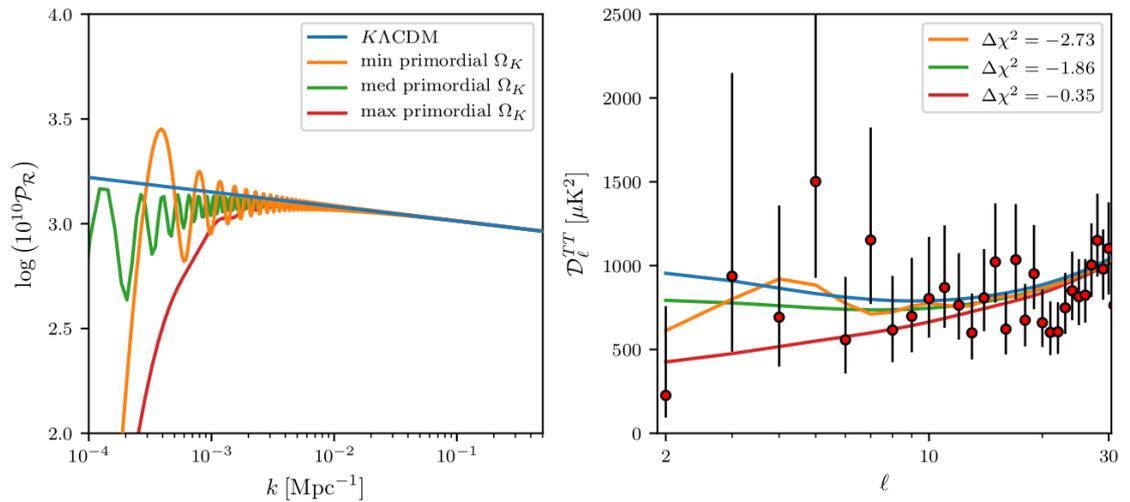


Figura 3 – Esquerda: Espectro de potência primordial \mathcal{P}_R , onde cada curva representa um diferente valor de Ω_K . Direita: Espectro de potência da CMB, para os mesmos valores de curvatura espacial do painel da esquerda. Figura retirada de [25].

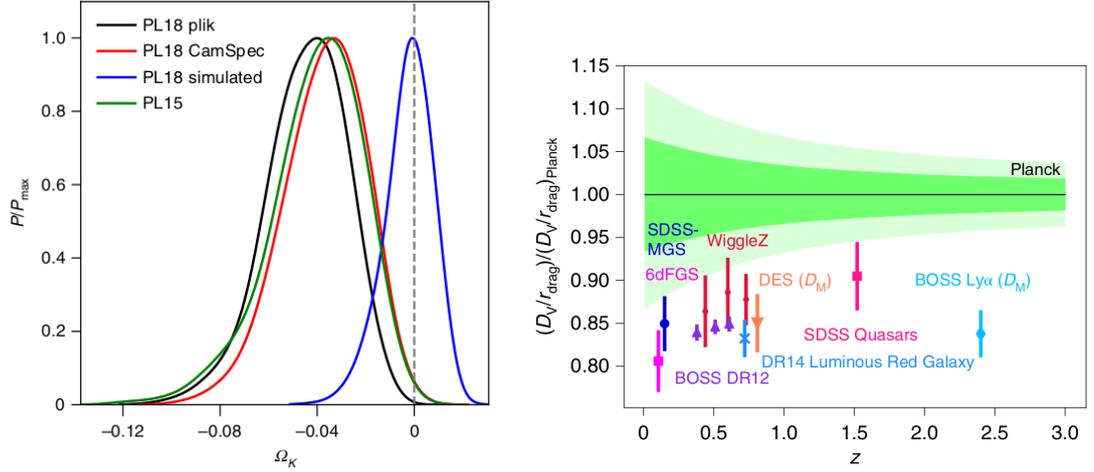


Figura 4 – Esquerda: Distribuição a posteriori por Ω_K , exibindo a preferência do PLANCK para um universo fechado. Em azul, a simulação do PLANCK 2018 utilizando o modelo Λ CDM. Em preto e vermelho, resultados calculados a partir de dados do PLANCK 2018 utilizando a base Plik e CamSpec, respectivamente. Em verde, dados da missão PLANCK coletados até 2015 (PLANCK 2015). Direita: Medidas da escala de distância acústica pela distância principal. A faixa em verde escuro e verde claro representam valores do PLANCK evoluídos no modelo Λ CDM, com 68% e 95% de confiança, respectivamente. Os pontos representam dados de BAO de diferentes experimentos. A figura evidencia a tensão entre os conjuntos de dados. Figuras retiradas de [20].

quando os dados do PLANCK são combinados com os dados de BAO, o novo valor torna-se $\Omega_K = -0,0007_{-0,0037}^{+0,0037}$, dando preferência a um universo espacialmente plano. Contudo, autores como [20, 21] argumentam que os dois conjuntos de dados não são compatíveis e não deveriam ser combinados. Além disso, os dados do PLANCK sozinhos têm preferência por um universo fechado. A Figura 4, no painel da esquerda, retrata como os dados do PLANCK corroboram uma preferência por $\Omega_K < 0$. A linha azul refere-se a uma simulação utilizando o modelo Λ CDM plano. As linhas preta e vermelha retratam os dados reais do PLANCK 2018, com uma variação no método de coleta. A linha verde utiliza dados da missão PLANCK coletados até 2015 (PLANCK 2015) a fim de comparação. No painel da direita, demonstra-se a tensão entre os dados do PLANCK e dados de BAO obtidos de observações variadas. O gráfico representa medidas de distâncias de escalas acústicas por z . A faixa verde refere-se aos dados do PLANCK evoluídos no modelo Λ CDM, onde a banda verde escuro apresenta 68% de confiança e a banda verde claro com 95%. Os dados de BAO são os pontos, cada um com o nome do seu respectivo experimento.

De acordo com [20], os dados do PLANCK sugerem um universo fechado com

$-0,007 > \Omega_K > -0,095$ a um nível de 99% de confiança. Além disso, a curvatura remove algumas tensões internas dos dados e pode explicar naturalmente anomalias no efeito de lentes gravitacionais. Porém, algumas tensões são amplificadas, como a tensão em H_0 , por exemplo [20].

O principal argumento para as tensões entre o PLANCK e as BAO é que os dados de BAO são evoluídos a partir do modelo base- Λ CDM intrinsecamente. Por isso, os trabalhos de [68–70] combinam os dados do PLANCK com conjuntos de dados sem nenhum modelo preestabelecido. Eles concluem que os dados combinados possuem uma preferência por um universo plano a um nível de $\mathcal{O}(10^{-1})$, em [68, 70], e a um nível de $\mathcal{O}(10^{-2})$, em [69].

Outro mecanismo que pode afetar as largas escalas do espectro de potência da CMB são efeitos da gravitação quântica nos períodos inflacionário e pré-inflacionário [32–37]. Nos primórdios do universo, quando o espaço era muito menor, efeitos quânticos não podem ser desprezados. A gravitação quântica de laços fornece técnicas que, quando aplicadas à cosmologia, inauguram uma área conhecida como cosmologia quântica de laços ou LQC (*loop quantum cosmology*). Um importante resultado dessa área é a eliminação das singularidades do *Big Bang* e a produção do *bounce* (mais detalhes na Seção 3.4). Logo, quando as perturbações primordiais passam pelo *bounce*, elas são afetadas e produzem oscilações no espectro de potência primordial, como pode ser observado na Figura 5, retirada de [36]. Na imagem, uma linha vertical delimita a janela de modos k observáveis, onde é visto que apenas os modos de maiores escalas são afetados pelas oscilações. Na Figura 6 (retirada de [33]), no painel da esquerda, o espectro de potência primordial das perturbações geradas em um modelo de LQC é representado pela linha azul, em comparação com a previsão inflacionária padrão, representada pela linha pontilhada. O painel da direita retrata o espectro de potência da temperatura contrastando os dois modelos.

Implicações fenomenológicas dos modelos de LQC no espectro da CMB foram estudadas em [38–42]. Em todos esses casos, um universo plano foi considerado. Portanto, um dos objetivos deste trabalho é entender como os efeitos de curvatura e LQC combinados são impressos nas escalas dos maiores modos observáveis das perturbações primordiais. A dinâmica efetiva do plano de fundo é descrita por uma equação de Friedmann modificada por contribuições quânticas para universo fechado, baseada em [44, 45] (Seção 3.4). As equações das perturbações são determinadas com correções de segunda ordem para espaços curvos na Seção 4.4. As condições iniciais são determinadas em um estado de vácuo em uma era pré-*bounce*. Então, a evolução

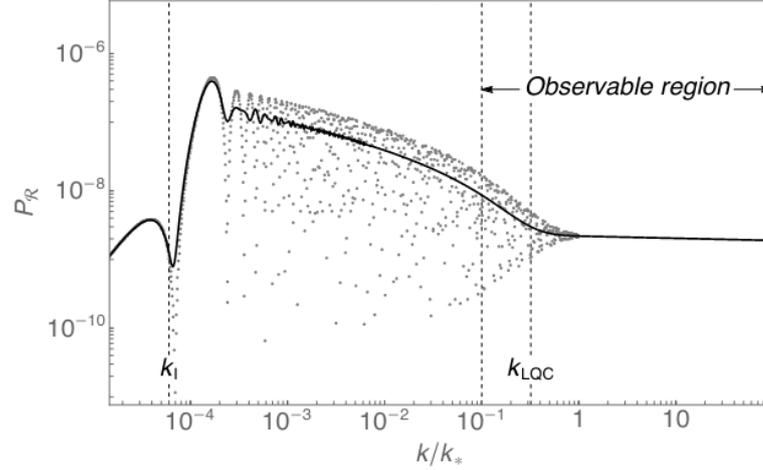


Figura 5 – Espectro de potência primordial em um modelo de LQC. Os pontos cinza representam o espectro calculado para um conjunto de modos discretos e a curva preta é a média de oscilação dos pontos. A escala característica da LQC, k_{LQC} , é denotada por uma linha vertical. Isto é, para $k < k_{LQC}$, os modos são excitados por efeitos de LQC durante a era de Planck. Uma outra linha vertical delimita a janela de modos observáveis e a linha com índice k_I representa o modo mais infravermelho que pode existir no horizonte durante a fase inflacionária do universo. Figura retirada de [36].

numérica das perturbações é realizada até o fim da inflação para que seja determinado o espectro de potência das perturbações de curvatura comóvel \mathcal{P}_R no fim da inflação (Sec. 5.2.2).

Um terceiro mecanismo estudado na literatura, que atua para corrigir as anomalias de larga escala, são modelos que alteram a duração da inflação [71–76]. No entanto, a curvatura espacial pode ser utilizada como um parâmetro que controla a duração da inflação, como é exibido neste trabalho, na Seção 5.1.2, e também foi demonstrado por [28].

A inflação cosmológica explica como as perturbações em um campo escalar são amplificadas em uma magnitude suficiente para gerar as flutuações observadas na CMB. Contudo, existem diversos modelos de potenciais que produzem um regime inflacionário [7]. A Figura 7 relaciona a razão entre perturbações escalares e tensoriais pelo índice espectral n_s . A região marcada em cinza representa os valores compatíveis com as observações realizadas pelo PLANCK 2018 e as áreas em vermelho e azul caracterizam combinações entre dados do PLANCK e outros conjuntos de dados. As áreas em roxo, verde e amarelo são representações teóricas. O parâmetro N_* é o número de e -folds, que é utilizado como um parâmetro para medir a duração da

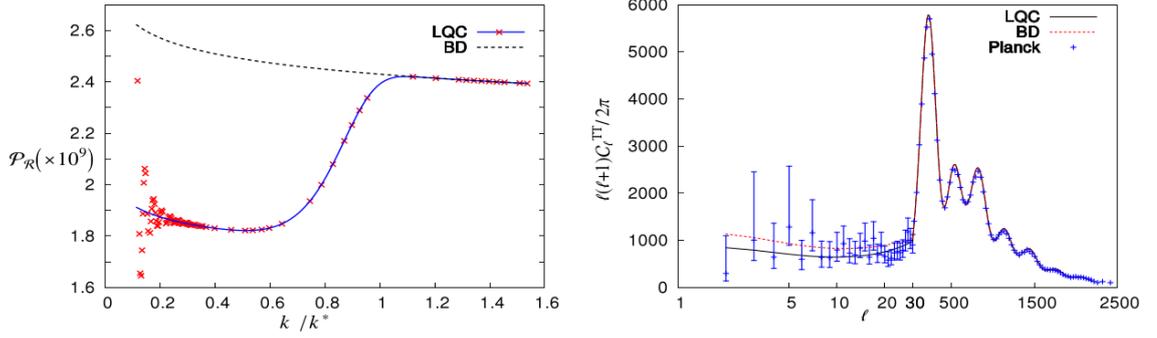


Figura 6 – Esquerda: Espectro de potência primordial. Os pontos vermelhos representam o cálculo numérico para alguns modos em LQC e a linha azul é a média de oscilações. A linha pontilhada representa a previsão do modelo padrão, baseada no vácuo de Bunch-Davies (BD) como condição inicial. Direita: Espectro de potência da temperatura. Em comparação, observa-se o espectro gerado em LQC (linha azul) e a previsão do modelo padrão (linha pontilhada vermelha). Os pontos azuis são dados do PLANCK. Figura retirada de [33].

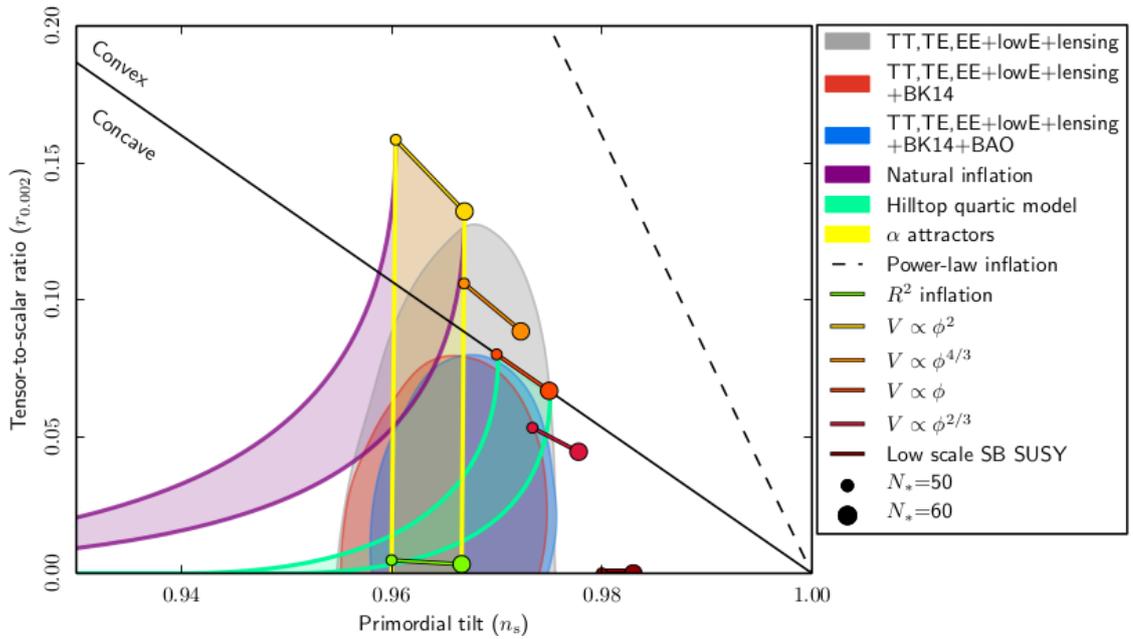


Figura 7 – Razão entre perturbações escalares e tensoriais pelo índice espectral. As áreas coloridas representam possíveis valores para medições e modelos teóricos. Os círculos ligados pelas barras representam diferentes modelos inflacionários com durações entre 50 (círculo menor) e 60 (círculo maior) e -folds. Figura retirada de [7].

inflação. De acordo com as observações do PLANCK, que utiliza como escala pivô o modo $k_* = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$, estima-se que o número de e -folds esteja entre $N_* \sim 50$ e

$N_* \sim 60$. Dessa forma, os diversos modelos de potenciais estão representados pelos círculos coloridos, onde o círculo menor indica a menor duração (50 *e-folds*) e o círculo maior, a maior duração (60 *e-folds*). As barras ligando os círculos são os valores intermediários.

Muitos dos modelos inflacionários não se encaixam nas regiões delimitadas pelas observações. No entanto, o potencial de Starobinsky [47–49] se mantém consistente com os dados do PLANCK. Na Figura 7 ele é representado pela barra verde (*R² inflation*). Por isso, neste trabalho, é utilizado o potencial de Starobinsky, que é descrito com mais detalhe na Seção 3.3.

3.2 Modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM determina a evolução do Universo a partir do fim da era inflacionária até os dias atuais. Ele leva em consideração a existência de energia escura (Λ) e matéria escura fria (CDM) [11]. O fato de ser fria implica que ela se refere à matéria não relativística, ou seja, possui uma velocidade baixa no contexto da relatividade geral. O modelo também inclui matéria relativística, que remete a neutrinos e outras partículas de velocidades altas [14]. A matéria comum não relativística, relacionada às partículas que formam os átomos, é chamada de matéria bariônica [12]. O restante do Universo é composto por radiação.

A expansão do espaço é descrita pelo fator de escala, $a(t)$, que é uma função do tempo [11]. Por convenção, é adotado $a_0 = a(t_0) = 1$, onde o índice 0 representa o tempo presente. O modelo Λ CDM utiliza a métrica FLRW que, para um caso geral, tem a forma [64]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2/R_0^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (3.4)$$

onde $K = -1, 0, 1$ é um parâmetro que indica a manifestação da curvatura espacial. No caso em que $K = -1$, obtém-se um espaço hiperbólico, que pode ser representado por um hiperbolóide embutido em um espaço Lorentziano de quatro dimensões, onde $R_0^2 > 0$ é uma constante que determina a curvatura do hiperbolóide. A outra possibilidade é quando $K = 1$, representando um espaço esférico e sua geometria pode ser descrita por uma três-esfera, onde R_0 é o raio da esfera. A última possibilidade é o caso mais simples, em que $K = 0$, representando um universo espacialmente plano [64].

Apesar deste trabalho considerar a existência de curvatura espacial ($K = 1$), em muitos momentos é possível utilizar uma aproximação para espaço plano ($K = 0$),

já que a inflação planifica o espaço devido à expansão acelerada que ocorre neste período. Nesse caso, a curvatura se manifesta apenas na dimensão temporal e a métrica em coordenadas cartesianas torna-se:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & a^2(t) & & \\ & & a^2(t) & \\ & & & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Para determinar como o fator de escala evolui no tempo, é necessário utilizar a Equação de Einstein (Eq. 2.20) com as componentes $\mu = \nu = 0$:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + g_{00}\Lambda = 8\pi GT_{00}. \quad (3.6)$$

As componentes do Tensor de Ricci são calculadas utilizando a métrica FLRW em sua forma mais geral (Eq. 3.4), considerando a existência de curvatura espacial. Portanto, utilizando as Equações 2.11, 2.16 e 2.17, é possível obter:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.7)$$

$$R_{i0} = R_{0i} = 0, \quad (3.8)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{c^2}g_{ij} \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2} \right), \quad (3.9)$$

onde

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.10)$$

é o Parâmetro de Hubble, que representa a taxa de expansão do Universo que varia com o tempo. Utilizando as Equações 3.7, 3.8, 3.9 e a Equação 2.18, o Escalar de Ricci torna-se:

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right]. \quad (3.11)$$

Logo, ao substituir os termos calculados na Equação 3.6 e valendo-se de que $T_{00} = \rho$ (a componente temporal do tensor energia momento é a densidade de energia ρ , como demonstrado na Seção 2.2.1), obtém-se:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (3.12)$$

Essa é conhecida como a Equação de Friedmann. Ela descreve a evolução do fator de escala em função do tempo. Reproduzindo o mesmo processo para as componentes $\mu = i, \nu = j$ da equação de Einstein, é possível obter uma equação para a aceleração de $a(t)$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.13)$$

onde P é a pressão.

A equação de Friedmann pode ser escrita de maneira equivalente substituindo-se o tempo físico t pelo tempo conforme η , definido como:

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.14)$$

o que leva a $dt = a(\eta)d\eta$ [77]. Logo, a Equação 3.12 pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda a^2}{3} - K, \quad (3.15)$$

onde a notação $'$ é utilizada para derivadas em relação a η . Analogamente, a Equação 3.13 torna-se

$$\frac{a''}{a^3} = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3P) + \frac{2}{3}\Lambda - \frac{K}{a^2}. \quad (3.16)$$

O modelo Λ CDM baseia-se no princípio cosmológico de que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala [14]. A partir dessa informação, é possível escrever o tensor energia-momento de forma simplificada:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

A forma relativística correspondente à conservação da energia é obtida ao igualar a derivada covariante desse tensor a zero, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ [11], o que significa dizer que:

$$\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} T^\mu{}_\alpha = 0. \quad (3.18)$$

Esta equação representa um conjunto de quatro equações independentes, simbolizadas pelo índice $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Para $\nu = 0$, a Equação 3.18 torna-se:

$$\frac{\partial T^\mu{}_0}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} T^\alpha{}_0 - \Gamma^\alpha{}_{0\mu} T^\mu{}_\alpha = 0. \quad (3.19)$$

Neste caso, apenas as componentes da diagonal principal do tensor energia-momento não são nulas ($T^0{}_0 = -\rho$, $T^i{}_i = 3P$). Portanto, utilizando as Equações 2.11, 3.5 e 3.19, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} [3\rho + 3P] = 0. \quad (3.20)$$

A densidade de matéria não relativística é representada por ρ_m e pode-se considerar que possui pressão nula, $P_m = 0$, devido à baixa velocidade das partículas [11]. Logo, reorganizando os termos da Equação 3.20 para ρ_m , obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho_m a^3)}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

Com isso, observa-se uma relação de ρ_m com o fator de escala, $\rho_m \propto a^{-3}$.

Utilizando as estatísticas de Fermi–Dirac e Bose–Einstein para sistemas em equilíbrio, encontra-se que, para espécies relativísticas, $P = \rho/3$ [11]. Então, utilizando a Equação 3.20, verifica-se que a relação de densidade de radiação com o fator de escala é $\rho_r \propto a^{-4}$. Assim sendo, convém definir a equação de estado, que para uma espécie genérica s , tem a forma:

$$w_s \equiv \frac{P_s}{\rho_s}. \quad (3.22)$$

Dessa forma, a matéria possui $w_m = 0$ e a radiação, $w_r = 1/3$. O parâmetro w_s da equação de estado para a constante cosmológica é $w_\Lambda = -1$, pois esta exerce uma pressão negativa sobre o espaço [11]. Contudo, para entender a relação da densidade com o fator de escala, integra-se a Equação 3.20 e, utilizando a Equação 3.22, obtém-se:

$$\rho_s(a) \propto \exp \left\{ -3 \int^a \frac{da'}{a'} [1 + w_s(a')] \right\}. \quad (3.23)$$

Se w_s for considerado constante, fica estabelecida a relação:

$$\rho_s(a) \propto a^{-3(1+w_s)}. \quad (3.24)$$

Para determinar a proporção de cada espécie, são introduzidos os parâmetros de densidade,

$$\Omega_s = \frac{\rho_s(t_0)}{\rho_c}, \quad (3.25)$$

onde ρ_c é a densidade crítica, que refere-se à densidade total do Universo na ausência de curvatura espacial [64]. Os constituintes do Universo podem ser: matéria escura fria (c), bárions (b), fótons (γ), neutrinos (ν), e a constante cosmológica (Λ) ou energia escura [11]. Também usa-se um índice r para todos os constituintes da radiação (fótons e neutrinos ultra-relativísticos), e m para a matéria não relativística total: $m = b + c$. Então, a densidade de cada espécie em função do fator de escala ganha a forma:

$$\rho_s(a) = \Omega_s a^{-3(1+w_s)}. \quad (3.26)$$

Quando o termo de curvatura espacial é considerado zero na Equação 3.12, define-se a densidade crítica como:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (3.27)$$

onde H_0 é o valor do parâmetro de Hubble quando $\rho = \rho_c$. Dessa maneira, é possível reescrever a Equação de Friedmann em um novo formato, que torna evidente os parâmetros de densidade (Eq. 3.25),

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_r}{a^4(t)} + \frac{\Omega_m}{a^3(t)} + \frac{\Omega_K}{a^2(t)} + \Omega_\Lambda \right], \quad (3.28)$$

onde $\Omega_K = K/\rho_c$ representa a fração de energia relacionada à curvatura espacial e $\Omega_\Lambda = \Lambda/3\rho_c$ é a fração que representa a energia escura. Portanto, é válida a relação $\Omega_r + \Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$.

A Equação 3.28 demonstra a evolução das diferentes espécies e como elas afetam a geometria em larga escala. Uma época importante para ser avaliada é quando houve uma equidade entre a densidade de matéria e a densidade de radiação [11]. Esse período marca o momento em que as perturbações observadas na CMB passaram a evoluir com diferentes taxas. Outro fator a ser observado é que o decaimento das energias, que são inversamente proporcionais a uma potência de $a(t)$, leva o universo para um domínio de energia escura, que é o momento em que estamos atualmente [11]. Além disso, é possível relacionar o desvio para o vermelho, introduzido na Equação 3.2, com o fator de escala através de:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_{emit})} = \frac{1}{a(t_{emit})}, \quad (3.29)$$

onde t_{emit} é o momento em que a radiação foi emitida.

O modelo Λ CDM pode ser inteiramente descrito através de seis parâmetros, enquanto a extensão do modelo que considera a curvatura espacial, o $K\Lambda$ CDM, é descrito por um total de sete parâmetros, já que ele inclui o parâmetro de curvatura Ω_K . Os demais parâmetros comumente utilizados são: Ω_Λ , Ω_b , Ω_c , z_{ion} , A_s e n_s . Os dois últimos são relativos à época da inflação e serão apresentados na Seção 3.3.1, onde são descritas as perturbações escalares neste período. Em geral, outros parâmetros que regulam a evolução do universo podem ser derivados a partir desses descritos.

3.2.1 Perturbações da métrica

A primeira parte dessa Seção considerou um universo perfeitamente homogêneo. A partir de agora, será realizado um estudo do comportamento das perturbações na métrica.

A métrica FLRW pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Omega_{ij}, \quad (3.30)$$

onde Ω_{ij} é a componente espacial. Considerando a métrica como a soma de uma parcela relacionada ao plano de fundo e uma parcela relacionada às perturbações,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

onde $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ [77], define-se um tensor $h_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ para representar as perturbações que é função do tempo e das coordenadas espaciais,

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \mathbf{x}) &= -1 + h_{00}(t, \mathbf{x}), \\ g_{0i}(t, \mathbf{x}) &= a(t)h_{0i}(t, \mathbf{x}) = a(t)h_{i0}(t, \mathbf{x}), \\ g_{ij}(t, \mathbf{x}) &= a^2(t) [\Omega_{ij} + h_{ij}(t, \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

De forma geral, é possível realizar uma decomposição escalar, vetorial e tensorial das perturbações [11],

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2A, \\ h_{0i} &= -\bar{D}_i B - B_i, \\ h_{ij} &= 2D\Omega_{ij} - 2\bar{D}_i \bar{D}_j E + \bar{D}_j V_i + D_i V_j + h_{ij}^{TT}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde deve-se satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \bar{D}_i B^i &= 0, & \bar{D}_i V^i &= 0, \\ \bar{D}^i h_{ij}^{TT} &= 0, & \Omega^{ij} h_{ij}^{TT} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

O operador \bar{D}_i é a derivada covariante relacionada à métrica espacial Ω_{ij} . Dessa forma, pode ser denominado de derivada comóvel. Os termos A , B , D e E são escalares, enquanto B_i e V_i são vetores e h_{ij}^{TT} é a parte tensorial das perturbações. Portanto, a componente h_{00} é apenas reescrita em termos de um novo escalar. A componente h_{0i} é um vetor tridimensional e h_{ij} é um campo tensorial tridimensional.

A forma explícita de uma perturbação depende da escolha de um sistema de coordenadas. Uma transformação de calibre é definida como uma mudança de referencial infinitesimal,

$$t \mapsto \hat{t} = t + \zeta(\mathbf{x}, t), \quad (3.35)$$

$$x^i \mapsto \hat{x}^i = x^i + \partial^i \xi(\mathbf{x}, t) + \alpha^i(\mathbf{x}, t), \quad (3.36)$$

onde $\zeta(\mathbf{x}, t)$ e $\xi(\mathbf{x}, t)$ são funções escalares e α^i é um vetor.

Utilizando essas mudanças de coordenadas, é possível calcular a transformação da métrica,

$$g_{\mu\nu} \mapsto \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (3.37)$$

em que cada componente torna-se:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{00} &= g_{00} + 2\frac{\zeta'}{a}, \\ \hat{g}_{0i} &= g_{0i} - a(\bar{D}_i\xi' + \alpha'_i) + \bar{D}_i\zeta, \\ \hat{g}_{ij} &= g_{ij} - a^2\bar{D}_i(\bar{D}_j\xi + \alpha_j) - a^2\bar{D}_j(\bar{D}_i\xi + \alpha_i) + 2Ha^2\zeta\Omega_{ij}.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Comparando as equações em 3.38 com 3.32 e 3.33, encontra-se que

$$\begin{aligned}\hat{g}_{00} &= -1 - 2\left(A - \frac{\zeta'}{a}\right), \\ \hat{g}_{0i} &= -a\bar{D}_i\left(B + \xi' - \frac{\zeta}{a}\right) - a(B_i + \alpha'_i), \\ \hat{g}_{ij} &= a^2\left[(1 + 2D - 2H\zeta)\Omega_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j(E + \xi) + \bar{D}_i(V_j - \alpha_j) + \bar{D}_i(V_i - \alpha_i) + h_{ij}^{TT}\right].\end{aligned}\quad (3.39)$$

Portanto, as componentes escalares, vetoriais e tensoriais das perturbações se transformam como

$$\hat{A} = A - \frac{\zeta'}{a}, \quad \hat{B} = B + \xi' - \frac{\zeta}{a}, \quad \hat{D} = D - H\zeta, \quad \hat{E} = E + \xi, \quad (3.40)$$

$$\hat{B}_i = B_i + \alpha'_i, \quad \hat{V}_i = V_i - \alpha_i, \quad (3.41)$$

$$\hat{h}_{ij}^{TT'} = h_{ij}^{TT}. \quad (3.42)$$

Perturbações escalares (Eq. 3.40) e vetoriais (Eq. 3.41) se transformam sob mudanças de coordenadas. Apenas as perturbações tensoriais (Eq. 3.42) são invariantes. Combinações das variáveis que descrevem as perturbações podem gerar medidas que são invariantes. As variáveis de Bardeen descrevem quantidades invariantes [78]:

$$\begin{aligned}\Phi_A &= A + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}[a(E' - B)], \\ \Phi_H &= -D + aH(B - E').\end{aligned}\quad (3.43)$$

O calibre Newtoniano é um tipo especial de calibre que inclui apenas as perturbações escalares. Ou seja, $B_i = V_i = 0$ e as funções ξ e ζ tornam-se:

$$\xi = -E, \quad \zeta = a(B + \xi'). \quad (3.44)$$

Portanto, têm-se $\hat{B} = \hat{E} = 0$. Renomeando as variáveis restantes, $\Psi \equiv \hat{A}$ e $\Phi \equiv \hat{D}$, a métrica torna-se

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(1 + 2\Phi)\Omega_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.45)$$

As variáveis de Bardeen se resumem a

$$\Phi_A = \Psi, \quad \Phi_H = -\Phi. \quad (3.46)$$

3.3 Inflação

O horizonte causal ou horizonte comóvel η_* determina a distância máxima com que duas partículas poderiam ter tido contato à medida que o universo se expande [11]. Em outras palavras, é a distância que a luz poderia ter viajado ao longo da expansão. Portanto, convém reescrever a Equação 3.14 como uma integral sobre o fator de escala, mudando a variável t para $\ln(a)$, resultando em

$$\eta(a) = \int_{-\infty}^{\ln a} d \ln a' \frac{1}{a'H} . \quad (3.47)$$

O raio comóvel de Hubble é definido como $\mathcal{D} = 1/aH$. Ele descreve uma noção local de horizonte causal, correspondendo aproximadamente ao raio da região espacial em que pode ter havido interação entre partículas enquanto o universo se expande por um fator de e [64]. É possível considerar que, em algum momento da história do Universo, o horizonte de Hubble era muito maior do que o observado na época da CMB, de forma a justificar sua homogeneidade. Uma expansão acelerada no início da expansão explicaria esse fato. Ou seja, conforme $1/aH$ diminui, $aH = \dot{a}$ aumenta, o que significa que $\ddot{a} > 0$. Esse período de expansão acelerada é chamado de inflação cósmica [6]. Quando a inflação cessa, a taxa com que o universo se expande diminui. Então, o raio de Hubble volta a aumentar, conforme demonstrado na Figura 8.

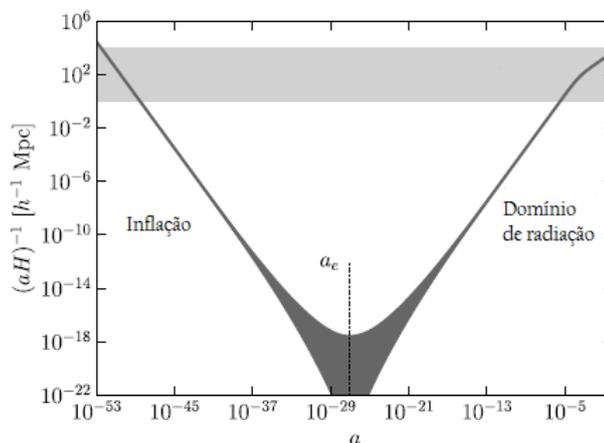


Figura 8 – Raio comóvel de Hubble em função do fator de escala. O valor de a_e determina o fim da inflação e a faixa cinza representa a a escala de modos que podem ser observados através da CMB. Figura retirada de [11].

Considera-se, então, que o período inflacionário apresenta uma expansão exponencial do fator de escala:

$$a(t) \propto e^{N_e(t)} , \quad (3.48)$$

onde $N_e(t) \propto (t - t_f)$ é o número de *e-folds* e é função do tempo t . O parâmetro t_f marca o fim da inflação. O número de *e-folds* é um parâmetro adimensional que determina a duração da inflação.

O campo escalar ϕ , utilizado para descrever a inflação, é chamado de *ínflaton* [6]. A decomposição em modos de Fourier desse campo fornece os números de onda k , que podem ser relacionados às perturbações geradas durante a inflação [13]. Portanto, quando o comprimento de onda dos modos, k^{-1} , é relacionado com o raio do horizonte comóvel de Hubble, $(aH)^{-1}$, são obtidas algumas das condições de contorno do problema. Isto é, no início da inflação, pode-se dizer que $(aH)^{-1} \gg k^{-1}$ para todos os valores de k . A medida que a inflação avança, o horizonte comóvel diminui e a partir do momento em que $aH \sim k$, é dito que os modos k saem do horizonte. Após a inflação, quando $(aH)^{-1}$ volta a aumentar, em algum momento os modos entram novamente no horizonte comóvel. Esses são os modos que podem ser observados por um observador no presente. A faixa de modos observáveis está representada pela faixa cinza na Figura 8 [11].

A lagrangiana associada ao campo ϕ na presença de um potencial $V(\phi)$ [11] é dada por:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - V(\phi). \quad (3.49)$$

O tensor energia-momento pode ser obtido a partir da lagrangiana (como demonstrado na Equação 2.40):

$$T^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - \delta^\alpha{}_\beta \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi) \right]. \quad (3.50)$$

Considerando um campo homogêneo, as derivadas parciais relativas às componentes espaciais podem ser consideradas nulas, $\partial_i\phi = 0$. Logo, restam somente as derivadas em relação ao tempo,

$$T^\alpha{}_\beta = g^{\alpha 0} \dot{\phi}^2 - \delta^\alpha{}_\beta \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.51)$$

Utilizando a componente tempo-tempo da Equação 3.51 é possível encontrar uma equação para a densidade de energia, já que $T^0{}_0 = -\rho$. Da relação $T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = P$, encontra-se a equação para a pressão:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.52)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.53)$$

Utilizando a Equação 3.20 e substituindo as Equações 3.52 e 3.53, é possível encontrar uma Equação de Klein-Gordon para ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.54)$$

onde $V_\phi = dV/d\phi$.

O termo $\dot{\phi}^2/2$ refere-se à energia cinética associada ao campo, enquanto $V(\phi)$ é o potencial repulsivo que causa a expansão [11]. Dessa forma, o parâmetro de estado w (Eq. 3.22) pode ser reescrito utilizando as Equações 3.52 e 3.53,

$$w = \frac{\mathcal{P}}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.55)$$

Durante a inflação, há um domínio do potencial sobre a energia cinética, o que significa dizer que em um limite em que $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$, o parâmetro de estado tem o valor $w = -1$. Essa é a primeira condição para o cenário de rolamento lento [64]. Esse cenário considera que no período inflacionário o potencial é praticamente constante [79], fazendo com que o campo role lentamente até encontrar seu valor base, como demonstrado na Figura 9. O potencial de Starobinsky [47–49] pode ser escrito na forma:

$$V(\phi) = \frac{3M_{Pl}^2}{32\pi} \left(1 - e^{-\sqrt{16\pi/3}\phi}\right)^2, \quad (3.56)$$

onde $M_{Pl} = \sqrt{\hbar/8\pi G}$ é a massa de Planck reduzida [12].

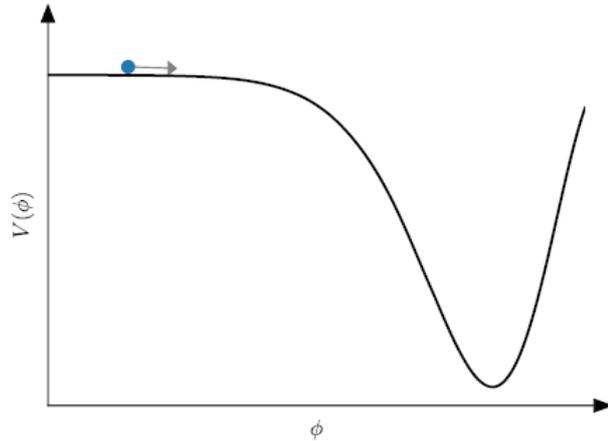


Figura 9 – Um campo escalar ϕ rolando lentamente por um potencial $V(\phi)$. Figura retirada de [11].

Uma consequência do rolamento lento é que o parâmetro de Hubble H também varia lentamente. Com isso, é possível estabelecer uma relação entre o tempo conforme

η e a taxa de expansão. Utilizando a Equação 3.47 e mudando novamente a variável de integração, $d \ln a = da/a$, obtém-se:

$$\eta(a) \equiv \int_{a_e}^a \frac{da}{Ha^2} \simeq \frac{1}{H} \int_{a_e}^a \frac{da}{a^2} \simeq -\frac{1}{aH}, \quad (3.57)$$

onde a_e indica o valor do fator de escala no fim da inflação, de forma que $a_e \gg a$, sendo a um valor intermediário. Outros dois parâmetros utilizados para descrever o rolamento lento são:

$$\epsilon \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = -\frac{H'}{aH^2} \quad (3.58)$$

e

$$\delta \equiv \frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\frac{1}{aH\dot{\phi}} [aH\phi' - \phi''] . \quad (3.59)$$

Eles indicam o quão rápido a taxa de expansão varia. No período em que H é praticamente constante, ϵ e δ são próximos de zero. Esses parâmetros também podem ser utilizados para descrever as perturbações primordiais, que serão abordadas na Seção 3.3.2.

3.3.1 Perturbações no campo escalar

O campo ϕ pode ser descrito como a soma de uma parcela homogênea $\bar{\phi}$ e uma parcela representando as perturbações lineares $\delta\phi$, assim como é descrito pela Equação 2.33. Dessa forma, o campo total é representado por:

$$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi. \quad (3.60)$$

De maneira análoga, é possível fazer o mesmo para o tensor energia-momento: $T^\mu{}_\nu = \bar{T}^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu$ [64]. Logo, respeitando a equação de conservação da energia, obtém-se:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \nabla_\mu \bar{T}^\mu{}_\nu + \nabla_\mu \delta T^\mu{}_\nu = 0. \quad (3.61)$$

A parte homogênea dessa equação é igual a zero, conforme se pressupõe na Seção 3.3. Portanto, conclui-se que $\nabla_\mu \delta T^\mu{}_\nu = 0$.

A métrica 3.5 é considerada, indicando uma aproximação de um universo espacialmente plano. As perturbações do campo escalar são representadas no espaço de Fourier, como realizado na Equação 2.61. Portanto, as derivadas espaciais são $\partial_i \delta\phi = ik_i \delta\phi$, de acordo com a Equação 2.62. Dessa forma, considerando a componente $\nu = 0$ da equação de conservação da energia (Eq. 3.18) para o termo relativo às perturbações do tensor energia-momento [11], é obtido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta T^0{}_0 + ik_i \delta T^i{}_0 + 3H \delta T^0{}_0 - H \delta T^i{}_j = 0. \quad (3.62)$$

Substituindo a Equação 3.60 na Equação 3.50, é possível calcular as componentes de $\delta T^\mu{}_\nu$. Considera-se que as derivadas parciais da parte homogênea do campo são zero, $\partial_i \bar{\phi} = 0$. Dessa forma, obtém-se

$$\delta T^0{}_0 = -\dot{\bar{\phi}}\delta\dot{\phi} - V_\phi\delta\phi, \quad (3.63)$$

$$\delta T^i{}_0 = \frac{ik_i\dot{\bar{\phi}}\delta\phi}{a^2}, \quad (3.64)$$

$$\delta T^i{}_j = \delta_{ij} \left(\dot{\bar{\phi}}\delta\dot{\phi} - V_\phi\delta\phi \right). \quad (3.65)$$

Utilizando esses resultados na Equação 3.62, chega-se a uma equação de Klein-Gordon para as perturbações do campo escalar:

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi = 0, \quad (3.66)$$

onde $k = \|\vec{k}\|$. Esta equação é semelhante à encontrada em 2.59 com $M^2 = 0$.

Para facilitar a interpretação da física do sistema e seguindo os passos de [11], ocorrerá a mudança da variável de tempo t para a variável de tempo conforme η (Eq. 3.47). Então, as derivadas em relação ao tempo d/dt são substituídas por $(1/a)d/d\eta$. No entanto, o resultado final dos cálculos pode ser facilmente retornado ao referencial de tempo próprio t . Dessa forma, a Equação 3.66 torna-se:

$$\delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + k^2\delta\phi = 0. \quad (3.67)$$

Seguindo os passos da Seção 2.2.3, realiza-se uma mudança de variável, tal que $h \equiv a\delta\phi$. Substituindo $\delta\phi$ por h , a Equação 3.67 torna-se

$$h'' + h \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) = 0. \quad (3.68)$$

Esta equação representa um oscilador harmônico e por isso, determina o estado de vácuo. Dessa forma, é possível promover h a um operador quântico e descrevê-lo em termos dos operadores aniquilação \hat{a}_k e criação \hat{a}_k^\dagger , tal que $\hat{h} = v(k, \eta)\hat{a}_k + v^*(k, \eta)\hat{a}_k^\dagger$, onde as funções $v(k, \eta)$ são os modos normais do campo. Então, a Equação 3.68 passa a ser representada em termos de $v(k, \eta)$:

$$v'' + v \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) = 0, \quad (3.69)$$

em que foi utilizada a aproximação descrita na Equação 3.57 para que se possa escrever:

$$\frac{a''}{a} \simeq \frac{2}{\eta^2}. \quad (3.70)$$

A função de dois pontos do operador \hat{h} tem a forma:

$$\langle \hat{h}^\dagger \hat{h} \rangle = \frac{\|v^2(k, \eta)\|}{a^2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - k'), \quad (3.71)$$

onde

$$\mathcal{P}_{\delta\phi} = \frac{\|v^2(k, \eta)\|}{a^2} \quad (3.72)$$

representa o espectro de potência.

Em algum momento em que os modos k ainda estejam profundamente dentro do horizonte de Hubble, ou seja, $k|\eta| \gg 1$, o termo k^2 domina na Equação 3.69, reduzindo-a a um oscilador harmônico simples, que produz uma solução do tipo:

$$v_0 = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}, \quad (3.73)$$

que é interpretada como a condição inicial do problema.

A Equação 3.69 é uma equação de Bessel esférica. Portanto, aplicando a condição inicial, é possível determinar uma solução para v :

$$v = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right). \quad (3.74)$$

Com o início da inflação, os modos k saem rapidamente do horizonte e logo após alguns *e-folds*, $k|\eta|$ torna-se pequeno. Analisando esse limite:

$$\lim_{k|\eta| \rightarrow 0} v = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(-\frac{i}{k\eta} \right). \quad (3.75)$$

Portanto, para determinar o espectro de potência durante a inflação, basta calcular $\|v(k, \eta)\|^2 = 1/2k^3\eta^2 = H^2a^2/2k^3$, de forma que:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi} = \frac{H^2}{2k^3}. \quad (3.76)$$

Essa expressão é válida durante o regime de rolamento lento, em que H é constante. O momento em que $k|\eta| = 1$ indica o cruzamento do horizonte de Hubble pelo modo k .

3.3.2 Perturbação da curvatura comóvel (\mathcal{R})

A Equação 3.76 é válida apenas até o término da inflação. Após esse período, é necessário introduzir a variável $\mathcal{R}(\vec{k}, \eta)$, que permanece constante após o cruzamento do horizonte de Hubble. Além disso, $\mathcal{R}(\vec{k}, \eta)$ é invariante sob transformações infinitesimais

de calibre. Dessa forma, define-se o escalar \mathcal{R} , conhecido como perturbação de curvatura comóvel [80], da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}(\vec{k}, \eta) \equiv \frac{ik_i \delta T^i_0(\vec{k}, \eta) a^2 H}{k^2 [\rho + P]} - \Psi(\vec{k}, \eta). \quad (3.77)$$

O calibre Newtoniano, descrito na Seção 3.2.1, demonstra que as perturbações escalares estão acopladas ao potencial Ψ . Já o calibre espacialmente plano, desacopla as perturbações [11].

Uma variável de Bardeen \mathcal{V} [78] (que é invariante sob transformações de calibre) pode ser definida como:

$$\mathcal{V}(\vec{k}, t) \equiv B(\vec{k}, t) + \frac{ik_i a \delta T^i_0(\vec{k}, \eta)}{k^2 [\rho + P]}, \quad (3.78)$$

que em um calibre espacialmente plano torna-se:

$$\mathcal{V} = B - \frac{\bar{\phi}' \delta \phi}{(\rho + P) a^2}. \quad (3.79)$$

Então, o escalar \mathcal{R} pode ser reescrito em termos das variáveis de Bardeen, $\mathcal{R}(\mathbf{k}, \eta) \equiv -\Phi_H + aH\mathcal{V}$ [11]. Utilizando o calibre Newtoniano conforme, em que $\Phi_H = \Psi$ e $B = 0$, a variável \mathcal{R} torna-se:

$$\mathcal{R} = -\Psi - \frac{aH\bar{\phi}'\delta\phi}{(\rho + P)a^2}. \quad (3.80)$$

Com alguns passos, é possível mostrar que \mathcal{R} se conserva após o período em que o modo k cruza o horizonte. Primeiro, aplica-se uma derivada temporal (d/dt) nos dois lados da equação. O termo Ψ pode ser calculado através da equação de Einstein (Eq. 2.20), utilizando a métrica descrita pela Equação 3.45. Também considera-se que no calibre Newtoniano conforme, $\Phi = -\Psi$ e que as componentes da perturbação do tensor energia-momento são $\delta T^0_0 = -\delta\rho$ e $\delta T^i_i = \delta P$, obtendo:

$$3H \left[\frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \delta\rho - \delta P \right] = 3(\rho + P) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}. \quad (3.81)$$

Pode-se utilizar a regra da cadeia para mostrar que $(\dot{P}/\dot{\rho})\delta\rho = \delta P$, zerando o lado esquerdo da equação. Então, conclui-se que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = 0. \quad (3.82)$$

O calibre Newtoniano é utilizado no regime em que os modos estão fora do horizonte de Hubble, $k|\eta| \ll 1$. Isto significa que o termo \mathcal{R} se conserva após o

cruzamento do horizonte, $k|\eta| \simeq 1$. A Figura 10 demonstra o comportamento de \mathcal{R} [11]. A divisão entre os painéis da esquerda e da direita representa o cruzamento do horizonte pelo modo de referência $k = 10^{-4}H_{\text{inf}}$, parametrizado pelo valor do parâmetro de Hubble durante a inflação H_{inf} . No primeiro painel, o primeiro termo da Equação 3.77 é dominante, causando uma oscilação de \mathcal{R} no período pré-inflacionário, enquanto o potencial gravitacional Ψ não é importante nesse período. O segundo painel demonstra o congelamento de \mathcal{R} após o cruzamento do horizonte. A faixa cinza representa a transição entre a inflação e o modelo Λ CDM.

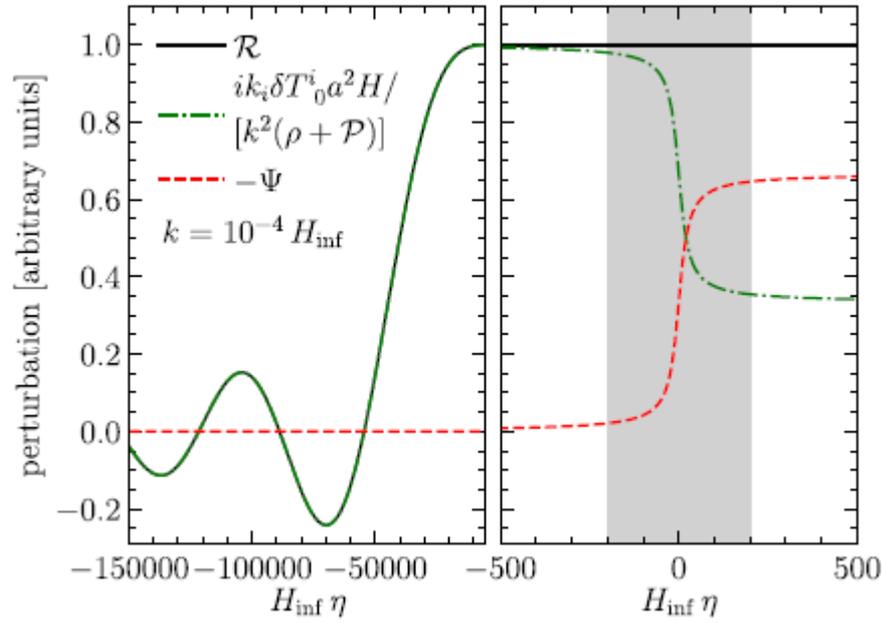


Figura 10 – Comportamento da perturbação de curvatura \mathcal{R} antes do cruzamento do horizonte de Hubble pelo modo $k = 10^{-4}H_{\text{inf}}$ (painel esquerdo) e após o cruzamento (painel direito). A faixa cinza indica o período de transição entre a inflação e o modelo Λ CDM, conhecido como reaquecimento. Figura retirada de [11].

A Equação 3.79 demonstra a relação entre \mathcal{R} e as perturbações do campo escalar $\delta\phi$. Conforme demonstrado na Figura 10, o termo Ψ pode ser descartado durante a inflação. Então, utilizando as Equações 3.52 e 3.53, a perturbação de curvatura comóvel pode ser descrita como:

$$\mathcal{R} = -\frac{aH}{\phi'}\delta\phi. \quad (3.83)$$

Dessa forma, o espectro de potência de \mathcal{R} se relaciona diretamente com o espectro de

$\delta\phi$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{aH}{\dot{\phi}} \right)^2 \mathcal{P}_{\delta\phi}(k), \quad (3.84)$$

É possível calcular o comportamento de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ a partir do momento de cruzamento do horizonte, utilizando a Equação 3.76 e uma identidade do parâmetro de rolamento lento ϵ (definido na Equação 3.58), onde $\epsilon = 4\pi G\bar{\phi}'^2/aH^2$. Logo,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{2\pi GH^2}{\epsilon k^3} \right)_{aH=k}. \quad (3.85)$$

Uma forma alternativa da Equação 3.85 é:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv 2\pi^2 \mathcal{A}_s k^{-3} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}, \quad (3.86)$$

onde k_* representa uma escala pivô fixada em algum valor de k que represente um modo observável. Os artigos do PLANCK consideram, em geral, $k_* = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$, mas durante a era inflacionária utilizam $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ [7]. Os termos \mathcal{A}_s e n_s são parâmetros cosmológicos, onde \mathcal{A}_s é a amplitude de flutuações escalares e n_s é o índice espectral [11]. O parâmetro \mathcal{A}_s pode ser obtido utilizando a Equação 3.85, quando $k = k_*$:

$$\mathcal{A}_s = \frac{GH^2}{\pi\epsilon} \simeq 2,1 \times 10^{-9}. \quad (3.87)$$

O índice espectral n_s também pode ser expresso em termos dos parâmetros de rolamento lento (Eqs. 3.58 e 3.59) [64], da forma:

$$n_s = 1 - 4\epsilon - 2\delta. \quad (3.88)$$

3.4 A dinâmica quântica do período pré-inflacionário

A evolução clássica do plano de fundo do universo é baseada na relatividade geral. A métrica FLRW gera soluções das equações de Einstein que são incompletas quando levadas ao passado, onde a densidade de curvatura do espaço-tempo e de matéria são da escala de Planck [30]. Em outras palavras, a singularidade do *Big Bang* leva a divergências dessas quantidades. A cosmologia quântica de laços (LQC) surge da aplicação de técnicas da gravitação quântica de laços em modelos cosmológicos e corrige essas divergências, substituindo o *Big Bang* por um *Big Bounce*, ou simplesmente *bounce* [31].

O *bounce* é um ricochete do espaço, que é a transição entre um período de contração para uma fase de expansão. Diferentes abordagens são estudadas pela

cosmologia quântica de laços para fornecer uma descrição do universo primordial que inclua efeitos quânticos na dinâmica do campo gravitacional [31]. Os trabalhos de [44, 45] apresentam uma descrição efetiva de um universo fechado, baseada em uma forma modificada da equação de Friedmann, originalmente desenvolvida em [46].

A conexão de Ashtekar-Barbero, sob condições de isotropia e homogeneidade do universo, se reduz à variável canônica $c = \gamma_0 \dot{a} + K$ enquanto sua tríade conjugada se reduz a $|p| = (2\pi^2)^{2/3} a^2$, onde γ_0 é o parâmetro de Barbero-Immirzi [45, 46]. Em um universo fechado ($K = 1$), o volume físico de uma esfera unitária é dado por:

$$v = |p|^{3/2} = 2\pi^2 a^3. \quad (3.89)$$

A variável conjugada é definida como:

$$b = c |p|^{-1/2} = \frac{c}{V_0^{1/3} a}, \quad (3.90)$$

onde $V_0 = 2\pi^2$.

A dinâmica efetiva do plano de fundo é descrita em termos das variáveis geométricas v e b e das variáveis de campo $\bar{\phi}$ e $\pi_{\bar{\phi}}$, onde $\pi_{\bar{\phi}}$ é o momento conjugado ao campo $\bar{\phi}$. Os colchetes de Poisson são:

$$\{b, v\} = 4\pi G \gamma_0, \quad \{\bar{\phi}, \pi_{\bar{\phi}}\} = 1, \quad (3.91)$$

e a hamiltoniana efetiva é dada por:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{3v}{8\pi G \gamma_0^2 \lambda^2} \left[\text{sen}^2(\lambda b - D) - \text{sen}^2(D) + (1 + \lambda^2) D^2 \right] + \mathcal{H}_m, \quad (3.92)$$

onde

$$D = \lambda \left(\frac{2\pi^2}{v} \right)^{1/3}, \quad (3.93)$$

e $\lambda = \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\sqrt{3}\pi\gamma_0}$ é um parâmetro relacionado ao menor autovalor de área em gravitação quântica de laços. A hamiltoniana relacionada à matéria é descrita por

$$\mathcal{H}_m = \frac{\pi_{\bar{\phi}}^2}{2v} + vV(\bar{\phi}). \quad (3.94)$$

A hamiltoniana 3.92 pode ser descrita em termos do fator de escala a e seu momento conjugado π_a , que obedecem a relação:

$$\{a, \pi_a\} = 1. \quad (3.95)$$

Logo, as variáveis geométricas tornam-se

$$v = V_0 a^3, \quad b = -\frac{4\pi G \gamma_0 \pi_a}{3V_0} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}, \quad (3.96)$$

e a hamiltoniana efetiva é representada pelas novas variáveis:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{3}{8\pi G \gamma_0^2 \lambda^2} a^3 V_0 \left[\text{sen}^2 \left(\frac{4\pi G \gamma_0 \lambda \pi_a}{3V_0} \frac{1}{a^2} \right) - \text{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{a} \right) + (1 + \gamma_0^2) \frac{\lambda^2}{a^2} \right] + \mathcal{H}_m. \quad (3.97)$$

Então, as equações de movimento podem ser calculadas:

$$\dot{a} = -\frac{a}{2\gamma_0 \lambda} \text{sen} \left(\frac{8\pi G \gamma \lambda \pi_a}{3V_0} \frac{1}{a^2} \right), \quad (3.98)$$

$$\dot{\bar{\phi}} = \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{a^3 V_0}. \quad (3.99)$$

A hamiltoniana de matéria pode ser reescrita como

$$\mathcal{H} = a^3 V_0 \rho, \quad (3.100)$$

onde ρ é descrito pela Equação 3.52.

A densidade crítica é definida como [46]

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G \gamma_0^2 \lambda^2}. \quad (3.101)$$

Dessa forma, a hamiltoniana efetiva torna-se

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = a^3 V_0 \left[-\rho_c \text{sen}^2 \left(\frac{4\pi G \gamma_0 \lambda \pi_a}{3V_0} \frac{1}{a^2} \right) - \rho_1 + \rho \right], \quad (3.102)$$

onde $\rho_1 = -\chi \rho_c$, tal que

$$\chi = \text{sen}^2 \frac{\lambda}{a} - (1 + \gamma_0^2) \frac{\lambda^2}{a^2}. \quad (3.103)$$

Impondo o vínculo hamiltoniano $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$ e utilizando as Equações 3.98 e 3.102, é possível obter uma equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho - \rho_1) \left[\frac{1}{\rho_c} (\rho_2 - \rho) \right], \quad (3.104)$$

onde $\rho_2 = \rho_c + \rho_1$.

Para fins numéricos, convém calcular a equação para a aceleração do fator de escala. Para isso, é necessário estabelecer a equação de movimento relacionada ao campo escalar:

$$\dot{\pi}_{\bar{\phi}} = -a^3 V_0 V_{\bar{\phi}}, \quad (3.105)$$

que combinada com 3.99 fornece a equação de Klein-Gordon usual para o plano de fundo (Eq. 3.54). O que implica na relação descrita pela Equação 3.20. Logo, derivando os dois lados da Equação 3.104, é possível reorganizar os termos para se obter a equação para a aceleração do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \left[-4\pi G(\rho + P) + \frac{1}{\gamma_0^2 \lambda^2} \left(\zeta + \frac{\rho_1}{\rho_c} \right) \right] \left[\frac{1}{\rho_c} (\rho_2 - \rho) \right] + \frac{8\pi G}{3} (\rho - \rho_1) \left[\frac{1}{\rho_c} (\rho_2 - \rho) \right], \quad (3.106)$$

onde

$$\zeta = \text{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{a} \right) - \frac{\lambda}{a} \text{sen} \left(\frac{\lambda}{a} \right) \cos \left(\frac{\lambda}{a} \right). \quad (3.107)$$

As Equações 3.54 e 3.106 são utilizadas para determinar a evolução do plano de fundo e produzem o *bounce*, como pode ser observado na Figura 11, representado pela linha vermelha. As equações clássicas, isto é, utilizando a Equação 3.13 (com $\Lambda = 0$) no lugar de 3.106 (a equação de Klein-Gordon é a mesma para ambos os casos), produzem a evolução padrão do modelo cosmológico, que se inicia no *Big Bang* e está representada pela linha preta na Figura 11. O valor de curvatura foi escolhido arbitrariamente em $|\Omega_K| = 0.001$. O tempo t está em escala de Planck e o fator de escala é fixado em $a = 1$ no instante em que o modo de referência $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble.

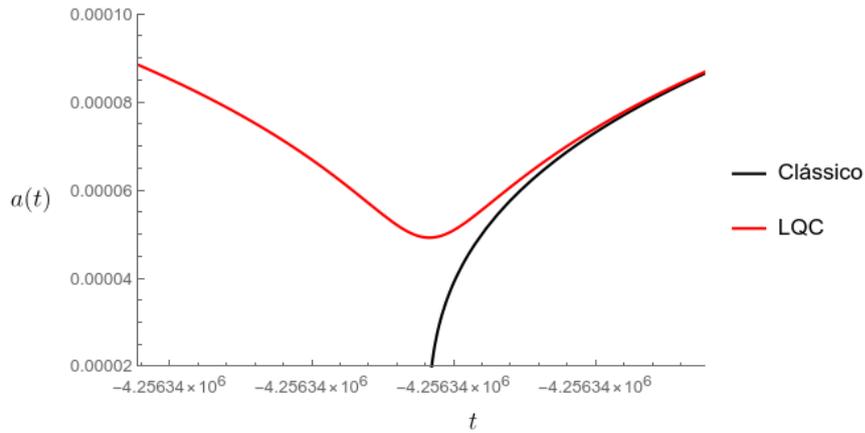


Figura 11 – Fator de escala evoluído no tempo, capturando os instantes iniciais de expansão do universo em um modelo fechado. A linha preta representa a evolução clássica, que leva o universo à singularidade do *Big Bang*, enquanto a linha vermelha representa a evolução em LQC, exibindo o *bounce*. O tempo t está em escala de Planck e o fator de escala é fixado em $a(t_0) = 1$ no instante em que o modo de referência $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble, parametrizado em $t_0 = 0$.

Apenas alguns *e-folds* após o *bounce*, o universo sai da era de Planck e as escalas tornam-se grandes o suficiente para que os efeitos quânticos não influenciem na evolução. Então, o modelo em LQC evolui de forma idêntica ao modelo clássico. O limite clássico da evolução é obtido quando as escalas quânticas se tornam pequenas: $\lambda, \gamma_0 \rightarrow 0$. Logo, a hamiltoniana efetiva se reduz a:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{2\pi G}{3aV_0}\pi_a^2 - \frac{3}{8\pi G}aV_0 + \frac{\pi_{\bar{\phi}}^2}{2a^3V_0} + a^3V_0V(\bar{\phi}). \quad (3.108)$$

4 Técnicas utilizadas para descrever o plano de fundo e as perturbações

Neste capítulo, abordam-se os métodos utilizados para a descrição da evolução do plano de fundo e das perturbações cosmológicas inflacionárias e pré-inflacionárias em universos fechados. A Seção 4.1 contém explicações sobre como as observações do PLANCK são utilizadas para descrever o plano de fundo. Na Seção 4.2, descreve-se a decomposição de uma função escalar em harmônicos hiperesféricos, a fim de entender como as perturbações se propagam em uma 3-esfera. Na Seção 4.3, é estudado o formalismo ADM (sigla para Arnowitt-Deser-Misner), que é uma descrição hamiltoniana da relatividade geral. Em ordem zero, as equações clássicas do plano de fundo são recuperadas. Na Seção 4.4, o formalismo ADM é utilizado para determinar as equações de evolução das perturbações, a partir de uma aproximação quadrática da Hamiltoniana do sistema para um universo fechado. Na Seção 4.5, descreve-se o método numérico empregado para integrar as equações de evolução do plano de fundo e das perturbações.

4.1 Descrição do plano de fundo a partir das observações da missão PLANCK

Para descrever o plano de fundo, é necessário entender como a parte homogênea do universo evolui. Classicamente, a equação de Friedmann (Eq. 3.12) e a equação de Klein-Gordon para o campo homogêneo $\bar{\phi}(t)$ (Eq. 3.54) servem a esse propósito, formando um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) + 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \dot{\phi}(t) + V_{\phi}(\phi(t)) = 0 \\ H^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2(t)}{2} + V(\phi(t)) \right) - \frac{1}{a^2(t)}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Para limpar a notação, a barra em cima do campo é descartada nesta seção. A densidade de energia ρ é a soma da energia cinética, $\dot{\phi}^2(t)/2$, e da energia potencial, $V(\phi(t))$. O termo $-1/a^2(t)$ é relativo à curvatura espacial. Neste modelo, não é considerada a energia escura ($\Lambda = 0$). O período de rolamento lento durante a inflação é descrito

pelo potencial de Starobinsky:

$$V(\phi) = \frac{3m^2}{32\pi G} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi G}{3}}\phi\right) \right]^2, \quad (4.2)$$

e sua derivada é:

$$V_\phi(\phi) = m^2 \sqrt{\frac{3}{16\pi G}} \left(1 - e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi} \right) e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi}, \quad (4.3)$$

onde m é a massa do ínflaton.

Para fins numéricos, sobretudo para a descrição dos períodos de contração do universo e do *bounce* (tanto para o caso clássico quanto para o caso quântico), é utilizada a Equação da aceleração do fator de escala (Eq. 3.13 para o clássico e Eq. 3.106 para o modelo de LQC). Além disso, as contribuições quânticas da equação de Friedmann modificada pelo modelo de LQC são relevantes apenas durante poucos *e-folds* após (e anteriormente) o *bounce*, quando o universo está na era de Planck. De forma que, durante o período de rolamento lento, a equação de Friedmann clássica é suficiente.

Para resolver o conjunto de Equações 4.1, é preciso determinar as condições iniciais do problema, que são estabelecidas no instante em que o modo de referência k_* cruza o horizonte de Hubble. Este período satisfaz as condições de rolamento lento:

$$\epsilon_{sr} \ll 1, \quad \delta_{sr} \ll 1, \quad (4.4)$$

e

$$w_{sr} \simeq -1. \quad (4.5)$$

O parâmetro de estado indica o domínio da energia potencial sobre a energia cinética. Além do mais, a curvatura passa a ser desprezível após o início da inflação, já que esta tem o efeito de planificar o universo. Dadas essas condições, as equações de movimento seguem as seguintes aproximações:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi(\phi) \quad (4.6)$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}\rho \simeq \frac{8\pi G}{3}V(\phi) \quad (4.7)$$

$$\dot{H} \simeq -4\pi G\dot{\phi}^2. \quad (4.8)$$

As Equações 4.7 e 4.8 podem ser incorporadas à definição do parâmetro de rolamento lento $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ (Eq. 3.58), para que se obtenha a seguinte relação:

$$\epsilon = \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V}. \quad (4.9)$$

Também é possível descrever o parâmetro ϵ em termos somente do potencial $V(\phi)$ e sua derivada $V_\phi(\phi)$ ao utilizar a Equação 4.6 e o lado direito da Equação 4.7:

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \frac{V_\phi^2}{V^2} = \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi}}{1 - e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi}} \right]^2. \quad (4.10)$$

A inflação acontece enquanto as condições 4.4 e 4.5 são satisfeitas. O início e o fim da inflação são os instantes em que $\epsilon_I = 1$ (via Eq. 4.9). Logo, igualando a Equação 4.10 a ϵ_I é possível obter o valor do campo nesses instantes:

$$\phi_I = \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{3}{16\pi G}} = 0,187 M_{pl}. \quad (4.11)$$

O número de *e-folds* entre um tempo inicial t_i e um tempo final t_f é calculado através de:

$$N_e(t) = \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right). \quad (4.12)$$

Aplicando o operador diferencial dos dois lados é obtido $dN_e = d \ln a = H dt$. Logo, o número de *e-folds* é representado pela integral:

$$N_e(t) = \int_{t_i}^{t_f} H(t') dt'. \quad (4.13)$$

Utilizando a Equação 4.6, é possível mudar a variável de integração e representar N_e em função do campo:

$$N_e = -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V_\phi(\phi)} d\phi. \quad (4.14)$$

Substituindo as Equações 4.2 e 4.3e resolvendo a integral, o resultado é:

$$N_e = \sqrt{3\pi G} (\phi_f - \phi_i) - \frac{3}{4} \left[e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi_f} - e^{-\sqrt{16\pi G/3}\phi_i} \right],. \quad (4.15)$$

Portanto, é possível estabelecer uma equação para o número de *e-folds* entre o momento em que o modo k_* cruza o horizonte até o final da inflação ao utilizar o valor do campo determinado em 4.11, tornando $\phi_f = \phi_I$ e $\phi_i = \phi_*$, onde ϕ_* é o valor do campo no instante do cruzamento:

$$N_* \simeq -1,04 + \frac{3}{4} e^{\sqrt{16\pi G/3}\phi_*} - \sqrt{3\pi G} \phi_*. \quad (4.16)$$

A partir das observações da sonda Planck [9, 10], estima-se que o número de *e-folds* N_* está entre:

$$49 < N_* < 59, \quad (4.17)$$

para o modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$, em nível de confiança de 95%, utilizando o modelo de Starobinsky.

Em geral, os artigos do PLANCK utilizam $k_* = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$, exceto durante a inflação, em que é utilizado $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. Os parâmetros cosmológicos do modelo ΛCDM provenientes da era inflacionária, \mathcal{A}_s e n_s , de acordo com as observações do PLANCK e utilizando o modo $k_*^P \equiv 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ como referência, ficam restritos a:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s &= (2,10 \pm 0,03) \times 10^{-9}, \\ n_s &= 0,9649 \pm 0,0042.\end{aligned}$$

Se um outro modo de referência k_* é adotado, a amplitude de flutuações escalares pode ser redefinida como:

$$\mathcal{A}_{s*} = \left(\frac{k_*}{k_*^P} \right)^{n_s-1} \mathcal{A}_s, \quad (4.18)$$

sendo $k_*^P = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ a referência padrão do PLANCK. O índice espectral n_s não sofre uma alteração considerável ao variar o valor do modo k_* .

É possível determinar o valor de ϕ_* ao escolher um valor de N_* utilizando a Equação 4.16. As definições dos parâmetros \mathcal{A}_s e n_s , dadas pelas Equações 3.87 e 3.88, fornecem relações entre os parâmetros e quantidades do plano de fundo:

$$\mathcal{A}_{s*} = \frac{GH_*^2}{\pi\epsilon}, \quad (4.19)$$

$$n_s = 1 - 4\epsilon - 2\delta, \quad (4.20)$$

onde H_* é o valor do parâmetro de Hubble no instante do cruzamento. Com isso, utilizando as equações do plano de fundo (Eq. 4.6 e Eq. 4.7) e as definições do parâmetro de rolamento lento (Eq. 4.9) e do parâmetro cosmológico (Eq. 4.19), é possível determinar o valor das grandezas no momento do cruzamento do horizonte: m_* , $\dot{\phi}_*$ e a_* . Essas grandezas formam as condições iniciais para a evolução do sistema de equações diferenciais descrito pela Equação 4.1.

Em um universo fechado, o fator de escala é interpretado como sendo o raio do universo. Para torná-lo adimensional, é introduzida uma nova variável:

$$\tilde{a}_* = \frac{a_*}{r_0}, \quad (4.21)$$

onde $r_0 = a(t_0)$ é o raio do universo no presente. O fator de escala adimensional é fixado pela condição:

$$\tilde{a}_* H_* = k_*. \quad (4.22)$$

Nesse caso, o parâmetro de curvatura pode seguir a seguinte definição:

$$\Omega_K = -\frac{c^2}{(r_0 H_0)^2}. \quad (4.23)$$

As observações do PLANCK fornecem um valor de Ω_K dentro da faixa [9]:

$$\Omega_K = 0,001 \pm 0,002. \quad (4.24)$$

Portanto, o valor do termo de curvatura na Equação de Friedmann, no instante do cruzamento do horizonte, pode ser definido em termos do parâmetro de curvatura, utilizando as Equações 4.21 e 4.23:

$$\rho_{K*} \equiv -\frac{1}{a_*^2} = \frac{\Omega_K H_0^2}{c^2 \tilde{a}_*^2}. \quad (4.25)$$

O número de *e-folds* N_* representa a duração do regime de rolamento lento a partir do instante do cruzamento do horizonte t_* pelo modo k_* até o fim da inflação, em t_F . Neste trabalho, é fixado o valor $N_* = 54$ para o modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. No entanto, o início da inflação ocorre alguns *e-folds* antes do cruzamento, em t_I . Ao evoluir numericamente o plano de fundo, é possível calcular o número de *e-folds* entre t_I e t_* através da Equação 4.12.

A estimativa do valor de N_* realizada pelo PLANCK [10] baseia-se no modelo Λ CDM, sem curvatura espacial. No caso plano, a duração da inflação pode ser arbitrária, de forma que o tempo decorrido entre t_I e t_* pode assumir diferentes valores a depender da escolha de k_* . Portanto, é possível selecionar um modo $k'_* < k_*$ a fim de redefinir as condições iniciais e produzir uma inflação longa o suficiente para que os efeitos do *bounce* e do regime pré-inflacionário sejam imperceptíveis nas observações. Logo, de acordo com a Equação 4.22, a redefinição de k_* para k'_* implica em:

$$\frac{\tilde{a}_*}{k_*} \simeq \frac{\tilde{a}'_*}{k'_*}. \quad (4.26)$$

Essa condição é válida no regime de rolamento lento, em que H é aproximadamente constante. Então, para $k'_* < k_*$, há um número adicional de *e-folds* para a duração da inflação:

$$\Delta N_e = \ln \left(\frac{k_*}{k'_*} \right). \quad (4.27)$$

A amplitude escalar \mathcal{A}_s também deve ser redefinida para a nova escala, assim como as demais condições iniciais: $a_* \rightarrow a'_* = a(t'_*)$, $\phi_* \rightarrow \phi'_* = \phi(t'_*)$, $\dot{\phi}_* \rightarrow \dot{\phi}'_* = \dot{\phi}(t'_*)$, além do valor da massa $m_* \rightarrow m'_*$.

Quando a equação da aceleração é utilizada no lugar da equação de Friedmann para resolver o plano de fundo, uma condição inicial extra é envolvida na solução: torna-se necessário determinar o valor de $\dot{a}(t)$ no momento de cruzamento do horizonte. A determinação dessa condição é simples, bastando substituir as demais condições iniciais, já determinadas anteriormente, na equação de Friedmann, obtendo o valor de $\dot{a}_* = \dot{a}(t_*)$. Esse processo é válido tanto para o caso clássico quanto para o caso quântico.

4.2 Harmônicos hipersféricos

A métrica FLRW (Eq. 3.4) com $K = 1$ reproduz a geometria de uma 3-esfera. O elemento de linha da parte espacial da métrica pode ser descrito como:

$$d\Omega^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi \left(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (4.28)$$

onde foi considerado $R_0 = 1$. A componente radial r é representada em termos de uma nova variável χ , que segue a relação $r = \text{sen} \chi$, onde $\chi, \theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. O determinante da métrica é dado por $\Omega = \text{sen}^4 \chi \text{sen}^2 \theta$.

A propagação de modos normais em uma 3-esfera unitária, S^3 , pode ser obtida ao estudar soluções da equação de Helmholtz [51]:

$$\left(\bar{D}^2 + k^2 \right) Q(\chi, \theta, \varphi) = 0, \quad (4.29)$$

onde $\bar{D}^2 = \bar{D}^i \bar{D}_i$ é a versão covariante do laplaciano, compatível com a métrica 4.28.

Considerando um espaço plano ($K = 0$), a Equação 4.29 se reduz a:

$$\left(\Delta + k^2 \right) Q(\vec{x}) = 0, \quad (4.30)$$

onde Δ representa o laplaciano tradicional, em um espaço euclidiano. As soluções, em coordenadas esféricas, são descritas como [51]:

$$Q(\vec{x}) = j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.31)$$

onde $j_l(kr)$ são as funções de Bessel esféricas e $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos em S^2 , normalizados como:

$$\int d\varpi Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.32)$$

onde $d\varpi = \text{sen} \theta d\theta d\varphi$ é o diferencial de ângulo sólido. Os harmônicos esféricos são expressos explicitamente como:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (4.33)$$

onde $P_l^m(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre, o que leva à seguinte relação:

$$\Delta Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}. \quad (4.34)$$

Os harmônicos hiperesféricos, por sua vez, são uma generalização dos harmônicos esféricos e são deduzidos ao solucionar a Equação 4.29. Dessa maneira, eles são representados como [51]:

$$Q_{nlm}(\chi, \theta, \varphi) = \Phi_{nl}(\chi)Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.35)$$

onde $\Phi_{nl}(\chi)$ são os harmônicos de Fock, definidos como [51]:

$$\Phi_{nl}(\chi) = \sqrt{\frac{M_{nl}}{\sin \chi}} P_{-1/2+n}^{-1/2-l}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad M_{nl} = \prod_{s=0}^l (n^2 - s^2). \quad (4.36)$$

Harmônicos hiperesféricos em uma 3-esfera são estudados em [43, 50, 51].

Os harmônicos hiperesféricos formam uma base ortonormal completa em S^3 [50]:

$$\int d\Omega Q_{nlm} Q_{n'l'm'} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.37)$$

onde $d\Omega = \sqrt{\Omega} dx^3$. As funções Q_{nlm} são autoestados do operador Laplaciano na 3-esfera, com autovalores dados por:

$$\bar{D}^2 Q_{nlm} = -(n^2 - 1) Q_{nlm}. \quad (4.38)$$

Uma função escalar f em S^3 pode ser expandida em uma combinação linear de infinitos termos [50]:

$$f(\chi, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l f_{nlm} Q_{nlm}(\chi, \theta, \varphi). \quad (4.39)$$

Utilizando as Equações 4.37 e 4.39, é possível determinar os coeficientes de expansão ao se estabelecer a seguinte identidade:

$$f_{nlm} = \int d\Omega Q_{nlm}(\vec{x}) f(\vec{x}). \quad (4.40)$$

Quando os modos possuem comprimento de onda pequeno e se propagam em distâncias pequenas, recupera-se o limite plano das soluções dos harmônicos [51]. Isto é, quando $n \gg 1$ e $\chi \ll \pi$, a Equação 4.35 se reduz à Equação 4.31 multiplicada por um fator de $\sqrt{2n^2/\pi}$, que aparece por convenção. Em outras palavras:

$$\lim_{n \gg 0, \chi \ll \pi} \Phi_{nl}(\chi) = \sqrt{\frac{2n^2}{\pi}} j_l(kr). \quad (4.41)$$

Através desse limite e seguindo os passos de [51], é possível observar que, em uma 3-esfera de raio R_0 , a relação entre os modos k , de uma onda se propagando em um espaço plano e os modos n , se propagando em S^3 , é dada por:

$$k^2 = \frac{n^2 - 1}{R_0^2}, \quad \text{com } n = 3, 4, 5, \dots \text{ e } n > l. \quad (4.42)$$

4.3 Formalismo ADM: plano de fundo

O formalismo hamiltoniano produz equações de movimento para a posição e o momento conjugado. A formulação hamiltoniana da relatividade geral, conhecida como ADM, introduz um novo conjunto de variáveis para a representação da métrica $g_{\mu\nu}$. Neste formalismo, o espaço-tempo é foliado em uma família de hipersuperfícies tipo espaço Σ_t . A métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser decomposta em uma função de lapso N , um campo vetorial de deslocamento N_i e uma métrica espacial tridimensional γ_{ij} . Essas variáveis permitem empregar as equações de campo de Einstein na forma das equações de Hamilton. A teoria ADM pode ser estudada com mais detalhe em [81].

A ação para uma métrica $g_{\mu\nu}$ interagindo com um campo escalar ϕ é dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (4.43)$$

A métrica pode ser descrita em termos das variáveis de ADM e da métrica espacial γ_{ij} :

$$ds^2 = -(N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.44)$$

Sua representação matricial e a inversa são, respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^2 + N^i N_i & N_i \\ N_i & \gamma_{ij} \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_i}{N^2} \\ \frac{N_i}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{N^i N_j}{N^2} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

e o determinante da métrica é $g = -N^2 \gamma$.

A curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais é definida como [82]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (-\dot{\gamma}_{ij} + \bar{D}_j N_i + \bar{D}_i N_j), \quad (4.46)$$

onde \bar{D}_i é a derivada covariante compatível com a métrica espacial, $\bar{D}_i \gamma_{ik} = 0$. A curvatura extrínseca fornece informações sobre a curvatura da hipersuperfície em relação à variedade na qual está inserida [82].

É possível escrever o escalar de Ricci R , relacionado à métrica $g_{\mu\nu}$, em termos do traço da curvatura extrínseca $\mathcal{K} = \gamma^{ij} K_{ij}$ e do escalar de Ricci ${}^{(3)}R$, relacionado à

métrica espacial γ_{ij} :

$$R = {}^{(3)}R + K^{ij}K_{ij} - \mathcal{K}^2. \quad (4.47)$$

As Equações 4.46 e 4.47 permitem que a ação 4.43 seja escrita em termos das variáveis de ADM. Portanto, sejam γ_{ij} e ϕ as variáveis de configuração, N e N_i atuam como multiplicadores de Lagrange [82]. Dessa forma, os momentos conjugados à métrica espacial e ao campo escalar são, respectivamente:

$$\tilde{\pi}^{ij} = \frac{\delta S}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa} (\mathcal{K}\gamma^{ij} - K^{ij}), \quad (4.48)$$

$$\tilde{\pi}_\phi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} = -\sqrt{-g} \partial^0 \phi = \frac{\sqrt{\gamma}}{N} (\dot{\phi} - N^i \partial_i \phi). \quad (4.49)$$

Os colchetes de Poisson não nulos dessas variáveis são:

$$\{\gamma_{ij}(\vec{x}), \tilde{\pi}^{kl}(\vec{y})\} = \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.50)$$

$$\{\phi(\vec{x}), \tilde{\pi}_\phi(\vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.51)$$

onde $\delta_{(i}^k \delta_{j)}^l = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l)$. Os termos δ_{ij} são deltas de Kronecker e os deltas sem índices $\delta(x - x')$ são deltas de Dirac.

Aplicando uma transformação de Legendre, é obtida a hamiltoniana de ADM em termos do vínculo escalar (ou hamiltoniano) $\mathcal{H} \approx 0$ e do vínculo de difeomorfismo $\mathcal{H}_i \approx 0$:

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i). \quad (4.52)$$

Os vínculos são dados por:

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \left(\tilde{\pi}^{ij} \tilde{\pi}_{ij} - \frac{\tilde{\pi}^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa} {}^{(3)}R + \frac{\tilde{\pi}_\phi^2}{2\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} V + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\partial_i \phi) (\partial^i \phi), \quad (4.53)$$

$$\mathcal{H}_i = -2D_j (\tilde{\pi}^{jk} \gamma_{ki}) + \tilde{\pi}_\phi \partial_i \phi = -2\partial_j (\tilde{\pi}^{jk} \gamma_{ki}) + \tilde{\pi}^{jk} \partial_i \gamma_{jk} + \tilde{\pi}_\phi \partial_i \phi, \quad (4.54)$$

onde $\tilde{\pi}^2 = \tilde{\pi}^{ii} \tilde{\pi}_{jj}$.

As perturbações são adicionadas, de forma que as variáveis e os momentos conjugados possam ser descritos como a soma de uma parcela homogênea e uma parcela que represente as perturbações:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \overset{\circ}{\gamma}_{ij} + \delta\gamma_{ij}, & \tilde{\pi}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{\pi}}^{ij} + \delta\tilde{\pi}^{ij}, \\ \phi &= \bar{\phi} + \delta\phi, & \tilde{\pi}_\phi &= \overset{\circ}{\tilde{\pi}}_\phi + \delta\tilde{\pi}_\phi, \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde o círculo acima das variáveis indica a parte não perturbada, referente ao plano de fundo. Para quantidades escalares, é usada uma barra.

A derivada covariante compatível com a métrica $\hat{\gamma}$ é descrita como \mathring{D}_i , de forma que:

$$\mathring{D}_i \hat{\gamma}_{jk} = 0. \quad (4.56)$$

A função de lapso e o vetor de deslocamento também são representados em termos do plano de fundo e das perturbações:

$$\begin{aligned} N &= \bar{N} + \delta N, \\ N^i &= \delta N^i. \end{aligned} \quad (4.57)$$

A parte não perturbada do vetor de deslocamento é nula devido à isotropia.

A métrica do plano de fundo para uma geometria FLRW fechada é (vide Eq. 3.4):

$$d\bar{s}^2 = -\bar{N}^2(t)dt^2 + a(t)^2\Omega_{ij}(x)dx^i dx^j. \quad (4.58)$$

Os escalares de curvatura e a curvatura extrínseca do plano de fundo são:

$${}^{(3)}\mathring{R} = \frac{6}{a^2}, \quad \mathring{R} = \frac{6}{a^2} \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{\bar{N}^2}\right), \quad \mathring{K}_{ij} = -\frac{1}{a} \frac{\dot{a}}{\bar{N}} \hat{\gamma}_{ij}, \quad (4.59)$$

e os momentos conjugados de ordem zero podem ser descritos como:

$$\mathring{\pi}^{ij} = -\sqrt{\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{a}}{\bar{N}} \Omega^{ij}, \quad (4.60)$$

$$\mathring{\pi}_\phi = \sqrt{\Omega} a^3 \frac{\dot{\phi}}{\bar{N}}. \quad (4.61)$$

Dadas as Equações 4.59, 4.60 e 4.61, o plano de fundo pode ser completamente descrito por duas variáveis dinâmicas, o fator de escala $a(t)$ e campo escalar homogêneo $\bar{\phi}(t)$, e um multiplicador de Lagrange não perturbado $\bar{N}(t)$. A ação homogênea pode ser escrita em termos dessas quantidades:

$$\bar{S} = \int dt V_0 \bar{N}(t) a^3 \left[\frac{3}{\kappa a^2} \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{\bar{N}^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\bar{N}^2} - V(\bar{\phi}) \right] \quad (4.62)$$

$$= \int dt \bar{L}. \quad (4.63)$$

Portanto, os momentos conjugados das variáveis dinâmicas passam a ser:

$$\pi_a = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{a}} = -6 \frac{V_0}{\kappa \bar{N}} a \dot{a}, \quad (4.64)$$

$$\pi_{\bar{\phi}} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = \frac{V_0}{\bar{N}} a^3 \dot{\bar{\phi}}. \quad (4.65)$$

Os momentos do plano de fundo estão relacionados com os momentos de ordem zero dados nas Equações 4.60 e 4.61 através de:

$$\overset{\circ}{\pi}{}^{ij} = \frac{\sqrt{\Omega}}{V_0} \frac{\Omega^{ij}}{6a} \pi_a, \quad (4.66)$$

$$\overset{\circ}{\pi}_\phi = \frac{\sqrt{\Omega}}{V_0} \pi_{\bar{\phi}}. \quad (4.67)$$

Inserindo as Equações 4.66 e 4.67 para os momentos na expressão geral 4.53 do vínculo escalar, obtemos a hamiltoniana do plano de fundo em termos de a , $\bar{\phi}$ e seus momentos conjugados:

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= \int d^3x \bar{N} \mathcal{H}^{(0)} \\ &= \bar{N} V_0 \left[-\frac{\kappa}{12a} \left(\frac{\pi_a}{V_0} \right)^2 + \frac{1}{2a^3} \left(\frac{\pi_{\bar{\phi}}}{V_0} \right)^2 + a^3 V - \frac{3a}{\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

O vínculo do difeomorfismo é nulo para a ordem zero. Existe liberdade de escolha da função de lapso $\bar{N}(t)$. Escolhendo $\bar{N}(t) = 1$, a coordenada de tempo t corresponde ao tempo próprio de observadores comóveis. É importante notar que a hamiltoniana de ordem zero 4.68 é exatamente a hamiltoniana efetiva do plano de fundo, calculada na Seção 3.4, no limite clássico (Eq. 3.108).

Expressando os momentos em termos de derivadas temporais (Eqs. 4.64 e 4.65), é possível verificar que o vínculo escalar de ordem zero $\mathcal{H}^{(0)} \approx 0$ se reduz à equação de Friedmann,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}}{\bar{N}} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \rho - \frac{1}{a^2}. \quad (4.69)$$

As equações de movimento para o fator de escala e seu momento conjugado são, respectivamente:

$$\dot{a} = \{a, H^{(0)}\} = -\frac{\bar{N}}{V_0} \frac{\kappa}{6a} \pi_a, \quad (4.70)$$

$$\dot{\pi}_a = \{\pi_a, H^{(0)}\} \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{\ddot{a}}{\bar{N}^2} = -\frac{\kappa}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{N}} \right)^2 - V + \frac{1}{\kappa a^2} + \frac{1}{\kappa a^2} \left(\frac{\dot{a}}{\bar{N}} \right)^2 \right]. \quad (4.71)$$

A Equação 4.71 pode ser simplificada utilizando o vínculo escalar da Equação 4.69, resultando na equação para a aceleração:

$$\frac{1}{a} \frac{\ddot{a}}{\bar{N}^2} = -\frac{\kappa}{2} (\rho + 3P). \quad (4.72)$$

As equações de movimento para o campo escalar são:

$$\dot{\bar{\phi}} = \{\bar{\phi}, H^{(0)}\} = \bar{N} \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{a^3 V_0}, \quad (4.73)$$

$$\dot{\pi}_{\bar{\phi}} = \{\pi_{\bar{\phi}}, H^{(0)}\} = -\bar{N} V_0 a^3 V' \Rightarrow \frac{\ddot{\bar{\phi}}}{\bar{N}^2} + 3H \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{N}} + V' = 0. \quad (4.74)$$

A Equação 4.74 corresponde à Equação de Klein-Gordon para o campo escalar homogêneo $\bar{\phi}$.

O formalismo ADM é utilizado com o intuito de produzir as equações de movimento das perturbações quantizadas. Na Seção 4.4, é apresentado o cálculo da expansão quadrática da Hamiltoniana para as perturbações escalares.

4.4 Formalismo ADM: perturbações

Para determinar a Hamiltoniana quadrática que rege a dinâmica das perturbações lineares, são seguidos os passos de [35], que realiza uma análise para o caso de um universo plano, agora adaptada para um universo fechado.

O vínculo escalar (Eq. 4.53) e o vínculo de difeomorfismo (Eq. 4.54) são funções da métrica, do campo escalar e de seus momentos conjugados. Expandindo as variáveis em séries de potências no espaço de fase, é possível introduzir as expansões:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \dots, \quad (4.75)$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^{(1)} + \mathcal{H}_i^{(2)} + \dots, \quad (4.76)$$

onde o índice (n) indica que o termo é da n -ésima ordem nas perturbações. Os termos de ordem (0) são relacionados ao plano de fundo. Como pode ser visto na Seção 4.3, a ordem zero para o vínculo de difeomorfismo é nula, já que está sendo considerado um plano de fundo homogêneo e isotrópico.

A Equação 4.52 representa a hamiltoniana da teoria ADM. Utilizando a expansão da função de lapso, do vetor de deslocamento (Eq. 4.57) e dos vínculos (Eqs. 4.75 e 4.76), é possível construir uma hamiltoniana apenas com os termos de segunda ordem:

$$H^{(2)} = \int d^3x \left(\bar{N} \mathcal{H}^{(2)} + \delta N \mathcal{H}^{(1)} + \delta N^i \mathcal{H}_i^{(1)} \right). \quad (4.77)$$

Vínculos da teoria estabelecidos para ordem zero também são válidos para as ordens superiores, por isso, termos que envolvem $\mathcal{H}^{(0)}$ são nulos. Com os vínculos escalar e de difeomorfismo sendo nulos para a ordem zero, as variáveis N e N^i só aparecem até a primeira ordem na hamiltoniana quadrática.

Para perturbações lineares genéricas da forma 4.55, a contribuição de primeira ordem para o vínculo escalar assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} = & \sqrt{\Omega} \left[-\frac{\kappa}{72V_0^2 a} \pi_a^2 - \frac{a}{2\kappa} - \frac{1}{4V_0^2 a^3} \pi_{\bar{\phi}}^2 + \frac{a^3}{2} V(\bar{\phi}) \right] \dot{\gamma}^{ij} \delta\gamma_{ij} \\ & - \frac{\kappa}{3V_0 a^2} \pi_a \dot{\gamma}_{ij} \delta\tilde{\pi}^{ij} + \frac{1}{V_0 a^3} \pi_{\bar{\phi}} \delta\tilde{\pi}_\phi + \sqrt{\Omega} a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \\ & - \frac{\sqrt{\Omega}}{2\kappa} a^3 (\dot{D}^i \dot{D}^j - \dot{\gamma}^{ij} \dot{D}_k \dot{D}^k) \delta\gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde $\dot{D}^i = \dot{\gamma}^{ij} \dot{D}_j$. Os momentos de ordem zero são expressos em termos das quantidades do plano de fundo usando as Equações 4.66 e 4.67. Da mesma forma, a contribuição de primeira ordem para o vínculo do difeomorfismo torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^{(1)} = & \dot{\tilde{\pi}}^{jk} (\dot{D}_i \delta\gamma_{jk} - 2\dot{D}_j \delta\gamma_{ik}) - 2\dot{\gamma}_{ki} \dot{D}_j \delta\tilde{\pi}^{jk} + \dot{\tilde{\pi}}_\phi \dot{D}_i \delta\phi \\ = & \frac{\sqrt{\Omega}}{V_0} \frac{\Omega^{jk}}{6a} \pi_a (\dot{D}_i \delta\gamma_{jk} - 2\dot{D}_j \delta\gamma_{ik}) - 2\dot{\gamma}_{ki} \dot{D}_j \delta\tilde{\pi}^{jk} + \frac{\sqrt{\Omega}}{V_0} \pi_{\bar{\phi}} \dot{D}_i \delta\phi, \end{aligned} \quad (4.79)$$

e os termos quadráticos no vínculo escalar são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} = & \frac{2\kappa a^3}{\sqrt{\Omega}} \left(\Omega_{ir} \Omega_{js} \delta\tilde{\pi}^{ij} \delta\tilde{\pi}^{rs} - \frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{rs} \delta\tilde{\pi}^{ij} \delta\tilde{\pi}^{rs} \right) + \frac{(\delta\tilde{\pi}_\phi)^2}{2a^3 \sqrt{\Omega}} \\ & + \frac{a^3 \sqrt{\Omega} V''(\bar{\phi})}{2} (\delta\phi)^2 + \frac{a\sqrt{\Omega}}{2} \Omega^{ij} \partial_i \delta\phi \partial_j \delta\phi. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Uma função escalar pode ser expandida em termos de harmônicos hiperesféricos escalares Q_{nlm} . Logo, o campo escalar e seu momento conjugado podem ser representados como:

$$\delta\phi = \sum_{nlm} f_{nlm} Q_{nlm}, \quad (4.81)$$

$$\delta\tilde{\pi}_\phi = \sqrt{\Omega} \sum_{nlm} \pi_{nlm}^f Q_{nlm}, \quad (4.82)$$

com os coeficientes de expansão dados por:

$$f_{nlm}(t) = \int d\Omega Q_{nlm}(\vec{x}) \delta\phi(t, \vec{x}), \quad (4.83)$$

$$\pi_{nlm}^f(t) = \int d^3x Q_{nlm}(\vec{x}) \delta\tilde{\pi}_\phi(t, \vec{x}). \quad (4.84)$$

Analogamente, as variáveis N e N^i são expandidas na forma:

$$N = N_0 + \sum_{n \neq 1} \sum_{lm} g_{nlm} Q_{nlm}, \quad (4.85)$$

$$N^i = \delta N^i = \sum_{nlm} k_{nlm} \bar{D}^i Q_{nlm}. \quad (4.86)$$

Como visto na Seção 3.2.1 e discutido com mais detalhe em [43], as perturbações da métrica podem ser decompostas em porções escalares, vetoriais e tensoriais e analisadas de forma independente. As perturbações escalares da métrica e de seu momento conjugado podem ser expandidas em modos harmônicos em S^3 da seguinte maneira:

$$\delta\gamma_{ij} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{lm} \left[\gamma_{nlm}^1 \frac{1}{3} \Omega_{ij} Q_{nlm} \right] + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{lm} \left[\gamma_{nlm}^2 \left(\frac{1}{n^2-1} \bar{D}_i \bar{D}_j + \frac{1}{3} \Omega_{ij} \right) Q_{nlm} \right], \quad (4.87)$$

$$\delta\tilde{\pi}^{rs} = \sqrt{\Omega} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{lm} \left[\frac{\pi_{nlm}^1}{N_1} \frac{\Omega^{rs}}{3} Q_{nlm} \right] + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{lm} \left[\frac{\pi_{nlm}^2}{N_2} \left(\frac{\bar{D}^r \bar{D}^s}{n^2-1} + \frac{\Omega^{rs}}{3} \right) Q_{nlm} \right] \right\}, \quad (4.88)$$

onde γ_{nlm}^1 , γ_{nlm}^2 , π_{nlm}^1 e π_{nlm}^2 são os coeficientes de expansão.

Segue que o vínculo escalar pode ser decomposto em um conjunto de modos normais:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \sum_{n \neq 1} \sum_{lm} \mathcal{H}_{nlm}^{(1)}, \quad (4.89)$$

dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nlm}^{(1)} = & \sqrt{\Omega} \left[-\frac{\kappa}{72V_0^2 a^3} \pi_a^2 - \frac{1}{4V_0^2 a^5} \pi_{\bar{\phi}}^2 + \frac{a}{2} V(\bar{\phi}) + \frac{1}{6\kappa a} (2n^2 - 5) \right] \gamma^1 \\ & + \sqrt{\Omega} \left[\frac{1}{3\kappa a} (n^2 - 4) \gamma^2 - \frac{\kappa}{V_0} \pi_a \pi^1 + \frac{1}{V_0 a^3} \pi_{\bar{\phi}} \pi^f + a^3 V_{\bar{\phi}}(\bar{\phi}) f \right]. \end{aligned} \quad (4.90)$$

A linearização do vínculo do difeomorfismo tem uma expansão em modos normais da forma:

$$\mathcal{H}_i^{(1)} = \sum_{n \neq 1} \sum_{lm} \mathcal{H}_{i,nlm}^{(1)}, \quad (4.91)$$

com

$$\mathcal{H}_{i,nlm}^{(1)} = \sqrt{\Omega} \left[-2a^2 (\pi^1 - \pi^2) + \frac{\pi_a}{18V_0 a} \left(\gamma^1 - 4 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} \gamma^2 \right) + \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{V_0} f \right] \bar{D}_i Q_{nlm}, \quad (4.92)$$

onde os índices nlm foram suprimidos dos coeficientes das expansões harmônicas.

As perturbações $\delta\phi$ e $\delta\gamma_{ij}$ são dependentes de calibre, assim como seus coeficientes f , γ^1 e γ^2 . Por isso, é introduzida uma nova variável, q , proposta por [83] e [84] e discutida em [23], que é independente de calibre e se relaciona com as perturbações escalares da seguinte forma:

$$q_{nlm} = f_{nlm} - \sqrt{V_0} \frac{a\dot{\phi}}{\dot{a}} \left(\gamma_{nlm}^1 + \gamma_{nlm}^2 \right), \quad (4.93)$$

onde

$$q = \sum_{nlm} q_{nlm} Q_{nlm}. \quad (4.94)$$

É possível realizar a escolha de um calibre especial que torne as equações mais simples. O calibre espacialmente esférico, ou fatiamento esférico, anula as perturbações da métrica $\gamma_{nlm}^1 = \gamma_{nlm}^2 = 0$ e condiciona as perturbações escalares a serem, integralmente, perturbações do campo escalar. Ou seja, $q_{nlm} = f_{nlm}$. Esta condição é análoga ao calibre espacialmente plano. Impondo os vínculos linearizados $\mathcal{H}^{(1)}$ e $\mathcal{H}_i^{(1)}$, pode-se fixar as perturbações do momento da métrica, $\delta\tilde{\pi}^{ij}$, em termos das perturbações das variáveis relacionadas ao campo, $\delta\phi$ e $\delta\tilde{\pi}_\phi$.

Para que a condição de calibre $\delta\gamma_{ij} = 0$ seja preservada pela evolução temporal, deve-se impor a condição de consistência:

$$\{H^{(2)}, \delta\gamma_{ij}\} = 0. \quad (4.95)$$

Isso fixa as perturbações da função de lapso δN e do vetor de deslocamento δN^i em termos das outras perturbações. Como as perturbações do momento $\delta\tilde{\pi}^{ij}$ já foram eliminadas pelos vínculos linearizados, a hamiltoniana quadrática pode então ser expressa, exclusivamente, em termos das perturbações de campo $\delta\phi$ e $\delta\tilde{\pi}_\phi$. Calculando então os colchetes de Poisson

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = \{\delta\phi, H^{(2)}\}, \quad (4.96)$$

$$\frac{d\delta\tilde{\pi}_\phi}{dt} = \{\delta\tilde{\pi}_\phi, H^{(2)}\}, \quad (4.97)$$

são obtidas as equações de movimento para as perturbações do campo.

No calibre espacialmente esférico, a contribuição de primeira ordem para os modos normais do vínculo escalar se reduz à:

$$\mathcal{H}_{nlm}^{(1)} = \sqrt{\Omega} \left[-\frac{\kappa}{V_0} \pi_a \pi^1 + \frac{1}{V_0 a^3} \pi_{\bar{\phi}} \pi^f + a^3 V'(\bar{\phi}) f \right]. \quad (4.98)$$

Impondo o vínculo escalar $\mathcal{H}_{nlm}^{(1)} = 0$, pode-se fixar a perturbação do momento π^1 em termos das outras perturbações lineares,

$$\pi^1 = \frac{1}{\kappa a^3} \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{\pi_a} \pi^f + \frac{V_0 a^3 V'(\bar{\phi})}{\kappa \pi_a} f. \quad (4.99)$$

Da mesma forma, o vínculo do difeomorfismo no calibre espacialmente esférico torna-se:

$$\mathcal{H}_{i,nlm}^{(1)} = \sqrt{\Omega} \left[-2a^2 (\pi^1 - \pi^2) + \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{V_0} f \right] \bar{D}_i Q_{nlm}. \quad (4.100)$$

Os termos entre colchetes podem ser usados para fixar o momento π^2 em termos das outras perturbações lineares. Utilizando a Equação 4.99 para π^1 , obtém-se:

$$\pi^2 = \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{\kappa a^3 \pi_a} \pi^f + \left(\frac{V_0 a^3 V'(\bar{\phi})}{\kappa \pi_a} - \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{2V_0 a^2} \right) f. \quad (4.101)$$

Os termos quadráticos no vínculo escalar, inserindo a expansão das perturbações em termos de harmônicos hipersféricos, no calibre espacialmente esférico e integrando na 3-esfera, são dados por:

$$\int d^3x \mathcal{H}^{(2)} = \sum_{n \neq 1} \sum_{lm} \left[-3\kappa a \left((\pi^1)^2 - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} (\pi^2)^2 \right) + \frac{1}{2a^3} (\pi^f)^2 + \frac{a^3 V''(\bar{\phi})}{2} f^2 + \frac{a}{2} (n^2 - 1) f^2 \right]. \quad (4.102)$$

A hamiltoniana quadrática também se decompõe em uma soma de modos normais desacoplados,

$$H^{(2)} = \sum_{n \neq 1} \sum_{lm} H_{nlm}^{(2)}, \quad (4.103)$$

Substituindo as fórmulas deduzidas para os vínculos linearizados e para o vínculo escalar quadrático na hamiltoniana quadrática (Eq. 4.77), ela é expressa em termos das amplitudes das perturbações como:

$$\begin{aligned} H_{nlm}^{(2)} = \bar{N} \left[-3\kappa a \left((\pi^1)^2 - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} (\pi^2)^2 \right) + \frac{1}{2a^3} (\pi^f)^2 + \frac{a^3 V''(\bar{\phi})}{2} f^2 + \frac{a}{2} (n^2 - 1) f^2 \right] \\ + g \left[-\frac{\kappa \pi_a}{V_0} \pi^1 + \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{V_0 a^3} \pi^f + a^3 V'(\bar{\phi}) f \right] \\ + (n^2 - 1) k \left[-2a^2 (\pi^1 - \pi^2) + \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{V_0} f \right]. \quad (4.104) \end{aligned}$$

Impondo os requisitos de consistência para que a condição de calibre seja preservada pela evolução temporal:

$$\{\gamma^1, H^{(2)}\} = \{\gamma^2, H^{(2)}\} = 0, \quad (4.105)$$

as amplitudes g e k das perturbações da função de lapso e do vetor de deslocamento são determinadas como:

$$k = -\frac{3\kappa \bar{N}}{a(n^2 - 4)} \pi^2, \quad (4.106)$$

$$g = -6\bar{N}V_0 \frac{a}{\pi_a} \left(\pi^1 - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \pi^2 \right). \quad (4.107)$$

Também pode ser verificado que $\{\gamma^1, H^{(1)}\} = \{\gamma^2, H^{(1)}\} = 0$.

Substituindo as Equações 4.99, 4.101, 4.106 e 4.107 que expressam as perturbações π^1, π^2, k, g em termos das amplitudes das perturbações do campo na Equação

4.104, é obtida uma expressão da forma

$$H_{nlm}^{(2)} = \alpha f^2 + \beta f \pi^f + \gamma (\pi^f)^2, \quad (4.108)$$

onde os coeficientes α , β e γ dependem apenas das quantidades do plano de fundo. Essa hamiltoniana pode ser trazida para uma forma diagonal pela aplicação da transformação canônica:

$$\pi_T^f = \pi^f + \frac{\beta}{2\gamma} f, \quad f_T = f. \quad (4.109)$$

Após essa transformação, a hamiltoniana quadrática é expressa em termos das novas variáveis canônicas, que para simplificar a notação, são renomeadas como $\pi_T^f \rightarrow \pi^f$ e $f_T \rightarrow f$. A hamiltoniana torna-se:

$$H_{nlm}^{(2)} = \frac{c_1}{2} (\pi^f)^2 + \frac{c_2}{2} f^2, \quad (4.110)$$

com

$$c_1 = \bar{N} \left[\frac{1}{a^3} + \frac{18\pi_{\bar{\phi}}^2}{(n^2 - 4)\kappa a^5 \pi_a^2} \right], \quad (4.111)$$

$$c_2 = \bar{N} \left\{ a(n^2 - 1) + a^3 V''(\bar{\phi}) - \frac{6a^7 V'(\bar{\phi}) V_0^2}{\kappa \pi_a^2} + 6\kappa a \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \left(\frac{a^3 V'(\bar{\phi}) V_0}{\kappa \pi_a} - \frac{\pi_{\bar{\phi}}}{2a^2 V_0} \right)^2 + \left[\frac{3\pi_{\bar{\phi}}}{a^4 \pi_a} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} - \frac{18a V_0^2 V'(\bar{\phi})}{\kappa \pi_a^2 (n^2 - 4)} \right]^2 \left[\frac{V_0^2}{a^3 \pi_{\bar{\phi}}^2} + \frac{18V_0^2}{(n^2 - 4)\kappa a^5 \pi_a^2} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.112)$$

As equações de movimento tornam-se simplesmente:

$$\dot{f} = \{f, H_{nlm}^{(2)}\} = c_1 \pi^f, \quad (4.113)$$

$$\dot{\pi}^f = \{\pi^f, H_{nlm}^{(2)}\} = -c_2 f, \quad (4.114)$$

que podem ser combinadas em uma equação de segunda ordem para a amplitude f :

$$\ddot{f} - \frac{\dot{c}_1}{c_1} \dot{f} + c_1 c_2 f = 0. \quad (4.115)$$

Esse resultado é utilizado para cálculos numéricos da evolução das perturbações do campo escalar durante a era da inflação e no período pré-inflacionário.

4.5 Método numérico

A linguagem *Wolfram Mathematica* é utilizada para implementar numericamente as equações inferidas ao longo deste trabalho. De maneira geral, o código pode

ser dividido em três partes: a primeira, resolve equações do plano de fundo durante o regime de rolamento lento, utilizando os dados do PLANCK como parâmetros de entrada para se definir as condições iniciais da evolução do plano de fundo. A segunda parte utiliza essas condições iniciais para realizar a integração do sistema de equações diferenciais que descrevem o plano de fundo (eq. da aceleração e eq. de Klein-Gordon), produzindo soluções dependentes do tempo. A terceira parte resolve a equação das perturbações, de maneira que os coeficientes dessa equação são relacionados ao plano de fundo. As versões completas dos códigos encontram-se nos Anexos A.1 e A.2.

Utiliza-se unidades em que $G = 1$. Para as grandezas de tempo e comprimento, são utilizadas as unidades de Planck, de forma que $1 t_p = 5,39106 \cdot 10^{-44}$ s e $1 pl = 1,617318 \cdot 10^{-35}$ m.

Os parâmetros de entrada são os parâmetros cosmológicos $\mathcal{A}_s(k_*^P)$ e n_s , retirados do PLANCK [9], em sua melhor estimativa:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s(k_*^P) &= 2,100 \cdot 10^{-9}, \\ n_s &= 0,9649,\end{aligned}\tag{4.116}$$

onde $k_*^P = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$.

O parâmetro \mathcal{A}_s é, inicialmente, redefinido para o modo $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$, utilizando a Equação 4.18. Em seguida, ele é traduzido para o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. Com isso, são adicionados aproximadamente 7,6 *e-folds* ao regime inflacionário, calculados através da Equação 4.27. As condições iniciais, portanto, são calculadas no instante em que o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte. O número de *e-folds* N_* , a partir de k_*^I até o fim da inflação, é fixado em $N_* = 54$. Dessa forma, baseado nas Equações 4.6, 4.7, 4.9, 4.16, 4.19 e 4.20, resolve-se numericamente as seguintes equações para se obter as condições iniciais do plano de fundo:

$$\begin{aligned}H_* &= \sqrt{\pi \mathcal{A}_s(k_*)} \epsilon_*, \\ n_s - 1 &= -4\epsilon_* + 2\delta_*, \\ N_* &= -1,04 + \frac{3}{4} e^{\sqrt{16\pi/3}\phi_*} - \sqrt{3\pi}\phi_*, \\ 3H_*\dot{\phi}_* + V_\phi(\phi_*) &= 0, \\ H_*^2 &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\dot{\phi}_*^2}{2} + V(\phi_*) \right), \\ \dot{\phi}_*^2(\epsilon_* - 3) + 2\epsilon_* V(\phi_*) &= 0.\end{aligned}\tag{4.117}$$

É utilizado o potencial de Starobinsky, definido em 4.2.

O Parâmetro de curvatura Ω_K é um parâmetro livre do código. Para a determinação do valor do termo de curvatura espacial da equação de Friedmann ou da aceleração no instante do cruzamento, é necessário atribuir um valor para a constante de Hubble H_0 , de acordo com a Equação 4.25. Portanto, é utilizado $H_0 = 67,36 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, de acordo com estimativas do PLANCK para o modelo ΛCDM [9]. São considerados valores do parâmetro de curvatura restritos a $|\Omega_K| \leq 0,001$, de modo a respeitar restrições observacionais já conhecidas [69].

Em resumo, a primeira parte do código recebe como entrada os valores de k_* , N_* , \mathcal{A}_s , n_s , H_0 e Ω_K . Então, as equações definidas em 4.117 são resolvidas e fornecem os valores de m_* , ϕ_* , $\dot{\phi}_*$, ϵ_* , δ_* , H_* , ρ_{K*} , que são utilizados como condições iniciais para a evolução do plano de fundo.

Na segunda parte do código, é utilizada a função **NDSolve** para integrar o sistema de equações diferenciais Klein-Gordon-aceleração em relação à variável de tempo t . As Equações 3.54 e 3.106 são utilizadas para o modelo quântico, e as Equações 3.54 e 3.13, para o modelo clássico. O fator de escala adimensional é fixado como $\tilde{a}_* = \tilde{a}(t_*) = 1$. O valor inicial de \dot{a}_* é obtido através da equação de Friedmann, de forma que $\dot{a}_* = H_*$ para o caso clássico e:

$$\dot{a}_* = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{\dot{\phi}_*^2}{2} + V(\phi_*) + \frac{3}{8\pi\gamma_0^2\lambda^2} \left(\text{sen}^2(\lambda\sqrt{\rho_{K*}}) - (1 + \gamma_0^2)\lambda^2\rho_{K*} \right) \right] \times \quad (4.118)$$

$$\left[1 - \text{sen}^2(\lambda\sqrt{\rho_{K*}}) + (1 + \gamma_0^2)\lambda^2\rho_{K*} - \frac{8\pi\gamma_0^2\lambda^2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}_*^2}{2} + V(\phi_*) \right) \right],$$

para o caso quântico. O valor do parâmetro de Barbero-Immirzi é fixado em $\gamma_0 = 0,2375$, como realizado em [44]. Este valor é obtido do cálculo da entropia de buracos negros na gravitação quântica de laços.

A terceira parte do código resolve a equação de Klein-Gordon das perturbações escalares (Eq. 4.115). Os coeficientes dessa equação, definidos em 4.111 e 4.112, dependem de grandezas relacionadas ao plano de fundo. Contudo, esses coeficientes estão expressos em termos dos momentos conjugados às variáveis dinâmicas do sistema π_a e $\pi_{\bar{\phi}}$. Portanto, a solução do plano de fundo é transferida para o espaço de fases, realizando a integração das equações em termos dos momentos. Para isso, são utilizadas a hamiltoniana efetiva do plano de fundo, 3.102, e as definições das equações de movimento em termos dos momentos 4.70, 4.71, 4.73 e 4.74, calculadas a partir da hamiltoniana que inclui contribuições quânticas.

A Equação 4.115 é integrada utilizando a função **NDSolve** e suas condições iniciais são determinadas alguns *e-folds* antes do *bounce*, utilizando as definições de

vácuo adiabático de quarta ordem, estudadas na Seção 2.2.3. O espectro de potência $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é calculado utilizando a definição 3.84 e fixado em um tempo t_{fim} durante a inflação e após o cruzamento do horizonte pelo modo de referência k_* . O número harmônico n é variado dentro de uma faixa de valores, entre $n_{\text{min}} = 3$ e $n_{\text{max}} \sim 10^6$, para a composição do espectro. O valor de n_{max} pode variar a depender do valor de Ω_K utilizado. Para cada espectro, são calculados aproximadamente mil pontos.

5 Análises numéricas e determinação do espectro de potência

Este capítulo contempla as análises e resultados numéricos alcançados ao longo deste trabalho, que estão organizados em duas seções: a Seção 5.1 contém as análises relacionadas ao plano de fundo e a Seção 5.2 é referente às perturbações.

5.1 A dinâmica inflacionária e pré-inflacionária do plano de fundo

A evolução do plano de fundo é realizada ao integrar numericamente a equação da aceleração com modificações quânticas 3.106 e a equação de Klein-Gordon 3.54. Nas Seções 5.1.1 e 5.1.2, as condições iniciais são fixadas no tempo t_* e determinadas a partir da escolha de um modo de referência k_* , utilizando os parâmetros cosmológicos \mathcal{A}_s e n_s do PLANCK [9]. Na primeira seção, avalia-se a dinâmica efetiva do plano de fundo e os efeitos que a variação das condições iniciais podem gerar. Na segunda, são estudados os efeitos da variação da curvatura espacial. Em ambos os casos, utiliza-se $N_* = 54$. Na Seção 5.1.3, as condições iniciais são fixadas no *bounce* e os dados do PLANCK não são relevantes. Dessa forma, as condições iniciais tornam-se parâmetros livres, sendo fixadas pela escolha do valor do fator de escala e do campo escalar no instante do *bounce*, a_b e ϕ_b , respectivamente. Com isso, é traçada a relação entre as condições iniciais e os regimes energéticos no *bounce*, onde é possível observar diferentes tipos de evolução.

5.1.1 Evolução do plano de fundo com diferentes condições iniciais

A integração numérica do plano de fundo é realizada a partir do cruzamento do horizonte de Hubble por um modo de referência k_* , instante em que é determinado $t_* = 0$. O período entre t_* e o fim da inflação dura exatamente $N = 54$ *e-folds*. No entanto, a inflação tem seu início alguns *e-folds* antes de t_* . O *bounce* ocorre no período pré-inflacionário, com alguns *e-folds* de diferença para o início da inflação. Para exemplificar a evolução, é considerado o modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ com valor de curvatura $|\Omega_K| = 0,001$. O período pré-inflacionário é dominado pela energia cinética $\rho_{\text{cin}} = \dot{\phi}^2/2$ e, em seguida, o universo é dominado pelo potencial $\rho_V = V(\phi)$, dando

início à inflação. A transição entre os dois regimes pode ser avaliada pela equação de estado, em que seu valor passa de $w = 1$ (domínio de energia cinética) para $w = -1$ (domínio de potencial), como demonstra-se na Figura 12.

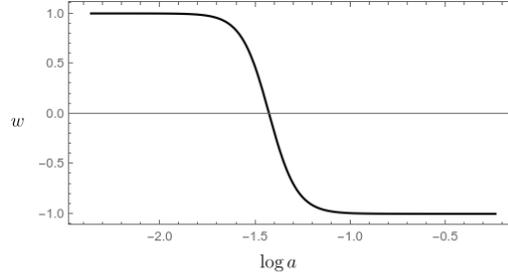


Figura 12 – Equação de estado w por $\log a$, exibindo a transição entre o período pré-inflacionário, dominado por energia cinética, e o período inflacionário, dominado por potencial. As condições iniciais foram determinadas no cruzamento do horizonte pelo modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e o valor de curvatura utilizado foi $|\Omega_K| = 0,001$.

Ao observar a equação de Friedmann com modificações quânticas (Eq. 3.104), nota-se que ela possui duas raízes em ρ , isto é, dois valores tornam $H = 0$. O primeiro deles é quando $\rho = \rho_1$, indicando soluções assintóticas no tempo, tanto para o passado quanto para o futuro, quando $t \rightarrow \pm\infty$. O segundo valor representa o instante do *bounce*, em que $\dot{a} = 0$, com $\rho = \rho_2$, como é demonstrado na Figura 13. A linha vertical no gráfico corresponde à densidade de energia no instante do *bounce*, que também é o instante em que o valor de ρ encontra ρ_2 .

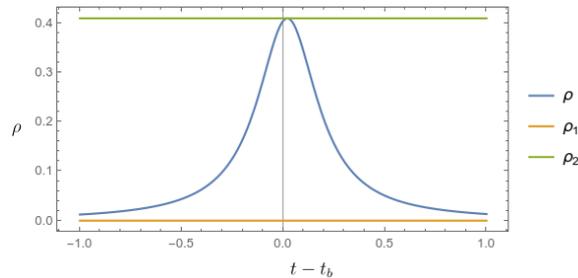


Figura 13 – Evolução da densidade de energia ρ em torno do *bounce*. O valor de ρ encontra ρ_2 no instante do *bounce*, delimitado pela linha vertical. As condições iniciais foram determinadas no cruzamento do horizonte pelo modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e o valor de curvatura utilizado foi $|\Omega_K| = 0,001$.

A Figura 14 representa a evolução do horizonte de Hubble $1/aH$ em função do número de *e-folds* N , contados a partir do cruzamento do horizonte. Na parte inicial, enquanto o valor de $1/aH$ aumenta, está representado o período pré-inflacionário,

quando a maioria dos modos k se encontra dentro do horizonte. A inflação tem início quando $1/aH$ começa a diminuir e os modos observáveis passam a cruzar o horizonte de Hubble. Ao fim da inflação e início do período de reaquecimento, o horizonte volta a aumentar. Na Figura 14, as linhas pontilhadas representam diferentes valores para os modos. A linha pontilhada vermelha, $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$, indica o menor comprimento de onda observável na CMB. A linha pontilhada azul, representando o modo $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$, tem o mesmo valor usado como referência para k_* . Por fim, a linha pontilhada preta, $k = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$, indica um dos maiores comprimentos de onda observáveis que cruzam o horizonte, para esta escolha de condições iniciais e parâmetro de curvatura.

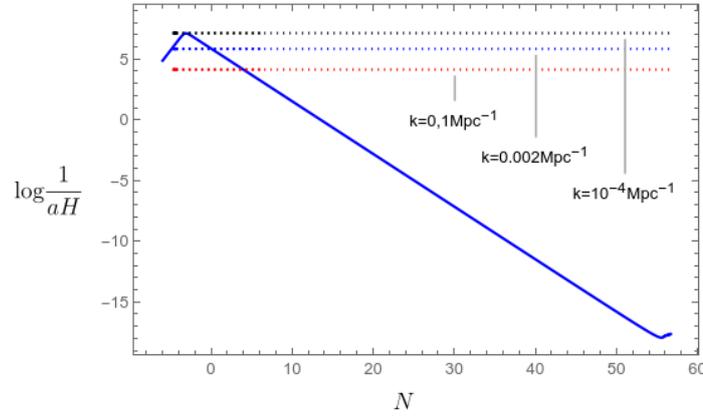


Figura 14 – Horizonte de Hubble em função do número de e -folds N , para $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e $|\Omega_K| = 0,001$, entre o período pré-inflacionário e o fim da inflação. As linhas pontilhadas representam os valores dos modos: em preto, $k = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$; em azul $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e em vermelho, $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$, sendo este último, a maior escala de modos observáveis na CMB.

A escolha de diferentes condições iniciais pode afetar a duração do regime inflacionário. A Figura 15 exibe o horizonte de Hubble ao redor do início da inflação. As diferentes cores das curvas representam diferentes escolhas de k_* para a determinação das condições iniciais. As curvas em azul, vermelho, preto, verde e roxo representam, respectivamente, os valores $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0005 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0003 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0002 \text{ Mpc}^{-1}$ e $k_* = 0,0001 \text{ Mpc}^{-1}$. As condições iniciais foram determinadas no instante em que o modo $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte. Com isso, o parâmetro \mathcal{A}_s é redefinido através da relação 4.18. No painel da esquerda, é utilizado um modelo plano ($|\Omega_K| = 0$). Nesse caso, a escolha de modos k_* menores faz com que o início da inflação ocorra alguns e -folds no passado, prolongando a duração da inflação. No painel da direita, é utilizado um modelo fechado, com valor de curvatura $|\Omega_K| = 0,001$.

Neste modelo, é possível identificar três diferentes tipos de evolução, representadas pelas linhas sólidas, tracejadas e ponto-tracejadas, chamadas de evoluções do tipo I, II e III, respectivamente. Além disso, a curvatura estabelece um limite para o quanto a inflação pode ser prolongada pela escolha de condições iniciais.

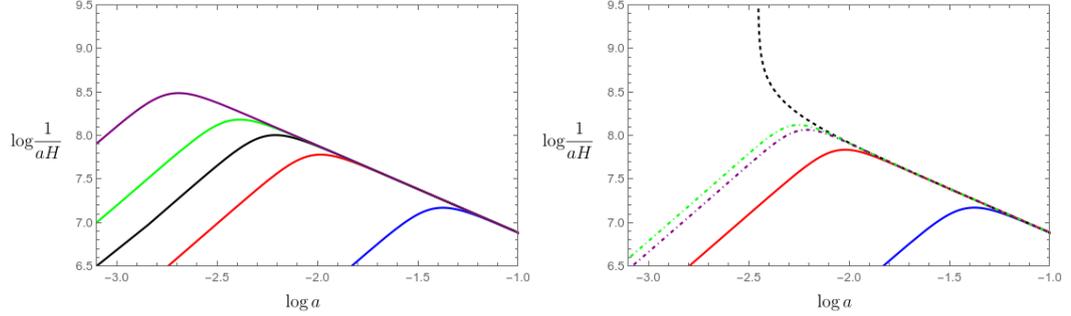


Figura 15 – Horizonte de Hubble pelo fator de escala, representando o entorno do início da inflação. As diferentes cores indicam diferentes escolhas de k_* para a determinação de condições iniciais, onde as curvas em azul, vermelho, preto, verde e roxo representam, respectivamente, $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0005 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0003 \text{ Mpc}^{-1}$, $k_* = 0,0002 \text{ Mpc}^{-1}$ e $k_* = 0,0001 \text{ Mpc}^{-1}$. Em todos os casos, as condições iniciais foram obtidas no instante em que o modo $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte. O painel da esquerda representa um modelo plano, enquanto o painel da direita configura um modelo fechado com $|\Omega_K| = 0,001$. As curvas sólidas indicam evoluções do tipo I, a linha tracejada representa uma evolução do tipo II e as linhas ponto-tracejadas representam evoluções do tipo III.

A evolução do tipo I, representada pelas linhas sólidas na Figura 15, é caracterizada por um *bounce* simétrico. A escolha de condições iniciais afeta consideravelmente a duração da inflação, como nos modelos planos. A curvatura não desempenha um papel significativo. Neste modelo, a energia cinética é dominante no *bounce* e decai com o tempo. A inflação tem início quando o potencial passa a ser mais relevante do que a energia cinética. Os regimes energéticos para uma evolução do tipo I podem ser observados na Figura 16. A curva azul representa a energia cinética. A curva laranja, o potencial. A curva verde é referente à energia de curvatura, que para o caso quântico, tem a forma:

$$\rho_{Kq} = \rho_c \left[\text{sen}^2 \frac{\lambda}{a} - (1 + \gamma_0^2) \frac{\lambda^2}{a^2} \right]. \quad (5.1)$$

Essa equação recupera o limite clássico, $\rho_K = -1/a^2$, à medida que o plano de fundo se afasta do regime quântico. O painel da esquerda representa o *bounce*, onde a linha horizontal indica o instante exato em que o *bounce* ocorre. No painel da direita, a evolução continua até alguns *e-folds* após o início da inflação. A linha vertical tracejada indica o início da inflação.

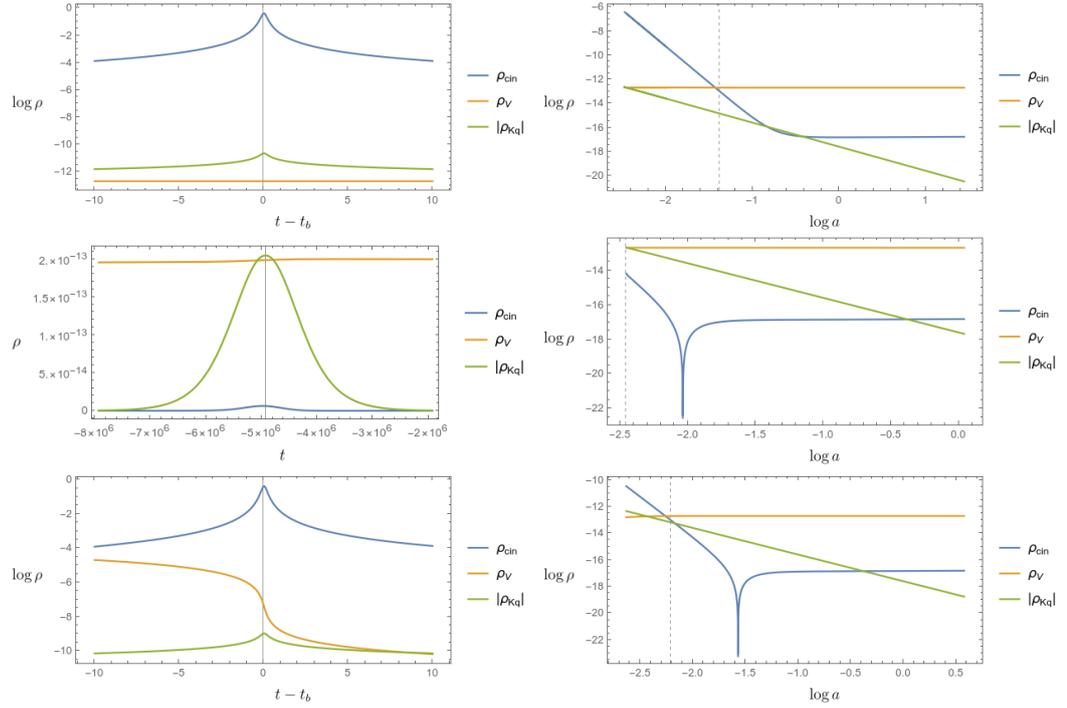


Figura 16 – Regimes energéticos no *bounce* (painéis da esquerda) e durante a inflação (painéis da direita), para evoluções do tipo I (painéis superiores), do tipo II (painéis intermediários) e do tipo III (painéis inferiores). A curva azul representa a energia cinética, ρ_{cin} , a curva laranja descreve a energia potencial, ρ_V , e a curva verde retrata o módulo da energia de curvatura, $|\rho_{Kq}|$. A linha sólida vertical indica o instante do *bounce* (t_b) e a linha tracejada vertical denota o início da inflação. O valor de curvatura utilizado é de $|\Omega_K| = 0,001$.

A evolução do tipo II produz um *bounce* mais suave, dominado pela energia de curvatura. Nesse caso, a energia cinética é pequena no instante do *bounce*, como pode ser observado no painel da esquerda da Figura 16. O potencial passa a dominar rapidamente e a expansão acelerada do fator de escala tem início logo após o *bounce*. O painel da direita da Figura 16 demonstra a evolução das densidades de energia ρ_{cin} , ρ_V e $|\rho_{Kq}|$ após o início da inflação. A evolução do tipo II produz o que se chama de um *bounce* clássico, já que a energia de curvatura é a responsável por provocar o ricochete do espaço. Além disso, os efeitos quânticos são desprezíveis. Nesse caso, mesmo a equação da aceleração clássica 3.13 é capaz de produzir o modelo de *bounce* ao invés do *Big Bang*.

A evolução do tipo III produz um *bounce* quântico e assimétrico. Nesse tipo de evolução, tanto a energia cinética quanto a energia de curvatura são relevantes, apesar de o *bounce* ainda ser dominado por ρ_{cin} . A inflação tem início após o domínio do

potencial. Os painéis inferiores da Figura 16 representam a evolução das densidades de energia no entorno do *bounce* (painel da esquerda) e no entorno do início da inflação (painel da direita) para uma evolução tipo III. Uma característica desse tipo de solução é que a duração da inflação não é afetada pela escolha de k_* , como pode ser observado na Figura 15. Nesse caso, a curvatura espacial controla a dinâmica do plano de fundo.

5.1.2 Influência da curvatura espacial na evolução do plano de fundo

Na Seção 5.1.1, é demonstrado como a escolha de condições iniciais afeta a evolução do plano de fundo e, conseqüentemente, a duração do regime inflacionário. Outro fator que pode influenciar a evolução é a escolha do valor do parâmetro de curvatura Ω_K . Para demonstrar os efeitos da curvatura, é utilizado o modo $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$ como referência e as condições iniciais são traduzidas para o instante em que o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble. O modo $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ é utilizado posteriormente para a descrição efetiva do plano de fundo.

Ao variar o valor de Ω_K , é possível observar um efeito semelhante ao que se observa com a variação de k_* , descrito pela Figura 15. Diferentes valores de Ω_K são capazes de produzir soluções do tipo I, II e III, como é demonstrado na Figura 17. Para o modo $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$, o valor de curvatura $|\Omega_K| = 3 \times 10^{-8}$ produz uma solução do tipo II. Valores de curvatura maiores produzem soluções do tipo III e valores menores geram soluções do tipo I. Na Figura 17, as curvas sólidas representam soluções do tipo I, a curva tracejada é uma solução do tipo II e as curvas ponto-tracejadas são soluções do tipo III.

As soluções do tipo III são sensíveis à variação de Ω_K , de forma que valores maiores de curvatura geram um regime inflacionário mais curto. Além disso, são soluções que produzem um *bounce* assimétrico, como é demonstrado pela curva em vermelho do painel direito da Figura 18, onde foi utilizado $|\Omega_K| = 4 \times 10^{-8}$. O período de contração neste tipo de *bounce* ocorre bem mais rápido do que a expansão. A curva em preto representa um *bounce* simétrico, produzido por uma solução do tipo I, em que foi utilizado $|\Omega_K| = 10^{-8}$. Para a curva azul, foi utilizado $|\Omega_K| = 3 \times 10^{-8}$. Ela representa uma solução do tipo II e produz o chamado *bounce* clássico. Este tipo de *bounce* é bem mais suave que os outros tipos e pode ser contemplado no painel esquerdo da Figura 18.

As soluções do tipo I fazem parte de uma aproximação plana do plano de fundo, já que a curvatura não afeta significativamente os seus comportamentos. Os painéis superiores da Figura 19 demonstram que valores pequenos de curvatura não afetam a

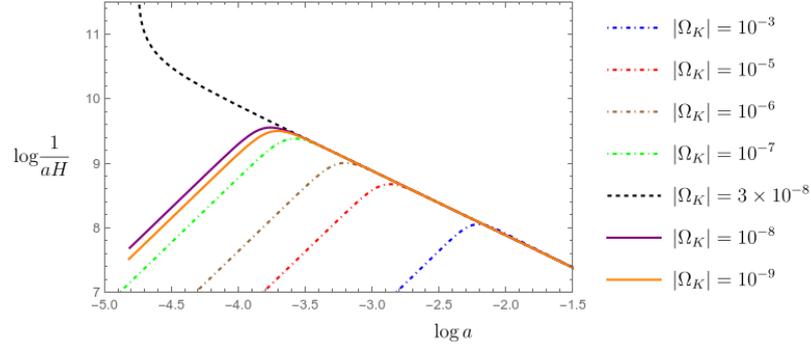


Figura 17 – Horizonte de Hubble pelo fator de escala, representando o início da inflação, com diferentes valores de curvatura Ω_K . As curvas sólidas indicam evoluções do tipo I, a linha tracejada representa uma evolução do tipo II e as linhas ponto-tracejadas representam evoluções do tipo III. Esta evolução utiliza o modo $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$ como referência e as condições iniciais são obtidas no instante em que o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble.

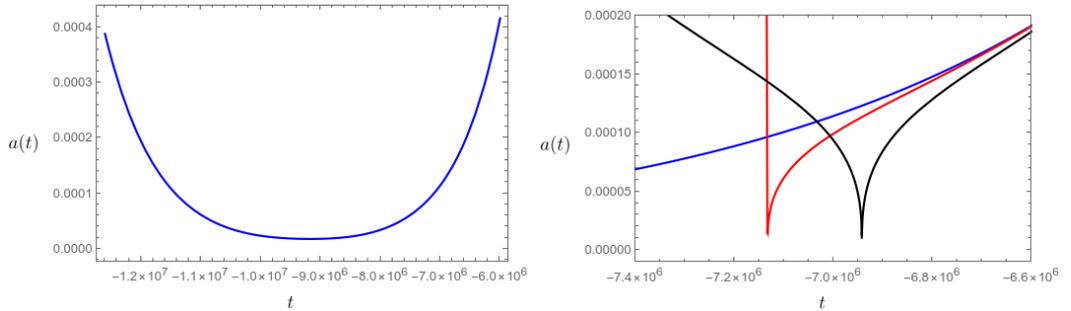


Figura 18 – Tipos de *bounce*. O painel da esquerda contém um *bounce* clássico, produzido por uma solução do tipo II, com $|\Omega_K| = 3 \times 10^{-8}$. O painel da direita contém os três tipos: a curva vermelha representa um *bounce* assimétrico, com $|\Omega_K| = 4 \times 10^{-8}$, a curva preta simboliza um *bounce* simétrico, com $|\Omega_K| = 10^{-8}$ e a curva azul é um *bounce* clássico (com as mesmas condições da curva representada no painel da esquerda). Em todos os casos, foi utilizado o modo $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$ como referência.

duração dos regimes inflacionário e pré-inflacionário, nem o número de *e-folds* desses períodos. O painel da esquerda exibe o tempo entre o *bounce* (t_b) e o instante em que o modo k_*^I cruza o horizonte ($t_* = 0$) e o painel da direita contém o número de *e-folds* N_b desse mesmo período. O modo de referência utilizado nesse caso é $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$, traduzido para $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. Essa escolha de referencial produz um regime com $N_b \simeq 15,9$ para a aproximação plana, que é longo o suficiente para que as impressões do *bounce* nos modos observáveis da CMB sejam desprezíveis no caso de um universo plano [39, 40]. Portanto, esta é a escolha de referência para a análise das perturbações escalares, já que as correções às previsões usuais da inflação devem ser atribuídas à

curvatura, e não a uma escolha arbitrária de condições iniciais.

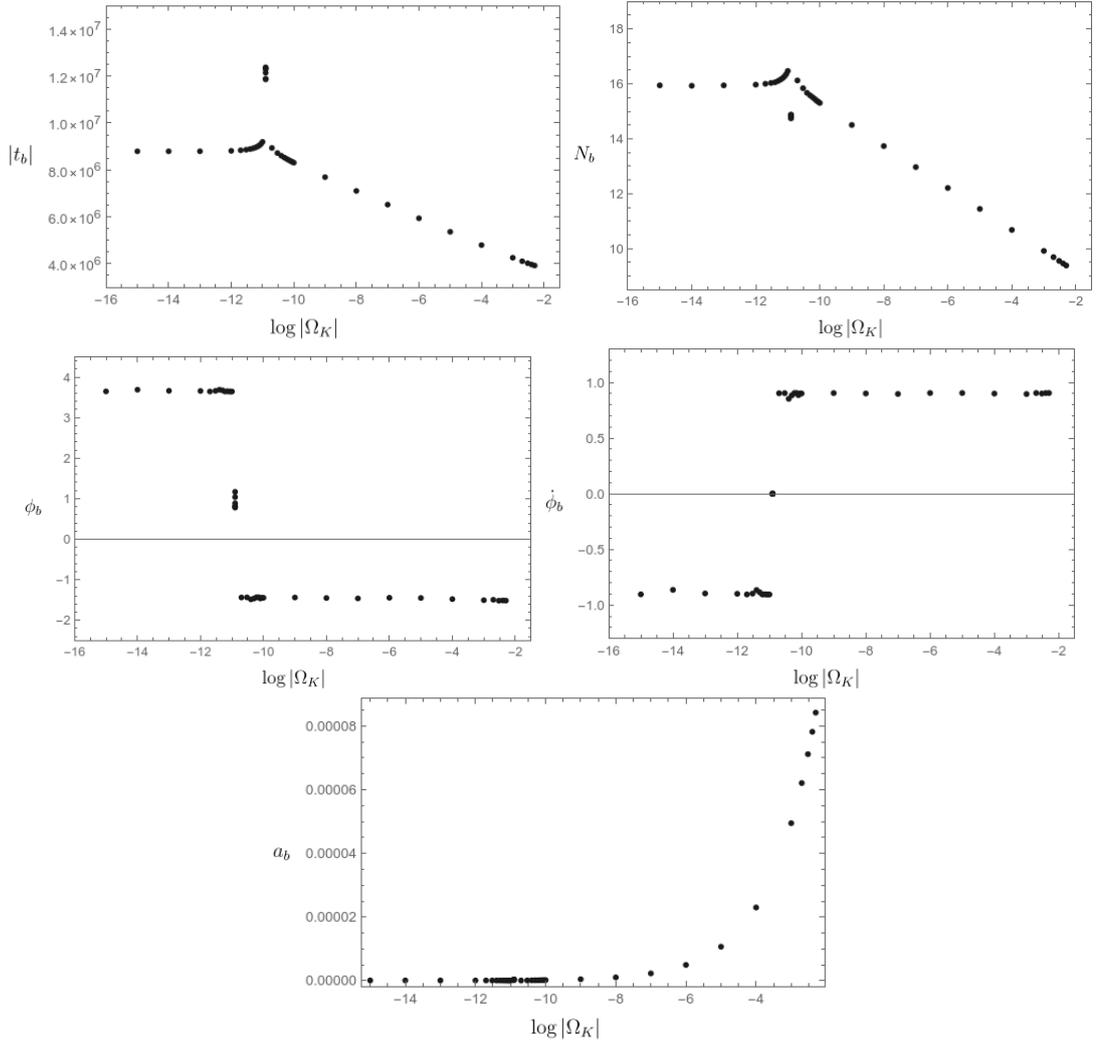


Figura 19 – Valores de algumas grandezas no *bounce* para diferentes valores de curvatura $|\Omega_K|$. Painel superior da esquerda: tempo t_b entre o instante do *bounce* e o instante do cruzamento do horizonte pelo modo k_*^I . Painel superior da direita: número de *e-folds* N_b entre o *bounce* e o cruzamento do horizonte pelo modo k_*^I . Painel intermediário da esquerda: valor do campo escalar $\phi_b = \phi(t_b)$ no instante do *bounce*. Painel intermediário da direita: valor da derivada do campo $\dot{\phi}_b = \dot{\phi}(t_b)$ no instante do *bounce*. Painel inferior: valor do fator de escala $a_b = a(t_b)$ no instante do *bounce*.

O valor de algumas grandezas no instante do *bounce* são exibidos para diferentes valores de curvatura na Figura 19. Para $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ o valor de curvatura que produz soluções do tipo II é da ordem de $|\Omega_K| \sim 10^{-11}$, caracterizado pelas pontas nos painéis superiores e pelos valores intermediários de $\phi_b = \phi(t_b)$ e $\dot{\phi}_b = \dot{\phi}(t_b)$ nos painéis intermediários. As soluções do tipo I são produzidas por $|\Omega_K| < 10^{-11}$, de

forma que a variação da curvatura não afeta o valor das grandezas. As soluções do tipo III geram comportamentos que são afetados tanto por efeitos quânticos quanto de curvatura e são válidas para $|\Omega_K| > 10^{-11}$. Os valores de t_b e N_b diminuem para curvaturas maiores e os valores de ϕ_b e $\dot{\phi}_b$ mudam de sinal quando comparados com soluções do tipo I. O valor do fator de escala no instante do *bounce* $a_b = a(t_b)$ também passa a aumentar com o aumento da curvatura para soluções do tipo III, como pode ser observado no painel inferior da Figura 19.

5.1.3 Investigação de parâmetros e condições iniciais no *bounce*

Nesta Seção, a evolução do plano de fundo é avaliada a partir de dois parâmetros livres: o valor do fator de escala a_b e o valor do campo escalar $\bar{\phi}_b$ no instante do *bounce*. A partir desses parâmetros, são estabelecidas as condições iniciais para as equações que descrevem o plano de fundo. A evolução numérica utiliza a versão de LQC da equação da aceleração (Eq. 3.106) e a Equação de Klein-Gordon para o campo escalar homogêneo 3.54.

Para determinar os instantes em que o fator de escala atinge extremos, considera-se a equação de Friedmann modificada, Eq. 3.104. Ao analisá-la, verifica-se que essa equação possui duas raízes. Em particular, quando $\rho = \rho_1$ ou $\rho = \rho_2$, obtém-se $H = 0$. Utilizando $K = 1$, as densidades ρ_1 e ρ_2 tornam-se:

$$\rho_1 = -\chi\rho_c, \quad (5.2)$$

$$\rho_2 = \rho_c(1 - \chi), \quad (5.3)$$

A variável χ é função do fator de escala,

$$\chi = \text{sen}^2 \frac{\lambda}{a} - (1 + \gamma_0^2) \frac{\lambda^2}{a^2}. \quad (5.4)$$

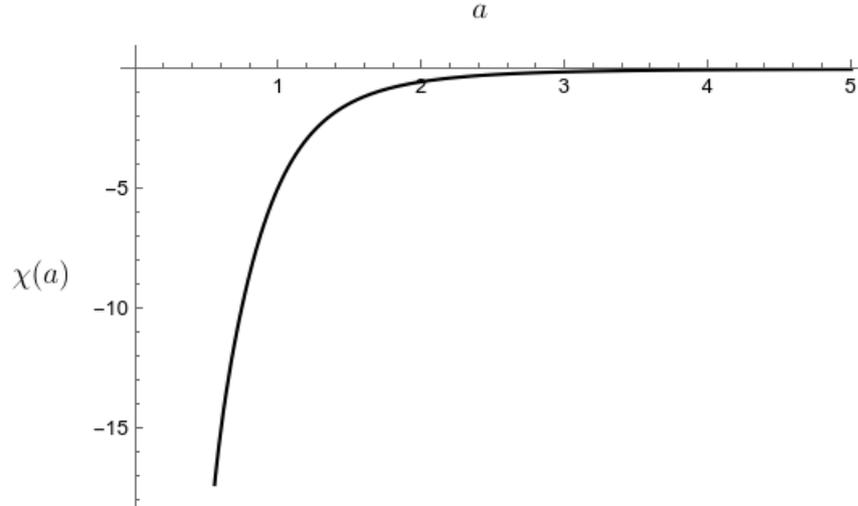
A Figura 20 demonstra o comportamento de χ em função de a . A função é sempre negativa, independente do valor de a . Dessa forma, é possível analisar as raízes ρ_1 e ρ_2 em relação ao fator de escala. Começando por $\rho = \rho_1$, da Equação 3.52, obtém-se a relação:

$$\frac{\dot{\phi}_1^2}{2} + V(\phi_1) = -\chi\rho_c, \quad (5.5)$$

onde o índice 1 representa o valor das variáveis ϕ e $\dot{\phi}$ sob a condição de que $\rho = \rho_1$.

Reorganizando os termos da Equação 5.5, pode-se representá-la da forma:

$$\dot{\phi}_1 = \pm \sqrt{2(-\chi\rho_c - V(\phi_1))}. \quad (5.6)$$


 Figura 20 – Comportamento de χ em função de a .

Com isso, o termo dentro da raiz deve respeitar a desigualdade: $2(-\chi\rho_c - V(\phi_1)) \geq 0$. Utilizando a fórmula do potencial (Eq. 4.2) e analisando a desigualdade, é possível estabelecer as seguintes condições para ϕ_1 :

$$\phi_1 \leq -\sqrt{\frac{3}{16\pi}} \ln \left[1 - \sqrt{\frac{-32\pi\chi\rho_c}{3m^2}} \right], \quad (5.7)$$

$$\phi_1 \geq -\sqrt{\frac{3}{16\pi}} \ln \left[1 + \sqrt{\frac{-32\pi\chi\rho_c}{3m^2}} \right]. \quad (5.8)$$

Para a análise numérica, é utilizado o valor da massa determinado a partir das observações do Planck, como discutido nas seções anteriores, em que foram adotados os parâmetros $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e $N_* = 54$. Essa escolha de m garante que, para condições iniciais que levam à existência de um regime inflacionário, a evolução ocorra em uma escala compatível com as observações.

A análise de χ e dos valores permitidos para ϕ_1 sugere que a solução $\rho = \rho_1$ represente um futuro ou um passado assintótico em que $\dot{a} = 0$, já que o valor de $|\chi|$ é grande no *bounce*, criando uma faixa estreita de valores permitidos para ϕ_1 nesse período. Além disso, com valores pequenos de a , obtém-se $\rho_1 \gg \rho_c$. Adotando ρ_c como uma escala na qual efeitos quânticos se tornam relevantes, $\rho = \rho_1$ não ocorre na escala de Planck e, portanto, não descreve o *bounce*. O comportamento de ρ_1 ao redor do *bounce* é evidenciado na Figura 13.

Ocorre um outro instante em que $\dot{a} = 0$, consistindo em um *bounce*, caracterizado pelo ricochete do fator de escala. É fundamental considerar os efeitos da Equação 3.104, especialmente nesse período, quando as contribuições quânticas desempenham

um papel relevante. Portanto, analisa-se o caso em que $\rho = \rho_2$:

$$\frac{\dot{\phi}_2^2}{2} + V(\phi_2) = (1 - \chi)\rho_c. \quad (5.9)$$

Novamente, reorganizando os termos, obtém-se:

$$\dot{\phi}_2 = \pm\sqrt{2((1 - \chi)\rho_c - V(\phi_2))}. \quad (5.10)$$

Utilizando o mesmo procedimento da análise anterior, pode-se escrever:

$$\phi_2 \geq -\sqrt{\frac{3}{16\pi}} \ln \left[1 + \sqrt{\frac{-32\pi\rho_c}{3m^2}(1 - \chi)} \right]. \quad (5.11)$$

A Equação 5.11 representa uma condição de existência para ϕ_2 , que é o valor do campo no instante do *bounce*. Por isso, ϕ_2 é renomeado para ϕ_b . Da mesma maneira, a_b representa o valor do fator de escala no *bounce*. A Figura 21 demonstra os possíveis valores de ϕ_b , que estão acima da linha azul. A área azulada, abaixo, indica os valores que ϕ_b não pode assumir para um dado valor de a_b . Para valores maiores de a_b , o valor limite de ϕ_b converge para $\simeq -3.47$. Este resultado concorda com [85], onde o mesmo valor é encontrado a partir de uma equação de Friedmann com modificações quânticas, porém, para um universo plano.

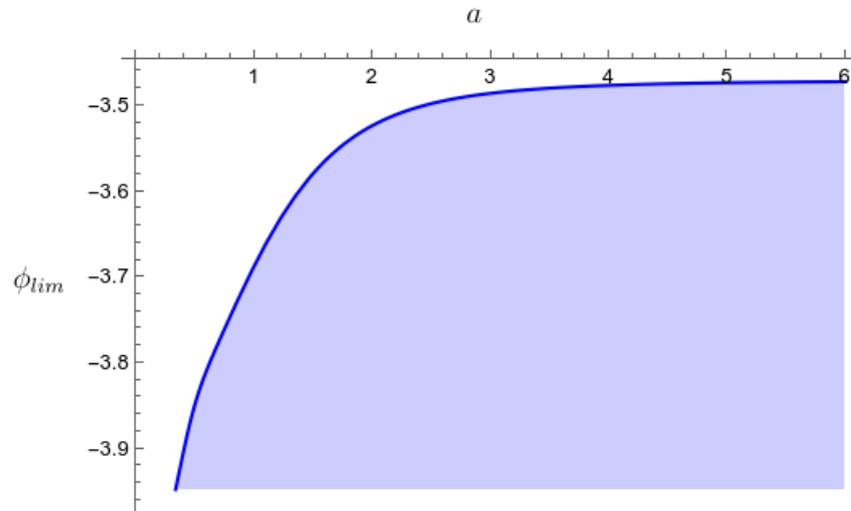


Figura 21 – Gráfico de a_b por ϕ_b . A linha azul indica o limite em que ϕ_b é permitido. A área azulada abaixo da linha representa a região de valores proibidos para (a_b, ϕ_b) .

A Equação 5.10, portanto, pode ser reescrita como uma condição inicial para $\dot{\phi}_b$, se avaliada em a_b e ϕ_b :

$$\dot{\phi}_b = \pm\sqrt{2[(1 - \chi(a_b))\rho_c - V(\phi_b)]}. \quad (5.12)$$

A evolução numérica do plano de fundo é realizada fixando as condições iniciais no *bounce*, em que é adotado $t_b = 0$. Diferentes escolhas de (a_b, ϕ_b) produzem diferentes tipos de universos. A escolha de sinal da Equação 5.12 também influencia a evolução. Alguns exemplos de modelos de universos produzidos podem ser vistos na Figura 22. Nesses casos, utilizou-se $\dot{\phi}_b$ positivo e fixou-se o fator de escala adimensional em $\tilde{a}_b = 1$, que foi utilizado como condição inicial para a integração das equações do plano de fundo. O fator de escala físico é dado por $a_b = r_b \tilde{a}_b$, onde r_b é o raio do universo no *bounce*. Em cada gráfico da Figura 22, variou-se o valor de a_b e ϕ_b , de forma que o fator de escala físico tem efeito somente sobre a energia de curvatura. O painel no canto superior esquerdo representa um universo oscilatório, preso na era de Planck, que apenas muda a frequência de oscilação e a amplitude em um instante próximo a t_b . As condições iniciais adotadas para essa solução foram $a_b = 1$ e $\phi_b = -2,5$. Já no canto superior direito, o universo passa por oscilações. No entanto, após t_b , a expansão ocorre. Para esse caso, as condições iniciais adotadas foram $a_b = 1,2$ e $\phi_b = \phi_{\text{lim}}(a_b = 1,2)$, onde $\phi_{\text{lim}}(a_b)$ é definido como:

$$\phi_{\text{lim}}(a_b) = -\sqrt{\frac{3}{16\pi}} \ln \left[1 + \sqrt{\frac{-32\pi\rho_c}{3m^2} (1 - \chi(a_b))} \right], \quad (5.13)$$

representando o menor valor de ϕ_b permitido para um determinado a_b . O painel inferior da esquerda representa um universo em que a inflação não ocorre, com o fator de escala se expandindo a uma taxa aproximadamente constante. O painel da direita descreve um *bounce* altamente assimétrico. As condições iniciais utilizadas nesses casos foram $a_b = 1,5$, $\phi_b = -3,5$ e $a_b = 10$, $\phi_b = 0,3$, respectivamente.

Apesar das soluções exóticas observadas na Figura 22, é possível produzir um universo usual, em que o *bounce* e a inflação ocorram normalmente. Para captar os valores de a_b e ϕ_b de um modelo já conhecido e verificar a consistência desse processo, fixaram-se as condições iniciais no momento de cruzamento do horizonte de Hubble ($1/aH$) pelo modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e, utilizando os dados do PLANCK, com $|\Omega_K| = 0,001$, evoluiu-se o universo até o instante do *bounce*. Dessa forma, os valores de a_b e ϕ_b encontrados foram $a_b \simeq 31627,3$ e $\phi_b \simeq 3,6$. Esses valores foram utilizados para realizar a evolução com as condições fixadas no *bounce*. O tipo de evolução observada está representada na Figura 23. No painel da esquerda, pode-se observar um *bounce* simétrico. No painel da direita, representa-se o horizonte de Hubble em função do fator de escala. A inflação começa quando o horizonte de Hubble começa a diminuir e termina quando ele volta a aumentar, dando início ao reaquecimento.

Um processo semelhante foi realizado, porém, utilizando $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$,

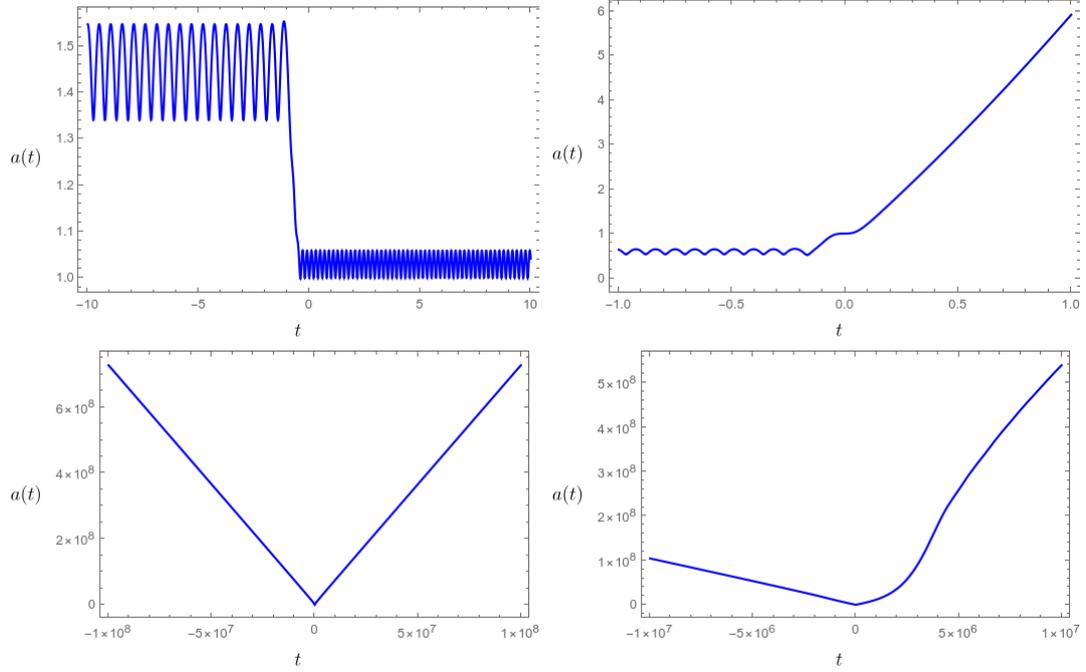


Figura 22 – Evolução do fator de escala ao longo do tempo, em torno de t_b , exibindo diferentes tipos de universos produzidos por diferentes escolhas de a_b e ϕ_b . O painel superior da esquerda, representa um universo oscilatório na era de Planck, com condições iniciais $a_b = 1$, $\phi_b = -2, 5$. No painel superior da direita, o universo passa por oscilações anteriores a t_b , mas após o *bounce* a expansão ocorre. Suas condições são $a_b = 1, 2$, $\phi_b = \phi_{\text{lim}}(1, 2)$. No painel inferior da esquerda, pode ser observado um universo em que não ocorre inflação, com $a_b = 1, 5$, $\phi_b = -3, 5$. No painel inferior da direita inferior, está representado um *bounce* assimétrico, produzido por $a_b = 10$, $\phi_b = 0, 3$. Em todos os casos, foi utilizado $\dot{\phi}_b$ positivo e $\tilde{a}_b = 1$.

traduzido para o modo $k = 0, 002 \text{ Mpc}^{-1}$ e com diferentes valores de Ω_K . A Figura 24 apresenta os modelos encontrados em torno do *bounce*. Esses resultados se conectam com os discutidos na Seção 5.1.2 e abordados na Figura 18, onde relaciona-se o valor da curvatura com os três tipos de *bounce*: tipo I, II e III. No primeiro painel (esquerda), em amarelo, o valor de curvatura utilizado foi de $|\Omega_K| = 10^{-8}$ e os valores das condições iniciais encontrados foram $a_b = 132, 7$, $\phi_b = 3, 6$ e $\dot{\phi}_b$ com sinal negativo. Essas condições produzem um *bounce* simétrico. No painel da direita, em vermelho, o valor de curvatura utilizado foi de $|\Omega_K| = 10^{-7}$, encontrando as condições $a_b = 200, 5$, $\phi_b = -1, 4$ e $\dot{\phi}_b$ positivo, para produzir um *bounce* assimétrico. No painel do centro, em azul, o valor da curvatura utilizado foi de $|\Omega_K| = 3 \cdot 10^{-8}$ e os valores de condições iniciais são de $a_b = 1716, 1$ e $\phi_b = 0, 9$. Nesse caso, o valor de $\dot{\phi}_b$ não foi calculado através da Equação 5.12 e sim, determinado através da evolução que parte de t_* , da mesma forma que a_b e ϕ_b . Portanto, impõe-se o valor $\dot{\phi}_b = 3, 1 \cdot 10^{-7}$ como condição

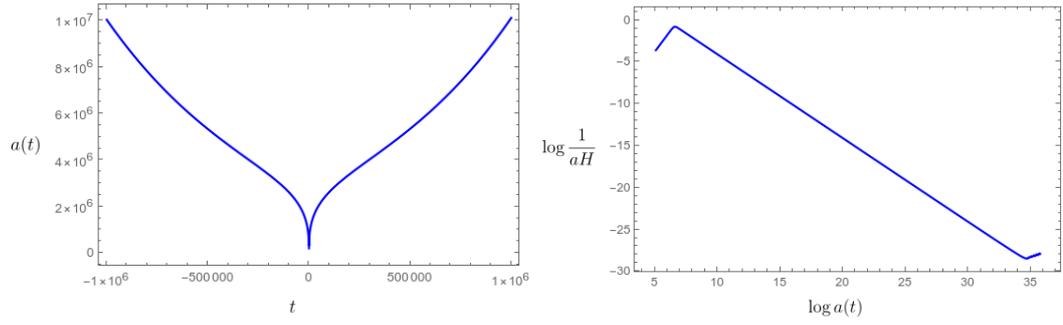


Figura 23 – Painel da esquerda: fator de escala evoluído ao longo do tempo. Painel da direita: horizonte de Hubble pelo fator de escala. As condições utilizadas para ambos os casos foram $a_b = 31627,3$ e $\phi_b = 3,6$. Esses valores foram obtidos através de uma evolução reversa, colocando as condições iniciais no instante de cruzamento do horizonte pelo modo $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e utilizando dados do PLANCK. O valor de curvatura foi fixado em $|\Omega_K| = 0,001$.

inicial. Esse processo foi realizado, já que esse valor de curvatura representa o *bounce* clássico, onde os efeitos quânticos são desprezíveis. A Equação 5.12 encontra um valor de $\dot{\phi}_b$ muito superior ao caso clássico, tornando a energia cinética muito alta no instante do bounce para que as contribuições quânticas sejam desprezadas. Impondo essas condições, o que é observado é exatamente um *bounce* mais suave, nos moldes de um *bounce* clássico.

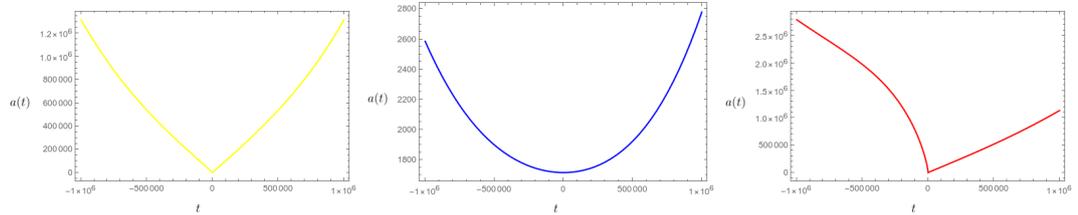


Figura 24 – Fator de escala em função do tempo, em torno de $t_b = 0$. As condições iniciais foram calculadas a partir de $k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$, traduzido para o modo $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. No painel da esquerda, em amarelo, observa-se um *bounce* simétrico. Utilizando como módulo da curvatura $|\Omega_K| = 10^{-8}$, as condições iniciais encontradas foram $a_b = 132,7$, $\phi_b = 3,6$ e $\dot{\phi}_b$ negativo. No centro, em azul, a curvatura utilizada foi de $|\Omega_K| = 3 \cdot 10^{-8}$, encontrando $a_b = 1716,1$, $\phi_b = 0,9$ e impondo $\dot{\phi}_b = 3,1 \cdot 10^{-7}$, para se produzir um *bounce* clássico. No painel da direita, em vermelho, utiliza-se $|\Omega_K| = 10^{-7}$, encontrando $a_b = 200,5$, $\phi_b = -1,4$ e $\dot{\phi}_b$ positivo, produzindo um *bounce* assimétrico. Em todos os casos, o valor de m_* é alterado, de acordo com o k_* utilizado.

As escolhas de condições iniciais que geram os diferentes tipos de universos

precisam ser melhor compreendidas, mas, ao que se observa, possuem relação com os regimes energéticos no instante do *bounce*. A energia cinética em t_b pode ser calculada através de $\dot{\phi}_b^2/2$, através da Equação 5.12, que é função de a_b e ϕ_b . A energia potencial é função apenas do campo escalar $V(\phi_b)$ e a energia de curvatura é função de a_b :

$$\rho_{Kq}(a_b) = \rho_c \left[\text{sen}^2 \frac{\lambda}{a_b} - (1 + \gamma_0^2) \frac{\lambda^2}{a_b^2} \right], \quad (5.14)$$

onde ρ_{Kq} é o termo relacionado à energia de curvatura. A Figura 25 demonstra como a escolha de condições iniciais influencia os domínios energéticos no instante do *bounce*. O painel da esquerda representa a equação de estado calculada através das grandezas no *bounce*: $w_b = (\dot{\phi}_b^2/2 - V(\phi_b))/(\dot{\phi}_b^2/2 + V(\phi_b))$. Foi fixado o valor de $a_b = 10$ para que w se torne função de apenas um parâmetro. Portanto, varia-se ϕ_b para se analisar os domínios energéticos. A energia cinética é dominante para a maioria dos casos, exceto quando o valor do campo ϕ_b é próximo a ϕ_{lim} . Este comportamento é análogo quando outros valores de a_b são escolhidos. O painel da direita contém uma curva em preto para representar o módulo da energia de curvatura $|\rho_{Kq}(a_b)|$ e duas linhas tracejadas representando valores da energia cinética em função de a_b . A linha tracejada vermelha é a energia cinética fixando $\phi_b = -3,47$. Com valores do campo próximos a ϕ_{lim} , a energia cinética possui valores próximos à energia de curvatura, sobretudo, ao analisar valores pequenos de a_b . No entanto, para valores maiores de ϕ_b , a energia cinética passa a dominar, como pode ser observado pela linha tracejada amarela, onde foi fixado $\phi_b = 1$.

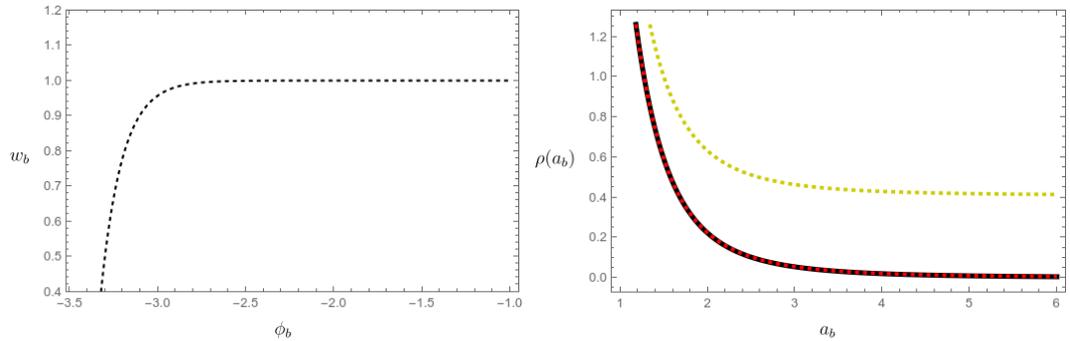


Figura 25 – Painel da esquerda: valor da equação de estado em t_b para diferentes valores de ϕ_b . Foi fixado $a_b = 10$. Painel da direita: a curva preta representa a energia de curvatura em função de a_b . A linha tracejada em vermelho representa a energia cinética, onde foi fixado $\phi_b = -3,47$ e a linha tracejada em amarelo é a energia cinética com $\phi_b = 1$.

Os tipos de universos oscilatórios, observados nos painéis superiores da Figura 22, são comumente encontrados quando são selecionados valores pequenos de a_b

(próximos a $a_b = 1$) e valores de ϕ_b próximos a ϕ_{lim} . De fato, são regiões onde pode ocorrer maior influência da energia de curvatura e do potencial. Nos demais modelos, com valores maiores de a_b e ϕ_b , ainda assim, os valores da energia cinética e da energia de curvatura em t_b são determinantes para definir o restante da evolução.

5.2 Análise das perturbações

Esta seção é dedicada ao estudo das perturbações escalares. Na Seção 5.2.1 são discutidos aspectos da equação das perturbações escalares (Eq. 4.115), como a análise de seus coeficientes e a determinação de suas condições iniciais, utilizando a definição do vácuo adiabático de quarta ordem. A Seção 5.2.2 apresenta resultados relativos à integração numérica da equação das perturbações, assim como a determinação do espectro de potência primordial $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ para diferentes valores de curvatura.

Para as análises numéricas, são utilizadas soluções do plano de fundo do tipo III. Como visto na Seção 5.1.2, a curvatura controla a duração da inflação em universos com essa classificação. O número de *e-folds* entre t_* e o fim da inflação é fixado em $N_* = 54$.

5.2.1 Análise dos coeficientes da equação das perturbações escalares e a determinação das condições iniciais

Os coeficientes c_1 e c_2 da equação de evolução das perturbações (Eq. 4.115), descritos pelas Equações 4.111 e 4.112, dependem apenas das grandezas relacionadas ao plano de fundo. Além disso, eles possuem uma dependência do número harmônico n . Dessa forma, os coeficientes são renomeados da seguinte forma:

$$\alpha_n = -\frac{\dot{c}_1(n)}{c_1(n)}, \quad \beta_n = c_1(n)c_2(n). \quad (5.15)$$

Logo, a Equação 4.115 torna-se:

$$\ddot{f}_n + \alpha_n \dot{f}_n + \beta_n f_n = 0. \quad (5.16)$$

Os índices lm não entram na equação, portanto, a evolução de f_n depende apenas do índice n .

Para determinar as condições iniciais da Equação 5.16, utiliza-se um vácuo adiabático como estado inicial das perturbações. Para isso, é crucial entender quais são as premissas necessárias para se produzir esse estado. Dessa forma, analisam-se os

coeficientes α_n e β_n . A Figura 26 demonstra o comportamento desses coeficientes em função do tempo, para diferentes valores de n , ao redor de t_b . O painel da esquerda apresenta a evolução do coeficiente α_n através das linhas tracejadas em tons de azul, que se aproximam de $-3H$, em preto, à medida que o valor de n aumenta. O painel da direita demonstra a evolução de β_n em tons de vermelho. No *bounce*, β_n é bem comportado para qualquer valor de n . O valor de curvatura utilizado para a evolução do plano de fundo foi $|\Omega_K| = 10^{-6}$ e as condições iniciais foram determinadas a partir de $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ e $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$.

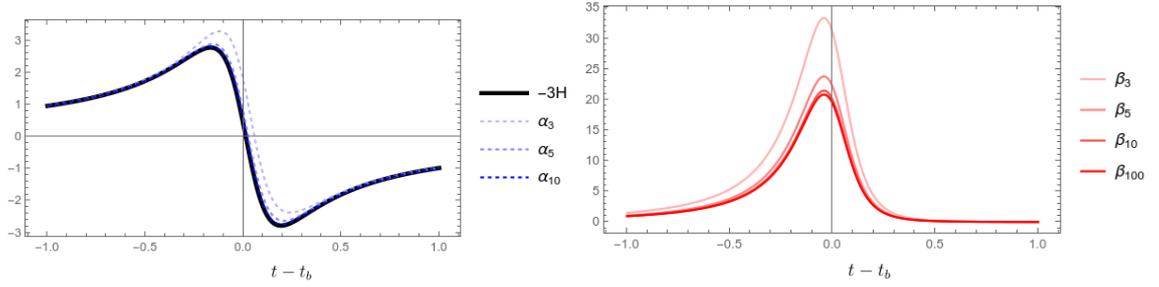


Figura 26 – Painel da esquerda: as curvas tracejadas em tons de azul representam a evolução de α_n ao longo do tempo, em torno de t_b , para diferentes valores de n . À medida que n aumenta, α_n se aproxima de $-3H$, representado pela curva sólida preta. Painel da direita: evolução de β_n ao longo do tempo, para diferentes valores de n , representada por curvas em tons de vermelho. Em ambos os casos, foram utilizados os seguintes parâmetros para a evolução do plano de fundo: $|\Omega_K| = 10^{-6}$, $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ e $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$.

Através da transformação:

$$f_n = a^{-\frac{3}{2}} h_n, \quad (5.17)$$

a Equação 5.16 torna-se

$$\ddot{h}_n + (\alpha_n - 3H) \dot{h}_n + \Omega_n^2 h_n = 0, \quad (5.18)$$

onde

$$\Omega_n^2 = -\frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{2} \alpha_n H + \beta_n. \quad (5.19)$$

Seguindo as Equações 4.111 e 5.15 é possível observar que $\alpha_n \rightarrow -3H$ para n grande. Também é o que se observa no painel da esquerda da Figura 26, onde α_n com $n = 3$ se desvia levemente do valor de $-3H$. Com $n = 10$, o coeficiente α_n já se torna uma boa aproximação de $-3H$. Dessa forma, a Equação 5.18, para qualquer valor de n , pode ser reduzida à equação de um oscilador harmônico:

$$\ddot{h}_n + \Omega_n^2 h_n = 0. \quad (5.20)$$

As condições iniciais são determinadas em um regime adiabático, seguindo as definições do vácuo adiabático de quarta ordem, discutidas na Seção 2.2.3. As Equações 2.67, 2.68, 2.69 e 2.70 fornecem a solução para h_n , que até a quarta ordem adiabática tem a forma:

$$h_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2W_4}} \exp \left[-i \int W_4(t') dt' \right], \quad (5.21)$$

com

$$W_4 = \Omega_n \sqrt{1 + \epsilon_2(n)} \sqrt{1 + \epsilon_4(n)}, \quad (5.22)$$

e

$$\epsilon_2(n) = \frac{3}{4\Omega_n^4} \left(\frac{d\Omega_n}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2\Omega_n^3} \frac{d^2\Omega_n}{dt^2}, \quad (5.23)$$

$$\epsilon_4(n) = \frac{3}{4\Omega_{n,1}^4 \Omega_n^2} \left(\frac{d\Omega_{n,1}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2\Omega_{n,1}^3 \Omega_n^3} \frac{d\Omega_n}{dt} \frac{d\Omega_{n,1}}{dt} - \frac{1}{2\Omega_{n,1}^3 \Omega_n^2} \frac{d^2\Omega_{n,1}}{dt^2}, \quad (5.24)$$

onde $\Omega_{n,1} = \sqrt{1 + \epsilon_2(n)}$.

As condições iniciais são estabelecidas em um instante t_i anterior ao *bounce*, em um regime aproximadamente adiabático, no qual a criação de partículas é desprezível. Nesse intervalo, os modos observáveis possuem uma variação na frequência Ω_n desprezível. Essa conclusão é sustentada ao comparar a magnitude da evolução do modo normal que caracteriza o vácuo adiabático inicial $f_n(t_i) = a(t_i)^{-\frac{3}{2}} h_n(t_i)$ com a dos modos normais que definem o vácuo adiabático em ordem zero $f_k^{(0)}(t_i) = 1 / (a(t_i) \sqrt{2k})$, especialmente para modos observáveis. A relação entre n e k é dada pela Equação 4.42. Para cada valor de curvatura Ω_K utilizado, é realizada uma nova análise do tempo t_i em que as condições iniciais são fixadas.

5.2.2 Evolução numérica das perturbações escalares e o espectro de potência primordial

Os coeficientes α_n e β_n da equação de movimento das perturbações escalares (Eq. 5.16) foram obtidos das variáveis dinâmicas do plano de fundo a e ϕ e de seus momentos conjugados π_a e π_ϕ , respectivamente. Para a determinação desses coeficientes, é realizada a integração do plano de fundo no espaço de fase, utilizando as equações de movimento calculadas a partir da hamiltoniana efetiva 3.102. Os parâmetros utilizados para a determinação das condições iniciais relacionadas ao plano de fundo são $k_* = 10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ e $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$. Os valores de curvatura utilizados são aqueles que produzem soluções do tipo III, com $|\Omega_K| \gtrsim 10^{-10}$, como pode ser

observado na Figura 19. Isto é, evoluções em que as contribuições quânticas e da curvatura são relevantes.

Após o *bounce*, oscilações na amplitude de f_n são produzidas que, por sua vez, cessam após o início da inflação. A partir desse ponto, f_n cresce suavemente, como demonstrado no painel da esquerda da Figura 27. Para exemplificar a evolução, foram utilizados os modos $n = 3, 5$ e 10 . O painel da direita demonstra o escalar de curvatura $\mathcal{R} = -(H/\dot{\phi})f_n$, descrito pela Equação 3.83, para os mesmos modos n . Como esperado, após o início da inflação, o valor de \mathcal{R} congela. O valor de curvatura utilizado para o plano de fundo, nesse caso, foi de $|\Omega_K| = 10^{-6}$.

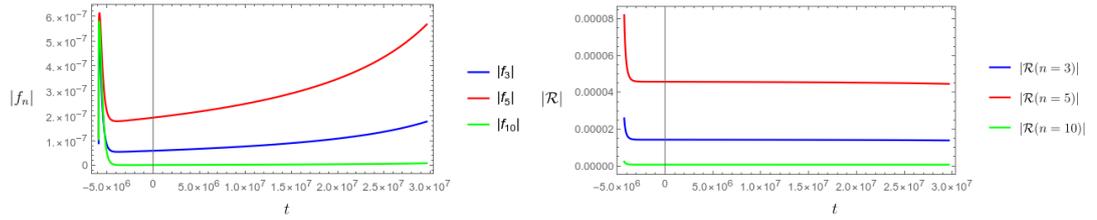


Figura 27 – Evolução do valor absoluto das perturbações, $|f_n|$ (painel da esquerda), e do valor absoluto do escalar de curvatura, $|\mathcal{R}| = -(H/\dot{\phi})|f_n|$ (painel da direita). Em ambos os casos, foram utilizados os modos $n = 3$ em azul, $n = 5$ em vermelho e $n = 10$ em verde. Os gráficos representam o período que se estende desde pouco antes do início da era inflacionária até instantes anteriores ao término da inflação. Para o plano de fundo, foi utilizado o valor de curvatura $|\Omega_K| = 10^{-6}$.

A evolução de f_n é realizada para diferentes valores de curvatura. As condições iniciais são fixadas em regime de vácuo adiabático, no tempo t_i , conforme discutido na Seção 5.2.1. Conforme o vácuo adiabático inicial evolui no tempo, ele se transforma gradualmente em um novo estado adiabático, até alcançar a região próxima ao bounce. Nesse ponto, ocorrem as primeiras excitações significativas. Essas excitações, surgidas na vizinhança do bounce, têm um impacto direto nas previsões do modelo, alterando o espectro de potência primordial ao final da inflação. Assim, essas modificações refletem as contribuições da gravidade quântica na evolução das previsões inflacionárias.

Seguindo os passos da Equação 2.71, o espectro de potência das perturbações escalares $\delta\phi$ é determinado pela função de dois pontos das perturbações f_n no fim da inflação:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi} = |f_n(t_{\text{fim}})|^2, \quad (5.25)$$

onde $t_{\text{fim}} = 2,95 \cdot 10^7 t_p$. Dessa maneira, o espectro para o escalar de curvatura \mathcal{R} ,

definido pela Equação 3.84, é dado por:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{R}}(n) = |f_n(t_{\text{fim}})|^2 \left[\frac{H(t_{\text{fim}})}{\phi(t_{\text{fim}})} \right]^2. \quad (5.26)$$

Para que se torne adimensional, o espectro de potência é normalizado e o limite plano é recuperado:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(n) = \frac{k^3}{2\pi^2} \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{R}}(n). \quad (5.27)$$

Utilizando a relação 4.42, é válido, para n grande:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \simeq \frac{n^3}{2\pi^2} |f_n(t_{\text{fim}})|^2 \left[\frac{H(t_{\text{fim}})}{\phi(t_{\text{fim}})} \right]^2. \quad (5.28)$$

Esse formato permite a comparação desse resultado com o espectro de potência de um universo plano. De fato, os modos observáveis na CMB estão em uma escala de $n \gg 1$. A previsão inflacionária do espectro $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$, baseada nos parâmetros cosmológicos fornecidos pelo PLANCK, \mathcal{A}_s e n_s , é dada pela Equação 3.86.

O espectro de potência é, então, calculado para quatro diferentes valores de curvatura variando-se os modos n , que são transcritos para k através da relação 4.42. A figura 28 contém os espectros para $|\Omega_K| = 10^{-6}$ no painel superior da esquerda, $|\Omega_K| = 10^{-7}$ no painel superior da direita, $|\Omega_K| = 10^{-8}$ no painel inferior da esquerda e $|\Omega_K| = 10^{-9}$ no painel inferior da direita. Os pontos cinzas representam os resultados do cálculo numérico da Equação 5.28. A curva preta representa a média das oscilações descritas pelos pontos. A linha tracejada vermelha é a previsão inflacionária do espectro (Eq. 3.86) e as linhas tracejadas verticais determinam a janela de modos observáveis na CMB. Os modos são normalizados por $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e os modos observáveis se estendem entre $10^{-1} \lesssim (k/k_*^I)_{\text{obs}} \leq 50$.

O espectro inflacionário é recuperado para os maiores valores de k , no entanto, modificações significativas podem ser observadas para os menores modos. O aumento da curvatura faz com que as oscilações do espectro avancem progressivamente nos modos observáveis. De fato, curvaturas mais altas produzem um regime inflacionário mais curto para um plano de fundo do tipo III, como discutido na Seção 5.1.2. Além disso, o número de e -folds entre o *bounce* e cruzamento do horizonte pelo modo k_* também é afetado. Para um universo plano, a duração entre t_b e t_* é de aproximadamente 15,9 e -folds e as oscilações do espectro produzidas pelo *bounce* não alcançam os modos observáveis, como discutido em [35]. Contudo, o intervalo de comprimentos de onda afetados é alterado pelo aumento da curvatura Ω_K .

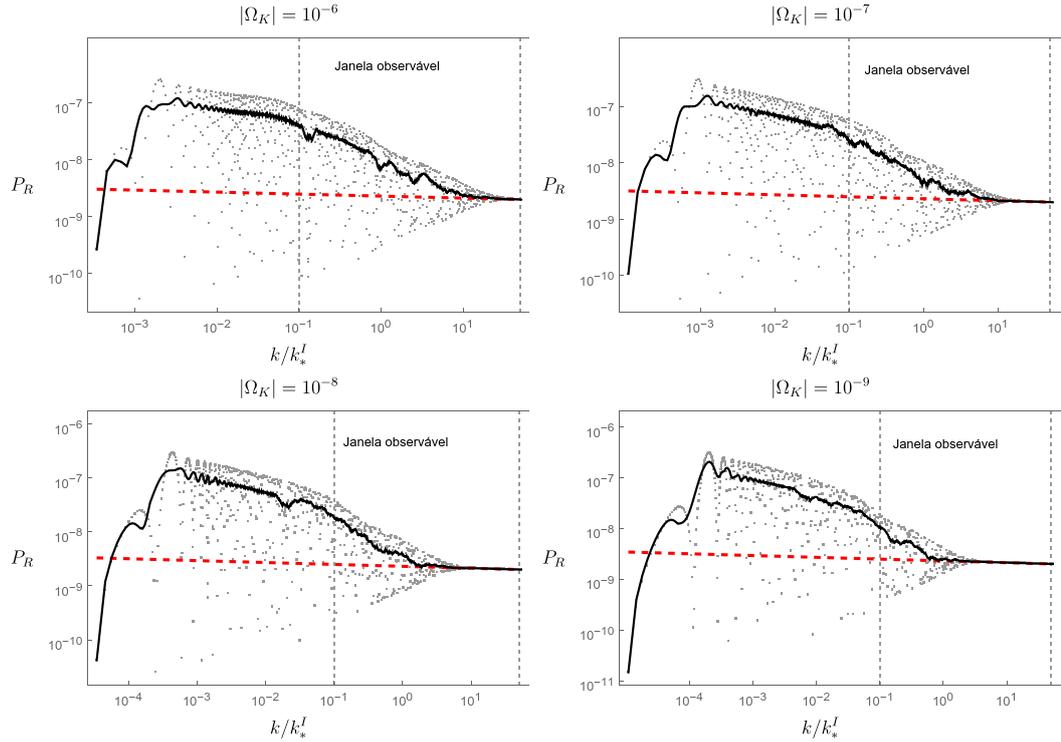


Figura 28 – Espectro de potência primordial $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ em termos dos modos k/k_*^I . Foram considerados quatro valores distintos de curvatura: o painel superior esquerdo exibe o caso $|\Omega_K| = 10^{-6}$, o superior direito corresponde a $|\Omega_K| = 10^{-7}$, o inferior esquerdo representa $|\Omega_K| = 10^{-8}$ e o inferior direito ilustra $|\Omega_K| = 10^{-9}$. Os pontos cinzas descrevem os resultados numéricos e a curva sólida preta corresponde à média local dos pontos. A linha tracejada vermelha corresponde à previsão inflacionária do espectro, baseada nos parâmetros \mathcal{A}_s e n_s , fornecidos pelo PLANCK. As linhas verticais tracejadas delimitam a janela correspondente aos modos observáveis na CMB, com os maiores comprimentos de onda localizados na escala de $k/k_*^I \sim 10^{-1}$.

Os painéis superiores da Figura 28 descrevem os maiores valores de curvatura utilizados, com $|\Omega_K| = 10^{-6}$ e $|\Omega_K| = 10^{-7}$. As oscilações produzidas nesses espectros superam as escalas anômalas, que vão dos menores modos observáveis até $k/k_*^I \sim 1$. Conseqüentemente, esses valores de Ω_K são incompatíveis com as observações, pois influenciariam a região do modelo que está de acordo com os dados observacionais. A média das oscilações pode ser comparada com reconstruções do espectro primordial baseadas em observações da CMB, realizadas em [10, 86].

Nos painéis inferiores da Figura 28, as escalas onde as oscilações são geradas correspondem às escalas anômalas, potencialmente introduzindo correções no espectro primordial. No caso de $|\Omega_K| = 10^{-9}$, entretanto, a média das oscilações não é suficiente

para alterar significativamente o espectro visível. Já para $|\Omega_K| = 10^{-8}$, a média de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ alcança as escalas necessárias para gerar as correções, mas a amplificação da potência excede os limites permitidos pelas incertezas do espectro de potência primordial reconstruído, colocando o modelo em conflito com as observações nessas escalas.

6 Discussão

Neste trabalho, foram estudados os efeitos da curvatura espacial, parametrizada pelo parâmetro Ω_K , e da dinâmica quântica do plano de fundo, proveniente da cosmologia quântica de laços (LQC), nas perturbações escalares primordiais. Dados da missão PLANCK foram utilizados para descrever o plano de fundo [9]. Em particular, os parâmetros \mathcal{A}_s e n_s , relativos à era inflacionária do modelo Λ CDM, são utilizados para realizar a dedução das condições iniciais para a integração das equações diferenciais que descrevem o plano de fundo.

As condições iniciais são fixadas no tempo t_* , relativo ao instante em que o modo de referência k_* cruza o horizonte de Hubble ($1/aH$). Nesse momento, é possível utilizar uma aproximação plana do universo, já que t_* ocorre alguns *e-folds* após o início da inflação, que tem o efeito de planificar o espaço devido à sua expansão acelerada.

As observações da radiação cósmica de fundo (CMB) realizadas pelo PLANCK manifestam uma preferência por um universo fechado [20, 21]. Além disso, a presença de curvatura espacial produz oscilações no espectro de potência primordial para os menores modos k e afeta as maiores escalas do espectro de temperatura da CMB, podendo aliviar as tensões entre o modelo e as observações [23, 25, 28, 29].

O PLANCK, em sua melhor estimativa, fornece um valor de curvatura de $\Omega_K = -0,056_{-0,050}^{+0,044}$ [9]. Quando esses dados são combinados com os dados provenientes de BAO, a estimativa incide em $\Omega_K = -0,001 \pm 0,002$, indicando uma preferência por um universo plano [9]. No entanto, diversas discrepâncias entre os dois conjuntos de dados foram identificadas, e trabalhos como [20, 21] argumentam que esses dados não são compatíveis. Para mitigar essas tensões, o trabalho de [69] incorporou dados de cronômetros cósmicos (CC) às observações do PLANCK, uma vez que os dados de CC não entram em conflito com os do PLANCK. A partir dessa abordagem, os autores concluíram que as observações favorecem um universo plano até $\mathcal{O}(10^{-2})$. Com base nesses resultados, neste trabalho, a curvatura é restringida a $|\Omega_K| \leq 0,001$.

Um fator adicional que influencia as escalas mais altas do espectro de potência é a substituição do *Big Bang*, descrito pelo modelo padrão, por um *bounce* quântico, conforme previsto pela LQC [30, 32–35, 37–42]. A hamiltoniana efetiva do plano de fundo é descrita pela Equação 3.102 e é discutida nas referências [44, 45]. A investigação

fenomenológica dos efeitos combinados da LQC e da curvatura espacial sobre as perturbações escalares primordiais constitui uma contribuição inédita na literatura científica.

A descrição do plano de fundo baseia-se na suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala e que a densidade de energia é dada pela soma das contribuições cinética e potencial: $\rho = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$. Dentre os diversos modelos inflacionários, o potencial de Starobinsky tem sido favorecido por observações recentes [7], motivo pelo qual é adotado neste estudo. Para a métrica FLRW (Eq. 3.4), assume-se curvatura positiva ($K = 1$), implicando um parâmetro de curvatura negativo ($\Omega_K < 0$). A dinâmica do sistema é caracterizada pelo campo escalar homogêneo $\bar{\phi}(t)$, que obedece à equação de Klein-Gordon (Eq. 3.54), e pelo fator de escala $a(t)$, cuja evolução é determinada pela equação da aceleração modificada (Eq. 3.106).

A quantidade de *e-folds* entre t_* e o fim da inflação (t_{fim}), onde t_* é o instante em que o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble, está entre $49 < N_* < 59$, de acordo com dados do PLANCK [10]. Dessa forma, um valor intermediário do número de *e-folds*, $N_* = 54$, é fixado nas soluções do plano de fundo. Modelos que estudam a variação na duração da inflação também podem ser utilizados para descrever as anomalias de larga escala no espectro de potência da CMB [71–76]. Duas estratégias são utilizadas para alterar a duração da inflação ao invés de simplesmente variar o valor de N_* .

A primeira estratégia consiste em utilizar diferentes condições iniciais. Isto é, ao escolher um modo de referência $k_* < k_*^I$, alguns *e-folds* são adicionados à duração da inflação. Isso ocorre devido ao modo k_* , que possui um comprimento de onda maior do que k_*^I , cruzar o horizonte de Hubble alguns *e-folds* antes de k_*^I . Como o número de *e-folds* entre t_* e o fim da inflação é fixado em $N_* = 54$, os *e-folds* extras entre os tempos em que k_* e k_*^I cruzam o horizonte são adicionados à duração total da inflação. A segunda maneira de alterar a duração da inflação baseia-se em variar o valor do parâmetro de curvatura Ω_K . Em geral, o aumento da curvatura produz um regime inflacionário mais curto. Logo, os parâmetros livres utilizados como entradas na evolução numérica ficam a cargo do modo de referência k_* e do valor de curvatura Ω_K , que são empregados para o cálculo das condições iniciais do plano de fundo, conforme discutido na Seção 4.1.

A variação do valor de k_* resulta em diferentes valores para as condições iniciais. O procedimento efetuado consiste em redefinir o parâmetro \mathcal{A}_s para o modo de referência k_* através da relação 4.18 e as condições iniciais são calculadas para k_* .

Então, o plano de fundo é evoluído numericamente até o instante em que o modo $k_*^I = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte de Hubble e as condições iniciais são redefinidas nesse instante.

Diferentes valores de k_* são utilizados para a evolução do plano de fundo em um modelo plano e em um modelo fechado. No modelo plano, ao selecionar modos menores, é sempre possível obter regimes inflacionários mais longos, o que não é observado no modelo fechado. A partir de um determinado valor de k_* , a curvatura impõe um limite para o quanto a duração da inflação pode ser alterada. Na Figura 15, as soluções do horizonte de Hubble que utilizam modos maiores que $k_* = 0,0003 \text{ Mpc}^{-1}$ evoluem identicamente nos modelos plano e fechado. Para $k_* < 0,0003 \text{ Mpc}^{-1}$, a curvatura passa a controlar a dinâmica. Já para o modo $k_* = 0,0003 \text{ Mpc}^{-1}$, a evolução no modelo fechado se diferencia substancialmente da evolução plana. Ao todo, três tipos de evoluções podem ser identificadas, denominadas de soluções do tipo I, II e III. As soluções do tipo I refletem regimes em que a curvatura não afeta o plano de fundo. Nas soluções do tipo II e do tipo III, a curvatura torna-se relevante.

De maneira análoga ao apresentado na Figura 15, verifica-se que a duração do regime inflacionário pode ser modificada ao manter as condições iniciais fixas e variar a curvatura espacial. A Figura 17 ilustra essa relação para o intervalo $10^{-9} \leq |\Omega_K| \leq 10^{-3}$. Para valores mais elevados de curvatura ($|\Omega_K| > 3 \times 10^{-8}$), a inflação é influenciada pela variação de Ω_K , de modo que um aumento na curvatura reduz a duração da inflação. Em contrapartida, valores menores de curvatura ($|\Omega_K| < 3 \times 10^{-8}$) não impactam significativamente a evolução do plano de fundo. No caso específico de $|\Omega_K| = 3 \times 10^{-8}$, emerge uma solução do tipo II.

Os três tipos de solução apresentam padrões característicos na evolução dos regimes energéticos. Ao todo, as evoluções de três contribuições para a energia são analisadas: a energia cinética (ρ_{cin}), a energia potencial (ρ_V) e a energia de curvatura (ρ_{Kq}). A Figura 16 contém os regimes energéticos dos três tipos de evoluções. As soluções do tipo I e do tipo III figuram um *bounce* quântico, dominado por energia cinética. Durante o período pré-inflacionário, a energia cinética decai, até que o potencial comece a dominar, dando início à inflação. A transição entre os períodos pode ser observada na Figura 12, onde está representada a equação de estado w em função de $\log a$. Quando $w = 1$, manifesta-se o domínio da energia cinética e $w = -1$ sinaliza o domínio do potencial.

O início e o fim da inflação também podem ser contemplados pela evolução do horizonte de Hubble $1/aH$, como demonstrado na Figura 14. O período inflacionário é

referente à região em que o horizonte de Hubble decresce. Nesta figura também estão descritos os modos observáveis na CMB, além do modo de referência k_*^I . Os modos observáveis se encontram dentro de uma faixa entre $k \sim 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ e $k \sim 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

As soluções do tipo I refletem aproximações de um universo plano, já que a curvatura não tem um papel significativo na evolução. As fases de contração e expansão do fator de escala são simétricas, o que é chamado de um *bounce* simétrico. A Figura 18 contém os três tipos de *bounce* descritos pelas soluções do tipo I, II e III.

Soluções do tipo II são dominadas por energia de curvatura no *bounce*. Os níveis de energia cinética são bem mais baixos do que nos outros tipos. Dessa forma, as contribuições quânticas não são relevantes e é a energia de curvatura a responsável por provocar o *bounce*. O período pré-inflacionário é extremamente curto, de forma que a inflação começa logo após a ocorrência do *bounce*. Esse tipo de *bounce* é chamado de *bounce* clássico. Seu comportamento é mais suave que os demais. Ele já foi abordado na literatura por autores como [26, 27] e pode ser causado mesmo com as equações clássicas do plano de fundo, dada uma escolha adequada de condições iniciais.

Soluções do tipo III são aquelas de maior interesse neste trabalho, já que agregam efeitos quânticos e de curvatura. Elas evoluem de forma assimétrica, conforme pode ser observado pela evolução do fator de escala ao redor do *bounce*. A energia potencial também evolui de forma assimétrica ao redor do *bounce*. A energia de curvatura, mesmo não sendo dominante em nenhum momento, atinge níveis que a tornam relevante durante a evolução. À medida que o universo se expande, assim como nos outros casos, a energia de curvatura decai.

Os valores de algumas grandezas são lidos no instante do *bounce* para diferentes valores de curvatura, como se demonstra na Figura 19. Dessa forma, também é possível identificar comportamentos relativos aos três tipos de evoluções. Os valores de curvatura variam entre $10^{-15} \leq |\Omega_K| \leq 10^{-2}$. O valor de Ω_K que produz uma solução do tipo II nessas condições fica em torno de $\sim -10^{-11}$. O tempo entre o *bounce* e o cruzamento do horizonte, simbolizado por $|t_b|$, e o número de *e-folds* N_b entre o *bounce* e t_* não se alteram quando são analisados para curvaturas pequenas ($|\Omega_K| < 10^{-11}$). Nessa região, são detectadas soluções do tipo I, já que a variação da curvatura não afeta a evolução. As pontas em torno de $|\Omega_K| \sim 10^{-11}$ indicam evoluções que se aproximam de soluções do tipo II. Nesse caso, a expansão gasta um tempo maior para se chegar a t_* , mas o universo se expande a uma taxa menor do que as evoluções com valores de Ω_K em sua vizinhança. Para os maiores valores de curvatura, $|\Omega_K| > 10^{-11}$, são produzidas soluções do tipo III. Diante disso, o aumento no valor de curvatura

reduz o tempo t_b e também diminui o número de e -folds N_b .

O valor do campo escalar homogêneo ϕ_b no *bounce* e o valor de sua derivada $\dot{\phi}_b$ no *bounce* também são descritos na Figura 19. As soluções do tipo I ($|\Omega_K| < 10^{-11}$) possuem valores de ϕ_b positivos ($\phi_b \sim 3,7$) enquanto $\dot{\phi}_b$ é negativo ($\dot{\phi}_b \sim -0,9$). Nas soluções do tipo III, o quadro se inverte: os valores de ϕ_b são negativos, com $\phi_b \sim -1,5$ e os valores de $\dot{\phi}_b$ são positivos, com $\dot{\phi}_b \sim 0,9$. Nas soluções do tipo II, são observados valores intermediários de ϕ_b e valores de $\dot{\phi}_b$ próximos de zero (indicando a baixa influência da energia cinética). O valor do fator de escala a_b no *bounce* também é analisado. Os valores mais baixos de curvatura não afetam a sua magnitude, mas quando alcançam as escalas que tornam a curvatura relevante ($|\Omega_K| > 10^{-11}$), o valor de a_b cresce com o aumento de $|\Omega_K|$.

A evolução do plano de fundo também pode ser avaliada a partir de condições iniciais fixadas no instante do *bounce*. As condições iniciais das equações de movimento que descrevem o plano de fundo (Eq. 3.54 e Eq. 3.106) são $a_b = a(t_b)$, $\dot{a}_b = \dot{a}(t_b)$, $\phi_b = \phi(t_b)$ e $\dot{\phi}_b = \dot{\phi}(t_b)$. Como o *bounce* representa um ponto de mínimo da curva que descreve a evolução do fator de escala, atribui-se $\dot{a}_b = 0$. As raízes ρ_1 e ρ_2 da equação de Friedmann modificada 3.104 também são analisadas. A Figura 13 representa a evolução da densidade de energia ρ em função do tempo. A densidade de energia ρ encontra o valor de ρ_2 no *bounce*, que é uma condição que zera a equação de Friedmann (como é esperado, já que $\dot{a} = 0$). O valor de ρ_1 representa um limite assintótico para ρ , em que $t \rightarrow \pm\infty$.

A partir da condição $\rho = \rho_2$ no *bounce*, define-se uma relação entre $\dot{\phi}_b$, $\chi(a_b)$ e o potencial $V(\phi_b)$, descrita pela Equação 5.12. Utilizando o potencial de Starobinsky, a Equação 5.12 depende de a_b , ϕ_b e uma escolha de sinal (+ ou -). Portanto, a_b e ϕ_b são deixados como parâmetros livres para se investigar a influência das condições iniciais no restante da evolução.

O termo dentro da raiz na Equação 5.12 condiciona a escolha de a_b e ϕ_b , para que não se atribua um valor complexo para $\dot{\phi}_b$. Ao isolar o termo ϕ_b , é determinada uma condição de existência do sistema, dada pela Equação 5.11. O valor limite para ϕ_b é dado pela Equação 5.13 que é caracterizado pelo símbolo ϕ_{lim} e representa o menor valor possível de ϕ_b para cada escolha de a_b . A Figura 21 demonstra o comportamento de ϕ_{lim} em função de a_b . Há liberdade de escolha para valores de (a_b, ϕ_b) que sejam consistentes com a condição de existência. Em uma aproximação plana do espaço, $a_b \rightarrow \infty$, o valor de ϕ_{lim} converge para -3,47. Esse resultado concorda com os apresentados por [85], que realizam uma análise semelhante, utilizando LQC

para um universo plano.

Diferentes escolhas de a_b e ϕ_b produzem diferentes tipos de evoluções. Algumas delas se encontram na Figura 22, em que são abarcados exemplos de soluções exóticas. Para reproduzir um modelo conhecido, foi realizada a evolução do plano de fundo com as condições iniciais em t_* (como realizado anteriormente, utilizando dados do PLANCK). Os valores de a_b e ϕ_b e o sinal de $\dot{\phi}_b$ foram lidos no instante do *bounce*. Esses valores são, então, utilizados para uma nova evolução, com as condições iniciais fixadas em t_b . O resultado está disposto na Figura 23, em que a evolução do fator de escala centrada em t_b descreve um *bounce* simétrico. De fato, as condições utilizadas em t_* produzem uma solução do tipo I. Na evolução do horizonte de Hubble em função do fator de escala, é possível observar todos os estágios do modelo inflacionário: período pré-inflacionário, inflação e início do reaquecimento.

O mesmo procedimento foi realizado com o intuito de reproduzir soluções do tipo I, II e III. Para isso, a evolução numérica foi realizada partindo de t_* e os valores de curvatura foram variados. Então, novamente, o sinal de $\dot{\phi}_b$ e os valores de a_b e ϕ_b foram lidos no *bounce*. A Figura 24 contém os resultados das evoluções com as condições iniciais em t_b . Os gráficos exibem a evolução do fator de escala em torno do *bounce*, onde é possível identificar um *bounce* simétrico, um *bounce* assimétrico e um *bounce* clássico. No último caso, o valor de $\dot{\phi}_b$ calculado a partir da Equação 5.12 é muito alto para se produzir uma solução do tipo II, já que esse corresponde ao caso clássico e a energia cinética, proveniente de contribuições quânticas, não deve superar a energia de curvatura. Portanto, o valor de $\dot{\phi}_b$ foi lido, da mesma maneira que a_b e ϕ_b , e imposto como condição inicial da evolução em t_b . Esses resultados se conectam com os dispostos na Figura 18.

Os diferentes tipos de universo produzidos têm relação com os valores das energias no instante do *bounce*. A energia cinética $\dot{\phi}_b^2/2$ é calculada através da Equação 5.12, portanto, em t_b , ela é avaliada a partir dos parâmetros a_b e ϕ_b . Da mesma forma, o potencial $V(\phi_b)$ é função do valor do campo escalar no *bounce*, ϕ_b , e a energia de curvatura $\rho_{Kq}(a_b)$ (Eq. 5.14) depende do valor de a_b . Para se avaliar a influência de ϕ_b nos regimes energéticos, foi utilizada a equação de estado $w_b = (\dot{\phi}_b^2/2 - V(\phi_b))/(\dot{\phi}_b^2/2 + V(\phi_b))$. Esse resultado se encontra na Figura 25, onde se observa que, para valores de ϕ_b próximos a ϕ_{lim} , a energia potencial tem grande relevância no instante do *bounce*. Porém, à medida que ϕ_b cresce, rapidamente a energia cinética domina sobre o potencial. Esse comportamento é análogo para qualquer valor de a_b . A comparação entre a energia cinética e a energia de curvatura em t_b também é analisada

na Figura 25. O comportamento da energia cinética se aproxima de $|\rho_{Kq}|$ quando avaliada para valores mais baixos do campo, próximos a ϕ_{lim} . Valores mais altos de ϕ_b são condizentes com soluções em que a energia cinética domina no *bounce*. De maneira geral, os modelos exóticos de universo são comumente encontrados utilizando valores pequenos de a_b e ϕ_b , que correspondem a regiões em que a energia potencial e a energia de curvatura possuem maior relevância.

As perturbações escalares são descritas por uma equação diferencial de segunda ordem deduzida a partir do formalismo ADM. Os cálculos são frutos de uma generalização do trabalho de [35], que realiza suas análises em um espaço plano. Para realizar a descrição do sistema, as variáveis e os momentos conjugados são expandidos em uma série de potências, em que os vínculos hamiltoniano, $\mathcal{H} = 0$, e de difeomorfismo, $\mathcal{H}_i = 0$, são respeitados. Em ordem zero, as equações relativas ao plano de fundo são recuperadas. As perturbações são expandidas em harmônicos hipersféricos para assimilar a geometria de uma 3-esfera. O calibre espacialmente esférico é utilizado como uma generalização do calibre espacialmente plano. Esse calibre não inclui perturbações da métrica espacial e promove as perturbações escalares totais, unicamente, a perturbações no campo escalar $\delta\phi$. Dessa forma, é possível construir uma hamiltoniana apenas com os termos quadráticos relacionados à amplitude das perturbações escalares f_{nlm} e de seu momento conjugado π_{nlm}^f , descrita pela Equação 4.110.

As equações de movimento produzem a equação de Klein-Gordon para o campo escalar f_{nlm} (Eq. 4.115), que possui $\alpha_n = -\dot{c}_1/c_1$ e $\beta_n = c_1c_2$ como coeficientes de evolução. Os coeficientes c_1 e c_2 , definidos pelas Equações 4.111 e 4.112, dependem exclusivamente de quantidades associadas ao plano de fundo. Assim, compreender a evolução das perturbações requer, primeiramente, o entendimento da dinâmica do plano de fundo.

A expansão quadrática da hamiltoniana de ADM no calibre espacialmente esférico constitui uma contribuição original deste trabalho. Nesse calibre, os coeficientes presentes nas equações de evolução dos modos normais das perturbações se mantêm bem comportados desde antes do *bounce* até o fim da inflação. A Figura 26 descreve o comportamento dos coeficientes α_n e β_n em torno de t_b , para diferentes valores de n . À medida que o valor de n aumenta, o comportamento de α_n se aproxima de $-3H$.

As condições iniciais da equação de Klein-Gordon das perturbações (Eq. 5.16) são fixadas em uma era pré-*bounce*, caracterizada por um regime adiabático, com a finalidade de que as perturbações evoluam no tempo e passem pelo *bounce*, onde são impressos efeitos da gravidade quântica na dinâmica das perturbações. Para isso, são

utilizadas as noções de vácuo adiabático de quarta ordem, discutidas na Seção 2.2.3. O estado de vácuo é determinado ao realizar uma aproximação em que $\alpha_n \rightarrow -3H$ para n grande. De fato, mesmo para os menores valores de n , essa aproximação é satisfatória, como se demonstra na Figura 26, em que o coeficiente α_3 se desvia levemente de $-3H$. As condições iniciais são fixadas em um tempo t_i , no qual é avaliada a variação da frequência Ω_n (Eq. 5.19), para que se constate que o estado de vácuo seja mantido e a condição adiabática satisfeita. Esse teste é realizado, especialmente, para os menores modos observáveis na CMB. Para os modos grandes, a condição adiabática é satisfeita mais facilmente.

As perturbações f_n (os coeficientes l e m são omitidos já que a evolução não exibe uma dependência dos mesmos) são evoluídas em um plano de fundo do tipo III, para que se possa observar efeitos da curvatura e do *bounce* quântico. As condições iniciais do plano de fundo são escolhidas para que a duração entre t_b e t_* , em uma aproximação plana, seja de aproximadamente 15,9 *e-folds*. Com essa duração, o *bounce* fica distante o suficiente para que não se observe efeitos quânticos nos modos observáveis (como discutido em [35]).

O escalar de curvatura comóvel \mathcal{R} é associado às perturbações escalares, já que este se torna constante após t_* e é independente de calibre. Dessa forma, torna-se possível analisar o espectro das perturbações e compará-lo ao espectro previsto pelo modelo Λ CDM. As evoluções de f_n e de $\mathcal{R}(n)$ estão dispostas na Figura 27 para alguns valores de n .

O espectro de potência primordial $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é produzido ao realizar o cálculo numérico do valor de \mathcal{R} no fim da inflação, para diferentes modos n e utilizando diferentes valores de curvatura, como se observa na Figura 28. Os modos n são relacionados aos modos observáveis k através da relação 4.42 para que se possa comparar os resultados obtidos neste trabalho com a previsão do modelo plano.

Reconstruções não paramétricas do espectro de potência primordial que utilizam dados observacionais da CMB podem ser contempladas em [10,86], onde são observadas oscilações na faixa dos menores modos observáveis, mas com grandes incertezas. Os resultados alcançados nesse trabalho podem ser comparados a esses espectros, para que se tenha uma medida das escalas e das amplitudes das oscilações que produzem uma melhora no modelo. As escalas anômalas da CMB vão desde os menores modos observáveis até $(k/k_*^I) \sim 1$.

7 Conclusões

As perturbações escalares inflacionárias e pré-inflacionárias foram analisadas em um universo fechado descrito pela cosmologia quântica de laços. Na abordagem utilizada neste trabalho, o plano de fundo é caracterizado pela geometria FLRW e as perturbações lineares são quantizadas de maneira análoga à quantização usual realizada em um plano de fundo clássico, com a diferença de que a geometria do plano de fundo também é quantizada. Além disso, dados da sonda espacial PLANCK foram utilizados para a descrição de um regime inflacionário compatível com as observações.

A equação de evolução das perturbações escalares foi deduzida a partir do formalismo ADM, utilizando o calibre espacialmente esférico. Os coeficientes presentes nas equações de evolução dos modos normais das perturbações são bem comportados no *bounce*. O trabalho de [23] descreve a evolução das perturbações escalares, em universo fechado, restrita ao regime inflacionário em termos de outras variáveis. As novas equações de evolução permitem estender esses resultados com a análise da influência do regime pré-inflacionário na forma do espectro de potência das perturbações escalares ao fim da inflação.

A duração da inflação pode ser alterada ao variar as condições iniciais e o valor do parâmetro de curvatura Ω_K , de forma que o aumento da curvatura torna a inflação mais curta. Análises numéricas da evolução do plano de fundo permitiram identificar três tipos de soluções, denominadas de soluções do tipo I, II e III. As soluções do tipo I representam aproximações planas, enquanto nas soluções do tipo II e III a curvatura espacial é relevante.

Soluções do tipo II produzem um *bounce* clássico e são encontradas a partir de um ajuste fino dos valores de condições iniciais e curvatura. As soluções do tipo III são aquelas em que efeitos quânticos e de curvatura espacial são significativos. Logo, as perturbações são evoluídas numericamente em planos de fundo do tipo III para que se possa avaliar ambos os efeitos combinados. O espectro das perturbações mostrou-se sensível à variação da curvatura.

Efeitos quânticos e de curvatura produzem oscilações no espectro de potência primordial $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, como pode ser observado na Figura 28. Os modos n são transcritos para k através da Equação 4.42. O aumento da curvatura resulta no avanço gradual das oscilações nos modos observáveis. Esse comportamento decorre da redução na

duração da inflação à medida que $|\Omega_K|$ cresce. Consequentemente, os modos de maior comprimento de onda preservam traços do período pré-inflacionário. A média das oscilações apresenta desvios em relação à previsão do modelo Λ CDM, especialmente nos menores modos observáveis. Para os maiores valores de k , a média de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ segue uma evolução consistente com a previsão inflacionária.

Os espectros com os maiores valores de curvatura, $|\Omega_K| = 10^{-6}$ e $|\Omega_K| = 10^{-7}$, apresentam oscilações que vão além das escalas anômalas. Em ambos os casos, elas cessam próximo à $k/k_*^I = 10$, sendo que em $|\Omega_K| = 10^{-6}$ elas se estendem um pouco mais adiante do que em $|\Omega_K| = 10^{-7}$. Esses resultados são inconsistentes com as observações da CMB, já que afetam uma região do modelo que originalmente estava em concordância com os dados observacionais. O mesmo é válido para curvaturas maiores.

Para o caso em que $|\Omega_K| = 10^{-8}$, observa-se um desvio na média das oscilações para $k/k_*^I \lesssim 1$, região do espectro influenciada por anomalias. Embora os modelos reconstruídos prevejam modificações no espectro nessas escalas, eles compreendem uma supressão da potência para os maiores comprimentos de onda observáveis [10, 86]. Portanto, esse valor de curvatura não pode justificar as anomalias. Além disso, a amplificação de potência ultrapassa os limites impostos pelas incertezas no espectro de potência primordial reconstruído. No caso em que $|\Omega_K| = 10^{-9}$, as oscilações no espectro não são suficientes para explicar as anomalias na parte observável, já que não alcançam as escalas necessárias para se produzirem correções significativas.

O aspecto dos espectros de potência dispostos na Figura 28 é o mesmo encontrado em modelos planos de LQC, conforme discutido em [35, 36]. A principal diferença é que, em modelos planos, as oscilações não atingem as escalas observáveis, enquanto em modelos fechados a curvatura espacial desempenha o papel de regular o avanço dessas oscilações. Neste estudo, foi adotado um plano de fundo com aproximadamente 15,9 *e-folds* para a aproximação plana. Dessa forma, os valores de curvatura que produzem correções no espectro primordial compatíveis com as observações se restringem a $|\Omega_K| \lesssim |10^{-8}|$. Por outro lado, valores de curvatura baseados em observações, como os reportados pelo PLANCK para o modelo Λ CDM, no seu melhor ajuste, são da ordem de $\Omega_K \sim -10^{-2}$ [9], significativamente maiores do que os encontrados neste modelo de universo.

Neste trabalho, não foi identificada a supressão de potência esperada nos comprimentos de onda mais longos [10, 86]. Em estudos de LQC, diferentes condições iniciais para as perturbações são exploradas, incluindo alternativas ao vácuo adiabático.

Em particular, as condições iniciais consideradas por [34, 87] demonstram ser capazes de gerar supressão na potência em modelos de universo plano.

Há alguns possíveis caminhos a se seguir para dar sequência a este estudo. Um exemplo seria a análise da produção de não-gaussianidade, que requer o incremento de uma ordem mais alta na teoria de perturbações, incluindo termos de terceira ordem na hamiltoniana de ADM, como realizado por [35] em universos planos. Este procedimento pode ser analisado em universos fechados, com pequenos valores de curvatura, $|\Omega_K| \sim 10^{-9}$, consistentes com as observações. Explorar novas condições iniciais do plano de fundo também pode aprimorar o entendimento da dinâmica inflacionária e pré-inflacionária e a análise da variação de outros parâmetros pode ser avaliada, como realizado em [88], que varia o valor do parâmetro de Barbero-Immirzi. Na Seção 5.1.3, com as condições iniciais fixadas no *bounce*, constatou-se a influência dos valores das energias em t_b no restante da evolução. No entanto, análises mais detalhadas devem ser realizadas para o entendimento mais aprofundado de como a escolha de condições iniciais afeta a dinâmica. A aplicação de teorias $f(R)$ no universo primordial pode gerar ações efetivas para a descrição do plano de fundo, que podem ser combinadas com LQC [89–92]. Além disso, a descrição do plano de fundo apresentada neste trabalho pode igualmente ser aplicada à análise de perturbações tensoriais, tendo em vista as missões futuras que coletarão dados relacionados à polarização da CMB nos próximos anos, trazendo novas perspectivas ao estudo das ondas gravitacionais primordiais.

Referências

- [1] Einstein, A.: *der allgemeinen Relativitätstheorie, Die Grundlage*. Annalen der Physik: vierte Folge, 49(7), 1916. Citado na página 10.
- [2] Slipher, Vesto M: *Nebulae*. Proceedings of the American Philosophical Society, páginas 403–409, 1917. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 29.
- [3] De Sitter, Willem: *On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis*. Proc. Kon. Ned. Acad. Wet, 19(2):1217–1225, 1917. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 29.
- [4] Hubble, Edwin: *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*. Proceedings of the national academy of sciences, 15(3):168–173, 1929. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 29.
- [5] Penzias, Arno A e Robert Woodrow Wilson: *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*. The Astrophysical Journal, 142:419–421, 1965. Citado na página 10.
- [6] Guth, Alan H: *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Physical Review D, 23(2):347, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 10, 44 e 45.
- [7] Aghanim, Nabila, Yashar Akrami, Frederico Arroja, Mark Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, M Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, Nicola Bartolo *et al.*: *Planck 2018 results-I. Overview and the cosmological legacy of Planck*. Astronomy & Astrophysics, 641:A1, 2020. Citado 8 vezes nas páginas 11, 14, 30, 31, 35, 36, 52 e 100.
- [8] Aghanim, Nabila, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, M Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak *et al.*: *Planck 2018 results-V. CMB power spectra and likelihoods*. Astronomy & Astrophysics, 641:A5, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 31.
- [9] Aghanim, Nabila, Yashar Akrami, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak *et al.*: *Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters*. Astronomy & Astrophysics, 641:A6, 2020. Citado 13 vezes nas páginas 11, 12, 14, 29, 30, 32, 59, 61, 74, 75, 77, 99 e 108.

- [10] Akrami, Yashar, Frederico Arroja, M Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, M Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak *et al.*: *Planck 2018 results-X. Constraints on inflation*. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A10, 2020. Citado 8 vezes nas páginas 11, 31, 59, 61, 97, 100, 106 e 108.
- [11] Dodelson, Scott e Fabian Schmidt: *Modern cosmology*. Academic Press, 2020. Citado 18 vezes nas páginas 11, 13, 26, 30, 31, 37, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51 e 52.
- [12] Baumann, Daniel: *Cosmology*. Part III Mathematical Tripos, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 11, 37 e 46.
- [13] Parker, Leonard e David Toms: *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. Cambridge university press, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 11, 16, 26, 27, 28 e 45.
- [14] Ryden, Barbara: *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 29, 37 e 39.
- [15] Hu, Wayne e Scott Dodelson: *Cosmic microwave background anisotropies*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 40(1):171–216, 2002. Citado na página 11.
- [16] Bennett, Charles L, Davin Larson, Janet L Weiland, N Jarosik, G Hinshaw, N Odegard, KM Smith, RS Hill, B Gold, M Halpern *et al.*: *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: final maps and results*. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):20, 2013. Citado na página 12.
- [17] Macri, Lucas M, Adam G Riess e SH0ES team: *The SH0ES Project: Observations of Cepheids in NGC 4258 and Type Ia SN Hosts*. Em *AIP Conference Proceedings*, volume 1170, páginas 23–25. American Institute of Physics, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 29.
- [18] Riess, Adam G, Wenlong Yuan, Lucas M Macri, Dan Scolnic, Dillon Brout, Stefano Casertano, David O Jones, Yukei Murakami, Gagandeep S Anand, Louise Breuval *et al.*: *A comprehensive measurement of the local value of the Hubble constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES team*. *The Astrophysical journal letters*, 934(1):L7, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 29.

- [19] Riess, Adam G, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M Macri e Dan Scolnic: *Large Magellanic Cloud Cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λ CDM*. The Astrophysical Journal, 876(1):85, 2019. Citado na página 12.
- [20] Di Valentino, Eleonora, Alessandro Melchiorri e Joseph Silk: *Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology*. Nature Astronomy, 4(2):196–203, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 12, 33, 34 e 99.
- [21] Handley, Will: *Curvature tension: evidence for a closed universe*. Physical Review D, 103(4):L041301, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 33 e 99.
- [22] Schwarz, Dominik J, Craig J Copi, Dragan Huterer e Glenn D Starkman: *CMB anomalies after Planck*. Classical and Quantum Gravity, 33(18):184001, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 31.
- [23] Bonga, Béatrice, Brajesh Gupt e Nelson Yokomizo: *Inflation in the closed FLRW model and the CMB*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016(10):031, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 12, 13, 14, 31, 32, 70, 99 e 107.
- [24] Bonga, Béatrice, Brajesh Gupt e Nelson Yokomizo: *Tensor perturbations during inflation in a spatially closed Universe*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2017(05):021, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 31.
- [25] Handley, Will: *Primordial power spectra for curved inflating universes*. Physical Review D, 100(12):123517, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 12, 31, 32 e 99.
- [26] Renevey, Cyril, Aurélien Barrau, Killian Martineau e Selim Touati: *Curvature bounce in general relativity: background and primordial spectrum*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2021(01):018, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 31 e 102.
- [27] Renevey, Cyril, Aurélien Barrau e Killian Martineau: *Detailed analysis of the curvature bounce: background dynamics and imprints in the CMB*. The European Physical Journal C, 82(9):775, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 12, 31 e 102.
- [28] Hergt, Lukas T, Fruzsina J Agocs, Will J Handley, Michael P Hobson e Anthony N Lasenby: *Finite inflation in curved space*. arXiv preprint arXiv:2205.07374, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 12, 31, 35 e 99.

- [29] Kiefer, Claus e Tatevik Vardanyan: *Power spectrum for perturbations in an inflationary model for a closed universe*. *General Relativity and Gravitation*, 54(4):30, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 12, 31 e 99.
- [30] Agullo, Ivan, Abhay Ashtekar e William Nelson: *Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era*. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 87(4):043507, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 12, 52 e 99.
- [31] Ashtekar, Abhay e Parampreet Singh: *Loop Quantum Cosmology: A Status Report*. *Class. Quant. Grav.*, 28:213001, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 52 e 53.
- [32] Martin, Jerome e Robert H Brandenberger: *Trans-Planckian problem of inflationary cosmology*. *Physical Review D*, 63(12):123501, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 13, 34 e 99.
- [33] Ashtekar, Abhay e Aurelien Barrau: *Loop quantum cosmology: From pre-inflationary dynamics to observations*. *Classical and Quantum Gravity*, 32(23):234001, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 36 e 99.
- [34] Ashtekar, Abhay e Brajesh Gupt: *Quantum gravity in the sky: Interplay between fundamental theory and observations*. *Classical and Quantum Gravity*, 34(1):014002, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 99 e 109.
- [35] Agullo, Ivan, Boris Bolliet e V Sreenath: *Non-Gaussianity in loop quantum cosmology*. *Physical Review D*, 97(6):066021, 2018. Citado 10 vezes nas páginas 13, 14, 34, 68, 96, 99, 105, 106, 108 e 109.
- [36] Agullo, Ivan, Anzhong Wang e Edward Wilson-Ewing: *Loop quantum cosmology: relation between theory and observations*. Em *Handbook of Quantum Gravity*, páginas 1–46. Springer, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 35 e 108.
- [37] Chataignier, Leonardo, Claus Kiefer e Paulo Moniz: *Observations in quantum cosmology*. *Classical and Quantum Gravity*, 40(22):223001, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 13, 34 e 99.
- [38] Agullo, Ivan, Abhay Ashtekar e William Nelson: *Quantum gravity extension of the inflationary scenario*. *Physical review letters*, 109(25):251301, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 13, 34 e 99.
- [39] Agullo, Ivan, Abhay Ashtekar e William Nelson: *The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology: Confronting quantum gravity with observations*. *Classical*

- and Quantum Gravity, 30(8):085014, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 83 e 99.
- [40] Agullo, Ivan e Noah A Morris: *Detailed analysis of the predictions of loop quantum cosmology for the primordial power spectra*. Physical Review D, 92(12):124040, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 83 e 99.
- [41] Bonga, Béatrice e Brajesh Gupta: *Inflation with the Starobinsky potential in loop quantum cosmology*. General Relativity and Gravitation, 48:1–11, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 13, 34 e 99.
- [42] Bonga, Béatrice e Brajesh Gupta: *Phenomenological investigation of a quantum gravity extension of inflation with the Starobinsky potential*. Physical Review D, 93(6):063513, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 13, 34 e 99.
- [43] Halliwell, Jonathan J e Stephen William Hawking: *Origin of structure in the universe*. Em *EUCLIDEAN QUANTUM GRAVITY*, páginas 346–360. World Scientific, 1985. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 63 e 70.
- [44] Singh, Parampreet e Francesca Vidotto: *Exotic singularities and spatially curved loop quantum cosmology*. Physical Review D, 83(6):064027, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 13, 34, 53, 75 e 99.
- [45] Gordon, Lucia, Bao Fei Li e Parampreet Singh: *Quantum gravitational onset of Starobinsky inflation in a closed universe*. Physical Review D, 103(4):046016, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 53 e 99.
- [46] Ashtekar, Abhay, Tomasz Pawłowski, Parampreet Singh e Kevin Vandersloot: *Loop quantum cosmology of $k=1$ FRW models*. Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 75(2):024035, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 13, 53 e 54.
- [47] Starobinskii, AA: *Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe*. JETP Letters, 30(11):682–685, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 14, 37 e 46.
- [48] Starobinsky, Alexei A: *A new type of isotropic cosmological models without singularity*. Physics Letters B, 91(1):99–102, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 14, 37 e 46.

- [49] Starobinsky, AA: *Nonsingular model of the Universe with the quantum-gravitational de Sitter stage and its observational consequences*. Em *Quantum Gravity*, páginas 103–128. Springer, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 14, 37 e 46.
- [50] Gerlach, Ulrich H e Uday K Sengupta: *Homogeneous collapsing star: Tensor and vector harmonics for matter and field asymmetries*. *Physical Review D*, 18(6):1773, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 63.
- [51] Abbott, Laurence F e Robert K Schaefer: *A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave anisotropy*. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 308, Sept. 15, 1986, p. 546-562., 308:546–562, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 14, 62, 63 e 64.
- [52] Montese, Lucas M. V. e N. Yokomizo: *Preinflationary scalar perturbations on closed universes in loop quantum cosmology*. *Phys. Rev. D*, 110:103531, Nov 2024. Citado na página 15.
- [53] Schutz, Bernard: *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 18, 19, 20 e 29.
- [54] Carroll, Sean M: *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 18, 19, 20 e 29.
- [55] Lemos, Nivaldo A: *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 16, 21 e 22.
- [56] Schwartz, Matthew D: *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 21, 22, 23, 24 e 25.
- [57] Peskin, Michael E: *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 24 e 25.
- [58] Birrell, Nicholas David e Paul Charles William Davies: *Quantum fields in curved space*. Cambridge university press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 26.
- [59] Fulling, Stephen A: *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*. Número 17. Cambridge university press, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 26.
- [60] Riess, Adam G, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner *et al.*: *Observational evidence from supernovae for an accelerating*

- universe and a cosmological constant*. The Astronomical Journal, 116(3):1009, 1998. Citado na página 20.
- [61] Perlmutter, Saul, Goldhaber Aldering, Gerson Goldhaber, RA Knop, Peter Nugent, Patricia G Castro, Susana Deustua, Sebastien Fabbro, Ariel Goobar, Donald E Groom *et al.*: *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*. The Astrophysical Journal, 517(2):565, 1999. Citado na página 20.
- [62] Bunch, Timothy S e Paul CW Davies: *Quantum field theory in de Sitter space: renormalization by point-splitting*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 360(1700):117–134, 1978. Citado na página 27.
- [63] Higuchi, Atsushi: *Forbidden mass range for spin-2 field theory in de Sitter space-time*. Nuclear Physics B, 282:397–436, 1987. Citado na página 27.
- [64] Piattella, Oliver: *Lecture notes in cosmology*. Springer, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 29, 37, 40, 44, 46, 47 e 52.
- [65] Friedmann, Aleksandr: *125. on the curvature of space*. Zeitschrift für Physik, 10:377–386, 1922. Citado na página 29.
- [66] Alam, Shadab, Metin Ata, Stephen Bailey, Florian Beutler, Dmitry Bizyaev, Jonathan A Blazek, Adam S Bolton, Joel R Brownstein, Angela Burden, Chia Hsun Chuang *et al.*: *The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 470(3):2617–2652, 2017. Citado na página 30.
- [67] Philcox, Oliver HE e Mikhail M Ivanov: *BOSS DR12 full-shape cosmology: Λ CDM constraints from the large-scale galaxy power spectrum and bispectrum monopole*. Physical Review D, 105(4):043517, 2022. Citado na página 30.
- [68] Vagnozzi, Sunny, Eleonora Di Valentino, Stefano Gariazzo, Alessandro Melchiorri, Olga Mena e Joseph Silk: *The galaxy power spectrum take on spatial curvature and cosmic concordance*. Physics of the Dark Universe, 33:100851, 2021. Citado na página 34.
- [69] Vagnozzi, Sunny, Abraham Loeb e Michele Moresco: *Eppur è piatto? The cosmic chronometers take on spatial curvature and cosmic concordance*. The Astrophysical Journal, 908(1):84, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 34, 75 e 99.

- [70] Dhawan, Suhail, Justin Alsing e Sunny Vagnozzi: *Non-parametric spatial curvature inference using late-Universe cosmological probes*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 506(1):L1–L5, 2021. Citado na página 34.
- [71] Contaldi, Carlo R, Marco Peloso, Lev Kofman e Andrei Linde: *Suppressing the lower multipoles in the CMB anisotropies*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2003(07):002, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [72] Boyanovsky, Daniel, Hector J de Vega e Norma G Sánchez: *CMB quadrupole suppression. II. The early fast roll stage*. Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 74(12):123007, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [73] Ramirez, Erandy e Dominik J Schwarz: *Predictions of just-enough inflation*. Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 85(10):103516, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [74] Handley, WJ, SD Brechet, AN Lasenby e MP Hobson: *Kinetic initial conditions for inflation*. Physical Review D, 89(6):063505, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [75] Cicoli, Michele, Sean Downes, Bhaskar Dutta, Francisco G Pedro e Alexander Westphal: *Just enough inflation: power spectrum modifications at large scales*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014(12):030, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [76] Martineau, Killian, Aurélien Barrau e Susanne Schander: *Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi I universe with different inflaton potentials and initial conditions*. Physical Review D, 95(8):083507, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 100.
- [77] Mukhanov, Viatcheslav: *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.
- [78] Bardeen, James M: *Gauge-invariant cosmological perturbations*. Physical Review D, 22(8):1882, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 50.
- [79] Linde, Andrei D: *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. Physics Letters B, 108(6):389–393, 1982. Citado na página 46.

- [80] Baumann, Daniel: *TASI lectures on inflation*. arXiv preprint arXiv:0907.5424, 2009. Citado na página 50.
- [81] Bojowald, Martin: *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2010. Citado na página 64.
- [82] D'Ambrosio, Fabio, Mudit Garg, Lavinia Heisenberg e Stefan Zentarra: *ADM formulation and Hamiltonian analysis of coincident general relativity*. arXiv preprint arXiv:2007.03261, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.
- [83] Goldberg, Joshua, Ezra T Newman e Carlo Rovelli: *On Hamiltonian systems with first-class constraints*. Journal of mathematical physics, 32(10):2739–2743, 1991. Citado na página 70.
- [84] Langlois, D.: *Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation*. Class. Quant. Grav., 11:389–407, 1994. Citado na página 70.
- [85] Zhu, Tao, Anzhong Wang, Gerald Cleaver, Klaus Kirsten e Qin Sheng: *Pre-inflationary universe in loop quantum cosmology*. Physical Review D, 96(8):083520, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 103.
- [86] Hunt, Paul e Subir Sarkar: *Reconstruction of the primordial power spectrum of curvature perturbations using multiple data sets*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014(01):025, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 97, 106 e 108.
- [87] Ashtekar, Abhay e Brajesh Gupta: *Initial conditions for cosmological perturbations*. Class. Quant. Grav., 34(3):035004, 2017. Citado na página 109.
- [88] Barboza, L. N., G. L. L. W. Levy, L. L. Graef e Rudnei O. Ramos: *Constraining the Barbero-Immirzi parameter from the duration of inflation in loop quantum cosmology*. Phys. Rev. D, 106(10):103535, 2022. Citado na página 109.
- [89] Zhang, Xiangdong, Yongge Ma e Michal Artymowski: *Loop quantum Brans-Dicke cosmology*. Phys. Rev. D, 87(8):084024, 2013. Citado na página 109.
- [90] Artymowski, Michał, Yonngge Ma e Xiangdong Zhang: *Comparison between Jordan and Einstein frames of Brans-Dicke gravity a la loop quantum cosmology*. Phys. Rev. D, 88(10):104010, 2013. Citado na página 109.
- [91] Han, Yu: *Loop quantum cosmological dynamics of scalar-tensor theory in the Jordan frame*. Phys. Rev. D, 100(12):123541, 2019. Citado na página 109.

-
- [92] Sharma, Manabendra, Gustavo S. Vicente, Leila L. Graef, Rudnei O. Ramos e Anzhong Wang: *Quantum geometric formulation of Brans-Dicke theory for Bianchi I spacetime*. Phys. Rev. D, 111(4):043501, 2025. Citado na página 109.

Anexos

ANEXO A – Códigos

A.1 Determinação de condições iniciais e parâmetros a partir dos dados do PLANCK

```

Resultados retirados dos artigos do PLANCK publicados em 2020, que
trata dos dados divulgados em 2018.
Entradas observacionias (TT+EE+TE+lowE+lensing. Planck 2018 results-
VI, pag. 15, Tabela 2):

In[*]:= A5=2.099 10^(-9); (*Amplitude das flutuacoes escalares, As*)
ns = 0.9649;(*Indice espectral, ns*)

A2=A5 (.002/.05)^(ns-1);(*Redefinindo As para k*=0.002 Mpc^-1. A
duracao da inflacao a partir do cruzamento de k*=0.002 Mpc^-1 deve
ter entre 49 e 59 e-folds. Ref:Planck 2018 results-X,pag. 15.*)

Nef=54;(*Numero de e-folds da inflacao*)

Determinacao de constantes e parametros:

In[*]:= cSI=299792458;(*Velocidade da luz (c) em metros(m) por segundo(s)*)
spl=Rationalize[5.39106 10^-44,0];(*Tempo de Planck(tp) em segundos*)
mpl=spl cSI; (*Comprimento de Planck(pl) em metros*)
mpc=Rationalize[3.0856776 10^16 10^6,0];(*Megaparsec(Mpc) em metros*)
H0=Rationalize[67.36,0];(*Constante de Hubble (H0) em km s^-1Mpc^-1*)
H0mpc=H0 /(cSI 10^-3); (*H0/c em Mpc^-1*)
H0pl= H0 10^3/mpc spl;(*H0 em tp^-1*)

Omk=0.005;(*Modulo do parametro de curvatura*)
R0=1/(Sqrt[Omk] H0mpc);(*Raio do universo em Mpc*)
R0pl=R0 mpc/ mpl;(*Raio do universo em pl*)

Potencial de Starobinsky e sua derivada:

In[*]:= V[phi_]=((3 m^2) (1-Exp[-Sqrt[((16 \[Pi])/3] phi)]^2)/(32 \[Pi]));
dV[phi_]=D[((3 m^2) (1-Exp[-Sqrt[((16 \[Pi])/3] phi)]^2)/
(32 \[Pi])), phi];

Parametros de rolamento lento e as equacoes de movimento na
aproximacao de rolamento lento:

In[*]:= H[A_,epsilon_]=Sqrt[\[Pi] A epsilon];(*Parametro de Hubble em funcao
de As e do parametro de rolamento lento epsilon*)
e1:=ns-1== -4 epsilon2 + 2 delta2;(*Relacao entre ns e os parametros
de rolamento lento epsilon e delta*)

```

```

e2:=Nef==-1.04 +3/4 Exp[Sqrt[16\[Pi]/3]phi2]-Sqrt[3\[Pi]]phi2;(*
Relacao entre o numero de e-folds e o valor do campo escalar phi*)
e3:=3 H[A2,epsilon2] dphi2 + dV[phi2]==0;(*Equacao de Klein-Gordon
na aproximacao de rolamento lento*)
e4:=H[A2,epsilon2]^2==(8\[Pi])/3 (dphi2^2/2+V[phi2]);(*Equacao de
Friedmann classica em aproximacao plana*)
e5:=dphi2^2 (epsilon2-3)+2epsilon2 V[phi2]==0;(*Relacao entre a
derivada do campo dphi, o potencial V e o parametro epsilon*)

A segunda equacao determina o valor de phi2:

In[*]:= Solve[e2,phi2]
Out[*]= {{phi2->-17.9285},{phi2->1.06353}}

Escolhendo a solucao positiva:

In[*]:= phi2=1.0635338568930546';

As tres ultimas equacoes determinam m, dphi2, epsilon2:

In[*]:= Solve[{e3,e4,e5},{dphi2,m,epsilon2}]
Out[*]= {{dphi2->0.,m->0.,epsilon2->0.},{dphi2->-5.48705*10^-9,
m->-2.61918*10^-6,epsilon2->0.000226375},{dphi2->5.48705*10^-9,
m->-2.61918*10^-6,epsilon2->0.000226375},{dphi2->-5.48705*10^-9,
m->2.61918*10^-6,epsilon2->0.000226375},{dphi2->5.48705*10^-9,
m->2.61918*10^-6,epsilon2->0.000226375},{dphi2->0.963659,
m->0. -3.9958 I, epsilon2->39757.},{dphi2->0.963659,m->0. +3.9958 I,
epsilon2->39757.}}

A solucao com dphi2 negativo, massa positiva e epsilon2 positivo:

In[*]:= dphi2=-5.487054239780966'*^-9;
m=2.6191835967397635'*^-6;
epsilon2=0.0002263753748485547';

A primeira equacao determina delta2:

In[*]:= Solve[e1,delta2]
Out[*]= {{delta2->-0.0170972}}
In[*]:= delta2=-0.017097249250302902';

H2 e determinado por A2 e epsilon2:

In[*]:= H2=H[A2,epsilon2]
Out[*]= 1.29279*10^-6

Raio e curvatura.
Considerando alpha o fator de escala adimensional normalizado como 1
no tempo atual (t0), determina-se seu valor no no instante do
cruzamento do horizonte (t*):

In[*]:= alpha2=.002 cSI 1/H2 spl/mpc;

```

```
In[*]:= R2=R0pl alpha2;(*Raio do universo em t*, em unidades de Planck*)

      A densidade de energia de curvatura e calculada por:

In[*]:= rhok2=1/R2^2
Out[*]= 1.05471*10^-16

      Sumario:

In[*]:= {m,phi2,dphi2,R2,epsilon2,delta2,alpha2,H2,rhok2}
Out[*]= {2.61918*10^-6,1.06353,-5.48705*10^-9,9.7372*10^7,0.000226375,
        -0.0170972,8.10298*10^-55,1.29279*10^-6,1.05471*10^-16}
```

A.2 Evolução do plano de fundo e das perturbações

PLANO DE FUNDO

Condicoes iniciais calculadas para $k=10^{-6} \text{ Mpc}^{-1}$ e traduzidas para o instante em que o modo $k=0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ cruza o horizonte:

```
In[1]:= {m,phi2,dphi2,R2,alpha2}={2.63613082347228'^-6,
    1.0636911970106835',-5.4876090156123065'^-9,9.674532295516044'^7,
    8.05083038283319'^-55};
```

Determinacao de constantes e parametros:

```
In[*]:= cSI=299792458;(*Velocidade da luz (c) em metros(m) por segundo(s)*)
spl=Rationalize[5.39106 10^-44,0];(*Tempo de Planck(tp) em segundos*)
mpl=spl cSI; (*Comprimento de Planck (pl) em metros*)
mpc=Rationalize[3.0856776 10^16 10^6,0];(*Megaparsec(Mpc) em metros*)
H0=Rationalize[67.36,0];(*Constante de Hubble (H0) em km s^-1Mpc^-1*)
H0mpc=H0/(cSI 10^-3); (*H0/c em Mpc^-1*)
H0pl= H0 10^3/mpc spl;(*H0 em tp^-1*)
```

```
R0[omk_]:=1/(Sqrt[omk] H0mpc);(*Raio do universo em Mpc*)
R0pl[omk_]:=R0[omk] mpc/ mpl; (*Raio do universo em pl*)
omk=10^(-6);(*Modulo do parametro de curvatura*)
rhok2=1/(R0pl[omk] alpha2)^2;(*Densidade de energia de curvatura*)
```

```
gamma=Rationalize[0.2375,0];(*parametro de Barbero-Immirzi*)
rhocr=Rationalize[Sqrt[3]/(32 \[Pi]^2 gamma^3),10^(-50)];(*Densidade critica*)
V0=Rationalize[2\[Pi]^2,10^(-50)];(*Volume de uma esfera unitaria*)
```

Definicoes:

```
In[*]:= lambda=Rationalize[Sqrt[4Sqrt[3]\[Pi] gamma],10^(-50)];
delta=Rationalize[4 Sqrt[3]\[Pi] gamma,10^(-50)];
```

```

kappa=8\[Pi];
b0=Rationalize[Sqrt[rhok2],10^(-50)];
m=Rationalize[m,0];
rhok=Rationalize[rhok2,0];

Potencial de Starobinsky e suas derivadas:

In[*]:= V[phi_]=((3 m^2) (1-Exp[-Sqrt[((16 \[Pi])/3] phi)]^2)/(32 \[Pi]);

dV[phi_]=D[((3 m^2) (1-Exp[-Sqrt[((16 \[Pi])/3] phi)]^2)/
(32 \[Pi]),phi];(*Primeira derivada em relacao a phi*)

ddV[phi_]:=D[((3 m^2) (1-Exp[-Sqrt[((16 \[Pi])/3] phi)]^2)/
(32 \[Pi]),{phi,2}];(*Segunda derivada em relacao a phi*)

Equacoes que descrevem o plano de fundo em termos dos momentos:

In[*]:= eq1=a'[t]==-(a[t]/(2 gamma lambda))Sin[(8 \[Pi] gamma lambda )/
(3 V0) (pa[t] b0^2)/a[t]^2];(*derivada temporal do fator de escala
a(t)*)

eq2=phi'[t]==(pphi[t] b0^3)/(a[t]^3 V0);(*derivada temporal do campo
escalar phi(t)*)

eq3=pphi'[t]==-(a[t]^3/b0^3) V0 dV[phi[t]];(*derivada temporal do
momento conjugado ao campo escalar*)

eq4=pa'[t] ==-(1/(16 \[Pi] gamma^2 lambda^2))(-6 lambda^2 V0 (1+
gamma^2)+(-3 a[t]/b0 V0 (3 a[t]/b0 Cos[(2 lambda b0)/a[t]]-3 a[t]/b0
Cos[(8 \[Pi] gamma lambda pa[t] b0^2)/(3 a[t]^2 V0)]+2 lambda
Sin[(2 lambda b0)/a[t]])+16 \[Pi] gamma lambda pa[t]
Sin[(8 \[Pi] gamma lambda pa[t] b0^2)/(3 a[t]^2 V0]))-3 a[t]^2/b0^2
V0 V[phi[t]]+(3 pphi[t]^2 b0^4)/(2 a[t]^4 V0);(*derivada temporal do
momento conjugado ao fator de escala*)

Condicoes iniciais para a evolucao do plano de fundo:

In[*]:= phii=Rationalize[phi2,0];
dphii=Rationalize[dphi2,0];

da=Rationalize[\[Sqrt](8 \[Pi])/3 (dphii^2/2+V[phii]+rhocr (Sin[
(lambda b0)/1]^2-(1+gamma^2) (lambda^2 rhok)/1)) (1-(Sin[
(lambda b0)/1]^2-(1+gamma^2) (lambda^2 rhok)/1)-1/rhocr (dphii^2/2+
V[phii])) ),10^(-50)];

\[Pi]phii=Rationalize[V0 dphii/b0^3,0];
\[Pi]ai=Rationalize[(3 V0)/(8 \[Pi] gamma lambda) 1/b0^2 ArcSin[-2
gamma lambda da],0];

Integracao das equacoes no espaco de fase:

In[*]:= solPF=NDSolve[{eq1,eq2,eq3,eq4,a[0]==1,phi[0]==phii,pa[0]==\[Pi]ai,

```

```
pphi[0]==\[Pi]phii},{a,phi,pa,pphi},{t,-8 10^6,3 10^7},MaxSteps->
Infinity,WorkingPrecision->40,AccuracyGoal->18,InterpolationOrder->
All];
```

PERTURBACOES

Definicao dos coeficientes da equacao das perturbacoes em funcao do tempo e do numero harmonico n:

```
In[*]:= c1[t_,n_]:=b0^3/a[t]^3+(18b0^5 pphi[t]^2)/((n^2 - 4)kappa a[t]^5
pa[t]^2);(*Coeficiente c1*)

c2[t_,n_]:= a[t]/b0 (n^2-1)+a[t]^3/b0^3 ddV[phi[t]] - (6a[t]^7
dV[phi[t]]^2V0^2)/(b0^7 kappa pa[t]^2)+6kappa a[t]/b0 (n^2 - 1)/
(n^2-4) ((a[t]^3 dV[phi[t]]V0)/(b0^3 kappa pa[t]) - (b0^2 pphi[t])/
(2a[t]^2 V0))^2 -(-(3b0^4 pphi[t])/(a[t]^4 pa[t])) (n^2-1)/(n^2-4)+
(18a[t]V0^2 dV[phi[t]])/(b0 kappa pa[t]^2 (n^2 - 4)))^2/((b0^3
V0^2)/(a[t]^3 pphi[t]^2)+(18b0^5 V0^2)/((n^2-4)kappa a[t]^5
pa[t]^2));(*Coeficiente c2*)

c1c2[t_,n_]:= (b0^2(n^2-1))/a[t]^2+ddV[phi[t]]-6 (V0^2 a[t]^4
dV[phi[t]]^2)/(kappa pa[t]^2b0^4)+6 (kappa b0^2)/a[t]^2 (n^2 - 1)/
(n^2-4) ((V0 a[t]^3dV[phi[t]])/(b0^3 kappa pa[t]) - (b0^2 pphi[t])/
(2V0 a[t]^2))^2 +(n^2-1)/(n^2-4) (18b0^4pphi[t]^2)/(kappa a[t]^4
pa[t]^2)+18 (pphi[t]^2ddV[phi[t]]b0^2)/(kappa(n^2-4)a[t]^2 pa[t]^2)-
108 (V0^2 a[t]^2 pphi[t]^2 dV[phi[t]]^2)/(kappa^2(n^2-4)^2pa[t]^4
b0^2)+108 (n^2-1)/(n^2-4)^2 (b0^4pphi[t]^2)/(a[t]^4pa[t]^2) ((V0^2
a[t]^3 dV[phi[t]])/(kappa pa[t] b0^3)-(pphi[t] b0^2)/(2V0 a[t]^2))^2
-pphi[t]^2/V0^2 (-(n^2-1)/(n^2-4)) (3pphi[t]b0^4)/(a[t]^4 pa[t])+
(18V0^2 a[t]dV[phi[t]])/(kappa(n^2-4)pa[t]^2 b0))^2;(*c1 x c2*)

dc1[t_,n_]:= -3 (b0^3 a'[t])/a[t]^4 + 18/((n^2-4)kappa) ((2b0^5
pphi[t] pphi'[t])/(a[t]^5 pa[t]^2) - (5b0^5 pphi[t]^2 a'[t])/
(a[t]^6 pa[t]^2) - (2b0^5 pphi[t]^2 pa'[t])/(a[t]^5 pa[t]^3));(*
Derivada do coeficiente c1*)

alpha[t_,n_]:= (dc1[t,n]/c1[t,n])/solPF;(*Coeficiente alpha*)
beta[t_,n_]:= c1c2[t,n]/solPF;(*Coeficiente beta*)

Determinacao das condicoes iniciais utilizando as definicoes do
vacuo adiabatico de quarta ordem:

In[*]:= Omega[t_,n_]:=(-(3/2) a''[t]/a[t]+15/4 (a'[t]/a[t])^2+3/2 (dc1[t,n]/
c1[t,n]) a'[t]/a[t]+c1c2[t,n])^(1/2);(*Frequencia de oscilacao
Omega*)
dOmega[t_,n_]:=D[Omega[t,n],{t,1}];(*Derivada de Omega em relacao ao
tempo*)
d2Omega[t_,n_]:=D[Omega[t,n],{t,2}];(*Segunda derivada de Omega
em relacao ao tempo*)
epsilon2[t_,n_]:=3/4 dOmega[t,n]^2/Omega[t,n]^4-1/2 d2Omega[t,n]/
Omega[t,n]^3;(*Termos de segunda ordem adiabatica*)
```

```

Omega1[t_,n_]:= (1+epsilon2[t,n])^(1/2); (*Correcoes de segunda ordem
na frequencia*)
dOmega1[t_,n_]=D[Omega1[t,n],{t,1}]; (*Derivada de Omega1 em relacao
ao tempo*)
d2Omega1[t_,n_]=D[Omega1[t,n],{t,2}]; (*Segunda derivada de Omega1 em
relacao ao tempo*)

epsilon4[t_,n_]:=3/4 dOmega1[t,n]^2/(Omega1[t,n]^4Omega[t,n]^2)-
1/2 d2Omega1[t,n]/(Omega1[t,n]^3Omega[t,n]^2)+1/2 (dOmega1[t,n]
dOmega[t,n])/(Omega1[t,n]^3Omega[t,n]^3); (*Termos de quarta ordem
adiabatica*)

Omega2[t_,n_]:= (1+epsilon4[t,n])^(1/2); (*Correcoes de quarta ordem
na frequencia*)
w4[t_,n_]:=Omega[t,n]Omega1[t,n]Omega2[t,n];
dw4[t_,n_]=D[w4[t,n],{t,1}];
h[t_,n_]:= 1/(2 w4[t,n])^(1/2) ; (*Solucao da equacao do oscilador
harmonico em termos da variavel h(t)*)
f0[t_,n_]:= (b0/a[t])^(3/2) h[t,n]; (*Solucao da equacao de Klein-
Gordon para a variavel f(t) sob condicoes adiabaticas*)

df0[t_,n_]:=(-(3/2)b0^(3/2)a[t]^(-(5/2))a'[t]h[t,n]-
(a[t]/b0)^(-(3/2))(2w4[t,n])^(-(3/2)) dw4[t,n]-I (a[t]/b0)^(-(3/2))
(w4[t,n]/2)^(1/2)); (*Derivada de f(t) em relacao ao tempo*)

f0PF[t_,n_]:=f0[t,n]/.solPF; (*Atribui-se a solucao do plano de
fundo a f0*)
df0PF[t_,n_]:=df0[t,n]/.solPF; (*Atribui-se a solucao do plano de
fundo a df0*)

Definicoes:

In[*]:= HPF[t_]:= (a'[t]/a[t])/solPF; (*Parametro de Hubble evoluído no
plano de fundo*)
dphiPF[t_]:=phi'[t]/solPF; (*Campo escalar homogêneo evoluído no
plano de fundo*)

In[*]:= nmin=3; (*Menor valor para n*)
tot=1000; (*total de iteracoes*)
dn=1; (*Valor inicial do passo*)
tend=2.95 10^7; (*Instante em que e determinado o espectro de
potencia*)
t0=-6.5 10^6; (*Instante em que as condicoes iniciais das
perturbacoes sao determinadas*)
Array[PPend,tot]; (*Vetor PPend que compoe-se dos valores do espectro
de potencia das perturbacoes f(t) para diferentes modos n*)
Array[PPord,tot]; (*Vetor utilizado para ordenar PPend*)
Array[PR,tot]; (*Vetor PR que compoe-se dos valores do espectro de
potencia do escalar de curvatura comovel R para diferentes modos n*)
Array[PRord,tot]; (*Vetor utilizado para ordenar PR*)
Array[vecMode,tot]; (*Vetor para ordenar os modos n*)
mode=nmin-1; (*Valor inicial para a variavel mode*)

```

Processo de iteracao em que a equacao das perturbacoes escalares e integrada para diferentes modos n. Após a integracao, determina-se o espectro de potencia.

```
In[*]:= Do[
  mode=mode+dn; (*seleciona o modo*)
  alphamode[t_]:=alpha[t,mode][[1]]; (*Determinacao do coeficiente
  alpha para o modo n selecionado*)
  betamode[t_]:=beta[t,mode][[1]]; (*Determinacao do coeficiente beta
  para o modo n selecionado*)
  eqp=f''[t] - alphamode[t]f'[t]+betamode[t]f[t]==0 ;(*Equacao
  das perturbacoes*)
  fit0=f0PF[t0,mode]; (*Condicao inicial para f(t)*)
  dfit0=df0PF[t0,mode]; (*Condicao inicial para f'(t)*)
  fi=Rationalize[fit0,0][[1]];
  dfi=Rationalize[dfit0,0][[1]];

  solPert=NDSolve[{eqp,f[t0]==fi,f'[t0]==dfi},f,{t,t0,2.96 10^7},
  AccuracyGoal -> 22,PrecisionGoal -> 17,WorkingPrecision -> 50,
  MaxSteps->Infinity,Method->{"TimeIntegration"->"StiffnessSwitching",
  "EquationSimplification"->"Solve"}];(*Integracao da equacao das
  perturbacoes*)

  PPend[mode]=Flatten[Abs[f[tend]]^2 /. solPert];(*Espectro de
  potencia das perturbacoes escalares f(t)*)
  PR[mode]=(-(HPF[tend]/dphiPF[tend]))^2 PPend[mode] mode^3;(*Espectro
  de potencia do escalar de curvatura comovel R*)
  PPord[i]=PPend[mode];(*Ordenacao do vetor PPend*)
  PRord[i] = PR[mode];(*Ordenacao do vetor PR*)
  vecMode[i]=mode;(*Ordenacao dos modos n*)
  dn=If[mode>100,
  Floor[10^(Log[10,mode]-2)],
  1];(*Funcao para aumentar o tamanho do passo progressivamente*)
  ,
  {i,tot}
]
```