

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Lorena Leocádio Gomes

ESTRATÉGIA DE ACOPLAMENTO MULTIDIMENSIONAL PARA
PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Belo Horizonte

2025

Lorena Leocádio Gomes

**ESTRATÉGIA DE ACOPLAMENTO MULTIDIMENSIONAL PARA
PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros

Belo Horizonte

2025

G633e

Gomes, Lorena Leocádio.

Estratégia de acoplamento multidimensional para problemas da mecânica da fratura linear elástica [recurso eletrônico] / Lorena Leocádio Gomes. - 2025.

1 recurso online (151 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 137-151.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. 4. Acoplamentos - Teses. 5. Métodos de simulação - Teses. I. Barros Felício Bruzzi. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº 110 DA ALUNA LORENA LEOCÁDIO GOMES

Às **08:30** horas do dia **11** de **abril** de **2025**, reuniu-se em ambiente virtual, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em 10 de fevereiro de 2025 para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada: "**Estratégia de Acoplamento Multidimensional para Problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a Sessão, o Presidente da Comissão, Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros, após dar conhecimento aos presentes do teor das Normas Regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Finalizada a apresentação, seguiu-se para a fase de arguição pelos examinadores, com as respectivas respostas da aluna. Logo após a fase de arguição, a Comissão se reuniu, sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final, a saber:

Aprovada

Reprovada

O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora e pela aluna.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto - DEES - UFMG

Prof. Dr. Lapo Gori - DEES - UFMG

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado - UFPR

Prof. Dr. André Jacomel Torii - UNILA

A aprovação da aluna na Defesa de Tese de Doutorado não significa que a mesma tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do DIPLOMA de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Para ciência da aluna:

1. Atesto que as alterações solicitadas pela Comissão Examinadora serão cumpridas no prazo de ATÉ 60 dias corridos.

2. Atesto estar ciente que a versão corrigida da dissertação deverá ser entregue ao Repositório Institucional da UFMG, conforme orientações disponíveis em: <https://repositorio.ufmg.br/custom/instructions.jsp>

Ciente: **Lorena Leocádio Gomes**

Aluna

Belo Horizonte, 11 de abril de 2025.

Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.

Após a Homologação da Defesa pelo Colegiado do Programa, este documento será assinado pela Coordenação e disponibilizado à aluna.



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Professor do Magistério Superior**, em 15/04/2025, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lapo Gori, Professor do Magistério Superior**, em 15/04/2025, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lorena Leocadio Gomes, Usuária Externa**, em 17/04/2025, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Professor do Magistério Superior**, em 17/04/2025, às 09:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Dalledone Machado, Usuário Externo**, em 22/04/2025, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Jacomel Torii, Usuário Externo**, em 23/04/2025, às 14:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Coordenador(a)**, em 04/06/2025, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4116848** e o código CRC **CD53AA49**.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, expresso minha profunda gratidão a Deus, cuja presença constante tem sido minha fonte inabalável de força e inspiração ao longo desta jornada. Sua orientação divina me sustentou nos momentos de dúvida e guiou meus passos rumo à conclusão deste doutorado.

À minha família, com especial menção aos meus irmãos e, de maneira singular, à minha mãe. Seu apoio incondicional em todas as fases da minha vida e sua capacidade inigualável de transformar sonhos em realidade têm sido um pilar essencial nos mais diversos desafios que enfrentei. Nos momentos de dificuldade, sua presença firme e amorosa foi meu refúgio e motivação.

A todos os mestres que já marcaram a minha vida com conhecimento e aprendizados de vida e, em especial, expresso também meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Professor Felício. Sua orientação incansável desde a minha iniciação científica até este doutorado tem sido vital. Ele guiou meu percurso acadêmico com dedicação e excelência. Sua integridade profissional e compromisso com o ensino são qualidades que considero um privilégio.

Aos meus amigos, minha gratidão eterna por todo o apoio e encorajamento. Em particular, gostaria de destacar Karlinha e Thianne, cujas contribuições foram indispensáveis ao longo desses nove anos. Desde os primeiros passos no mestrado até agora, elas foram mais do que colegas: verdadeiras amigas e confidentes. Sem suas colaborações e seu apoio, completar esta jornada teria sido infinitamente mais difícil.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“É justo que muito custe o que muito vale.”

Santa Teresa D’Ávila.

Resumo

Como uma instância do Método da Partição da Unidade (MPU), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é uma técnica numérica que utiliza funções de enriquecimento que, quando multiplicadas pelas funções da Partição da Unidade (PU), expandem o espaço de solução do problema analisado. Essas funções de enriquecimento são selecionadas com base nas características específicas do problema em estudo, podendo também ser numericamente derivadas de análises realizadas localmente em subregiões, resultando no que é conhecido como MEFG com a estratégia Global-Local. Tradicionalmente, a aplicação do MEFG está restrita a modelos em que tanto o problema global quanto o local utilizam o mesmo tipo de elementos na discretização da malha de elementos finitos. Entretanto, em diversos cenários, a combinação de elementos finitos de diferentes dimensões torna-se uma abordagem computacionalmente eficiente para representar a complexidade associada à análise de certas partes da estrutura. A garantia da compatibilidade de deslocamentos e do equilíbrio de forças nesses modelos multidimensionais depende de uma escolha adequada de métodos de acoplamento nas interfaces entre diferentes tipos de elementos. Este trabalho propõe uma estratégia de acoplamento eficiente para análise multidimensional, integrando modelos com elementos de diferentes formulações. A abordagem utiliza um processo iterativo para calcular a matriz de coeficientes do método MPC (*Multipoint Constraint*) deformável, implementado no contexto da análise Global-Local do MEFG. Essa configuração possibilita a realização do acoplamento uma única vez, mesmo em aplicações voltadas à mecânica da fratura. Com isso, a propagação da trinca é restrita ao modelo local, onde a malha é adaptada exclusivamente na região de interesse, preservando a estrutura do modelo global e eliminando a necessidade de novos acoplamentos. Dois modelos e diferentes simulações são apresentadas para validar a estratégia proposta, visando a simulação acurada da presença de defeitos com comportamento bi e tridimensional em estruturas unidimensionais.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados; enriquecimento global-local; equações de restrição; acoplamento multidimensional; simulação em escalas múltiplas.

Abstract

As an instance of the Partition of Unity Method (PUM), the Generalized Finite Element Method (GFEM) is a numerical technique that employs enrichment functions which, when multiplied by the Partition of Unity (PU) functions, expand the solution space of the analyzed problem. These enrichment functions are selected based on the specific characteristics of the problem under study and can also be numerically derived from local analyses, resulting in what is known as the GFEM with Global-Local strategy. Usually, the application of the GFEM is restricted to models where both the global and local problems use the same type of elements in the finite element mesh discretization. However, in various scenarios, combining finite elements of different dimensions becomes a computationally efficient approach to represent the complexity associated with the analysis of certain parts of the structure. Ensuring displacement compatibility and force equilibrium in these multidimensional models depends on an adequate choice of coupling methods at the interfaces between different types of elements. This work proposes an efficient coupling strategy for multidimensional analysis, integrating models with elements of different formulations at the interface. The approach employs an iterative process to compute the coefficient matrix of the deformable MPC (*Multipoint Constraint*) method, implemented within the Global-Local analysis framework of the GFEM. This configuration enables the coupling to be performed only once, even in fracture mechanics applications. Consequently, crack propagation is confined to the local model, where the mesh is adapted exclusively in the region of interest, preserving the global model structure and eliminating the need for additional couplings. Two models and different simulations are presented to validate the proposed strategy, aiming for accurate simulation of defects with two and three-dimensional behavior in one-dimensional structures.

Palavras-Chave: Generalized Finite Element Method; global-local enrichment; constraint equations; mixed-dimensional coupling; multi-scale modeling.

Lista de Figuras

1.1	Modelagem em multiescala de uma estrutura de pórtico (Wang et al., 2014)	23
2.1	Estratégia Global-Local (Fonseca, 2019). Em amarelo são representados os nós em que a solução Local é utilizada para enriquecer a Partição da Unidade da malha Global na terceira etapa da solução do problema. No problema global a trinca está apresentada apenas a título de ilustração e já no problema local e no global enriquecido ela está sendo representada por meio de aproximação.	42
3.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j via MEFGE (Barros, 2002). . .	49
3.2	Construção de funções de forma do MEFGE. À esquerda, tem-se o enriquecimento empregado no MEFGE. No centro, a modificação do enriquecimento é exibida. À direita, apresenta-se a construção da função de forma associada ao MEFGE (Gupta et al., 2013).	51
3.3	Eixos em duas dimensões associados com a ponta da trinca.	58
3.4	Sistemas de coordenadas associado com um borda espacial em 3D (Duarte et al., 2000).	59
3.5	Modos básicos de deslocamento das superfícies da trinca (Dowling, 2007).	63
3.6	Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da Integral de Interação, considerando uma trinca representada em vermelho (Fonseca, 2019). . . .	65
3.7	Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração para o cálculo da Integral de Interação. Os elementos selecionados são destacados em azul. (Fonseca, 2019).	67
3.8	Problema unidimensional discretizado com (n-1) elementos finitos de barra (Generalizada de Felippa (2004))	72

3.9	Interface de Acoplamento Chapa-Viga, adaptado de Wang et al. (2014), para elementos planos quadrilaterais do tipo Q4 (quatro nós) conforme utilizado nessa tese	78
3.10	Subestrutura da chapa na interface extraída para a criação do Modelo de Forças Nodais, adaptado de Wang et al. (2014)	79
3.11	Processo iterativo para a obtenção da matriz de coeficientes da equação de restrição (Wang et al., 2014)	82
4.1	Viga multidimensional engastada em balanço	84
4.2	Viga multidimensional engastada em balanço com as três escalas de análise empregada no novo método proposto	85
4.3	Modelo de Forças Nodais simplificado	88
4.4	Ilustração do incremento (Δ_a) e do ângulo (θ) que determina a orientação do novo segmento de trinca (Fonseca et al., 2020).	91
4.5	Ilustração esquemática do procedimento de solução da simulação da propagação de trinca combinado com o acoplamento multidimensional via MEF Global-Local	92
5.1	Organização do núcleo numérico do INSANE	97
5.2	Diagrama parcial de classe para a interface GFemAnalysisModel	98
5.3	Dinâmica de uma simulação com a nova proposta. Adaptada de Monteiro (2021)	101
5.4	Esquema de cores utilizada para representar as classes não modificadas, modificadas e criadas	102
5.5	Diagrama parcial da classe <i>Solution</i>	104
5.6	Diagrama parcial da classe <i>SimulationManager</i>	105
6.1	Viga engastada em balanço	109
6.2	Modelo multidimensional com o problema global e local. As três representações não estão na mesma escala. Medidas em mm.	111
6.3	Modelo Equivalente 1 com os problemas global e local. As três representações não estão na mesma escala.	111
6.4	Modelo de Referência 2 com os problemas global e local. As três representações não estão na mesma escala.	112

6.5	Modelos multidimensionais com diferentes tamanhos do problema local. Medidas em mm.	114
6.6	Propagação da trinca dos modelos	119
6.7	Erro - Modelo multidimensional x Modelo Equivalente 1	119
6.8	Erro - Modelo multidimensional x Modelo de Referência 2	119
6.9	Modelo de Forças Nodais.	121
6.10	Modelo multidimensional tridimensional. Medidas em mm.	122
6.11	Modelo tridimensional Equivalente. Medidas em mm.	123
6.12	Variação de σ_{xx} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$	124
6.13	Variação de σ_{xy} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$	124
6.14	Modelo multidimensional tridimensional com a aplicação das forças na direção Y e Z e a trinca limitada à metade da espessura.	125
6.15	Variação de σ_{xx} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$	126
6.16	Variação de σ_{xz} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$	126
6.17	Pórtico em L. Todas as dimensões estão em cm	128
6.18	Modelo Pórtico em L multidimensional. Todas as dimensões estão em cm . As três representações não estão na mesma escala.	129
6.19	Pórtico em L - Modelo Equivalente 1. As três representações não estão na mesma escala.	130
6.20	Pórtico em L - Modelo de Referência 2. As três representações não estão na mesma escala.	131
6.21	Passos da trinca	131

Lista de Tabelas

6.1	Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos da região central em chapa comparado com os modelos de referência 1 e 2	112
6.2	Erro relativo do Modelo 1 com relação ao Modelo 2	112
6.3	Erro dos modelos com diferentes tamanhos de domínio local comparado com o modelo de referência 2	114
6.4	Erro de K_I entre os diferentes modelos e o valor empírico	115
6.5	Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos da região central de chapa comparado com os Modelos 1 e 2	117
6.6	Erro relativo do Modelo 1 com relação ao Modelo 2	117
6.7	Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos do modelo local comparado com o Modelo de Referência 2	118
6.8	Erro entre o Modelo Multidimensional e Modelo Equivalente	122
6.9	Abertura de trinca do Modelo Multidimensional em todas as direções e erro em relação ao Modelo Equivalente	125
6.10	Coordenadas finais da trinca	128
6.11	Erro em relação ao modelo 1	128
6.12	Erro em relação ao modelo 2	129

Lista de Abreviaturas e Siglas

DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia
FE-BE	<i>Finite Element - Boundary Element</i>
IGABEM	<i>Isogeometric Boundary Element Method</i> (Método do Elemento de Contorno Isogeométrico)po
IGL	<i>Iterative Global-Local</i>
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFE	Método dos Elementos Finitos Estendido
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFG ^{gl}	Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento Global-Local
MEFGE	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável
MGLE	Método de Garlekin Livre de Elementos
MPC	Método de Restrição em Múltiplos Pontos (<i>Multipoint Constraint</i>)
MPU	Método da Partição da Unidade
POO	Programação Orientada à Objetos
PU	Partição da Unidade
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

Lista de Símbolos

A organização da lista de símbolos é conforme a ordem em que os símbolos aparecem.

Capítulo 3

n	Número de pontos nodais
\mathcal{N}_j	Funções Lagrangianas Lineares
ω_j	Nuvem do nó \mathbf{x}_j
$L_{ji}(\mathbf{x})$	i -ésima aproximação local associada ao nó j
I_j	Conjunto de funções de enriquecimento associada ao nó j
$\phi_{ji}(\mathbf{x})$	Função de aproximação
\mathbf{u}_j	Graus de liberdade do MEF
\mathbf{b}_{ji}	Novos graus de liberdade criados pelos enriquecimentos associados ao MEFGE
$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$	Função de aproximação do deslocamento com enriquecimento do MEFGE
\mathbf{b}_{ji}	Parâmetros nodais associados ao MEFGE
\tilde{L}_{ji}	Função enriquecedora do MEFGE
$I_{\omega_j}(L_{ji})$	Função interpoladora (ou interpolante) do MEFGE
$\tilde{\phi}_{ji}$	Função de forma do MEFGE
$\bar{\Omega}_G$	Domínio do problema global
Ω_G	Interior do problema
$\partial\Omega_G$	Contorno do problema
$\partial\Omega_G^\sigma$	Contorno de Neumann
$\partial\Omega_G^\tau$	Contorno de Dirichlet
\mathbf{C}	Tensor constitutivo
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tensor de deformações
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor de tensões prescritas
$\mathcal{H}^1(\Omega_G)$	Espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G

$\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$	Discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$
\mathbf{v}_G^0	Função teste
$\tilde{\mathbf{u}}_G^0$	Solução global inicial
$\bar{\Omega}_L$	Domínio do problema Local
$\tilde{\chi}_L(\Omega_L)$	Discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$
η	Parâmetro de penalidade
E	Módulo de elasticidade do material
J	Jacobiano da transformação do elemento
$H(\mathbf{x})$	Função de Heaviside
ξ	Posição em relação à descontinuidade
$u_\xi(r, \theta)$	Componente do vetor \mathbf{u} na direção ξ -
$u_\eta(r, \theta)$	Componente do vetor \mathbf{u} na direção η -
$u_\zeta(r, \theta)$	Componente do vetor \mathbf{u} na direção ζ -
ν	Coefficiente de <i>Poisson</i>
G	Módulo de elasticidade transversal
R_2^{-1}	Matriz de transformação de coordenadas
I_d	Conjunto de índices dos nós enriquecidos com as funções de Heaviside
I_s	Conjunto de índices dos nós enriquecidos com as funções de trinca (singulares)
K	Fator de Intensidade de Tensão
K_I	Fator de Intensidade de Tensão para Modo I de abertura de trinca
K_{II}	Fator de Intensidade de Tensão para Modo II de abertura de trinca
K_{III}	Fator de Intensidade de Tensão para Modo III de abertura de trinca
σ_{ij}	Campos de tensões
ϵ_{ij}	Campos de deformações
u_i	Campos de deslocamentos
$I^{(1,2)}$	Integral de Interação para os estados 1 e 2
$W^{(1,2)}$	Energia de deformação de interação
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor dos graus de liberdade que participa das restrições
$\bar{\mathbf{a}}$	Vetor que contém os coeficientes para cada deslocamento em $\bar{\mathbf{u}}$
g	Constante.
\mathbf{A}	Matriz de restrição
$\hat{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos modificado, sem o grau de liberdade dependente
\mathbf{T}	Matriz de transformação do modelo
\mathbf{K}	Matriz de rigidez

\mathbf{f}	Vetor de forças
W_P	Trabalho realizado pelas forças nodais na interface da chapa
W_B	Trabalho realizado pelas forças nodais na interface da viga
τ_{xy}	Componente de cisalhamento na chapa
P	Força axial atuante na viga
Q	Força cortante atuante na viga
M	Momento fletor atuante na viga
\mathbf{C}	Matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamentos
\mathbf{u}_B	Vetor com os deslocamentos dos nós da viga
\mathbf{u}_P	Vetor de deslocamento dos nós da chapa
δW_P	Trabalho virtual realizado pelas forças nodais na interface da chapa
δW_B	Trabalho virtual realizado pelas forças nodais na interface da viga
$\delta \mathbf{u}_P$	Vetor de deslocamentos virtuais da chapa
$\delta \mathbf{u}_B$	Vetor de deslocamentos virtuais para a viga
\mathbf{F}_P	Vetor de forças nodais na interface da chapa
\mathbf{F}_B	Vetor de forças nodais na interface da chapa da viga
\mathbf{u}_{SE}	Vetor de deslocamentos nodais associado à subestrutura do MFN
\mathbf{K}_{SE}	Matriz de rigidez associada à subestrutura do MFN
\mathbf{f}_{SE}	Vetor de forças da chapa na interface, se aplicada uma força unitária na viga

Capítulo 4

\mathbf{M}_I	Modelo com redução dimensional, ou inferior
\mathbf{M}_S	Modelo com elevada dimensionalidade, ou superior
\mathbf{F}_{M_S}	Matriz de forças nodais associada ao modelo com redução dimensional
\mathbf{F}_{M_I}	Matriz de forças nodais associada ao modelo com elevada dimensionalidade
Δ_a	Incremento de trinca

Capítulo 5

\mathbf{X}	Vetor de variáveis de estado do problema
$\dot{\mathbf{X}}$	Vetor da primeira derivada temporal das variáveis de estado
$\ddot{\mathbf{X}}$	Vetor da segunda derivada temporal das variáveis de estado
\mathbf{C}_{uu}	Parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos incógnitos nas equações associadas às forças prescritas

\mathbf{C}_{up}	Parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos prescritos nas equações associadas às forças prescritas
\mathbf{C}_{pu}	Parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos incógnitos nas equações associadas às forças incógnitas
\mathbf{C}_{pp}	Parcela da matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos prescritos nas equações associadas às forças incógnitas
\mathbf{X}_u	Vetor de deslocamentos incógnitos
\mathbf{X}_p	Vetor de deslocamentos prescritos
\mathbf{F}_u	Vetor de forças nodais incógnitas
\mathbf{F}_p	Vetor de forças nodais prescritos
\mathbf{R}_u	Vetor de forças aplicadas diretamente nos nós incógnitos
\mathbf{R}_p	Vetor de forças aplicadas diretamente nos nós prescritos

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Justificativa	30
1.2	Objetivos	32
1.2.1	Objetivo geral	33
1.2.2	Objetivos específicos	33
1.3	Organização do texto	34
2	Revisão da Literatura	36
2.1	Método dos Elementos Finitos Generalizados	36
2.1.1	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável	39
2.1.2	Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento Global-Local	40
2.2	Acoplamento multidimensional	44
3	Fundamentação Teórica	48
3.1	Método dos Elementos Finitos Generalizados	48
3.1.1	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável	51
3.1.2	MEFG com Enriquecimento Global-Local	52
3.2	Funções de enriquecimento para representação de trincas	57
3.2.1	Funções de Heaviside	57
3.2.2	Funções de Enriquecimento com Derivadas Singulares	58
3.3	Mecânica da Fratura Linear Elástica	62
3.3.1	Procedimento para o cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão segundo o método da Integral de Interação	64
3.4	Acoplamento multidimensional	67
3.4.1	Método de Restrição em Múltiplos Pontos (MPC)	68
3.4.2	Método de Acoplamento	74
4	Análise multidimensional via MEFG^{gl} para propagação de trinca	83
4.1	Procedimentos de Solução	83
4.2	Descrição da Estratégia	86
5	Sistema INSANE	95

5.1	Características fundamentais do sistema INSANE	96
5.2	Ampliação do Sistema INSANE	102
6	Simulações Numéricas	106
6.1	Viga em Balanço	109
6.1.1	Viga submetida a uma força horizontal descrita em \mathbb{R}^2	109
6.1.2	Viga sob flexão descrita em \mathbb{R}^2	116
6.1.3	Viga descrita em \mathbb{R}^3	120
6.2	Pórtico em L	127
7	Considerações Finais	132
7.1	MEFG com enriquecimento global-local para análise multidimensional .	132
7.2	Recomendação para trabalhos futuros	136
	Referências Bibliográficas	138

Capítulo 1

Introdução

Um dos maiores desafios em análises de estruturas complexas é encontrar um método numérico eficaz que represente com precisão o contínuo, minimizando o erro de aproximação e equilibrando os custos computacionais. Aumentar o número de parâmetros na discretização é uma técnica comum para reduzir erros; entretanto, isso também eleva significativamente o custo computacional para o processamento. Atualmente, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método numérico mais utilizado em análise estrutural, e um modelo de elementos finitos preciso é normalmente uma ferramenta essencial para avaliar o desempenho e detectar possíveis danos estruturais.

Embora o MEF capture efetivamente o comportamento global de estruturas grandes, ele pode não ser computacionalmente eficiente para representar, em uma mesma simulação, os fenômenos locais, como concentrações de tensões, iniciação e propagação de fissuras. Esses fenômenos são críticos para a integridade estrutural e segurança, especialmente em indústrias como a aeronáutica, automotiva, e civil. A simulação em elementos finitos multiescala surgiu como uma estratégia promissora para representar adequadamente essas características inserindo-as no comportamento global da estrutura. (Li et al., 2007; Mata et al., 2008; Li et al., 2009; Chan et al., 2009; Wang et al., 2014).

Existe uma generalização na literatura quando se fala do termo multiescala, abrangendo diferentes conceitos, mas sempre se referindo à resolução de problemas em que se têm

níveis de detalhamento distintos em uma mesma análise. Ela pode estar relacionada à heterogeneidade do material (tratando de meios contínuos) onde são avaliados os comportamentos macroscópicos e análises microscópica de um meio (Zaoui, 2002; Lloberas-Valls et al., 2008; Nguyen et al., 2009; Lloberas-Valls et al., 2010). Uma segunda estratégia da literatura que também pode ser enquadrada como abordagem multiescala consiste nos problemas em que a formulação dos elementos envolvidos na discretização é diferente (Li et al., 2007; Yu et al., 2012; Wang et al., 2014, 2016). Um outro conceito de análise multiescala refere-se à análise Global-Local em duas escalas. Inicialmente proposta por Noor (1986), ela é capaz de resolver o problema sem a necessidade de um grande número de elementos menores. Esta abordagem utiliza uma malha grosseira para capturar o comportamento global, enquanto análises detalhadas são realizadas em regiões específicas de interesse, conhecidas como domínios locais (Sellitto et al., 2012).

A análise multiescala que abrange o estudo do comportamento do material não está incluída no escopo deste trabalho; para um aprofundamento sobre o tema, recomenda-se a consulta ao estudo de Monteiro (2021). A segunda estratégia mencionada anteriormente, também classificada como uma abordagem multiescala, envolve a utilização de diferentes tipos de elementos em sub-regiões da estrutura, com ou sem sobreposição, acoplados em um único modelo. Por exemplo, em uma estrutura de pórtico de aço com perfil I (ver Fig. 1.1), a maior parte da estrutura pode ser discretizada com elementos de viga, enquanto nas regiões de complexidade geométrica são utilizados elementos de casca ou mesmo tridimensionais. Esta estratégia não apenas reduz o custo computacional, mas também proporciona uma modelagem detalhada onde se faz mais necessário.

Para integrar eficientemente a um mesmo modelo, elementos de diferentes formulações, é necessário um método de acoplamento baseado na compatibilidade de deslocamentos e no balanço das tensões na interface entre diferentes tipos de elementos, considerando que diferentes formulações possuem distintos graus de liberdade (McCune et al., 2000). Conforme descrito por Guidault e Belytschko (2007), existem dois principais métodos de acoplamento: acoplamento de volume e acoplamento de superfície. O acoplamento de

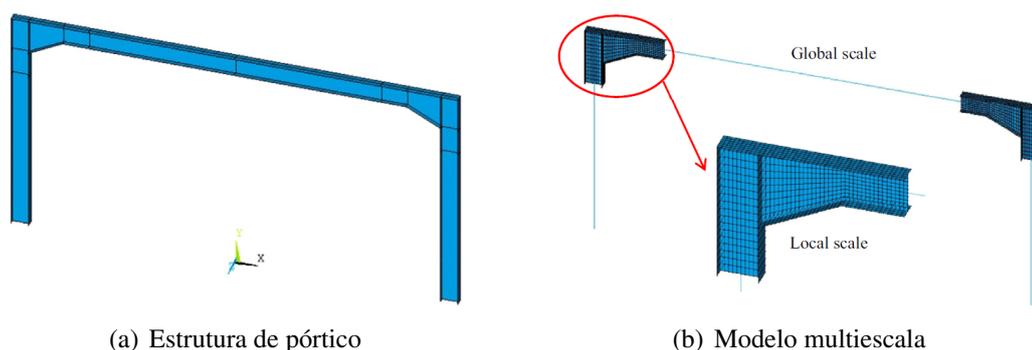


Figura 1.1: Modelagem em multiescala de uma estrutura de pórtico (Wang et al., 2014)

volume, normalmente implementado através do método Arlequin (Dhia e Rateau, 2005), envolve a coexistência de diferentes modelos dentro de uma região específica. Este método é particularmente adequado para acoplar diferentes modelos físicos (Bauman et al., 2008; Wellmann e Wriggers, 2012; Wang et al., 2014), no qual são interligados para formar uma estrutura sobreposta, alcançada através de multiplicadores de Lagrange. Em contraste, o acoplamento de superfície não envolve sobreposição de modelos, pois são separados por uma interface, e é mais comumente empregado em análises estruturais. Existem algumas abordagens que combinam os diferentes tipos de elementos nessa técnica de acoplamento, incluindo o método dos elementos de transição e o método de restrição em pontos múltiplos (MPC - multipoint constraint).

O método dos elementos de transição (Surana, 1979), conforme mencionado em Yu et al. (2012), é uma forma eficaz de acoplar diferentes modelos estruturais, no qual o campo de deslocamentos é expresso por uma combinação de deslocamentos nodais dos elementos estruturais (Yamamoto et al., 2019). No entanto, esta técnica é limitada ao acoplamento de elementos um a um, e diferentes tipos de elementos de transição requerem formulações distintas (Wang et al., 2014).

O método MPC, conforme descrito em Felippa (2004), é um método de acoplamento usado para definir equações de restrições que relacionam os graus de liberdade na interface entre os modelos com formulações diferentes. Duas abordagens são usualmente

consideradas, o MPC rígido e o deformável. O MPC rígido impõe a mesma resposta nodal na interface (por exemplo, o deslocamento), criando uma perturbação significativa no gradiente de solução. Já no MPC deformável, um critério de ponderação, representado por coeficientes de restrição, distribui os esforços entre os nós dos elementos associados à interface. A eliminação por dependência, os multiplicadores de Lagrange e a penalidade são diferentes métodos que podem ser usados no MPC deformável de maneira a estabelecer a continuidade da resposta ao longo da interface.

McCune et al. (2000) propôs um método MPC deformável que acopla a solução aproximada na interface entre os modelos com formulações diferentes com base no balanço de energia, garantindo a compatibilidade de deslocamentos entre diferentes modelos estruturais. Este acoplamento é alcançado igualando o trabalho realizado pelas tensões associadas com cada um dos dois modelos estruturais distintos ao longo da interface. As teorias de elasticidade e de flexão transversal de placas de Reissner são usadas para se definir analiticamente as expressões que na interface produzem os pesos no MPC para os problemas de acoplamento placa-viga e placa-sólido. Este método tem a desvantagem de depender das equações de restrição específicas para cada tipo de modelo, discretização e interface. Alternativamente, o método de acoplamento numérico proposto por Wang et al. (2014) utiliza o princípio dos trabalhos virtuais para obter, iterativamente, as equações de restrição de força e deslocamento na interface, atingindo resultados equivalentes aos de McCune et al. (2000), sem perda de generalidade.

Conforme mencionado anteriormente, há diversos conceitos que descrevem uma abordagem multiescala, e a última abordagem discutida aqui é a Global-Local, que se apresenta como um método eficaz para integrar diferentes regimes de escala, fornecendo uma solução robusta para tratar descontinuidades e singularidades em problemas estruturais. Entre os métodos que empregam essa abordagem, destacam-se as técnicas baseadas em superposição, como os métodos Schwarz (Lozinski e Pironneau, 2011; Kamga e O., 2007), o Método Quimera (Brezzi et al., 2003), o método de decomposição de domínio *hp* (Rank, 1992), o método multiescala variacional (Hughes et al., 1998), e o método de parcelas de

Elementos Finitos (Glowinski et al., 2005). Nessas estratégias, o problema a ser solucionado é construído pela combinação da malha global, discretizada de forma mais grosseira, e da malha local refinada, sobreposta à primeira. Interfaces integrais são responsáveis por acoplar essas duas discretizações e as técnicas citadas são utilizadas para compatibilizar os deslocamentos dos nós do problema local com o problema global, resultando em uma formulação complexa que é intrusiva em relação aos códigos de MEF tradicionais.

Nesse contexto de análise em duas escalas, surgem os modelos não intrusivos, como o método Global-Local definido por Noor (1986), no qual a solução do modelo global grosseiro é aplicada como condições de contorno do modelo local refinado, onde os fenômenos localizados de interesse são analisados. Com base nessa premissa, Whitcomb (1991) propôs uma estratégia Global-Local Iterativa (IGL - *iterative global-local*) que foi formalizada por Gendre et al. (2009) ao aplicá-la para simular o comportamento de problemas estruturais com plasticidade local. Estudos subsequentes, como os de Passieux et al. (2013) e Duval et al. (2016), expandiram o uso do IGL, desenvolvendo um algoritmo baseado em um solucionador *multigrid* de três escalas para a simulação da propagação de trincas e um método de decomposição de domínio para análises em larga escala, respectivamente.

Além das simulações multiescala com MEF, outros métodos numéricos são empregados para análises específicas de problemas envolvendo concentrações de tensões ou com geometrias muito complexas. Os métodos sem malha foram desenvolvidos para reduzir a dependência da malha (Duarte e Oden, 1995; Belytschko et al., 1996; Li e Liu, 2002; Nguyen et al., 2008; Daxini e Prajapati, 2014). Nesses métodos, os pontos nodais podem ser distribuídos de maneira bastante flexível sem prejudicar a qualidade da aproximação. Pode-se assim, concentrá-los na região de interesse, sem impactar o restante da discretização. Enfrentam, contudo, dificuldades associadas à complexidade da integração numérica e à representação adequada das condições de contorno essenciais pela sua característica muitas vezes não interpoladora. O Método da Partição da Unidade (MPU) (Melenk e Babuška, 1996) e o Método das Nuvens-*hp* introduzem uma estratégia de enriquecimento para melhorar a aproximação baseada em funções PU. Esta técnica combina

as PUs com funções especialmente escolhidas para o problema, proporcionando uma flexibilidade maior na modelagem de problemas complexos e descontínuos. As funções de mínimos quadrados de Lancaster e Salkauskas (1981) usadas no MGLE (Método de Galerkin Livre de Elementos) (Belytschko et al., 1994)), foram reconhecidas no Método das Nuvens-*hp* como funções PU, permitindo uma modelagem mais precisa quando multiplicadas por funções escolhidas especificamente para o problema analisado.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), proposto por Strouboulis et al. (2000) e Duarte et al. (2000), emergiu como uma extensão do Método dos Elementos Finitos (MEF). Essencialmente, o MEFG combina a robustez do MEF clássico com a flexibilidade do Método da Partição da Unidade. Esta combinação permite que o MEFG aborde fenômenos locais complexos com precisão e eficiência. De modo semelhante Belytschko e Black (1999); Moës et al. (1999) propuseram o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE), mas de acordo com Belytschko et al. (2009), ele pode ser considerado equivalente ao MEFG, pois ambos adotam funções de interpolação do MEF para construir uma Partição da Unidade que é então enriquecida, seguindo os princípios da família de métodos MPU. As funções de enriquecimento desempenham um papel crucial, permitindo que a aproximação resultante seja capaz de capturar o comportamento de fenômenos locais, como é o caso de descontinuidades ou concentrações de tensões. Estas funções podem ser polinomiais em casos de soluções suaves ou podem assumir formas mais complexas, específicas para o comportamento do problema a ser analisado. Essas funções previamente definidas nem sempre estão disponíveis e principalmente para casos tridimensionais. Para mitigar essa limitação, Duarte et al. (2007) e Duarte e Kim (2008) propuseram a utilização de funções numericamente construídas, especialmente no contexto do MEFG com enriquecimento global-local (MEFG^{gl}).

A abordagem global-local no MEFG^{gl} divide a análise em três etapas principais:

1. Discretização Global Grosseira: Inicialmente, o problema é discretizado em todo o domínio utilizando uma malha mais grosseira. Esta etapa visa obter uma simulação

adequada do comportamento global da estrutura, sendo menos onerosa em termos de recursos computacionais.

2. **Análise Local Detalhada:** Em seguida, o problema é analisado localmente, focando em regiões de concentrações de tensões ou áreas de interesse específico. Nesta fase, tais regiões são refinadas com malhas mais densas para melhorar a precisão da simulação numérica. As condições de contorno associadas a essas regiões locais são derivadas dos resultados obtidos na etapa global.
3. **Enriquecimento Global:** Finalmente, os resultados numéricos da análise local são utilizados para enriquecer o domínio global. As funções de enriquecimento derivadas da análise local são inseridas no modelo global, permitindo uma análise final que incorpora características detalhadas das áreas críticas dentro do contexto da estrutura completa.

O desenvolvimento de métodos multiescala, tanto para análises convencionais de acoplamento quanto para simulações globais-locais utilizando o MEF, não é uma novidade. Estes métodos têm sido amplamente estudados e aplicados em uma variedade de contextos estruturais complexos. Por exemplo, Li et al. (2021, 2022) apresentaram uma estrutura computacional multiescala inovadora para o acoplamento de problemas de casca-sólido. Nesta abordagem, um problema global discretizado com elementos de casca e resolvido por um dos *solvers*, no caso o Abaqus (ABAQUS, 2014), é acoplado a um modelo em menor escala representado por elementos sólidos que permite a simulação de cada modelo (casca e sólido) empregando diferentes solucionadores (*solvers*). A conexão entre essas duas escalas é feita através de um problema intermediário em 3D, denominado de mesoescala, que é associado ao modelo de escala global por um algoritmo global-local iterativo não intrusivo, originalmente proposto por Whitcomb (1991). O Método dos Elementos Finitos Generalizados, MEFG, proporciona a associação entre os modelos de mesoescala e de escala local pela estratégia de enriquecimento global-local e é acionado para a solução do modelo meso-local por um programa próprio.

Inspirada neste procedimento e na proposta de acoplamento de Wang et al. (2014), esta tese propõe uma abordagem multidimensional de acoplamento no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local (MEFG^{gl}) para simular a propagação de fissuras. A metodologia proposta integra dois modelos numéricos distintos: um modelo com redução dimensional e um modelo com elevada dimensionalidade resolvidos em uma única plataforma computacional. O modelo com redução dimensional é responsável por simular o comportamento global da estrutura, permitindo uma análise eficiente do comportamento global da estrutura sendo denominado modelo global inferior, ou de dimensão reduzida, em alusão à redução de sua dimensionalidade. Em contraste, o modelo com elevada dimensionalidade foca em descrever fenômenos localizados de interesse, como concentrações de tensões e propagação de fissuras, em uma escala mais refinada e detalhada, exigindo uma formulação de elementos finitos dimensionalmente superior àquelas utilizadas para a representação da resposta global da estrutura. Tal modelo será referido como modelo local superior ou de elevada dimensionalidade.

No trabalho de Wang et al. (2014), esses dois modelos são acoplados por meio de um processo iterativo que garante a transição suave e precisa entre as escalas de modelagem, conectando diretamente diferentes tipos de graus de liberdade na interface entre os modelos. Embora eficiente, a abordagem de Wang et al. (2014) requer um novo acoplamento sempre que a discretização é alterada. A abordagem apresentada neste trabalho supera essa limitação ao introduzir, via MEFG^{gl}, uma escala intermediária no modelo global, denominada mesoescala, onde ocorre o acoplamento. A mesoescala oferece uma maior flexibilidade na definição do modelo local superior, permitindo mudanças no refinamento conforme a trinca propaga, sem a necessidade de redefinir o acoplamento. Este meso-modelo é definido na mesma região do modelo local e compartilha a mesma formulação de elementos finitos. O meso-modelo tem o papel crucial de fornecer uma ponte entre o modelo de dimensão reduzida e um modelo de elevada dimensionalidade (escalas globais e locais). Ele é enriquecido pelas soluções numéricas derivadas do problema local de elevada dimensionalidade, permitindo uma representação detalhada das áreas de interesse

dentro do contexto global no modelo de dimensão reduzida ao qual é acoplado. Para o acoplamento entre o modelo global de dimensão reduzida e o mesomodelo, adota-se o procedimento iterativo proposto por Wang et al. (2014). Este processo relaciona eficientemente os diferentes tipos de graus de liberdade na interface entre os modelos, assegurando uma transição suave e precisa entre as diferentes escalas de modelagem.

A título de diferenciação com a estratégia proposta, cabe salientar que a metodologia proposta em Li et al. (2022) realiza a ligação direta dos graus de liberdade entre o modelo local e o modelo global utilizando um acoplamento que difere do procedimento de McCune et al. (2000), pois é focado na cinemática em vez da energia. Em Li et al. (2022) também é criado um modelo intermediário, denominado mesomodelo, e uma compatibilização cinemática entre estes modelos é proposta por meio de expressões analíticas que relacionam os deslocamentos e forças.

Nesta tese, a metodologia proposta integra os princípios de Wang et al. (2014), mas expande o conceito ao introduzir, a exemplo dos trabalhos de Li et al. (2021, 2022), a meso-escala como um intermediário na análise global-local. Esse mesomodelo atua como uma ponte que conecta a análise global de dimensão inferior com a análise local com elevada dimensionalidade, utilizando o $MEFG^{gl}$ para o detalhamento. Ao contrário do trabalho de Li et al. (2022), em que a transferência de informações entre os modelos envolve compatibilizações específicas e iterativas devido à separação dos *solvers*, a abordagem aqui proposta resolve ambos os modelos de forma simultânea, dispensando o processo iterativo de compatibilização entre os modelos global e o conjunto meso-local.

A utilização de um modelo intermediário combinado com a estratégia $MEFG^{gl}$ oferece várias vantagens. Primeiramente, torna a discretização do modelo local superior mais flexível, garantindo uma interface única e eficiente entre os elementos do modelo global. Uma malha grosseira pode ser empregada para representar o mesomodelo, reduzindo o esforço computacional. O cálculo das equações de restrição relacionadas à interface

entre o modelo global inferior e o mesomodelo é realizado apenas uma vez, independentemente das etapas necessárias para a simulação do fenômeno de natureza local, tornando o processo mais eficiente. Se o fenômeno de interesse é a propagação de uma fissura, a abordagem permite que o modelo local superior, com uma malha refinada, seja constantemente atualizado conforme a fissura avança. Como resultado, o modelo global inferior combinado com o mesomodelo são continuamente enriquecidos pelas soluções numéricas de uma sequência de modelos locais superiores refinados, garantindo uma representação precisa do comportamento global da estrutura ao longo da propagação da fissura, sem a necessidade de recalculas as equações de restrição a cada mudança da malha.

A implementação computacional desta estratégia multidimensional MEFG^{gl} foi realizada no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*). O INSANE é um programa de código aberto desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), disponível em <https://www.insane.dees.ufmg.br>. O software é implementado em linguagem Java e utiliza a Programação Orientada a Objetos, permitindo uma estrutura modular e extensível. Inicialmente desenvolvido para análises pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) (Fonseca e Pitangueira, 2007), o INSANE foi posteriormente expandido para incluir o MEFG pelo trabalho de Alves et al. (2013) e para o MEFG^{gl} pelos esforços de Malekan e Barros (2016); Malekan et al. (2017); Santos (2018). A automação do procedimento de propagação de fissuras usada neste trabalho foi proposta por Fonseca et al. (2020).

1.1 Justificativa

As estruturas de grande porte, como aviões, pontes e torres, frequentemente apresentam geometrias complexas e estão sujeitas a concentrações de tensões em pontos específicos. Esses pontos de tensão podem resultar em danos locais que, se não identificados e tratados adequadamente, podem se propagar, comprometendo a integridade estrutural e eventualmente causando o colapso da estrutura.

Conforme discutido anteriormente, a abordagem Global-Local em análises estruturais oferece uma solução eficiente para lidar com os fenômenos locais sem a necessidade de refinar toda a malha da estrutura. Este método permite o refinamento da malha de elementos finitos apenas nas regiões onde ocorrem fenômenos locais críticos, mantendo a malha do problema global mais grosseira. Esta estratégia é amplamente adotada para estudar estruturas complexas, pois possibilita a redução do número de graus de liberdade do modelo sem comprometer a qualidade da solução. Além disso, agiliza o processo de montagem da malha e reduz o tempo de processamento das análises, tornando-a uma técnica robusta e eficaz.

A utilização de diferentes formulações de elementos, em função da escala da simulação, em um mesmo modelo de análise é possível graças aos métodos de acoplamento disponíveis para os modelos multidimensionais. Estes métodos demonstram que fenômenos localizados não precisam, necessariamente, ser descritos com o mesmo tipo de elemento utilizado no modelo global, desde que as características relevantes do problema sejam devidamente capturadas. Essa flexibilidade é essencial na análise estrutural, permitindo uma modelagem mais detalhada e precisa das áreas críticas da estrutura sem sobrecarregar computacionalmente o modelo global.

Embora as análises multidimensionais sejam comuns em softwares comerciais de elementos finitos, a integração desta abordagem com a análise global-local utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local (MEFG^{gl}) é uma inovação. Esta tese propõe desenvolver uma estratégia para simular a propagação de danos estruturais, utilizando o MEFG^{gl}. A proposta visa resolver de forma eficaz o acoplamento entre a formulação de elementos com redução dimensional, utilizada na descrição do problema global, e a formulação de elementos de alta dimensionalidade, adotada para descrever a propagação do dano no problema local.

A abordagem aqui proposta inspira-se nas propostas de Li et al. (2021) e Wang et al.

(2014), combinando o uso de mesomodelos e métodos iterativos para garantir uma representação robusta e precisa dos fenômenos estruturais em múltiplas escalas. A introdução do mesomodelo como uma ponte entre os modelos global e local proporciona uma interface única e eficiente, permitindo a adaptação contínua da malha conforme a fissura ou dano se propaga.

A pesquisa proposta tem o potencial de oferecer contribuições significativas para a análise estrutural:

1. Integração do MEF gl com a análise global-local proporcionando uma nova ferramenta para a simulação de propagação de fissuras e danos em estruturas complexas.
2. Eficiência computacional: A estratégia proposta visa otimizar o uso dos recursos computacionais, tornando possível a análise de estruturas complexas de maneira mais eficiente.
3. Precisão e detalhamento: A abordagem de acoplamento multidimensional permitirá uma descrição mais precisa dos fenômenos locais, assegurando que as análises globais e locais sejam integradas de forma coesa e eficiente.
4. Aplicabilidade em diversas indústrias: A metodologia desenvolvida possui aplicações potenciais em várias indústrias, incluindo a aeronáutica, automotiva, civil e outras áreas onde a integridade estrutural é crítica.

Portanto, esta tese justifica-se pela necessidade de uma metodologia simplificada e precisa para a análise da propagação de danos em estruturas complexas. A proposta de utilizar o MEF gl integrado com técnicas de acoplamento global-local representa um avanço significativo na capacidade de modelar e simular estruturas com alta fidelidade, contribuindo para o projeto e a manutenção dessas estruturas.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma nova metodologia que permita a solução de problemas com geometrias complexas e fenômenos relevantes para o problema confinado localmente. Nesta nova estratégia, é formulado um procedimento numérico que combina o Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}) com técnicas de acoplamento multidimensional, possibilitando o estudo detalhado da propagação de defeitos em estruturas. A metodologia visa desenvolver uma técnica robusta para simular em modelos unifilares de vigas comportamentos típicos da Teoria da Elasticidade bi e tridimensional, integrando eficientemente diferentes modelos de discretização.

1.2.2 Objetivos específicos

Como objetivo específico, tem-se:

1. Implementação da Análise Multidimensional no Sistema INSANE:

- Desenvolver e implementar no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) uma ferramenta para análise multidimensional, atualmente inexistente no sistema, permitindo a integração e solução de modelos de acoplamento.
- Garantir que a nova implementação seja modular e extensível, facilitando futuras expansões e adaptações em respostas a novos requisitos de pesquisa.

2. Combinação com o MEFG^{gl}:

- Integrar a análise multidimensional implementada com o MEFG^{gl}, desenvolvendo uma estratégia de solução que utilize elementos de diferentes dimensões nas duas escalas de solução.

3. Resolução de Problemas com Comportamentos Diferenciados:

- Utilizar o novo método desenvolvido para resolver problemas envolvendo a

combinação de diferentes modelos de discretização, tais como:

- Modelos de viga combinados com modelos de chapa, permitindo a análise do comportamento global de estruturas unifilares com a propagação bidimensional de defeitos.
- Modelos de viga combinados com modelos tridimensionais, permitindo a análise do comportamento global de estruturas unifilares com a presença tridimensional de defeitos.

4. Análise de propagação de trincas:

- Implementar e automatizar procedimentos específicos para a simulação da propagação de fissuras, garantindo que o mesomodelo e os modelos locais sejam eficientemente acoplados e enriquecidos.

1.3 Organização do texto

Seguindo este capítulo introdutório, esta tese se constitui de mais seis capítulos. O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura sobre o tema proposto, aprofundando as discussões iniciadas no capítulo 1 e descrevendo o estado da arte das diferentes abordagens investigadas. Na sequência, o capítulo 3 discute alguns detalhes das formulações empregadas na fundamentação teórica da tese com uma uma revisão dos aspectos essenciais do MEF gl e uma explicação sobre acoplamentos multidimensionais e principalmente do método iterativo de acoplamento multidimensional de elementos finitos de Wang et al. (2014). A nova abordagem proposta por este trabalho é apresentada no capítulo 4, e no capítulo 5 é discutida a plataforma sobre a qual este trabalho foi desenvolvido e as modificações realizadas. O capítulo 6 apresenta dois exemplos numéricos. Nestes exemplos, a trinca é descrita exclusivamente no problema local de elevada dimensionalidade, modelado por elementos 2D e 3D e resolvidos pelo MEF gl . No primeiro exemplo (Seção 6.1) o comportamento global da estrutura é representado por uma viga, e no segundo (Seção 6.2), por um pórtico, ambos utilizando a formulação de Timoshenko para o modelo de

dimensão reduzida. Finalmente, o capítulo 7 apresenta a conclusão e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Este capítulo tem por finalidade descrever o contexto dos temas propostos para a realização desta tese. Na seção 2.1 é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e na seção 2.1.2 como a abordagem Global-Local é inserida dentro do contexto das análises via MEFG. Sabendo que o objetivo deste trabalho é a aplicação da metodologia de análises multidimensional dentro do contexto das análises MEFG^{gl}, a seção 2.2 apresenta os aspectos relevantes sobre as análises em multiescala e sobre os métodos de acoplamento, que terão uma explicação mais aprofundada no capítulo 3.

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é uma extensão do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, que incorpora funções especiais para melhorar a aproximação da solução. Em sua essência, o MEFG combina a robustez do MEF com a flexibilidade adicional das funções de enriquecimento, permitindo a representação eficiente de problemas com características complexas como a presença de fenômenos confinados localmente.

Segundo Barros (2002), a designação MEFG apareceu pela primeira vez em Melnik (1995). Entretanto, o método também foi desenvolvido de forma independente por diferentes pesquisadores, incluindo:

- Babuska e colegas: Inicialmente sob a designação de Método dos Elementos Finitos Especiais, posteriormente como Método da Partição da Unidade (PUM) (Babuška et al., 1994; Melenk e Babuška, 1996; Babuška e Melenk, 1997), e finalmente como MEFG em Strouboulis et al. (2000) e Strouboulis et al. (2001);
- Duarte e colaboradores: Desenvolveram o método das Nuvens (Duarte e Oden, 1995; Duarte, 1996; Duarte e Oden, 1996a,b) evoluindo para o MEFG em Oden et al. (1998) e Duarte et al. (2000).

Por ser uma variação do MEF, o MEFG possui características herdadas dos métodos sem malha. Uma importante revisão bibliográfica dos métodos sem malha pode ser encontrada em Li e Liu (2002). Nesses métodos, a solução aproximada do problema é construída sem a necessidade de uma malha de elementos, baseando-se na distribuição dos pontos nodais. Segundo Barros (2002), esse enfoque é particularmente útil para evitar problemas associados à distorção de malha.

Entre as variações dos métodos sem malha, destacam-se aqueles baseados na definição da Partição da Unidade (PU). Um exemplo é o Método das Nuvens-*hp* (Duarte e Oden, 1995), no qual conjuntos de pontos, chamados de nuvens de pontos, formam a discretização do domínio do problema. Este método tem origem no Método de Galerkin Livre de Elementos (Belytschko e Black, 1999). Nestes dois métodos, a inexistência de elementos que conectem os nós faz com que a aproximação seja construída em cada posição do domínio, a partir de uma procura dos nós cujo domínio de influência (parâmetro pré-estabelecido) contenha aquela posição. A flexibilidade advinda desta estratégia conduz, por outro lado, a problemas relacionados à imposição direta das condições de contorno e à integração numérica.

No Método de Galerkin Livre de Elementos, a aproximação é melhorada com a inclusão de novos pontos no domínio ou com a introdução de novas funções à base utilizada para se construir a aproximação. Já no método das Nuvens-*hp*, procura-se o caminho mais

simples, utilizando, para isto, uma estratégia de enriquecimento em que a função de aproximação original é multiplicada por funções quaisquer, escolhidas especialmente para o problema.

Na formulação do Método de Elementos Finitos (MEF) as interpolações locais em cada elemento definem a sua aproximação, e a conectividade entre os nós dos elementos garante a continuidade da aproximação. No MEFG, as aproximações são inicialmente construídas como no MEF, ou seja, utilizando funções identificadas com uma malha de elementos. Contudo, estas funções são reinterpretadas como associadas aos nós e seus domínios de influência. O MEFG herda do Método das Nuvens-*hp* a estratégia de enriquecimento. Como resultado, problemas que ocorrem no Método das Nuvens-*hp*, relacionados à integração numérica e à imposição das condições de contorno, são superados, a aproximação ganha uma certa flexibilidade, oriunda do Método das Nuvens-*hp*, e torna-se menos propensa a sofrer os efeitos deletérios da distorção da malha. Como destacado por Alves (2012), o MEFG pode ser entendido como uma ponte entre os dois métodos, no qual, sobre um malha de elementos finitos faz-se uso de funções da Partição da Unidade, e que tem a mesma estratégia de enriquecimento proposta pelo Método das Nuvens-*hp*.

Paralelamente ao desenvolvimento do MEFG, o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE) foi introduzido por Belytschko e Black (1999) e Moës et al. (1999) para resolver problemas na Mecânica da Fratura Linear Elástica. Enquanto o MEFG adotava originalmente uma estratégia de enriquecimento global, o MEFE focava no enriquecimento apenas em partes do domínio, multiplicando as funções de Partição da Unidade por funções que capturam comportamentos singulares próximos à ponta da trinca e as descontinuidades no campo de deslocamento. Segundo Belytschko et al. (2009) e Fries e Belytschko (2010), a distinção entre MEFG e MEFE tornou-se bastante tênue, a ponto de ambos os métodos serem considerados equivalentes. Ambos baseiam-se na filosofia de enriquecimento das funções de aproximação para tratar fenômenos locais complexos com uma acurácia superior quando comparada ao MEF tradicional.

O MEFG, com suas raízes no MEF e nos métodos sem malha, representa uma evolução significativa na capacidade de modelagem e análise de estruturas. Sua flexibilidade e acurácia, especialmente quando integrado com estratégias de enriquecimento global-local, tornam-no uma ferramenta poderosa para a análise de estruturas complexas e submetidas à propagação de defeitos.

2.1.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) foi desenvolvido para superar algumas das limitações críticas associadas ao Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Problemas conhecidos do MEFG incluem o mau condicionamento do sistema de equações e dificuldades com elementos de mistura (*blending elements*), que resultam em erro significativo e comprometem as taxas de convergência. O mau condicionamento pode acumular erros de arredondamento e afetar a convergência das soluções, especialmente em casos tridimensionais (Gupta et al., 2015). Já os elementos de mistura surgem quando as funções de enriquecimento são aplicadas apenas em partes do domínio, o que impede a plena reprodução dessas funções e introduz termos parasitas (Fries e Belytschko, 2010). Essas questões são particularmente relevantes em problemas de Mecânica da Fratura, em que funções descontínuas ou trigonométricas são necessárias apenas em regiões localizadas do domínio, gerando elementos parcialmente enriquecidos e, assim, erros adicionais (Dolbow et al., 2000; Wu e Li, 2015).

O MEFGE, inicialmente proposto por Babuška e Banerjee (2012), e expandido para problemas bi e tridimensionais por Gupta et al. (2013, 2015), aborda essas limitações por meio de uma modificação relativamente simples: a subtração da função interpolante do MEF das funções de enriquecimento. Essa modificação torna o espaço das funções de enriquecimento ortogonal ao espaço das funções lagrangianas do MEF em problemas unidimensionais, e quase ortogonal em dimensões superiores (Babuška e Banerjee, 2012; Gupta et al., 2013). Essa abordagem não apenas melhora o condicionamento das matrizes associadas, tornando-o comparável ao MEF tradicional, mas também lida de maneira

mais natural com os problemas causados pelos elementos de mistura (Gupta et al., 2015). Assim, o MEFGE é capaz de garantir taxas de convergência ótimas, estabilidade no número de condicionamento e robustez contra deterioração do condicionamento conforme a descontinuidade se aproxima de nós ou arestas dos elementos (Zhang et al., 2016; Cui et al., 2022).

Desde sua proposição, o MEFGE tem demonstrado sua eficácia em uma variedade de aplicações, incluindo problemas de Mecânica da Fratura, escoamento de fluidos, interfaces em bi-materiais, além de problemas dinâmicos (Sauerland e Fries, 2013; Wu e Li, 2015; Zhang et al., 2018; Silva et al., 2022). Diversos estudos confirmaram que essa técnica não só suplantou as limitações anteriores do MEF, como também abriu novas possibilidades para a modelagem precisa e estável de fenômenos complexos (Sanchez-Rivadeneira e Duarte, 2019; Paiva, 2023).

2.1.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local

Como discutido anteriormente, a principal característica do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é a capacidade de enriquecer localmente as funções de forma do MEF com funções especiais, denominadas funções de enriquecimento (Evangelista et al., 2013). Essas funções podem ser polinomiais previamente estabelecidas ou funções especiais escolhidas com base em um conhecimento *a priori* do comportamento do problema a ser analisado.

Entretanto, em modelos que envolvem fraturas complexas tridimensionais, multiescala, o conhecimento prévio da solução é muitas vezes limitado (Gupta et al., 2012). Para resolver esse problema, Duarte e Kim (2008) propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}), que combina o Método dos Elementos Finitos Global-Local clássico, introduzido por Noor (1986), com a estratégia de enriquecimento do MEF.

Noor (1986) introduziu a estratégia global-local nas análises de elementos finitos para

reduzir o custo e tempo computacional ao representar adequadamente fenômenos locais em problemas não lineares. A estratégia consiste em duas etapas principais:

1. Etapa Global: O domínio completo, definindo o problema global, é discretizado de maneira grosseira, permitindo uma representação eficiente e rápida do comportamento global da estrutura.
2. Etapa Local: Regiões específicas do problema global, onde fenômenos de interesse ocorrem confinados localmente, são discretizadas de forma mais refinada. As condições de contorno associadas a essas regiões, denominadas problemas locais, são derivadas da solução do problema global.

A estratégia proposta por Noor (1986) é expandida ao ser concebida sob o enfoque do MEFG, fornecendo uma estrutura para enriquecer o espaço de solução do problema global com funções numericamente construídas a partir da solução do, ou dos, problemas locais (Gupta et al., 2012). Com isso, a solução do problema no MEFG^{gl} (Métodos dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local) é dividida em três etapas, em vez de duas:

1. Primeira Etapa - Problema Global Inicial: Uma discretização grosseira de todo o domínio é definida para obter a solução do problema global, sem descrever os fenômenos localizados.
2. Segunda Etapa - Problema Local: Regiões onde ocorrem fenômenos localizados são detalhadamente discretizadas. As condições de contorno para esses problemas locais são derivadas da solução do problema global inicial. A malha é refinada para representar adequadamente os fenômenos locais.
3. Terceira Etapa - Enriquecimento do Problema Global: A solução obtida no problema local é utilizada para construir as funções de enriquecimento, que são então aplicadas na nova solução do problema global enriquecido.

A Figura 2.1 representa esquematicamente como ocorre o enriquecimento global-local

em um problema bidimensional.

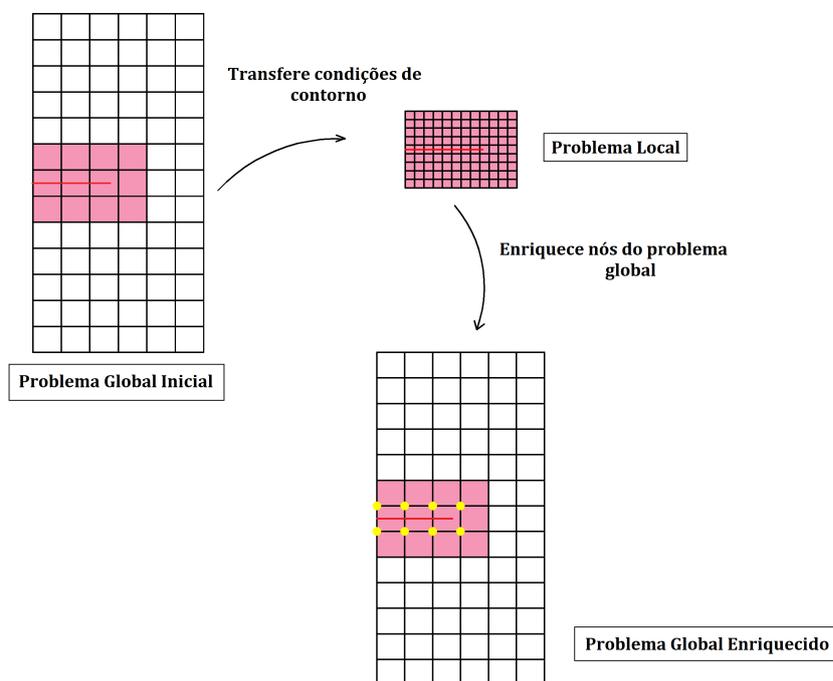


Figura 2.1: Estratégia Global-Local (Fonseca, 2019). Em amarelo são representados os nós em que a solução Local é utilizada para enriquecer a Partição da Unidade da malha Global na terceira etapa da solução do problema. No problema global a trinca está apresentada apenas a título de ilustração e já no problema local e no global enriquecido ela está sendo representada por meio de aproximação.

A diferença fundamental entre a estratégia global-local no MEF e no MEF gl , segundo Duarte e Kim (2008), é que no MEF gl as interações entre os comportamentos local e global são consideradas ao resolver o problema global com funções de enriquecimento obtidas do problema local. Portanto, características locais, como trincas, não precisam ser representadas na malha da escala global, pois são modeladas pela solução do problema local. Além disso, fraturas, danos e trincas menores que o elemento da malha global podem ser discretizados eficientemente usando este método (Kim et al., 2010).

O MEF gl vem sendo extensivamente utilizado, tendo suas aplicações avançado significativamente. Alguns exemplos incluem:

- Problemas de Trincas em Placas Sob Tração Uniaxial: Kim et al. (2008) aplicou o MEF gl em problemas de trincas em placas submetidas a tração uniaxial.

- Combinação com o MEF G^{gl} - hp : Kim et al. (2010) combinaram o MEF G^{gl} com o MEF G^{hp} (Pereira, Duarte, Guoy, e Jiao, 2009; Pereira, Duarte, Jiao, e Guoy, 2009) para resolver um problema tridimensional com três trincas discretizadas em três problemas locais distintos.
- Paralelismo Natural: Kim et al. (2011) estudaram o paralelismo natural do MEF G^{gl} distribuindo diferentes problemas locais entre processadores do sistema.
- Simulação de Placas de Concreto: Evangelista et al. (2013) utilizaram condições de contorno realistas para simular placas de concreto de aeroportos sob fundação elástica utilizando o MEF G^{gl} em problemas de trincas em múltiplas regiões.
- Interação e Aderência de Múltiplas Trincas: O'Hara, Duarte, e Eason (2016) analisaram a interação e aderência de trincas por meio do MEF G^{gl} .
- Modelagem da Termoplasticidade Localizada: Plews e Duarte (2016) aplicaram o MEF G^{gl} para modelar a termoplasticidade localizada.
- Propagação de Trincas por Fadiga: O'Hara, Hollkamp, Duarte, e Eason (2016) utilizaram o MEF G^{gl} na modelagem tridimensional da propagação de trincas por fadiga.
- Simulação Paralela de Soldas em Estruturas de Grande Porte: Li e Duarte (2018) conduziram simulações paralelas de soldas em estruturas de grande porte.
- Modelagem do MEF G^{gl} usando materiais compósitos: Mazurowski et al. (2024) usam o MEF G^{gl} para incorporar o comportamento heterogêneo e não linear de materiais em modelos de escala grosseira de forma dinâmica de forma a capturar concentrações de tensões.

O MEF G^{gl} combina o melhor das estratégias global-local com o enriquecimento flexível oferecido pelo MEF G , proporcionando uma ferramenta para a análise de estruturas complexas onde fenômenos locais precisam ser devidamente capturados sem comprometer a eficiência computacional. A seguir, serão discutidos aspectos relevantes das análises

multiescala e os métodos de acoplamento, que são fundamentais para a aplicação da abordagem proposta nesta tese.

2.2 Acoplamento multidimensional

A modelagem e análise de estruturas muitas vezes requerem o uso de elementos finitos denominado aqui, conforme (Shim et al., 2002), dimensionalmente reduzidos, como vigas, cascas e placas, para manter a eficiência computacional. No entanto, esses modelos simplificados podem não capturar adequadamente regiões com grande complexidade geométrica, de carregamento ou características de material, onde uma análise tridimensional detalhada seria necessária. Para abordar esse desafio, a análise multidimensional se mostra vantajosa, ao permitir a utilização de elementos de diferentes dimensões e com diferentes formulações matemáticas dentro de um mesmo modelo.

A modelagem multidimensional requer métodos de acoplamento que combinem elementos finitos de dimensões variadas, como vigas-placas, placas-sólidos e vigas-cascas, em um único modelo estrutural (Wang et al., 2014). A escolha do método de acoplamento adequado é crucial para garantir a compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio das tensões na interface entre os diferentes elementos.

Existem duas abordagens principais nas estratégias de acoplamentos: o acoplamento de volume e o acoplamento de superfície. O acoplamento de volume é realizado usando o método de Arlequin (Dhia e Rateau, 2005), que envolve a superposição de dois modelos na região de interesse, utilizando multiplicadores de Lagrange para garantir a compatibilidade e o equilíbrio. Este método é adequado para acoplamentos de diferentes modelos físicos (Bauman et al., 2008; Wellmann e Wriggers, 2012; Wang et al., 2014), mas pode ser excessivamente complexo para acoplamentos estruturais de elementos finitos de diferentes dimensões.

O acoplamento de superfície conecta diretamente elementos de diferentes dimensões através de suas interfaces. Algumas abordagens destacadas incluem:

- Método Multiplicador de Lagrange: Introduce variáveis adicionais no problema, o que pode complicar a solução.
- Método da Penalidade: Requer a escolha de um parâmetro de penalidade adequado, o que pode ser desafiador, introduzindo um aspecto numericamente empírico na análise.
- Método de Elementos de Transição: Considerado eficaz para acoplamentos diversos (casca-sólido, viga-sólido, viga-casca) (Yu et al., 2012). No entanto, aplica-se apenas a acoplamentos um para um dos nós e exige formulações específicas para cada caso.
- Método de Restrição em Múltiplos Pontos (MPC): Define restrições de deslocamento entre nós dos elementos na interface, oferecendo flexibilidade e acurácia.

O método MPC, conforme descrito por Felippa (2004), apresenta duas variações: rígido e deformável. O primeiro impõe o mesmo deslocamento entre os nós dos elementos de dimensões diferentes. O acoplamento entre os nós dos elementos pode ser interpretado como uma conexão por uma barra com elevada rigidez, de valor superior à rigidez dos elementos do modelo. A desvantagem existente é a significativa perturbação criada no campo de tensões na região da interface devido à imposição direta de deslocamentos, criando, com isso, uma interface rígida entre os modelos. Já no método de restrições deformáveis, o MPC deformável, são definidas constantes de ponderação para distribuir os esforços entre os nós dos elementos da interface. Essa ponderação é realizada através dos coeficientes de restrição. Segundo Wang et al. (2014), a imprecisão da escolha dos coeficientes de restrições, devido a suposições incorretas sobre a distribuição de tensões na interface, pode levar a perturbações no comportamento da solução ao longo da interface.

Diversas metodologias foram sugeridas para determinar os coeficientes de restrição utilizando o MPC deformável no contexto das análises multidimensionais. Com base na hipótese de distribuição de tensões na interface, autores como McCune (1998); Armstrong, Bridgett, Donaghy, McCune, McKeag, e Robinson (1998); Armstrong, McCune, e

Robinson (1998); McCune et al. (2000) conseguiram determinar coeficientes de ponderação ao igualar o trabalho realizado pelas forças em ambos os lados ao longo da interface dos diferentes elementos. Esses coeficientes são essenciais para garantir a compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio das forças na seção analisada. Utilizando os resultados da teoria da flexão de placas de Reissner (Reissner, 1947), McCune et al. (2000) demonstraram a viabilidade de obter conexões adequadas entre elementos de placas e vigas, além de placas e sólidos, por meio de equações de restrição em múltiplos pontos. A solução é baseada na introdução de uma variação de tensões, proporcionada pela escolha apropriada da teoria de viga, placa ou casca na seção transversal da interface (Yu et al., 2012). Embora teoricamente considerado um método exato para a solução de diferentes tipos de interfaces, ele é limitado, pois as equações são específicas para cada tipo de problema, dependendo do modelo de elementos e da própria malha utilizada na interface, demandando uma análise individualizada para cada acoplamento. Aproveitando o método desenvolvido por McCune et al. (2000), Shim et al. (2002) automatizou o método no *software* comercial ABAQUS para gerar análises menos dispendiosas, avaliando acoplamentos entre viga-sólido, viga-casca e casca-sólido. No entanto, a abordagem da automação utilizada é restrita em seu escopo e deve ser modificada para cada situação de acoplamento analisado. Além disso, Yu et al. (2012), usando também o método de McCune et al. (2000), desenvolveram uma técnica inovadora de acoplamento entre modelos de chapa e viga, utilizando como exemplo uma estrutura de treliça de paredes finas.

Em contraste com a abordagem de McCune et al. (2000), Wang et al. (2014) propuseram um novo método de acoplamento utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. Nesta nova metodologia, Wang et al. (2014) atingem os mesmos coeficientes identificados anteriormente, porém de maneira iterativa, genérica e mais fácil de reproduzir numericamente. O princípio dos trabalhos virtuais é aproveitado para obter, na interface, tanto as equações de restrição das forças quanto as de deslocamento. O cálculo dessas equações, que garantem a compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio das tensões na interface do modelo multidimensional, é realizado por um método iterativo, compatível com diversos códigos

comerciais de elementos finitos. Este método foi aplicado para analisar três problemas estruturais distintos, utilizando o acoplamento entre modelos de viga-chapa, viga-casca e viga-sólido, incluindo análises não lineares. Um detalhamento a respeito será apresentado no capítulo 3

Outras estratégias de acoplamento também podem ser destacadas. Ruess et al. (2014) e Yamamoto et al. (2019) aplicaram o método de Nitsche (Nitsche, 1971) para acoplar cascas a elementos sólidos e cascas finas isogeométricas a outras estruturas de cascas. Por fim, Yang et al. (2021) conduziram uma análise multidimensional de sólido-casca utilizando uma técnica de acoplamento isogeométrica FE-BE (*Finite Element - Boundary Element*). Neste caso, as equações MPC foram determinadas igualando o trabalho realizado pelas tensões no contorno dos elementos isogeométricos de casca de Reissner-Mindlin ao trabalho realizado pelas tensões no contorno de acordo com o IGABEM (*Isogeometric Boundary Element Method*) (Simpson et al., 2012) baseado em estratégia de colocação.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Este capítulo tem por objetivo apresentar os aspectos teóricos relevantes para a realização deste trabalho. Na seção 3.1, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é discutido apresentando-se sua formulação. Já na seção 3.1.2 é destacado o equacionamento do MEFG para a construção da função de enriquecimento sob a abordagem Globa-Local e na seção 3.2 as funções de enriquecimento descontínuas e singulares são apresentadas. A seção 3.3 aborda a Mecânica da Fratura Linear Elástica e o procedimento para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão no contexto deste trabalho. Por fim, a seção 3.4 disserta sobre a construção das equações de restrição para as análises com acoplamento multidimensional.

3.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

A característica principal do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é o uso da Partição da Unidade (PU) associada a um conjunto de elementos finitos.

A partição da unidade pode ser definida como um conjunto de funções cujos valores somam a unidade em cada posição x no domínio, e o problema a ser analisado é que definirá o tipo de função PU a ser utilizada.

O emprego das funções convencionais de MEF (como as funções Lagrangianas) facilita a aplicação do método, verificando diretamente as condições de contorno, ao contrário

do que normalmente ocorre no Método das Nuvens-*hp* (Barros, 2002) do qual o MEF_G deriva a estratégia de enriquecimento da aproximação. Assim, aplicando-se as funções de forma convencionais, para qualquer ponto do domínio do problema, e n pontos nodais, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.1)$$

Uma das características herdadas do Método das Nuvens-*hp* pelo MEF_G é o conceito de nuvens ou parcelas de elementos, que são definidas como uniões de elementos finitos que partilham um mesmo nó no domínio.

Para uma compreensão melhor dessas nuvens de elementos, as funções de Lagrange podem ser representadas como indicado na Fig. 3.1.

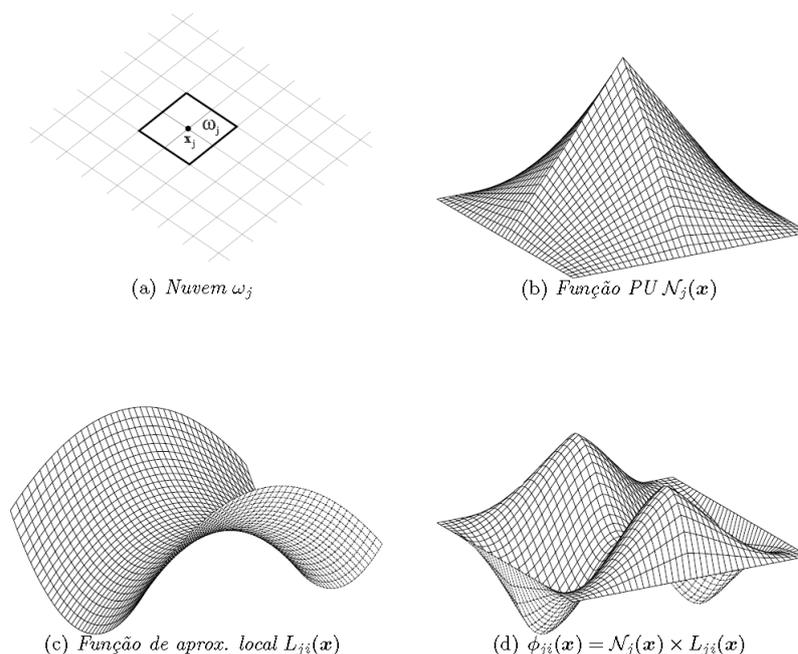


Figura 3.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j via MEF_G (Barros, 2002).

Dado um ponto nodal do domínio, representado por \mathbf{x}_j na Fig. 3.1.a, a nuvem associada a este nó é representada pelo conjunto de elementos que contêm este mesmo ponto (indicada por ω_j na Fig. 3.1.a), fazendo com que a nuvem seja a união dos elementos que formam o suporte da PU vinculada ao respectivo nó (Fig. 3.1.b).

Assim, para a formulação do Método dos Elementos Finitos Generalizados, as funções de enriquecimento, conhecidas como funções de aproximação local, Fig. 3.1.c, e oriundas das estratégias do Método das Nuvens-*hp*, multiplicam as funções de Partição da Unidade (PU), formando, então, a função de aproximação, como indicado pela Fig. 3.1.d.

Desta forma, pode-se definir, a partir da Fig. 3.1, a nuvem de elementos ω_j , associada ao ponto nodal \mathbf{x}_j , as funções de Lagrange obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$, associadas à região ω_j , as funções de aproximação local $L_{ji}(\mathbf{x})$ e o resultado da multiplicação entre as duas funções.

Estas funções de aproximação local, escolhidas a partir de um conhecimento prévio da natureza do problema, devem construir um conjunto de q_j funções linearmente independentes e são definidas para cada ponto nodal \mathbf{x}_j como:

$$I_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (3.2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$

Estas funções, multiplicadas pelas funções de PU, ampliam o espaço de aproximação original de elementos finitos, que passa a ter como base um conjunto das funções de aproximação $\phi_{ji}(\mathbf{x})$, associado a cada nó \mathbf{x}_j :

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (3.3)$$

sem somatório em j .

Segundo Alves (2012), as funções de forma do MEFG herdam o suporte compacto da Partição da Unidade garantindo a continuidade da aproximação e as características da função de enriquecimento local. Com isso, uma função genérica para a aproximação do problema (no caso um campo de deslocamentos \mathbf{u}) é obtida pela combinação linear das funções de forma de MEF e MEFG:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ji} \right\} \quad (3.4)$$

onde n é o número de nós e \mathbf{u}_j é o parâmetro associado aos graus de liberdade do MEF e \mathbf{b}_{ji} são os novos graus de liberdade, criados pelos enriquecimentos associados ao MEFGE.

3.1.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

O MEFGE é desenvolvido a partir de uma modificação local do enriquecimento característico do MEFG. A essência dessa modificação está na remoção de termos redundantes que aparecem na Partição da Unidade (PU), eliminando as projeções das funções de enriquecimento no espaço funcional da PU. Em seguida, assim como no MEFG, essas funções de enriquecimento modificadas são multiplicadas pelas funções de forma da PU, gerando as novas funções de forma do método (ver Figura 3.2).

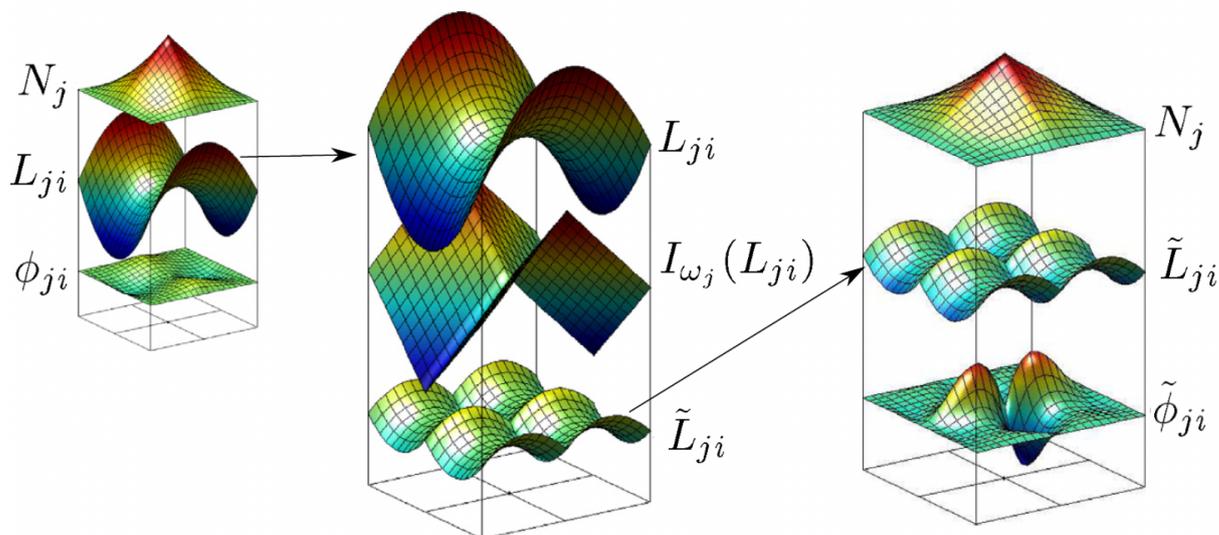


Figura 3.2: Construção de funções de forma do MEFGE. À esquerda, tem-se o enriquecimento empregado no MEFG. No centro, a modificação do enriquecimento é exibida. À direita, apresenta-se a construção da função de forma associada ao MEFGE (Gupta et al., 2013).

Esta abordagem, conforme descrito por Gupta et al. (2013), matematicamente ajusta o enriquecimento para uma implementação mais eficiente e estável.

$$\tilde{L}_{ji} = L_{ji} - I_{\omega_j}(L_{ji}) \quad (3.5)$$

onde $I_{\omega_j}(L_{ji})$ é a função interpoladora (ou interpolante) definida por:

$$I_{\omega_j}(L_{ji})(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) L_{ji}(\mathbf{x}_k) \quad (3.6)$$

na qual \mathbf{x}_k é o vetor de coordenadas do nó k do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ; n é o número de pontos nodais do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ; e $L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ é a função enriquecedora original do MEFGE, definida na equação 3.2.

A construção das funções de forma do MEFGE é análoga ao MEFGE e definida pela Equação:

$$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})_{i=1}^{q_j} \quad (3.7)$$

sem somatório em j .

A aplicação da estratégia estável no enriquecimento numericamente obtido no MEFGE^{gl} foi proposta e avaliada em termos de condicionamento, taxas de convergência e precisão na cálculo de fatores de intensidade de tensão em Gupta (2014) e denominada Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável com Enriquecimento Global-Local (MEFGE^{gl}).

3.1.2 MEFGE com Enriquecimento Global-Local

Como dito anteriormente, o MEFGE utiliza de funções devidamente escolhidas para expandir a base de aproximação de elementos finitos já existentes. Essas funções de enriquecimento podem ser quaisquer, tais como uma função polinomial, uma função que represente uma singularidade, como as funções de trinca a serem detalhadas na Seção 3.2, ou mesmo uma função resultante de um outro processo de solução, como acontece na técnica Global-Local associada ao MEFGE, técnica muito utilizada quando há fenômenos geradores de concentração de tensão, que estão localmente confinados.

A técnica Global-Local no MEEG apresenta três etapas de análise distintas, o problema Global inicial, o problema Local e, por fim, o problema Global Enriquecido. Apesar de semelhantes, cada uma dessas análises apresentam especificidades que são apresentadas a seguir, segundo Kim et al. (2008), e adaptadas de acordo com a implementação presente no sistema INSANE.

3.1.2.1 Formulação do Problema Global Inicial

Considere um problema de elasticidade bidimensional, com domínio, identificado como Global, representado por $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$, e cujo contorno é decomposto em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$ com $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$, sendo u e σ referentes às regiões em que as condições de contorno de Dirichlet e Neumann são respectivamente aplicadas, segundo as Eqs. (3.8) e (3.9).

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_G^u \quad (\text{homogênea por simplificação mas sem perda de generalidade}) \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em} \quad \partial\Omega_G^\sigma \quad (3.9)$$

sendo \mathbf{n} o vetor unitário normal em $\partial\Omega_G^\sigma$, $\bar{\mathbf{t}}$ o vetor das tensões de superfície prescritas, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões.

A relação constitutiva é dada pela Lei de Hooke Generalizada, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}$, onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo de rigidez elástica e $\boldsymbol{\epsilon}$ é o tensor de deformações, considerando o material elástico-linear. A equação de equilíbrio da Teoria da Elasticidade, considerando, por simplificação, forças de corpo ausentes, é dada por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega_G \quad (3.10)$$

Definidas as Eqs. (3.8), (3.9) e (3.10), a solução aproximada do problema Global inicial

é dada por $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ através da seguinte equação, construída a partir de sua forma fraca, obtida pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)}$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G^0) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^0 dS \quad (3.11)$$

A esquerda da igualdade da Equação (3.11) está representando o trabalho das forças internas, enquanto que à direita o das forças externas. $\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G , construído com as funções de forma do método discreto utilizado (MEF ou MEFM) e cujas funções verificam a eq. (3.8). Os símbolos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ correspondem aos tensores que representam o campo de deformações e o campo de tensões, respectivamente. \mathbf{v}_G^0 refere-se à função tentativa.

3.1.2.2 Formulação do Problema Local

Considere o subdomínio Local $\bar{\Omega}_L = \Omega_L \cup \partial\Omega_L$ contido no domínio Global $\bar{\Omega}_G$. Após a solução da primeira etapa global inicial, e o resultado obtido, $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$, busca-se a solução do problema local $\tilde{\mathbf{u}}_L$, tal que:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall \mathbf{v}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L)}$$

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L dS = \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L dS + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \kappa \tilde{\mathbf{u}}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L dS \quad (3.12)$$

Tem-se que $\tilde{\chi}_L(\Omega_L)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido no domínio local, Ω_L , construído usando as funções de forma do método discreto utilizado (MEF ou MEFM). L refere-se aos parâmetros locais e G aos parâmetros globais e η é o parâmetro de penalidade.

Na construção do problema Local, de acordo com Kim et al. (2010), existem três estratégias de transmissão das condições de contorno a partir da solução do problema Global para o Problema Local, são elas:

- Condições de contorno de Neumann: utiliza-se $\eta = 0$ e são transmitidas informações de tensões das arestas do elemento global para as arestas do elemento local coincidentes com o contorno local que não coincide com o contorno global ($\partial\Omega_L \setminus \partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G$).
- Condições de contorno de Dirichlet: adota-se um $\eta \gg 1$, tornando irrelevante a aplicação de tensões ($\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0)$), desta maneira apenas informações de deslocamentos são efetivamente transmitidas das arestas do elemento global para as arestas do elemento local coincidentes com o contorno local que não coincide com o contorno global ($\partial\Omega_L \setminus \partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G$).
- Condições de contorno de Cauchy: equivale à combinação dos dois tipos anteriores. Nesse caso utiliza-se um valor de η intermediário, transmitindo, do domínio global, deslocamentos e tensões para o contorno do domínio local. Segundo Kim et al. (2010), uma boa aproximação para η é:

$$\eta = \frac{E}{\sqrt[d]{V_0 J}} \quad (3.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, d é a dimensão do problema analisado, V_0 é o volume do elemento no sistema paramétrico e J o Jacobiano da transformação do elemento global cuja aresta origina o elemento local da malha.

3.1.2.3 Formulação do Problema Global Enriquecido

Ao fim do problema Local, a solução $\tilde{\mathbf{u}}_L$ encontrada é utilizada para uma nova análise do problema Global. Essa solução será usada como enriquecimento da Partição da Unidade do problema Global de forma a obter a sua solução $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$.

A função de aproximação local $L_{ji}(\mathbf{x})$ será a função definida por $\tilde{\mathbf{u}}_L$, e a Eq. (3.3) pode ser reescrita como:

$$\{\phi_{ji}^l\} = \{\mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \tilde{u}_L^l\} \quad (3.14)$$

onde l refere-se a cada componente segundo os eixos cartesianos para um problema de dimensão d .

Para se obter a solução do problema Global Enriquecido, $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$, tem-se que:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^E \in {}^0\tilde{\chi}_G^E(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^E \in \tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)}$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G^E) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^E dS \quad (3.15)$$

${}^0\tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G , construído pelas funções de aproximação originais do problema global e pelo seu produto pelas funções de enriquecimento oriundas da solução do problema local e que verificam a equação (3.8).

A precisão do MEF gl é fortemente influenciada pela qualidade da solução numérica do problema local, que, por sua vez, é condicionada às condições de contorno derivadas do problema global inicial. O'Hara et al. (2009) apontam que, em problemas com gradientes localizados, podem haver erros excessivos no problema global inicial, levando a condições de contorno inadequadas no problema local. Nesses casos, o erro local não pode ser corrigido apenas por refinamentos de malha ou enriquecimentos nodais. Para superar essa limitação, os autores propõem ciclos global-local adicionais, onde a solução do problema global enriquecido é usada para atualizar as condições de contorno no problema local, que então retroalimenta o problema global. Esse processo pode ser repetido até a convergência.

3.2 Funções de enriquecimento para representação de trin-cas

No Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), as funções Lagrangianas tipicamente empregadas no MEF clássico, $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$, definem a Partição da Unidade (PU) usada para construir o espaço de enriquecimento. Este espaço é abrangido por um conjunto de funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ obtida pelo produto de cada PU e das funções de enriquecimento $\{L_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$, como indicado na Equação (3.3).

Nem toda $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$, associada com um nó \mathbf{x}_j é multiplicada por uma função de enriquecimento. Como mencionado na Seção 3.1, vários tipos de funções de enriquecimento também podem ser usadas, polinomiais ou não polinomiais, dependendo da característica da solução a ser representada. Neste trabalho, uma trinca no modelo local de dimensão superior é representada por uma combinação de funções de enriquecimento descontínuas e singulares, detalhadas a seguir.

3.2.1 Funções de Heaviside

A função de Heaviside, denotada por $H(\mathbf{x})$, é uma função matemática descontínua amplamente utilizada em várias áreas da engenharia e da física para representar transições bruscas ou descontinuidades. Proposta para o MEF por Moës et al. (1999), é definida da seguinte forma:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

onde ξ representa a posição em relação à descontinuidade assumida em $\xi = 0$ (Figura 3.3).

Essa característica de "salto" na sua definição torna a função de Heaviside uma ferramenta

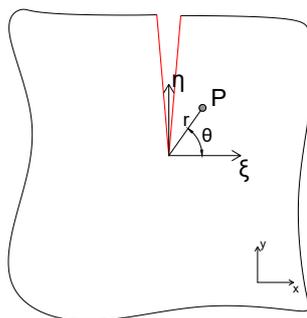


Figura 3.3: Eixos em duas dimensões associados com a ponta da trinca.

valiosa na modelagem de fenômenos onde ocorrem mudanças instantâneas, como a abertura ou fechamento de trincas em materiais sólidos.

Em problemas da Mecânica da Fratura, a função de Heaviside é frequentemente utilizada para enriquecer o espaço de soluções em métodos numéricos, permitindo uma representação mais precisa das descontinuidades no campo de deslocamento ao redor da trinca. No Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), a função de Heaviside pode ser empregada para capturar a mudança abrupta no deslocamento de um lado da trinca para o outro, proporcionando uma modelagem mais fiel dos efeitos da fratura no material.

3.2.2 Funções de Enriquecimento com Derivadas Singulares

As funções de enriquecimento com derivadas singulares são uma ferramenta essencial no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Estas funções melhoram a precisão na solução dos campos de tensões e deslocamentos em regiões com alta concentração de tensões e deformações, típicas do entorno de pontas de trincas, onde o comportamento não é suave e o enriquecimento polinomial se mostra insuficiente.

Como forma de reproduzir a singularidade no campo de tensões produzidas pela ponta da trinca, neste trabalho foram utilizadas as funções conhecidas como OD que derivam da teoria da elasticidade (Szabó e Babuška, 1988). Essas funções foram utilizadas para problemas bidimensionais em Oden e Duarte (1997) e para problemas tridimensionais em Duarte et al. (2000).

Para entendimento das funções OD, considera-se um modelo espacial 3D cuja a borda está representada na Figura 3.4. Nela a abertura entre as duas superfícies é dada pelo ângulo $(2\pi - \alpha)$ e associada à borda tem-se o sistema local de coordenadas cartesiano (ξ, η, ζ) e o sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, ζ') , ambos com a mesma origem (O_x, O_y, O_z) (Duarte et al., 2000). No caso de trinca tem-se $\alpha = 2\pi$ e as duas superfícies se encontram.

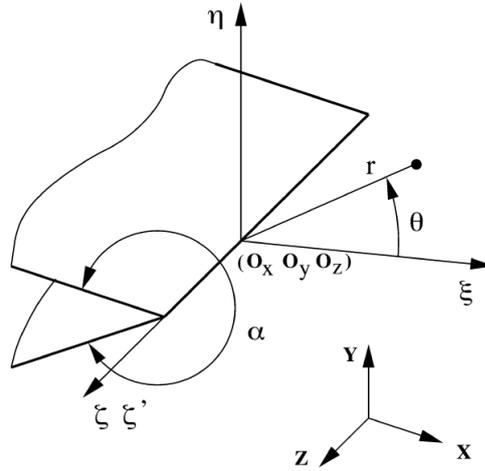


Figura 3.4: Sistemas de coordenadas associado com um borda espacial em 3D (Duarte et al., 2000).

Na vizinhança da borda, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(r, \theta, \zeta')$ pode ser descrito como:

$$\mathbf{u}(r, \theta, \zeta') = \begin{Bmatrix} u_{\xi}(r, \theta) \\ u_{\eta}(r, \theta) \\ u_{\zeta}(r, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j^{(1)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(1)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(1)}(r, \theta) \\ 0 \end{Bmatrix} + A_j^{(2)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(2)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(2)}(r, \theta) \\ 0 \end{Bmatrix} + A_j^{(3)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\zeta j}^{(3)}(r, \theta) \end{Bmatrix} \right] \quad (3.17)$$

no qual (r, θ, ζ') são as coordenadas cilíndricas relativas ao sistema mostrado na Figura (3.4), $u_{\xi}(r, \theta)$, $u_{\eta}(r, \theta)$ e $u_{\zeta}(r, \theta)$ são as componentes do vetor \mathbf{u} nas direções ξ -, η - e ζ -, respectivamente, os índices (1), (2) e (3) referem-se às contribuições associadas aos modos I, II e III de abertura de trinca, e j está associado a cada termo da série representativa.

Assumindo que o modelo está livre de tensões na face em que ocorre a trinca e desconsiderando as forças de corpo, as funções, para cada termo j , $u_{\xi j}^{(1)}$, $u_{\eta j}^{(1)}$, $u_{\xi j}^{(2)}$ e $u_{\eta j}^{(2)}$ são dadas, segundo Duarte et al. (2000), por:

$$u_{\xi j}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa - Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(1)} \theta - \lambda_j^{(1)} \cos(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (3.18)$$

$$u_{\xi j}^{(2)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa - Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \operatorname{sen} \lambda_j^{(2)} \theta - \lambda_j^{(2)} \operatorname{sen}(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (3.19)$$

$$u_{\eta j}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa + Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \operatorname{sen} \lambda_j^{(1)} \theta + \lambda_j^{(1)} \operatorname{sen}(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (3.20)$$

$$u_{\eta j}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa + Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(2)} \theta + \lambda_j^{(2)} \cos(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (3.21)$$

Para o caso de trincas, onde $\alpha = 2\pi$, tem-se que $\lambda_j^{(1)} = \lambda_j^{(2)} = \lambda_j$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{j+1}{2} \quad j \geq 2 \quad (3.22)$$

Para este trabalho para que a solução satisfaça o equilíbrio e as condições de contorno do problema, para o caso da singularidade introduzida por fissura fechada, é considerado apenas o primeiro termo da série, $j = 1$, o que implica em $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,5$ e $Q^{(1)} = Q^{(2)} = -1, 0$.

As constantes do material κ e G são:

$$\kappa = \begin{cases} (3 - 4\nu) & \text{Estado Plano de Deformação (também adotado no caso 3D)} \\ \frac{(3-\nu)}{1+\nu} & \text{Estado Plano de Tensão} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.24)$$

onde ν é o coeficiente de *Poisson*, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e G é o módulo de elasticidade transversal.

A partir da expansão do modelo 2D para 3D, define-se a parcela do vetor de deslocamento \mathbf{u} na direção ζ -. Considerando novamente que a face da trinca está livre de tensão, apenas o primeiro termo da série ($j = 1$) e desconsiderando forças de corpo, tem-se que $u_{\zeta 1}^{(3)}$, da Equação (3.17), pode ser definido por:

$$u_{\zeta 1}^{(3)} = \begin{cases} \frac{r^{\lambda_1^{(3)}}}{2G} \text{sen} \lambda_1^{(3)} \theta \\ \frac{r^{\lambda_1^{(3)}}}{2G} \text{cos} \lambda_1^{(3)} \theta \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $\lambda_1^{(3)}$:

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{\pi}{\alpha} \quad (3.26)$$

Finalmente, é necessária a transformação das coordenadas locais para o Sistema Global (x, y, z) . Primeiramente, as coordenadas cilíndricas (r, θ, ζ') do vetor \mathbf{u} são transformadas para coordenadas cartesianas locais (ξ, η, ζ) e posteriormente, para as coordenadas cartesianas globais (x, y, z) :

$$\begin{bmatrix} u_x^{(1)} & u_x^{(2)} \\ u_y^{(1)} & u_y^{(2)} \\ u_z^{(3)} & u_z^{(3)} \end{bmatrix} = R_2 \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{\xi 1}^{(1)} & \tilde{u}_{\xi 1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\eta 1}^{(1)} & \tilde{u}_{\eta 1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\zeta 1}^{(3)} & \tilde{u}_{\zeta 2}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Sendo que:

$$R_2 = (R_2^{-1})^T \quad (3.28)$$

no qual R_2^{-1} é a matriz de transformação de coordenadas, cujas linhas são os vetores de base do sistema de coordenadas local (ξ, η, ζ) , Duarte et al. (2000). Assim, a matriz resultante da Equação (3.27) representa as funções de aproximação locais a serem utilizadas no MEFG.

É importante destacar que a formulação apresentada para funções de enriquecimento com derivadas singulares está generalizada para modelos tridimensionais, mas é adaptável a modelos bidimensionais. Para isso, basta eliminar as contribuições das funções nas coordenadas $-z$ global e $-\zeta$ local.

A partir da Equação (3.4), a aproximação do campo de deslocamentos, com os enriquecimentos de função de trinca, fica da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j + \sum_{j \in I_d} \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j + \sum_{j \in I_s} \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) U_{OD}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_j \quad (3.29)$$

no qual I_d e I_s seriam os conjuntos de índices dos nós enriquecidos com as funções descontínuas (Heaviside) ou de trinca (singulares), respectivamente. $U_{OD}(\mathbf{x})$ e \mathbf{D}_j , são dados por:

$$U_{OD} = \begin{bmatrix} u_x^{(1)} & 0 & 0 & u_x^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & u_y^{(1)} & 0 & 0 & u_y^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u_z^{(1)} & 0 & 0 & u_z^{(2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_j = \begin{Bmatrix} j d_x^{(1)} \\ j d_y^{(1)} \\ j d_z^{(1)} \\ j d_x^{(2)} \\ j d_y^{(2)} \\ j d_z^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

3.3 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A análise do comportamento das trincas neste estudo será realizada no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Esse campo considera que a zona plástica ao

redor da ponta da trinca é desprezível em relação ao comprimento total da trinca, permitindo que os princípios da elasticidade linear sejam aplicáveis. Dentro da MFLE, o principal parâmetro para a análise é o Fator de Intensidade de Tensão, K , que quantifica a intensidade do campo de tensões próximo à ponta da trinca e é essencial para prever o crescimento e a propagação da trinca em materiais sólidos.

Existem três modos principais de abertura de trinca, dependendo do tipo de carregamento aplicado (Figura 3.5). O Modo I, também conhecido como modo de abertura ou tração, refere-se a uma trinca que se abre perpendicularmente à sua configuração da trinca devido a uma solicitação de tração, sendo caracterizado pelo parâmetro K_I . O Modo II, ou modo de deslizamento, está associado a uma solicitação de cisalhamento, resultando em um deslocamento paralelo à configuração da trinca, e é descrito pelo parâmetro K_{II} . Além desses, há o Modo III, conhecido como modo de rasgamento, que resulta em um deslocamento transversal descrito pelo parâmetro K_{III} .

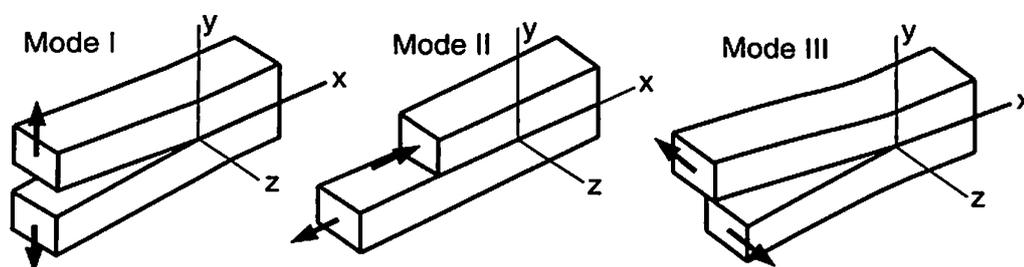


Figura 3.5: Modos básicos de deslocamento das superfícies da trinca (Dowling, 2007).

A determinação dos campos de deslocamento e de tensões nas proximidades da ponta da trinca estende os conhecimentos obtidos da teoria da elasticidade aplicada a problemas bidimensionais. A combinação dos modos I, II e III produz a solução geral para o campo de tensões e deformações próximo à ponta da trinca. Esta abordagem permite a análise precisa do comportamento da trinca e a previsão de sua propagação sob diferentes condições de carregamento, fornecendo uma base sólida para a avaliação da integridade estrutural e a prevenção de falhas em materiais e componentes estruturais.

3.3.1 Procedimento para o cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão segundo o método da Integral de Interação

O cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizado neste trabalho baseia-se no método energético da Integral de Interação, proposto por Yau et al. (1980). Trata-se de um método formulado a partir das leis de conservação da Teoria da Elasticidade e de relações fundamentais da Mecânica da Fratura.

Para problemas planos em modo misto de abertura, a Integral J pode ser expressa em termos dos fatores de intensidade de tensão da seguinte forma:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (3.31)$$

onde E^* é definido em termos do módulo de elasticidade, E , e do coeficiente de Poisson, ν , como:

$$E^* = \begin{cases} E, & \text{para Estado Plano de Tensão} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{para Estado Plano de Deformação} \end{cases} \quad (3.32)$$

Considerando os estados de tensão e de deformação, a integral J é definida para um contorno Γ como:

$$J = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.33)$$

Dois estados independentes de equilíbrio são considerados. O estado 1, representado pelo índice 1, corresponde ao estado corrente do modelo, obtido após o seu processamento, e o estado 2, indicado pelo índice 2, é definido como um estado de equilíbrio auxiliar, escolhido a partir das soluções assintóticas para os Modos I e II de abertura. A integral J , da Equação (3.33), para a superposição de dois estados de equilíbrio é dada por:

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \left(\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} \right) \delta_{1j} - \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \frac{\partial \left(u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \right)}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.34)$$

onde x_1 e x_2 correspondem aos eixos das abscissas e das ordenadas do sistema cartesiano de coordenadas adotado e \mathbf{n}_j corresponde ao vetor unitário normal ao contorno Γ , conforme Figura 3.6. $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\epsilon_{ij}^{(1)}$ e $u_i^{(1)}$ indicam os campos de tensões, deformações e deslocamentos do estado 1, resultantes da análise com a presença da trinca. $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\epsilon_{ij}^{(2)}$ e $u_i^{(2)}$ representam os campos de tensões, deformações e deslocamentos do estado 2.

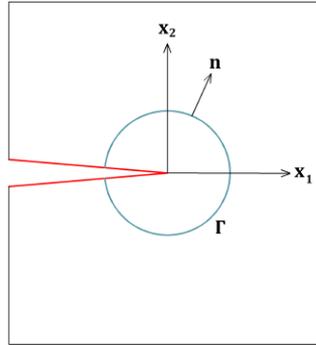


Figura 3.6: Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da Integral de Interação, considerando uma trinca representada em vermelho (Fonseca, 2019).

Após reordenamento dos termos da Equação (3.34), obtém-se:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (3.35)$$

no qual o símbolo $I^{(1,2)}$ é definido como a Integral de Interação para os estados 1 e 2, e é dado por:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.36)$$

$W^{(1,2)}$ refere-se à energia de deformação de interação:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (3.37)$$

Reescrevendo Equação (3.31) para a combinação dos dois estados de equilíbrio:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.38)$$

Igualando a Equação (3.38) à Equação (3.35) obtém-se a seguinte relação entre a Integral de Interação e os fatores de intensidade de tensão:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.39)$$

A partir de uma escolha adequada para o estado auxiliar 2 pode-se obter expressões finais para K_I e K_{II} . O estado auxiliar 2 definido como Modo I puro, com $K_I^{(2)} = 1$ e $K_{II}^{(2)} = 0$, gera o modo I do fator de intensidade de tensão para o estado 1 em termos da Integral de Interação:

$$K_I^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{(1, \text{Modo I})} \quad (3.40)$$

De forma similar, a partir da definição do estado 2 como o de Modo II pura, com $K_{II}^{(2)} = 1$ e $K_I^{(2)} = 0$, obtém-se uma expressão para K_{II} :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{(1, \text{Modo II})} \quad (3.41)$$

A integral de linha definida pela Equação (3.36) não se apresenta como a mais adequada para uma análise utilizando elementos finitos planos. Portanto, é realizada uma transformação da integral de linha em uma integral de área equivalente, a partir da multiplicação do integrando por uma função $q(x)$ suficientemente suave e unitária no interior de Γ . Reduzindo este contorno, no limite, à ponta da trinca e aplicando o teorema da divergência, obtém-se a Integral de Interação como uma integral de área:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (3.42)$$

O domínio A é definido como um conjunto de elementos finitos situados ao redor da ponta da trinca. Segundo Moës et al. (1999) este conjunto deve ser formado pelos elementos que contêm, pelo menos, um nó no interior de um círculo de raio r_d com centro na ponta da trinca. Um valor típico para r_d é dado pelo dobro do comprimento característico (para o caso bidimensional definido como a raiz quadrada da área) do elemento finito que contém a ponta da trinca. O processo de seleção desses elementos é ilustrada na Figura 3.7.

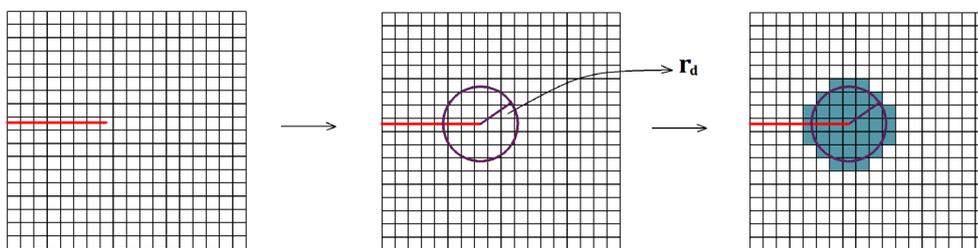


Figura 3.7: Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração para o cálculo da Integral de Interação. Os elementos selecionados são destacados em azul. (Fonseca, 2019).

Definido o domínio A, pode-se explicitar a função de ponderação q . Moës et al. (1999) sugerem que tal função assuma o valor unitário para os nós localizados no interior do círculo definido por r_d e valor nulo nos nós externos a esse círculo. Apenas os elementos cortados pela circunferência de raio r_d irão de fato contribuir para o cálculo de $I^{(1,2)}$, já que nos demais elementos internos ao círculo $\frac{\partial q}{\partial x_j} = 0$. Detalhes sobre os campos $\sigma_{ij}^{(2)}$ e $u_i^{(2)}$ podem ser encontrados em Fonseca (2019).

3.4 Acoplamento multidimensional

As análises multidimensionais envolvem a descrição de modelos com elementos de formulações e dimensões variadas. Para uma análise adequada desses modelos, é essencial que o acoplamento entre eles seja estabelecido com base na compatibilidade de deslocamentos e no equilíbrio das tensões. Como explicado na seção 2.2, diversos métodos de

acoplamento são propostos para obter resultados satisfatórios nas análises multidimensionais. Neste trabalho, destaca-se o Método de Restrição em Múltiplos Pontos (MPC) deformável, por realizar a distribuição dos esforços por algum critério de ponderação, e cujo desenvolvimento será abordado nesta seção, seguindo a explicação de Felippa (2004). O detalhamento deste método visa embasar a discussão sobre a estratégia de acoplamento adotada neste trabalho.

3.4.1 Método de Restrição em Múltiplos Pontos (MPC)

Em uma análise estrutural, ao se prescrever deslocamentos em determinados nós, cria-se a chamada restrição em único grau de liberdade. Assim, uma componente nodal de deslocamento é igual a um valor prescrito deste deslocamento.

Seja o seguinte exemplo, associado à descrição de uma estrutura em \mathbb{R}^2 :

$$u_x^j = 0, \quad u_y^k = a \quad (3.43)$$

onde j e k referem-se aos nós e a é uma constante real não nula.

A equação (3.43) contém duas restrições; a primeira prescreve um deslocamento nulo na direção x para o nó j e o segundo um deslocamento de a na direção y para o nó k , ambos graus de liberdade da discretização da estrutura.

Com base nesse conceito, as restrições em múltiplos graus de liberdade (MFC - *MultiFreedom Constraints*) são definidas como equações que conectam dois ou mais componentes de deslocamento a um valor prescrito comum. Como exemplo, tem-se:

$$u_x^k = \frac{1}{2}u_y^k, \quad u_x^k - 2u_x^j + u_x^l = b \quad (3.44)$$

As equações de restrição podem ser classificadas como lineares quando as componentes de deslocamento se relacionam linearmente, ou não lineares caso contrário. Além disso,

uma equação pode ser considerada homogênea se a relação entre os deslocamentos depender de uma constante nula, caso contrário é considerada não-homogênea. Quando as equações de MFC conectam apenas componentes de deslocamentos de nós diferentes, são denominadas equações de restrição em múltiplos pontos (MPC - *Multipoint Constraint*).

Ao considerar os critérios de classificação acima descritos, a primeira das equações de (3.44) é identificada como linear e homogênea, mas não se enquadra como uma equação de MPC devido a se restringir apenas aos deslocamentos do nó k em x e y . Por outro lado, a segunda equação é classificada como linear e não homogênea devido à presença de uma constante não nula. Adicionalmente, ela também pode ser denominada como uma equação de MPC, pois envolve a relação entre distintos graus de liberdade.

Em diversos casos, é mais conveniente expressar as equações de restrição no formato matricial. Tomando como exemplo a segunda equação de (3.44), pode-se representá-la como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^k \\ u_x^j \\ u_x^l \end{bmatrix} = b \quad (3.45)$$

que apresentada de forma mais genérica, pode ser substituída por:

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = g \quad (3.46)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ é o vetor dos graus de liberdade que participa das restrições, $\bar{\mathbf{a}}$ é o vetor que contém os respectivos coeficientes para cada um dos deslocamentos listados em $\bar{\mathbf{u}}$ e g representa a constante.

Em muitos problemas é mais conveniente expandir os vetores da Eq. (3.45) de maneira a identificar todos os graus de liberdade do modelo. Se a Eq. (3.45) pertence a um modelo bidimensional de elementos finitos com 6 nós, e assim com 12 graus de liberdade, e k , j e l representam, respectivamente, os nós 2, 4 e 6 do modelo, tem-se sua forma expandida

como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{xi} \\ u_{yi} \\ \vdots \\ u_{x6} \\ u_{y6} \end{bmatrix} = b \quad (3.47)$$

E a notação matricial fica:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = g \quad (3.48)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{a} e são os vetores que contêm todos os graus de liberdade e os respectivos coeficientes das equações de MPC de todos os nós do modelo, na forma expandida.

Em um mesmo modelo de elementos finitos pode-se definir vários MPC, que podem ser reunidos em uma só relação matricial. Se em um problema bidimensional com n nós, no qual definiu-se mais de duas equações MPC no formato da Eq. (3.48), é possível reorganizar todas as equações em um único sistema:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u} = g_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u} = g_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{u} = g_m \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ \vdots \\ u_{yn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (3.49)$$

Neste caso, como o modelo possui $2n$ graus de liberdade e m equações de restrições, a matriz \mathbf{A} tem o tamanho de $m \times 2n$, sendo $\mathbf{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$ os coeficientes dos graus de liberdade para a i -ésima equação MPC.

Quando são impostas restrições de deslocamento entre os nós em um modelo de elementos finitos, é necessário incluir as equações MPC na análise do modelo. Para incorporar essas restrições na análise, ajustes são feitos na montagem da matriz de rigidez do método numérico. Existem três metodologias distintas que inserem as equações MPC na solução do problema, são elas: o método de eliminação por dependência, o método da penalidade e o método multiplicadores de Lagrange.

No método de eliminação por dependência, os nós envolvidos em cada MPC são classificados em dependentes e independentes. Os graus de liberdade dependentes são eliminados das equações do modelo global, resultando em equações modificadas que não incluem esses graus de liberdade dependentes. No método da penalidade, cada equação MPC é considerada como um elemento estrutural elástico fictício, chamado de elemento de penalidade, que liga os nós que participam da equação, impondo a restrição entre eles. Este elemento estrutural é associado a um peso, e a restrição tende a ser mais exata quanto maior for este peso. Este elemento de penalidade cria uma nova equação de rigidez que é adicionada à equação de elementos finitos global, que pode então ser resolvido. O método Multiplicador de Lagrange se assemelha ao método da penalidade, porém essa conexão entre os nós que participam da equação de restrição é considerada rígida, no lugar de flexível e o que liga os nós são pares de forças de reação iguais e contrárias, as forças de restrição. Essas forças são então incorporadas na equação de elementos finitos.

O método de eliminação por dependência é o mais simples dentre os métodos, e usado por McCune et al. (2000) e Wang et al. (2014) em seus respectivos trabalhos assim como nesta tese, e será detalhado a seguir.

3.4.1.1 Método de eliminação por dependência

No método de eliminação por dependência, para cada equação de MPC, deve-se escolher quais são os graus de liberdade independentes e os dependentes. Desta forma, no equacionamento do problema global, um novo vetor de graus de liberdade será montado, onde todos os graus de liberdade dependentes serão eliminados, restando os graus de liberdade

independentes e os graus de liberdade que não participam das equações de MPC.

Generalizando o exemplo sugerido por Felippa (2004), tem-se um problema de barra uniaxial, discretizado com uma malha de elementos finitos com $(n - 1)$ barras e conectados com n nós, como ilustrado pela Fig. 3.8. Na figura u_i e f_i representam, respectivamente, o deslocamento e a força nodal do grau de liberdade i .

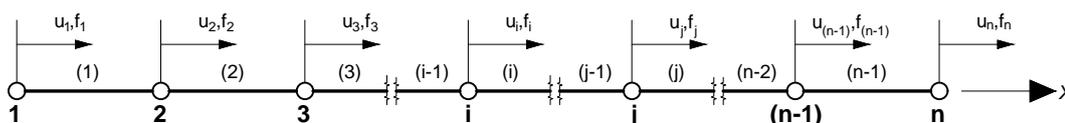


Figura 3.8: Problema unidimensional discretizado com $(n-1)$ elementos finitos de barra (Generalizada de Felippa (2004))

No problema da Fig. 3.8, suponha uma equação de MPC do tipo:

$$u_2 - u_j = 0 \rightarrow u_2 = u_j \quad (3.50)$$

impondo u_j como o grau de liberdade dependente e u_2 como o independente.

Relacionando os n graus de liberdade do problema, com um novo conjunto, onde o grau de liberdade dependente é eliminado, tem-se:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{(n-1)} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{(n-1)} \\ u_n \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Criando uma nova relação de transformação para o problema:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.52)$$

onde \mathbf{u} é o vetor que contém todos os graus de liberdade do modelo, $\hat{\mathbf{u}}$ o vetor de deslocamentos modificado, sem o grau de liberdade dependente e \mathbf{T} é a matriz de transformação do modelo.

A equação geral para este problema de elementos finitos pode ser considerada como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & k_{33} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{ij} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{jj} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{(n-1)(n-1)} & k_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{(n-1)n} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{(n-1)} \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_{(n-1)} \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

e, de maneira reduzida:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.54)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos e \mathbf{f} o vetor de forças.

Substituindo a Eq. (3.52) na Eq. (3.54), e multiplicando ambos os lados por \mathbf{T}^T :

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (3.55)$$

Fazendo $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ e $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}$, o novo sistema de equações, modificado para o modelo que inclui a equação de MPC (3.50) fica:

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}} \quad (3.56)$$

E o novo sistema de equação linear para o problema que possui um grau de liberdade dependente fica da forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} + k_{jj} & k_{23} & \cdots & k_{ij} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & k_{33} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & k_{ij} & 0 & \cdots & k_{ii} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{(n-1)(n-1)} & k_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{(n-1)n} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{(n-1)} \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 + f_j \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{(n-1)} \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Na solução deste novo sistema de equações, com $(n - 1)$ equações e, portanto, $(n - 1)$ incógnitas, o valor de u_j é obtido ao se calcular a relação da Eq. (3.50).

Essa mesma solução pode ser usada para modelos mais gerais, onde várias equações de MPC lineares são definidas para um mesmo modelo de elementos finitos.

3.4.2 Método de Acoplamento

Na vinculação dos nós dos diferentes elementos que compartilham uma interface, define-se uma equação de restrição contendo os deslocamentos dos nós dessa interface, estabelecendo uma equação do tipo MPC. Ao montar um modelo de acoplamento usando o método MPC deformável, deseja-se encontrar os coeficientes de ponderação mais adequados que relacionam os deslocamentos da interface, e que possibilitem a montagem da matriz \mathbf{A} definida na Eq. (3.49), com todas as restrições do modelo.

Para o equacionamento do método de acoplamento em modelos multidimensionais distintos, McCune et al. (2000) estabelecem a igualdade do trabalho realizado pela tensão

na interface do modelo. Nesta estratégia de acoplamento, são utilizadas inicialmente dois modelos, um de viga e outro de chapa (modelo plano de tensão), em cuja interface de contato é definido:

$$W_B = W_P \quad (3.58)$$

onde W_P é o trabalho realizado pelas forças nodais na interface da chapa (do inglês *plate*, mas referente ao estado plano de tensão) e W_B o trabalho realizado pelas forças nodais na interface da viga (do inglês *beam*, referente à formulação de Euler Bernoulli), que podem ser definidos como:

$$W_P = \int_A (\sigma_x U + \tau_{xy} V) dA \quad (3.59)$$

em que σ_x é a componente normal do campo de tensões e τ_{xy} a componente de cisalhamento, atuantes na chapa, enquanto que U e V são deslocamentos correspondentes, respectivamente, às forças infinitesimais $\sigma_x dA$ e $\tau_{xy} dA$, e sobre as quais o trabalho é realizado. Por sua vez:

$$W_B = Pu + Qv + M\theta \quad (3.60)$$

onde P , Q e M , são, respectivamente a força axial, a força cortante e o momento fletor atuantes na viga, e correspondentes aos deslocamentos u , v e θ .

A relação proposta por McCune et al. (2000) estabelece através da imposição de (3.58) uma conexão direta entre os deslocamentos da viga e o campo de deslocamento da chapa, gerando os coeficientes necessários para as equações de restrição do MPC deformável. Isso assegura a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de esforços na interface. No entanto, como explicado na Seção 2.2, este é um método oneroso, pois depende dos tipos de elementos que compõe a interface e também da quantidade de nós destes elementos, e com isso, para cada mudança, uma nova equação (3.58) deve ser calculada

analiticamente.

Para o desenvolvimento de um método iterativo para o cálculo dos coeficientes das equações de restrição, Wang et al. (2014) utilizam o mesmo exemplo de acoplamento entre uma chapa e uma viga de modo que as equações de restrição de deslocamento possam ser expressas como:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{C}\mathbf{u}_P \rightarrow \mathbf{u}_B - \mathbf{C}\mathbf{u}_P = 0 \quad (3.61)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamentos, $\mathbf{u}_B = \{u \ v \ \theta\}^T$ é o vetor com os deslocamentos dos nós da viga e $\mathbf{u}_P = \{U \ V\}^T$ o vetor de deslocamento dos nós da chapa.

O termo $\mathbf{C}\mathbf{u}_P$ pode ser interpretado como os deslocamentos generalizados dos nós da chapa que são equivalentes à \mathbf{u}_B na interface. Desta forma, a matriz \mathbf{C} é a responsável por ponderar a contribuição de cada um dos graus de liberdade dos nós da chapa, garantindo que o deslocamento dos nós da viga corresponda de forma consistente ao deslocamento da chapa na interface, da mesma forma que a matriz \mathbf{A} presente na Equação (3.49).

Usando o princípio dos trabalhos virtuais, Wang et al. (2014) definem que em um acoplamento qualquer, a soma dos trabalhos virtuais realizados pelas forças correspondentes na interface entre dois tipos de elementos deve ser zero:

$$\delta W_P + \delta W_B = 0 \quad (3.62)$$

onde δW_P é o trabalho virtual realizado pelas forças nodais na interface da chapa e δW_B o trabalho virtual realizado pelas forças nodais na interface da viga, que podem ser definidos como:

$$\delta W_P = \int_A (\sigma_x \delta u_P + \tau_{xy} \delta v_P) dA = \sum_{j=1}^{Nelementos} \int_{A_j} (\sigma_x \mathcal{N}_j \delta \mathbf{u}_{Pj} + \tau_{xy} \mathcal{N}_j \delta \mathbf{v}_{Pj}) dA = \delta \mathbf{u}_P^T \mathbf{F}_P \quad (3.63)$$

para a chapa e,

$$\delta W_B = \delta u_B P + \delta v_B Q + \delta \theta_B M = \delta \mathbf{u}_B^T \mathbf{F}_B \quad (3.64)$$

para a viga. Onde σ_x e τ_{xy} são as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. $\delta \mathbf{u}_P$ é o vetor de deslocamentos virtuais da chapa e $\delta \mathbf{u}_B$ o vetor de deslocamentos virtuais para a viga. \mathbf{F}_P e \mathbf{F}_B são vetores de forças nodais na interface da chapa e da viga, respectivamente. \mathcal{N}_j é a função de forma do elemento; $\delta \mathbf{u}_{Pj}$ e $\delta \mathbf{v}_{Pj}$ são deslocamentos nodais virtuais.

Substituindo as Eqs. (3.63) e (3.64) na Eq. (3.62), tem-se:

$$\delta \mathbf{u}_P^T \mathbf{F}_P + \delta \mathbf{u}_B^T \mathbf{F}_B = 0 \quad (3.65)$$

Expressando a equação de restrição de deslocamentos à partir dos deslocamentos virtuais na interface:

$$\delta \mathbf{u}_B = \mathbf{C} \delta \mathbf{u}_P \quad (3.66)$$

e substituindo a Eq. (3.66) na Eq. (3.65), tem-se:

$$\delta \mathbf{u}_P^T \mathbf{F}_P + \delta \mathbf{u}_P^T \mathbf{C}^T \mathbf{F}_B = 0 \quad (3.67)$$

uma equação que vale para qualquer deslocamento virtual arbitrário, e que resulta em:

$$\mathbf{F}_P + \mathbf{C}^T \mathbf{F}_B = 0 \rightarrow \mathbf{F}_P = -\mathbf{C}^T \mathbf{F}_B \quad (3.68)$$

Assim, Wang et al. (2014) conseguem relacionar as forças generalizadas entre os nós da interface, definindo a matriz C^T , como sendo uma matriz de distribuição de esforços do nó da viga para os nós da chapa na interface, contendo os coeficientes da equação de restrição de esforços. Além disso, percebe-se que a matriz de coeficientes que relaciona as forças é a transposta da matriz que relaciona os deslocamentos, equação (3.61).

Wang et al. (2014), então, desenvolvem um método numérico para definir, iterativamente, a matriz de coeficientes da equação de restrição de forças (C^T). Com isso, a matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamentos (C) pode ser encontrada, garantindo a compatibilidade de deslocamentos e as condições de equilíbrio de tensões na interface.

3.4.2.1 Método Numérico de Acoplamento de Wang et al. (2014)

Dado um modelo multidimensional de acoplamento chapa-viga, a interface é definida pelos modelos de dimensões diferentes nos quais deseja-se compatibilizar os esforços e deslocamentos, como indicado na Figura 3.9. Neste caso, o modelo com redução de dimensionalmente corresponde àquele discretizado pelo elemento de viga, enquanto que o modelo com elevada dimensionalidade é discretizado pelos elementos de chapa em Estado Plano de Tensão.

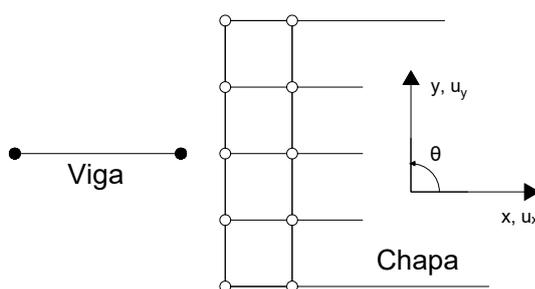


Figura 3.9: Interface de Acoplamento Chapa-Viga, adaptado de Wang et al. (2014), para elementos planos quadrilaterais do tipo Q4 (quatro nós) conforme utilizado nessa tese

Identificada a interface, uma subestrutura é extraída diretamente do modelo de elementos finitos da chapa, Fig. 3.10, que é utilizada para a criação do modelo de forças nodais (MFN).

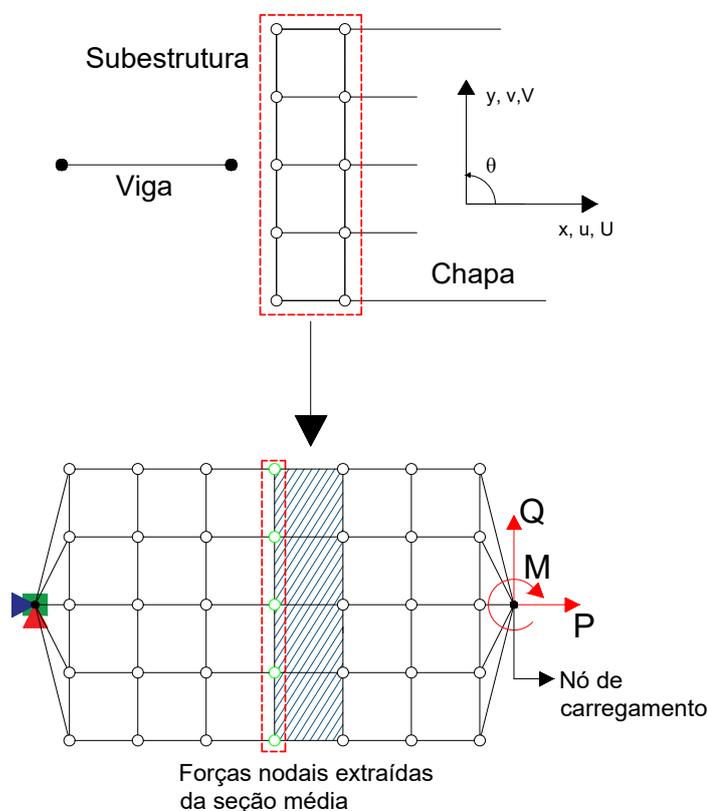


Figura 3.10: Subestrutura da chapa na interface extraída para a criação do Modelo de Forças Nodais, adaptado de Wang et al. (2014)

O modelo de forças nodais é formado pela repetição da subestrutura usando a mesma malha e tipo de elemento. Este novo modelo deve ser longo o suficiente de modo a evitar efeitos de perturbação de tensão e deformação próximo ao local de aplicação do carregamento. No método numérico proposto por Wang et al. (2014), define-se o tamanho do MFN como maior ou igual a cinco vezes a maior dimensão dos elementos que compõem a subestrutura.

Em cada um dos dois extremos do MFN um nó de carregamento é estabelecido no centro das seções. Para calcular a resposta do modelo de forças nodais, um dos nós recebe carregamentos unitários (forças e momentos) e o nó da outra extremidade é restringido completamente. Como a viga não é retratada no MFN, estes nós da extremidade têm como objetivo reproduzir o nó da viga na interface. Os carregamentos unitários aplicados, fazem

referência a cada um dos três graus de liberdade do elemento de viga (u , v e θ).

A fim de obter a matriz de coeficientes para a equação de restrição, Wang et al. (2014) empregam um procedimento iterativo no modelo de forças nodais visando o cálculo dos coeficientes. Este processo permite o cálculo das forças nodais da chapa na interface com alta precisão, determinando a distribuição de esforços entre os nós dos modelos na interface.

Na primeira iteração, são empregadas conexões rígidas, com o intuito de ligar o nó de carregamento a todos os nós da seção da extremidade correspondente, utilizando as equações de restrições em múltiplos pontos (MPC) rígidas. Estas conexões rígidas condicionam os deslocamentos entre os graus de liberdade conectados, permitindo a transmissão dos carregamentos unitários aplicados.

A análise é conduzida individualmente para cada carregamento unitário. No modelo em estudo, a viga, isso corresponde a um valor unitário para uma força cortante (Q), uma força normal (P) e um momento fletor (M).

Voltando a Figura 3.10, a cada aplicação de uma dessas forças no nó de carregamento e após a solução do modelo de forças nodais, extrai-se dos elementos centrais (hachurados) os deslocamentos nodais obtidos, dando a eles o nome de \mathbf{u}_{SE} (SE está associado à subestrutura). Este vetor de deslocamentos é multiplicado pela matriz de rigidez \mathbf{K}_{SE} , obtendo o vetor de forças nodais na seção média (\mathbf{f}_{SE}). A matriz \mathbf{K}_{SE} é extraída dos elementos de chapa que compõem a interface do modelo chapa-viga (Figura 3.9).

$$\mathbf{f}_{SE} = \mathbf{K}_{SE}\mathbf{u}_{SE} \quad (3.69)$$

Esse vetor de forças nodais é definido como o vetor de forças da chapa na interface, se aplicada uma força unitária na viga. Em Wang et al. (2014) define-se que o vetor \mathbf{f}_{SE} também corresponde aos coeficientes da equação de restrição de esforços. Assim, com os vetores de forças calculados para cada um dos carregamentos unitários, a matriz \mathbf{C}^T , da

relação (3.68), pode ser obtida e, conseqüentemente, a matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamentos (\mathbf{C}).

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{SE,Fx} & \mathbf{f}_{SE,Fy} & \mathbf{f}_{SE,M\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{SE,Fx}^T \\ \mathbf{f}_{SE,Fy}^T \\ \mathbf{f}_{SE,M\theta}^T \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Na primeira análise do MFN, a conexão rígida é utilizada para associar os nós do modelo de chapa ao nó de carregamento, o que não gera bons resultados. A partir da segunda análise, o modelo de forças nodais é recalculado. A conexão rígida é substituída pela conexão deformável e a matriz de coeficientes \mathbf{C} , encontrada na análise anterior, é utilizada na equação MPC deformável. Os vetores de forças nodais calculados nesta segunda análise serão utilizados para montar a nova matriz de coeficientes e este procedimento continua até que se tenha uma convergência dos valores dos coeficientes dentro de uma tolerância pré-definida.

A matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamento obtida na última iteração do modelo de forças nodais é então transferida para o modelo principal chapa-viga, finalizando o acoplamento. O fluxograma da Fig. 3.11 resume o processo iterativo para o cálculo dos coeficientes de restrição para o método de acoplamento proposto por Wang et al. (2014).

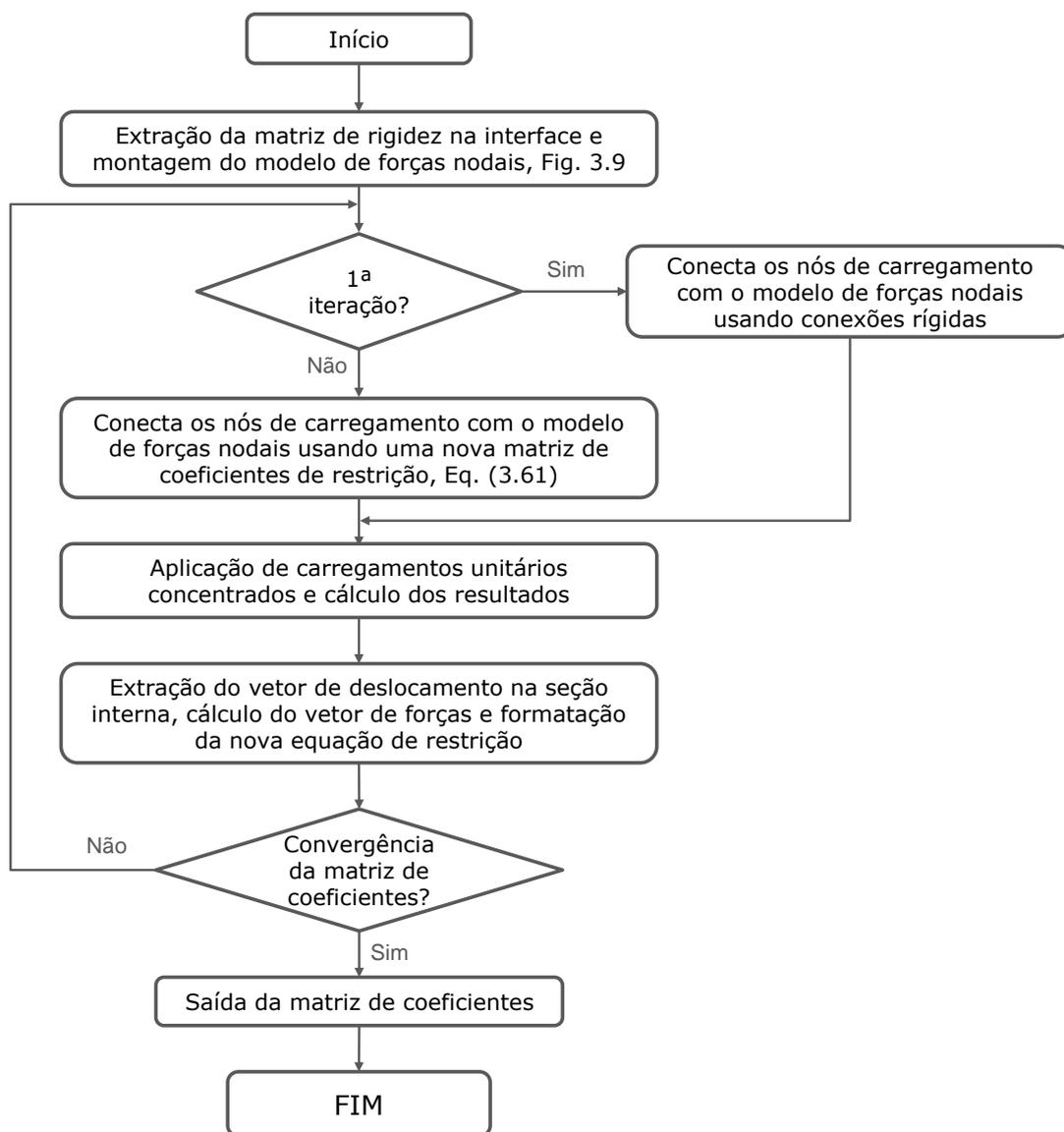


Figura 3.11: Processo iterativo para a obtenção da matriz de coeficientes da equação de restrição (Wang et al., 2014)

Capítulo 4

Análise multidimensional via MEFG^{gl} para propagação de trinca

A partir das fundamentações teóricas expostas nos Capítulos 2 e 3, este capítulo apresenta a estratégia proposta, que é a análise multidimensional da propagação de trinca utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}).

4.1 Procedimentos de Solução

O método proposto combina a estratégia global-local do MEFG com um procedimento iterativo de acoplamento multidimensional de elementos finitos. O procedimento será ilustrado neste capítulo por meio de um problema teórico de referência, em que se pretende simular a propagação de uma trinca ao longo da altura de uma viga submetida à flexão (Figura 4.1). Para este fim, dois modelos numéricos são considerados. O primeiro, responsável por representar a flexão da viga, é discretizado por uma malha de elementos de dois nós de viga de Timoshenko. Este é o modelo com redução dimensional, ou inferior, (M_I). O segundo modelo considerado, em comparação com o primeiro, como de elevada dimensionalidade, ou modelo superior (M_S), é representado por uma malha de elementos quadriláteros em estado plano de tensão e abrange a região onde ocorre a propagação da trinca. No desenvolvimento deste trabalho, foi adotado o modelo de Timoshenko para a representação do modelo M_I . Enquanto os elementos de Euler-Bernoulli

possuem uma formulação de classe C_1 , garantindo a continuidade das derivadas das funções de forma, os elementos de Timoshenko utilizam uma formulação C_0 . Essa característica permite associar a partição da unidade de maneira direta ao elemento e favorece o processo de enriquecimento empregado no MEF G .

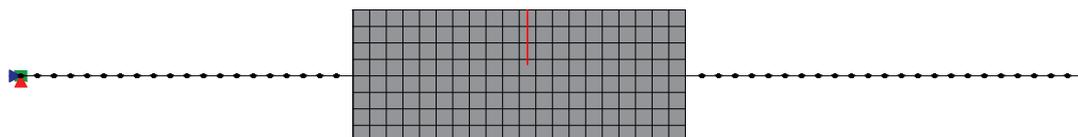


Figura 4.1: Viga multidimensional engastada em balanço

Para garantir a compatibilidade de deslocamentos e tensões na interface entre os dois modelos, é empregado o procedimento iterativo de Wang et al. (2014), que utiliza o método de acoplamento de MPC deformável. O método proposto por Wang et al. (2014) depende exclusivamente da posição dos nós e da configuração dos elementos na interface. Se houver alterações na malha de elementos que afetem a discretização ao longo da interface, um novo acoplamento deve ser realizado.

A fim de superar as limitações inerentes à necessidade de reformulação do acoplamento sempre que a malha é alterada, esta tese propõe a introdução de um modelo intermediário envolvendo o M_S , denominado mesomodelo. Esse mesomodelo assume o papel do modelo global em uma análise pelo MEF G^{gl} , seção 3.1.2, em que o modelo local, no qual se propaga a trinca, é o M_I . Esse modelo intermediário proporciona uma flexibilidade significativa na definição e no refinamento do modelo M_S , que acompanha a propagação da trinca sem que seja necessário reestruturar o processo de acoplamento, que é realizado entre os modelos M_I e o mesomodelo, a cada etapa. O mesomodelo é definido na mesma região do modelo local e adota a mesma formulação de elementos finitos, desempenhando um papel central no acoplamento entre o M_I e o M_S (ver Figura 4.2). Três escalas de análise são, então, empregadas. M_I passa a ser entendido como o modelo global com redução dimensional. M_S é o modelo local de elevada dimensionalidade. Entre os dois modelos,

relacionando-se entre si, está o mesomodelo de elevada dimensionalidade.

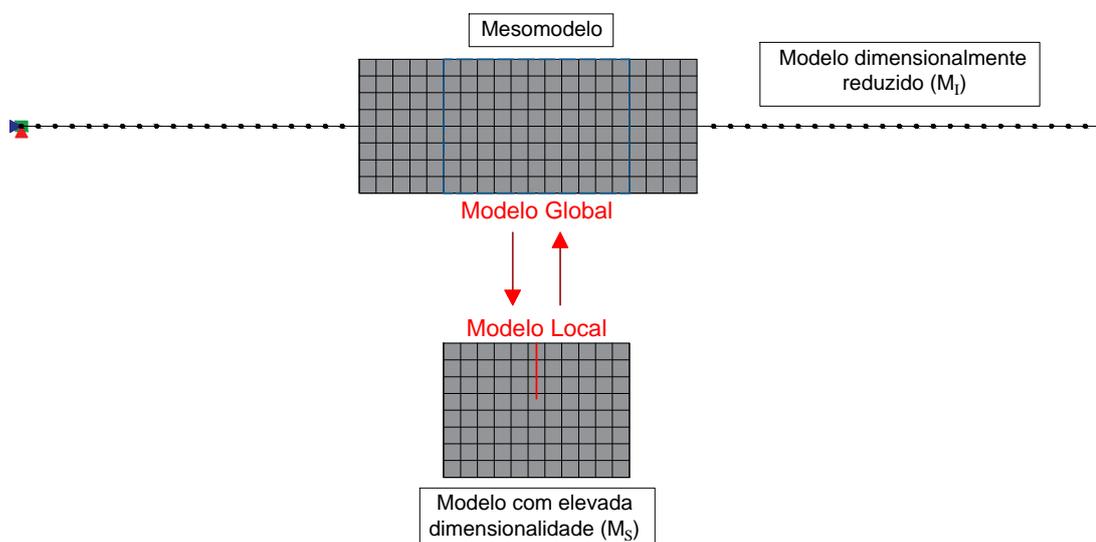


Figura 4.2: Viga multidimensional engastada em balanço com as três escalas de análise empregada no novo método proposto

O procedimento $MEFG^{gl}$ aqui empregado permite que a mesoescala seja enriquecida com soluções do modelo local de elevada dimensionalidade, oferecendo uma representação detalhada das áreas de interesse, enquanto mantém a consistência entre o mesomodelo e o M_I . O $MEFG^{gl}$ possui a capacidade de fornecer uma aproximação acurada e mantenedora de uma discretização constante na interface, mesmo à medida que a trinca se propaga.

A aplicação do procedimento iterativo descrito por Wang et al. (2014) é realizada para relacionar eficientemente os graus de liberdade na interface entre os modelos M_I e o mesomodelo, e assegurando uma transição suave entre as respostas globais e locais.

A combinação do mesomodelo com a estratégia $MEFG^{gl}$ traz vantagens significativas. Uma das principais é a flexibilidade no refinamento do modelo local, garantindo uma interface única e eficiente com o modelo global de dimensão reduzida. Além disso, o uso de uma malha relativamente grosseira para o mesomodelo contribui para a redução do esforço computacional. O cálculo das equações de restrição na interface entre o modelo global e o mesomodelo é realizado uma única vez, mantendo-se válido ao longo das etapas de simulação do fenômeno de interesse, o que otimiza o processo de simulação da

propagação da trinca ou de qualquer outro fenômeno localmente confinado que se deseja representar.

4.2 Descrição da Estratégia

Embora a estratégia proposta nesta tese adote a metodologia desenvolvida por Wang et al. (2014), conforme detalhada na Seção 3.4.2.1, e seja aplicada ao modelo ilustrativo semelhante, o acoplamento entre viga e chapa, a formulação será apresentada de maneira genérica. Para isso, utiliza-se a notação M_I para representar o modelo de redução dimensional, onde I refere-se ao termo inferior, e M_S para o modelo de elevada dimensionalidade, com S derivado do termo superior. Essa notação padronizada permite uma compreensão mais ampla da estratégia proposta, facilitando sua aplicação a diferentes cenários de acoplamento multidimensional e destacando a generalidade da abordagem desenvolvida.

O passo inicial do procedimento proposto consiste na definição do modelo de mesoescala na região previamente identificada como propensa à propagação da trinca, incluindo a determinação das dimensões desse mesomodelo. Após esta definição, a matriz de coeficientes C (Equação (3.70)) associada com a interface entre o mesomodelo e o M_I precisa ser calculada a partir do procedimento criado por Wang et al. (2014) e descrito na Seção 3.4.2.1, tendo como base o Modelo de Forças Nodais, MFN, representado na Fig. 4.3. O acoplamento na interface entre elementos de diferentes dimensões é conseguido por meio da imposição de equações de restrição, utilizando o método de eliminação por dependência (Felippa, 2004), conforme explicado na Seção 3.4.1.1.

A relação entre os nós dependentes e independentes na interface é representada pela matriz de transformação T , conforme a Equação (3.52). Nesta equação os nós dependentes pertencentes ao modelo de menor dimensão, M_I , tem seus graus de liberdade u_{M_I} , substituídos pelas expressões fornecidas pela Equação de MPC (3.61). Desse modo, a matriz de transformação T passa a ser composta pela matriz C , resultando em um novo sistema de equações modificado, conforme a Equação (3.56). Para obtenção da matriz de

coeficientes \mathbf{C} , o método proposto por Wang et al. (2014) é utilizado.

A estratégia completa, combinando o acoplamento multidimensional com a abordagem global-local, está representada na Figura 4.5. A subestrutura, representada pelos elementos de chapa na interface, é usada para criar o Modelo de Forças Nodais (MFN) (Etapa 1 na Figura 4.5), permitindo a execução do processo iterativo (Etapa 2), discutido na Seção 3.4.2.1. A conexão inicial entre os diferentes nós da interface é estabelecida usando elementos de viga de Timoshenko com elevada rigidez, de forma a resolver o MFN via MPC rígido. Na abordagem original de Wang et al. (2014), a partir da segunda iteração, a matriz \mathbf{C} , calculada na primeira iteração, é utilizada como coeficientes para a próxima iteração, que utiliza a conexão via MPC deformável para o cálculo do MFN. Para tal estrutura de solução, Wang et al. (2014) implementam o método no software comercial ANSYS, utilizando modelos e elementos pré-existentes. Neste trabalho, a Matriz \mathbf{C} é aplicada de forma direta nos nós da interface do Modelo de Forças Nodais. A substituição da conexão deformável pela aplicação direta das forças nos nós da chapa foi possível dado que Wang et al. (2014) relacionam as forças generalizadas entre os nós da interface da Equação (4.1) e aplicam forças unitárias no nó de carregamento do MFN. A Equação (4.1) é correspondente à Equação (3.68) mas já utilizando os termos empregados neste trabalho.

$$\mathbf{F}_{M_S} + \mathbf{C}^T \mathbf{F}_{M_I} = 0 \rightarrow \mathbf{F}_{M_S} = -\mathbf{C}^T \mathbf{F}_{M_I} \quad (4.1)$$

\mathbf{F}_{M_S} e \mathbf{F}_{M_I} são matrizes de forças nodais associadas, no problema da Figura 4.5, com a interface da chapa com a viga. \mathbf{F}_{M_I} é uma matriz cujas colunas correspondem às forças aplicadas na viga, de forma desacoplada, nas direções x , y e o momento de flexão do nó. \mathbf{F}_{M_S} representa a matriz de forças da chapa obtida a partir da aplicação de \mathbf{F}_{M_I} na viga. Devido a Equação (4.1), a aplicação de forças unitárias associadas ao modelo M_I , multiplicadas pela matriz \mathbf{C}^T , produz as forças equivalentes no modelo M_S (Equação (4.2)). São essas forças (\mathbf{F}_{M_S}) que são aplicadas diretamente na interface do modelo M_S .

$$\mathbf{F}_{M_S} = -\mathbf{C}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Cada coluna da matriz \mathbf{C}^T na Equação (3.70) está associada a uma força generalizada (força ou momento) aplicada no MFN na iteração anterior. Para a solução proposta, estas colunas derivam do vetor de forças nodais \mathbf{f}_{SE} (Equação (3.69)) na seção do meio do MFN para cada grau de liberdade do nó da viga. Cada vetor é aplicado de forma independente no Modelo de Forças Nodais, e para cada esforço aplicado uma análise é realizada e \mathbf{f}_{SE} calculado. Uma vez que o mesmo modelo é empregado ao longo de todo o processo, com variação apenas no carregamento, a análise consiste em um problema de elementos finitos envolvendo três tipos distintos de carregamento. Tal abordagem possibilita a resolução simultânea, substituindo a aplicação separada de três vetores de forças por uma matriz de forças. A solução desse sistema resulta em uma matriz de deslocamentos, \mathbf{u}_{SE} , cuja multiplicação única por \mathbf{K}_{SE} gera diretamente a matriz \mathbf{C}^T .

Outra adequação necessária para garantir a convergência do processo iterativo do MFN foi a anulação de determinados termos dos vetores \mathbf{f}_{SE} , de forma a garantir o desacoplamento entre os graus de liberdade, a exemplo do que é feito por McCune et al. (2000) e que é omitido em (Wang et al., 2014). Exemplificando melhor esta alteração, suponha o modelo de forças nodais da Figura 4.3, criado a partir da interface de um modelo simplificado de acoplamento com elementos de chapa e elementos de viga.

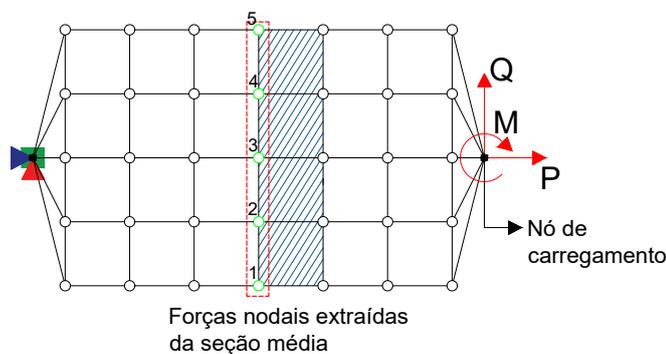


Figura 4.3: Modelo de Forças Nodais simplificado

Na primeira iteração deste MFN, três casos de carregamentos são aplicados no nó de carregamento, são elas a força axial, P , a força cortante, Q , e o momento fletor, M , todos de valor unitário. Após a solução para os três casos de carregamento, extrai-se um vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}_{SE} dos nós dos elementos da seção média (elementos hachurados na Figura 4.3). A partir deste vetor de deslocamentos, resolve-se a Equação (3.69), de forma a obter o vetor de forças nodais na seção média ($\mathbf{f}_{SE,i}$) associado a cada carregamento ($i = P, Q$ ou M). Este equacionamento engloba todos os nós dos elementos da seção média, no entanto, apenas os nós centrais são utilizados para a construção da matriz de coeficientes \mathbf{C} , que na Figura 4.3 estão representados pelos nós em verde, numerados de 1 a 5. A Equação (4.3) representa a matriz \mathbf{C}^T após a solução do MFN e cada coluna representa o resultado de \mathbf{f}_{SE} para cada um dos três diferentes carregamentos. Cada um dos cinco nós da seção média do modelo possui dois graus de liberdade, com isso cada uma das colunas terá 10 linhas.

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{SE,P} & \mathbf{f}_{SE,Q} & \mathbf{f}_{SE,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pu_x^1 & Qu_x^1 & Mu_x^1 \\ Pu_y^1 & Qu_y^1 & Mu_y^1 \\ Pu_x^2 & Qu_x^2 & Mu_x^2 \\ Pu_y^2 & Qu_y^2 & Mu_y^2 \\ Pu_x^3 & Qu_x^3 & Mu_x^3 \\ Pu_y^3 & Qu_y^3 & Mu_y^3 \\ Pu_x^4 & Qu_x^4 & Mu_x^4 \\ Pu_y^4 & Qu_y^4 & Mu_y^4 \\ Pu_x^5 & Qu_x^5 & Mu_x^5 \\ Pu_y^5 & Qu_y^5 & Mu_y^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pu_x^1 & 0 & Mu_x^1 \\ 0 & Qu_y^1 & 0 \\ Pu_x^2 & 0 & Mu_x^2 \\ 0 & Qu_y^2 & 0 \\ Pu_x^3 & 0 & Mu_x^3 \\ 0 & Qu_y^3 & 0 \\ Pu_x^4 & 0 & Mu_x^4 \\ 0 & Qu_y^4 & 0 \\ Pu_x^5 & 0 & Mu_x^5 \\ 0 & Qu_y^5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Na matriz da Equação (4.3), tanto os termos relacionados às componentes de deslocamentos na direção x quanto na direção y dos cinco nós são não nulos nas três colunas. No entanto, alguns dos termos vinculam graus de liberdades de maneira inconsistente porque relacionam graus de liberdade que deveriam estar desacoplados, como o caso do vetor

$f_{SE,P}$, que faz referência às componentes em x das forças e deslocamentos, ter coeficientes associados à deslocamentos em y . De forma a garantir uma correta consistência entre os graus de liberdade na interface, quando se aplica a força em x só são mantidas as linhas associadas à componente x , quando é aplicada a força em y só são mantidas as linhas associadas à componente em y , e por fim, para o momento só permanecem não nulas as linhas associadas à componente em x . Os termos descartados na matriz são pequenos em relação aos outros coeficientes, mas interferem no desempenho do processo iterativo do modelo, provocando sua divergência.

Após a convergência do processo iterativo, determinada pela comparação dos deslocamentos entre as iterações, a matriz de coeficientes resultante, C , é empregada para definir a matriz de transformação T (Etapa 3). Em seguida, o problema global multidimensional inicial é resolvido conforme estabelecido na Equação (3.56) (Etapa 4). A matriz \hat{K} e o vetor \hat{f} são definidos montando-se a matriz de rigidez e o vetor de força associados aos modelos M_I e mesomodelo. Note que, na Etapa 4 da Figura 4.5, detalhada no Figura 3.10, a contribuição do modelo M_S é obtida a partir da Equação (3.11).

A propagação automática da trinca no problema local de maior dimensão segue o procedimento de Fonseca et al. (2020). A seleção dos elementos globais que irão compor o modelo local é feita a partir do ponto que define a trinca inicial (Etapa 5, Figura 4.5). O modelo local é então construído, refinado e resolvido (Etapa 6, Figura 4.5), com a descrição da trinca sendo transferida para o problema global por meio do enriquecimento dos nós indicados em azul na Figura 4.5. A mesma matriz de coeficientes obtida na Etapa 2 é usada para resolver o problema global enriquecido. Ciclos globais-locais são executados para melhorar a qualidade do modelo local (Etapa 7). A propagação da trinca continua após a convergência dos fatores de intensidade de tensão K_I (Equação (3.40)) e K_{II} (Equação (3.41)) no último ciclo global-local. Um novo segmento de trinca é então definido (Etapa 8, Figura 4.5), gerando um novo problema local que engloba a extensão total da trinca (Etapa 9, Figura 4.5).

Este segmento de trinca é definido a partir do incremento de trinca (Δ_a), definido pelo usuário, e do ângulo de propagação (θ), ilustrado na Figura 4.4. O ângulo que determina a direção do novo segmento de trinca é calculado a partir de K_I e K_{II} segundo o critério da máxima tensão circunferencial (Moës et al., 1999). Tal critério, proposto inicialmente por Erdogan e Sih (1963), define que a partir da ponta da trinca, a propagação aconteça em uma direção θ perpendicular à tensão circunferencial máxima. A Equação (4.4) representa o expressão resultante para o ângulo θ .

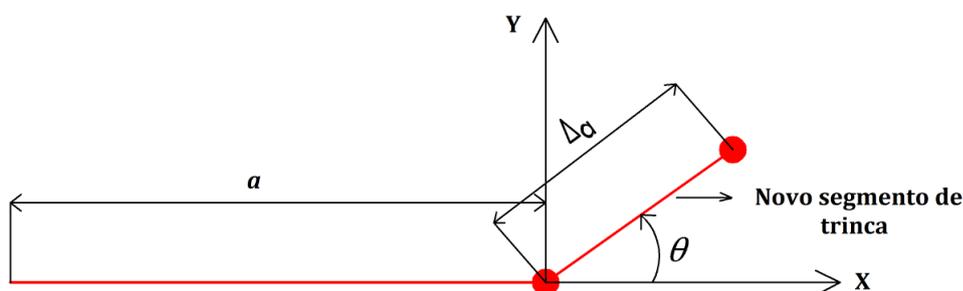


Figura 4.4: Ilustração do incremento (Δ_a) e do ângulo (θ) que determina a orientação do novo segmento de trinca (Fonseca et al., 2020).

$$\theta = 2 \arctan \left[\frac{-2K_I/K_{II}}{1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)^2}} \right] \quad (4.4)$$

As condições de contorno para o problema local são derivadas do problema global enriquecido a partir do último ciclo. Após resolver o problema local e calcular os fatores de intensidade de tensão, o processo global-local é repetido (Etapa 10, Figura 4.5). Esse ciclo continua até que a trinca tenha sido propagada completamente, resultando na configuração final da trinca.

Os procedimentos para a propagação da trinca por meio do acoplamento multidimensional via $MEFG^{gl}$ são resumidos nos Algoritmos 1 e 2.

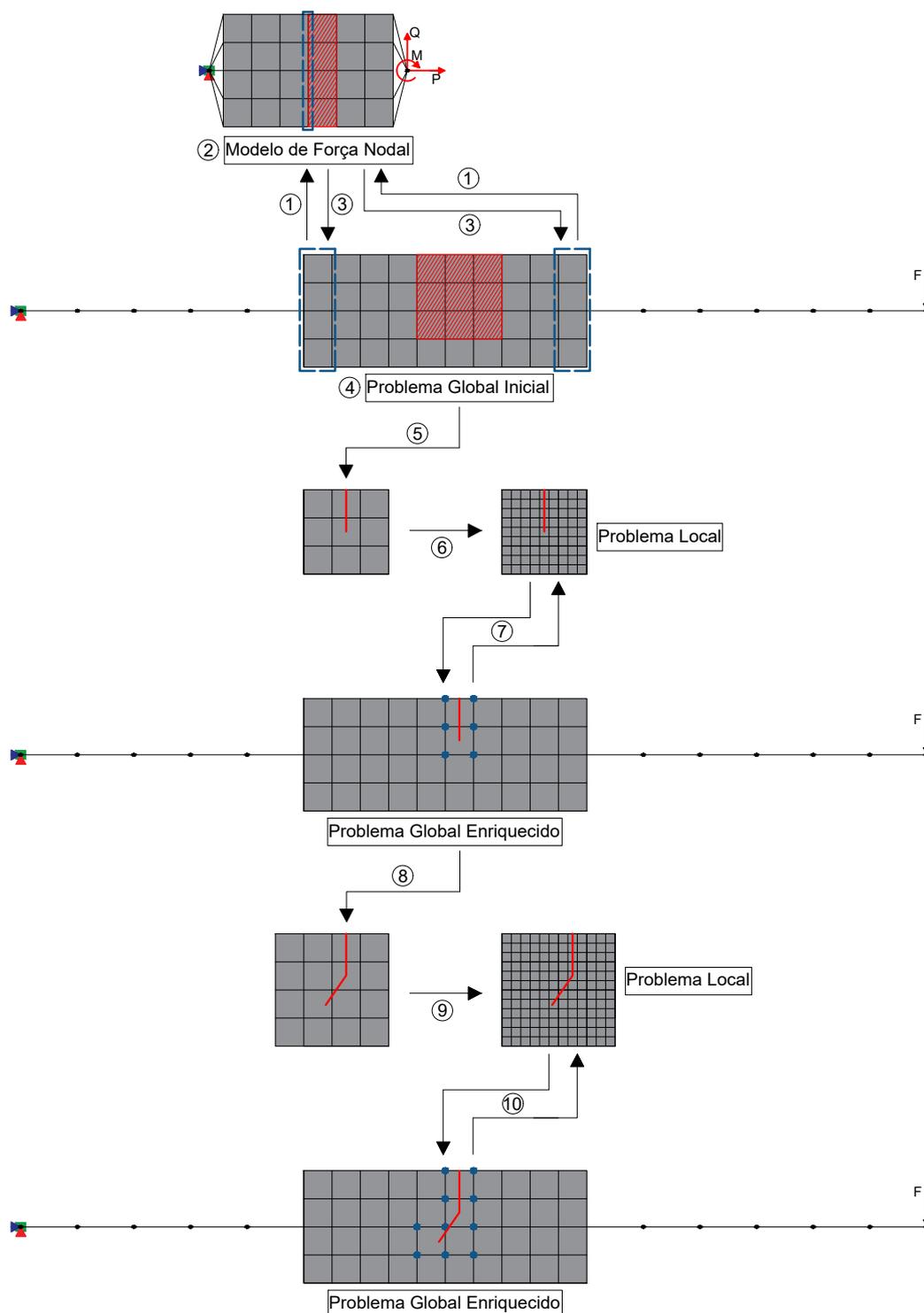


Figura 4.5: Ilustração esquemática do procedimento de solução da simulação da propagação de trinca combinado com o acoplamento multidimensional via MEFG Global-Local

Algoritmo 1 Solução da matriz de coeficientes **C**

A partir do modelo global construa o Modelo de Forças Nodais da interface (Etapa 1, Figura 4.5)

Início da primeira iteração $it = 1$

repita

se primeira iteração ($it = 1$) **então**

Utilizar conexão rígida entre o MFN e o nó de carregamento

senão

Utilizar conexão deformável e aplicar a força diretamente nos nós do modelo M_S

fim se

para $i = 0, 1, 2$ **faça** \triangleright etapa i de construção da matriz C^T (Equação (3.70))

Aplicar força i e calcular a resposta do modelo (Etapa 2, Figura 4.5)

Extrair o vetor de deslocamento nodal da seção interna pré-definida, \mathbf{u}_{SE} (Etapa 2, Figura 4.5)

Calcular a matriz \mathbf{K}_{SE} composta pela matriz de rigidez dos elementos do modelo M_S que compartilham a interface

Calcular o vetor de forças nodais ($\mathbf{f}_{SE,i}$) utilizando Equação (3.69)

fim para

Calcular a nova matriz de restrição **C** usando Equação (4.3)

se primeira iteração ($it = 1$) **então**

Calcular a norma L_2 de \mathbf{u}_{SE} , $\|\mathbf{u}_{SE}\|_{L_2}$ da iteração atual

Fazer $e_{SE} = \|\mathbf{u}_{SE}\|_{L_2}^{(it=1)}$

senão

Calcular a norma de \mathbf{f}_{SE} , $\|\mathbf{u}_{SE}\|_{L_2}$ na iteração atual

$$e_{SE} = \frac{\sqrt{(\|\mathbf{f}_{SE}\|^2)^{it} - (\|\mathbf{f}_{SE}\|^2)^{it-1}}}{\|\mathbf{f}_{SE}\|^{it-1}}$$

fim se

Atualizar o número da iteração, $it = it + 1$

até $e_{SE} \leq tol_{SE}$

$\triangleright tol_{SE}$ é tolerância estipulada *a priori*

Algoritmo 2 Procedimento de simulação da propagação de trinca, combinado com o acoplamento multidimensional via MEFM com enriquecimento global-local

Calcular a matriz de transformação \mathbf{T} usando a matriz \mathbf{C} . (Etapa 3, Figura 4.5, Algoritmo 1)

Solucionar o modelo global multidimensional inicial usando a Equação eq. (3.56) baseada na equação 3.11 (Etapa 4, fig. 4.5)

para $j = 0, 1, \dots, j_{max}$ **faça** ▷ etapa j de incremento de trinca

Definição do modelo local considerando a configuração da trinca (Etapas 5 e 8, Figura 4.5)

O problema local é construído e os elementos globais da mesoescala são refinados de forma a definir a associada malha local (Etapas 6 and 9, fig. 4.5)

Equações (3.16)-(3.21) representam a trinca

Início do primeiro ciclo Global-Local $t = 1$

repita ▷ ciclos global-local

Solução do problema local (\mathbf{u}_L), Equação 3.12, com condições de contorno provenientes de \mathbf{u}_G

Calcular os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de abertura de trinca (K_I e K_{II}), usando o método da Integral de Iteração (Seção 3.3.1.

A trinca é representada no problema global pelo enriquecimento global-local dos nós dos elementos que contêm a trinca. (Etapas 7 e 10, Figura 4.5)

Resolver o modelo global multidimensional enriquecido a partir da matriz de transformação \mathbf{T} , Equações (3.11) e (3.56), com o espaço de solução global do MEFM enriquecido \mathcal{X}_E

se primeiro ciclo ($t = 1$) **então**

Fazer $e_{K_I} = K_I^{(t=1)}$ e $e_{K_{II}} = K_{II}^{(t=1)}$

senão

Calcular $e_{K_I} = \frac{K_I^t - K_I^{t-1}}{K_I^t}$, $e_{K_{II}} = \frac{K_{II}^t - K_{II}^{t-1}}{K_{II}^t}$

fim se

Atualizar o número da iteração, $t = t + 1$

até $e_{K_I} \leq tol_K$ e $e_{K_{II}} \leq tol_K$ ▷ tol_K é tolerância estipulada *a priori*

Um novo segmento de trinca é definido por um dado incremento de trinca (Δ_a)

A partir de K_I e K_{II} o ângulo de propagação (θ) é definido de acordo com o critério da máxima tensão circunferencial (Equação (4.4))

$j \leftarrow j + 1$

fim para

Capítulo 5

Sistema INSANE

Este capítulo tem como objetivo descrever a plataforma sobre a qual este trabalho foi desenvolvido, focando nos aspectos relevantes para a compreensão da expansão realizada para suportar a análise multidimensional da propagação de trinca utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}).

O sistema INSANE (*INterative Structural ANalysis Environment*) é um software projetado para análises estruturais, criado no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Desenvolvido em Java e seguindo a Programação Orientada a Objetos (POO), INSANE se destaca pela modularidade e portabilidade, características enfatizadas por Fonseca (2008). A POO permite o desenvolvimento modular e colaborativo, enquanto a independência de plataforma da linguagem Java facilita sua execução em diferentes sistemas operacionais, tornando o ambiente INSANE flexível e continuamente aprimorável.

Inicialmente desenvolvido para análises utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) em Fonseca e Pitangueira (2007), o INSANE foi expandido a partir do trabalho de Alves et al. (2013) para permitir as análises pelo MEFG. Neste mesmo trabalho houve validação do enriquecimento com funções representativas do campo de tensões singulares na vizinhança da ponta de um trinca para o estado plano de tensões e de deformações, além de também considerar a abordagem Global-Local. Em Silva (2019), pela primeira vez a propagação de trinca, simulada pelas funções de enriquecimento do MEFG, é implementada

no INSANE, mas para problemas com material parcialmente frágil. A partir dos trabalhos de Malekan e Barros (2016) e Malekan et al. (2017) foi possível a realização das análises da propagação de trinca através do MEF gl no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica, além da expansão do método para análise de modelos de placa considerando a abordagem de Reissner-Mindlin. Em Santos (2018) houve a ampliação e validação destas estratégias de enriquecimento para modelos tridimensionais. A automação da criação do problema local, assim como a propagação da trinca na abordagem do MEF gl é realizada em Fonseca et al. (2020). Por sua vez, a geração de funções de enriquecimento subtraídas de seu interpolante linear, como proposto em Babuška e Banerjee (2012) no Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), foi implementada no trabalho de Oliveira (2018). A seguir, são apresentadas as principais características da plataforma atual e as adaptações necessárias. Uma nova estratégia para a propagação de trincas em material parcialmente frágil considerando abordagem coesiva e material sujeito à distribuição de dano foi implementada por Oliveira (2024).

5.1 Características fundamentais do sistema INSANE

A arquitetura do INSANE é composta por três módulos principais: pré-processador, processador e pós-processador. O pré-processador fornece uma interface gráfica interativa para a inserção e manipulação dos dados do modelo; o processador serve como o núcleo numérico que analisa os dados inseridos; e o pós-processador oferece ferramentas para a visualização dos resultados. A maior parte da implementação deste trabalho está diretamente relacionada ao processador, onde foi inserido o procedimento de solução proposto para o acoplamento multidimensional na análise via MEFG.

O processador do INSANE é baseado em uma estrutura básica do núcleo numérico que envolve a interação das interfaces *Assembler* e *Persistence*, e as classes abstratas *Solution* e *Model* (ver Fig. 5.1). A interface *Persistence* gerencia a entrada e saída de dados, organizando informações do modelo nas estruturas especificadas pelas classes de *Model*, e gerando arquivos com os resultados das análises.

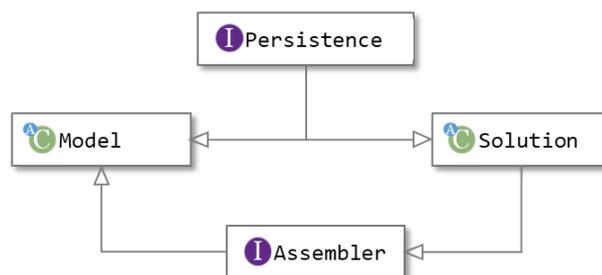


Figura 5.1: Organização do núcleo numérico do INSANE

A classe abstrata *Model* armazena os dados lidos por *Persistence*, podendo representar o modelo discreto a ser analisado. A partir de *Model*, diferentes classes são construídas de forma a representar determinados tipos de modelos, com atributos específicos, como *FemModel*, responsável pelos modelos de Elementos Finitos (MEF). *GFemModel*, uma extensão de *FemModel*, herda todas as características presentes nesta classe, além de também incluir funcionalidades adicionais para o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), suportando enriquecimentos nodais através de lista de objetos da classe *EnrichmentType* e suas derivadas, como *CrackEnrichmentModelI*, que manipulam enriquecimentos de trinca com modo I de abertura. De forma análoga, *CrackEnrichmentModelII* é responsável pelo enriquecimento associado ao modo II.

Para representar e descrever o modelo discreto desejado, *Model* possui listas de nós, elementos, modelos de análise, funções de forma, pontos de integração, materiais e carregamentos. Estas listas são objetos de classes específicas que representam estas entidades, tais como as classes *Node*, *Element*, *Shape* e *ProblemDriver*. A classe *Node* armazena informações discretas associadas a cada nó, enquanto *Shape*, sendo uma classe abstrata, representa diversas funções de forma. No contexto do MEFG, é a responsável pela construção das funções PU.

A classe *Element* gera a discretização necessária para o elemento do modelo, possuindo atributos que incluem a função de forma, a lista de pontos de integração e a lista de nós. *ProblemDriver* define os diferentes problemas e formulações de modelos discretos a serem modelados, como Mecânica dos Sólidos, por meio da classe *SolidMech*. As classes

que estendem de *SolidMech* representam as diferentes formulações de elementos finitos, destacando-se as classes *Parametric* e *GFemParametric*, responsáveis por fornecer informações relevantes aos elementos paramétricos nos casos de MEF e MEFG, respectivamente.

A classe abstrata *AnalysisModel* é responsável por fornecer as informações matemáticas necessárias para os elementos finitos, como o cálculo da matriz de deformação, de acordo com o tipo de modelo de análise. Sua implementação é realizada por classes específicas que representam diferentes tipos de modelos, como estado plano de tensão (*PlaneStress*), estado plano de deformação (*PlaneStrain*), modelos lineares (*Line*), modelos de pórticos espaciais baseados na teoria de Timoshenko (*TimoshenkoSpaceFrame*) e sólidos (*Solid*). No contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), a interface *GFemAnalysisModel* define métodos específicos para esses casos. Assim, classes que representam modelos MEFG, como *GFemPlaneStress* e *GFemSolid*, implementam a interface *GFemAnalysisModel* e derivam de *AnalysisModel*, combinando métodos gerais de modelos matemáticos com métodos específicos para o MEFG. O diagrama de classes correspondente é mostrado na Fig. 5.2.

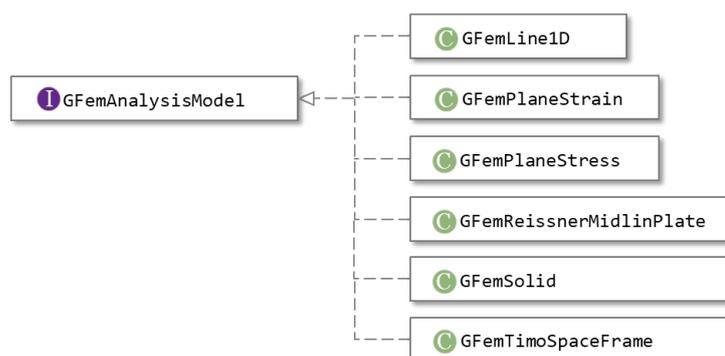


Figura 5.2: Diagrama parcial de classe para a interface *GFemAnalysisModel*

A interface *Assembler* sintetiza as informações do modelo, possuindo os métodos necessários para a montagem do sistema matricial de segunda ordem, que representa os diversos tipos de modelos discretos disponíveis no INSANE:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (5.1)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes dos coeficientes, \mathbf{D} é o vetor dos termos independentes do sistema, que podem ou não depender das variáveis de estado e de suas derivadas. \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado do problema, e $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são, respectivamente, os vetores da primeira e segunda derivadas temporais das variáveis de estado. A equação (5.1) pode ser simplificada para o caso de análise estrutural estática elástica linear, reorganizada e representada em sub-matrizes, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & \mathbf{C}_{up} \\ \mathbf{C}_{pu} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

em que \mathbf{C} representa a matriz de rigidez, \mathbf{X} os graus de liberdade, como os parâmetros nodais, \mathbf{R} as cargas nodais e \mathbf{F} as forças nodais equivalentes aos esforços internos, relacionadas conforme o tipo de análise. Os índices u e p indicam se a sub-matriz refere-se a graus de liberdade desconhecidos (u) ou prescritos (p).

A classe abstrata *Solution* é responsável por acionar a interface *Assembler* para montagem do sistema de equações, e chamar um objeto da classe *LinearEquationSystem*, para resolver o sistema de equações lineares. É uma classe que possui subclasses específicas para diversos tipos de solução. *SteadyState*, uma dessas subclasses, representa a solução de problemas lineares estáticos.

No enriquecimento da partição da unidade (PU) para a construção das funções de forma no MEFG, a matriz de rigidez pode se tornar semi-definida positiva. A solução desse sistema é obtida por meio de um procedimento iterativo, implementado na classe *LinearEquationSystem*, conforme proposto por Strouboulis et al. (2000).

A classe *GlobalLocal*, também derivada da classe abstrata *Solution*, implementa a solução de problemas usando a abordagem global-local. Criada por Alves et al. (2013), essa classe contém dois tipos de objetos *Assembler*: um *GFemAssembler* global, armazenado

na variável *globalAssembler*, e uma lista de *GFemAssemblers* locais, armazenada em *localAssemblerList*. Isso permite o gerenciamento eficiente das informações dos problemas globais e locais durante o processo de solução.

A estrutura original do INSANE exigia que o usuário fornecesse dois arquivos de entrada de dados, um para o modelo global e outro para o local. O trabalho realizado por Fonseca et al. (2020) automatizou esse processo, permitindo a geração automática de modelos locais a partir de um modelo global previamente definido. Anteriormente, a trinca era representada em um problema local fixo, englobando todo o crescimento da trinca e exigindo um conhecimento prévio da sua trajetória. A automação proposta por Fonseca et al. (2020) trouxe uma mudança significativa ao construir o problema local a cada passo de propagação da trinca, eliminando a necessidade de prever a trajetória com antecedência, além de simplificar o pré-processamento das análises via Global-Local.

Os estudos de Fonseca et al. (2020) e Monteiro (2021) introduziram um novo conjunto de classes para generalizar a simulação de problemas $MEFG^{gl}$, com uma reorganização do núcleo numérico do INSANE, sem comprometer seu funcionamento. As novas classes implementadas incluem o *SimulationManager*, responsável por gerenciar a simulação; o *DataManager*, que controla os dados; e o *Setuper*, que configura os modelos em diferentes etapas do processo de solução (ver Figura 5.3).

O *SimulationManager* tem um papel central, gerenciando a simulação desde a entrada de dados, passando pela montagem do sistema de equações, até a solução e saída dos resultados. Ele coordena as fases da análise e delega tarefas para outras classes, incluindo os *Setuper*, que configuram problemas globais e locais. Em simulações do tipo MEFG Global-Local, um *SimulationManager* específico é necessário, junto com configuradores para cada problema, que ajustam as configurações necessárias para a solução em fases interligadas.

A reorganização do fluxo original do INSANE, com a inclusão do *SimulationManager*,

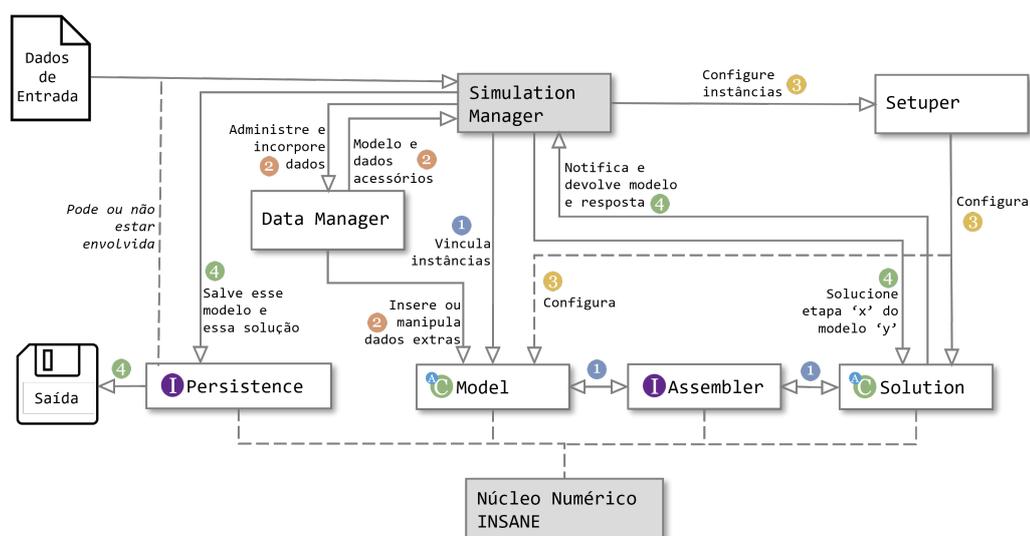


Figura 5.3: Dinâmica de uma simulação com a nova proposta. Adaptada de Monteiro (2021)

permite uma interface mais direta com o núcleo numérico do sistema. Esta estrutura envolve o *Model*, o *Assembler* e o *Solution*, além dos *Setuper*, que ajustam as configurações para cada etapa da análise. O *DataManager* lida com estruturas de dados discretas, enquanto as classes *Setuper* preparam e ajustam as características necessárias para a análise de cada fase.

A classe *GlobalLocalSimulationManager* centraliza as simulações global-local, gerenciando tanto o modelo global quanto os modelos locais, além de realizar o malhamento automático do problema local. Utiliza métodos como *setUpGlobalProblem()* e *solveGlobalProblem()*, e seus equivalentes para problemas locais e global enriquecido, que facilitam a organização e execução de cada fase da análise. O *GlobalLocalCrackPropagationSimulationManager* é o responsável pela simulação da propagação de trincas em problemas global-local sob mecânica da fratura linear elástica, incorporando todos os elementos necessários para a simulação, como *Models*, *Assemblers*, *Setupers*, solucionadores e gerentes de dados globais e locais (Monteiro, 2021).

O *DataManager* gerencia as estruturas de dados dos modelos discretos e quaisquer informações adicionais necessárias para ajustar os modelos simulados. O pacote *model-DataManager* contém classes específicas para o gerenciamento desses dados, incluindo a

classe *GlobalLocalDataManager*, que organiza os dados dos modelos globais e locais e controla a comunicação entre eles (Novelli, 2019).

Já o pacote *Setuper* atua como um configurador de dados, organizando as informações dos modelos global e local e sua interação. Este pacote é dividido em dois: *globalSetuper*, para o modelo global, e *localSetuper*, para o modelo local. No caso do modelo local, ele é gerado automaticamente a partir do modelo global durante a simulação, e as classes *LocalSetuperGfem* e *LocalProblemParser* são responsáveis pela sua construção.

5.2 Ampliação do Sistema INSANE

Para este trabalho, foi implementado na plataforma INSANE a solução para a análise multidimensional via $MEFG^{GL}$ para o estudo de trincas proposta no capítulo 4. Esta seção descreve modificações e adaptações realizadas no sistema INSANE. O seguinte esquema de cores foi utilizado para facilitar o entendimento sobre o que foi implementado:

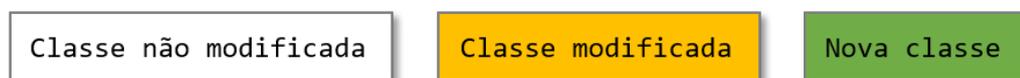


Figura 5.4: Esquema de cores utilizada para representar as classes não modificadas, modificadas e criadas

A maior parte deste trabalho baseia-se na automação da propagação de trincas utilizando o método $MEFG$ global-local, conforme implementado por Fonseca et al. (2020). Nesse procedimento, o modelo local é gerado automaticamente a partir de parâmetros de entrada que definem os pontos da trinca inicial. Para análises tridimensionais, a implementação de Santos (2018) serviu como base para integrar análises de elementos sólidos e viga. Neste caso, não existe ainda a possibilidade de se simular a propagação de trinca.

O modelo de forças nodais (MFN), fig 4.3, é criado a partir de um arquivo XML (*eX-tensible Markup Language*) separado, que é lido durante o processamento do arquivo XML principal. Além disso, modificou-se os arquivos de entrada XML do modelo global, adicionando novos parâmetros nos nós da interface para viabilizar o acoplamento.

Estes parâmetros extras para os nós independentes incluem: a quantidade de coeficientes associados ao nó (*MasterDOFsConst*), o nó dependente ao qual ele será interligado (*SlaveDOFs*) e os graus de liberdade do nó dependente que se relacionam com os graus de liberdade do nó independente (*MasterDOFsForce*). O arquivo do MFN contém informações de uma análise via MEF, mas recebe um parâmetro extra, *MasterDOFs*, nos nós independentes da interface, que indica o nó dependente ao qual está ligado para realizar a conexão rígida na primeira iteração. Além das alterações nos arquivos de entrada do modelo, a classe *PersistenceAsXml* foi adaptada para identificar e processar esses novos parâmetros ao ler o arquivo de entrada XML.

Como mencionado anteriormente, a classe *Solution* é responsável por acionar o *Assembler* para montagem do sistema de equações. Para o novo procedimento de análise, o sistema de equações foi modificado para incorporar a equação MPC (*Multipoint Constraint*), que deve incluir a matriz de transformação \mathbf{T} , conforme a Equação (3.55). Para implementar essa modificação, foram criadas duas novas classes filhas de *Solution*: *SteadyStateCoupled* e *GlobalLocalCoupled*. Essas classes foram ajustadas para incluir métodos específicos para a solução do modelo de forças nodais, calculado uma única vez. Modificações também foram feitas no formato da solução para incorporar a matriz de coeficientes no cálculo da matriz de rigidez e na obtenção do vetor de forças totais. A criação dessas duas classes foi necessária porque, no procedimento implementado por Fonseca et al. (2020), a classe padrão *SteadyState* é usada para resolver os modelos globais e locais, sendo gerenciada pela classe *GlobalLocalSimulationManager*. Assim, para modelos planos com propagação de trincas, utiliza-se a classe *SteadyStateCoupled*. Em contrapartida, para modelos tridimensionais, onde a classe *GlobalLocal* gerencia a solução do problema, foi necessária a criação da classe *GlobalLocalCoupled*.

Para a solução do modelo de forças nodais, ambas as classes incorporam um objeto da classe *LinearEquationSystems*, dedicado à solução específica desse modelo. Um *Assembler* específico para o MFN também é criado. Os métodos desenvolvidos para o cálculo do MFN incluem (ver Figura 5.5):

- *reducedCuu(cuu)*: Calcula a matriz de rigidez reduzida (K_{SE}) dos elementos da interface do modelo global, utilizada na Equação (3.69).
- *iterationMfn(reducedCuu)*: Realiza o processo iterativo no MFN e retorna uma matriz de coeficientes para o modelo global. Dentro desse método, dois novos métodos são chamados:
 - *firstIteration(reducedCuu)*: Executa a primeira iteração do algoritmo 1 da seção 4.2 com conexões rígidas entre os nós da interface. Este método aplica iterativamente forças unitárias no nó de carregamento e calcula as respectivas forças nodais na seção média (f_{SE}). O método retorna a matriz de coeficientes da equação de restrição de deslocamentos para a primeira iteração.
 - *otherIteration(firstCoeficiente, reducedCuu)*: Realiza as iterações subsequentes do algoritmo 1 removendo as conexões rígidas pela aplicação direta das forças nos nós do modelo de maior dimensão. As iterações se repetem sobre o MFN até que ocorra a convergência.

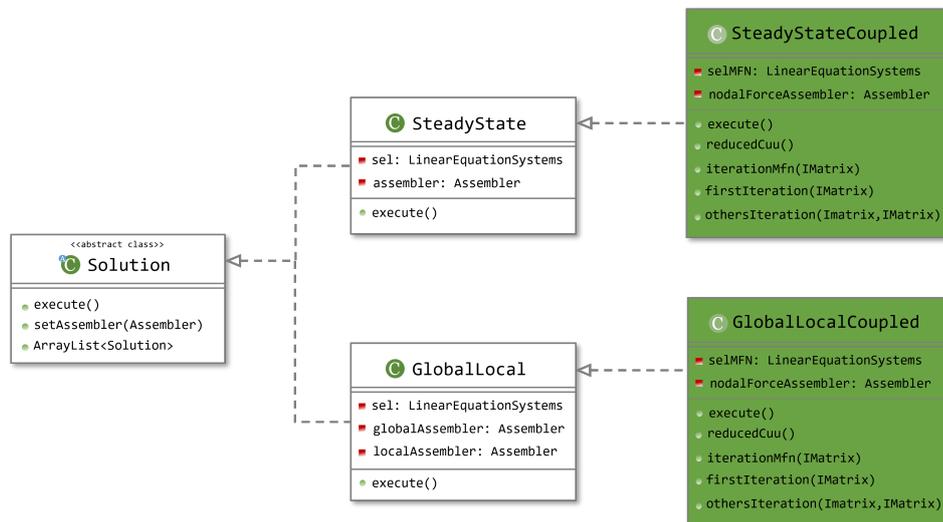


Figura 5.5: Diagrama parcial da classe *Solution*

Além disso, a classe *CoupledGlobalLocalSimulationManager* foi criada para gerenciar a solução do modelo de forças nodais dentro do fluxo de ciclos da análise global. Esta

classe inclui o solucionador *SteadyStateCoupled* e um *Assembler* específico para o modelo de Forças Nodais. A modificação no *GlobalLocalSimulationManager* foi necessária para ajustar *globalSetuper* e *localSetuper* ao identificar problemas derivados de *Coupled-GlobalLocalSimulationManager* (ver Figura 5.6).

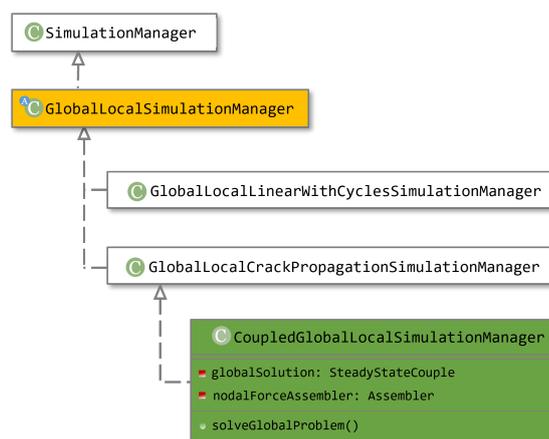


Figura 5.6: Diagrama parcial da classe *SimulationManager*

Na classe *GlobalLocalCrackPropagationPersistence*, um método foi criado para definir se o problema é multidimensional e, se for, para ler e processar o modelo MFN. Nesta classe, o novo método *fillMFNModel*, cria o MFN a partir da leitura do arquivo XML e o define no modelo a partir do objeto *NodalForceAssembler* dentro de *SimulationManager*. Para o modelo tridimensional, as modificações para leitura do arquivo XML do MFN *fillMFNModel* e sua adição ao modelo é feita dentro da classe *SolverClass*.

Essas modificações aprimoram significativamente o INSANE, habilitando análises complexas e suportando a propagação automática de trincas em modelos multidimensionais. A integração dessas funcionalidades fortalece a capacidade do sistema em executar simulações avançadas de fratura em estruturas complexas.

Capítulo 6

Simulações Numéricas

A abordagem proposta do acoplamento multidimensional via $MEFG^{gl}$ é utilizada para simular a propagação de trinca em problemas com o comportamento global descrito em um modelo com redução dimensional definido por elementos de pórtico baseado na formulação de Timoshenko. Na região onde a fissura está confinada, adotam-se dois tipos de modelos com maior dimensionalidade determinando dois tipos distintos de simulação. O primeiro modelo é definido por elementos Q4, sob estado plano de tensão, sendo usado em simulações governadas pelos modos I e II de abertura de trinca. Já o segundo modelo, definido por elementos hexaédricos H8 tridimensionais, é empregado em simulações em que os três modos de abertura de trinca são essenciais para a representação do comportamento da estrutura. A presença da trinca determina a forma e o tamanho do problema local da estratégia $MEFG^{gl}$. As simulações numéricas permitem avaliar a influência dos tamanhos das diversas escalas de análise na qualidade da solução em termos de energia de deformação, fatores de intensidade de tensão, abertura de trincam estado de tensões e caminho de propagação de trinca.

São considerados dois problemas, ambos de Mecânica da Fratura Elástica Linear. O primeiro problema representa uma viga engastada com uma fissura na região central, e o segundo é um pórtico em L com uma fissura originada no seu canto inferior. Em cada um dos problemas, a simulação é comparada com as respostas de dois modelos discretizados de forma convencional, sem o acoplamento, denominados Modelo 1 e Modelo 2. Nestes

modelos, são realizadas apenas análises via $MEFG^{gl}$ e a mesma formulação de elementos finitos do modelo de elevada dimensionalidade é adotada. O problema global do Modelo 1 emprega uma malha idêntica àquela adotada no modelo de dimensão superior da simulação via $MEFG^{gl}$ multidimensional. O objetivo é criar um modelo equivalente no qual a estratégia de acoplamento é considerada como bem-sucedida quando as simulações realizadas tanto pelo $MEFG^{gl}$ multidimensional quanto pelo $MEFG^{gl}$ convencional apresentam respostas numéricas muito próximas. O Modelo 2 apresenta uma discretização mais refinada ao utilizar no problema global o tamanho da malha do problema local do Modelo 1 e do modelo multidimensional, sendo considerado de referência. O objetivo é avaliar a acurácia da solução obtida via estratégia Global-Local multidimensional. Ainda sobre as definições para a construção dos modelos de análise, são considerados:

1. Existem duas abordagens para definir o tamanho do problema local na estratégia do $MEFG^{gl}$:
 - (a) Domínio Local Mínimo:
 - i. Identificação dos nós dos elementos globais que seriam cortados pela trinca.
 - ii. Seleção de todos os elementos que contêm estes nós para construir o subdomínio da malha global que define o problema local.
 - (b) Domínio Local Variável:
 - i. Expansão do domínio local mínimo adicionando camadas de elementos ao seu entorno para construir o subdomínio da malha global que define o problema local.
 - ii. Os detalhes deste processo estão descritos na seção correspondente.
2. Em todos os problemas, seja com domínio local mínimo ou domínio local variável, apenas os nós do problema global associados aos elementos globais que contêm as regiões cortadas pela trinca no problema local são enriquecidos com a solução

global-local.

3. Para definir a malha local, os elementos globais localizados no subdomínio do problema local são divididos em 3×3 elementos locais.
4. No problema local, as funções de enriquecimento, Equações (3.16-3.21) e (3.25), esta última, incluída no problema 3D, representam numericamente a trinca. As funções de singularidade, Equações (3.18-3.21) e (3.25), são aplicadas apenas aos nós do elemento que contém a ponta da trinca, sendo o restante da descontinuidade da trinca representado através da função Heaviside, Equação (3.16).
5. No problema global enriquecido, Equação (3.15), a solução numérica do problema local, Equação (3.12), representa numericamente a trinca, aplicando-se as funções (3.14) aos nós descritos no item 2.
6. O método da Integral de Interação (Seção 3.3.1) é utilizado para calcular os fatores de intensidade de tensão para os modos de abertura I e II (K_I e K_{II}), aplicada ao modelo da mesoescala. O raio do domínio de integração para cálculo da integral de interação é definido como o dobro do comprimento característico do elemento finito que contém a ponta da trinca (Moës et al., 1999; Fonseca et al., 2020).
7. As condições de Dirichlet são impostas no contorno do problema local, com $\kappa = 1 \times 10^{10}$ na Equação (3.12).
8. Nos ciclos global-local, a tolerância da convergência adotada é de $tol_K = 1\%$, e é comparada com o erro relativo de K_I e K_{II} entre o primeiro e o ciclo corrente.
9. No procedimento iterativo de acoplamento, a tolerância para a convergência adotada é de $tol_{SE} = 0.1\%$. Este é comparado com a diferença relativa entre a norma de \mathbf{f}_{SE} (Equação (3.69)), $\|\mathbf{f}_{SE}\|$ da iteração atual e da anterior (Algoritmo 1).
10. O tamanho do passo de trinca, Δa , é 1.667.

6.1 Viga em Balanço

A simulação numérica de uma viga em balanço é apresentada para avaliar a acurácia da estratégia proposta, e seu comportamento quando os tamanhos do modelo do mesomodelo e do problema local são modificados. Exceto pela presença de uma trinca na borda superior, o problema estrutural é semelhante aos simulados em McCune et al. (2000) e Wang et al. (2014), daí sua escolha como primeiro exemplo. A Figura 6.1 representa o problema com a geometria, carregamento e fissura inicial em sua representação bidimensional.

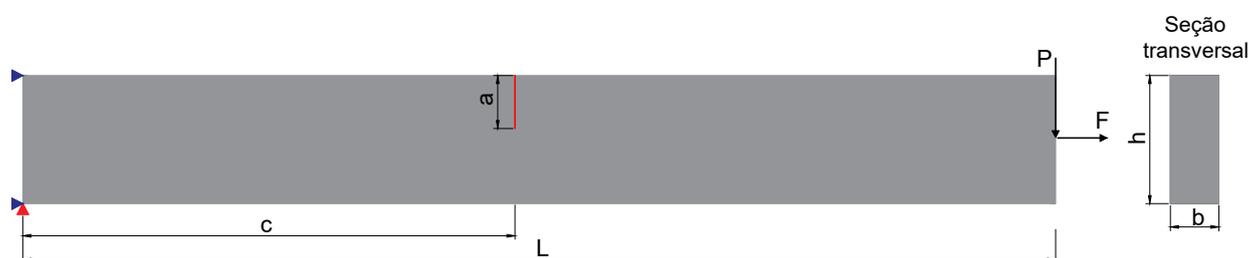


Figura 6.1: Viga engastada em balanço

A viga possui comprimento de $L = 320 \text{ mm}$, seção transversal com $h = 40 \text{ mm}$ e $b = 8 \text{ mm}$ e uma trinca inicial pré-definida de $a = 16 \text{ mm}$, a uma distância $c = 152,5 \text{ mm}$ do apoio. É adotado um material linear elástico com módulo de elasticidade de $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Dois tipos de solicitação são considerados. Na seção 6.1.1 a viga é submetida a uma força F de tração em sua extremidade da direita. Já na seção 6.1.2, F é substituída por uma força vertical P . A ideia é confrontar as análises de acoplamento em situações em que o estado inicial de solicitação é de tração ou de flexão.

6.1.1 Viga submetida a uma força horizontal descrita em \mathbb{R}^2

Nesse primeiro exemplo, a solicitação de tração à qual a viga é submetida com $F = 12 \text{ kN}$ e $P = 0$, é modificada pela presença da trinca. Tal solicitação simplifica o estado de tensão na vizinhança da ponta da trinca, governado apenas pelo modo I de abertura. A simplicidade do problema permite a comparação com uma expressão analítica para

validação da estratégia proposta, além da investigação dos parâmetros envolvidos.

Na Figura 6.2 têm-se representado o modelo multidimensional. Os comprimentos dos modelos de maior e menor dimensão são parametrizados por l como forma de avaliar a influência do tamanho da região em estado plano de tensão no comportamento geral da viga. A parte central, com comprimento de $[M = 100 - 2 \cdot (5l)]$ mm, é discretizada por uma malha de elementos planos Q4, e é nesta região do modelo que a estratégia de enriquecimento global-local é utilizada para representar a trinca. Malhas de elementos de viga de Timoshenko descrevem as outras duas partes, com comprimentos de $100 + (5l)$ mm e $120 + (5l)$ mm. Para $l = 0$, e com isso $M = 100$ mm, são utilizados 20×8 elementos Q4 no modelo de maior dimensão, e respectivamente 20 e 22 elementos de viga de Timoshenko nos primeiros 100 mm e nos últimos 120 mm do modelo de menor dimensão.

Oito diferentes modelos multidimensionais são definidos pelo parâmetro l . Conforme l varia de 0 a 7, duas colunas de elementos são subsequentemente removidas, uma de cada extremidade da parte central, e dois elementos de viga de Timoshenko são adicionados, um em cada uma das malhas laterais. O comportamento dos modelos é analisado para uma trinca estática na borda superior do problema local do modelo de chapa.

As Figuras 6.3 e 6.4 representam o Modelo Equivalente 1 e o Modelo de Referência 2, com 64×8 e 192×24 elementos Q4 no problema global, respectivamente. As malhas para os problemas global e local são baseadas no modelo multidimensional, conforme explicado anteriormente na introdução da Seção 6. Ao contrário do Modelo 1, no Modelo 2 não é utilizado um domínio local mínimo para representar a trinca. Devido à discretização mais refinada, o Modelo 2 adota um domínio local ampliado, com três camadas adicionais de elementos, tornando-se equivalente ao domínio local do Modelo 1, visando minimizar os erros na imposição das condições de contorno, porém com enriquecimento topológico nos nós próximos à trinca.

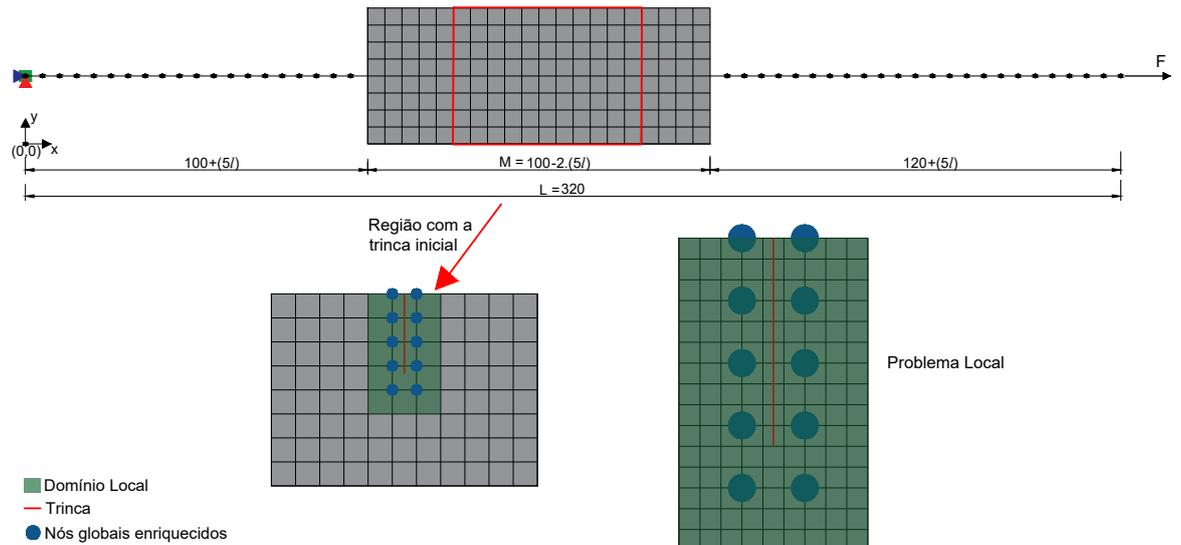


Figura 6.2: Modelo multidimensional com o problema global e local. As três representações não estão na mesma escala. Medidas em mm.

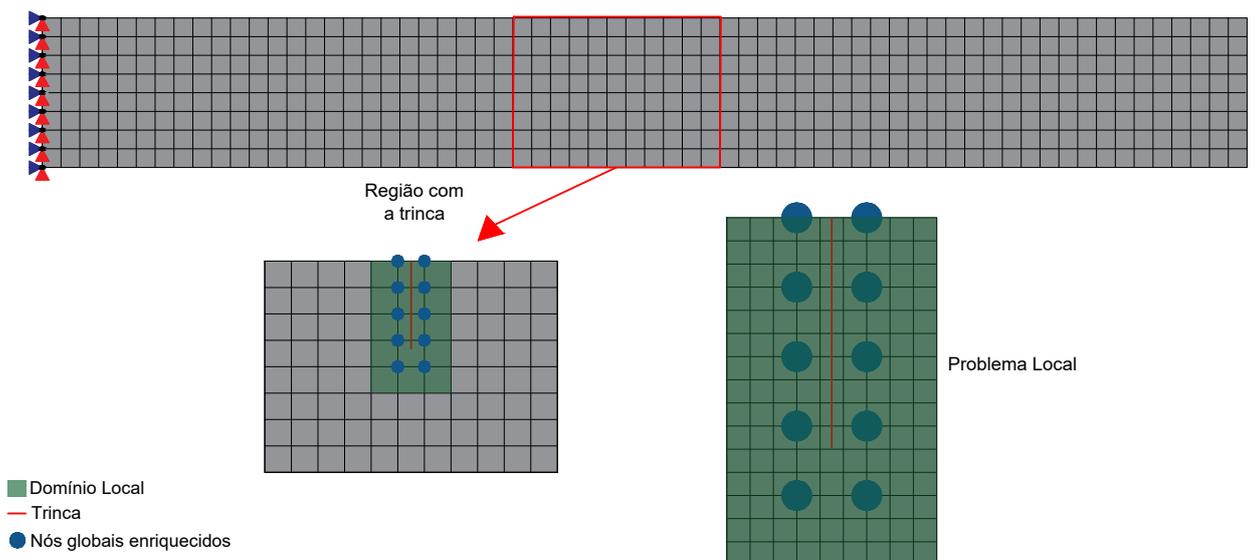


Figura 6.3: Modelo Equivalente 1 com os problemas global e local. As três representações não estão na mesma escala.

A Tabela 6.1 apresenta o erro relativo da simulação do modelo multidimensional comparado ao Modelo Equivalente 1 e ao Modelo de Referência 2 em termos de energia de deformação, \mathcal{U} , e ao fator de intensidade de tensão K_I . Na tabela, M representa o comprimento da região central, mesomodelo, e M/L a relação entre o comprimento do mesomodelo em relação ao comprimento total da viga, L . Além disso, o erro relativo

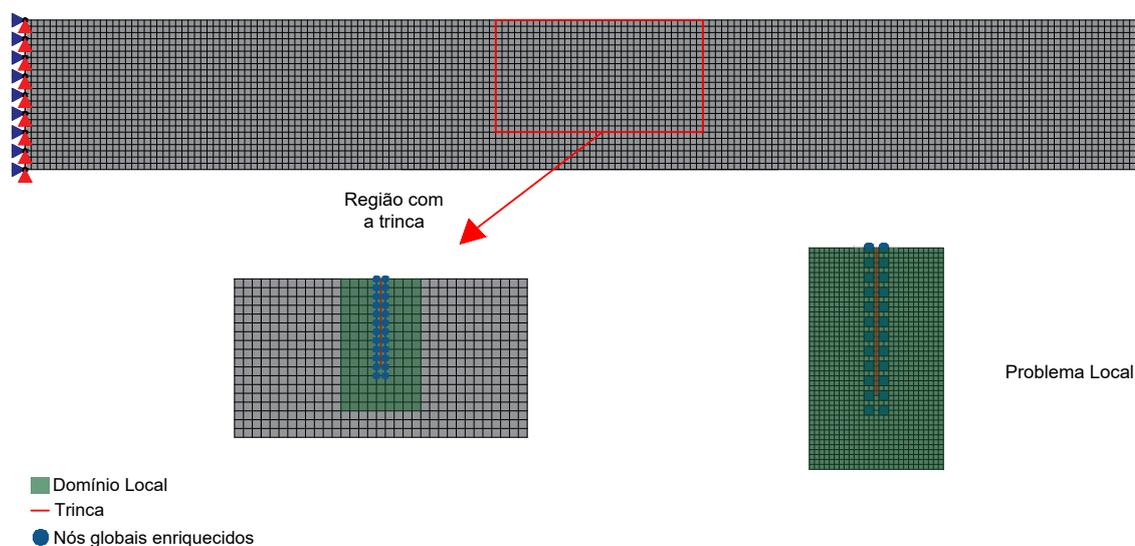


Figura 6.4: Modelo de Referência 2 com os problemas global e local. As três representações não estão na mesma escala.

considerando os mesmos parâmetros foram avaliados entre o Modelo Equivalente 1 e o Modelo de Referência 2, com os resultados apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.1: Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos da região central em chapa comparado com os modelos de referência 1 e 2

l	M	M/L	\mathcal{U}		\mathbf{K}_I	
			Modelo 1	Modelo 2	Modelo 1	Modelo 2
7	30	9,4%	8,66%	8,10%	29,03%	25,44%
6	40	12,5%	2,86%	2,33%	9,98%	6,92%
5	50	15,6%	0,92%	0,40%	3,28%	0,41%
4	60	18,8%	0,27%	0,25%	0,98%	1,83%
3	70	21,9%	0,07%	0,45%	0,25%	2,54%
2	80	25,0%	0,01%	0,50%	0,05%	2,73%
1	90	28,1%	0,00%	0,51%	0,01%	2,77%
0	100	31,3%	0,00%	0,51%	0,00%	2,78%

Tabela 6.2: Erro relativo do Modelo 1 com relação ao Modelo 2

\mathcal{U}	\mathbf{K}_I
0,514%	2,781%

Para a comparação com o Modelo Equivalente 1, o melhor resultado foi alcançado com $l = 0$, que corresponde à viga com acoplamento multidimensional com a região de chapa mais larga entre aquelas avaliadas. Este comportamento já era o esperado, visto que

quanto maior for este modelo, mais próximo se torna o seu comportamento do Modelo 1, uma vez que apresentam a mesma discretização. Ao avaliar o impacto do uso de modelos menores para simular a presença da trinca, a Tabela 6.1 evidencia comportamentos semelhantes para os três maiores modelos, ou seja, $l = 0, 1, 2$, quando comparados ao Modelo Equivalente 1. Adicionalmente, a Tabela 6.2 evidencia o grau de aproximação da resposta do modelo multidimensional em relação ao Modelo Equivalente 1, considerando que os erros observados, quando comparados ao Modelo de Referência 2, são similares aos apresentados na Tabela 6.1 para $l = 0$.

Quando a comparação se refere ao Modelo de Referência 2, com a malha mais refinada, há aumento do erro. Ainda assim, tais erros se estabilizam para $l = 0, 1, 2$, e, portanto, a instabilidade dos resultados do erro com a redução do modelo de dimensão superior deve ser explicado por outros fatores. De fato, a redução do tamanho do modelo de placa aumenta o número de elementos de viga Timoshenko. Uma consequência é uma resposta estrutural diferente com relação aos Modelos 1 e 2, nos quais apenas elementos planos Q4 são usados. Além disso, a redução do tamanho também aproxima as interfaces dimensionais da borda do problema local. Essa proximidade faz parte de uma investigação subsequente baseada no esquema representado na Figura 6.5.

O modelo multidimensional inicial da investigação anterior, Figura 6.3, com $l = 0$, é utilizado para definir as configurações dos sete modelos da Figura 6.5. O menor domínio local compreende os elementos globais que pertencem às nuvens de nós cortados pela trinca, ou seja, os elementos atravessados pela trinca e apenas uma camada adicional de elementos (em cor verde na figura). A partir deste domínio local inicial, outros seis domínios são definidos, aumentando uma camada de elementos ao redor da região local anterior. A Figura 6.5 indica os sete domínios locais no modelo global e como eles são obtidos para cada configuração.

O erro relativo do modelo multidimensional comparado com o Modelo de Referência 2 é apresentado na tabela 6.3.

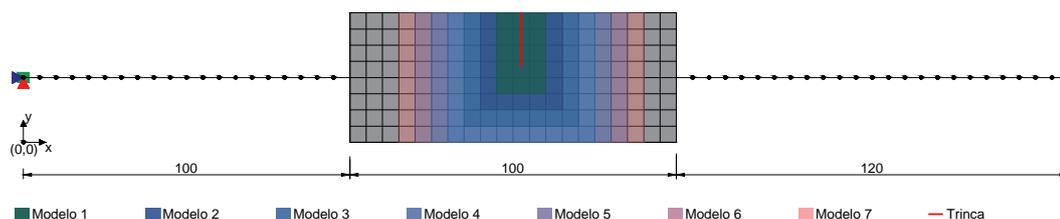


Figura 6.5: Modelos multidimensionais com diferentes tamanhos do problema local. Medidas em mm.

Tabela 6.3: Erro dos modelos com diferentes tamanhos de domínio local comparado com o modelo de referência 2

Problema Local	\mathcal{U}	K_I
Modelo 1	0,51%	2,78%
Modelo 2	0,49%	2,69%
Modelo 3	0,49%	2,69%
Modelo 4	0,49%	2,68%
Modelo 5	0,48%	2,68%
Modelo 6	0,48%	2,68%
Modelo 7	0,48%	2,68%

O aumento do domínio local não resulta em ganhos significativos na acurácia da solução apesar do esperado aumento do custo computacional. Na estratégia global-local, para o mesmo conjunto de nós enriquecidos, domínios locais maiores implicam uma zona *buffer*¹ maior, que pode reduzir o erro das condições de contorno inexatas aplicadas ao problema local (Gupta et al., 2012). Portanto, melhores resultados deveriam ser alcançados para o aumento dos problemas locais, o que não foi observado. A explicação para tal comportamento está fundamentada nos ciclos globais-locais adotados nas análises, que são capazes de controlar o erro da solução MEF^{gl}. A falta de sensibilidade ao tamanho do problema local também indica que a proximidade entre a fronteira local e a interface dimensional não interfere na solução.

Para além destes modelos de referência, os resultados de K_I da viga foram comparados com valores calculados a partir de uma formulação empírica para uma trinca de borda

¹Zona *buffer* compreende a região localizada entre a zona de enriquecimento e o contorno externo do domínio local. É uma camada intermediária que atua como uma região de amortecimento entre a área contendo singularidades, caracterizada por elevados gradientes de tensões e deslocamentos, e o restante do domínio onde a solução apresenta comportamento suave.

única em uma chapa submetida à tração, baseado em Tada et al. (2000) e dada por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (6.1)$$

no qual $a = 16mm$ é o tamanho da trinca e b é a altura da seção transversal, dada por $b = 40mm$. A relação $F\left(\frac{a}{b}\right)$ é expressa como:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1,122 - 0,231 \left(\frac{a}{b}\right) + 10,550 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,710 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,382 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (6.2)$$

A tabela 6.4 indica o erro entre o valor empírico de K_I com os valores obtidos para o Modelo Equivalente 1 e Modelo de Referência 2, além do modelo multidimensional com $l = 0$.

Tabela 6.4: Erro de K_I entre os diferentes modelos e o valor empírico

K_I		
Modelo 1	Modelo 2	Modelo Multidimensional
3,65%	0,55%	3,64%

Conforme esperado, tendo em vista o maior refinamento de sua discretização, o Modelo de Referência 2 apresentou resultados mais próximos dos valores empíricos. Os erros observados entre o Modelo Equivalente 1 e o Modelo Multidimensional foram ligeiramente superiores, porém, como já observado nas análises anteriores, muito próximos entre si. Com base nos valores obtidos, conclui-se que a abordagem proposta foi capaz de introduzir adequadamente a presença da trinca em um problema cujo comportamento global é governado pela teoria de viga de Timoshenko. Ademais, as discrepâncias observadas nos resultados são atribuídas, principalmente, à discretização, distinta no acoplamento entre os diferentes modelos.

6.1.2 Viga sob flexão descrita em \mathbb{R}^2

Nesta seção, inicialmente são utilizados os mesmos modelos e realizadas as mesmas análises da seção anterior, mas sob carregamento de flexão, $F = 0$ e $P = 12.000$. A flexão induz na viga modos de abertura de trinca I e II.

Além dos resultados para trincas estáticas, nesta seção também a propagação é considerada. Essa abordagem permite validar o desempenho do novo procedimento proposto, oferecendo uma visão mais completa sobre a resposta da viga sob diferentes tipos de solicitação.

Primeiramente, o comportamento dos mesmos oito diferentes modelos multidimensionais definidos pelo parâmetro l , Fig. 6.2, foram analisados para uma trinca estática e comparados ao Modelo Equivalente 1 e Modelo de Referência 2. Adicionalmente, o acoplamento multidimensional foi testado considerando a conexão rígida na interface para $l = 0$, com detalhamento apresentado oportunamente, e comparado aos valores da nova abordagem proposta.

A tabela 6.5 apresenta o erro relativo do modelo com acoplamento multidimensional resolvido com a estratégia proposta (conexão deformável) em termos de energia de deformação, \mathcal{U} , e os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} . A tabela 6.6 apresenta os mesmos erros relativos mas para o Modelo Equivalente 1 comparado ao Modelo de Referência 2.

Assim como observado seção anterior, com a viga submetida à tração, os melhores resultados para o modelo multidimensional correspondem àquele em que a região central atinge sua maior dimensão, ou seja, $l = 0$. Os erros mínimos observados para os modelos multidimensionais com os menores valores de l indicam que a estratégia de acoplamento aliada ao procedimento global-local permitem simular o comportamento global da estrutura na presença da trinca.

Uma nova análise foi, então, realizada com $l = 0$ e utilizando uma conexão rígida nas

Tabela 6.5: Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos da região central de chapa comparado com os Modelos 1 e 2

l	\mathcal{U}		\mathbf{K}_I		\mathbf{K}_{II}	
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 1	Modelo 2
7	11,96%	10,87%	36,84%	34,43%	224,98%	236,51%
6	4,06%	3,05%	12,67%	10,68%	106,67%	107,28%
5	1,45%	0,46%	4,19%	2,36%	47,28%	42,41%
4	0,56%	0,41%	1,28%	0,51%	18,83%	11,34%
3	0,28%	0,69%	0,34%	1,43%	6,52%	2,11%
2	0,21%	0,77%	0,08%	1,69%	1,90%	7,15%
1	0,19%	0,78%	0,02%	1,75%	0,43%	8,75%
0	0,19%	0,79%	0,00%	1,76%	0,06%	9,16%

Tabela 6.6: Erro relativo do Modelo 1 com relação ao Modelo 2

\mathcal{U}	\mathbf{K}_I	\mathbf{K}_{II}
0,974%	1,763%	9,226%

interfaces entre os modelos, em substituição ao processo iterativo de Wang et al. (2014). O objetivo aqui foi identificar a importância da estratégia de acoplamento na descrição do problema caso apenas o modelo de elevada dimensão (elementos planos) fosse empregado (Modelo Equivalente 1). Para isso utiliza-se uma estratégia sabidamente inadequada (MPC rígido) para comparar com a estratégia usada neste trabalho (MPC deformável) em termos de capacidade de representar as respostas do Modelo Equivalente. Nesta abordagem, o que se faz é realizar apenas a primeira iteração no processo iterativo do Algoritmo 1, com a ligação rígida entre os nós da interface. Os valores dos erros foram então calculados, com relação aos resultados do Modelo 1, revelando discrepâncias de 19,5% para energia, 21,42% para K_I e 31,4% para K_{II} . Comparando esses valores com os da Tabela 6.5 para $l = 0$, fica evidente a vantagem de empregar a estratégia de acoplamento de Wang et al. (2014) em análises multidimensionais.

Seguindo a mesma abordagem da seção 6.1.1, a partir do modelo com $l = 0$, foi realizada a análise de outros seis modelos aumentando o domínio local com a adição de uma camada de elementos ao redor da região local anterior. O erro relativo do modelo multidimensional comparado com o Modelo de Referência 2 está indicado na Tabela 6.7.

Tabela 6.7: Erro do modelo multidimensional com diferentes tamanhos do modelo local comparado com o Modelo de Referência 2

Local problem	\mathcal{U}	K_I	K_{II}
1	0,79%	1,71%	9,16%
2	0,51%	0,51%	1,07%
3	0,39%	0,07%	2,53%
4	0,23%	0,59%	8,79%
5	0,20%	0,64%	9,18%
6	0,18%	0,66%	9,31%
7	0,17%	0,67%	9,37%

Como na seção 6.1.1, o uso dos ciclos global-local faz com que o tamanho da zona *buffer* não impacte significativamente na acurácia dos resultados. Aqui, porém, devido a uma maior complexidade da solicitação (flexão induzindo o modo misto de abertura de trinca), nota-se uma maior variação dos resultados.

O modelo multidimensional da Figura 6.2, com $l = 4$, é agora utilizado para simular a propagação de trinca com 52 elementos de viga de Timoshenko e 12×8 elementos planos Q4. A escolha de $l = 4$ deve-se ao fato de que, nesse limiar, obtêm-se o menor mesomodelo possível que não produz um erro tão grande para K_{II} , e ainda permanecendo com valores baixos para \mathcal{U} e K_I . O comportamento do problema ao longo de cada etapa de propagação da trinca é comparado com a simulação fornecida pelos Modelos 1 e 2. Figura 6.6 apresenta os caminhos da trinca obtidos a partir dos três modelos. As figuras 6.7 e 6.8 representam o erro relativo (em valor absoluto) dos resultados do modelo multidimensional para a energia de deformação \mathcal{U} e ao fator de intensidade de tensão K_I . O fator K_{II} não foi incluído devido à sua alta oscilação, resultado de sua ordem de grandeza ser significativamente menor que a de K_I , o que torna seu cálculo muito mais sensível a perturbações numéricas, inclusive na aplicação da estratégia da Integral de Interação. Na Figura 6.7, o erro é medido considerando o Modelo Equivalente 1 e na Figura 6.8 considera-se o Modelo de Referência 2.

Em termos gerais, os comportamentos das três simulações são muito próximos e uma ligeira divergência inicial no caminho da trinca aumenta à medida que a propagação evolui.

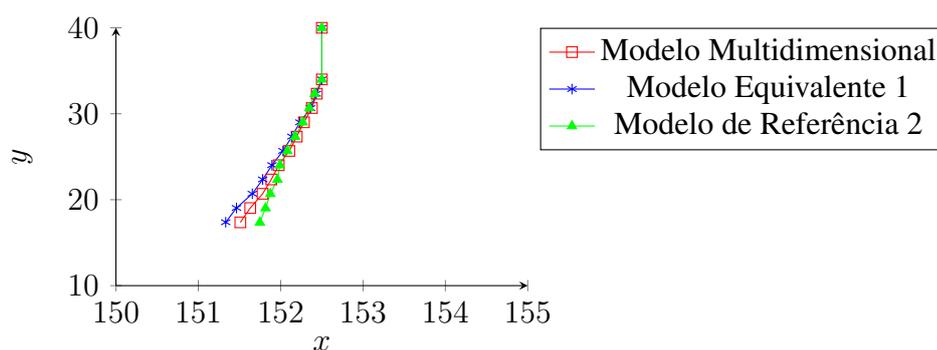


Figura 6.6: Propagação da trinca dos modelos

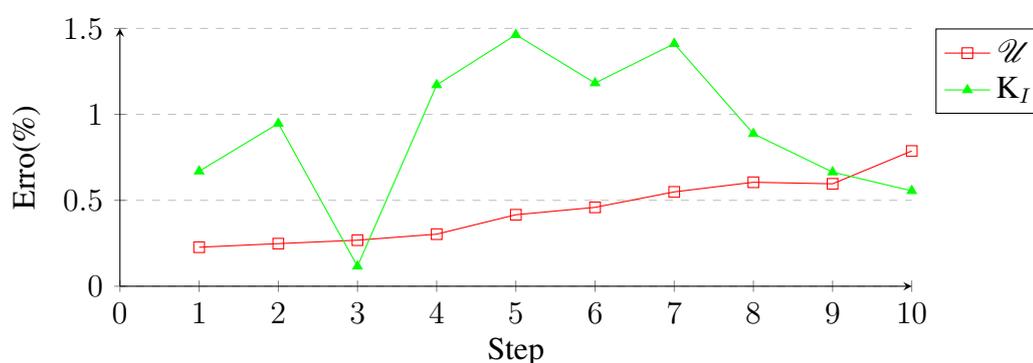


Figura 6.7: Erro - Modelo multidimensional x Modelo Equivalente 1

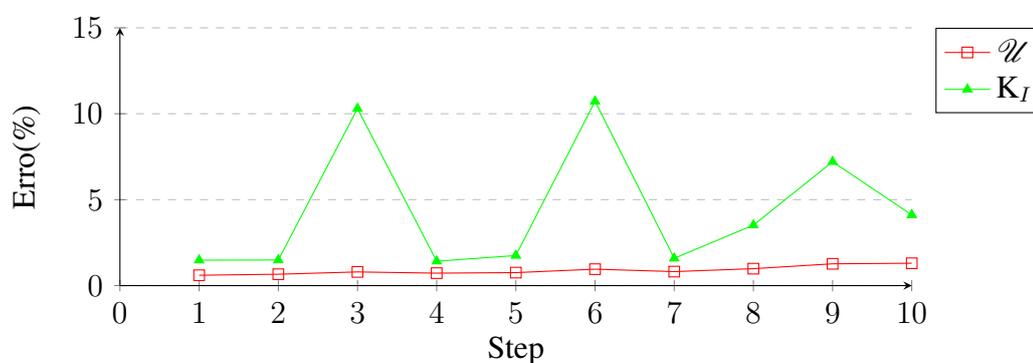


Figura 6.8: Erro - Modelo multidimensional x Modelo de Referência 2

A diferença de K_{II} observada nos resultados das Tabelas 6.5 e 6.6, interfere na orientação de cada novo segmento de trinca, e à medida que a trinca se propaga, a divergência torna-se mais proeminente, por um efeito acumulativo de pequenos erros anteriores, o que aumenta o erro entre os parâmetros calculados nos três modelos. Mesmo assim, os erros em \mathcal{U} , que representa o comportamento global da estrutura, são mantidos pequenos para as simulações. Observa-se uma oscilação no erro em K_I , Figura 6.8, limitada, porém a

12%. Notavelmente, comparado ao Modelo de Referência 2, o modelo multidimensional fornece uma propagação de trinca mais próxima daquele do que o Modelo Equivalente 1, Figura 6.6. Esta observação não deve necessariamente ser entendida como uma indicação de uma análise mais acurada. Na verdade, a presença dos elementos da viga Timoshenko no modelo multidimensional altera a flexibilidade da estrutura nas regiões mais distantes da trinca, o que pode modificar o seu comportamento global. Além disso, a região central do modelo multidimensional tem uma discretização idêntica à do Modelo Equivalente 1.

6.1.3 Viga descrita em \mathbb{R}^3

Nas seções anteriores, a estratégia proposta foi validada em um exemplo com modo I de abertura de trinca (seção 6.1.1), enquanto análises um pouco mais complexas, com modo misto, foram conduzidas para investigar a propagação da trinca (seção 6.1.2). Todas as análises foram realizadas utilizando a combinação de elementos unidimensionais e bidimensionais.

Nesta seção, o objetivo é validar a generalidade da implementação da estratégia proposta considerando um problema tridimensional com a trinca sendo representada por uma superfície plana. O modelo de escala dimensionalmente reduzida permanece como o modelo de viga de Timoshenko, entretanto, o modelo de maior escala é representado por elementos hexaedros de oito nós (H8), o que adiciona uma nova camada de complexidade à análise. Com a mudança dos elementos do modelo de dimensão superior, também há alteração na forma que é construído o modelo de forças nodais (MFN), Fig. 6.9. Nesta representação, associada à interface tridimensional entre os dois modelos acoplados, os nós de carregamento são conectados aos nós dos elementos H8 que pertencem ao plano de uma das extremidades.

Os parâmetros do modelo permanecem os mesmos e as análises foram conduzidas para uma trinca estática. Apenas um único modelo foi utilizado para validar o acoplamento, o Modelo Equivalente, uma vez que o seu uso é o mais relevante para este objetivo. Este modelo foi completamente discretizado com elementos H8 em todo o comprimento.

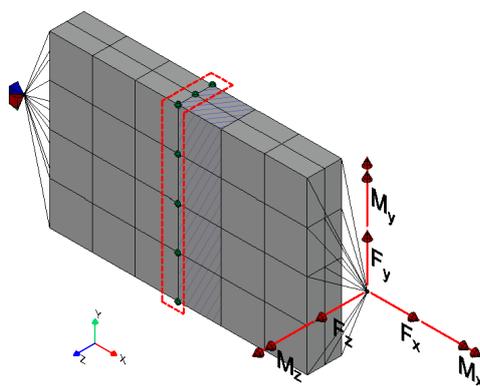


Figura 6.9: Modelo de Forças Nodais.

O procedimento global-local via MEFG implementado no INSANE conforme Santos e Barros (2020) é utilizado nesta análise para simular a trinca estática em modelos tridimensionais.

Assim como apresentado na Seção 4.2 (Equação (4.3)), no MFN do acoplamento do modelo 3D com o elemento de viga, também foi necessário anular os termos dos vetores resultantes da solução do MFN para se garantir o desacoplamento dos graus de liberdade. Para o caso tridimensional, vetor de forças nodais na seção média ($\mathbf{f}_{SE,i}$) está associado aos carregamentos unitários $i = F_x, F_y, F_z, M_x, M_y$ ou M_z da viga. Os nós do elemento H8 possui 3 componentes de deslocamento nas três direções, D_x, D_y e D_z . Para este acoplamento, as componentes D_x foram associadas às forças F_x, M_y e M_z , as componentes D_y associadas a F_y, M_x e M_z , e por fim, D_z a F_z, M_x e M_y .

A Figura 6.10 representa a discretização adotada para o modelo multidimensional. Elementos de pórtido de Timoshenko de tamanho 5 mm são usados nos primeiros 100 mm e nos últimos 120 mm da viga, resultando em 44 elementos. A região central é discretizada por uma malha de 320 elementos H8 com tamanho $5\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 4\text{ mm}$. Um carregamento que origina uma solicitação de flexão com relação ao eixo z , $P = 12.000\text{ N}$ e $F = 0$, é considerado na extremidade direita da viga. Uma trinca estática de tamanho $a = 16\text{ mm}$ é considerada. A figura 6.11 representa o Modelo Equivalente e a discretização segue o mesmo critério descrito na introdução da seção 6 e o problema global

resultante apresenta 1024 elementos hexaedros H8. O domínio local é obtido de maneira semelhante à descrita na introdução do capítulo 6, resultando da divisão dos elementos globais em $3 \times 3 \times 3$ elementos locais, resultando em 810 elementos.

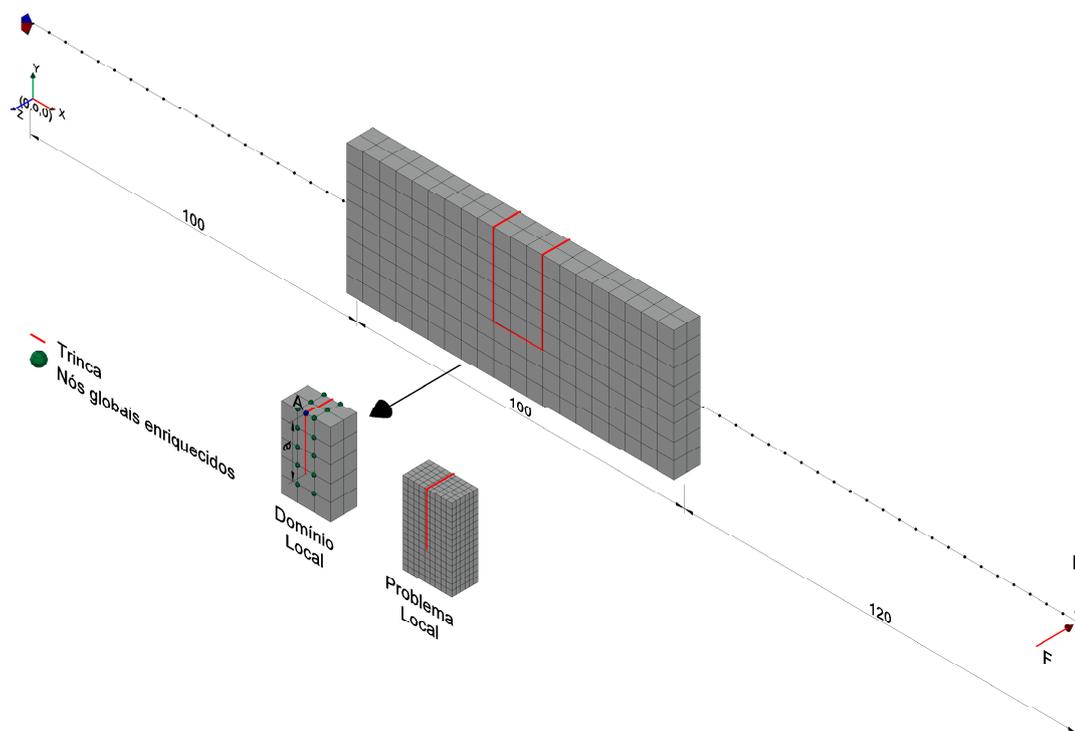


Figura 6.10: Modelo multidimensional tridimensional. Medidas em mm.

Os resultados do erro relativo da simulação do modelo multidimensional em termos de energia de deformação, \mathcal{U} , e abertura da trinca estão resumidos na Tabela 6.8. Foi utilizada a abertura de trinca para análise deste problema uma vez que o cálculo do fator de intensidade de tensão não está implementado no INSANE para problemas tridimensionais. Para este problema foram necessárias três iterações para a convergência dos fatores de intensidade de tensões e para o cálculo da matriz C , Algoritmos 2 e 1, respectivamente.

Tabela 6.8: Erro entre o Modelo Multidimensional e Modelo Equivalente

\mathcal{U}	Abertura
0,514%	0,34%

O cálculo da abertura da trinca é realizado na extremidade superior, no ponto A da Figura 6.10. Contudo, qualquer ponto ao longo do segmento da trinca apresentará o mesmo valor,

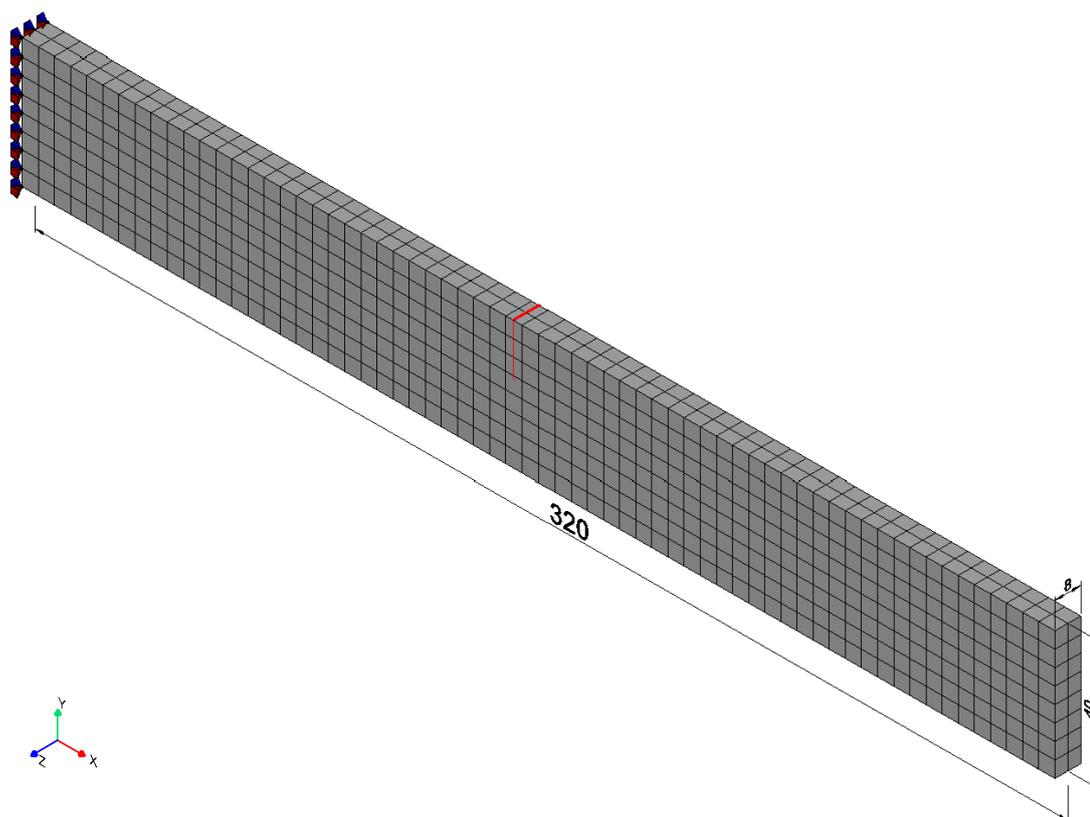


Figura 6.11: Modelo tridimensional Equivalente. Medidas em mm.

devido à natureza do carregamento aplicado. São observados erros pequenos, merecendo registrar que o erro em energia é o mesmo obtido para o modelo bidimensional, Tabela 6.2, cuja solução é reproduzida com êxito aqui.

Foram traçados gráficos com a descrição da variação das componentes de tensão σ_{xx} (figura 6.12) e σ_{xy} (figura 6.13) ao longo da coordenada y , nas coordenadas $x = 152,5$ mm e $z = 4$ mm, ou seja, logo na frente de trinca.

É possível perceber que a nova técnica multidimensional implementada utilizando o MEFG via técnica Global-Local tem a variação das componentes de tensão σ_{xx} e σ_{xy} ao longo de y com valores similares à solução Equivalente.

Conforme esperado, os resultados apresentados na Tabela 6.8 e nos gráficos das Figuras 6.12 e 6.13 demonstram o sucesso na generalização da proposta, obtendo resultados satisfatórios para acoplamentos no espaço 3D.

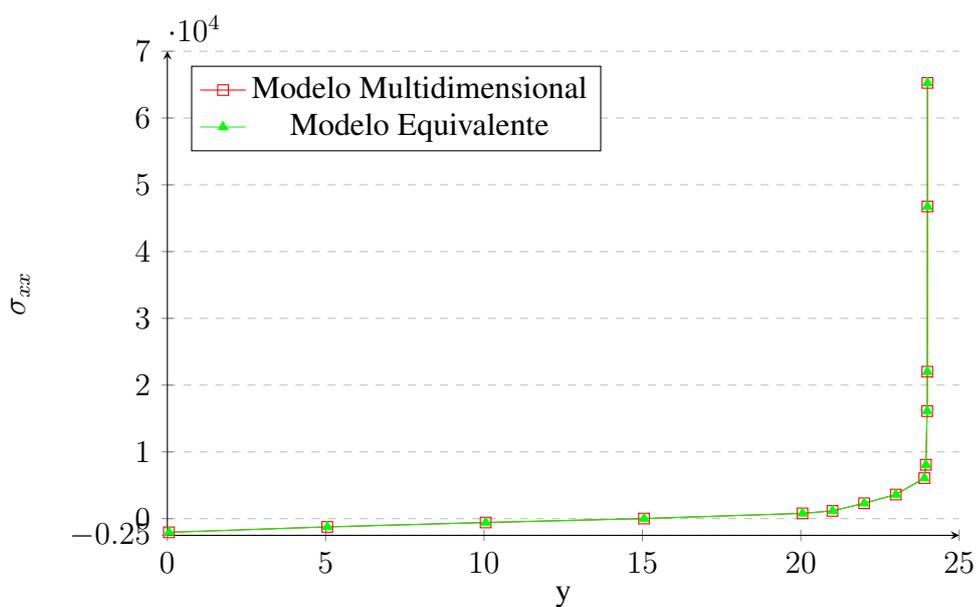


Figura 6.12: Variação de σ_{xx} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$

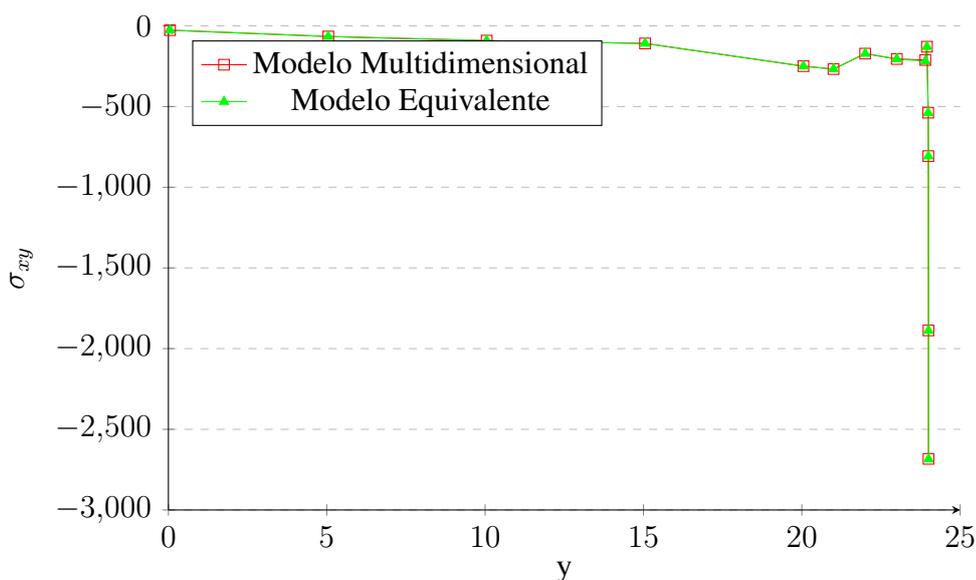


Figura 6.13: Variação de σ_{xy} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$

Para o modelo tridimensional, além da força na direção Y de valor $P = 12 \text{ kN}$ aplicada na extremidade da viga, foi realizado uma segunda análise na qual uma força $F = 120 \text{ N}$ foi adicionada na direção Z da extremidade do modelo (Figura 6.14) de forma a possibilitar uma análise com a presença do Modo III de abertura de trinca típico de problemas tridimensionais. Neste modelo, a trinca é limitada à metade da espessura do mesomodelo, em função do comportamento resultante do carregamento aplicado.

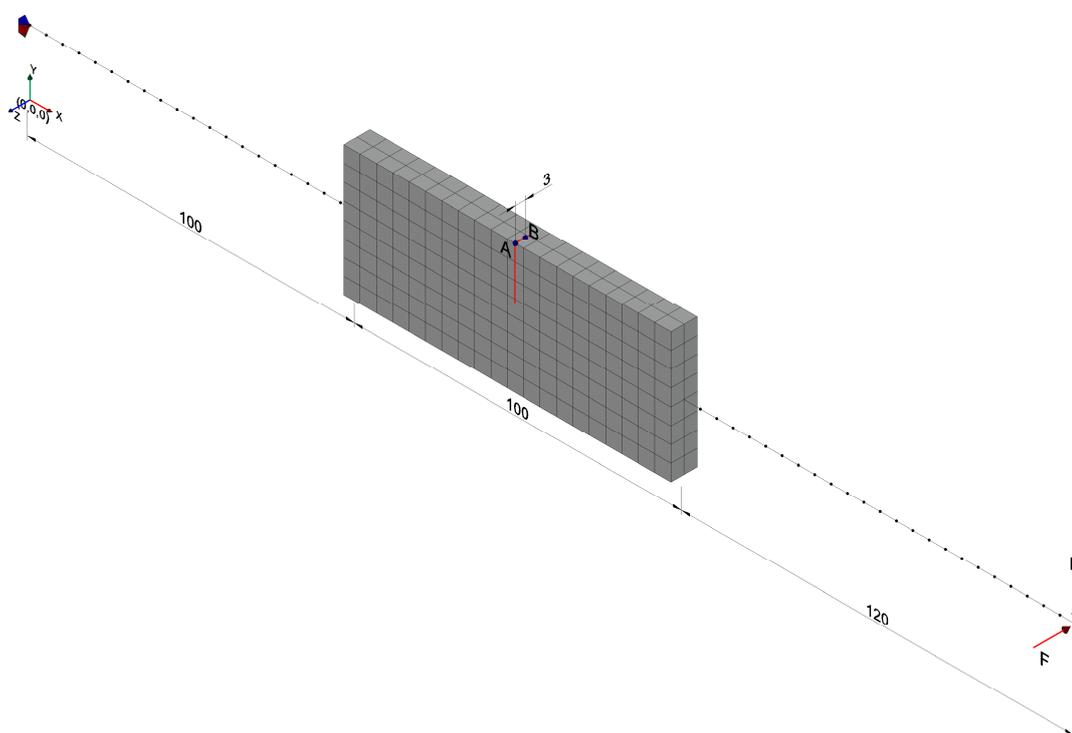


Figura 6.14: Modelo multidimensional tridimensional com a aplicação das forças na direção Y e Z e a trinca limitada à metade da espessura.

Os resultados do valor da abertura da trinca nos pontos A e B do modelo multidimensional da Figura 6.14 e do erro relativo em relação ao Modelo Equivalente (com a mesma configuração de trinca da Figura 6.14) em todas as direções do eixo estão resumidos na Tabela 6.9.

Tabela 6.9: Abertura de trinca do Modelo Multidimensional em todas as direções e erro em relação ao Modelo Equivalente

Ponto	Abertura de trinca			Erro		
	X	Y	Z	X	Y	Z
A	2,017E-1	8,430E-4	1,067E-3	0,008%	0,119%	0,466%
B	1,171E-1	8,240E-4	7,360E-4	0,012%	0,122%	0,675%

Em termos de energia de deformação, \mathcal{U} , o erro relativo foi de apenas $\mathcal{U} = 0,51\%$. Na avaliação do comportamento das componentes de tensão σ_{xx} (Figura 6.15) e σ_{xz} (Figura 6.16) ao longo da coordenada y, nas coordenadas $x = 152,5$ e $z = 4$, para a solitação proposta, os resultados estão muito próximos, quando comparados à solução do modelo equivalente. Com isso, a concentração de tensões na proximidade da frente da trinca

foi devidamente representada. Merece registro que as diferenças com relação ao modelo equivalente em termos de energia, abertura de trinca e componentes de tensão são de mesma ordem de grandeza daquelas observadas para o carregamento com $F = 0$ (Tabela 6.8 e Figuras 6.12 e 6.13). Não houve, portanto, penalização na precisão do método quando, na simulação, o Modo III é incluído.

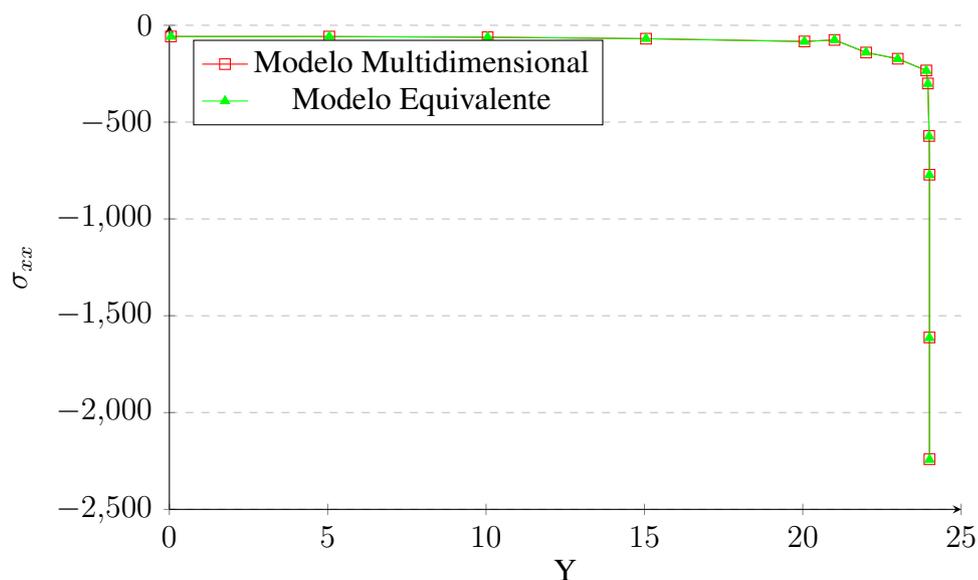


Figura 6.15: Variação de σ_{xx} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$

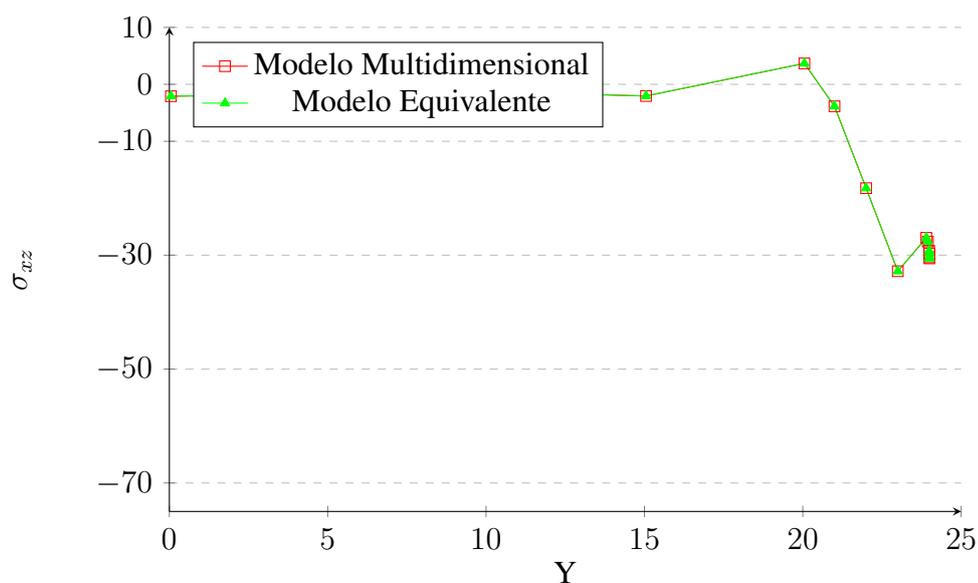


Figura 6.16: Variação de σ_{xz} ao longo da coordenada y em $x = 152,5$ e $z = 4$

6.2 Pórtico em L

No segundo exemplo numérico, também apresentado no trabalho Gomes e Barros (2024), o objetivo é investigar o acoplamento multidimensional no MEF gl para um problema com duas interfaces em diferentes orientações. O procedimento global-local automatizado de Fonseca et al. (2020) é utilizado novamente para simular a propagação da trinca. A Figura 6.17 apresenta uma estrutura de pórtico em L no qual uma trinca inicial inclinada é colocada no canto inferior da ligação viga e coluna. A estrutura é solicitada por uma força $P = 21 \text{ kN}$, e um material elástico linear isotrópico é considerado com um módulo de elasticidade de $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. São considerados condições de estado plano de tensão.

A Figura 6.18 representa a discretização adotada para o modelo multidimensional. Elementos de pórtico baseado na formulação de Timoshenko de tamanho 5 cm são usados nos primeiros 260 cm do pilar e nos últimos 110 cm da viga, resultando em um total de 74 elementos. O problema global da região da quina (mesoescala) é discretizado por uma malha de 60 Q4 elementos planos com tamanho $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Figuras 6.19 e 6.20 representam o Modelo Equivalente 1 e o Modelo de Referência 2, respectivamente. A discretização segue o mesmo critério descrito na introdução deste capítulo. Os problemas globais (as mesoescalas) associados a cada modelo apresentam 504 e 4536 elementos planos Q4. As figuras 6.18, 6.19 e 6.20 também representam a região de enriquecimento inicial (anterior à propagação da trinca) dos problemas globais e os respectivos problemas locais. Para este problema foram necessárias quatro iterações para a atingir a convergência dos fatores de intensidade de tensões e para o cálculo da matriz C, Algoritmos 2 e 1, respectivamente.

As trajetórias da trinca para os três modelos analisados estão representados na figura 6.21. A tabela 6.10 apresenta as coordenadas finais das trajetórias e as tabelas 6.11 e 6.12 reúnem os erros relativos da simulação do modelo multidimensional em termos de energia de deformação, \mathcal{U} , fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , e deslocamentos

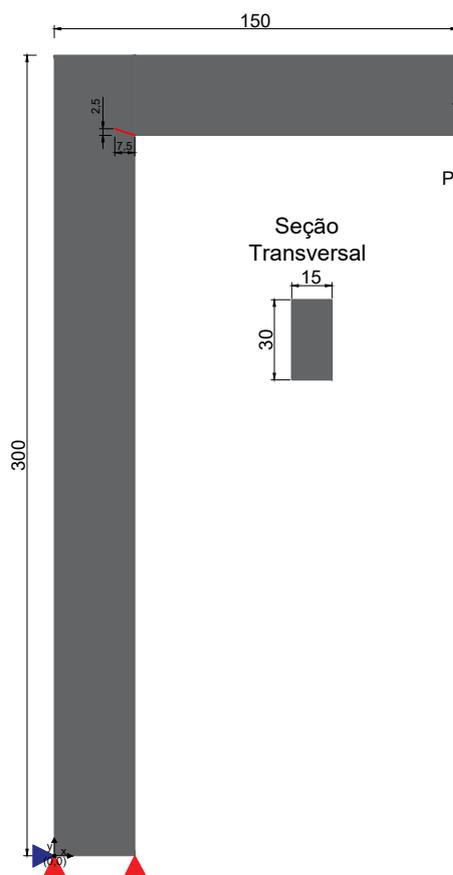


Figura 6.17: Pórtico em L. Todas as dimensões estão em *cm*

horizontais e verticais, u_x e u_y , da extremidade direita do pórtico. Na tabela 6.11, o erro está associado ao Modelo Equivalente 1, e na tabela 6.12 ao Modelo de Referência 2.

Tabela 6.10: Coordenadas finais da trinca

Modelo	X	Y
Modelo Multidimensional	15,04	269,55
Modelo Equivalente 1	15,27	269,16
Modelo de Referencia 2	15,17	269,47

Tabela 6.11: Erro em relação ao modelo 1

Passo da propagação da trinca	\mathcal{U}	K_I	K_{II}	u_x	u_y
0	0,26%	-	-	0,44%	0,26%
1	0,16%	4,37%	117,36%	0,41%	0,16%
2	0,14%	1,17%	5,99%	0,40%	0,14%
3	0,08%	5,48%	32,03%	0,38%	0,08%
4	0,04%	6,29%	19,65%	0,36%	0,04%
5	0,03%	6,60%	32,85%	0,33%	0,03%

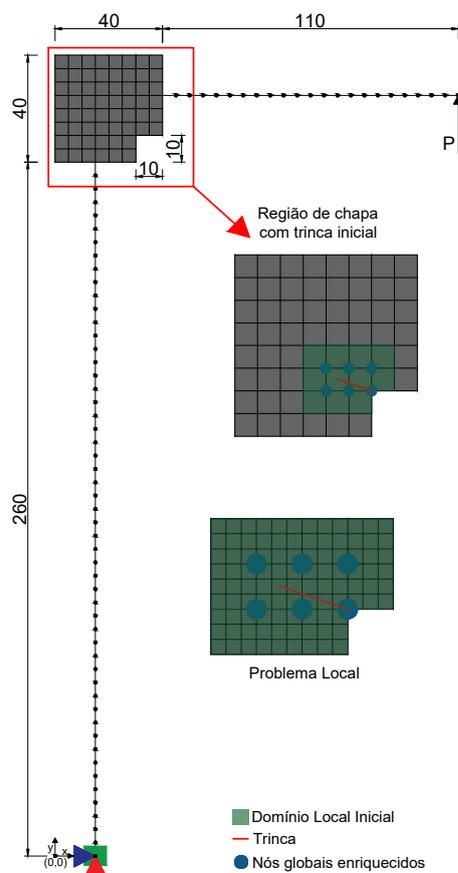


Figura 6.18: Modelo Pórtico em L multidimensional. Todas as dimensões estão em *cm*. As três representações não estão na mesma escala.

Tabela 6.12: Erro em relação ao modelo 2

Passo da propagação da trinca	\mathcal{U}	K_I	K_{II}	u_x	u_y
0	1,24%	-	-	0,641%	1,242%
1	1,00%	102,99%	69,36%	0,646%	0,998%
2	0,97%	88,56%	240,08%	0,650%	0,969%
3	0,96%	31,19%	40,04%	0,662%	0,961%
4	0,92%	30,32%	41,81%	0,665%	0,923%
5	0,95%	40,25%	5,14%	0,679%	0,951%

Confirmando as observações de Seção 6.1, o comportamento do modelo multidimensional é bem semelhante ao dos Modelos 1 e 2. Os maiores erros observados para os fatores de intensidade de tensão, especialmente K_{II} , que é mais sensível a perturbações numéricas, explica o ligeiro desvio da trajetória da trinca entre as simulações dos dois modelos após a terceira etapa. Deve-se notar que a geometria e o comportamento deste problema são mais complexos que os da seção 6.1, e, portanto, a substituição de parte significativa

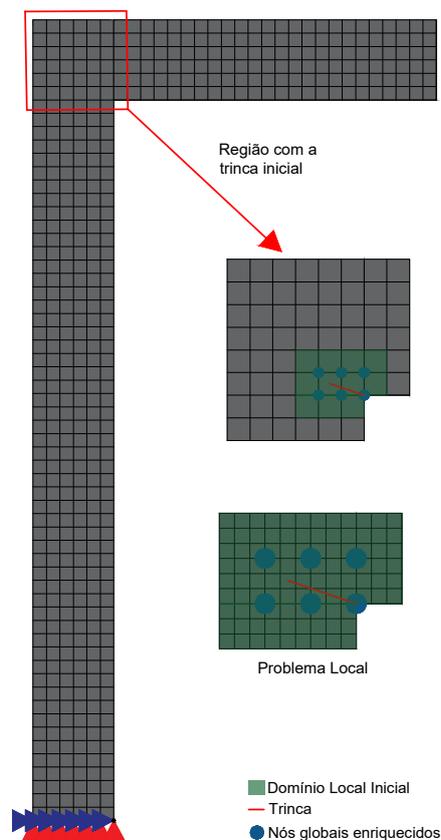


Figura 6.19: Pórtico em L - Modelo Equivalente 1. As três representações não estão na mesma escala.

da malha de elementos planos Q4 por uma malha de elementos de pórtico de Timoshenko pode explicar as diferenças entre os parâmetros avaliados. Por outro lado, essas diferenças não perturbam a configuração final da trinca, e a estratégia proposta consegue representar a propagação da trinca em um modelo de pórtico baseado na formulação de Timoshenko. Considerando também os erros observados nos deslocamentos u_x e u_y , pode-se concluir que a estratégia de acoplamento foi capaz de reproduzir em um modelo em que a maior parte de seu domínio é representado por elementos de viga de Timoshenko, o comportamento global advindo da propagação de trinca no contato viga e coluna.

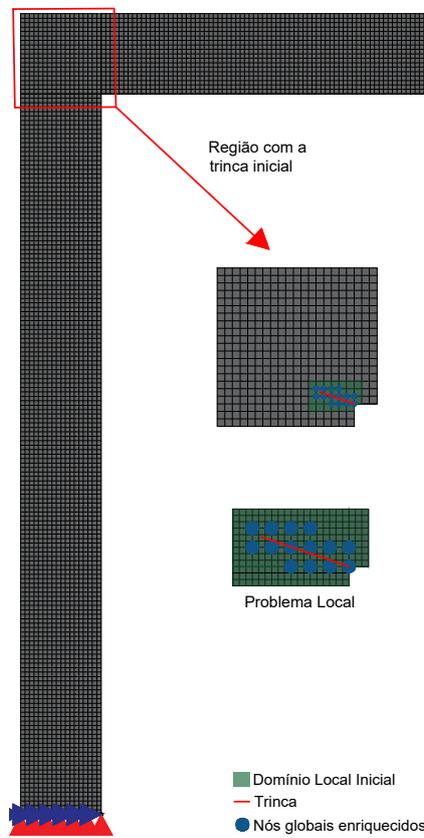


Figura 6.20: Pórtico em L - Modelo de Referência 2. As três representações não estão na mesma escala.

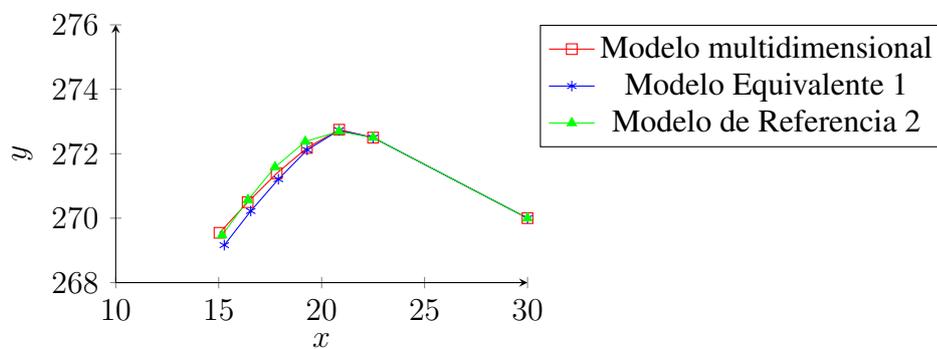


Figura 6.21: Passos da trinca

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste capítulo são apresentadas as principais contribuições e conclusões deste trabalho, seção 7.1, bem como algumas recomendações para trabalhos futuros, seção 7.2.

7.1 MEEG com enriquecimento global-local para análise multidimensional

O presente trabalho investigou a aplicação de uma estratégia de acoplamento multidimensional combinada com o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEEG^{gl}) para simular trincas em problemas bidimensionais e tridimensionais de Mecânica da Fratura Linear Elástica. A análise foi conduzida em dois exemplos numéricos: uma viga em balanço e um pórtico em L, ambos com trincas iniciais que foram simuladas considerando-as como estáticas ou se propagando de maneira quase estática.

A proposta de acoplamento entre modelos de dimensões distintas visa descrever a resposta global de uma estrutura com um modelo denominado como dimensionalmente reduzido (como viga de Timoshenko) acoplado a um modelo de elevada dimensionalidade (como discretizado por elementos planos ou hexaédricos) que possa representar fenômenos locais complexos. O procedimento iterativo de Wang et al. (2014) foi adotado para garantir a compatibilidade do deslocamento e o equilíbrio das tensões na interface entre os dois tipos de modelos. Esta abordagem utiliza uma matriz de coeficientes para relacionar os

graus de liberdade nas interfaces. Neste trabalho, duas adaptações foram necessárias no procedimento descrito em Wang et al. (2014), a primeira delas foi a aplicação direta da matriz de coeficientes nos nós da interface do Modelo de Forças Nodais a partir da segunda iteração do processo iterativo. Já a segunda adaptação consiste na eliminação de determinados termos dos vetores que definem a matriz de coeficientes para garantir o desacoplamento entre os graus de liberdade, conforme realizado no equacionamento de McCune et al. (2000), mas ignorado no procedimento iterativo de Wang et al. (2014). Sem este desacoplamento, torna-se inviável a obtenção dos resultados, pois ocorre divergência na determinação da matriz de coeficientes C . Realizada esta modificação, foram necessárias, em média, apenas três iterações para a convergência do processo iterativo do MFN e para o cálculo da matriz de coeficientes, C .

Um dos aspectos relevantes do novo procedimento é a capacidade de manter a discretização inalterada ao longo da interface, independentemente da evolução do fenômeno de interesse, algo que é assegurado pelo uso do GFEM^{gl} e pela introdução da mesoescala no modelo global. O GFEM^{gl} permite a utilização de uma malha refinada na escala local que representa o fenômeno local de forma acurada, enquanto a escala global se mantém inalterada durante todo o processo. A mesoescala é definida por um modelo intermediário de elevada dimensionalidade que assume o papel de modelo global na análise do GFEM^{gl}. Este mesomodelo proporciona uma flexibilidade significativa na definição e no refinamento do modelo de elevada dimensionalidade, uma vez que o modelo local é capaz de acompanhar a propagação da trinca, permitindo a realização de um novo remalhamento a cada segmento adicional de trinca no modelo local. Isso ocorre sem a necessidade de alterações na malha do problema global, evitando, assim, a reestruturação completa do processo de acoplamento em cada etapa da propagação. Esse procedimento simplifica a solução e reduz o custo computacional que seria exigido caso fosse necessário reconstruir o acoplamento na interface de análise a cada novo segmento de trinca. O modelo intermediário é definido na mesma região onde será definido o modelo local e adota a mesma formulação de elementos finitos, desempenhando um papel central de ponte entre

os modelos de maior e de menor dimensão.

Inicialmente, simulou-se uma viga em balanço sob esforço de tração e flexão para avaliar a metodologia proposta. Foram variados, isoladamente, os tamanhos do modelo de maior dimensão e do problema local para avaliar o impacto nos resultados. No que se refere à mesoescala, conclui-se que seu tamanho é fundamental para a qualidade da simulação, devendo ser suficientemente grande para capturar o fenômeno local. Por outro lado, deve-se estabelecer um limite de forma que as vantagens de desempenho computacional do acoplamento não sejam perdidas. Para os diversos tamanhos testados, foi observado que os erros em \mathcal{U} , K_I e K_{II} reduziram-se com o aumento do mesomodelo, até um certo limite a partir do qual se estabilizaram. Não há, portanto, a necessidade de se aumentar indefinidamente a mesoescala para se reproduzir o resultado do modelo equivalente. No entanto, um mesomodelo muito pequeno resultou em erros significativamente maiores, o que pode ser explicado pela proximidade entre a região do domínio local, e, conseqüentemente, a região com nós enriquecidos, e a interface. Outro ponto relevante é que a variação no tamanho do domínio local não causou alterações na resposta do modelo, mesmo quando o modelo local foi definido muito próximo da interface. Esse resultado sugere a viabilidade de construir o problema local com dimensões próximas às da mesoescala, permitindo a descrição completa da trajetória da trinca sem impactar a distribuição dos nós na interface. Entretanto, é imprescindível que o modelo local não coincida com a interface, pois, nesse caso, não seria possível estabelecer as condições de contorno necessárias para o problema local.

Em seguida, foi analisada a propagação de trincas na viga sob esforço de flexão, validando a metodologia ao longo de múltiplas etapas de propagação da trinca. Os resultados indicaram que a estratégia de acoplamento, combinada com o procedimento global-local, permitiu uma representação precisa da trajetória da trinca, ao longo dos passos de propagação.

Os resultados obtidos para a viga em balanço mostraram que a estratégia proposta é eficaz

em capturar o comportamento geral da estrutura, tanto sob esforços de tração quanto de flexão. Para a comparação com modelos de referência, os menores erros foram observados quando o modelo de chapa era suficientemente grande, indicando que a redução excessiva do modelo de maior dimensão pode comprometer a acurácia da solução. Além disso, foi possível verificar que a proximidade entre a interface dimensional e a fronteira do problema local não interferiu significativamente nas soluções obtidas.

Finalmente, a estratégia foi aplicada em um modelo tridimensional, onde elementos hexaédricos de 8 nós foram acoplados a elementos de pórtico com formulação de Timoshenko, submetido a carregamentos distintos responsáveis pela flexão em dois eixos transversais. A extensão da metodologia para um modelo tridimensional, com elementos de viga de Timoshenko acoplados a elementos hexaédricos, demonstrou que a estratégia é versátil, generalizável e pode ser aplicada em acoplamentos mais complexos, mantendo a precisão nos resultados.

A aplicação da estratégia em um pórtico em L com duas interfaces em orientações diferentes também validou a metodologia, com a trajetória da trinca e os parâmetros avaliados apresentando boa concordância com os modelos de referência. Apesar das discrepâncias observadas nos fatores de intensidade de tensão, especialmente (K_{II}), as análises mostraram que as diferenças não perturbaram a configuração final da trinca, confirmando que a metodologia é robusta. No modelo de pórtico, o mesomodelo é consideravelmente reduzido, e a trinca se aproxima muito da interface. Como mencionado anteriormente, essa proximidade pode estar interferindo nos resultados, o que explica os erros mais elevados em comparação ao modelo de viga.

É importante destacar um aspecto relacionado aos valores de K_{II} : tanto para o modelo de viga quanto para o modelo de pórtico, o erro associado a K_{II} foi significativamente maior em comparação aos valores de K_I e da energia (\mathcal{U}). Isso pode ser atribuído à maior sensibilidade de K_{II} a perturbações numéricas na estratégia de extração da Integral de Interação, devido à sua ordem de grandeza ser muito menor - cerca de dez vezes

inferior à de K_I -, o que fazia com que qualquer alteração resultasse em diferenças mais significativas.

7.2 Recomendação para trabalhos futuros

O presente trabalho estabelece uma base sólida para futuras investigações e aprimoramentos na metodologia de acoplamento multidimensional no contexto do GFEM^{gl}. As seguintes sugestões são propostas para trabalhos futuros:

1. Automação da construção do Modelo de Forças Nodais (MFN): Formular e implementar estratégia que possibilite, a partir da identificação dos elementos que compõem a interface (subestrutura da Figura 3.10), seja construído o MFN, automaticamente.
2. Otimização do Processo Iterativo: Investigar técnicas para aceleração do procedimento iterativo de Wang et al. (2014), visando reduzir o tempo de cálculo e aumentar a eficiência computacional, principalmente quando associado à inserção dos coeficientes da matriz de transformação T na resolução do sistema de equações do MEF.
3. Aplicação em problemas de propagação de trinca por fadiga
4. Aplicação em problemas com múltiplos acoplamentos, com a presença de várias mesoescalas. Neste caso, pode-se também adaptar o código para permitir o processamento paralelo em que cada diferente MFN e cada solução local pelo MEF^{gl} fique associado a um processador.
5. Aplicação em problemas mais complexos: Expandir a análise para problemas com outras formulações de elementos, como acoplamento sólido-casca, casca-viga, que podem representar estruturas mais próximos da realidade, como componentes aeronáuticos ou automotivos.

6. Estudo em modelos com não linearidade: Expandir a estratégia para lidar com problemas em que a não linearidade física é governada por fenômenos confinados localmente. Isso envolve adaptar a estratégia de solução para se levar em conta a mudança de comportamento do meio na escala local e sua influência no comportamento global da estrutura. Pode-se aproveitar o trabalho feito por Monteiro (2019) que propõe uma estratégia global-local para lidar com a propagação de dano em regiões confinadas do domínio de estruturas com materiais parcialmente frágeis. O mesmo procedimento poderia ser adaptado para lidar com a propagação de trinca empregando modelo coesivo (Oliveira, 2024) ou mesmo para se levar em conta a plastificação do meio.
7. Introduzir a propagação de superfícies de trincas não planas em modelos tridimensionais no INSANE e viabilizar simulações com acoplamento multidimensional.

Estas direções futuras podem levar ao desenvolvimento de novas técnicas e aprimorar significativamente a robustez, eficiência e aplicabilidade da metodologia de acoplamento multidimensional no contexto do GFEM^{gl}.

Referências Bibliográficas

ABAQUS, D. S., 2014. 'Version 6.14 documentation'. *Dassault Systemes*, .

Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., 2013. 'An object-oriented approach to the Generalized Finite Element Method'. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1–18.

Armstrong, C. G., Bridgett, S. J., Donaghy, R. J., McCune, R. W., McKeag, R. M. e Robinson, D. J., (1998), Techniques for interactive and automatic idealization of cad models, in 'Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations', London, UK, p. 643–662.

Armstrong, C. G., McCune, R. W. e Robinson, D. J., (1998), Multi-dimensional analysis modeling, in 'Proceedings of 6th ACME Annual Conference on Computational Mechanics', UK, p. 47–50.

Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. 'Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201–204, pp. 91–111.

Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. 'Special finite element method for a classe of second order elliptic problems whith rough coefficients.'. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 36, pp. 3553–3576.

- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The Partition of Unity Method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 727–758.
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Bauman, P. T., Dhia, H. B., Elkhodja, N., Oden, J. T. e Prudhomme, S., 2008. ‘On the application of the arlequin method to the coupling of particle and continuum models’. *Computational Mechanics*, vol. 42(4), pp. 511–530.
- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601–620.
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G., 2009. ‘A review of extended/generalized finite element methods for material modeling’. *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering*, vol. 17, pp. 1–24.
URL: <https://doi.org/10.1088/0965-0393/17/4/043001>
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. e Krysl, P., 1996. ‘Meshless methods: an overview and recent developments’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139(1), pp. 3–47.
- Belytschko, T., Lu, Y. e Gu, L., 1994. ‘Element-free galerkin methods’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229–256.
URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- Brezzi, F., Lions, J.-L. e Pironneau, O., (2003), The chimera method for a model problem, in F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro e A. Murli, eds, ‘Numerical Mathematics and Advanced Applications’, Springer Milan, Milano, pp. 817–825.

- Chan, T. H. T., Li, Z. X., Yu, Y. e Sun, Z. H., 2009. ‘Concurrent multi-scale modeling of civil infrastructures for analyses on structural deterioration - part ii: model updating and verification’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45(11), pp. 795–805.
- Cui, C., Zhang, Q., Banerjee, U. e Babuška, I., 2022. ‘Stable generalized finite element method (SGFEM) for three-dimensional crack problems’. *Numerische Mathematik*, vol. 152, pp. 475–509.
- Daxini, S. D. e Prajapati, J. M., 2014. ‘A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications’. *The Scientific World Journal*, vol. 2014(1), pp. 247172.
URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2014/247172>
- Dhia, H. e Rateau, G., 2005. ‘The arlequin method as a flexible engineering design tool’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62(11), pp. 1442–1462.
- Dolbow, J., Moës, N. e Belytschko, T., 2000. ‘Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 36, pp. 235–260.
- Dowling, N. E., 2007. *Mechanical Behaviour of Materials - Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*. Pearson.
- Duarte, C., 1996. The hp-cloud method. PhD thesis, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computer & Structures*, vol. 77(2), pp. 215–232.
- Duarte, C. A. e Kim, D.-J., 2008. ‘Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(6-8), pp. 487–504.

- Duarte, C. A., Kim, D.-J. e Babuška, I., (2007), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to three-dimensional cracks, *in* V. M. A. Leitão, C. J. S. Alves e C. Armando Duarte, eds, ‘Advances in Meshfree Techniques’, Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 1–26.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., (1995), Hp-clouds - a meshless method to solve boundary-value problem, Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin.
URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25450.93125>
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996a. ‘H-p clouds – an h-p meshless method’. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12, pp. 673–705.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996b. ‘An hp adaptive method using clouds’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- Duval, M., Passieux, J.-C., Salaün, M. e Guinard, S., 2016. ‘Non-intrusive coupling: Recent advances and scalable nonlinear domain decomposition’. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 17–38.
URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-014-9132-x>
- Erdogan, F. e Sih, G. C., 1963. ‘On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear’. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85(4), pp. 519–525.
- Evangelista, F., Roesler, J. R. e Duarte, C. A., 2013. ‘Two-scale approach to predict multi-site cracking potential in 3-d structures using the generalized finite element method’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, pp. 1991–2002.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.01.029>
- Felippa, C. A., 2004, *Introduction to Finite Element Methods*, University of Colorado, Boulder, Colorado, chapter MultiFreedom Constraints I.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Fonseca, F. T. e Pitangueira, R. L. S., 2007. ‘An object oriented class organization for dynamic geometrically non-linear’. *CMNE (Congress on Numerical Methods in Engineering)/CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)*, .

Fonseca, G. M., 2019. Propagação de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Fonseca, G. M., Barros, F. B., Oliveira, T. S., Monteiro, H. A. S., Novelli, L. e Pitangueira, R. L. S., 2020. ‘2-d crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 118, pp. 70–83.

URL: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.05.019>

Fries, T.-P. e Belytschko, T., 2010. ‘The eXtended/Generalized Finite Element Method: An overview of the method and its applications’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, pp. 253–304.

Gendre, L., Allix, O., Gosselet, P. e Comte, F., 2009. ‘Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity’. *Computational Mechanics*, vol. 44, pp. 233–245.

URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-009-0372-9>

Glowinski, R., He, J., Lozinski, A., Rappaz, J. e Wagner, J., 2005. ‘Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements’. *Numerische Mathematik*, vol. 101(4), pp. 663–687.

Gomes, L. F. e Barros, F. B., 2024. ‘On crack simulation by mixed-dimensional coupling in gfem with global-local enrichments’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 125, pp. e7558.

- Guidault, P. e Belytschko, T., 2007. 'On the l_2 and the h_1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70(3), pp. 322–350.
- Gupta, V., 2014. Improved Conditioning and Accuracy of a two-scale Generalized Finite Element Method for Fracture Mechanics. Tese de Doutorado, University of Illinois, Urbana-Champaign, EUA.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2013. 'A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266, pp. 23–39.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2015. 'Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 289, pp. 355–386.
- Gupta, V., Kim, D. e Duarte, C. A., 2012. 'Analysis and improvements of global-local enrichments for the generalized finite element method'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245-246, pp. 47–62.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.06.021>
- Hughes, T. J. R., Feijóo, G. R., Mazzei, L. e Quincy, J.-B., 1998. 'The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 166(1), pp. 3–24.
- Kamga, J.-B. A. e O., P., 2007. 'Numerical zoom for multiscale problems with an application to nuclear waste disposal'. *Journal of Computational Physics*, vol. 224(1), pp. 403–413.
- Kim, D., Duarte, C. A. e Pereira, J. P., 2008. 'Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global-local enrichment functions'. *Journal of*

Applied Mechanics, vol. 75(8).

URL: <https://doi.org/10.1115/1.2936240>

Kim, D. J., Duarte, C. A. e Sobh, N. A., 2011. ‘Parallel simulations of threedimensional cracks using the generalized finite element method’. *Computational Mechanics*, vol. 47, pp. 265–282.

URL: <https://doi.org/10.1115/1.2936240>

Kim, D. J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A., 2010. ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse generalized fem meshes’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81(3), pp. 335–365.

URL: <https://doi.org/10.1002/nme.2690>

Lancaster, P. e Salkauskas, K., 1981. ‘Surfaces generated by moving least squares methods’. *Mathematics of Computation*, vol. 37, pp. 141–158.

URL: <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1981-0616367-1>

Li, H., Avecillas-Leon, J., Shauer, N. e Duarte, C., 2022. ‘A non-intrusive iterative generalized finite element method for multiscale coupling of 3-d solid and shell models’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 402, pp. 115408.

Li, H. e Duarte, C. A., 2018. ‘A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 337, pp. 28–65.

Li, H., O’Hara, P. e Duarte, C. A., 2021. ‘Non-intrusive coupling of a 3-d generalized finite element method and abaqus for the multiscale analysis of localized defects and structural features’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 193, pp. 103554.

Li, S. e Liu, W. K., 2002. ‘Meshfree and particle methods and their applications’. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55(1), pp. 1–34.

Li, Z. X., Chan, T. H. T., Yu, Y. e Sun, Z. H., 2009. ‘Concurrent multi-scale modeling of civil infrastructures for analyses on structural deterioration - part i: modeling

- methodology and strategy'. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45(11), pp. 782–794.
- Li, Z. X., Zhou, T. Q., Chan, T. H. T. e Yu, Y., 2007. 'Multi-scale numerical analysis on dynamic response and local damage in long-span bridges'. *Engineering Structures*, vol. 29(7), pp. 1507–1524.
- Lloberas-Valls, O., Rixen, D. J., Simone, A. e Sluys, L., (2010), Multiscale analysis of heterogeneous brittle materials using domain decomposition techniques, in 'IV European Conference on Computational Mechanics', Palais des Congres, Paris, France.
- Lloberas-Valls, O., Simone, A. e Sluys, L., 2008, *Multi-scale modeling of softening materials*, International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures (RILEM), p. 345â352.
URL: <http://hdl.handle.net/2117/104608>
- Lozinski, A. e Pironneau, O., 2011. 'Numerical zoom for advection diffusion problems with localized multiscales'. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 27(1), pp. 197–207.
- Malekan, M. e Barros, F. B., 2016. 'Well-conditioning global-local analysis using Stable Generalized/eXtended Finite Element Method for linear elastic fracture mechanics'. *Computational Mechanics*, vol. 58, pp. 819–831.
- Malekan, M., Barros, F. B., Pitangueira, R. L. S., Alves, P. D. e Penna, S. S., 2017. 'A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method'. *Engineering Computations*, vol. 34(3), pp. 988–1019.
- Mata, P., Barbat, A. H. e Oller, S., 2008. 'Two-scale approach for the nonlinear dynamic analysis of rc structures with local non-prismatic parts'. *Engineering Structures*, vol. 30(12), pp. 3667–3680.
- Mazurowski, B., O'Hara, P. e Duarte, C., 2024. 'On-the-fly multiscale analysis of composite materials with a generalized finite element method'. *Finite Elements in Analysis*

and Design, vol. 236, pp. 104166.

URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X2400060X>

McCune, R., 1998. Mixed Dimensional Coupling and Error Estimation in Finite Element Stress Analysis. Tese de Doutorado, The Queens University of Belfast, Belfast, UK.

McCune, R. W., Armstrong, C. G. e Robinson, D. J., 2000. ‘Mixed-dimensional coupling in finite element models’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49(6), pp. 725–750.

Melenk, J. M., 1995. On generalized finite element methods. Tese de Doutorado, University of Maryland, College Park, Maryland, EUA.

Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. ‘The Partition of Unity Finite Element Method: basic theory and applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 289–314.

Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150.

Monteiro, A. B., 2019. Análise não linear de meios parcialmente frágeis via abordagem global-local do Método dos Elementos Finitos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Monteiro, H. A. S., 2021. Uma nova abordagem para análise estática em duas escalas: Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos, estratégia global-local e modelos de degradação elástica no estudo de meios não lineares, parcialmente frágeis e heterogêneos. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S. e Duflot, M., 2008. ‘Meshless methods: A review and computer implementation aspects’. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79(3), pp. 763 â 813.

- Nguyen, V. P., Stroeve, P. e Sluys, L. J., (2009), On a micro-meso two-scale damage model for concrete, *in* E. Oñate e D. Owen, eds, ‘Computational Plasticity X, Fundamentals and Applications’, CIMNE, pp. 1–4.
- Nitsche, J., (1971), Über ein variationsprinzip zur Lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind, *in* ‘Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg’, Vol. 36, pp. 9–15.
- Noor, A. K., 1986. ‘Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, pp. 333–346.
URL: [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(86\)90020-X](https://doi.org/10.1016/0168-874X(86)90020-X)
- Novelli, L., 2019. Uma nova metodologia para a solução de modelos não lineares utilizando estratégia global-local. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Oden, J. T. e Duarte, C. A., 1997. ‘Clouds, cracks and fem’s’. *Recent developments in computational and applied mechanics*, pp. 302–321.
- Oden, J. T., Duarte, C. A. e Zienkiewicz, O. C., 1998. ‘A new cloud-based hp finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 117–126.
- O’Hara, P., Duarte, C. A. e Eason, T., 2009. ‘Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(21–26), pp. 1857–1871.
- O’Hara, P., Duarte, C. e Eason, T., 2016. ‘A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 163, pp. 274–302.
- O’Hara, P., Hollkamp, J., Duarte, C. e Eason, T., 2016. ‘A two-scale generalized finite element method for fatigue crack propagation simulations utilizing a fi

xed, coarse hexahedral mesh'. *Computational Mechanics*, vol. 57, pp. 55–74.

Oliveira, T. S., 2018. Análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos finitos generalizados estável (mefge). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Oliveira, T. S., 2024. Abordagens Estáveis do MEFG/X na Simulação de Trincas Coesivas em Meios Parcialmente Frágeis. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Paiva, G. O. F. D., 2023. Desenvolvimento e aplicação do MEFG/S Global-Local de Alta Ordem com funções flat-top para análise de estruturas em processo de danificação. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

Passieux, J.-C., Rauthor, J., Gravouil, A. e Baietto, M.-C., 2013. 'Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid x-fem solver'. *Computational Mechanics*, vol. 52, pp. 1381–1393.

URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0882-3>

Pereira, J. P., Duarte, C. A., Guoy, D. e Jiao, X., 2009. 'hp-generalized fem and crack surface representation for non-planar 3-d cracks'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77(5), pp. 601–633.

Pereira, J. P., Duarte, C. A., Jiao, X. e Guoy, D., 2009. 'Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3d fracture mechanics problems'. *Computational Mechanics*, vol. 44, pp. 73–92.

Plews, J. A. e Duarte, C. A., 2016. 'A two-scale generalized finite element approach for modeling localized thermoplasticity'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, pp. 1123–1158.

Rank, E., 1992. 'Adaptive remeshing and h-p domain decomposition'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101(1), pp. 299–313.

- Reissner, E., 1947. 'On bending of elastic plates'. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5, pp. 55â68.
- Ruess, M., Schillinger, D., Özcan, A. I. e Rank, E., 2014. 'Weak coupling for isogeometric analysis of non-matching and trimmed multi-patch geometries'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 269, pp. 46–71.
- Sanchez-Rivadeneira, A. G. e Duarte, C. A., 2019. 'A stable generalized/extended FEM with discontinuous interpolants for fracture mechanics'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 345, pp. 876–918.
- Santos, K. F., 2018. Método dos elementos finitos generalizados aplicado a problemas de fratura elástica em 3d. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Santos, K. F. e Barros, F. B., 2020. 'Sgfm: a numerical investigation of the two-scale simulation of 3d elastic fracture'. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 42, pp. 305.
- Sauerland, H. e Fries, T.-P., 2013. 'The stable XFEM for two-phase flows'. *Computers & Fluids*, vol. 87, pp. 41–49. USNCCM Moving Boundaries.
- Sellitto, A., Borrelli, R., Caputo, F., Riccio, A. e Scaramuzzino, F., 2012. 'Application to plate components of a kinematic global local approach for non matching finite element meshes'. *International Journal of Structural Integrity*, vol. 3(3), pp. 260–273.
- Shim, K. W., Monaghan, D. J. e Armstrong, C. G., 2002. 'Mixed dimensional coupling in finite element stress analysis'. *Engineering with Computers*, vol. 18, pp. 241–252.
- Silva, I. A., Machado, R. D., Arndt, M. e Weinhardt, P. O., 2022. 'Assessment of the flat-top stable GFEM for free vibration analysis'. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 117 (C), pp. 271–283.

- Silva, L. L., 2019. Estratégia Multiescala para Descrição Micromórfica do Contínuo a partir do Contínuo Clássico. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Simpson, R., Bordas, S., Trevelyan, J. e Rabczuk, T., 2012. ‘A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 209-212, pp. 87–100.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511002635>
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181(1-3), pp. 43–69.
- Strouboulis, T., Copps, K. e Babuška, I., 2001. ‘The generalized finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190(32), pp. 4081–4193.
- Surana, K. S., 1979. ‘Isoparametric elements for cross-sectional properties and stress analysis of beams’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14(4), pp. 475–497.
- Szabó, B. e Babuška, I., (1988), Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners, in ‘Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium’, ASTM International.
URL: <https://doi.org/10.1520/STP33072S>
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 2000, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 3rd edn, chapter Stress Analysis Results for Common Test Specimen Configuration.
- Wang, F. Y., Xu, Y. L. e Qu, W. L., 2014. ‘Mixed-dimensional finite element coupling for structural multi-scale simulation’. *Engineering Structures*, vol. 92, pp. 12–25.

- Wang, F. Y., Xu, Y. L. e Zhan, S., 2016. ‘Concurrent multi-scale modeling of a transmission tower structure and its experimental verification’. *Advanced Steel Construction*, vol. 13, pp. 258–273.
- Wellmann, C. e Wriggers, P., 2012. ‘A two-scale model of granular materials’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 205:208, pp. 46–58.
- Whitcomb, J., 1991. ‘Iterative global/local finite element analysis’. *Computer & Structures*, vol. 40(4), pp. 1027–1031.
URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(91\)90334-I](https://doi.org/10.1016/0045-7949(91)90334-I)
- Wu, J.-Y. e Li, F.-B., 2015. ‘An improved stable XFEM (is-XFEM) with a novel enrichment function for the computational modeling of cohesive cracks’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 295, pp. 77–107.
- Yamamoto, T., Yamada, T. e Matsui, K., 2019. ‘Numerical procedure to couple shell to solid elements by using nitsche’s method’. *Computational Mechanics*, vol. 63, pp. 69–98.
- Yang, H., Dong, C., Wu, Y. e Dai, R., 2021. ‘Mixed dimensional isogeometric fe-be coupling analysis for solid-shell structures’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 382, pp. 113841.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578252100178X>
- Yau, J. F., Wang, S. S. e Corten, H. T., 1980. ‘A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47(2), pp. 335–341.
URL: <https://doi.org/10.1115/1.3153665>
- Yu, Y., Chan, T. H. T., Sun, Z. H. e Li, Z. X., 2012. ‘Mixed-dimensional consistent coupling by multi-point constraint equations for efficient multi-scale modeling’. *Advances in Structural Engineering*, vol. 15(5), pp. 837–853.

Zaoui, A., 2002. 'Continuum micromechanics: Survey'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128(8), pp. 808–816.

Zhang, Q., Babuška, I. e Banerjee, U., 2016. 'Robustness in stable generalized finite element methods (SGFEM) applied to poisson problems with crack singularities'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 311, pp. 476–502.

Zhang, Q., Banerjee, U. e Babuška, I., 2018. 'Strongly Stable Generalized Finite Element Method (SSGFEM) for a non-smooth interface problem'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 344, pp. 538–568.